

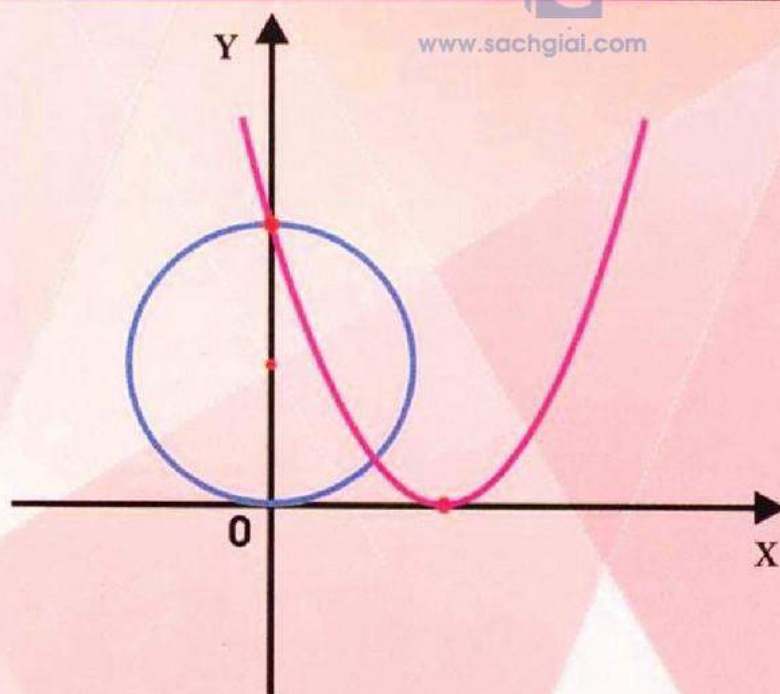
LÊ NHỨT - HUỖNH ĐỊNH TƯỜNG

GIẢI BÀI TẬP

TOÁN

SÁCH GIẢI

www.sachgiai.com



9

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



downloadsachmienphi.com

www.sachgiai.com
Download Sách Hay | Đọc Sách Online

LÊ NHỨT - HUỖNH ĐỊNH TƯỜNG

Giải bài tập

TOÁN 9

Tập hai



**NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

Đơn vị liên kết :
Công ty Sách Hoa Hồng



downloaddsachmienphi.com

www.sachgiai.com

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại : (04) 3972 4852; (04) 3972 4770 - Fax : (04) 3971 4899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập : PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập : Quốc Trung - Đặng Thị Bình

Sửa bài : Đặng Thị Bình

Chế bản : Diệu Tâm

Trình bày bìa : Công ty Sách Hoa Hồng

Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP TOÁN 9 - Tập hai

Mã số : 1L-70 ĐH2009

In 5000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty In Hoa Mai. Số xuất bản:
253-2009/CXB/24-41/ĐHQGHN, ngày 25/03/2009. Quyết định xuất
bản số: 70 LK-TN/XB. In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2009.

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	5
§2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	9
§3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ	17
§4. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ	24
§5. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH	31
ÔN TẬP CHƯƠNG III	39
Câu hỏi trắc nghiệm chương III	47

Chương IV. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Phương trình bậc hai một ẩn

§1. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	49
§2. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	51
§3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN	58
§4. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI	60
§5. CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN	63
§6. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG	68
§7. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI	75
§8. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH	85
ÔN TẬP CHƯƠNG IV	91
Câu hỏi trắc nghiệm chương IV	102

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III. Góc với đường tròn

§1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG	104
§2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY	109
§3. GÓC NỘI TIẾP	113
§4. GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG	117
§5. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN	121
§6. CUNG CHỨA GÓC	125
§7. TỨ GIÁC NỘI TIẾP	130
§8. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP	136
§9. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN	139
§10. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN	144
ÔN TẬP CHƯƠNG III	150
Câu hỏi trắc nghiệm chương III	159

Chương IV. Hình trụ - Hình nón - Hình cầu

§1. HÌNH TRỤ. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ	161
§2. HÌNH NÓN - HÌNH NÓN CỤT. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT	166
§3. HÌNH CẦU. DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU	174
ÔN TẬP CHƯƠNG IV	178
Câu hỏi trắc nghiệm chương IV	185
Bài tập ôn tập cuối năm	195
Các đề thi học kì II và thi tuyển vào lớp 10	212



Lời nói đầu

Theo tinh thần đổi mới phương pháp dạy và học hiện nay, chúng tôi biên soạn quyển sách này theo cấu trúc như sau:

- **Tóm tắt lí thuyết:** Giúp học sinh nắm vững và củng cố kiến thức cơ bản bài học.
- **Hệ thống bài tập:** Giúp học sinh vận dụng và rèn luyện kĩ năng tư duy toán học.
- **Bài tập nâng cao và câu hỏi trắc nghiệm:** Giúp học sinh làm quen với cách vận dụng kiến thức toán đã học để giải quyết tốt các dạng bài tập tự luận hay trắc nghiệm thường gặp trong các kì kiểm tra, thi cử.

Quý phụ huynh có thể tham khảo quyển sách này để giúp đỡ, kiểm tra việc ôn tập ở nhà của con em mình. Quý thầy cô có thể xem đây như là tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III.

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm: Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức có dạng:

$$ax + by = c \quad (1)$$

trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

2. Tập hợp nghiệm của phương trình

- Một nghiệm của phương trình (1) là một cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho:

$$ax_0 + by_0 = c.$$

- Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có vô số nghiệm. Tập hợp nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$, kí hiệu là (d) .

- Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì công thức nghiệm là:
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{c - ax}{b} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{c - by}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng (d) cắt cả hai trục tọa độ.

- Nếu $a = 0; b \neq 0$ thì công thức nghiệm là:
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{c}{b} \end{cases} \text{ và } (d) // Ox \text{ hoặc } (d) \equiv Ox.$$

- Nếu $a \neq 0; b = 0$ thì công thức nghiệm là:
$$\begin{cases} x = \frac{c}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ và } (d) // Oy \text{ hoặc } (d) \equiv Oy.$$

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

- Trong các cặp số $(-2; 1)$, $(0; 2)$, $(-1; 0)$, $(1,5; 3)$ và $(4; -3)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình:
 a) $5x + 4y = 8$?
 b) $3x + 5y = -3$?
- Với mỗi phương trình sau, tìm nghiệm tổng quát của phương trình và vẽ đường thẳng biểu diễn cặp nghiệm của nó:
 a) $3x - y = 2$; b) $x + 5y = 3$; c) $4x - 3y = -1$;
 d) $x + 5y = 0$; e) $4x + 0y = -2$; f) $0x + 2y = 5$.
- Cho hai phương trình $x + 2y = 4$ và $x - y = 1$. Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một hệ tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng và cho biết tọa độ của nó là nghiệm của các phương trình nào.

Giải

- a) Phương trình $5x + 4y = 8$ (1)

- Với cặp số $(x = -2; y = 1)$, ta có: $VT = 5.(-2) + 4.1 = -10 + 4 = -6 \neq 8 = VP$
 Vậy $(-2; 1)$ không phải là nghiệm của phương trình (1).
- Với cặp số $(0; 2)$, ta có: $VT = 5.0 + 4.2 = 8 = VP$
 Vậy $(0; 2)$ là nghiệm của phương trình (1).
- Với cặp số $(-1; 0)$, ta có: $VT = 5.(-1) + 4.0 = -5 \neq 8 = VP$
 Vậy $(-1; 0)$ không phải là nghiệm của phương trình (1).
- Với cặp số $(1,5; 3)$, ta có: $VT = 5.1,5 + 4.3 = 7,5 + 12 = 19,5 \neq 8 = VP$
 Vậy $(1,5; 3)$ không phải là nghiệm của phương trình (1).
- Với cặp số $(4; -3)$, ta có: $VT = 5.4 + 4.(-3) = 20 - 12 = 8 = VP$
 Vậy $(4; -3)$ là nghiệm của phương trình (1).

- Phương trình $3x + 5y = -3$ (2).

- Với cặp số $(-2; 1)$, ta có: $VT = 3.(-2) + 5.1 = -6 + 5 = -1 \neq -3 = VP$
 Vậy $(-2; 1)$ không phải là nghiệm của phương trình (2).
- Với cặp số $(0; 2)$, ta có: $VT = 3.0 + 5.2 = 10 \neq -3 = VP$
 Vậy $(0; 2)$ không phải là nghiệm của phương trình (2).
- Với cặp số $(-1; 0)$, ta có: $VT = 3.(-1) + 5.0 = -3 = VP$
 Vậy $(-1; 0)$ là nghiệm của phương trình (2).
- Với cặp số $(1,5; 3)$, ta có: $VT = 3.1,5 + 5.3 = 4,5 + 15 = 19,5 \neq -3 = VP$
 Vậy $(1,5; 3)$ không phải là nghiệm của phương trình (2).
- Với cặp số $(4; -3)$, ta có: $VT = 3.4 + 5.(-3) = 12 - 15 = -3 = VP$
 Vậy $(4; -3)$ là nghiệm của phương trình (2).

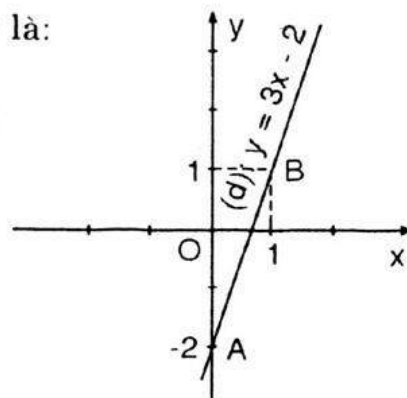
2. a) Nghiệm tổng quát của phương trình $3x - y = 2$ là:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - 2 \end{cases} \text{ hoặc } (x; 3x - 2) \text{ với } x \in \mathbb{R}$$

Đường thẳng biểu diễn tập hợp nghiệm của phương trình $3x - y = 2$ là đồ thị của hàm số $y = 3x - 2$.

Cho $x = 0$, tính được $y = -2$, ta xác định được điểm $A(0; -2)$.

Cho $x = 1$, tính được $y = 1$, ta xác định được điểm $B(1; 1)$. Vẽ đường thẳng AB .



b) Nghiệm tổng quát của phương trình $x + 5y = 3$ là:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{x}{5} + \frac{3}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \left(x; \frac{-x + 3}{5}\right) \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

Đường thẳng biểu diễn tập hợp nghiệm của phương trình $x + 5y = 3$ là đồ thị của hàm số $y = -\frac{x}{5} + \frac{3}{5}$.

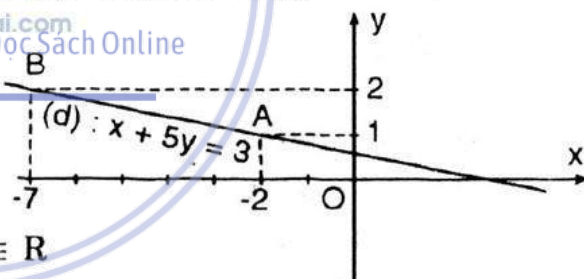
Cho $x = -2$, tính được $y = 1$, ta xác định được điểm $A(-2; 1)$.

Cho $x = -7$, tính được $y = 2$, ta xác định được điểm $B(-7; 2)$.

Vẽ đường thẳng AB .

c) Nghiệm tổng quát của phương trình $4x - 3y = -1$ là:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{4x + 1}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \left(x; \frac{4x + 1}{3}\right) \text{ với } x \in \mathbb{R}$$



Đường thẳng biểu diễn tập hợp nghiệm của phương trình $4x - 3y = -1$ là đồ thị của hàm số $y = \frac{4x + 1}{3}$.

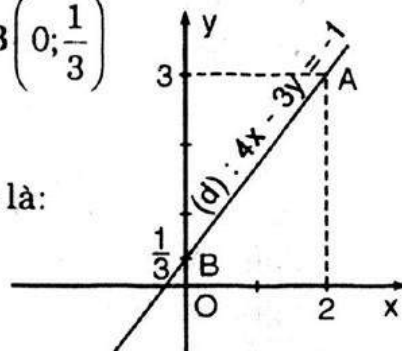
Cho $x = 2$, tính được $y = 3$, ta xác định được điểm $A(2; 3)$.

Cho $x = 0$, tính được $y = \frac{1}{3}$, ta xác định được điểm $B(0; \frac{1}{3})$.

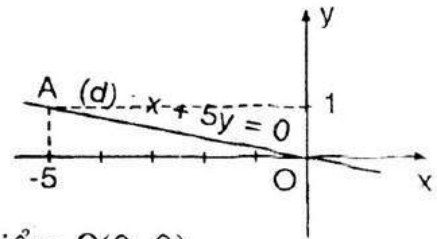
Vẽ đường thẳng AB .

d) Nghiệm tổng quát của phương trình $x + 5y = 0$ là:

$$\begin{cases} x = -5y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ hoặc } (-5y; y) \text{ với } y \in \mathbb{R}$$



Đường thẳng biểu diễn tập hợp nghiệm của phương trình $x + 5y = 0$ là đồ thị của hàm số $x = -5y$ hay $y = -\frac{x}{5}$.



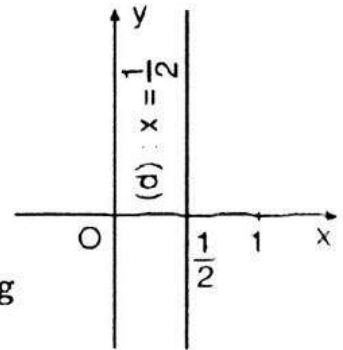
Cho $x = 0$, tính được $y = 0$, ta xác định được điểm $O(0; 0)$.

Cho $x = -5$, tính được $y = 1$, ta xác định được điểm $A(-5; 1)$.

Vẽ đường thẳng OA.

e) Nghiệm tổng quát của phương trình $4x + 0y = 2$ là:

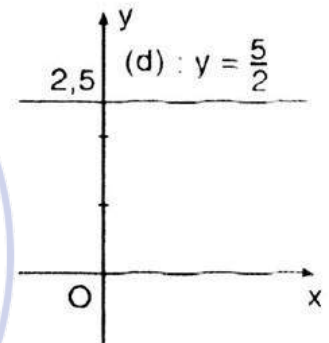
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ hoặc } \left(\frac{1}{2}; y \right) \text{ với } y \in \mathbb{R}.$$



Đường thẳng biểu diễn tập hợp nghiệm của phương trình $4x + 0y = 2$ là đồ thị của hàm số $x = \frac{1}{2}$.

f) Nghiệm tổng quát của phương trình $0x + 2y = 5$ là:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \left(x; \frac{5}{2} \right) \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$



Đường thẳng biểu diễn tập hợp nghiệm của phương trình $0x + 2y = 5$ là đồ thị của hàm số $y = \frac{5}{2}$.

3. * Vẽ đoạn thẳng $x + 2y = 4$.

Cho $x = 0$, tính được $y = 2$, ta xác định được điểm $A(0; 2)$.

Cho $x = -2$, tính được $y = 3$, ta xác định được điểm $B(-2; 3)$.

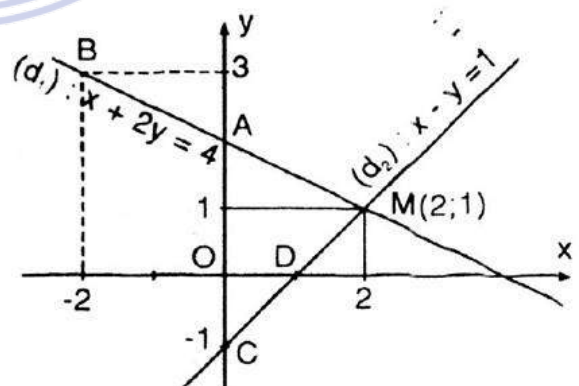
Vẽ đường thẳng AB.

Vẽ đường thẳng $x - y = 1$.

Cho $x = 0$, tính được $y = -1$, ta xác định được điểm $C(0; -1)$.

Cho $x = 1$, tính được $y = 0$, ta xác định được điểm $D(1; 0)$.

Vẽ đường thẳng CD.



* Tọa độ giao điểm hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là $(2; 1)$. Vì hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm M mà $M \in (d_1)$ và $M \in (d_2)$. Vậy điểm $M(2; 1)$ là điểm chung của hai đường thẳng hay điểm $(2; 1)$ là nghiệm chung của hai phương trình đã cho.

§2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm: Cho hai phương trình bậc nhất hai ẩn: $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$. Khi đó, ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- Nếu hai phương trình của hệ có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ gọi là một nghiệm của hệ (I).
- Nếu hai phương trình không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.
Tóm lại: Một hệ phương trình bậc nhất có hai ẩn có thể có: một nghiệm, vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.
- Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm (tập hợp nghiệm) của nó.

2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình:

Gọi (d) là đồ thị của hàm số $ax + by = c$

(d') là đồ thị của hàm số $a'x + b'y = c'$

Một cách tổng quát, ta có:

- Nếu (d) cắt (d'), thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.
- Nếu (d) song song với (d') thì hệ (I) vô nghiệm.
- Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (I) có vô số nghiệm.

Do đó, ta có thể đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (I) bằng cách xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$.

3. Hệ phương trình tương đương:

Định nghĩa: Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Kí hiệu: " $\Leftrightarrow$ "

4. Một cách nhận biết khác về số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất có hai ẩn số:

Cho hệ phương trình: (I) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (đk: $a, b, c, a', b', c' \neq 0$)

- Nếu $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ thì (I) có nghiệm duy nhất.

- Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ thì (I) vô nghiệm.
- Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ thì (I) có vô số nghiệm.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. Bài tập mẫu

Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau. Minh họa bằng đồ thị.

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases};$

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Giải

a) * Xác định số nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 3 \text{ (d)} \\ y = 3x - 1 \text{ (d')} \end{cases}$$

Ta có $a = -2 \neq 3 = a'$. Suy ra (d) cắt (d').

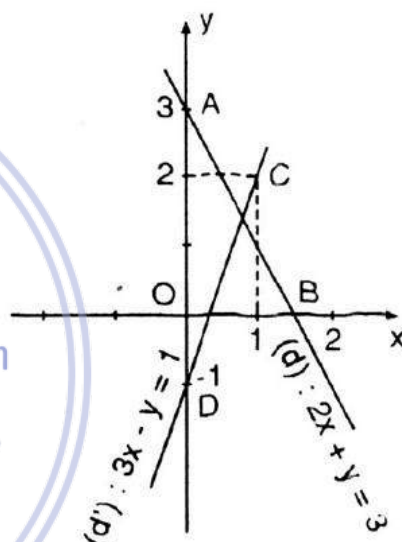
Vậy hệ phương trình có một nghiệm.

* Minh họa bằng đồ thị:

- Đồ thị hàm số $2x + y = 3$ là đường thẳng

đi qua hai điểm $A(0; 3)$ và $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

- Đồ thị hàm số $3x - y = 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm $C(1; 2)$ và $D(0; -1)$.



b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ (d)} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \text{ (d')} \end{cases}$

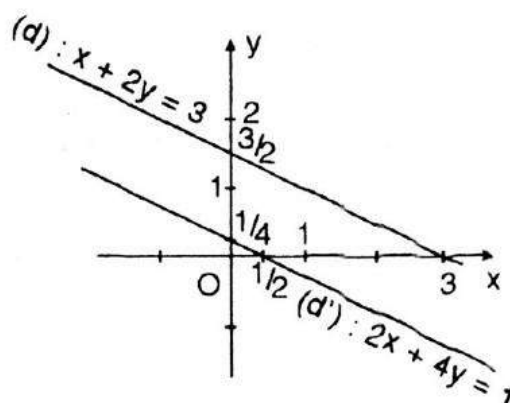
Ta có $a = a' = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{2} \neq \frac{1}{4} = b'$.

Suy ra (d) // (d').

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

* Minh họa bằng đồ thị:

- Đồ thị hàm số $x + 2y = 3$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$ và $B(3; 0)$.

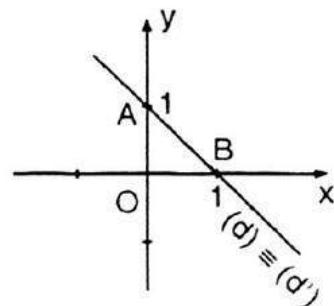


- Đồ thị hàm số $2x + 4y = 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm $C\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và $D\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

$$c) \begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \text{ (d)} \\ y = -x + 1 \text{ (d')} \end{cases}$$

Ta có $a = a' = -1$; $b = b' = 1$. Suy ra $(d) \equiv (d')$.

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.



- * Minh họa bằng đồ thị: Đồ thị hai hàm số $x + y = 1$ và $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$ đều đi qua hai điểm $A(0; 1)$ và $B(1; 0)$.

B. Bài tập giáo khoa căn bản

4. Không cần vẽ hình hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây và giải thích vì sao:

$$a) \begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 3x - 1 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} 2y = -3x \\ 3y = 2x \end{cases}; \quad d) \begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \frac{1}{3}y = 1 \end{cases}$$

5. Đoán nhận số nghiệm của các hệ phương trình sau bằng hình học:

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

6. Đố. Bạn Nga nhận xét: Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn vô nghiệm thì luôn tương đương với nhau.

Bạn Phương khẳng định: Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cùng có vô số nghiệm thì cũng luôn tương đương với nhau.

Theo em, các ý kiến đó đúng hay sai? Vì sao? (có thể cho một ví dụ minh họa bằng đồ thị).

Giải

4. a) Với hệ phương trình: $\begin{cases} y = 3 - 2x \text{ (d)} \\ y = 3x - 1 \text{ (d')} \end{cases}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a = -2 \\ a' = 3 \end{cases} \Rightarrow a \neq a'.$$

Vì hai đường thẳng của hai phương trình đã cho trong hệ phương trình là hai đường thẳng có hệ số góc khác nhau nên chúng cắt nhau tại một điểm duy nhất.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm.

b) Với hệ phương trình
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ (d)} \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ (d')} \end{cases}$$

Ta có: $a = a' = -\frac{1}{2}$ và $b = 3 \neq 1 = b'$.

Vì hai đường thẳng của hai phương trình đã cho trong hệ phương trình là hai đường thẳng khác nhau và có cùng hệ số góc nên chúng song song với nhau. Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

c) Ta có:
$$\begin{cases} 2y = -3x \\ 3y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x & a = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3}x & a' = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a \neq a'.$$

Vì hai đường thẳng của hai phương trình đã cho trong hệ phương trình là hai đường thẳng có hệ số góc khác nhau nên chúng cắt nhau tại một điểm duy nhất.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm.

d) Ta có
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \frac{1}{3}y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 3 \text{ (d)} \\ y = 3x - 3 \text{ (d')} \end{cases}$$

Vì hai đường thẳng của hai phương trình đã cho trong hệ phương trình là trùng nhau. Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

5. a)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \text{ (d)} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ (d')} \end{cases}$$

Ta lần lượt vẽ (d) và (d') trên cùng một hệ tọa độ vuông góc Oxy.

Vẽ (d): $y = 2x - 1$

Cho $x = 0$, tính được $y = -1$, ta xác định được điểm $A(0; -1)$.

Cho $x = 1$, tính được $y = 1$, ta xác định được điểm $B(1; 1)$.

Nối A với B, ta được (d).

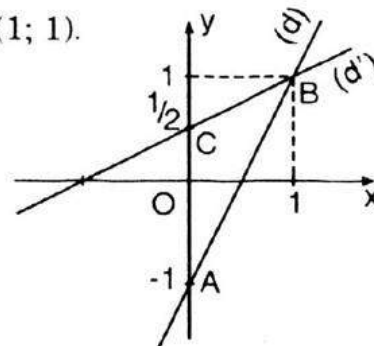
Vẽ (d'): $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Cho $x = 0$, tính được $y = \frac{1}{2}$, ta xác định được điểm $C\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Cho $x = 1$, tính được $y = 1$, ta xác định được điểm $B(1; 1)$.

Nối C với B , ta được (d') .

Nhận xét: Hai đường thẳng (d) và (d') cắt nhau tại một điểm. Vậy hệ phương trình có một nghiệm: $(x; y) = (1; 1)$.



$$b) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 4 & (d) \\ y = x + 1 & (d') \end{cases}$$

Ta lần lượt vẽ (d) và (d') trên cùng một hệ tọa độ vuông góc Oxy.

Vẽ (d) : $y = -2x + 4$.

Cho $x = 0$, tính được $y = 4$, ta xác định được điểm $A(0; 4)$.

Cho $x = 1$, tính được $y = 2$, ta xác định được điểm $B(1; 2)$.

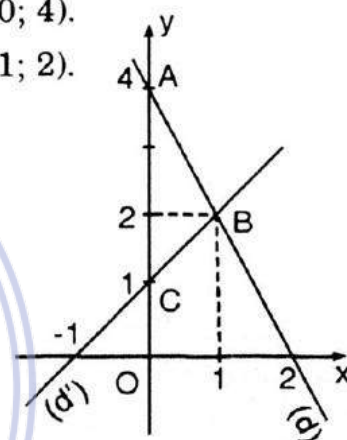
Nối A với B , ta được (d) .

Vẽ (d') : $y = x + 1$.

Cho $x = 0$, tính được $y = 1$, ta xác định được điểm $C(0; 1)$.

Cho $x = 1$, tính được $y = 2$, ta xác định được điểm $B(1; 2)$.

Nối C với B , ta được (d') .



Nhận xét: hai đường thẳng (d) và (d') cắt nhau tại một điểm. Vậy hệ phương trình có một nghiệm $(1; 2)$.

6. a) Ý kiến của bạn Nga là đúng: Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số vô nghiệm thì luôn tương đương với nhau:

Vì theo định nghĩa (hệ phương trình tương đương). Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu mọi nghiệm của hệ này đều là nghiệm của hệ kia và ngược lại. Do đó, hai hệ phương trình cùng vô nghiệm có nghĩa là chúng cùng có tập nghiệm bằng $\emptyset$.

- b) Ý kiến của bạn Phương là không đúng vì hai phương trình bậc nhất hai ẩn cùng có vô số nghiệm, nhưng tập hợp nghiệm của chúng không luôn trùng nhau.

Ví dụ: Cho hai hệ phương trình (I) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x = y \end{cases}$ và (II) $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ y = -x \end{cases}$ đều

có vô số nghiệm số, nhưng tập hợp nghiệm của hệ (II) được biểu diễn bởi đường thẳng $y = -x$.

Hai đường thẳng này là khác nhau nên hai hệ (I) và (II) không tương đương.

Luyện tập

7. Cho hai phương trình $2x + y = 4$ và $3x + 2y = 5$.
- a) Tìm nghiệm tổng quát của mỗi phương trình trên.
- b) Vẽ các đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình trong cùng một hệ tọa độ, rồi xác định nghiệm chung của chúng.

8. Cho các hệ phương trình sau: a) $\begin{cases} x = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2y = 4 \end{cases}$.

Trước hết, hãy đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình trên (giải thích rõ lí do). Sau đó, tìm tập nghiệm của các hệ đã cho bằng cách vẽ hình.

9. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau, giải thích vì sao:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = 0 \end{cases}$

10. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau, giải thích vì sao:

a) $\begin{cases} 4x - 4y = 2 \\ -2x + 2y = -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = \frac{2}{3} \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

11. Nếu tìm thấy hai nghiệm phân biệt của một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (nghĩa là hai nghiệm được biểu diễn bởi hai điểm phân biệt) thì ta có thể nói gì về số nghiệm của hệ phương trình đó? Vì sao?

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Giải

7. a) * Ta có: $2x + y = 4 \Leftrightarrow y = -2x + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y + 2$

Do đó, phương trình có nghiệm tổng quát như sau:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2x + 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- * Tương tự với phương trình $3x + 2y = 5$.

Ta có: $3x + 2y = 5 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}$.

Do đó, phương trình có nghiệm tổng quát như sau:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Vẽ đồ thị các hàm số:

* Hàm số $2x + y = 4$ (d)

Cho $x = 0$, tính được $y = 4$. Ta xác định được điểm $A(0; 4)$.

Cho $y = 0$, tính được $x = 2$. Ta xác định được điểm $B(2; 0)$.

Nối A với B ta được đồ thị hàm số.

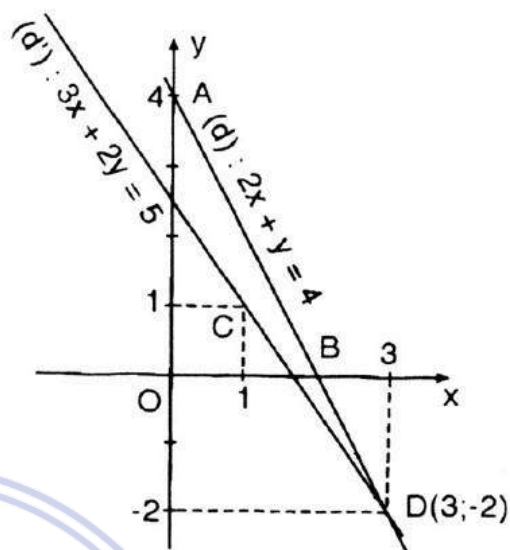
* Hàm số $3x + 2y = 5$

Cho $x = 1$, tính được $y = 1$. Ta xác định được điểm $C(1; 1)$.

Cho $x = 3$, tính được $y = -2$. Ta xác định được điểm $D(3; -2)$.

Nối C với D ta được đồ thị hàm số.

* Vẽ đồ thị: Ta có (d) cắt (d') tại điểm D có tọa độ $(3; -2)$. Vậy nghiệm chung của hệ phương trình là: $(x = 3; y = -2)$.



8. * Mỗi hệ phương trình có một nghiệm duy nhất vì trong mỗi hệ, một trong hai đồ thị là đường thẳng song song với trục tọa độ, còn đồ thị kia là đường thẳng không song song với một trục tọa độ nào cả.

* Kiểm tra bằng hình vẽ:

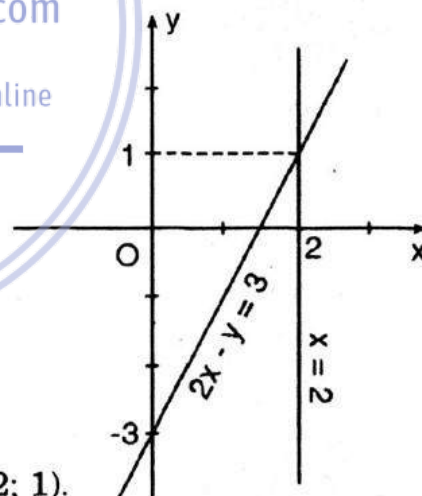
a) Đối với hệ phương trình: $\begin{cases} x = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

– Đồ thị hàm số $x = 2$ là đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $(2; 0)$.

– Đồ thị hàm số $2x - y = 3$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(0; -3)$ và $(2; 1)$.

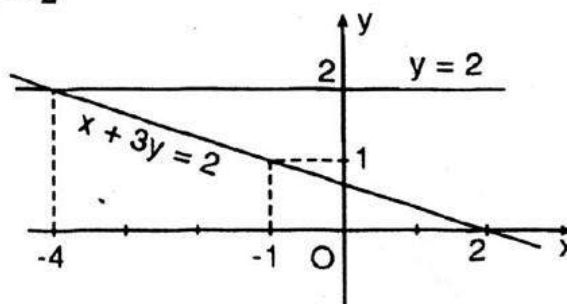
Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm có tọa độ $(2; 1)$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm $(x = 2; y = 1)$.



b) Hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

– Đồ thị hàm số $y = 2$ là một đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$.



- Đồ thị hàm số $x + 3y = 2$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(-1; 1)$ và $(2; 0)$.

Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm có tọa độ $(-4; 2)$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm $(x = -4; y = 2)$.

9. * Hai hệ phương trình trên đều vô nghiệm vì hai đường thẳng biểu diễn các tập hợp nghiệm của hai phương trình trong hệ là song song với nhau.

* Chứng minh:

a) Hệ $\begin{cases} x + y = 2 \text{ (d)} \\ 3x + 3y = 2 \text{ (d')} \end{cases}$ có $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{2}$. Vậy $(d) // (d')$.

b) Hệ $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \text{ (d}_1\text{)} \\ -6x + 4y = 0 \text{ (d}_2\text{)} \end{cases}$ có $\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} \left(= -\frac{1}{2} \right)$. Vậy $(d_1) // (d_2)$.

10. Hai hệ phương trình trên đều có vô số nghiệm số, vì hai đường thẳng biểu diễn các tập hợp nghiệm của hai phương trình trong mỗi hệ là trùng nhau.

* Chứng minh:

a) $\begin{cases} 4x - 4y = 2 \text{ (d)} \\ -2x + 2y = -1 \text{ (d')} \end{cases}$ có $\frac{4}{-2} = \frac{-4}{2} = \frac{2}{-1} (= -2)$. Vậy (d) trùng với (d') .

b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = \frac{2}{3} \text{ (d}_1\text{)} \\ x - 3y = 2 \text{ (d}_2\text{)} \end{cases}$ có $\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{2}{3}}{-3} = \frac{2}{-3} (= -\frac{2}{3})$. Vậy (d_1) trùng với (d_2) .

11. Nếu tìm thấy hai nghiệm phân biệt của một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn thì ta kết luận rằng hệ hai phương trình có vô số nghiệm số. Vì hệ có hai nghiệm phân biệt có nghĩa là hai đường thẳng biểu diễn tập hợp nghiệm của chúng đều có hai điểm chung phân biệt. Suy ra hai đường thẳng đó trùng nhau.

§3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương pháp chung:

Bước 1: Biến đổi hệ phương trình đã cho (từ một phương trình ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai) để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa có, thế vào phương trình còn lại, rồi suy ra nghiệm của hệ.

2. Chú ý: Nếu trong quá trình giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, ta thấy xuất hiện phương trình có các hệ số của hai ẩn đều bằng 0 thì hệ phương trình đã cho có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

12. a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 4x + y = 2 \end{cases};$

c) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$

13. a) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ 5x - 8y = 3 \end{cases}$

14. a) $\begin{cases} x + y\sqrt{5} = 0 \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \end{cases};$

b) $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x - 3y = 2 + 5\sqrt{3} \\ 4x + y = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$

Giải

12. a) $\begin{cases} x - y = 3 \quad (1) \\ 3x - 4y = 2 \quad (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow y = x - 3 \quad (3)$

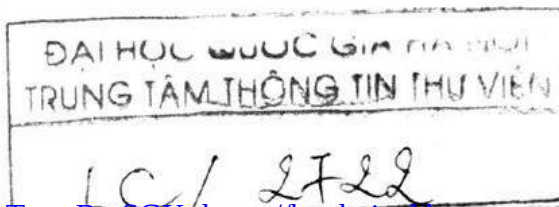
Thế (3) vào (2), ta được:

$$3x - 4(x - 3) = 2 \Leftrightarrow 3x - 4x + 12 = 2 \Leftrightarrow -x = -10 \Leftrightarrow x = 10$$

Thế $x = 10$ vào (3), ta được: $y = 10 - 3 = 7$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (10; 7).

b) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \quad (1) \\ 4x + y = 2 \quad (2) \end{cases}$



Từ (2) suy ra $y = 2 - 4x$ (3).

Thay (3) vào (1):

$$7x - 3(2 - 4x) = 5 \Leftrightarrow 7x - 6 + 12x = 5 \Leftrightarrow 19x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{19}.$$

Thế $x = \frac{11}{19}$ vào (3), ta được: $y = 2 - 4 \cdot \frac{11}{19} = 2 - \frac{44}{19} = -\frac{6}{19}.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(\frac{11}{19}; -\frac{6}{19}\right).$

c)
$$\begin{cases} x + 3y = -2 & (1) \\ 5x - 4y = 11 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = -3y - 2$ (3).

Thế (3) vào (2), ta được:

$$5(-3y - 2) - 4y = 11 \Leftrightarrow -15y - 10 - 4y = 11 \Leftrightarrow -19y = 21 \Leftrightarrow y = -\frac{21}{19}.$$

Thay $y = -\frac{21}{19}$ vào (3), ta có: $x = -3\left(-\frac{21}{19}\right) - 2 = \frac{63}{19} - 2 = \frac{25}{19}.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(\frac{25}{19}; -\frac{21}{19}\right).$

13. a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 & (1) \\ 4x - 5y = 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $2y = 3x - 11 \Leftrightarrow y = \frac{3x - 11}{2}$ (3)

Thế (3) vào (2), ta được: $4x - 5 \cdot \left(\frac{3x - 11}{2}\right) = 3$

$$\Leftrightarrow 8x - 15x + 55 = 6 \text{ (Quy đồng mẫu thức hai vế)}$$

$$\Leftrightarrow -7x = -49 \Leftrightarrow x = 7.$$

Thế $x = 7$ vào (3), ta được: $y = \frac{3 \cdot 7 - 11}{2} = \frac{21 - 11}{2} = 5.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (7; 5).

b)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 & (1) \\ 5x - 8y = 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{2y}{3} + 2$ (3)

Thế (3) vào (2), ta được: $5\left(\frac{2y}{3} + 2\right) - 8y = 3 \Leftrightarrow \frac{10y}{3} + 10 - 8y = 3$

$$\Leftrightarrow 10y + 30 - 24y = 9 \text{ (Quy đồng mẫu số ở hai vế)}$$

$$\Leftrightarrow -14y = -21 \Leftrightarrow y = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

Thế $y = \frac{3}{2}$ vào (3), ta được: $x = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{3} + 2 = 3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(3; \frac{3}{2})$.

14. a)
$$\begin{cases} x + y\sqrt{5} = 0 & (1) \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = -y\sqrt{5}$ (3)

Thế (3) vào (2), ta được:

$$-y\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \Leftrightarrow -2y = 1 - \sqrt{5} \Leftrightarrow y = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Thế $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ vào (3), ta được:

$$x = \left(-\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \cdot \sqrt{5} = -\frac{5 - \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 5}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(\frac{\sqrt{5} - 5}{2}; \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

b)
$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x - 3y = 2 + 5\sqrt{3} & (1) \\ 4x + y = 4 - 2\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $y = -4x + 4 - 2\sqrt{3}$ (3)

Thay (3) vào (1), ta được:

$$(2 - \sqrt{3})x - 3(-4x + 4 - 2\sqrt{3}) = 2 + 5\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})x + 12x - 12 + 6\sqrt{3} = 2 + 5\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3} + 12)x = 2 + 5\sqrt{3} + 12 - 6\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (14 - \sqrt{3})x = 14 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$$

Thế $x = 1$ vào (3), ta được: $y = -4.1 + 4 - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1; -2\sqrt{3})$.

Luyện tập

15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ (a^2 + 1)x + 6y = 2a \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $a = -1$;

b) $a = 0$;

c) $a = 1$.

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế (các bài 16 và bài 17):

16. a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$

17. a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x + y\sqrt{3} = \sqrt{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ x\sqrt{2} + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$; c) $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}$

18. a) Xác định các hệ số a và b , biết rằng hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$ có nghiệm là $(1; -2)$.

b) Cũng hỏi như vậy nếu hệ phương trình có nghiệm là: $(\sqrt{2} - 1; \sqrt{2})$?

19. Biết rằng: Đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x - a$ khi và chỉ khi $P(a) = 0$. Hãy tìm các giá trị của m và n sao cho đa thức sau đồng thời chia hết cho $x + 1$ và $x - 3$:

$$P(x) = mx^3 + (m - 2)x^2 - (3n - 5)x - 4n.$$

Giải

15. a) Thế $a = -1$ vào hệ phương trình, rồi giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + 3y = 1 \\ [(-1)^2 + 1]x + 6y = 2(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \quad (1) \\ 2x + 6y = -2 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = 1 - 3y$ (3)

Thế (3) vào (2), ta được:

$$2(1 - 3y) + 6y = -2 \Leftrightarrow 2 - 6y + 6y = -2$$

$$\Leftrightarrow 0y = -4. \text{ Phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

- b) Thế $a = 0$ vào hệ phương trình, rồi giải:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + 3y = 1 \\ (0 + 1)x + 6y = 2.0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \quad (1) \\ x + 6y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $x = -6y$ (3)

Thay (3) vào (1), ta được: $-6y + 3y = 1 \Leftrightarrow -3y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}$.

Thay $y = -\frac{1}{3}$ vào (3), ta được: $x = -6\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x = 2; y = -\frac{1}{3})$.

c) Thay $a = 1$ vào hệ phương trình, rồi giải:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + 3y = 1 \\ (1^2 + 1)x + 6y = 2.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 & (1) \\ 2x + 6y = 2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = 1 - 3y$ (3)

Thay (3) vào (2), ta được: $2(1 - 3y) + 6y = 2 \Leftrightarrow 2 - 6y + 6y = 2 \Leftrightarrow 0y = 0$

Phương trình có vô số nghiệm số.

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm được tính theo công thức: $\begin{cases} x = 1 - 3y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

16. a) $\begin{cases} 3x - y = 5 & (1) \\ 5x + 2y = 23 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $y = 3x - 5$ (3)

Thế (3) vào (2), ta được:

$$5x + 2(3x - 5) = 23 \Leftrightarrow 5x + 6x - 10 = 23 \Leftrightarrow 11x = 33 \Leftrightarrow x = 3.$$

Thế $x = 3$ vào (3) ta được: $y = 3.3 - 5 = 4$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(3; 4)$.

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 & (1) \\ 2x - y = -8 & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra $y = 2x + 8$ (3)

Thế (3) vào (1), ta được:

$$3x + 5(2x + 8) = 1 \Leftrightarrow 3x + 10x + 40 = 1 \Leftrightarrow 13x = -39 \Leftrightarrow x = -3$$

Thế $x = -3$ vào (3) ta được: $y = 2(-3) + 8 = 2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(-3; 2)$.

c) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} & (1) \\ x + y - 10 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $x = \frac{2}{3}y$ (3)

Thế (3) vào (2), ta được:

$$\frac{2}{3}y + y - 10 = 0 \Leftrightarrow 2y + 3y = 30 \Leftrightarrow 5y = 30 \Leftrightarrow y = 6.$$

Thế $y = 6$ vào (3) ta được: $x = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (4; 6).

17. a)
$$\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 & (1) \\ x + y\sqrt{3} = \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $x = -y\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (3)

Thế (3) vào (1), ta được:

$$(-y\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow -y\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 - y\sqrt{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)y = -1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}}$$

Thế $y = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}}$ vào (3) ta được: $x = -\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$$x = -\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 1.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(1; \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}}\right).$

b)
$$\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} & (1) \\ x\sqrt{2} + y = 1 - \sqrt{10} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = 2\sqrt{2}y + \sqrt{5}$ (3)

Thế (3) vào (2), ta được:

$$(2\sqrt{2}y + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{2} + y = 1 - \sqrt{10} \Leftrightarrow 4y + \sqrt{10} + y = 1 - \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow 5y = 1 - \sqrt{10} - \sqrt{10} \Leftrightarrow 5y = 1 - 2\sqrt{10} \Leftrightarrow y = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}$$

Thế y vừa tìm được vào (3) ta có: $x = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}\right) + \sqrt{5}$

$$x = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(\frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5}; \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}\right).$

$$c) \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} & (1) \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $y = (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$ (3)

Thế (3) vào (2), ta được:

$$\begin{aligned} & x + (\sqrt{2} + 1)[(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}] = 1 \\ \Leftrightarrow & x + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 1 \\ \Leftrightarrow & x + x - 2 - \sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow 2x = 3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Thay $x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ vào (3), ta được: $y = (\sqrt{2} - 1) \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(\frac{3 + \sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

18. a) Vì hệ phương trình có nghiệm $(1; -2)$ nên thay $x = 1; y = -2$ vào hệ, ta được:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2 \cdot 1 + b(-2) = -4 \\ 1 \cdot b - a(-2) = -5 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2b = -4 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b = -6 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 2a + 3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy khi hệ phương trình có nghiệm: $(1; -2)$ thì $a = -4; b = 3$.

- b) Vì $x = \sqrt{2} - 1; y = \sqrt{2}$ là nghiệm của hệ phương trình, nên khi thay x, y vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} 2(\sqrt{2} - 1) + b\sqrt{2} = -4 & (1) \\ (\sqrt{2} - 1)b - a\sqrt{2} = -5 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $2\sqrt{2} - 2 + b\sqrt{2} = -4 \Leftrightarrow b = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -(2 + \sqrt{2})$.

Thế $b = -(2 + \sqrt{2})$ vào (2) ta được:

$$(-\sqrt{2} + 1)(2 + \sqrt{2}) - a\sqrt{2} = -5 \Leftrightarrow -\sqrt{2} - a\sqrt{2} = -5 \Leftrightarrow a = \frac{-2 + 5\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $a = \frac{-2 + 5\sqrt{2}}{2}; b = -(2 + \sqrt{2})$.

19. Áp dụng điều kiện đã cho ở đề bài, ta có:

– $P(x)$ chia hết cho $x + 1 = x - (-1)$

$$\Leftrightarrow P(-1) = -m + (m - 2) + (3n - 5) - 4n = 0 \Leftrightarrow -7 - n = 0 \quad (1)$$

– $P(x)$ chia hết cho $x - 3$

$$\Leftrightarrow P(3) = 27m + 9(m - 2) - 3(3n - 5) - 4n = 0 \Leftrightarrow 36m - 13n = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình ẩn là m và n :

$$\begin{cases} -7 - n = 0 \\ 36m - 13n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -7 \\ m = -\frac{22}{9} \end{cases}$$

Vậy $n = -7$ và $m = -\frac{22}{9}$.

§4. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp chung:

- Bước 1: Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của nó bằng hoặc đối nhau.
- Bước 2: Áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn)
- Bước 3: Giải phương trình một ẩn vừa thu được, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

20. a) $\begin{cases} 3x + y = 3; \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 8; \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 3y = 6; \\ 2x + y = 4; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -2; \\ 3x - 2y = -3; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0,3x + 0,5y = 3 \\ 1,5x - 2y = 1,5 \end{cases}$

21. a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases};$ b) $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$

Giải

20. a) (I) $\begin{cases} 3x + y = 3 \quad (1) \\ 2x - y = 7 \quad (2) \end{cases}$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy (2; -3) là nghiệm của hệ phương trình.

b) (II) $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \quad (1) \\ 2x - 3y = 0 \quad (2) \end{cases}$

Trừ (1) cho (2) vế theo vế, ta được:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 8 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2x - 3 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $(\frac{3}{2}; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

c) (III) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \quad (1) \\ 2x + y = 4 \quad (2) \end{cases}$

Nhân phương trình (2) với -3, ta được: (III) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 6 \quad (1) \\ -6x - 3y = -12 \quad (3) \end{cases}$

Cộng (1) và (3) vế theo vế, ta được:

$$\begin{cases} -2x = -6 \quad (4) \\ 4x + 3y = 6 \quad (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 4 \cdot 3 + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy (3; -2) là nghiệm của hệ phương trình.

d) (IV) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \quad (1) \\ 3x - 2y = -3 \quad (2) \end{cases}$

Nhân phương trình (1) với -3 và phương trình (2) với 2, ta được hệ

tương đương: (IV) $\Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 9y = 6 \quad (3) \\ 6x - 4y = -6 \quad (4) \end{cases}$

Cộng vế theo vế, ta được hệ tương đương: $\begin{cases} -13y = 0 \quad (5) \\ 2x + 3y = -2 \quad (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Vậy (-1; 0) là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{aligned} \text{e) (V)} &\Leftrightarrow \begin{cases} (-5) \begin{cases} 0,3x + 0,5y = 3 & (1) \\ 1,5x - 2y = 1,5 & (2) \end{cases} \\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5x - 2,5y = -15 & (1') \\ 1,5x - 2y = 1,5 & (2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4,5y = -13,5 & (3) \\ 0,3x + 0,5y = 3 & (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 0,3x + 0,5 \cdot 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy (5; 3) là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{aligned} \text{21. a)} & \begin{cases} (-\sqrt{2}) \begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 & (1) \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 & (2) \end{cases} \\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3\sqrt{2}y = -\sqrt{2} \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{2}y = -(2 + \sqrt{2}) & (3) \\ x\sqrt{2} - 3y = 1 & (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-(2 + \sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ x = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}; -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b)} & \begin{cases} (\sqrt{2}) \begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} & (1) \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 & (2) \end{cases} \\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x\sqrt{6} + y\sqrt{2} = 4 & (1') \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 & (2) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 6x\sqrt{6} = 6 \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Luyện tập

22. Giải các hệ phương trình sau đây bằng phương pháp cộng đại số:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} -5x + 2y = 4 \\ 6x - 3y = -7 \end{cases}; & \text{b)} & \begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}; & \text{c)} & \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - \frac{2}{3}y = 3\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

23. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3 \end{cases}$

24. Giải các hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5 \end{cases}; & \text{b)} & \begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + y) = -2 \\ 3(x - 2) - 2(1 + y) = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

25. Ta biết rằng: Một đa thức bằng đa thức 0 khi và chỉ khi tất cả các hệ số của nó bằng 0. Hãy tìm các giá trị của m và n để đa thức sau (với biến số x) bằng đa thức 0:

$$P(x) = (3m - 5n + 1)x + (4m - n - 10).$$

26. Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) A(2; -2) và B(-1; 3);

b) A(-4; -2) và B(2; 1);

c) A(3; -1) và B(-3; 2);

d) A($\sqrt{3}$; 2) và B(0; 2).

27. Bằng cách đặt ẩn phụ (theo hướng dẫn), đưa các hệ phương trình sau về dạng hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn rồi giải:

a)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Đặt $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$;

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Đặt $u = \frac{1}{x-2}$, $v = \frac{1}{y-1}$.

22. a)
$$\begin{cases} (3) \begin{cases} -5x + 2y = 4 & (1) \\ 6x - 3y = -7 & (2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -15x + 6y = 12 \\ 12x - 6y = -14 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -2 \\ -5x + 2y = 4 & (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ -5 \cdot \frac{2}{3} + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(x = \frac{2}{3}; y = \frac{11}{3} \right)$.

b)
$$\begin{cases} (2) \begin{cases} 2x - 3y = 11 & (1) \\ -4x + 6y = 5 & (2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 22 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 22 \\ 0x + 0y = 27 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 27 \end{cases}$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

c)
$$\begin{cases} \begin{cases} 3x - 2y = 10 & (1) \\ (-3) \begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 3\frac{1}{3} & (2) \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ -3x + 2y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Phương trình này có vô số nghiệm. Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm thỏa $3x - 2y = 10$.

$$23. \begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5 & (1) \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3 & (2) \end{cases}$$

Trừ (1) cho (2) vế theo vế, ta có:

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{2})y - (1 + \sqrt{2})y &= 2 \Leftrightarrow [1 - \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})]y = 2 \\ \Leftrightarrow (1 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2})y &= 2 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}y = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Thay $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 5 \Leftrightarrow (1 + \sqrt{2})x + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \\ \Leftrightarrow (1 + \sqrt{2})x &= 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8 + \sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8 + \sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{(8 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}{2(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{-6 + 7\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(\frac{-6 + 7\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$24. a) \begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3x - 3y = 4 \\ x + y + 2x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 4 & (1) \\ 3x - y = 5 & (2) \end{cases}$$

Trừ (1) cho (2) vế theo vế, ta được: $2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Thế $x = -\frac{1}{2}$ vào (2) ta được: $3(-\frac{1}{2}) - y = 5 \Leftrightarrow y = -\frac{13}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{13}{2})$.

$$b) \begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + y) = -2 \\ 3(x - 2) - 2(1 + y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 + 3 + 3y = -2 & (1) \\ 3x - 6 - 2 - 2y = -3 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -2 & (1') \\ 9x - 6y = 15 & (2') \end{cases}$$

Cộng (1') và (2') vế theo vế, ta có: $13x = 13 \Leftrightarrow x = 1$.

Thế $x = 1$ vào (1), ta được: $2 + 3y = -1 \Leftrightarrow y = -1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1; -1)$.

25. Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 5n + 1 = 0 \\ 4m - n - 10 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 5n = -1 & (1) \\ (-5) \begin{cases} 4m - n = 10 & (2) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 5n = -1 & (1') \\ -20m + 5n = -50 & (2') \end{cases} \end{aligned}$$

Cộng (1') và (2') vế theo vế, ta được: $-17m = -51 \Leftrightarrow m = 3$.

Thay $m = 3$ vào (2), ta được: $4.3 - n = 10 \Leftrightarrow n = 2$.

Vậy $P(x) = 0$ khi $n = 2$ và $m = 3$.

26. a) Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(2; -2)$ và $B(-1; 3)$ khi tọa độ điểm A và B nghiệm đúng phương trình trên, nghĩa là:
$$\begin{cases} -2 = 2a + b & (1) \\ 3 = -a + b & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế, ta được: $3a = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3}$.

Thay $a = -\frac{5}{3}$ vào (1), ta được: $-2 = 2(-\frac{5}{3}) + b \Leftrightarrow b = \frac{4}{3}$.

- b) Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(-4; -2)$ và $B(2; 1)$ khi tọa độ điểm A và B nghiệm đúng phương trình trên, nghĩa là:
$$\begin{cases} -2 = -4a + b & (1) \\ 1 = 2a + b & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế, ta được: $-3 = -6a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Thay $a = \frac{1}{2}$ vào (2), ta được: $1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = 0$.

- c) Lí luận tương tự như câu a) hoặc b), ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} -1 = 3a + b \\ 2 = -3a + b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}$

- d) Tương tự, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2 = a\sqrt{3} + b \\ 2 = b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $a = 0; b = 2$.

27. a) Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$. (I)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 & (1) \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5 & (2) \end{cases}$$

Thay vào phương trình (1) và (2) của hệ, ta được hệ số mới với ẩn u và v. Ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 & (3) \\ 3u + 4v = 5 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u - 4v = 4 & (5) \\ 3u + 4v = 5 & (6) \end{cases}$$

Cộng (5) và (6) vế theo vế, ta được $7u = 9 \Leftrightarrow u = \frac{9}{7}$.

Mà $u = \frac{1}{x}$ nên $x = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{9}{7}} = \frac{7}{9}$.

Thay $u = \frac{9}{7}$ vào (3), ta được:

$$\frac{9}{7} - v = 1 \Leftrightarrow v = \frac{9}{7} - 1 = \frac{2}{7} \text{ mà } v = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{v} = \frac{7}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(\frac{7}{9}; \frac{7}{2})$.

b) (II)
$$\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 2 & (1) \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 & (2) \end{cases} \quad \text{Đặt } u = \frac{1}{x-2}, v = \frac{1}{y-1}.$$

Thay vào phương trình (1) và (2) của hệ, ta được hệ mới với ẩn là u và v là:

$$(3) \begin{cases} u + v = 2 & (3) \\ 2u - 3v = 1 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u + 3v = 6 & (5) \\ 2u - 3v = 1 & (6) \end{cases}$$

Cộng (5) và (6) vế theo vế, ta được: $5u = 7 \Leftrightarrow u = \frac{7}{5}$.

Mà $u = \frac{1}{x-2}$ nên $x = \frac{19}{7}$.

Thay $u = \frac{7}{5}$ vào (3), ta được: $\frac{7}{5} + v = 2 \Leftrightarrow v = 2 - \frac{7}{5} = \frac{3}{5}$.

Mà $v = \frac{1}{y-1}$ nên $y = \frac{8}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(\frac{19}{7}; \frac{8}{3})$.

§5. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các bước giải toán bằng cách lập hệ phương trình:

- Bước 1: Lập hệ phương trình.
 - Cho hai ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn.
 - Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
 - Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- Bước 2: Giải hệ phương trình.
- Bước 3: Kết luận nghiệm của hệ phương trình (có đối chiếu với các điều kiện đặt ra cho các ẩn).

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. Bài tập mẫu

Tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số ở hàng chục của một số có hai chữ số là 10. Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị. Tìm số có hai chữ số đó.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online
Giải

Gọi số có hai chữ số là $\overline{ab} = 10a + b$.

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$.

Theo đề bài ta có: $2a + b = 10$.

Khi đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau, ta được số mới là $\overline{ba} = 10b + a$.

Theo đề bài ta có: $10a + b - (10b + a) = 18 \Leftrightarrow 9a - 9b = 18 \Leftrightarrow a - b = 2$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2a + b = 10 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $a = 4$; $b = 2$.

Số $a = 4$ và $b = 2$ là các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện của đề bài. Vậy số phải tìm là 42.

B. Bài tập giáo khoa căn bản

28. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 1006 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 2 và số dư là 124.

29. Giải bài toán cổ sau:

Quýt, cam mười bảy quả tươi
 Dem chia cho một trăm người cùng vui.
 Chia ba mỗi quả quýt rồi
 Còn cam mỗi quả chia mười vừa xinh.
 Trăm người, trăm miếng ngọt lành.
 Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao?

30. Một ô tô đi từ A và dự định đến B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì sẽ đến B sớm 1 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm xuất phát của ô tô tại A.
31. Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm 36cm^2 , và nếu một cạnh giảm đi 2cm, cạnh kia giảm đi 4cm thì diện tích của tam giác giảm đi 26cm^2 .
32. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ 2 thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu mới đầy bể?
33. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Giải

28. Gọi hai số tự nhiên cần tìm là x và y . Giả sử $x > y$. Điều kiện: $124 < y$.

Theo đề bài ta có:

- Tổng của hai số bằng 1006 nghĩa là: $x + y = 1006$
- Lấy số lớn chia số nhỏ được thương là 2 và dư là 124 nghĩa là:

$$x = 2y + 124 \text{ hay } x - 2y = 124$$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 1006 \\ x - 2y = 124 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = 712$ và $y = 294$

Hai số x và y vừa tìm được thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy hai số tự nhiên cần tìm là 712 và 294.

29. Gọi x (quả) là số quả quýt và y (quả) là số quả cam.

Điều kiện: $0 < x, y < 17$ và $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Theo đề bài ta có: $x + y = 17$

Chia ba mỗi quả quýt và chia mười mỗi quả cam được 100 miếng, nghĩa là: $3x + 10y = 100$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 3x + 10y = 100. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 10; y = 7$.

Hai số x và y tìm được thỏa mãn điều kiện của bài toán. Vậy có 10 quả quýt và 7 quả cam.

30. Gọi x (km) là độ dài quãng đường AB và y (giờ) là thời gian dự định đi để đến B đúng lúc 12 giờ trưa.

Điều kiện của ẩn là: $x > 0$ và $y > 0$.

Theo đề bài ta có:

Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ, nghĩa là:

$$x = 35(y + 2)$$

Còn nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì sẽ đến B sớm hơn 1 giờ, nghĩa là:

$$x = 50(y - 1)$$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 35(y + 2) \\ x = 50(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 35y = 70 \\ x - 50y = -50 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 350$ và $y = 8$

Ô tô xuất phát lúc $12 - 8 = 4$ (giờ)

Vậy quãng đường AB dài 350km và ô tô xuất phát từ A lúc 4 giờ sáng.

31. Gọi hai cạnh góc vuông của tam giác vuông là x (cm) và y (cm).

Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Diện tích của tam giác vuông là $\frac{1}{2}xy$.

Khi tăng mỗi cạnh lên 3cm thì diện tích tăng lên 36cm^2 , nghĩa là:

$$\frac{1}{2}(x + 3)(y + 3) = \frac{1}{2}xy + 36 \text{ hay } 3x + 3y = 63 \quad (1)$$

Khi một cạnh giảm đi 2cm, cạnh kia giảm đi 4cm thì diện tích giảm đi 26cm^2 , nghĩa là:

$$\frac{1}{2}(x - 2)(y - 4) = \frac{1}{2}xy - 26 \Leftrightarrow 4x + 2y = 60 \quad (2)$$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 3y = 63 & (1) \\ 4x + 2y = 60 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = 9$; $y = 12$.

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông là 9cm và 12cm.

32. Gọi x (giờ) là thời gian để vòi thứ nhất chảy đầy bể ($x > \frac{24}{5}$); y (giờ) là thời gian để vòi thứ hai chảy đầy bể ($y > \frac{24}{5}$).

Theo đề bài, ta có:

Sau 1 giờ cả hai vòi chảy được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4\frac{4}{5}} = \frac{5}{24}$.

Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể, nghĩa là: $\frac{9}{x} + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{9}{x} + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 12$; $y = 8$ (nhận).

Vậy nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì chỉ sau 8 giờ vòi chảy đầy bể.

33. Giả sử nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong x (giờ), người thứ hai hoàn thành công việc trong y (giờ).

Điều kiện $x > 16$ và $y > 16$. Ta có $25\% = \frac{1}{4}$.

Theo đề bài ta có:

Trong 1 giờ người thứ nhất hoàn thành $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai hoàn thành $\frac{1}{y}$ công việc và hai người hoàn thành $\frac{1}{16}$ công việc, nghĩa là:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$$

Khi người thứ nhất làm trong 3 giờ thì được $\frac{3}{x}$ công việc và người thứ

hai làm trong 6 giờ thì hoàn thành được $\frac{6}{y}$ công việc và cả hai người

hoàn thành $25\% = \frac{1}{4}$ công việc, nghĩa là: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} & (1) \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$ và $v = \frac{1}{y}$. Thế vào (1) và (2) ta được hệ phương trình theo ẩn u và v .

$$(-3) \begin{cases} u + v = \frac{1}{16} & (1') \\ 3u + 6v = \frac{1}{4} & (2') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3u - 3v = -\frac{3}{16} & (3) \\ 3u + 6v = \frac{1}{4} & (4) \end{cases}$$

Cộng (3) và (4) vế theo vế, ta có: $3v = -\frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow v = \frac{1}{48}$.

Ta có $\frac{1}{y} = v = \frac{1}{48}$. Vậy $y = 48$ (nhận).

Thay $v = \frac{1}{48}$ vào (1'), ta được: $u + \frac{1}{48} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow u = \frac{1}{16} - \frac{1}{48} = \frac{2}{48}$.

Ta có $\frac{1}{x} = u = \frac{2}{48}$. Vậy $x = 24$ (nhận).

Người thứ nhất làm xong công việc mất 24 giờ và người thứ hai mất 48 giờ.

Luyện tập

34. Nhà Lan có một mảnh vườn trồng rau cải bắp. Vườn được đánh thành nhiều luống, mỗi luống trồng cùng một số cây cải bắp. Lan tính rằng: Nếu tăng thêm 8 luống rau, nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì số cây toàn vườn ít đi 54 cây. Nếu giảm đi 4 luống, nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì số rau toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây. Hỏi vườn nhà Lan trồng bao nhiêu cây rau cải bắp? (Số cây trong các luống như nhau).
35. (Bài toán cổ Ấn Độ). Số tiền mua 9 quả thanh yên và 8 quả táo rừng thơm là 107 rupi. Số tiền mua 7 quả thanh yên và 7 quả táo rừng thơm là 91 rupi. Hỏi giá mỗi quả thanh yên và mỗi quả táo rừng thơm là bao nhiêu rupi?

36. Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,69 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bảng sau, trong đó có hai ô bị mờ không đọc được (đánh dấu *):

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6
Số lần bắn	25	42	*	15	*

Em hãy tìm lại các số trong hai ô đó.

37. Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính 20cm, xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi vật.
38. Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì bể sẽ đầy trong 1 giờ 20 phút. Nếu mở vòi thứ nhất trong 10 phút và vòi thứ hai trong 12 phút thì chỉ được $\frac{2}{15}$ bể nước. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu?
39. Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại hàng?

Download Sách Miễn Phí Đọc Sách Online

34. Gọi x (luống) và y (cây) là số luống và số cây rau cải bắp trên một luống ở vườn nhà Lan lúc ban đầu. Khi đó số cây rau cải bắp trong toàn vườn là $x.y$ (cây). Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Theo đề bài, ta có:

Nếu tăng thêm 8 luống, nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì số cây trong toàn vườn ít đi 54 cây, nghĩa là: $(x + 8)(y - 3) = xy - 54$.

Nếu giảm đi 4 luống, nhưng mỗi luống tăng thêm 2 cây thì số cây toàn vườn tăng lên 32 cây, nghĩa là: $(x - 4)(y + 2) = xy + 32$.

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} (x + 8)(y - 3) = xy - 54 & (1) \\ (x - 4)(y + 2) = xy + 32 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 8y = -30 & (1') \\ 4x - 8y = 8 & (2') \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = 50$ (nhận)

$y = 15$ (nhận)

Vậy số rau trong vườn nhà Lan trồng được là: $x.y = 50.15 = 750$ (cây)

35. Gọi x (rupi) là giá mỗi quả thanh yên và y (rupi) là giá mỗi quả táo rừng thơm. Điều kiện: $x > 0$; $y > 0$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (7) \begin{cases} 9x + 8y = 107 & (1) \\ 7x + 7y = 91 & (2) \end{cases} \\ (-8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 63x + 56y = 749 & (1') \\ -56x - 56y = -728 & (2') \end{cases}$$

Cộng (1') với (2') vế theo vế, ta được: $7x = 21 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận)

Thay $x = 3$ vào (2), ta được: $7.3 + 7y = 91 \Leftrightarrow 7y = 70 \Leftrightarrow y = 10$ (nhận)

Vậy: thanh yên giá 3 rupi/quả

táo rừng thơm giá 10 rupi/quả.

36. Gọi x là số thứ nhất, y là số thứ hai. Điều kiện $x > 0$; $y > 0$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 25 + 42 + x + 15 + y = 100 \\ 10.25 + 9.42 + 8x + 7.15 + 6y = 100.8,69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 18 \\ 8x + 6y = 136 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = 14$ (nhận); $y = 4$ (nhận)

Vậy số thứ nhất là 14 và số thứ hai là 4.

37. Gọi vận tốc của hai vật lần lượt là x (cm/giây) và y (cm/giây).

Điều kiện: $x > y > 0$.

Khi chuyển động cùng chiều, cứ 20 giây chúng lại gặp nhau, nghĩa là quãng đường mà vật đi nhanh hơn đi được trong 20 giây hơn quãng đường vật kia cũng đi trong 20 giây đúng 1 vòng (20π cm).

Ta có phương trình: $20(x - y) = 20\pi$.

Khi chuyển động ngược chiều, cứ 4 giây chúng lại gặp nhau, nghĩa là tổng quãng đường hai vật đi được trong 4 giây đúng 1 vòng.

Ta có phương trình: $4(x + y) = 20\pi$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 20(x - y) = 20\pi \\ 4(x + y) = 20\pi \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = 3\pi$ (nhận)

$y = 2\pi$ (nhận).

Vậy vận tốc của hai vật lần lượt là: 3π (cm/giây) và 2π (cm/giây).

38. Giả sử khi mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất chảy đầy bể trong x (phút), vòi thứ hai trong y (phút). Điều kiện: $x > 80$; $y > 80$.

Ta có: 1 giờ 20 phút = 80 phút.

Theo đề bài ta có:

Trong 1 phút vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ (bể) và trong 80 phút cả hai vòi cùng chảy đầy bể, nghĩa là:

$$80\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \quad (1)$$

Trong 10 phút vòi thứ nhất chảy được $\frac{10}{x}$ (bể), trong 12 phút vòi thứ hai chảy được $\frac{12}{y}$ (bể) và cả hai vòi chảy được $\frac{2}{15}$ (bể), nghĩa là:

$$\frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15} \quad (2)$$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 80\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 & (1) \\ \frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15} & (2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = 120$ (nhận)

$y = 240$ (nhận).

Vậy nếu mở riêng từng vòi thì thứ nhất chảy trong 120 phút thì đầy bể, vòi thứ hai chảy trong 240 phút thì đầy bể.

- 39.** Giả sử không kể thuế VAT, người mua hàng phải trả x (triệu) đồng cho loại hàng thứ nhất; y (triệu) đồng cho loại hàng thứ hai.

Khi đó số tiền phải trả cho loại hàng thứ nhất (kể cả thuế VAT 10%)

là $\frac{110}{100}x$ (triệu) đồng, cho loại hàng thứ hai (kể cả thuế VAT 8%) là

$\frac{108}{100}y$ (triệu) đồng.

Ta có phương trình: $\frac{110}{100}x + \frac{108}{100}y = 2,17 \Leftrightarrow 1,1x + 1,08y = 2,17 \quad (1)$

Khi thuế VAT là 9% cho cả hai loại hàng thì số tiền phải trả là:

$$\frac{109}{100}(x + y) = 2,18 \text{ hay } 1,09x + 1,09y = 2,18 \quad (2)$$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 1,1x + 1,08y = 2,17 & (1) \\ 1,09x + 1,09y = 2,18 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = 0,5$ (nhận)

$y = 1,5$ (nhận).

Vậy nếu không kể thuế VAT thì người mua hàng phải trả 0,5 triệu đồng cho loại hàng thứ nhất và 1,5 triệu đồng cho loại hàng thứ hai.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b và c là các số và $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$.
2. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Trong mặt phẳng tọa độ, tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$.
3. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế:
 - a) Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.
 - b) Giải phương trình một ẩn vừa có rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.
4. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số:
 - a) Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.
 - b) Áp dụng quy tắc cộng đại số để được một hệ phương trình mới trong đó, một phương trình có hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
 - c) Giải phương trình một ẩn vừa có rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.
5. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Bước 1. Lập hệ phương trình:

 - Chọn hai ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
 - Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
 - Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ hai phương trình nói trên.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với điều kiện đặt ra và kết luận.

B. Câu hỏi

1. Sau khi giải hệ $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, bạn Cường kết luận rằng hệ phương trình có hai nghiệm: $x = 2$ và $y = 1$. Theo em điều đó đúng hay sai? Nếu sai thì phải phát biểu thế nào cho đúng?

2. Dựa vào minh họa hình học (xét vị trí tương đối của hai đường thẳng xác định bởi hai phương trình trong hệ), em hãy giải thích các kết luận sau:

Hệ phương trình
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, (a, b, c, a', b', c' \text{ khác } 0)$$

- Có vô số nghiệm nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$;
- Vô nghiệm nếu: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$;
- Có một nghiệm duy nhất nếu $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$;

3. Khi giải một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ta biến đổi hệ phương trình đó để được một hệ phương trình mới tương đương, trong đó có một phương trình một ẩn. Có thể nói gì về số nghiệm của hệ đã cho nếu phương trình một ẩn đó:

a) Vô nghiệm?

b) Có vô số nghiệm?

Hướng dẫn

1. Bạn Cường nói như vậy là SAI. Vì mỗi nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là một cặp giá trị $(x; y)$.

Phải nói rằng hệ phương trình trên có một nghiệm là $(2; 1)$.

2. Ta có:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad (d) \\ y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{b'}{c'} \quad (d') \end{cases}$$

Xét hai đường thẳng (d) và (d') có các phương trình như trên. Ta biết, số nghiệm của hệ phương trình phụ thuộc vào số điểm chung của hai đường thẳng (d) và (d') .

- Trường hợp: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ và $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$

Điều này chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d) và (d') trùng nhau. Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

- Trường hợp $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ và $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$

Điều này chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d) và (d') song song với nhau. Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$

Điều này chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d) và (d') cắt nhau tại một điểm duy nhất. Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.

3. a) Hệ phương trình vô nghiệm.
b) Hệ phương trình có vô số nghiệm.

C. Bài tập giáo khoa cơ bản

40. Giải các hệ phương trình sau và minh họa hình học kết quả tìm được:

$$a) \begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ \frac{2}{5}x + y = 1 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 0,2x + 0,1y = 0,3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2} \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

41. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x\sqrt{5} - (1 + \sqrt{3})y = 1; \\ (1 - \sqrt{3})x + y\sqrt{5} = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{2x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = \sqrt{2} \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y+1} = -1 \end{cases}$$

Hướng dẫn câu b): Đặt ẩn phụ.

42. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m \\ 4x - m^2y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau:

$$a) m = -\sqrt{2};$$

$$b) m = \sqrt{2};$$

$$c) m = 1.$$

43. Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3,6km, khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều nhau và gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2km. Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trường hợp trên, nhưng người đi chậm hơn xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi người.

44. Một vật có khối lượng 124g và thể tích 15cm^3 là hợp kim của đồng và kẽm. Tính xem trong đó có bao nhiêu gam đồng và bao nhiêu gam kẽm, biết rằng cứ 89g đồng thì có thể tích là 10cm^3 và 7g kẽm có thể tích là 1cm^3 .

45. Hai đội xây dựng làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Nhưng khi làm chung được 8 ngày thì đội I được điều động đi làm việc khác. Tuy chỉ còn một mình đội II làm việc, nhưng do cải tiến cách làm, năng suất của đội II tăng gấp đôi, nên họ đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm một mình thì phải làm trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên?

46. Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 720 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái. Do đó cả hai đơn vị thu hoạch được 819 tấn thóc. Hỏi mỗi năm, mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

Giải

40. a) * Giải hệ phương trình:
$$(-5) \begin{cases} 2x + 5y = 2 & (1) \\ \frac{2}{5}x + y = 1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 2 & (1') \\ -2x - 5y = -5 & (2') \end{cases}$$

Cộng (1') với (2') vế theo vế, ta được: $0x + 0y = -3$.

Phương trình này vô nghiệm. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

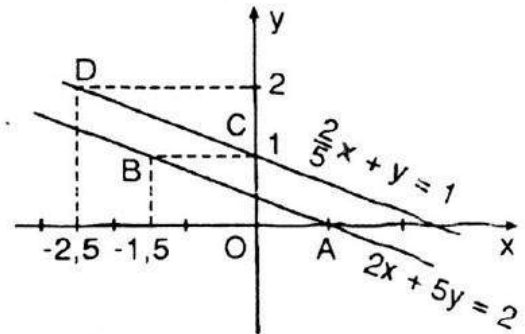
* Minh họa hình học kết quả tìm được:

- Vẽ đồ thị hàm số $2x + 5y = 2$.

Cho $y = 0$, tính được $x = 1$. Ta xác định được điểm $A(1; 0)$.

Cho $y = 1$, tính được $x = -1,5$. Ta xác định được điểm $B(-1,5; 1)$.

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm A và B.



- Vẽ đồ thị hàm số $\frac{2}{5}x + y = 1 \Leftrightarrow 2x + 5y = 5$

Cho $x = 0$, tính được $y = 1$. Ta xác định được điểm $C(0; 1)$

Cho $y = 2$, tính được $x = -2,5$. Ta xác định được điểm $D(-2,5; 2)$

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm C và D.

Kết luận: Đồ thị hai hàm số trên song song. Điều này chứng tỏ rằng hệ phương trình vô nghiệm.

b) * Giải hệ phương trình:
$$(-10) \begin{cases} 0,2x + 0,1y = 0,3 & (1) \\ 3x + y = 5 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = -3 & (1') \\ 3x + y = 5 & (2') \end{cases}$$

Cộng (1') với (2') vế theo vế, ta được $x = 2$.

Thế $x = 2$ vào (2), ta được: $6 + y = 5 \Leftrightarrow y = -1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x = 2; y = -1)$

* Minh họa hình học:

- Đồ thị hàm số $0,2x + 0,1y = 0,3$ là một đường thẳng đi qua hai điểm:

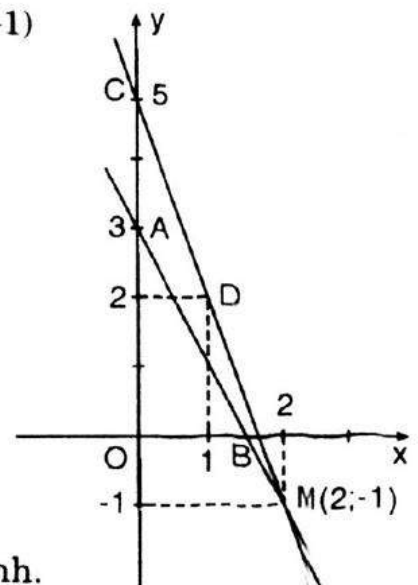
$A(x = 0; y = 3)$ và $B(x = 1,5; y = 0)$

- Đồ thị hàm số $3x + y = 5$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $C(x = 0; y = 5)$ và $D(x = 1; y = 2)$.

- Đồ thị hai hàm số trên cắt nhau tại điểm:

$M(x = 2; y = -1)$.

Vậy $(2; -1)$ là một nghiệm của hệ phương trình.



c) * Giải hệ phương trình: $(-2) \begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2} & (1) \\ 3x - 2y = 1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = -1 & (1') \\ 3x - 2y = 1 & (2') \end{cases}$

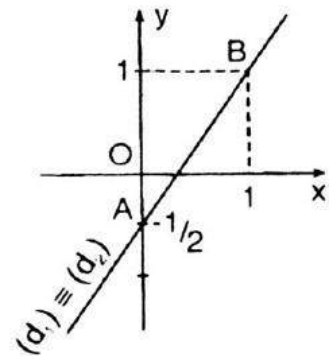
Cộng (1') và (2') vế theo vế, ta có: $0x + 0y = 0$.

Phương trình này có vô số nghiệm số.

Nghiệm tổng quát là $(x; \frac{3}{2}x - \frac{1}{2})$ với $x \in \mathbb{R}$.

* Minh họa hình học

- Đồ thị hàm số (1) là đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; -\frac{1}{2})$ và $B(1; 1)$.



- Đồ thị hàm số (2) là đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; -\frac{1}{2})$ và $B(1; 1)$ nên hai đường thẳng này trùng nhau. Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

41. a) $\begin{cases} x\sqrt{5} - (1 + \sqrt{3})y = 1 & (1) \\ (1 - \sqrt{3})x + y\sqrt{5} = 1 & (2) \end{cases}$



Ta giải hệ phương trình bằng phương pháp thế:

Từ (1) ta có $x = \frac{(1 + \sqrt{3})y + 1}{\sqrt{5}} \quad (3)$

Thế (3) vào (2), ta được: $(1 - \sqrt{3}) \left[\frac{(1 + \sqrt{3})y + 1}{\sqrt{5}} \right] + y\sqrt{5} = 1$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})y + (1 - \sqrt{3}) + 5y = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow -2y + 5y = \sqrt{5} + \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - 1}{3}$$

Thế y vừa tìm được vào (3), ta được:

$$x = \frac{(1 - \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - 1}{3} \right) + 1}{\sqrt{5}} \quad \text{hay} \quad x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + 1}{3}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + 1}{3}; \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - 1}{3})$.

b) Giải hệ phương trình: (I) $\begin{cases} \frac{2x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = \sqrt{2} \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y+1} = -1 \end{cases}$

Ta giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

$$\text{Đặt } u = \frac{x}{x+1}; v = \frac{y}{y+1}.$$

Thay vào hệ (I), ta có hệ mới với ẩn là u và v .

$$\text{Ta được } \begin{cases} 2u + v = \sqrt{2} & (1') \\ u + 3v = -1 & (2') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = \sqrt{2} & (3) \\ -2u - 6v = 2 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Cộng (3) và (4) vế theo vế, ta được: } -5v = 2 + \sqrt{2} \Leftrightarrow v = \frac{-(2 + \sqrt{2})}{5}$$

$$\text{Thay } v = \frac{-(2 + \sqrt{2})}{5} \text{ vào (1'), ta được:}$$

$$2u = \frac{2 + \sqrt{2}}{5} + \sqrt{2} \Leftrightarrow 2u = \frac{2 + \sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{5} = \frac{2 + 6\sqrt{2}}{5} \Leftrightarrow u = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{5}$$

Với giá trị của u, v vừa tìm được, ta thế vào để tìm nghiệm x, y .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{x}{x+1} = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{5} \\ \frac{y}{y+1} = \frac{-2 - \sqrt{2}}{5} \end{cases} \text{ dk: } \begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x+1) \left(\frac{1 + 3\sqrt{2}}{5} \right) \\ y = (y+1) \left(\frac{-2 - \sqrt{2}}{5} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = (x+1)(1 + 3\sqrt{2}) \\ 5y = (y+1)(-2 - \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} \\ y = -\frac{2 + \sqrt{2}}{7 + \sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(\frac{1 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}}; -\frac{2 + \sqrt{2}}{7 + \sqrt{2}} \right)$ thỏa điều kiện.

$$42. \quad (I) \quad \begin{cases} 2x - y = m & (1) \\ 4x - m^2y = 2\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow y = 2x - m \quad (3)$$

Thế (3) vào (2), ta có:

$$4x - m^2(2x - m) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2(2 - m^2)x = 2\sqrt{2} - m^3 \quad (*)$$

a) Với $m = -\sqrt{2}$. Thế vào phương trình (*), ta được:

$$2(2 - 2)x = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 0x = 4\sqrt{2}.$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Với $m = \sqrt{2}$. Thế vào phương trình (*), ta được:

$$2(2 - 2)x = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Phương trình này có vô số nghiệm số. Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm số.

Nghiệm tổng quát là $x \in \mathbb{R}; y = 2x - \sqrt{2}$.

c) Với $m = 1$. Thế vào phương trình (*), ta được:

$$2(2 - 1)x = 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 2x = 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}.$$

Thay x vừa tìm được vào (3), ta có: $y = 2\sqrt{2} - 2$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất là: $(\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}; 2\sqrt{2} - 2)$

43. Gọi x (m/phút) là vận tốc của người xuất phát từ A và y (m/phút) là vận tốc của người xuất phát từ B.

Điều kiện: $x > 0; y > 0$

- Khi gặp nhau tại điểm cách A là 2km thì người xuất phát từ A đi được 2000 mét, còn người xuất phát từ B đi được 1600 mét.

Ta có phương trình: $\frac{2000}{x} = \frac{1600}{y}$. (1)

- Theo đề bài cho thấy người xuất phát từ B đi chậm hơn. Khi người đi từ B xuất phát trước người kia 6 phút thì hai người gặp nhau ở chính giữa quãng đường, nghĩa là mỗi người đi được $1,8\text{km} = 1800\text{m}$.

Ta có phương trình $\frac{1800}{x} + 6 = \frac{1800}{y}$. (2)

Ta có hệ phương trình: (I)
$$\begin{cases} \frac{2000}{x} = \frac{1600}{y} & (1) \\ \frac{1800}{x} + 6 = \frac{1800}{y} & (2) \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{100}{x}$ và $v = \frac{100}{y}$. Thay vào (I), ta được: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 20u = 16v \\ 18u + 6 = 18v \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $u = \frac{4}{3}$ và $v = \frac{5}{3}$.

- Với $\frac{100}{x} = u = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 75$ (nhận).

- Với $\frac{100}{y} = v = \frac{5}{3} \Leftrightarrow y = 60$ (nhận).

Vậy vận tốc của người đi từ A là 75m/phút và của người đi từ B là 60m/phút

44. Gọi x (gam) và y (gam) lần lượt là số gam đồng và kẽm có trong vật đã cho. Điều kiện: $x > 0$; $y > 0$.

Vì khối lượng của vật là 124 gam, ta có phương trình: $x + y = 124$. (1)

Khi đó, thể tích của x (gam) đồng là $\frac{10}{89}x$ (cm³) và thể tích của y (gam)

kẽm là $\frac{1}{7}y$ (cm³).

Vì thể tích của vật là 15cm³, nên ta có phương trình: $\frac{10}{89}x + \frac{1}{7}y = 15$. (2)

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 124 & (1) \\ \frac{10}{89}x + \frac{1}{7}y = 15 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 89$ (nhận) và $y = 35$ (nhận).

Vậy vật đã cho có 89 gam đồng và 35 gam kẽm.

45. Với năng suất ban đầu, giả sử đội I làm xong công việc trong x (ngày) và đội II làm xong công việc trong y (ngày).

Điều kiện: $x, y > 12$

Như vậy, mỗi ngày đội I làm được $\frac{1}{x}$ công việc và đội II làm được $\frac{1}{y}$ công việc và cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$ công việc. Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \quad (1)$$

Trong 8 ngày làm chung, cả hai đội làm được $\left(\frac{8}{x} + \frac{8}{y}\right)$ công việc. Do

năng suất gấp đôi nên đội II mỗi ngày làm được $\frac{2}{y}$ công việc và làm

xong trong 3,5 ngày nên làm được $3,5 \cdot \frac{2}{y} = \frac{7}{y}$ công việc.

Ta có phương trình: $\frac{8}{x} + \frac{8}{y} + \frac{7}{y} = 1$ hay $\frac{8}{x} + \frac{15}{y} = 1$ (2)

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} & (1) \\ \frac{8}{x} + \frac{15}{y} = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng cách đặt ẩn số phụ, ta được:

$$x = 28 \text{ (nhận)} \text{ và } y = 21 \text{ (nhận)}.$$

Vậy đội I làm xong công việc trong 28 ngày, đội II làm xong công việc trong 21 ngày.

46. Gọi x (tấn) và y (tấn) là số tấn thóc mà hai đơn vị thu hoạch được trong năm ngoái.

Điều kiện: $x > 0$; $y > 0$.

Theo đề bài ta có:

Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất thu hoạch được 720 tấn thóc, nghĩa là:

$$x + y = 720.$$

Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, nghĩa là đơn vị thứ nhất

thu hoạch được: $x + \frac{15}{100}x = \frac{115}{100}x$ (tấn) và đơn vị thứ hai thu hoạch

được: $y + \frac{12}{100}y = \frac{112}{100}y$ (tấn).

Cả hai thu hoạch được 819 tấn, nghĩa là: $\frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 819$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 720 \\ \frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 819 \end{cases} \quad (1)$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 420$ (nhận) và $y = 300$ (nhận).

Vậy: – Năm ngoái đơn vị thứ I thu hoạch được 420 tấn thóc, đơn vị thứ II thu hoạch được 300 tấn thóc.

– Năm nay đơn vị thứ I thu hoạch được $\frac{115}{100} \cdot 420 = 483$ tấn thóc,
đơn vị thứ II thu hoạch được $\frac{112}{100} \cdot 300 = 336$ tấn thóc.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(0; 2)$, $B(3; 0)$. Diện tích tam giác OAB bằng:

A. 2; B. 3; C. 6; D. 12.

2. Cho hàm số $f(x) = 2x + b$ và $f(1) = 5$. Khi đó b bằng:

A. 3; B. 7; C. -3; D. -7.

3. Hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 10 \\ -3x + 6y = 30 \end{cases}$ có tập nghiệm là:

A. $S = \{(30; 20)\}$; B. $S = \{(-20; -30)\}$; C. $S = \{(20; -30)\}$ D. $S = \emptyset$.

4. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = m \\ 2x + 5y = 4m - 3 \end{cases}$ vô nghiệm khi m bằng:
- A. $m = 0$; B. $m = \frac{3}{4}$; C. $m = 1$;
D. Không có giá trị nào của m để hệ phương trình vô nghiệm.
5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$. Hệ có nghiệm duy nhất khi:
- A. $m \neq 2$; B. $m \neq -4$; C. $m \neq 3$; D. $m \neq 1$.
6. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3my = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ có tập nghiệm $S = \{(x; 2 - 2x)\}$ khi:
- A. $m = 1$; B. $m = -1$; C. $m = \frac{1}{3}$; D. $m = -\frac{1}{3}$.
7. Gọi $A = x_0 + y_0$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$
Khi đó A bằng:
- A. 10; B. -10; C. 4; D. -4.
8. Cho phương trình $x + 2y = 1$ có tập nghiệm S bằng:
- A. $S = \mathbb{R}$; B. $S = \{(1 - 2y) / y \in \mathbb{Z}\}$
C. $S = \{(x; \frac{1-x}{2}) / x \in \mathbb{R}\}$; D. $S = \{(x; y) / x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{Z}\}$
9. Giá 4 quyển vở, 2 đĩa nhạc và 1 cây bút máy là 45 ngàn đồng. Cũng 7 quyển vở, 3 đĩa nhạc và 1 cây bút máy ấy giá 37 ngàn đồng. Hỏi 1 quyển vở, 1 đĩa nhạc, 1 cây bút máy giá bao nhiêu ngàn đồng?
- A. 51; B. 52; C. 53; D. Không đủ dữ kiện để giải.
10. Chữ số hàng chục của một số có hai chữ số hơn chữ số hàng đơn vị là 5. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau sẽ được một số mới bằng $\frac{3}{8}$ số ban đầu. Hỏi chữ số ban đầu là bao nhiêu?
- A. 70; B. 71; C. 72; D. 73.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1. B | 2. A | 3. A | 4. D | 5. B |
| 6. C | 7. C | 8. C | 9. D | 10. C |

Chương IV.

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§1. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tập xác định: Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$.
2. Tính chất:
 - Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
 - Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.
3. Nhận xét:
 - Nếu $a > 0$ thì $y > 0$ với $x \neq 0$;
 - $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.
 - Nếu $a < 0$ thì $y < 0$ với mọi $x \neq 0$;
 - $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Diện tích S của hình tròn được tính bởi công thức $S = \pi R^2$, trong đó R là bán kính của hình tròn.
 - a) Dùng máy tính bỏ túi, tính các giá trị của S rồi điền vào các ô trống trong bảng sau ($\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

$R(\text{cm})$	0,57	1,37	2,15	4,09
$S = \pi R^2 (\text{cm}^2)$				

(Xem bài đọc thêm về máy tính bỏ túi: SGK, tr.32).

- b) Nếu bán kính tăng gấp 3 lần thì diện tích tăng hay giảm bao nhiêu lần?
 - c) Tính bán kính của hình tròn, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, nếu biết diện tích của nó bằng $79,5\text{cm}^2$.
2. Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 100m. Quãng đường chuyển động s (mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức: $s = 4t^2$.

- a) Sau 1 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét? Tương tự, sau 2 giây?
- b) Hỏi sau bao lâu vật này tiếp đất?
3. Lực F của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Biết rằng khi vận tốc gió bằng 2 m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng 120N (Niu-tơn).
- a) Tính hằng số a .
- b) Hỏi khi $v = 10$ m/s thì lực F bằng bao nhiêu? Cùng câu hỏi này khi $v = 20$ m/s.
- c) Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000N, hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với vận tốc gió 90km/h hay không?

Giải

1. a)

R(cm)	0,57	1,37	2,15	4,09
$S = \pi R^2$ (cm ²)	1,02	5,89	14,51	52,52

b) Ta có $S = \pi R^2$

Nếu bán kính tăng gấp 3 lần, nghĩa là $R_1 = 3R$.

Khi đó $S_1 = \pi R_1^2 = \pi (3R)^2 = 9\pi R^2 = 9.S$.

Vậy khi bán kính tăng gấp 3 lần thì diện tích tăng lên 9 lần.

c) Theo đề bài ta có: $79,5 = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{79,5}{\pi}$

Suy ra $R = \sqrt{\frac{79,5}{3,14}} \approx 5,03$ (cm).

2. a) – Sau 1 giây vật rơi xuống được một quãng đường: $S_1 = 4(1)^2 = 4$ (m)

Vậy khi vật đó cách mặt đất: $100 - 4 = 96$ mét.

– Sau 2 giây vật đó rơi xuống được một quãng đường: $S_2 = 4.2^2 = 16$ (m)

Vậy khi đó vật cách mặt đất: $100 - 16 = 84$ mét.

b) Khi vật tiếp đất, tức là vật rơi xuống một quãng đường là 100 mét.
Theo đề bài ta có phương trình:

$$4t^2 = 100 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = \pm \sqrt{25} = \pm 5.$$

Vì thời gian là số không âm, nên chọn $t = 5$ giây.

Vậy sau 5 giây thì vật tiếp đất.

3. a) Theo đề bài ta có: $a.2^2 = 120 \Leftrightarrow a = 30$.

b) Ta có $F = a.v^2 = 30v^2$

– Khi $v = 10$ m/s thì $F = 30.10^2 = 3000$ (N)

– Khi $v = 20$ m/s thì $F = 30.20^2 = 12000$ (N).

c) Ta có $90\text{km/h} = 90000\text{m}/3600\text{s} = 25\text{m/s}$

Mà theo đề bài, cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000N , nghĩa là cánh buồm chỉ chịu được sức gió 20m/s (theo câu b)).

Vậy khi cơn bão vận tốc 90km/h thì thuyền không thể đi được.

§2. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đồ thị hàm số: Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một parabol với đỉnh O.
 - Nếu $a > 0$: Đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.
 - Nếu $a < 0$: Đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.
2. Cách vẽ đồ thị:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Lập bảng giá trị (từ 5 đến 7 giá trị) tương ứng giữa x và y.

Bước 3: Vẽ đồ thị – Kết luận.
3. Điểm thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) (P).
 Điểm $A(x_A; y_A) \in (P) \Leftrightarrow y_A = ax_A^2$

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. Bài tập mẫu

Cho hàm số $y = 0,25x^2$

- a) Vẽ đồ thị hàm số;
- b) Các điểm $A(0; 0)$; $B(1,5; -2)$; $C(-0,1; \frac{1}{400})$; $D(1; \frac{1}{4})$ có nằm trên đồ thị không?
- c) Trên đồ thị xác định điểm M có hoành độ 4. Tìm tung độ điểm M.

Giải

- a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 0,25x^2$
 Tập xác định của hàm số là R.
 - Lập bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3.....
$y = 0,25x^2$	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25

- Vẽ đồ thị: Đồ thị hàm số $y = 0,25x^2$ là một parabol đỉnh O, trục đối xứng Oy.

b) Ta có:

$$\bullet \quad 0,25 x_A^2 = 0,25.0 = 0 = y_A.$$

Vậy $A(0; 0) \in (P)$

$$\bullet \quad 0,25 x_B^2 = 0,25.1,5^2 = \frac{9}{16} \neq -2 = y_B.$$

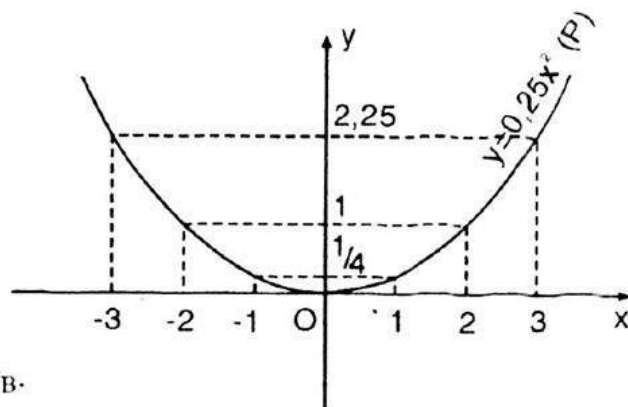
Vậy $B(1,5; -2) \notin (P)$

$$\bullet \quad 0,25 x_C^2 = 0,25.(-0,1)^2 = 0,025 = \frac{1}{400} = y_C. \text{ Vậy } C(-0,1; \frac{1}{400}) \in (P)$$

$$\bullet \quad 0,25 x_D^2 = 0,25.(1)^2 = \frac{1}{4} = y_D. \text{ Vậy } D(1; \frac{1}{4}) \in (P)$$

c) Vì $M(4; y_M) \in (P)$ nên: $y_M = 0,25 x_M^2 = 0,25.4^2 = 4.$

Vậy tung độ điểm M là $y_M = 4.$



B. Bài tập giáo khoa căn bản

4. Cho hai hàm số: $y = \frac{3}{2}x^2$, $y = -\frac{3}{2}x^2$. Điền vào những ô trống của các bảng sau rồi vẽ hai đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$					

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{3}{2}x^2$					

Nhận xét về tính đối xứng của hai đồ thị đối với trục Ox.

5. Cho ba hàm số: $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = x^2$; $y = 2x^2$.

- Vẽ đồ thị của ba hàm số trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Tìm ba điểm A, B, C có cùng hoành độ $x = -1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Xác định tung độ tương ứng của chúng.
- Tìm ba điểm A', B', C' có cùng hoành độ $x = 1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Kiểm tra tính đối xứng của A và A', B và B', C và C'.
- Với mỗi hàm số trên, hãy tìm giá trị của x để hàm số đó có giá trị nhỏ nhất.

Giải

4. a) Điền vào các bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6
$y = -\frac{3}{2}x^2$	-6	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-6

b) Vẽ đồ thị hàm số:

* Hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- Bảng giá trị (xem câu a)
- Vẽ đồ thị.

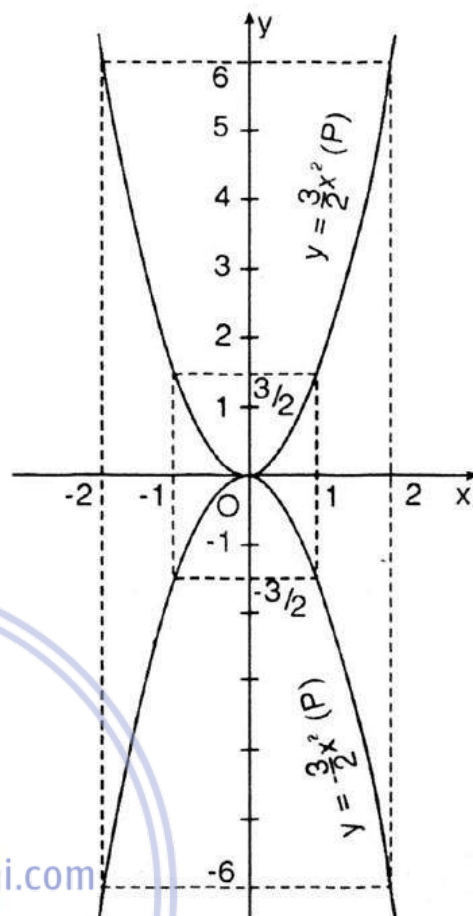
Đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ là một parabol đỉnh O, trục đối xứng Oy (nằm trên trục hoành).

* Hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$.

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- Bảng giá trị (xem câu a)
- Vẽ đồ thị.

Đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$ là một parabol đỉnh O, trục đối xứng Oy (nằm phía dưới trục hoành).

Vậy đồ thị hai hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -\frac{3}{2}x^2$ đối xứng với nhau qua trục Ox.



5. a) Vẽ đồ thị các hàm số:

* Hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = x^2$; $y = 2x^2$

- Tập xác định của các hàm số là $\mathbb{R}$.

- Lập bảng giá trị:

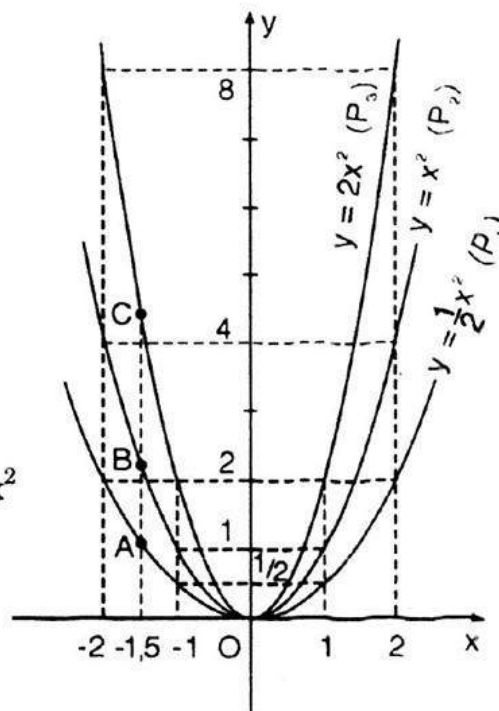
x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

- Vẽ đồ thị.

b) - Gọi (P_1) là đồ thị của hàm số $y = y = \frac{1}{2}x^2$

$$A(x_A = -1,5; y_A) \in (P_1)$$

$$\Leftrightarrow y_A = \frac{1}{2}x_A^2 = \frac{1}{2}(-1,5)^2 = 1,125$$



- Gọi (P_2) là đồ thị của hàm số $y = x^2$

$$B(x_B = -1,5; y_B) \in (P_2) \Leftrightarrow y_B = x_B^2 = (-1,5)^2 = 2,25$$

- Gọi (P_3) là đồ thị của hàm số $y = 2x^2$

$$C(x_C = -1,5; y_C) \in (P_3) \Leftrightarrow y_C = 2x_C^2 = 2(-1,5)^2 = 4,5$$

c) Tương tự: $A'(x_{A'} = 1,5; y_{A'}) \in (P_1) \Leftrightarrow y_{A'} = \frac{1}{2}x_{A'}^2 = \frac{1}{2}(1,5)^2 = 1,125$

$$B'(x_{B'} = 1,5; y_{B'}) \in (P_2) \Leftrightarrow y_{B'} = x_{B'}^2 = (1,5)^2 = 2,25$$

$$C'(x_{C'} = 1,5; y_{C'}) \in (P_3) \Leftrightarrow y_{C'} = 2x_{C'}^2 = 2(1,5)^2 = 4,5$$

Nhận xét: Các điểm A và A'; B và B'; C và C' có hoành độ đối nhau và tung độ bằng nhau. Do đó, A và A'; B và B'; C và C' là các điểm đối xứng nhau qua trục tung.

d) Các hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = x^2$; $y = 2x^2$ đều có $a > 0$. Do đó, các hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = 0$.

Luyện tập

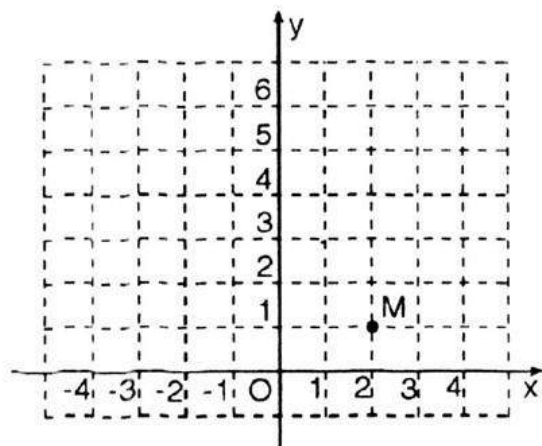
6. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số đó.

b) Tính các giá trị $f(-8)$; $f(-1,3)$; $f(-0,75)$; $f(1,5)$.

c) Dùng đồ thị để ước lượng các giá trị $(0,5)^2$; $(-1,5)^2$; $(2,5)^2$.

d) Dùng đồ thị để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn các số $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$.

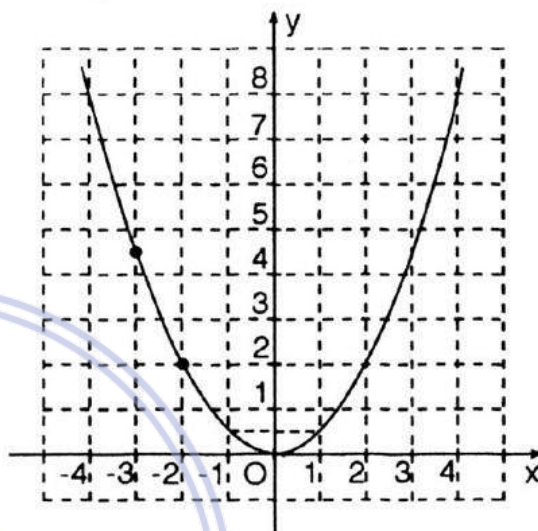


7. Trên mặt phẳng tọa độ (hình bên), có một điểm M thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

- Tìm hệ số a.
- Điểm A(4; 4) có thuộc đồ thị không?
- Hãy tìm thêm hai điểm nữa (không kể điểm O) để vẽ đồ thị.

8. Biết rằng đường cong trong hình bên là một parabol $y = ax^2$.

- Tìm hệ số a.
- Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -3$.
- Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 8$.



9. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = -x + 6$.

- Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị đó.

10. Cho hàm số $y = -0,75x^2$. Qua đồ thị của hàm số đó, hãy cho biết khi x tăng từ -2 đến 4 thì giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu?

Giải

6. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$.

- Tập xác định của hàm số là R.
- Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

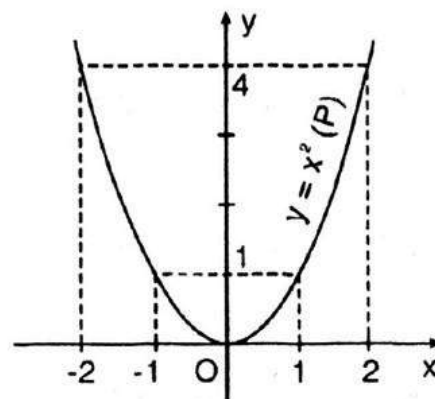
- Vẽ đồ thị:

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là một parabol đỉnh O, trục đối xứng Oy.

b) Tính các giá trị của hàm số:

$$f(-8) = (-8)^2 = 64; \quad f(-1,3) = (-1,3)^2 = 1,69$$

$$f(-0,75) = (-0,75)^2 = 0,5625; \quad f(1,5) = (1,5)^2 = 2,25$$



- c) Trên trục hoành lấy các điểm có hoành độ lần lượt là $x = 0,5; -1,5$ và $2,5$. Tại các điểm đó, ta lần lượt kẻ các đường thẳng song song với trục tung, chúng lần lượt cắt đồ thị (P) tại các điểm cụ thể. Tại điểm đó trên parabol, ta lần lượt kẻ các đường thẳng song song với trục hoành, chúng cắt trục tung tại các điểm biểu diễn lần lượt các giá trị $(0,5)^2; (-1,5)^2; (2,5)^2$.
- d) Trên trục tung, tại các điểm có giá trị $y = 3, y = 7$, ta kẻ các đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị (P) ở nhánh nằm trong góc phần tư thứ I. Tại các điểm đó trên đồ thị, vẽ lần lượt các đường thẳng song song với trục tung, chúng cắt trục hoành tại các điểm có giá trị $x = \sqrt{3}, x = \sqrt{7}$.

7. a) Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

$$\text{Vì } M(2; 1) \in (P) \text{ nên } y_M = ax_M^2 \Leftrightarrow 1 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } a = \frac{1}{4}.$$

b) Ta có hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$. Điểm $A(4; 4)$ có thuộc đồ thị không?

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} y_A = 4 \\ \frac{1}{4}x_A^2 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow y_A = \frac{1}{4}x_A^2.$$

Điều này chứng tỏ rằng điểm $A(4; 4) \in (P)$.

c) Ngoài điểm $O(0; 0); A(4; 4)$ ta có thể tìm thêm hai điểm nữa để vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$. Hai điểm đó có thể là $A'(-4; 4)$ và $M'(-2; 1)$ là hai điểm đối xứng của A và M qua trục tung Oy.

8. a) Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

Theo hình vẽ trong mặt phẳng tọa độ Oxy ta có điểm $A(-2; 2) \in (P)$.

$$\text{Điều này chứng tỏ rằng: } y_A = ax_A^2 \Leftrightarrow 2 = a(-2)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } a = \frac{1}{2}.$$

b) Ta có hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ (P)

$$\text{Giả sử điểm } B(x_B = -3; y_B) \in (P) \Leftrightarrow y_B = \frac{1}{2}x_B^2 = \frac{1}{2}(-3)^2 = \frac{9}{2}.$$

Vậy tung độ điểm B là $y_B = \frac{9}{2}$.

c) Giả sử điểm $C(x_C; y_C = 8) \in (P)$

$$\Leftrightarrow y_C = \frac{1}{2} x_C^2 \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2} x_C^2 \Leftrightarrow x_C^2 = 16 \Leftrightarrow x_C = \pm 4$$

Vậy hai điểm cần tìm là $C(4; 8)$ và $C'(-4; 8)$.

9. a) Vẽ đồ thị các hàm số:

* $y = \frac{1}{3}x^2$

– Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

– Bảng giá trị

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{3}x^2$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3

* $y = -x + 6$

Đồ thị hàm số là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; 3)$; $B(0; 6)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{3}x^2 = -x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6x - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) + 6(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -6 \end{cases}$$

– Với $x = 3$ thì $y = -x + 6 = -3 + 6 = 3$.

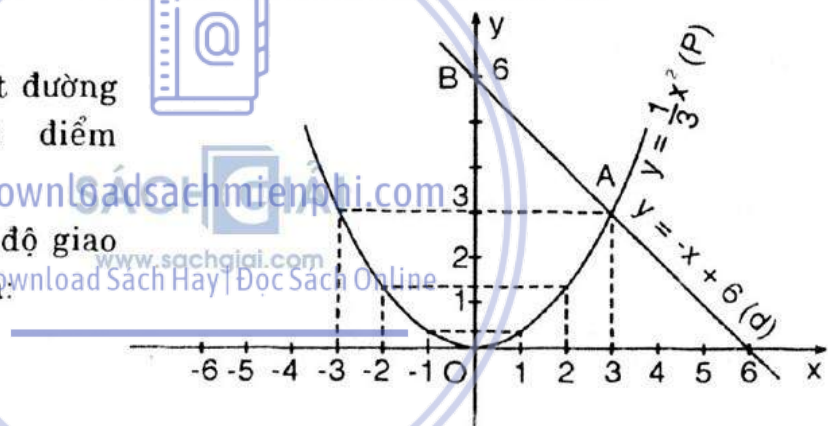
Ta xác định được điểm $A(3; 3)$.

– Với $x = -6$ thì $y = -x + 6 = 6 + 6 = 12$.

Ta xác định được điểm $N(-6; 12)$. Vậy các điểm A, N là các giao điểm của (P) và (d).

10. * Vẽ đồ thị hàm số $y = -0,75x^2$

– Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

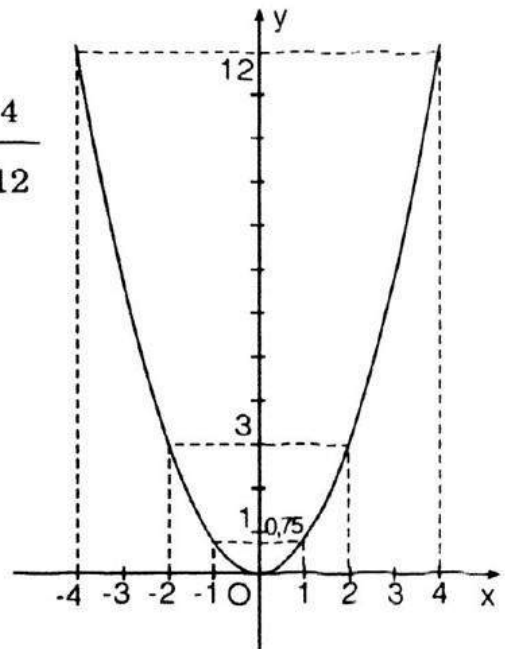


– Bảng giá trị:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 0,75x^2$	12	6,75	3	0,75	0	0,75	3	6,75	12

– Vẽ đồ thị hàm số:

Qua đồ thị của hàm số $y = -0,75x^2$ ta nhận thấy khi x tăng từ -2 đến 4 thì giá trị nhỏ nhất của y là 0 khi x = 0 và giá trị lớn nhất của y là 12 khi x = 4.



§3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN



1. Định nghĩa: Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn, a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.
2. Phương pháp giải: Thông thường ta dùng các phép biến đổi tương đương biến đổi phương trình đã cho về các dạng phương trình đã biết cách giải như phương trình bậc nhất, phương trình tích, ... để tìm nghiệm của phương trình.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

11. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ các hệ số a, b, c:

- a) $5x^2 + 2x = 4 - x$; b) $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2}$;
 c) $2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1$; d) $2x^2 + m^2 = 2(m - 1)x$, m là một hằng số.

12. Giải các phương trình sau:

- a) $x^2 - 8 = 0$; b) $5x^2 - 20 = 0$; c) $0,4x^2 + 1 = 0$;
 d) $2x^2 + \sqrt{2}x = 0$; e) $-0,4x^2 + 1,2x = 0$.

13. Cho các phương trình: a) $x^2 + 8x = -2$; b) $x^2 + 2x = \frac{1}{3}$.

Hãy cộng vào hai vế của mỗi phương trình cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái thành một bình phương.

14. Hãy giải phương trình $2x^2 + 5x + 2 = 0$ theo các bước như ví dụ 3 trong bài học.

Giải

11. a $5x^2 + 2x = 4 - x \Leftrightarrow 5x^2 + 2x - 4 + x = 0$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 3x - 4 = 0 \text{ với } \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$$

b $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 - 3x - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}x^2 - x - \frac{15}{2} = 0 \text{ với } a = \frac{3}{5}; b = -1; c = -\frac{15}{2}$$

c $2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - \sqrt{3} - \sqrt{3}x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} - 1 = 0 \text{ với } a = 2; b = 1 - \sqrt{3}; c = -\sqrt{3} - 1.$$

d $2x^2 + m^2 = 2(m - 1)x$, m là một hằng số.

$$\Leftrightarrow 2x^2 + m^2 - 2(m - 1)x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$$

Với $a = 2; b = -2(m - 1); c = m^2$

12. a $x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 2\sqrt{2}$ và $x_2 = -2\sqrt{2}$.

b $5x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -2$.

c $0,4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0,4x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{0,4}$. Phương trình vô nghiệm.

d $2x^2 + \sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow x(2x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0$ và $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e $-0,4x^2 + 1,2x = 0 \Leftrightarrow x(-0,4x + 1,2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -0,4x + 1,2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0$ và $x_2 = 3$

13. a $x^2 + 8x = -2 \Leftrightarrow (x)^2 + 2.4.x + 4^2 = -2 + 4^2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 14$

b $x^2 + 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x)^2 + 2.1.x + 1^2 = \frac{1}{3} + 1^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = \frac{4}{3}$

14. Giải phương trình $2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x = -2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x = -1$$

$$\Leftrightarrow (x)^2 + 2\left(\frac{5}{4}\right)x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{5}{4} = \pm \sqrt{\frac{9}{16}} \Leftrightarrow x + \frac{5}{4} = \pm \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \\ x + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -2$.

§4. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Công thức nghiệm: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm

$\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

$\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

2. Chú ý quan trọng: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có a và c trái dấu, tức $a.c < 0$ thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Khi đó *phương trình có 2 nghiệm phân biệt*.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

15. Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $7x^2 - 2x + 3 = 0$;

b) $5x^2 + 2\sqrt{10}x + 2 = 0$;

c) $\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{2}{3} = 0$;

d) $1,7x^2 - 1,2x - 2,1 = 0$.

16. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai để giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;

b) $6x^2 + x + 5 = 0$;

c) $6x^2 + x - 5 = 0$;

d) $3x^2 + 5x + 2 = 0$;

e) $y^2 - 8y + 16 = 0$;

f) $16z^2 + 24z + 9 = 0$.

Giải

15. a) $7x^2 - 2x + 3 = 0$ có $\begin{cases} a = 7 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 3 = 4 - 84 = -80$$

Vì $\Delta = -80 < 0$. Vậy phương trình vô nghiệm.

b) $5x^2 + 2\sqrt{10}x + 2 = 0$ có $\begin{cases} a = 5 \\ b = 2\sqrt{10} \\ c = 2 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{10})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 40 - 40 = 0$$

Vì $\Delta = 0$. Vậy phương trình có nghiệm kép.

c) $\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{2}{3} = 0$ có $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 7 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 49 - \frac{4}{3} = \frac{143}{3}$$

Vì $\Delta = \frac{143}{3} > 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

d) $1,7x^2 - 1,2x - 2,1 = 0$ có $\begin{cases} a = 1,7 \\ b = -1,2 \\ c = -2,1 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1,2)^2 - 4 \cdot 1,7 \cdot (-2,1) = 1,44 + 14,28 = 15,72$$

Vì $\Delta = 15,72 > 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

16. a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ có $a = 2$; $b = -7$; $c = 3$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-(-7) + 5}{2.2} = 3$; $x_2 = \frac{-(-7) - 5}{2.2} = \frac{1}{2}$

b) $6x^2 + x + 5 = 0$ có $a = 6$; $b = 1$; $c = 5$

$$\Delta = 1^2 - 4.6.5 = 1 - 120 = -119$$

Vì $\Delta = -119 < 0$. Vậy phương trình vô nghiệm.

c) $6x^2 + x - 5 = 0$ có $a = 6$; $b = 1$; $c = -5$

$$\Delta = 1^2 - 4.6.(-5) = 1 + 120 = 121 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-1 + 11}{2.6} = \frac{5}{6}; x_2 = \frac{-1 - 11}{2.6} = -1$$

d) $3x^2 + 5x + 2 = 0$ có $a = 3$; $b = 5$; $c = 2$

$$\Delta = 5^2 - 4.3.2 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-5 + 1}{2.3} = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{-5 - 1}{2.3} = -1.$$

e) $y^2 - 8y + 16 = 0$ có $a = 1$; $b = -8$; $c = 16$

$$\Delta = (-8)^2 - 4.1.16 = 64 - 64 = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm kép $y_1 = y_2 = \frac{-(-8)}{2.1} = 4$.

f) $16z^2 + 24z + 9 = 0$ có $a = 16$; $b = 24$; $c = 9$

$$\Delta = 24^2 - 4.16.9 = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm kép $z_1 = z_2 = \frac{-24}{2.16} = -\frac{3}{4}$.

§5. CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Công thức nghiệm thu gọn: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $b = 2b'$ (hay $b' = \frac{b}{2}$). Khi đó: $\Delta' = b'^2 - ac$

- Nếu $\Delta' < 0$: Phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta' = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$
- Nếu $\Delta' > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

2. Chú ý:

- Khi $a > 0$ và phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm thì $ax^2 + bx + c > 0$ với mọi giá trị của x .
- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có $a < 0$ thì nên đổi dấu hai vế của phương trình để có $a > 0$, khi đó giải dễ hơn.
- Đối với phương trình bậc hai khuyết: $ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$ nên dùng cách tính nghiệm trực tiếp sẽ nhanh hơn.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

17. Xác định a , b' , c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình:

a) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;

b) $13852x^2 - 14x + 1 = 0$;

c) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;

d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$.

18. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + 2b'x + c = 0$ và giải chúng. Sau đó, dùng bảng số hoặc máy tính để viết gần đúng nghiệm tìm được (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

a) $3x^2 - 2x = x^2 + 3$;

b) $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$;

c) $3x^2 + 3 = 2(x + 1)$;

d) $0,5x(x + 1) = (x - 1)^2$.

19. Đố. Đố em biết vì sao khi $a > 0$ và phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm thì $ax^2 + bx + c > 0$ với mọi giá trị của x ?

Giải

17. a) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ có $\begin{cases} a = 4 \\ b' = 2 \\ c = 1 \end{cases}$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 2^2 - 1.4 = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

$$\text{b) } 13852x^2 - 14x + 1 = 0 \text{ có } \begin{cases} a = 13852 \\ b' = -7 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-7)^2 - 13852.1 = 49 - 13852 = -13803 < 0$$

Vì $\Delta' < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

$$\text{c) } 5x^2 - 6x + 1 = 0 \text{ có } \begin{cases} a = 5 \\ b' = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-3)^2 - 5.1 = 9 - 5 = 4 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{4} = 2$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = \frac{-(-3) + 2}{5} = 1$; $x_2 = \frac{-(-3) - 2}{5} = \frac{1}{5}$.

$$\text{d) } -3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0 \text{ có } \begin{cases} a = -3 \\ b' = 2\sqrt{6} \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (2\sqrt{6})^2 - (-3).4 = 36 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{36} = 6$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{6} + 6}{-3} = \frac{2\sqrt{6} - 6}{3}; x_2 = \frac{-2\sqrt{6} - 6}{-3} = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{3}$$

$$18. \text{ a) } 3x^2 - 2x = x^2 + 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - x^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2.(1)x - 3 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - 2.(-3) = 7 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{7}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{7}}{2} \approx 1,82; x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{7}}{2} \approx -0,82.$$

$$\text{b) } (2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) \Leftrightarrow (2x)^2 - 2.2x.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 1 = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 - 1 - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(2\sqrt{2})x + 2 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-2\sqrt{2})^2 - 3.2 = 8 - 6 = 2 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \approx 1,41; \quad x_2 = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,47.$$

$$c) \quad 3x^2 + 3 = 2(x + 1) \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(1)x + 1 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - 3.1 = -2 < 0$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

$$d) \quad 0,5x(x + 1) = (x - 1)^2 \Leftrightarrow 0,5x^2 + 0,5x = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 0,5x^2 - 2,5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(2,5)x + 2 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-2,5)^2 - 1.2 = 4,25 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{4,25}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = 2,5 + \sqrt{4,25} \approx 4,56; \quad x_2 = 2,5 - \sqrt{4,25} \approx 0,44.$$

19. Ta biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) vô nghiệm thì:

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Hơn nữa khi $a > 0$ thì $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$.

Ta có: $ax^2 + bx + c = 0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ (chia hai vế cho $a \neq 0$)

$$= x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0.$$

Luyện tập

20. Giải các phương trình:

a) $25x^2 - 16 = 0;$

b) $2x^2 + 3 = 0;$

c) $4,2x^2 + 5,46x = 0;$

d) $4x^2 - 2\sqrt{3}x = 1 - \sqrt{3}.$

21. Giải vài phương trình của An Khô-va-ri-zmi (Xem Toán 7, tập 2, tr.26):

a) $x^2 = 12x + 288$;

b) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19$.

22. Không giải phương trình, hãy cho biết mỗi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm:

a) $15x^2 + 4x - 2005 = 0$;

b) $-\frac{19}{5}x^2 - \sqrt{7}x + 1890 = 0$?

23. Rada của một máy bay trực thăng theo dõi chuyển động của một ô tô trong 10 phút, phát hiện rằng vận tốc v của ô tô thay đổi phụ thuộc vào thời gian bởi công thức: $v = 3t^2 - 30t + 135$ (t tính bằng phút, v tính bằng km/h).

a) Tính vận tốc của ô tô khi $t = 5$ phút.

b) Tính giá trị của t khi vận tốc ô tô bằng 120km/h (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

24. Cho phương trình (ẩn x) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$.

a) Tính Δ' .

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt? Có nghiệm kép? Vô nghiệm?



20. a) $25x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{4}{5}$ và $x_2 = -\frac{4}{5}$.

b) $2x^2 + 3 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4.2.3 = -24 < 0$$

Vì $\Delta < 0$. Vậy phương trình vô nghiệm.

* Cách khác: Ta có VT = $2x^2 + 3 \geq 3$; VP = 0.

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) $4,2x^2 + 5,46x = 0 \Leftrightarrow x(4,2x + 5,46) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4,2x + 5,46 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1,3 \end{cases}$

d) $4x^2 - 2\sqrt{3}x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 4x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 + \sqrt{3} = 0$

$$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 4(-1 + \sqrt{3}) = 3 + 4 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-(-\sqrt{3}) + 2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{-(-\sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

21. a) $x^2 = 12x + 288 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 288 = 0$ có $\begin{cases} a = 1 \\ b' = -6 \\ c = -288 \end{cases}$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-6)^2 - 1(-288) = 324 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{324} = 18$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 6 + 18 = 24$; $x_2 = 6 - 18 = -12$.

b) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 228 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4.1.(-228) = 961 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{961} = 31.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-7 + 31}{2} = 12$; $x_2 = \frac{-7 - 31}{2} = -19$.

22. a) $15x^2 + 4x - 2005 = 0$. Ta có: $a.c = 15(-2005) < 0$

Vì $ac < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) $-\frac{19}{5}x^2 - \sqrt{7}x + 1890 = 0$. Ta có: $a.c = -\frac{19}{5}.1890 < 0$.

Vì $a.c < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

23. a) Thay $t = 5$ (phút) vào phương trình:

$$v = 3t^2 - 30t + 135 = 3.5^2 - 30.5 + 135 = 60 \text{ (km/h)}.$$

Vậy vận tốc của ô tô lúc $t = 5$ phút là 60km/h.

b) Để tìm t ta thay $v = 120$ vào phương trình $v = 3t^2 - 30t + 135$ rồi giải.

Thay vào ta có phương trình:

$$120 = 3t^2 - 30t + 135 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 5 = 0$$

$$\Delta' = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$t_1 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9,47; \quad t_2 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0,53.$$

Vì Radar chỉ theo dõi trong 10 phút nên $0 < t \leq 10$.

Do đó cả hai giá trị của t đều thích hợp.

Vậy: $t_1 \approx 9,47$ phút; $t_2 = 0,53$ phút.

24. Phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$ có $\begin{cases} a = 1 \\ b' = -(m - 1) \\ c = m^2 \end{cases}$

a) $\Delta' = b'^2 - ac = [-(m - 1)]^2 - 1 \cdot m^2 = m^2 - 2m + 1 - m^2 = 1 - 2m$

b) * Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

* Phương trình có nghiệm kép khi: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

* Phương trình vô nghiệm khi: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

§6. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hệ thức Vi-ét:

a) Định lí Vi-ét: Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

$$(a \neq 0) \text{ thì: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

b) Áp dụng để tính nhẩm nghiệm:

- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.
- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

2. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng:

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

25. Đối với mỗi phương trình sau, kí hiệu x_1 và x_2 là hai nghiệm (nếu có). Không giải phương trình, hãy điền vào những chỗ trống (...):

a) $2x^2 - 17x + 1 = 0$, $\Delta = \dots$, $x_1 + x_2 = \dots$, $x_1x_2 = \dots$;

b) $5x^2 - x - 35 = 0$, $\Delta = \dots$, $x_1 + x_2 = \dots$, $x_1x_2 = \dots$;

c) $8x^2 - x + 1 = 0$, $\Delta = \dots$, $x_1 + x_2 = \dots$, $x_1x_2 = \dots$;

d) $25x^2 + 10x + 1 = 0$, $\Delta = \dots$, $x_1 + x_2 = \dots$, $x_1x_2 = \dots$;

26. Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $35x^2 - 37x + 2 = 0$;

b) $7x^2 + 500x - 507 = 0$;

c) $x^2 - 49x - 50 = 0$;

d) $4321x^2 + 21x - 4300 = 0$.

27. Dùng hệ thức Vi-ét để tính nhẩm các nghiệm của phương trình:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

b) $x^2 + 7x + 12 = 0$.

28. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 32$, $uv = 231$;

b) $u + v = -8$, $uv = -105$;

c) $u + v = 2$, $uv = 9$.

25. a) Phương trình $2x^2 - 17x + 1 = 0$ có:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-17)^2 - 4.2.1 = 289 - 8 = 281 > 0$$

Suy ra: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-17}{2} = \frac{17}{2}$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

b) Phương trình $5x^2 - x - 35 = 0$ có:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.5.(-35) = 1 + 700 = 701 > 0$$

Suy ra: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{5} = \frac{1}{5}$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-35}{5} = -7$$

c) Phương trình $8x^2 - x + 1 = 0$ có:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.8.1 = 1 - 32 = -31 < 0$$

Vì $\Delta = -31 < 0$.

Vậy phương trình vô nghiệm nên không có x_1, x_2 .

Do đó không tính được $x_1 + x_2$ và x_1x_2 .

d) Phương trình $25x^2 + 10x + 1 = 0$ có:

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-5)^2 - 1.25 = 25 - 25 = 0$$

$$\text{Suy ra: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{25}$$

$$26. \text{ a) } 35x^2 - 37x + 2 = 0 \text{ có } \begin{cases} a = 35 \\ b = -37 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } a + b + c = 35 + (-37) + 2 = 0$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm: } x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{35}.$$

$$\text{b) } 7x^2 + 500x - 507 = 0$$

$$\text{Ta có: } a + b + c = 7 + 500 - 507 = 0$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm } x_1 = 1; x_2 = \frac{-507}{7}.$$

$$\text{c) Phương trình } x^2 - 49x - 50 = 0$$

$$\text{Ta có } a - b + c = 1 - (-49) + (-50) = 0$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm: } x_1 = 1; x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{(-50)}{1} = 50.$$

$$\text{d) Phương trình } 4321x^2 + 21x - 4300 = 0$$

$$\text{Ta có } a - b + c = 4321 - 21 + (-4300) = 0$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm: } x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{(-4300)}{4321} = \frac{4300}{4321}.$$

$$27. \text{ a) Phương trình } x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (4 + 3)x + 4.3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm: } x_1 = 4; x_2 = 3.$$

$$\text{b) Phương trình } x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-3 - 4)x + (-3)(-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm: } x_1 = -3; x_2 = -4.$$

28. a) Hai số u, v mà $u + v = 32, uv = 231$ là nghiệm số của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ hay } X^2 - 32X + 231 = 0$$

$$\Delta' = (-16)^2 - 1.231 = 256 - 231 = 25 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{25} = 5$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$X_1 = -(-16) + 5 = 21 \text{ và } X_2 = -(-16) - 5 = 11$$

Suy ra hai số cần tìm là: $u = 21, v = 11$ hoặc $u = 11, v = 21$.

b) Hai số u và v là nghiệm số của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ hay } X^2 - (-8)X + (-105) = 0$$

$$X^2 + 8X - 105 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 4^2 - 1 \cdot (-105) = 121 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{121} = 11$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $X_1 = -4 + 11 = 7$ và $X_2 = -4 - 11 = -15$

Suy ra hai số cần tìm là: $u = 7, v = -15$ hoặc $u = -15, v = 7$.

c) Hai số u, v là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ hay } X^2 - 2X + 9 = 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot 9 = -8 < 0.$$

Phương trình vô nghiệm. Vậy không có hai số u và v thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Luyện tập

29. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của mỗi phương trình sau: _____

a) $4x^2 + 2x - 5 = 0$;

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

c) $5x^2 + x + 2 = 0$;

d) $159x^2 - 2x - 1 = 0$.

30. Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm theo m .

a) $x^2 - 2x + m = 0$;

b) $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 = 0$.

31. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình:

a) $1,5x^2 - 1,6x + 0,1 = 0$;

b) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$;

c) $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0$;

d) $(m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 = 0$ với $m \neq 1$.

32. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 42, uv = 441$;

b) $u + v = -42, uv = -400$;

c) $u - v = 5, uv = 24$.

33. Chứng tỏ rằng nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm là x_1 và x_2 thì tam thức $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử như sau:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Áp dụng: Phân tích đa thức thành nhân tử.

a) $2x^2 - 5x + 3$;

b) $3x^2 + 8x + 2$.

Giải

29. a) $4x^2 + 2x - 5 = 0$

Ta có $\Delta' = 1^2 - 4(-5) = 21 > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

Suy ra $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{4}$.

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

Ta có $\Delta' = (-6)^2 - 9 \cdot 4 = 36 - 36 = 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

Suy ra $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{9}$

c) $5x^2 + x + 2 = 0$

Ta có $\Delta' = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 1 - 40 = -39 < 0$

Vậy phương trình vô nghiệm nên không có $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$

d) $159x^2 - 2x - 1 = 0$

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 159(-1) = 160 > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 + x_2 = \frac{2}{159}$; $x_1 x_2 = -\frac{1}{159}$.

30. a) $x^2 - 2x + m = 0$

Phương trình có nghiệm khi: $\Delta' = (-1)^2 - m = 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = m$

b) $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 = 0$

Phương trình có hai nghiệm khi:

$$\Delta' = (m - 1)^2 - m^2 = -2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

Suy ra: $x_1 + x_2 = -2(m - 1)$ và $x_1 x_2 = m^2$.

31. a) $1,5x^2 - 1,6x + 0,1 = 0$

Ta có $a + b + c = 1,5 + (-1,6) + 0,1 = 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{0,1}{1,5} = \frac{1}{15}$.

b) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$

Ta có $a - b + c = \sqrt{3} - [-(1 - \sqrt{3})] - 1 = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1 = 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0$

Ta có: $a + b + c = (2 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} + [-(2 + \sqrt{3})] = 0$

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{-(2 + \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}} = \frac{-(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = -7 - 4\sqrt{3}.$$

d) $(m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 = 0$ với $m \neq 1$

Ta có: $a + b + c = (m - 1) + [-(2m + 3)] + m + 4$
 $= m - 1 - 2m - 3 + m + 4 = 0.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{m + 4}{m - 1}$.

32. a) Hai số u và v là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ hay } X^2 - 42X + 441 = 0$$

$$\Delta' = (21)^2 - 441 \cdot 1 = 441 - 441 = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm kép: $X_1 = X_2 = 21$. Suy ra $u = v = 21$.

b) Hai số u và v là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ hay } X^2 - (-42)X + (-400) = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 42X - 400 = 0$$

$$\Delta' = 21^2 + 400 = 441 + 400 = 841 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{841} = 29$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $X_1 = -21 + 29 = 8$; $X_2 = -21 - 29 = -50$.

Suy ra $u = 8$ và $v = -50$ hoặc $u = -50$ và $v = 8$.

c) Đặt $t = -v$. Do đó $u - v = u + t = 5$; $ut = -24$.

Hai số u và t là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ hay } X^2 - 5X - 24 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 25 + 96 = 121 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $X_1 = \frac{5+11}{2} = 8$; $X_2 = \frac{5-11}{2} = -3$.

Vậy $u = 8$; $t = -3$ hay $u = -3$; $t = 8$

- Với $u = 8$; $t = -3$ hay $v = -t = -(-3) = 3$

- Với $u = -3$; $t = 8$ hay $v = -t = -8$

$$\begin{aligned} 33. * \text{ Ta có: } ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} \right] = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] \\ &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a[(x - x_1)x - (x - x_1)x_2] \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

* Áp dụng:

a) Cho $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Ta có $a + b + c = 2 - 5 + 3 = 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{3}{2}$

Do đó: $2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

b) Cho $3x^2 + 8x + 2 = 0$

$$\Delta' = 4^2 - 2 \cdot 3 = 16 - 6 = 10 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{10}$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{10}}{3}$; $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{10}}{3}$

Do đó: $3x^2 + 8x + 2 = 3 \left(x - \frac{-4 + \sqrt{10}}{3} \right) \left(x + \frac{4 + \sqrt{10}}{3} \right)$

hay $3x^2 + 8x + 2 = 3 \left(x + \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \right) \left(x + \frac{4 + \sqrt{10}}{3} \right)$.

§7. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Một số phương trình có dạng đặc biệt như: phương trình trùng phương, phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, một vài dạng phương trình bậc cao có thể đưa về phương trình tích hoặc giải được nhờ đặt ẩn số phụ.
- Học sinh nhớ rằng khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, trước hết phải tìm điều kiện của ẩn để phương trình có nghĩa (giải được) và sau khi tìm được giá trị của ẩn thì phải kiểm tra để chọn giá trị thỏa mãn điều kiện ấy.
- Khi giải phương trình trùng phương, nên lưu ý đến điều kiện của ẩn số phụ $t = x^2$, đó là $t \geq 0$.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

34. Giải các phương trình trùng phương:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$;

c) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$.

35. Giải các phương trình:

a) $\frac{(x+3)(x-3)}{3} + 2 = x(1-x)$;

b) $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$;

c) $\frac{4}{x+1} = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)(x+2)}$.

36. Giải các phương trình:

a) $(3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0$;

b) $(2x^2 + x - 4)^2 - (2x - 1)^2 = 0$.

Giải

34. a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (1)

- Đặt $x^2 = t$. Điều kiện $t \geq 0$

Thế vào (1) $\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

Phương trình có $a + b + c = 1 - 5 + 4 = 0$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $t_1 = 1$ (nhận); $t_2 = 4$ (nhận).

- Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

- Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình (1) có bốn nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2$.

b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ (1)

- Đặt $x^2 = t$. Điều kiện $t \geq 0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$ (*)

$$\Delta = (-3)^2 - 4.2(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

Vậy phương trình (*) có 2 nghiệm là:

$$t_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \text{ (nhận); } t_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \text{ (loại)}$$

- Với $t = x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

c) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$ (1)

- Đặt $x^2 = t$. Điều kiện $t \geq 0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 3t^2 + 10t + 3 = 0$ (*)

$$\Delta' = 5^2 - 3.3 = 25 - 9 = 16 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{16} = 4.$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm là:

$$t_1 = \frac{-5+4}{3} = -\frac{1}{3} \text{ (loại); } t_2 = \frac{-5-4}{3} = -3 \text{ (loại).}$$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm. Suy ra phương trình (1) cũng vô nghiệm.

35. a) $\frac{(x+3)(x-3)}{3} + 2 = x(1-x)$ (1)

Quy đồng và khử mẫu số, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow (x+3)(x-3) + 6 = 3x(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 + 6 = 3x - 3x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.4(-3) = 9 + 48 = 57 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{57}$$

Vậy phương trình có nghiệm:

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{57}}{2.4} = \frac{3 + \sqrt{57}}{8}; x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{57}}{2.4} = \frac{3 - \sqrt{57}}{8}.$$

b) $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$ (1)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5 \\ 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

Mẫu thức chung (MTC) = $(x - 5)(2 - x)$

$$\Leftrightarrow 4 - x^2 - 3x^2 + 21x - 30 = 6x - 30 \Leftrightarrow 4x^2 - 15x - 4 = 0$$

$$\Delta = (-15)^2 - 4.4(-4) = 225 + 64 = 289 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-(-15) + 17}{2.4} = 4; \quad x_2 = \frac{-(-15) - 17}{2.4} = -\frac{1}{4}.$$

Hai nghiệm x_1, x_2 đều thỏa mãn điều kiện để phương trình (1) có nghĩa.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 4; x_2 = -\frac{1}{4}$.

$$c) \frac{4}{x+1} = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)(x+2)} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \\ x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \end{cases}$$

Mẫu thức chung (MTC) = $(x+1)(x+2)$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow 4(x+2) = -x^2 - x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \text{ (loại)} \\ x_2 = -3 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vì $x_1 = -2$ không thỏa mãn điều kiện của ẩn nên phương trình chỉ có một nghiệm $x = -3$.

$$36. a) (3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (2) \\ x^2 - 4 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

* Giải phương trình (2): $3x^2 - 5x + 1 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4.3.1 = 25 - 12 = 13 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{13}}{2.3} = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}; \quad x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{13}}{2.3} = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}.$$

* Giải phương trình: $x^2 - 4 = 0 \quad (3)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_3 = -2; x_4 = 2$.

Tóm lại, phương trình đã cho có 4 nghiệm: $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}; x_{3,4} = \pm 2$.

b) $(2x^2 + x - 4)^2 - (2x - 1)^2 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (2x^2 + x - 4 + 2x - 1)(2x^2 + x - 4 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 3x - 5)(2x^2 - x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 = 0 & (2) \\ 2x^2 - x - 3 = 0 & (3) \end{cases}$$

* Giải phương trình: $2x^2 + 3x - 5 = 0$ (2)

Phương trình có $a + b + c = 2 + 3 - 5 = 0$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{5}{2}$.

* Giải phương trình $2x^2 - x - 3 = 0$ (3)

Phương trình có $a - b + c = 2 - (-1) - 3 = 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_3 = -1$; $x_4 = \frac{3}{2}$.

Tóm lại, phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{5}{2}; x_3 = -1; x_4 = \frac{3}{2}.$$

Luyện tập

37. Giải các phương trình trùng phương:

a) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;

b) $5x^4 + 2x^2 - 16 = 10 - x^2$;

c) $0,3x^4 + 1,8x^2 + 1,5 = 0$;

d) $2x^2 + 1 = \frac{1}{x^2} - 4$.

38. Giải các phương trình:

a) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = 23 - 3x$;

b) $x^3 + 2x^2 - (x - 3)^2 = (x - 1)(x^2 - 2)$;

c) $(x - 1)^3 + 0,5x^2 = x(x^2 + 1,5)$;

d) $\frac{x(x - 7)}{3} - 1 = \frac{x}{2} - \frac{x - 4}{3}$;

e) $\frac{14}{x^2 - 9} = 1 - \frac{1}{3 - x}$;

f) $\frac{2x}{x + 1} = \frac{x^2 - x + 8}{(x + 1)(x - 4)}$

39. Giải các phương trình bằng cách đưa về phương trình tích:

a) $(3x^2 - 7x - 10)[2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3] = 0$;

b) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$;

c) $(x^2 - 1)(0,6x + 1) = 0,6x^2 + x$;

d) $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$.

40. Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ:

a) $3(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 1 = 0$;

b) $(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$;

c) $x - \sqrt{x} = 5\sqrt{x} + 7$;

d) $\frac{x}{x+1} - 10 \cdot \frac{x+1}{x} = 3$

* Hướng dẫn:

a) Đặt $t = x^2 + x$, ta có phương trình $3t^2 - 2t - 1 = 0$. Giải phương trình này, ta tìm được hai giá trị của t . Thay mỗi giá trị của t vừa tìm được vào đẳng thức $t = x^2 + x$, ta được một phương trình của ẩn x . Giải mỗi phương trình này sẽ tìm được giá trị của x .

d) Đặt $\frac{x+1}{x} = t$ hoặc $\frac{x}{x+1} = t$.

Giải

37. a) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ (1)

Đặt $x^2 = t$. Điều kiện $t \geq 0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 9t^2 - 10t + 1 = 0$ (*)

Phương trình (*) có $a + b + c = 9 - 10 + 1 = 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm $t = 1$ và $t = \frac{1}{9}$ đều thỏa mãn điều kiện.

Khi $t = 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Khi $t = \frac{1}{9} = x^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{3}$.

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -\frac{1}{3}$; $x_4 = \frac{1}{3}$.

b) $5x^4 + 2x^2 - 16 = 10 - x^2$ (1)

$\Leftrightarrow 5x^4 + 3x^2 - 26 = 0$.

Đặt $x^2 = t$. Điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 5t^2 + 3t - 26 = 0$ (*)

$\Delta = 9 + 4 \cdot 5 \cdot 26 = 529 > 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{529} = 23$.

Vậy phương trình (*) có nghiệm $t_1 = 2$; $t_2 = -2,6$ (loại).

Khi $t = 2 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm: $x_1 = \sqrt{2}$ và $x_2 = -\sqrt{2}$.

c) $0,3x^4 + 1,8x^2 + 1,5 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2$. Điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 0,3t^2 + 1,8t + 1,5 = 0$ (*)

Phương trình (*) có $t_1 = -1$ (loại); $t_2 = -\frac{1,5}{0,3} = -5$ (loại)

Vì t_1 và t_2 đều âm, nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

* Cách khác: Ta nhận xét rằng vế trái $= 0,3x^4 + 1,8x^2 + 1,5 \geq 1,5$, còn vế phải bằng 0. Vậy phương trình vô nghiệm.

d) $2x^2 + 1 = \frac{1}{x^2} - 4$ (1). Điều kiện $x \neq 0$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2x^4 + x^2 = 1 - 4x^2 \Leftrightarrow 2x^4 + 5x^2 - 1 = 0$

Đặt $x^2 = t$. Điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 2t^2 + 5t - 1 = 0$ (*)

$\Delta = 25 + 8 = 33 > 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$.

Vậy phương trình (*) có nghiệm là:

$t_1 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}$ (nhận); $t_2 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}$ (loại)

Khi $x^2 = t = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{-5 + \sqrt{33}}}{2}$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm: $x_1 = \frac{\sqrt{-5 + \sqrt{33}}}{2}$; $x_2 = -\frac{\sqrt{-5 + \sqrt{33}}}{2}$.

38. a) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = 23 - 3x$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 = 23 - 3x \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4.2.2 = 25 - 16 = 9 > 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-5 + 3}{2.2} = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{-5 - 3}{2.2} = -2$.

b) $x^3 + 2x^2 - (x - 3)^2 = (x - 1)(x^2 - 2)$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x^2 + 6x - 9 = x^3 - x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 11 = 0$

$\Delta' = 16 + 22 = 38 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{38}$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{38}}{2}$; $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{38}}{2}$.

c) $(x - 1)^3 + 0,5x^2 = x(x^2 + 1,5)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 0,5x^2 = x^3 + 1,5x \Leftrightarrow 2,5x^2 - 1,5x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ (nhân hai vế với 2)}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.5.2 = 9 - 40 = -31 < 0$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

d) $\frac{x(x-7)}{3} - 1 = \frac{x}{2} - \frac{x-4}{3} \quad (1)$

$$\text{MTC} = 6$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2x(x-7) - 6 = 3x - 2(x-4)$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 14x - 6 = 3x - 2x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x - 14 = 0$$

$$\Delta = (-15)^2 - 4.2(-14) = 225 + 112 = 337 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{337}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-(-15) + \sqrt{337}}{2.2} = \frac{15 + \sqrt{337}}{4}; x_2 = \frac{-(-15) - \sqrt{337}}{2.2} = \frac{15 - \sqrt{337}}{4}$$

e) $\frac{14}{x^2 - 9} = 1 - \frac{1}{3 - x}$. Điều kiện $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$

$$\text{MTC: } x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 14 = x^2 - 9 + x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4.1(-20) = 81 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$$

Suy ra: $x_1 = \frac{-1 + 9}{2} = 4$ (nhận); $x_2 = \frac{-1 - 9}{2} = -5$ (nhận).

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 4$; $x_2 = -5$.

f) $\frac{2x}{x+1} = \frac{x^2 - x + 8}{(x+1)(x-4)} \quad (1)$

Điều kiện: $(x+1)(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ và } x \neq 4.$

$$\text{MTC} = (x+1)(x-4)$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2x(x-4) = x^2 - x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0.$

Phương trình có dạng $a - b + c = 1 - (-7) - 8 = 0$

Vậy phương trình có $x_1 = -1$ (loại); $x_2 = 8$ (nhận).

Vì $x_1 = -1$ không thỏa mãn điều kiện của ẩn nên phương trình (1) chỉ có một nghiệm là $x = 8$.

39. a) $(3x^2 - 7x - 10)[2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3] = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 7x - 10 = 0 & (2) \\ 2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3 = 0 & (3) \end{cases}$$

* Giải phương trình (2): $3x^2 - 7x - 10 = 0$.

Vì $a - b + c = 3 + 7 - 10 = 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm:

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{10}{3}.$$

* Giải phương trình (3): $2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3 = 0$.

Vì $a + b + c = 2 + 1 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 3 = 0$ nên phương trình (3) có hai

nghiệm: $x_3 = 1; x_4 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm: $x_1 = -1; x_2 = \frac{10}{3}; x_3 = 1; x_4 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$.

b) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow x^2(x + 3) - 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x_1 = -3; x_2 = -\sqrt{2}; x_3 = \sqrt{2}$.

c) $(x^2 - 1)(0,6x + 1) = 0,6x^2 + x$ (1)

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(0,6x + 1) - x(0,6x + 1) = 0 \Leftrightarrow (0,6x + 1)(x^2 - 1 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6x + 1 = 0 & (2) \\ x^2 - x - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

* Giải phương trình (2): $0,6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{0,6} = -\frac{5}{3}$.

* Giải phương trình (3): $x^2 - x - 1 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1(-1) = 5 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

$$d) (x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5)^2 - (x^2 - x + 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5 + x^2 - x + 5)(x^2 + 2x - 5 - x^2 + x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + x)(3x - 10) = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1)(3x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 1 = 0 \\ 3x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{10}{3}$.

$$40. a) 3(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 1 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 + x$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0$. (*)

Phương trình có $a + b + c = 3 - 2 - 1 = 0$.

Phương trình (*) có hai nghiệm $t = 1$; $t = -\frac{1}{3}$.

Với $t = 1$ thì có: $x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4.1(-1) = 5 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Với $t = -\frac{1}{3}$ thì có: $x^2 + x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = 3^2 - 4.3.1 = 9 - 12 < 0$$

Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

$$b) (x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 - 4x + 2$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 2)^2 + (x^2 - 4x + 2) - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0$ (*)

$$\Delta = 1^2 - 4.1(-6) = 25 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

Phương trình (*) có hai nghiệm: $t_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$; $t_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$.

- Với $t = 2$: (2) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

- Với $t = -3$: (2) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$
 $\Delta' = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 < 0$.

Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

c) $x - \sqrt{x} = 5\sqrt{x} + 7$ (1)

$$\Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} - 7 = 0$$

Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$). Khi đó (1) $\Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0$.

Phương trình có $a - b + c = 1 - (-6) - 7 = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $t_1 = -1$ (loại); $t_2 = 7$ (nhận)

Với $t = 7$ thì: $\sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = 7^2 = 49$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 49$.

d) $\frac{x}{x+1} - 10 \cdot \frac{x+1}{x} = 3$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ và } x \neq -1$.

Đặt $t = \frac{x}{x+1}$. Khi đó $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{t}$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow t - 10 \cdot \frac{1}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7.$$

Phương trình có hai nghiệm: $t_1 = \frac{-(-3)+7}{2} = 5$; $t_2 = \frac{-(-3)-7}{2} = -2$.

Với $t = 5$, ta có: $\frac{x}{x+1} = 5 \Leftrightarrow x = 5x + 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$ (nhận)

Với $t = -2$, ta có: $\frac{x}{x+1} = -2 \Leftrightarrow x = -2x - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ (nhận).

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -\frac{5}{4}$; $x_2 = -\frac{2}{3}$.

§8. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:

- * Bước 1: Lập phương trình.
 - Chọn ẩn số, đặt điều kiện cho ẩn số có nghĩa.
 - Dùng ẩn số và các số đã biết để tìm các số chưa biết cần thiết.
- * Bước 2: Giải phương trình.
- * Bước 3: Nhận xét và trả lời.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

41. Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau là 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?
42. Bác Thời vay 2 000 000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn một năm. Lẽ ra cuối năm bác phải trả cả vốn lẫn lãi. Song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm một năm nữa, số lãi của năm đầu được gộp vào với vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết hai năm bác phải trả tất cả là 2 420 000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm?
43. Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120km. Trên đường đi, xuồng có nghỉ lại 1 giờ ở thị trấn Năm Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường lúc đi 5km và với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.
44. Đố. Đố em tìm được một số mà một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị rồi nhân với một nửa của nó bằng một nửa đơn vị.

Giải

41. Gọi x là số mà một bạn (Minh hoặc Lan) đã chọn và số bạn kia chọn là $(x + 5)$.

Khi đó, tích của hai số là $x(x + 5)$

Theo đề bài, ta có phương trình: $x(x + 5) = 150$ hay $x^2 + 5x - 150 = 0$ (1)

Giải phương trình (1): $\Delta = 5^2 - 4.1.(-150) = 625$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{625} = 25$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x_1 = 10$; $x_2 = -15$.

Trả lời:

- Nếu bạn Minh chọn số 10 thì bạn Lan chọn số 15 hoặc ngược lại.
- Nếu bạn Minh chọn số - 15 thì bạn Lan chọn số -10 hoặc ngược lại.

42. Gọi x (%) là lãi suất ngân hàng cho vay trong một năm.

Điều kiện $x > 0$

- Khi đó, tiền lãi sau một năm là: $2\,000\,000 \times \frac{x}{100} = 20\,000x$ (đồng)

Sau một năm đầu cả vốn lẫn lãi là: $2\,000\,000 + 20\,000x$ (đồng)

- Tiền lãi năm thứ hai sẽ là: $(20\,000x + 200x^2)$ (đồng)
- Sau hai năm Bác Thời phải trả cả vốn lẫn lãi cho ngân hàng là:
 $2\,000\,000 + 20\,000x + 20\,000x + 200x^2 = 2\,000\,000 + 40\,000x + 200x^2$

Theo đề bài ta có phương trình:

$$2\,000\,000 + 40\,000x + 200x^2 = 2\,420\,000 \Leftrightarrow x^2 + 200x - 2100 = 0$$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 10$; $x_2 = -210$

Vì $x > 0$ nên ta chỉ chọn $x = 10$

Trả lời: Lãi suất ngân hàng cho vay là 10%/ năm.

43. Gọi x (km/h) là vận tốc xuống lúc đi. Điều kiện $x > 5$.

Khi đó vận tốc lúc về là $(x - 5)$ km/h

Thời gian đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi, trong đó có thời gian nghỉ 1 giờ tại Năm Căn, là $\frac{120}{x} + 1$ (giờ).

Đường về dài: $120 + 5 = 125$ (km) và thời gian về mất $\frac{125}{x - 5}$ (giờ).

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{120}{x} + 1 = \frac{125}{x - 5} \Leftrightarrow x^2 - 10x - 600 = 0$.

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 30$ (nhận); $x_2 = -20$ (loại).

Trả lời: Vận tốc của xuống lúc đi là 30km/h.

44. Gọi số phải tìm là x .

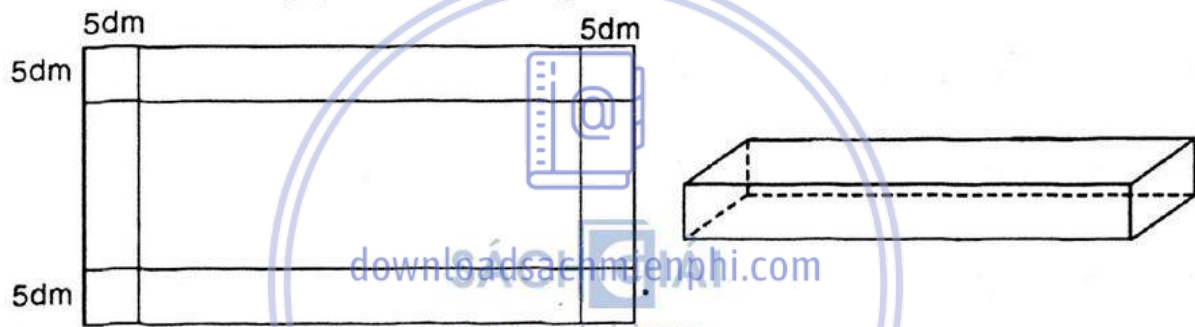
Khi đó, một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị là: $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

Giải phương trình, ta được $x_1 = -1$; $x_2 = 2$. Trả lời: Số phải tìm là -1 hoặc 2.

Luyện tập

6. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.
6. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 240m^2 . Nếu tăng chiều rộng 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất.
4. Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc của xe cô Liên là 3km/h nên bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.
4. Từ một miếng tôn hình chữ nhật người ta cắt ở bốn góc hình vuông có cạnh bằng 5dm để làm thành một cái thùng không có nắp có dung tích 1500dm^3 (hình dưới). Hãy tính kích thước của miếng tôn lúc đầu, biết rằng chiều dài của nó gấp đôi chiều rộng.



4. Hai đội thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 4 ngày xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội I hoàn thành công việc nhanh hơn đội II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong việc?
5. Miếng kim loại thứ nhất nặng 880g, miếng kim loại thứ hai nặng 858g. Thể tích miếng thứ nhất nhỏ hơn thể tích miếng thứ hai là 10cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất lớn hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 1 g/cm^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại.
5. Người ta đổ thêm 200g nước vào một dung dịch chứa 40g muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đổ thêm nước thì dung dịch chứa bao nhiêu nước?
5. Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30km. Một canô đi từ bến A đến bến B, nghỉ 40 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Kể từ lúc khởi hành đến khi về tới bến A hết tất cả 6 giờ. Hãy tìm vận tốc của canô trong nước yên lặng biết rằng vận tốc của nước chảy là 3 km/h.
5. Tỉ số vàng. Đố em chia được AB cho trước thành hai đoạn sao cho tỉ số giữa đoạn lớn với đoạn AB bằng tỉ số giữa đoạn nhỏ với đoạn lớn (hình dưới). Hãy tìm tỉ số ấy.

Đó chính là bài toán mà Ô-clit đưa ra từ thế kỉ III trước Công nguyên. Tỷ số nói trong bài toán được gọi là tỷ số vàng, còn phép chia nói trên được gọi là phép chia vàng hay phép chia hoàng kim.



* Hướng dẫn: Giả sử M là điểm chia và $AM > MB$. Gọi tỷ số cần tìm là x .

Giải

45. Gọi số tự nhiên bé là x . Điều kiện $x \geq 0$.

Khi đó, số tự nhiên liền sau là $(x + 1)$.

Tích của hai số này là $x(x + 1)$ và tổng của chúng là $x + (x + 1) = 2x + 1$

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$x(x + 1) = 2x + 1 + 109 \Leftrightarrow x^2 - x - 110 = 0.$$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 11$ (nhận); $x_2 = -10$ (loại).

Trả lời: Hai số phải tìm là 11 và 12.

46. Gọi $x(m)$ là chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật. Điều kiện: $x > 0$.

Vì diện tích mảnh đất bằng $240m^2$ nên chiều dài hình chữ nhật là: $\frac{240}{x}(m)$.

Khi tăng chiều rộng lên 3 mét và giảm chiều dài 4 mét thì mảnh đất mới có chiều rộng là: $(x + 3)$ (mét), chiều dài là $(\frac{240}{x} - 4)$ (mét) và diện tích là $(x + 3)(\frac{240}{x} - 4)(m^2)$.

Theo đề bài ta có phương trình: $(x + 3)(\frac{240}{x} - 4) = 240 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$.

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 12$ (nhận) và $x_2 = -15$ (loại).

Trả lời: Chiều rộng mảnh đất là 12 mét, chiều dài là: $240 : 12 = 20$ mét.

47. Gọi x (km/h) là vận tốc xe của bác Hiệp. Điều kiện $x > 3$. Khi đó, vận tốc xe của cô Liên là $(x - 3)$ (km/h).

Thời gian bác Hiệp đi từ làng lên tỉnh là $\frac{30}{x}$ (giờ) và thời gian cô Liên

đi từ làng lên tỉnh là $\frac{30}{x - 3}$ (giờ).

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{30}{x - 3} - \frac{30}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0$.

Giải phương trình ta được: $x_1 = 15$ (nhận); $x_2 = -12$ (loại).

Trả lời: Vận tốc xe của bác Hiệp là 15km/h và vận tốc xe của cô Liên là 12km/h.

48. Gọi x (dm) là chiều rộng của miếng tôn lúc đầu. Điều kiện $x > 10$. Khi đó, chiều dài của nó là $2x$ (dm).

Khi làm thành một cái thùng không nắp thì chiều dài của thùng là $(2x - 10)$ (dm), chiều rộng là $(x - 10)$ (dm) và chiều cao là 5 (dm). Khi đó, dung tích của thùng là: $5 \cdot (2x - 10)(x - 10)$ (dm³).

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$5 \cdot (2x - 10)(x - 10) = 1500 \Leftrightarrow x^2 - 15x - 100 = 0.$$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 20$ (nhận); $x_2 = -5$ (loại).

Trả lời: Miếng tôn lúc đầu có chiều rộng là 20dm và chiều dài là 40dm.

49. Gọi x (ngày) là thời gian đội I làm một mình xong công việc. Điều kiện: $x > 4$. Khi đó đội II một mình làm xong công việc hết $(x + 6)$ (ngày).

Mỗi ngày đội I làm xong được $\frac{1}{x}$ (công việc), đội II làm được $\frac{1}{x+6}$ (công

việc) và cả hai đội làm được $\frac{1}{4}$ (công việc).

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0.$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 6$ (nhận); $x_2 = -4$ (loại).

Trả lời: Một mình đội I làm trong 6 ngày thì xong công việc.

Một mình đội II làm trong 12 ngày thì xong công việc.

50. Gọi x (g/cm³) là khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất. Điều kiện $x > 1$. Khi đó khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $(x - 1)$ (g/cm³).

Thể tích miếng kim loại thứ nhất là $\frac{880}{x}$ (cm³).

Thể tích miếng kim loại thứ hai là $\frac{858}{x-1}$ (cm³).

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{858}{x-1} - \frac{880}{x} = 10 \Leftrightarrow 5x^2 + 6x - 440 = 0.$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 8,8$ (nhận); $x_2 = -10$ (loại).

Trả lời: Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là 8,8g/cm³.

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là 7,8g/cm³.

51. Gọi x (gam) là trọng lượng nước trong dung dịch trước khi đổ thêm nước vào. Điều kiện $x > 0$. Khi đó, nồng độ muối trong dung dịch là $\frac{40}{x+40}$.

Nếu đổ thêm 200 gam nước vào trong dung dịch thì trọng lượng của dung dịch sẽ là: $x + 40 + 200$ (gam) và nồng độ của dung dịch lúc bấy giờ là $\frac{40}{x+240}$.

Vì nồng độ của muối giảm 10% nên ta có phương trình:

$$\frac{40}{x+40} - \frac{40}{x+240} = \frac{10}{100} \Leftrightarrow x^2 + 280x - 70400 = 0.$$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 160$ (nhận); $x_2 = -440$ (loại).

Trả lời: Trước khi đổ thêm nước, trong dung dịch có 160 gam nước.

52. Gọi x (km/h) là vận tốc của canô khi nước yên lặng. Điều kiện: $x > 3$.

Khi đó, vận tốc của canô khi xuôi dòng là $(x + 3)$ (km/h) và vận tốc của canô khi ngược dòng là $(x - 3)$ (km/h).

Thời gian canô đi xuôi dòng là $\frac{30}{x+3}$ (giờ) và thời gian đi ngược dòng là

$$\frac{30}{x-3} \text{ (giờ), nghỉ ở bên B mất 40 phút} = \frac{2}{3} \text{ (giờ)}.$$

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{30}{x+3} + \frac{30}{x-3} + \frac{2}{3} = 6 \Leftrightarrow 4x^2 - 45x - 36 = 0.$$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 12$ (nhận); $x_2 = -\frac{3}{4}$ (loại).

Trả lời: Vận tốc của canô khi nước yên lặng là 12km/h.

53. Giả sử gọi a là độ dài đoạn AB

và M là điểm chia đoạn AB

Gọi độ dài của đoạn AM = x ,

điều kiện $0 < x < a$.

Khi đó MB = $a - x$.

Theo đề bài ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{MB}{MA}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x} \Leftrightarrow x^2 = a(a-x) \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$.

Giải phương trình: $\Delta = a^2 - 4.1.(-a^2) = 5a^2 > 0$

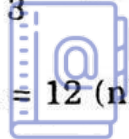
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}.$$

Phương trình có nghiệm là:

$$x_1 = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} \text{ (nhận)}; x_2 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} = \frac{-a(\sqrt{5} + 1)}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } AM = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

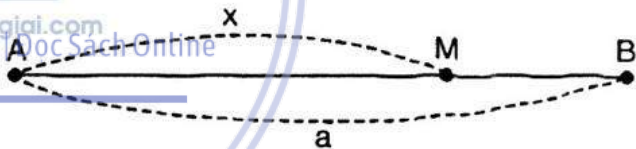
$$\text{Trả lời: Tỉ số cần tìm là: } \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$



downloaadsachmienphi.com

www.sachgiaokhoa.com

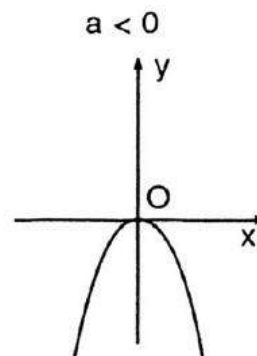
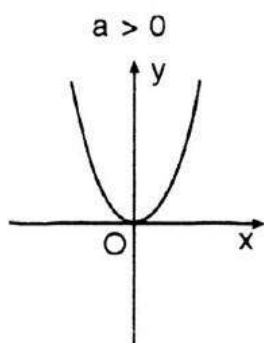
Download Sách Hay Đọc Sách Online



ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$):



- Hàm số nghịch biến khi $x < 0$, đồng biến khi $x > 0$.
- $y = 0$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số, đạt được khi $x = 0$.
- Hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.
- $y = 0$ là giá trị lớn nhất của hàm số, đạt được khi $x = 0$.

2. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta' = b'^2 - ac \quad (b = 2b')$$

- $\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt
- $\Delta' > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

- $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta' = 0$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$
- $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm
- $\Delta' < 0$: Phương trình vô nghiệm

3. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng:

- Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- Muốn tìm hai số u và v , biết $u + v = S$, $uv = P$, ta giải phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(Điều kiện để có u và v là $S^2 - 4P \geq 0$)

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$.
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{c}{a}$.

B. BÀI TẬP GIÁO KHOA CƠ BẢN

54. Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$ trên cùng một hệ trục tọa độ

a) Qua điểm $B(0; 4)$ kẻ đường thẳng song song với trục Ox . Nó cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ tại điểm M và M' . Tìm hoành độ của M và M' .

b) Tìm trên đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ điểm N có cùng hoành độ với M , điểm N' có cùng hoành độ với M' . Đường thẳng NN' có song song với Ox không? Vì sao? Tìm tung độ của N và N' bằng hai cách:

- Ước lượng trên hình vẽ;
- Tính toán theo công thức.

55. Cho phương trình $x^2 - x - 2 = 0$

a) Giải phương trình.

b) Vẽ hai đồ thị $y = x^2$ và $y = x + 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

c) Chứng tỏ rằng hai nghiệm tìm được trong câu a) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

56. Giải phương trình:

a) $3x^4 - 12x^2 + 9 = 0$; b) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$; c) $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$.

57. Giải các phương trình:

a) $5x^2 - 3x + 1 = 2x + 11$;

b) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$;

c) $\frac{x}{x-2} = \frac{10-2x}{x^2-2x}$;

d) $\frac{x+0,5}{3x+1} = \frac{7x+2}{9x^2-1}$;

e) $2\sqrt{3}x^2 + x + 1 = \sqrt{3}(x+1)$;

f) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 3(x + \sqrt{2})$.

58. Giải các phương trình:

a) $1,2x^3 - x^2 - 0,2x = 0$;

b) $5x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0$.

59. Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ:

a) $2(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) + 1 = 0$; b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$.

60. Với mỗi phương trình sau, đã biết một nghiệm (ghi kèm theo), hãy tìm nghiệm kia:

a) $12x^2 - 8x + 1 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$; b) $2x^2 - 7x - 39 = 0$, $x_1 = -3$;
c) $x^2 + x - 2 + \sqrt{2} = 0$, $x_1 = -\sqrt{2}$; d) $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$, $x_1 = 2$.

61. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 12$, $uv = 28$ và $u > v$; b) $u + v = 3$, $uv = 6$.

62. Cho phương trình $7x^2 + 2(m - 1)x - m^2 = 0$

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm?

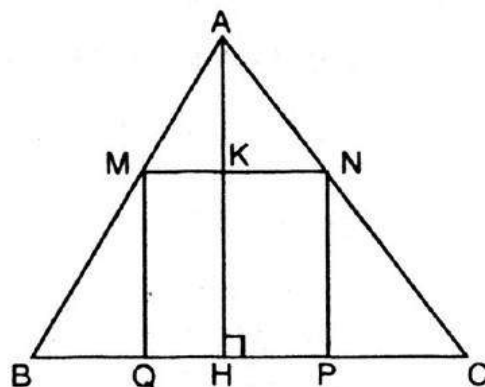
b) Trong trường hợp phương trình có nghiệm, dùng hệ thức Vi-ét, hãy tính tổng các bình phương hai nghiệm của phương trình theo m .

63. Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ 2 000 000 người lên 2 020 050 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng bao nhiêu phần trăm?

64. Bài toán yêu cầu tìm tích của một số dương với một số lớn hơn nó 2 đơn vị, nhưng bạn Quân nhầm đầu bài lại tính tích của một số dương với một số bé hơn nó 2 đơn vị. Kết quả của bạn Quân là 120. Hỏi nếu làm đúng đầu bài đã cho thì kết quả phải là bao nhiêu?

65. Một xe lửa đi từ Hà Nội vào Bình Sơn (Quảng Ngãi). Sau đó 1 giờ, một xe lửa khác đi từ Bình Sơn ra Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga ở chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường Hà Nội – Bình Sơn dài 900km.

66. Cho tam giác ABC có $BC = 16\text{cm}$, đường cao $AH = 12\text{cm}$. Một hình chữ nhật MNPQ có đỉnh M thuộc cạnh AB, đỉnh N thuộc cạnh AC còn hai đỉnh P và Q thuộc cạnh BC (hình bên). Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AB sao cho diện tích của hình chữ nhật bằng 36 cm^2 .



Giải

54. Vẽ đồ thị các hàm số:

* Hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$.

– Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

– Bảng giá trị:

x	... -2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1

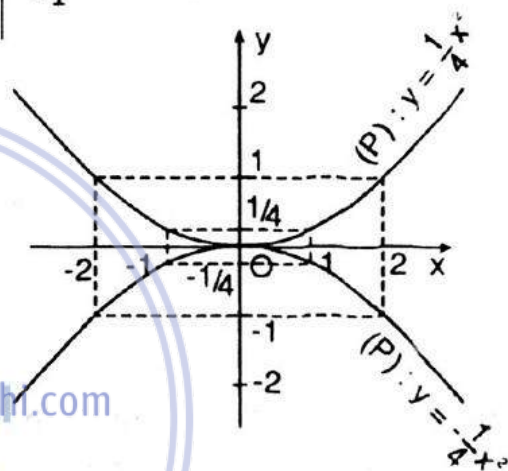
– Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$

là các Parabol có đỉnh là gốc tọa độ O và nhận Oy làm trục đối xứng. Đồ

thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ nằm trên trục

hoành, đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ nằm

dưới trục hoành.



a) Đường thẳng đi qua điểm B(0; 4) song song với trục hoành có phương trình $y = 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đường $y = 4$ và $y = \frac{1}{4}x^2$ là:

$$\frac{1}{4}x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Vậy đường thẳng $y = 4$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ tại điểm M có

hoành độ $x = 4$ và điểm M' có hoành độ $x = -4$.

b) Vì đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và đồ thị (P') của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$

đối xứng qua trục hoành nên điểm M có hoành độ $x = 4$ thì điểm N trên (P') cũng có hoành độ $x = 4$ và điểm M' có hoành độ $x = -4$ thì điểm N' trên (P) cũng có hoành độ $x = -4$.

Khi đó đường thẳng NN' song song với trục Ox vì hai điểm N và N' đều cách trục Ox một khoảng bằng 4 đơn vị.

- Tìm tung độ của N, N' bằng:
- Ước lượng trên hình vẽ (xem hình)
- Tính toán theo công thức: Ta có tọa độ điểm M là (4; 4); M' là (-4; 4). Điểm N là điểm đối xứng của điểm M(4; 4) qua trục Ox nên điểm N có tọa độ là N(4; -4); Điểm N' là điểm đối xứng của điểm M'(-4; 4) qua trục Ox nên điểm N' có tọa độ là N'(-4; -4).

Vậy tung độ qua điểm N và N' đều bằng -4.

55. a) Giải phương trình $x^2 - x - 2 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

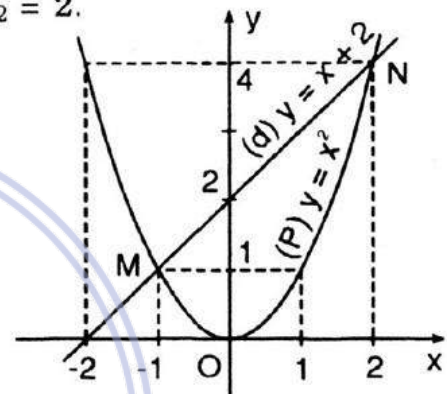
b) Vẽ các đồ thị:

* Hàm số $y = x^2$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



- Đồ thị hàm số $y = x^2$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ O và nhận Oy làm trục đối xứng.

* Hàm số $y = x + 2$

Đồ thị hàm số $y = x + 2$ là một đường thẳng đi qua hai điểm: A(0; 2); B(-2; 0).

c) Dựa vào đồ thị ta thấy (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm M(-1; 1) và N(2; 4).

Điều này chứng tỏ rằng (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1$; $x = 2$. Hai giá trị này cũng chính là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 2 = 0$ ở câu a).

56. a) Giải phương trình $3x^4 - 12x^2 + 9 = 0$ (1)

Đặt $x^2 = t$. Điều kiện $t \geq 0$

Thế vào (1), ta có: (1) $\Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0$

Phương trình có $a + b + c = 3 - 12 + 9 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm $t_1 = 1$ (nhận); $t_2 = 3$ (nhận).

- Khi $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

- Khi $t = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm: $x = \pm 1$; $x = \pm\sqrt{3}$

b) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2$. Điều kiện $t \geq 0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4.2.(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$t_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \text{ (nhận)}; t_2 = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ (loại)}$$

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2$. Điều kiện $t \geq 0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow t^2 + 5t + 1 = 0$

$$\Delta = 5^2 - 4.1.1 = 25 - 4 = 21 > 0$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$t_1 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} < 0 \text{ (loại)}; t_2 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2} < 0 \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

57. a) Giải phương trình $5x^2 - 3x + 1 = 2x + 11$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 1 - 2x - 11 = 0$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 5x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$
 (2)

(2) có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và có $a - b + c = 1 - (-1) - 2 = 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a} = 2$.

b) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$ (2)

Ta có (2) $\Leftrightarrow 6x^2 - 20x = 5x + 25 \Leftrightarrow 6x^2 - 25x - 25 = 0$

$$\Delta = (-25)^2 - 4.6.(-25) = 1225 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1225} = 35.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-(-25)+35}{2.6} = 5; \quad x_2 = \frac{-(-25)-35}{2.6} = -\frac{5}{6}.$$

$$c) \frac{x}{x-2} = \frac{10-2x}{x^2-2x} \quad (3)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x^2-2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{MTC: } x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$\text{Khi đó (3)} \Leftrightarrow x^2 = 10 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 10 = 0$$

$$\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-10) = 11 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm:

$$x_1 = -1 + \sqrt{11} \text{ (nhận); } x_2 = -1 - \sqrt{11} \text{ (nhận)}$$

$$d) \frac{x+0,5}{3x+1} = \frac{7x+2}{9x^2-1} \quad (4)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x+1 \neq 0 \\ 9x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{3}$$

$$\text{MTC: } 9x^2 - 1 \text{ và } 9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x+1)(3x-1)$$

$$\text{Khi đó (4)} \Leftrightarrow (x+0,5)(3x-1) = 7x+2 \Leftrightarrow 6x^2 - 13x - 5 = 0$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-5) = 289 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17.$$

Vậy phương trình có nghiệm:

$$x_1 = \frac{-(-13)+17}{2 \cdot 6} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} \text{ (nhận); } x_2 = \frac{-(-13)-17}{2 \cdot 6} = -\frac{1}{3} \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm: } x = \frac{5}{2}.$$

$$e) 2\sqrt{3}x^2 + x + 1 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x^2 + x + 1 - \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3}-1)x + 1 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{3}-1)^2 - 8\sqrt{3}(1-\sqrt{3}) = 25 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 3 = (5-\sqrt{3})^2 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(5-\sqrt{3})^2} = 5 - \sqrt{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}-1+5-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; x_2 = \frac{\sqrt{3}-1-5+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 &= 3(x + \sqrt{2}) \Leftrightarrow x^2 + (2\sqrt{2} - 3)x + 4 - 3\sqrt{2} = 0 \\ \Delta &= 8 - 12\sqrt{2} + 9 - 16 + 12\sqrt{2} = 1 > 0 \\ \sqrt{\Delta} &= 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{3 - 2\sqrt{2} + 1}{2} = 2 - \sqrt{2}; \quad x_2 = \frac{3 - 2\sqrt{2} - 1}{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

58. a) $1,2x^3 - x^2 - 0,2x = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow x(1,2x^2 - x - 0,2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1,2x^2 - x - 0,2 = 0 (*) \end{cases}$$

Giải (*): $1,2x^2 - x - 0,2 = 0$

Ta có: $a + b + c = 1,2 + (-1) + (-0,2) = 0$

Vậy (*) có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \frac{-0,2}{1,2} = -\frac{1}{6}$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -\frac{1}{6}$

b) $5x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0$ (2)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2(5x - 1) - (5x - 1) &= 0 \Leftrightarrow (5x - 1)(x^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ x = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình (2) có 3 nghiệm: $x_1 = \frac{1}{5}; x_2 = -1; x_3 = 1.$

59. a) $2(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) + 1 = 0$ (1)

Đặt $x^2 - 2x = t$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0$ (*)

Phương trình (*) có $a - b + c = 2 - 3 + 1 = 0$

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm: $t_1 = -1; t_2 = -\frac{1}{2}.$

- Với $t = -1$. Ta có: $x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1$

- Với $t = -\frac{1}{2}$. Ta có: $x^2 - 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Delta' = (-2)^2 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{2}$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_3 = \frac{-(-2) + \sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \text{ và } x_4 = \frac{-(-2) - \sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm:

$$x_1 = x_2 = 1; x_3 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; x_4 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$ (2). Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$ (*)

Phương trình có $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$.

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm: $t_1 = 1; t_2 = \frac{c}{a} = 3$.

- Với $t = 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.1 = -3 < 0$$

Phương trình vô nghiệm.

- Với $t = 3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.1.1 = 9 - 4 = 5 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

60. Vì đây là các phương trình bậc hai đều có nghiệm ($\Delta \geq 0$) nên ta chỉ cần áp dụng định lí Vi-ét để tìm nghiệm còn lại. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Ta có: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

a) $12x^2 - 8x + 1 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$

Ta có: $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{2} x_2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{6}$

b) $2x^2 - 7x - 39 = 0$, $x_1 = -3$

Ta có: $x_1 \cdot x_2 = \frac{-39}{2} \Leftrightarrow -3x_2 = \frac{-39}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{13}{2}$.

c) $x^2 + x - 2 + \sqrt{2} = 0$, $x_1 = -\sqrt{2}$

Ta có: $x_1 \cdot x_2 = \sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \cdot x_2 = \sqrt{2} - 2$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{\sqrt{2} - 2}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{-\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

d) $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (1), $x_1 = 2$

Vì $x_1 = 2$ là một nghiệm của phương trình (1) nên:

$$2^2 - 2m \cdot 2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Khi $m = 1$. Ta có: $x_1 \cdot x_2 = m - 1 \Leftrightarrow 2 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$

61. a) Đề bài cho $u + v = 12$; $uv = 28$ và $u > v$.

Vậy u và v là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ hay } X^2 - 12X + 28 = 0$$

$$\Delta' = (-6)^2 - 2 \cdot 28 = 36 - 28 = 8 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Ta có: $X_1 = -(-6) + 2\sqrt{2} = 6 + 2\sqrt{2}$

$$X_2 = -(-6) - 2\sqrt{2} = 6 - 2\sqrt{2}$$

Vì $6 + 2\sqrt{2} > 6 - 2\sqrt{2}$ nên chọn $u = 6 + 2\sqrt{2}$ và $v = 6 - 2\sqrt{2}$.

b) Biết $u + v = 3$ và $uv = 6$.

Do đó u và v là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ hay } X^2 - 3X + 6 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 9 - 24 = -15 < 0$$

Phương trình vô nghiệm. Vậy không có hai số u và v nào thỏa mãn các điều kiện đã cho.

62. Xét phương trình: $7x^2 + 2(m - 1)x - m^2 = 0$ (1)

a) Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0$.

Ta có: $\Delta' = (m - 1)^2 - 7(-m^2) = (m - 1)^2 + 7m^2 \geq 0$ với mọi m .

Vậy phương trình (1) luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left[\frac{-2(m-1)}{7} \right]^2 - 2 \cdot \frac{-m^2}{7}$$

$$= \frac{4m^2 - 8m + 4}{49} + \frac{2m^2}{7} = \frac{4m^2 - 8m + 4 + 14m^2}{49} = \frac{18m^2 - 8m + 4}{49}$$

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 = \frac{18m^2 - 8m + 4}{49}$$

- 63.** Gọi x (%) là tỉ lệ dân số trung bình mỗi năm. Điều kiện: $x > 0$. Khi đó:
Sau một năm, dân số của thành phố là:

$$2\,000\,000 + 2\,000\,000 \cdot \frac{x}{100} = 2\,000\,000 + 20\,000x \text{ (người)}$$

Sau hai năm, dân số của thành phố là:

$$\begin{aligned} 2\,000\,000 + 20\,000x + (2\,000\,000 + 20\,000x) \cdot \frac{x}{100} \\ = 2\,000\,000 + 40\,000x + 200x^2 \text{ (người)} \end{aligned}$$

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$2000000 + 40000x + 200x^2 = 2020050 \Leftrightarrow 4x^2 + 800x - 401 = 0$$

$$\Delta' = 400^2 - 4(-401) = 160\,000 + 1604 = 161\,604 > 0$$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{161104} = 402$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-400 + 402}{4} = 0,5 \text{ (nhận)}, x_2 = \frac{-400 - 402}{4} = -200,5 < 0 \text{ (loại)}$$

Vì $x > 0$ nên x_2 không thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy tỉ lệ tăng dân số trung bình hàng năm của thành phố là 0,5%.

- 64.** Gọi x là số dương mà đầu bài cho, $x \in \mathbb{N}^*$

Bạn Quân đã chọn số $(x - 2)$ để nhân với x .

Theo đề bài, ta có: $x(x - 2) = 120$ hay $x^2 - 2x - 120 = 0$

Giải phương trình ta được $x = 12$ (nhận)

Nhưng đầu bài yêu cầu tìm tích của x với $x + 2$.

Vậy kết quả đúng phải là $12 \cdot 14 = 168$

- 65.** Gọi x (km/h) là vận tốc của xe thứ nhất. Điều kiện $x > 0$.

Khi đó vận tốc của xe lửa thứ hai là $x + 5$ (km/h).

Thời gian xe lửa thứ nhất đi từ Hà Nội đến chỗ gặp nhau là: $\frac{450}{x}$ (giờ).

Thời gian xe lửa thứ hai đi từ Bình Sơn đến chỗ gặp nhau là: $\frac{450}{x + 5}$ (giờ).

Vì xe lửa thứ hai đi sau 1 giờ, nghĩa là thời gian đi đến chỗ gặp nhau ít hơn xe thứ nhất 1 giờ. Do đó, ta có phương trình:

$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2250 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 45$ (nhận); $x_2 = -50$ (loại)

Vậy: Vận tốc của xe lửa thứ nhất là 45km/h.

Vận tốc của xe lửa thứ hai là 50km/h.

66. Để xác định vị trí của M, ta chỉ cần tính độ dài của đoạn AK.

Gọi x (cm) là độ dài của đoạn AK. Điều kiện: $0 < x < 12$.

Vì $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ nên: $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AK}{AH} = \frac{x}{12}$.

$$\text{Suy ra } MN = \frac{16x}{12} = \frac{4x}{3}.$$

Ta còn có: $MQ = KH = 12 - x$

Do đó diện tích hình chữ nhật MNPQ là:

$$(12 - x) \frac{4x}{3}.$$

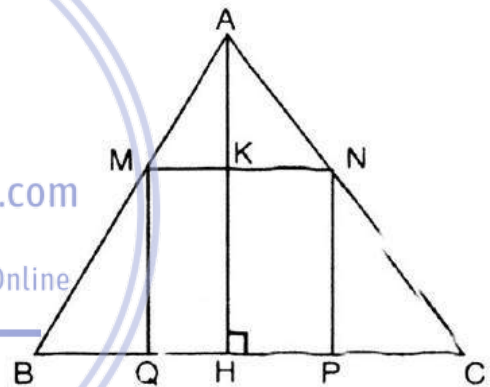
Theo đề bài ta có phương trình:

$$(12 - x) \frac{4x}{3} = 36 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 = 0.$$

Giải phương trình ta được:

$$x_1 = 9 \text{ (nhận) hoặc } x_2 = 3 \text{ (nhận)}$$

Vậy độ dài của đoạn AK = 3cm hoặc 9cm. Khi có M sẽ có hai vị trí trên AB nhưng diện tích hình chữ nhật MNPQ luôn bằng 36cm^2 .



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

1. Cho (P): $y = ax^2$ đi qua điểm A(4; 4), khi đó hệ số a bằng:

- A. $a = 2$; B. $a = \frac{1}{2}$; C. $a = \frac{1}{4}$; D. $a = 3$.

2. Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $S = \{0; 2\}$; B. $S = \{1; 2\}$; C. $S = \{2; 3\}$; D. $S = \emptyset$.

3. Phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi:

- A. $m \leq 4$; B. $m \geq 4$; C. $m > 4$; D. $m < 4$.

4. Phương trình $2x^2 - mx + 2 = 0$ có nghiệm kép khi:
 A. $m = \pm 4$; B. $m = \pm 16$; C. $m = 4$; D. $m = -4$.
5. Phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ vô nghiệm khi:
 A. $m = 1$; B. $m = -1$; C. $m > 1$; D. $m < 1$.
6. Chọn phát biểu đúng sau đây:
 A. Nếu hai số x_1 và x_2 có tổng bằng S và tích bằng P thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.
 B. Nếu $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ thì x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).
 C. Cả hai câu A. và B. đều đúng;
 D. Cả hai câu A. và B. đều sai.
7. Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm x_1 ($x_1 \neq 0$) biết trước thì nghiệm còn lại x_2 được tính bằng công thức nào sau đây:
 A. Tính Δ (hoặc Δ'); B. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;
 C. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; D. Cả câu B. và C.
8. Giá trị của m để phương trình $2x^2 - 3x + m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là:
 A. $m < 5$; B. $m > 5$; C. $m < -5$; D. $m > -5$
9. Cho hàm số $y = (m + 2)x^2$ có giá trị nhỏ nhất khi:
 A. $m \geq -2$; B. $m \geq 2$; C. $m > -2$; D. $m > 2$.
10. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ bằng:
 A. $-\frac{b}{a}$; B. $\frac{c}{a}$; C. $\frac{b}{c}$; D. $-\frac{b}{c}$

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1. C | 2. B | 3. D | 4. A | 5. C |
| 6. C | 7. D | 8. A | 9. C | 10. D |

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

§1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Góc ở tâm:

Định nghĩa: Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

2. Số đo cung:

a) Định nghĩa:

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó:

$$\text{sđ } \widehat{AmB} = \widehat{AOB} = \alpha$$

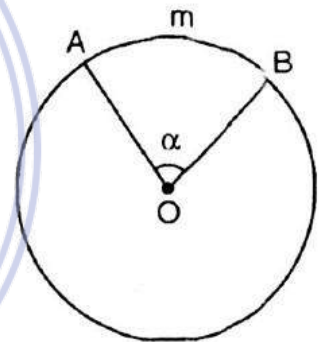
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ.

$$\text{sđ } \widehat{AnB} = 360^\circ - \text{sđ } \widehat{AmB} = 360^\circ - \alpha$$

- Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

b) Chú ý:

- Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180° .
- Cung lớn có số đo lớn hơn 180° .
- Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có "cung không" với số đo là 0° .



3. So sánh hai cung:

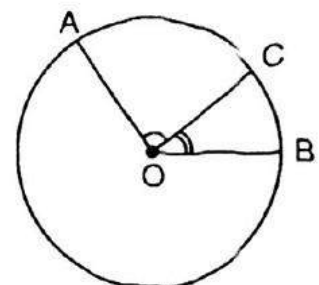
- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

4. Khi nào thì $\text{sđ } \widehat{AB} = \text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{CB}$?

• Định lý:

Nếu C là một điểm trên cung AB thì:

$$\text{sđ } \widehat{AB} = \text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{CB}.$$



II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho tam giác đều ABC. Gọi O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác.

a) Các bán kính OA, OB, OC tạo thành bao nhiêu góc ở tâm? Mỗi góc đó có số đo bao nhiêu độ?

b) Các điểm A, B, C xác định những cung nào? Cho biết số đo của các cung đó.

Giải

- a) - Các bán kính OA, OB, OC tạo thành 3 góc ở tâm $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ và $\widehat{COA}$.
 - Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên 3 đường trung trực của 3 cạnh cũng chính là 3 đường phân giác của 3 góc của tam giác. Tâm O của đường tròn là giao điểm 3 đường phân giác của 3 góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

$$\text{Do đó: } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

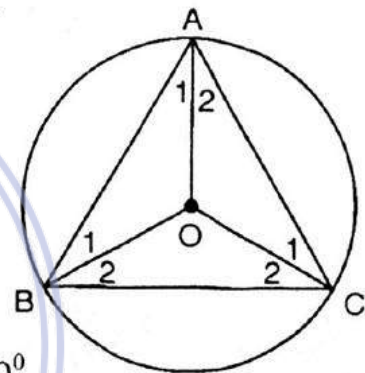
$$= \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \quad (1)$$

Vì $\triangle ABC$ đều nên $AB = AC = BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AOB = \triangle AOC = \triangle BOC$.

$$\text{Ta có: } \widehat{AOB} = 180^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$$



- b) Các điểm A, B, C $\in$ (O) xác định ba cung nhỏ: $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$. Mỗi cung nhỏ lại có một cung lớn tương ứng, đó là: $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$.

- Ta có $\widehat{AOB}$ chắn cung nhỏ AB, mà $\widehat{AOB} = 120^\circ$

$$\text{Do đó: } \text{sđ } \widehat{AB} = 120^\circ \text{ và } \text{sđ } \widehat{ACB} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ.$$

- Tương tự: $\text{sđ } \widehat{CB} = 120^\circ$ và $\text{sđ } \widehat{BAC} = 240^\circ$

$$\text{sđ } \widehat{CA} = 120^\circ \text{ và } \text{sđ } \widehat{ABC} = 240^\circ.$$

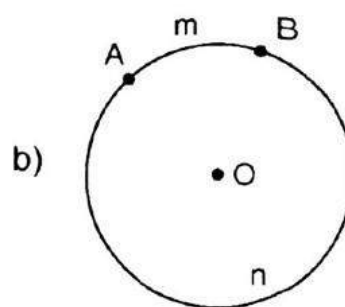
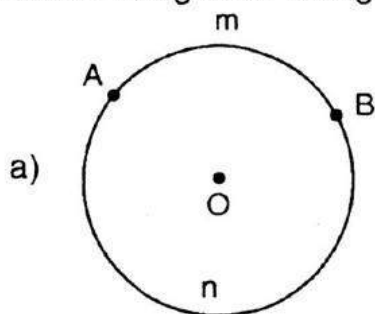
B. Bài tập giáo khoa căn bản

1. Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau:

- a) 3 giờ; b) 5 giờ; c) 6 giờ; d) 12 giờ; e) 20 giờ?

2. Cho hai đường thẳng xy và st cắt nhau tại O, trong các góc tạo thành có góc 40° . Vẽ một đường tròn tâm O. Tính số đo của các góc ở tâm xác định bởi hai trong bốn tia gốc O.

3. Trên các hình a, b hãy dùng dụng cụ đo góc để tìm số đo cung $\widehat{AmB}$. Từ đó, tính số đo cung $\widehat{AnB}$ tương ứng.



Giải

1. Trên mặt đồng hồ người ta chia làm 12 phần bằng nhau, mỗi phần có số đo là $360^\circ : 12 = 30^\circ$

- a) Lúc 3 giờ, kim giờ và kim phút tạo thành góc ở tâm có số đo là $30^\circ \times 3 = 90^\circ$.
 b) Lúc 5 giờ, kim giờ và kim phút tạo thành góc ở tâm có số đo là $30^\circ \times 5 = 150^\circ$.
 c) Lúc 6 giờ, kim giờ và kim phút tạo thành góc ở tâm có số đo là $30^\circ \times 6 = 180^\circ$.
 d) Lúc 12 giờ, kim giờ và kim phút tạo thành góc ở tâm có số đo là 0° .
 e) Lúc 20 giờ (hay 8 giờ tối) kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành góc ở tâm một góc $30^\circ \times 4 = 120^\circ$.

2. Hai đường thẳng xy và st cắt nhau tại O . (O là tâm của đường tròn) tạo thành 6 góc ở tâm: $\widehat{xOs}$, $\widehat{sOy}$, $\widehat{yOt}$, $\widehat{tOx}$, $\widehat{xOy}$, $\widehat{sOt}$.

Ta có $\widehat{xOs} = \widehat{yOt} = 40^\circ$ (hai góc đối đỉnh)

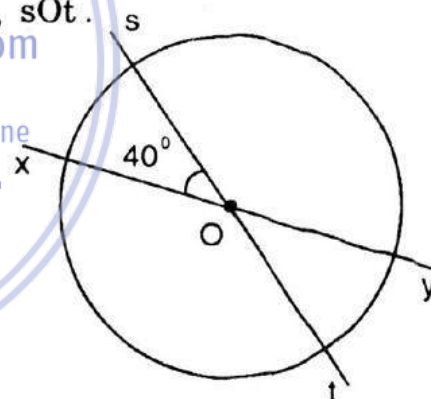
Vì $\widehat{xOs}$ và $\widehat{sOy}$ là hai góc kề bù, nên:

$$\widehat{xOs} + \widehat{sOy} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{sOy} = 180^\circ - \widehat{xOs} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

Vậy $\widehat{sOy} = \widehat{tOx} = 140^\circ$ (đối đỉnh)

Ta có: $\widehat{xOy} = \widehat{sOt} = 180^\circ$ (góc bẹt)



3. * Hình a: Dùng thước đo góc ta đo được góc nhỏ $\widehat{AOB}$ có số đo bằng 124° .

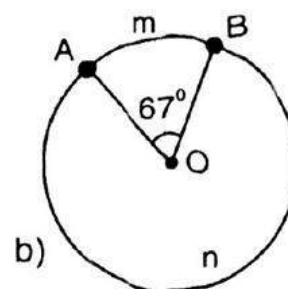
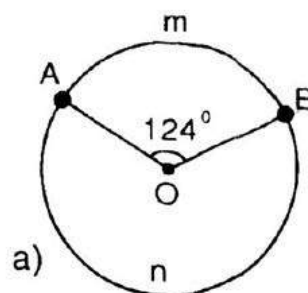
Suy ra số đo $\widehat{AmB} = \widehat{AOB} = 124^\circ$.

$$\text{sđ } \widehat{AnB} = 360^\circ - \text{sđ } \widehat{AmB} = 360^\circ - 124^\circ = 236^\circ$$

- * Hình b: Dùng thước đo góc ta đo được góc nhỏ $\widehat{AOB}$ có số đo bằng 67° .

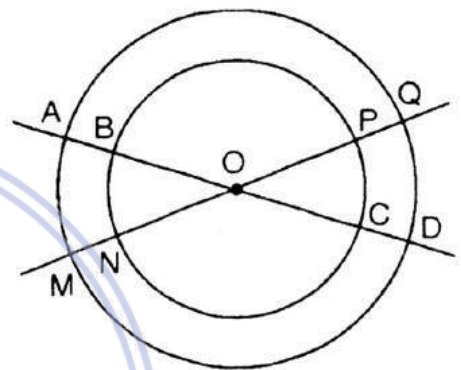
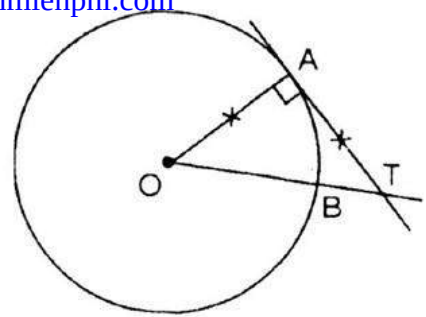
Suy ra số đo $\widehat{AmB} = \widehat{AOB} = 67^\circ$.

$$\text{sđ } \widehat{AnB} = 360^\circ - \text{sđ } \widehat{AmB} = 360^\circ - 67^\circ = 293^\circ$$



Luyện tập

4. Xem hình bên. Tính số đo của góc ở tâm AOB và số đo cung lớn AB.
5. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M. Biết $\widehat{AMB} = 35^\circ$.
 - a) Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB.
 - b) Tính số đo mỗi cung AB (cung lớn và cung nhỏ).
6. Cho tam giác đều ABC. Gọi O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C.
 - a) Tính số đo các góc ở tâm tạo bởi hai trong ba bán kính OA, OB, OC.
 - b) Tính số đo các cung tạo bởi hai trong ba điểm A, B, C.
7. Cho hai đường tròn cùng tâm O với bán kính khác nhau. Hai đường thẳng đi qua O cắt hai đường tròn đó tại các điểm A, B, C, D, M, N, P, Q (hình bên)
 - a) Em có nhận xét gì về số đo của các cung nhỏ AM, CP, BN, DQ?
 - b) Hãy nêu tên các cung nhỏ bằng nhau.
 - c) Hãy nêu tên hai cung lớn bằng nhau.
8. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai? Vì sao?
 - a) Hai cung bằng nhau thì có số đo bằng nhau.
 - b) Hai cung có số đo bằng nhau thì bằng nhau.
 - c) Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn là cung lớn hơn.
 - d) Trong hai cung trên một đường tròn, cung nào có số đo nhỏ hơn thì nhỏ hơn.
9. Trên đường tròn tâm O lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AOB} = 100^\circ$, $\widehat{AC} = 45^\circ$. Tính số đo của cung nhỏ BC và cung lớn BC. (Xét cả hai trường hợp: điểm C nằm trên cung nhỏ AB, điểm C nằm trên cung lớn AB).



Giải

4. Theo hình vẽ, tam giác AOT là tam giác vuông cân tại A.

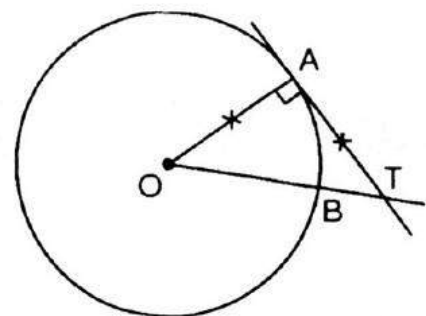
Do đó: $\widehat{AOT} = 45^\circ$. Suy ra $\widehat{AB} = \widehat{AOT} = 45^\circ$.

Khi đó $\widehat{AB}$ (cung lớn) $= 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$.

5. a) Ta có MA và MB là hai tiếp tuyến với đường tròn (O), do đó:

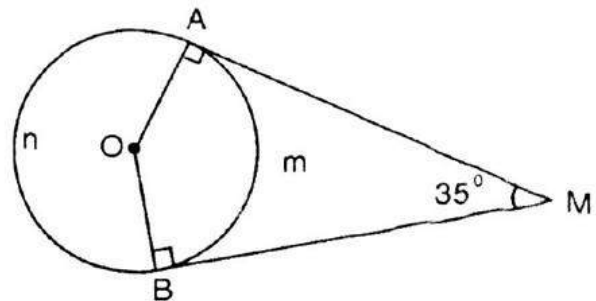
$$OA \perp MA \text{ hay } \widehat{OAM} = 90^\circ$$

$$\text{và } OB \perp MB \text{ hay } \widehat{OBM} = 90^\circ.$$



Xét tứ giác OAMB, ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{O} + \widehat{A} + \widehat{M} + \widehat{B} &= 360^\circ \\ \Rightarrow \widehat{O} &= 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{M} + \widehat{B}) \\ &= 360^\circ - (90^\circ + 35^\circ + 90^\circ) \\ \widehat{O} &= 360^\circ - 215^\circ = 145^\circ.\end{aligned}$$



Vậy hai bán kính OA, OB tạo thành góc ở tâm $\widehat{AOB}$ có số đo là 145° .

b) Góc $\widehat{AOB}$ chắn cung $\widehat{AmB}$. Do đó: $sđ \widehat{AmB} = \widehat{AOB} = 145^\circ$

$$sđ \widehat{AnB} = 360^\circ - sđ \widehat{AmB}$$

$$sđ \widehat{AnB} = 360^\circ - 145^\circ = 215^\circ.$$

6. Xem bài tập mẫu.

7. a) Vì hai đường tròn đồng tâm (có bán kính khác nhau) nên các góc:

$$\widehat{AOM} = \widehat{BON} = \widehat{QOD} = \widehat{POC}$$

Do đó, các cung nhỏ AM, CP, BN, DQ cũng có cùng số đo.

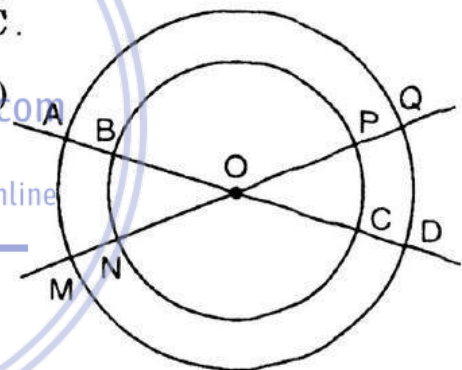
b) Trên (O; OA), ta có $\widehat{AQ} = \widehat{MD}$; $\widehat{AM} = \widehat{DQ}$.

Trên (O; OB), ta có $\widehat{BN} = \widehat{CP}$ và $\widehat{BP} = \widehat{NC}$.

c) Vì $sđ \widehat{AM} = sđ \widehat{DQ}$ (do 2 góc ở tâm bằng nhau)

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } sđ \widehat{AQM} &= 360^\circ - sđ \widehat{AM} \\ &= 360^\circ - sđ \widehat{DQ} = sđ \widehat{QAD}\end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{AQM} = \widehat{QAD}$.



8. a) ĐÚNG: Do định lý về so sánh 2 cung.

b) SAI: Vì không nói rõ hai cung đó cùng nằm trên một đường tròn hay trên hai đường tròn bằng nhau không?

c) SAI: - Lí luận như câu b).

d) ĐÚNG: - Lí luận như câu a).

9. a) Vì $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm nên $sđ \widehat{AB} = \widehat{AOB} = 100^\circ$.

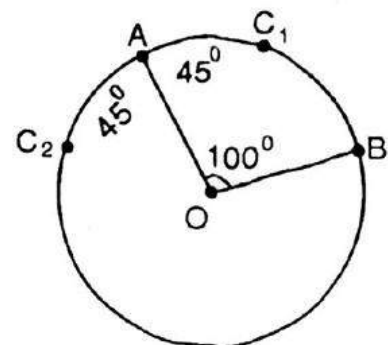
Khi điểm C_1 nằm trên cung nhỏ AB, tức là điểm C_1 nằm giữa A và B. ta có:

$$sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{AC_1} + sđ \widehat{C_1B}$$

$$\Rightarrow sđ \widehat{BC_1} = sđ \widehat{AB} - sđ \widehat{AC_1} = 100^\circ - 45^\circ = 55^\circ$$

Khi đó cung lớn $\widehat{BC_1}$ có số đo:

$$\text{Số đo cung lớn } \widehat{BC_1} = 360^\circ - 55^\circ = 305^\circ$$



b) Khi điểm C_2 nằm trên cung lớn AB .

Khi đó điểm A nằm giữa hai điểm B và C_2 nên:

$$\text{Số đo cung nhỏ } BC_2 = \text{sđ } \widehat{AB} + \text{sđ } \widehat{AC_2} = 100^\circ + 45^\circ = 145^\circ$$

$$\text{Số đo cung lớn } BC_2 = 360^\circ - 145^\circ = 215^\circ.$$

§2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Định lí 1: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:
 - Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
 - Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

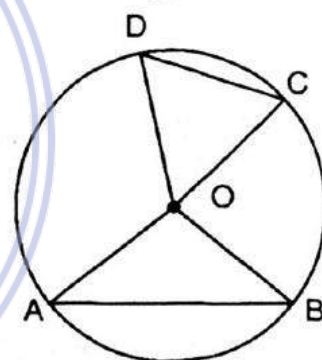
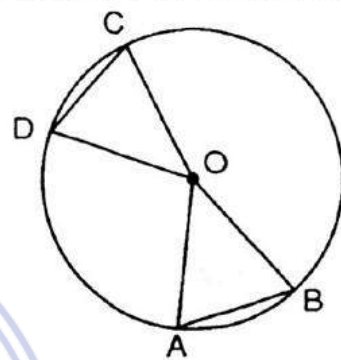
Ta có: a) $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD$

b) $AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$

- Định lí 2: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:
 - Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
 - Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

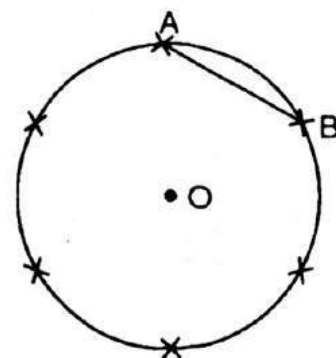
Ta có: a) $\widehat{AB} > \widehat{CD} \Rightarrow AB > CD$

b) $AB > CD \Rightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD}$



II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

10. a) Vẽ đường tròn tâm O , bán kính $R = 2\text{cm}$.
Nêu cách vẽ cung AB có số đo bằng 60° . Hỏi dây AB dài bao nhiêu xentimet?
- b) Làm thế nào để chia được đường tròn thành sáu cung bằng nhau như hình vẽ bên.



11. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Kẻ các đường kính AOC , $AO'D$. Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O').
- So sánh các cung nhỏ BC , BD .
 - Chứng minh rằng B là điểm chính giữa của cung EBD (tức là điểm B chia cung EBD thành hai cung bằng nhau: $\widehat{BE} = \widehat{BD}$).

12. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác BDC. Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC, K \in BD$).
- a) Chứng minh rằng $OH > OK$.
- b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC.
13. Chứng minh rằng trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
14. a) Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy. Mệnh đề đảo có đúng không? Hãy nêu thêm điều kiện để mệnh đề đảo đúng.
- b) Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

Giải

10. a) Vẽ đường tròn tâm O, bán kính $R = 2\text{cm}$. Vẽ góc ở tâm có số đo bằng 60° . Góc này cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Cung $\widehat{AB}$ là cung phải vẽ.

Vì $\triangle OAB$ cân tại O và có $\widehat{O} = 60^\circ$.

Vậy tam giác AOB là tam giác đều.

Suy ra $AB = OA = OB = R = 2\text{cm}$.

- b) Để chia $(O; R)$ ra làm sáu cung bằng nhau, ta làm như sau:

Lấy điểm A_1 bất kì trên đường tròn $(O; R)$. Dùng compa với khẩu độ bằng R vẽ liên tục các điểm A_2 rồi $A_3, \dots, A_6$. Cách vẽ này cho biết có 6 dây cung bằng nhau: $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_1$. Vì 6 dây bằng nhau nên chúng căng 6 dây bằng nhau trên $(O; R)$:

$$\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3} = \dots = \widehat{A_6A_1}$$

11. a) So sánh $\widehat{BC}$ và $\widehat{BD}$.

Vì $\triangle BAC$ và $\triangle BAD$ nội tiếp trong nửa đường tròn nên chúng là những tam giác vuông tại B.

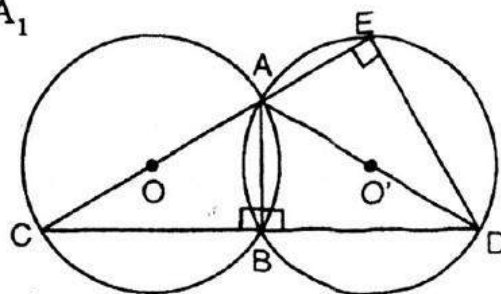
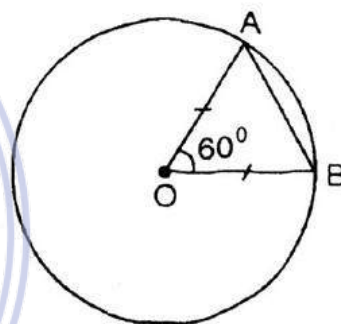
Xét hai tam giác vuông $\triangle BAC$ và $\triangle BAD$ có:

$AC = AD$ (đường kính hai đường tròn bằng nhau)

AB chung.

Vậy $\triangle BAC = \triangle BAD$

Suy ra $BC = BD$.



Mà hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau nên hai dây bằng nhau sẽ căng hai cung bằng nhau.

Vậy $\widehat{BC} = \widehat{BD}$

b Chứng minh $\widehat{BD} = \widehat{BE}$

Vì điểm E nằm trên đường tròn đường kính AD nên $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Do $BC = BD$ (câu a) nên EB là đường trung tuyến của tam giác vuông ECD ($\widehat{E} = 90^\circ$). Suy ra $BE = BD$.

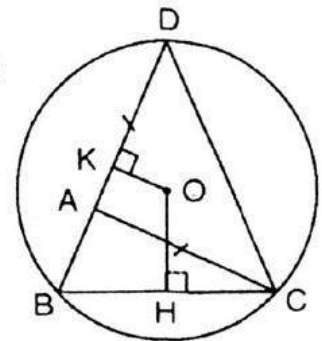
Trong (O') ta có $BE = BD$, suy ra $\widehat{BE} = \widehat{BD}$ hay B là điểm chính giữa của cung EBD. (đpcm)

12. a Chứng minh $OH > OK$: Trong tam giác ABC, ta có:

$$BC < BA + AC \text{ mà } AC = AD$$

$$\text{Suy ra } BC < BA + AD \text{ hay } BC < BD$$

Theo định lý về dây cung và khoảng cách đều tâm đường tròn thì ta có $OH > OK$. (đpcm)



b So sánh $\widehat{BD}$ và $\widehat{BC}$:

Trong (O), ta có $BC < BD \Rightarrow \widehat{BC} < \widehat{BD}$.

13. Ta chia làm hai trường hợp:

a Tâm O nằm ngoài hai dây

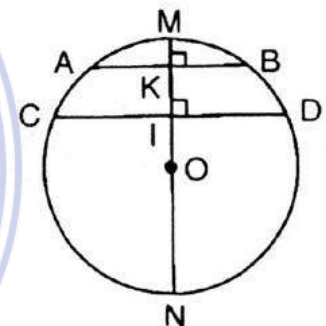
Kẻ đường kính $MN \perp CD$ và cắt CD tại I, cắt AB tại K.

Vì $AB \parallel CD$ nên $MN \perp AB$.

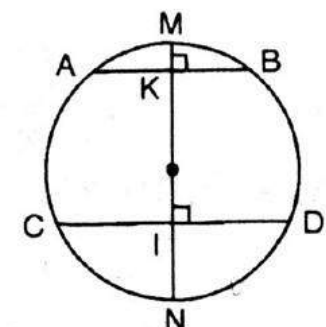
Giả sử K nằm giữa M và I.

Ta được $\widehat{MC} = \widehat{MD}$ và $\widehat{MA} = \widehat{MB}$

Suy ra $\widehat{MC} - \widehat{MA} = \widehat{MD} - \widehat{MB}$ hay $\widehat{AC} = \widehat{BD}$



b Tâm O nằm trong hai dây.
Chứng minh tương tự câu a).
Học sinh tự làm.



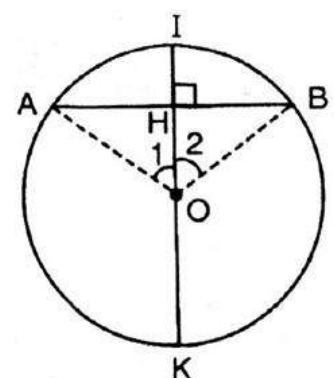
14. a Vì I là trung điểm của cung AB, suy ra $\widehat{IA} = \widehat{IB} \Rightarrow IA = IB$

Ta có: $OA = OB =$ bán kính. Suy ra đường kính IK là đường trung trực của dây AB

Vậy $HA = HB$ (đpcm)

Mệnh đề đảo: Đường kính đi qua trung điểm của một dây thì đi qua điểm chính giữa của cung căng dây đó.

* Chứng minh: Vì $\triangle AOB$ cân tại O và $HA = HB$



nên OH là đường phân giác của góc AOB. Suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

Từ đó suy ra $\widehat{IA} = \widehat{IB}$.

Tuy nhiên điều này không thể xảy ra khi dây AB đi qua tâm O của đường tròn. Vậy phải thêm điều kiện để mệnh đề đảo đúng là:

Đường kính đi qua trung điểm của một dây *không đi qua tâm* thì đi qua điểm chính giữa của cung căng dây đó.

b) * Ta có: $\widehat{MA} = \widehat{MB}$ (gt) $\Rightarrow MA = MB$

Điều này chứng tỏ rằng điểm M nằm trên đường trung trực của AB. (1)

Ta có $OA = OB =$ bán kính.

Điều này chứng tỏ rằng điểm O nằm trên đường trung trực của AB. (2)

Từ (1) và (2) chứng tỏ rằng OM hay NM là đường trung trực của dây AB. Suy ra $MN \perp AB$.

* Điều ngược lại: Đường kính vuông góc ở dây khi đi qua tâm thì đi qua hai điểm chính giữa của cung căng dây đó.

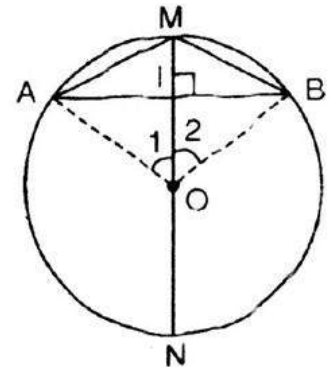
Kẻ đường kính NOM vuông góc với AB.

Ta có: $OA = OB \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O.

Mà $OI \perp AB$ nên OM là đường phân giác của $\angle AOB \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

Ta có $\triangle OAM = \triangle OBM$ (c.g.c). Do đó $AM = MB$. Suy ra $\widehat{AM} = \widehat{MB}$

Vậy M là điểm chính giữa của cung AB.

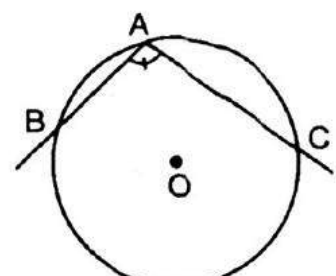
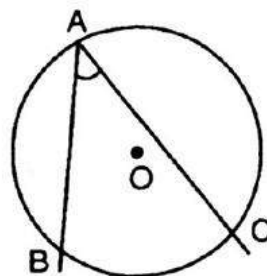


§3. GÓC NỘI TIẾP

I. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Định nghĩa: Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn



$\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp ; $\widehat{BC}$ là cung bị chắn.

2. Định lý: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

GT	$\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp
KL	$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC}$

3. Hệ quả: Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

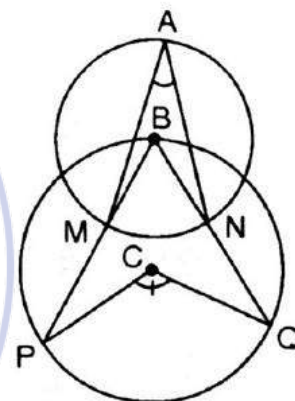
II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

15. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- Trong một đường tròn, các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
- Trong một đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.

16. Xem hình bên (hai đường tròn có tâm là B, C và điểm B nằm trên đường tròn tâm C).

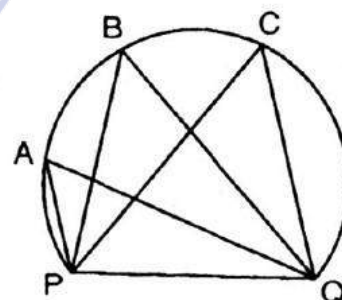
- Biết $\widehat{MAN} = 30^\circ$, tính $\widehat{PCQ}$.
- Biết $\widehat{PCQ} = 136^\circ$ thì $\widehat{MAN}$ có số đo là bao nhiêu?



17. Muốn xác định tâm của một đường tròn mà chỉ dùng êke thì phải làm như thế nào?

18. Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn PQ. Bóng được đặt ở vị trí A, B, C trên một cung tròn như hình bên.

Hãy so sánh các góc $\widehat{PAQ}$, $\widehat{PBQ}$, $\widehat{PCQ}$.



Giải

15. a) Đúng. (Do hệ quả b)

b) Sai. Vì trong một đường tròn các góc nội tiếp bằng nhau không nhất thiết cùng chắn một cung.

16. a) Góc $\widehat{MAN}$ nội tiếp (B) chắn cung nhỏ $\widehat{MN}$ của (B).

$$\Rightarrow \widehat{MAN} = \frac{1}{2} \widehat{MBN} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MBN} = 60^\circ = \widehat{PBQ}$$

Góc $\widehat{PBQ}$ là góc nội tiếp của (C) và $\widehat{PCQ}$ là góc ở tâm của (C).

$$\Rightarrow \widehat{PBQ} = \frac{1}{2} \widehat{PCQ} \Rightarrow \widehat{PCQ} = 2 \cdot \widehat{PBQ} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

Vậy $\widehat{PCQ} = 120^\circ$.

b) Ta có $\widehat{PCQ} = 2 \widehat{PBQ} = 2 \cdot (2 \widehat{MAN}) = 4 \widehat{MAN}$

$$\Rightarrow \widehat{MAN} = \frac{\widehat{PCQ}}{4} = \frac{136^\circ}{4} = 34^\circ.$$

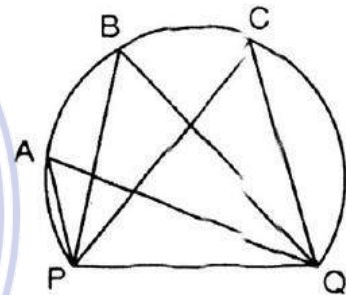
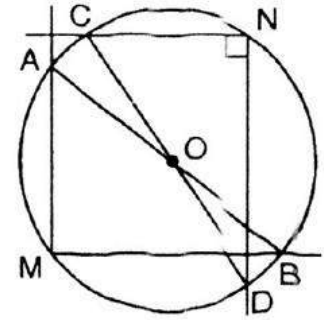
Vậy $\widehat{MAN} = 34^\circ$.

17. Đặt đỉnh góc vuông của êke trùng với điểm M bất kì trên đường tròn, giả sử đường tròn cắt hai cạnh góc vuông của êke tại A và B. Vẽ đường thẳng AB.

Thực hiện tương tự, đặt đỉnh góc vuông của êke trùng với điểm N trên đường tròn ($N \neq M$) hai cạnh êke cắt đường tròn tại C và D. Nối CD. Giao điểm của AB và CD là tâm của đường tròn.

18. Các góc $\widehat{PAQ}$, $\widehat{PBQ}$, $\widehat{PCQ}$ đều là các góc nội tiếp trong đường tròn cùng chắn cung PQ.

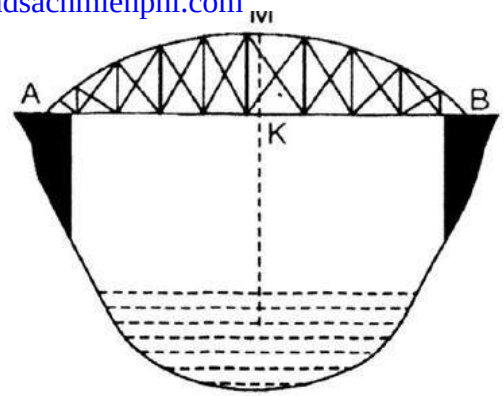
Vậy $\widehat{PAQ} = \widehat{PBQ} = \widehat{PCQ}$.



Luyện tập

19. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH vuông góc với AB.
20. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AC và AD của hai đường tròn. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.
21. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường thẳng qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N (A nằm giữa M và N). Hình MBN là tam giác gì? Tại sao?
22. Trên đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Chứng minh rằng ta luôn có: $MA^2 = MB \cdot MC$.
23. Cho đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D. Chứng minh $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Hướng dẫn: Xét cả hai trường hợp điểm M nằm bên trong và bên ngoài đường tròn. Trong mỗi trường hợp, xét hai tam giác đồng dạng.



24. Một chiếc cầu được thiết kế như hình bên có độ dài $AB = 40\text{m}$, chiều cao $MK = 3\text{m}$. Hãy tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB.
25. Dựng một tam giác vuông, biết cạnh huyền dài 4cm và một cạnh góc vuông dài 2,5cm.
26. Cho AB, BC, CA là ba dây của đường tròn (O). Từ điểm chính giữa M của cung AB vẽ dây MN song song với dây BC. Gọi giao điểm của MN và AC là S. Chứng minh $SM = SC$ và $SN = SA$.

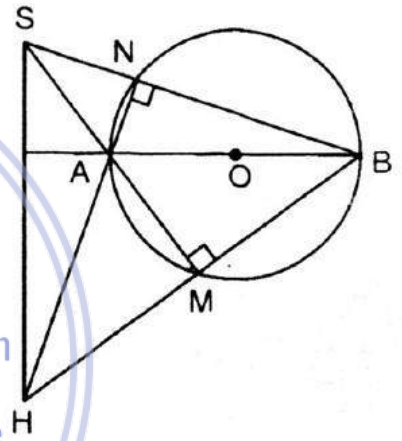
Giải

19. Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BM \perp SA$

Tương tự, ta có: $AN \perp SB$

Như vậy AN và BM là hai đường cao của tam giác SAB và H là trực tâm. Vì trong một tam giác thì ba đường cao đồng quy.

Suy ra $SH \perp AB$.



20. Nối A, B; nối B với C và D.

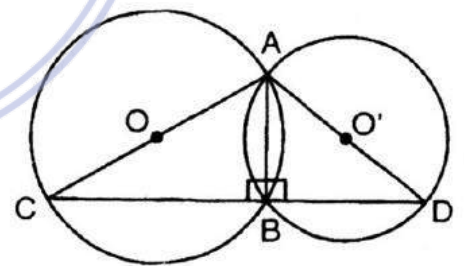
Ta có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) và (O') nên:

$$\widehat{ABC} = 90^\circ$$

$$\widehat{ABD} = 90^\circ$$

Vậy $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^\circ$.

Suy ra ba điểm C, B, D thẳng hàng.

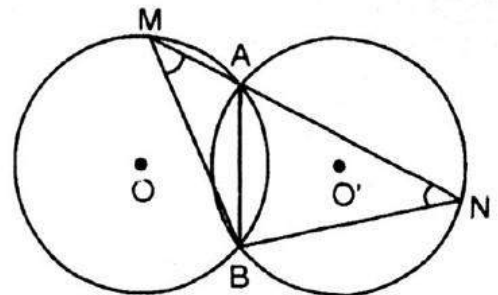


21. Vì hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau nên hai cung nhỏ bằng nhau vì cùng căng dây AB.

Ta có $\widehat{BMA}$ và $\widehat{BNA}$ là hai góc nội tiếp trong hai đường tròn bằng nhau cùng căng dây AB nên $\widehat{BMA} = \widehat{BNA}$.

Xét $\triangle MBN$ có: $\widehat{BMA} = \widehat{BNA}$.

Vậy $\triangle MBN$ là tam giác cân tại B.



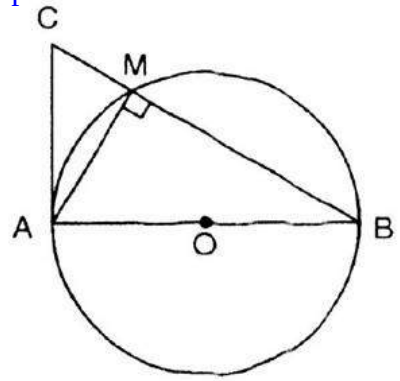
22. Vì AC là tiếp tuyến của (O) tại A nên: $AC \perp AB$.

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A.

Góc $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên: $AM \perp BC$.

Vậy AM là đường cao của tam giác vuông ABC.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có: $MA^2 = MB \cdot MC$.



23. a) Trường hợp M ở bên trong đường tròn:

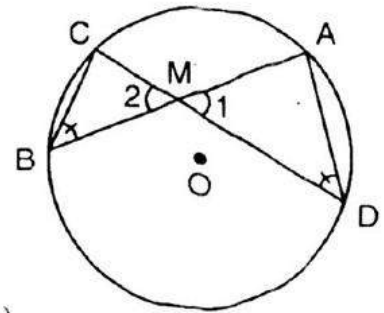
Xét hai tam giác MAD và MCB,

ta có $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh)

$\widehat{D} = \widehat{B}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Vậy $\triangle MAD \sim \triangle MCB$.

$$\text{Suy ra: } \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD \text{ (đpcm).}$$

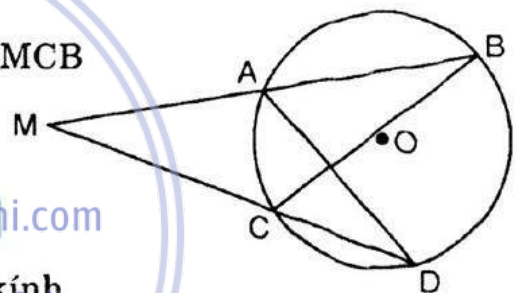


- b) Trường hợp M ở bên ngoài đường tròn:

Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle MAD \sim \triangle MCB$

$$\text{Suy ra } \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

$$\Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD \text{ (đpcm).}$$



24. Vẽ $MN \perp AB$. Ta gọi $MN = 2R$ là đường kính của đường tròn chứa cung tròn AMB.

Xét hai tam giác $\triangle KAM$ và $\triangle KNB$, ta có:

$$\widehat{AKM} = \widehat{BKN} = 90^\circ$$

$$\widehat{MAK} = \widehat{MNB} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } \widehat{MB} \text{)}$$

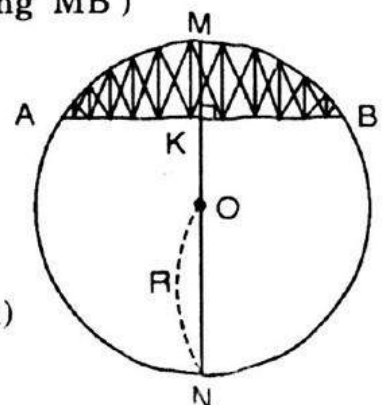
Vậy $\triangle KAM \sim \triangle KNB$

$$\text{Suy ra } \frac{KA}{KN} = \frac{KM}{KB} \Rightarrow KA \cdot KB = KM \cdot KN$$

Thay số, ta có: $20 \cdot 20 = 3(2R - 3)$

$$\Leftrightarrow 400 = 6R - 9 \Leftrightarrow R = \frac{409}{6} = 68,2 \text{ (m)}$$

Vậy $R = 68,2$ mét.

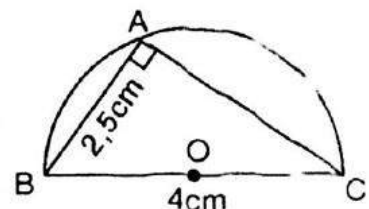


25. a) Cách dựng:

Trước hết dựng đoạn thẳng $BC = 4\text{cm}$.

Dựng nửa đường tròn tâm O đường kính $BC = 4\text{cm}$.

Dựng dây $BA = 2,5\text{cm}$.



Nối A với B; A với C. Ta có $\triangle ABC$ thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

b) Chứng minh:

Ta có $\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Do đó: $\widehat{BAC} = 90^\circ$

Theo cách dựng ta có: $BC = 4\text{cm}$; $BA = 2,5\text{cm}$. Vậy tam giác vuông ABC là tam giác phải dựng.

26. a) Chứng minh $SM = SC$:

Theo giả thiết ta có: $\widehat{MA} = \widehat{MB}$. (1)

Mà $MN \parallel BC$

nên $\widehat{MB} = \widehat{NC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{MA} = \widehat{NC}$

Do đó: $\widehat{ACM} = \widehat{CMN}$.

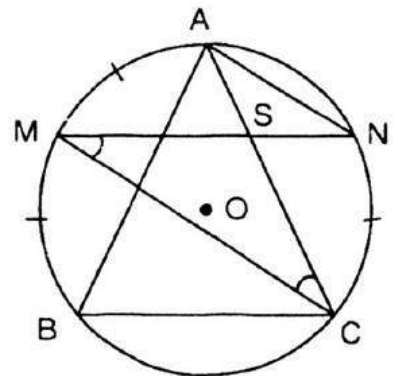
Vậy $\triangle SMC$ là tam giác cân tại S. Suy ra $SM = SC$.

b) Chứng minh $SN = SA$: Theo chứng minh ở câu a) ta có: $\widehat{MA} = \widehat{MC}$ (3)

Ta có $\widehat{ANM}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{MA}$ và $\widehat{NAC}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{NC}$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $\widehat{ANM} = \widehat{NAC}$.

Vậy $\triangle SAN$ cân tại S. Suy ra: $SN = SA$.



§4. GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

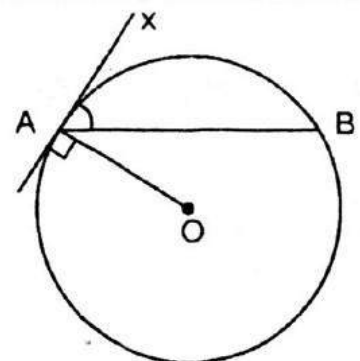
1. Khái niệm: Góc $B\hat{A}x$ có đỉnh A nằm trên đường tròn, cạnh Ax là một tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung AB.

Ta gọi một góc như vậy là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

2. Định lí: Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

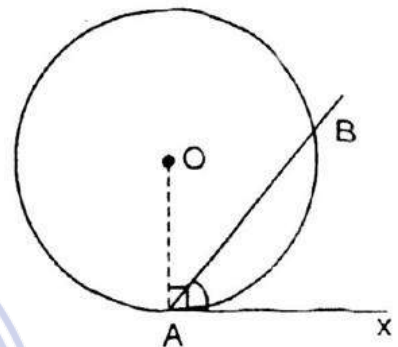
$\widehat{xAB}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung AB $\Rightarrow \widehat{xAB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB}$.

3. Hệ quả: Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.



II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

27. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm P khác A và B trên đường tròn. Gọi T là giao điểm của AP với tiếp tuyến tại B của đường tròn. Chứng minh: $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.
28. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P. Tia PB cắt đường tròn (O') tại Q. Chứng minh đường thẳng AQ song song với tiếp tuyến tại P của đường tròn (O).
29. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến kẻ từ A đối với đường tròn (O') cắt (O) tại C và đối với đường tròn (O) cắt (O') tại D. Chứng minh $\widehat{CBA} = \widehat{DBA}$.
30. Chứng minh định lí đảo của định lí về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, cụ thể là: Nếu góc BAx (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn (hình bên).



Gợi ý: Có thể chứng minh trực tiếp hoặc chứng minh bằng phản chứng.

27. Ta có: $\widehat{PBT}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến BT và dây cung BP.

$$\widehat{PBT} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{\text{PmB}} \quad (1)$$

Ta có $\widehat{PAO}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{\text{PmB}}$ nên:

$$\widehat{PAO} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{\text{PmB}} \quad (2)$$

Vì $\triangle AOP$ cân tại O (OA = OP = bán kính) nên:

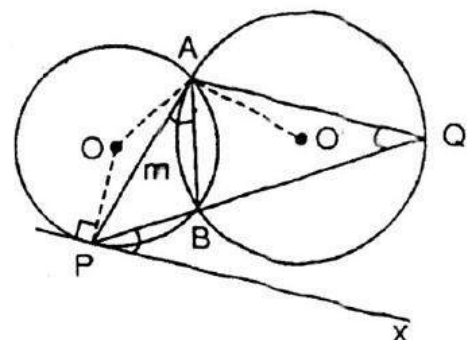
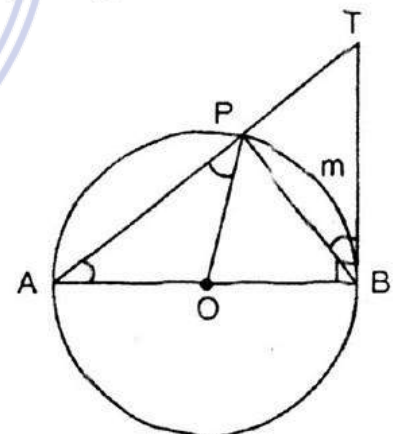
$$\widehat{PAO} = \widehat{APO} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$ (đpcm).

28. Nối AB.

Ta có: $\widehat{PAB}$ là góc tạo bởi một tiếp tuyến và dây cung của (O') chắn cung $\widehat{\text{AmB}}$. $\widehat{AQB}$ là góc nội tiếp của đường tròn (O') chắn cung $\widehat{\text{AmB}}$.

Vậy $\widehat{AQP} = \widehat{PAB} \quad (1)$



Từ đó: $\widehat{PAB}$ là góc nội tiếp của (O) chắn cung nhỏ $\widehat{PB}$.

Góc $\widehat{BPx}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến Bx và dây PB, chắn cung nhỏ $\widehat{PB}$

Vậy $\widehat{PAB} = \widehat{BPx}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{AQB} = \widehat{BPx}$ và $\widehat{AQB}$, $\widehat{BPx}$ là hai góc so le trong.

Vậy $AQ \parallel Px$ (đpcm).

29. Xem bài tập mẫu.

30. Vì $OH \perp AB$. Ta có $\widehat{AOH} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB}$. (1)

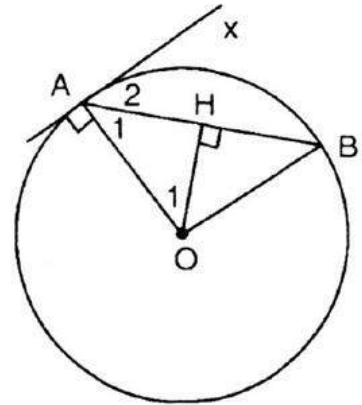
Theo giả thiết ta có: $\widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BAx} = \widehat{AOH}$.

Trong tam giác vuông AOH ($\widehat{H} = 90^\circ$), ta có:

$$\widehat{A_1} + \widehat{O_1} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{A_1} + \widehat{BAx} = 90^\circ$$

Điều này chứng tỏ rằng $OH \perp Ax$ hay Ax là tiếp tuyến của đường tròn O tại A.



Luyện tập

31. Cho đường tròn (O; R) và dây cung $BC = R$. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau ở A. Tính $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$.

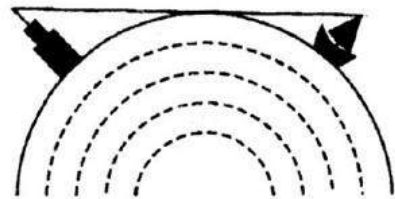
32. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Một tiếp tuyến của đường tròn tại P cắt đường thẳng AB tại T (điểm B nằm giữa O và T).

Chứng minh $\widehat{BTP} + 2 \cdot \widehat{TPB} = 90^\circ$.

33. Cho A, B, C là ba điểm trên một đường tròn. At là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Đường thẳng song song với At cắt AB tại M và cắt AC tại N. Chứng minh $AB \cdot AM = AC \cdot AN$.

34. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB. Chứng minh $MT^2 = MA \cdot MB$.

35. Trên bờ biển có một ngọn hải đăng cao 40m. Với khoảng cách bao nhiêu kilômét thì người quan sát trên tàu bắt đầu trông thấy ngọn đèn này, biết rằng mắt người quan sát ở độ cao 10m so với mực nước biển và bán kính Trái Đất gần bằng 6400km (hình bên).



Hướng dẫn: Áp dụng kết quả của bài tập 34.

Giải

31. a) Ta có $\widehat{ABC}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến BA và dây cung BC của (O).

Mà $\triangle OBC$ là tam giác đều ($OB = OC = BC = R$) nên $\widehat{BOC} = 60^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = \text{sđ } \widehat{BC} = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ. \text{ Vậy } \widehat{ABC} = 30^\circ.$$

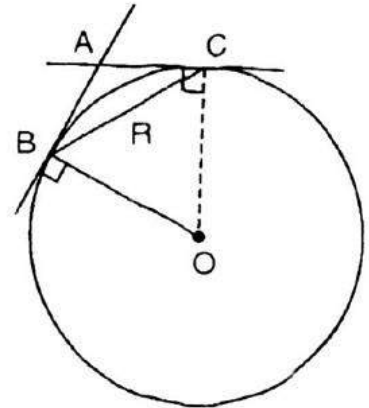
b) Chứng minh tương tự, ta có: $\widehat{ACB} = 30^\circ$

Trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{BAC} &= 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA}) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \widehat{BAC} = 120^\circ.$$



32. Ta có góc $\widehat{TPB}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến PT và dây cung PB của (O)

$$\Rightarrow \widehat{TPB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{PB} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{PB} = 2\widehat{TPB} \quad (1)$$

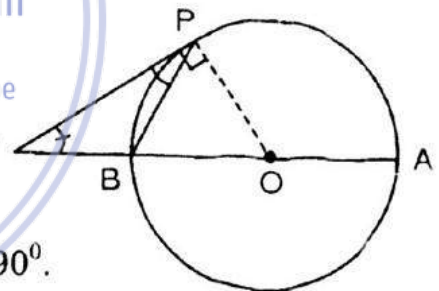
Ta có $\widehat{POB}$ là góc ở tâm của (O) nên: $\widehat{POB} = \text{sđ } \widehat{PB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{POB} = 2\widehat{TPB}$

Vì TP là tiếp tuyến của (O) với P là tiếp điểm nên $OP \perp TP$.

Trong tam giác vuông PTO, ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{PTO} + \widehat{TOP} &= 90^\circ \text{ hay } \widehat{BTP} + \widehat{BOP} = 90^\circ. \\ &\text{hay } \widehat{BTP} + 2\widehat{TPB} = 90^\circ. \end{aligned}$$



33. Vì $At \parallel MN$ (gt) nên $\widehat{AMN} = \widehat{BA}t$ (1)

Ta có $\widehat{BA}t$ là góc tạo bởi tiếp tuyến At và dây AB chắn cung AB của (O) và $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp của (O) chắn cung AB nên:

$$\widehat{BA}t = \widehat{ACB} \quad (2)$$

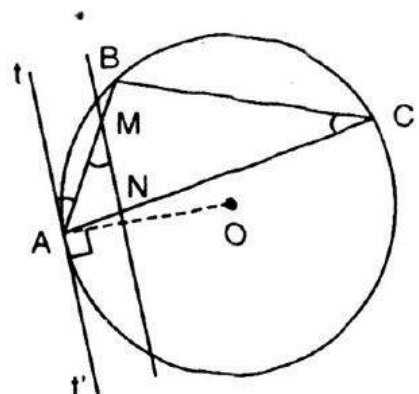
Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$

Xét hai tam giác AMN và ACB ta có:

$$\widehat{A} : \text{chung và } \widehat{AMN} = \widehat{ACB}$$

Vậy $\triangle AMN \sim \triangle ACB$

$$\text{Suy ra } \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} \text{ hay } AB \cdot AM = AC \cdot AN.$$



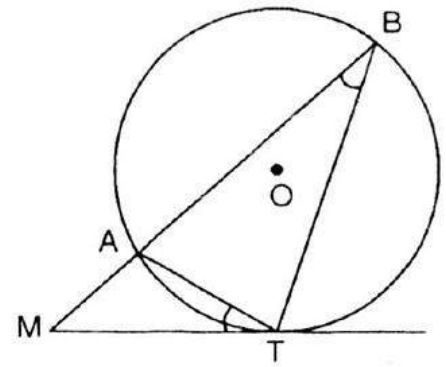
34. Xét hai tam giác BMT và TMA, ta có:

$\widehat{M}$ chung

$\widehat{B} = \widehat{T}$ (cùng chắn cung nhỏ $\widehat{AT}$)

Vậy $\triangle BMT \sim \triangle TMA$

Suy ra $\frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT}$ hay $MT^2 = MA \cdot MB$.



35. Áp dụng kết quả bài 34, ta có:

$$\begin{aligned} MT^2 &= MA \cdot MB = MA(MA + AB) \\ &= MA(MA + 2R) \end{aligned}$$

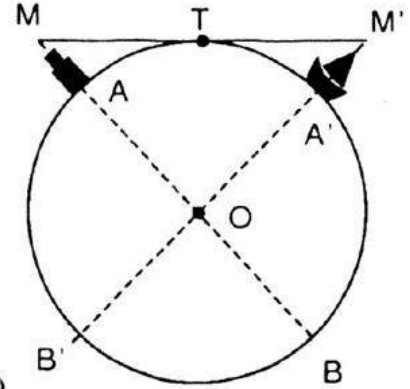
$$\begin{aligned} MT^2 &= 0,04(0,04 + 12800) \\ &= 0,04 \cdot 12800,04 = 512,0016 \end{aligned}$$

Suy ra $MT \approx 22,6$ (km)

Tương tự ta tính được $TM' = 11,3$ (km)

Ta có $MM' = MT + TM' = 22,6 + 11,3 = 34,9$ (km)

Vậy khi cách ngọn hải đăng khoảng 34,9km thì người quan sát trên tàu bắt đầu thấy ngọn hải đăng.



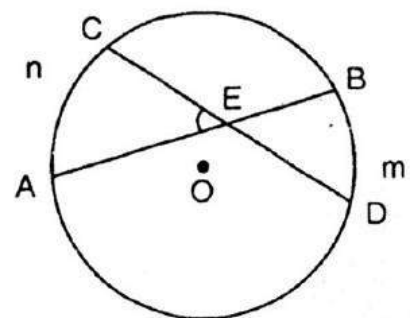
§5. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn:

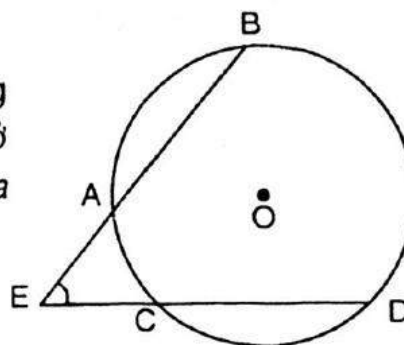
Định lí: Số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn bằng *nửa tổng số đo hai cung bị chắn*.

$$\widehat{AEC} = \frac{sđ\widehat{AnC} + sđ\widehat{BmD}}{2}$$



2. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn: Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng *nửa hiệu số đo hai cung bị chắn*.

$$\widehat{BED} = \frac{sđ\widehat{BD} - sđ\widehat{AC}}{2}$$



- Giải*

-

38. a) Chứng minh $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$

Ta có $\widehat{AEB}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (O) nên:

$$\widehat{AEB} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AB} - \text{sđ } \widehat{CD}) = \frac{1}{2} (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ \quad (1)$$

Ta cũng có $\widehat{BTC}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (O), nên:

$$\widehat{BTC} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{BAC} - \text{sđ } \widehat{BDC}) = \frac{1}{2} [(180^\circ + 60^\circ) - (60^\circ + 60^\circ)] = 60^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$ (đpcm)

b) Chứng minh CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$:

Vì $\widehat{DCT}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung nên:

$$\widehat{DCT} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{CD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \quad (1)$$

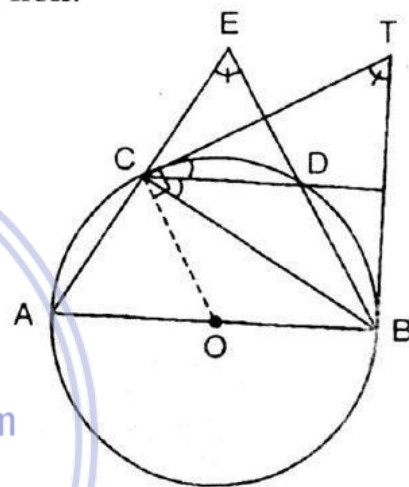
Và $\widehat{DCB}$ là góc nội tiếp trong (O)

chắn cung BD nên:

$$\widehat{DCB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{DCT} = \widehat{DCB}$

Vậy CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$



Luyện tập

39. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn (O). Trên cung nhỏ BD lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M cắt tia AB ở E, đoạn thẳng CM cắt AB ở S. Chứng minh $ES = EM$.
40. Qua điểm S nằm bên ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến SA và cát tuyến SBC của đường tròn. Tia phân giác của góc BAC cắt dây BC tại D. Chứng minh $SA = SD$.
41. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một điểm S nằm bên trong đường tròn. Chứng minh: $\widehat{A} + \widehat{BSM} = 2 \cdot \widehat{CMN}$.
42. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn P, Q, R theo thứ tự là điểm chính giữa của các cung bị chắn BC, CA, AB bởi các góc A, B, C.
- a) Chứng minh $AP \perp QR$.
- b) AP cắt CR tại I. Chứng minh tam giác CPI là tam giác cân.
43. Cho đường tròn (O) và hai dây cung song song AB, CD (A và C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ BD); AD cắt BC tại I. Chứng minh $\widehat{AOC} = \widehat{AIC}$.

Giải

39. Ta có $\widehat{MSE}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn (O) nếu:

$$\widehat{MSE} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{CA} + \text{sđ } \widehat{BM}) \quad (1)$$

Ta có $\widehat{CME} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{CM} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{BC} + \text{sđ } \widehat{BM}) \quad (2)$

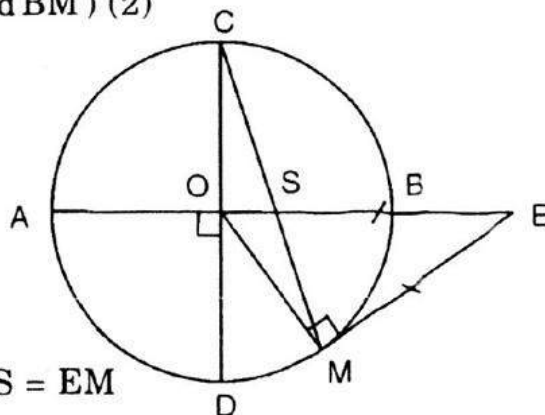
Theo giả thiết ta có:

$$\widehat{CA} = \widehat{CB} \quad (\text{do } AB \perp CD)$$

Thay vào (2), ta được:

$$\widehat{CME} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{CA} + \text{sđ } \widehat{BM}) = \widehat{MSE}$$

Vậy tam giác ESM cân tại E. Suy ra: $ES = EM$



40. Xem bài tập mẫu.

41. Ta có $\widehat{CAN}$ là góc ở bên ngoài đường tròn (O) nên:

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{CN} - \text{sđ } \widehat{BM}) \quad (1)$$

Góc $\widehat{BSM}$ là góc có đỉnh trong đường tròn (O) nên:

$$\widehat{BSM} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{CN} + \text{sđ } \widehat{BM}) \quad (2)$$

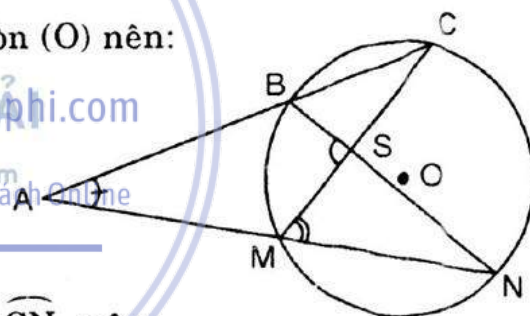
Cộng (1) và (2) về theo về, ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{BSM} = \text{sđ } \widehat{CN} \quad (3)$$

Ta có $\widehat{CMN}$ là góc nội tiếp của (O) chắn $\widehat{CN}$, nên:

$$\widehat{CMN} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{CN} \Leftrightarrow \text{sđ } \widehat{CN} = 2 \cdot \widehat{CMN} \quad (4)$$

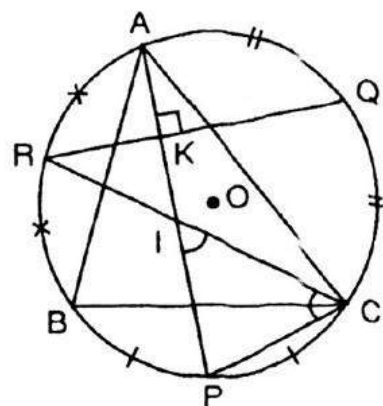
Thế (4) vào (3) ta được: $\widehat{A} + \widehat{BSM} = 2 \cdot \widehat{CMN}$.



42. a) Gọi K là giao điểm của AP và QR. Ta có $\widehat{AKR}$ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn (O) nên:

$$\begin{aligned} \widehat{AKR} &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AR} + \text{sđ } \widehat{QCP}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AR} + \text{sđ } \widehat{QC} + \text{sđ } \widehat{CP}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB} + \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC} + \frac{1}{2} \widehat{BC} \right) \end{aligned}$$

$$\widehat{AKR} = \frac{1}{4} (\text{sđ } \widehat{AB} + \text{sđ } \widehat{BC} + \widehat{AC}) = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$



Vì $\widehat{AKR} = 90^\circ$. Suy ra $AP \perp QR$ (đpcm)

b) Ta có $\widehat{CIP}$ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên:

$$\widehat{CIP} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{CP} + \text{sđ } \widehat{AR}) \quad (1)$$

Ta có $\widehat{PCI}$ là góc nội tiếp trong (O) chắn cung PR nên:

$$\widehat{PCI} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{PBR} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{BP} + \text{sđ } \widehat{BR}) \quad (2)$$

Theo giả thiết ta có: $\widehat{AR} = \widehat{RB}$ và $\widehat{PC} = \widehat{PB}$

Thay vào (2), ta được: $\widehat{PCI} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{CP} + \text{sđ } \widehat{AR}) = \widehat{CIP}$

Điều này chứng tỏ rằng tam giác CPI cân tại P.

43. Vì $AB \parallel CD$ nên: $\widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AC} = \text{sđ } \widehat{BD} \quad (1)$

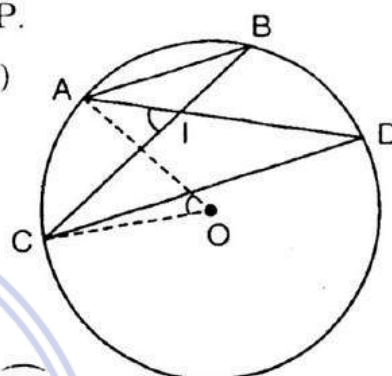
Ta có $\widehat{AIC} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{BD}) \quad (2)$

Thế (1) vào (2), ta có:

$$\widehat{AIC} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{AC}) = \text{sđ } \widehat{AC} \quad (3)$$

Ta có $\widehat{AOC}$ là góc ở tâm của (O) nên: $\widehat{AOC} = \text{sđ } \widehat{AC} \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{AOC} = \widehat{AIC}$.



§6. CUNG CHỨA GÓC

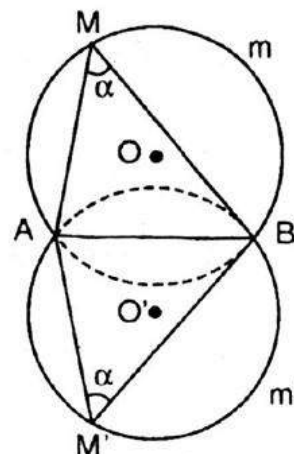
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cách giải bài toán quỹ tích: Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất T là một hình (H) nào đó, ta chứng minh cặp mệnh đề sau:

- Thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình (H).
- Đảo: Mọi điểm thuộc hình (H) đều có tính chất T.

Từ đó rút ra kết luận: Quỹ tích (tập hợp) các điểm M có tính chất T là hình (H).

2. Quỹ tích cung chứa góc: Quỹ tích các điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc $\widehat{AmB}$ có số đo không đổi bằng α (với $0^\circ < \alpha < 180^\circ$) là hai cung tròn đối xứng với nhau qua AB gọi là cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB.



3. Chú ý:

- Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng với nhau qua AB.
- Hai điểm A và B được coi là thuộc quỹ tích.
- Khi $\alpha = 90^\circ$ thì hai cung AmB và Am'B là hai nửa đường tròn bán kính AB. Như vậy, ta có:

Quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

44. Cho tam giác ABC vuông ở A, có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm I khi A thay đổi.
45. Cho các hình thoi ABCD có cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo của các hình thoi đó.
46. Dựng một cung chứa góc 55° trên đoạn thẳng AB = 3cm.
47. Gọi cung chứa góc 55° ở bài tập 46 là $\widehat{AmB}$. Lấy điểm M_1 nằm bên trong và điểm M_2 nằm bên ngoài đường tròn chứa cung này sao cho M_1, M_2 và cung AmB nằm cùng một phía đối với đường thẳng AB. Chứng minh rằng:
- a) $\widehat{AM_1B} > 55^\circ$; b) $\widehat{AM_2B} < 55^\circ$.

44. Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có: $\widehat{I_1} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1}$ (1)
- $\widehat{I_2} = \widehat{A_2} + \widehat{C_1}$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có:

$$\widehat{I_1} + \widehat{I_2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A} = 90^\circ \\ \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \frac{90^\circ}{2} \end{cases}$$

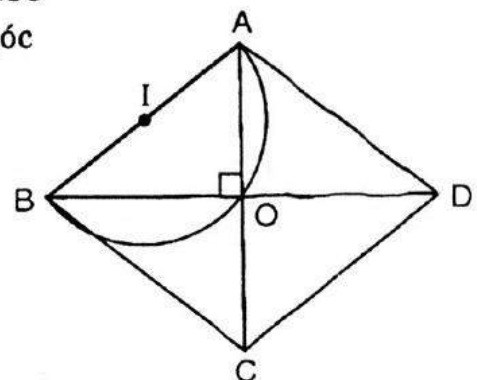
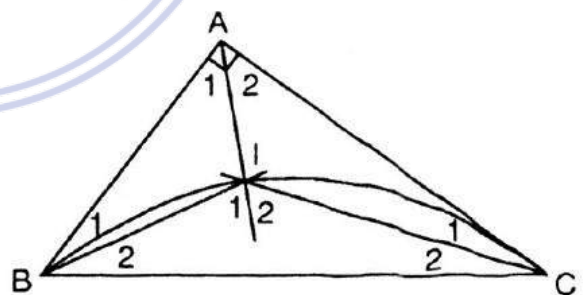
$$\text{Suy ra } \widehat{BIC} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

Như vậy, điểm I nhìn đoạn BC cố định góc 135° không đổi. Vậy quỹ tích của I là cung chứa góc 135° dựng trên đoạn thẳng BC (một cung).

45. Vì ABCD là hình thoi, do đó:

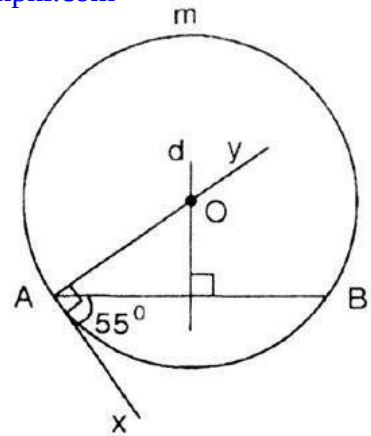
$$AC \perp BD \text{ hay } \widehat{AOB} = 90^\circ.$$

Như vậy, điểm O nhìn đoạn AB cố định dưới một góc 90° . Do đó, quỹ tích của O là nửa đường tròn đường kính AB.



46. Ta dựng theo trình tự như sau:

- Dùng thước đo độ dài, ta dựng đoạn $AB = 3\text{cm}$.
- Dùng thước đo góc ta dựng góc $\widehat{xAB} = 55^\circ$.
- Dựng tia Ay vuông góc với Ax (dùng êke)
- Dựng đường trung trực (d) của đoạn thẳng AB. Gọi O là giao điểm của Ay và (d).
- Dựng đường tròn tâm O, bán kính OA.



Ta có $\widehat{AmB}$ là cung chứa góc 55° dựng trên đoạn thẳng AB.

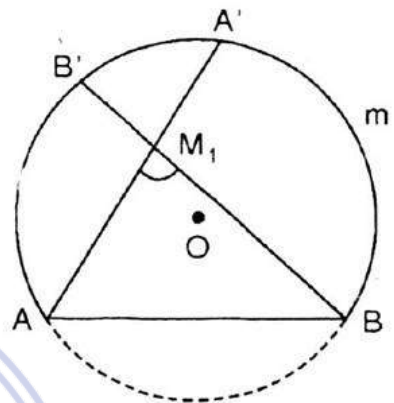
47. a) Chứng minh $\widehat{AM_1B} > 55^\circ$ khi M_1 ở bên trong đường tròn.

Theo đề bài M_1 là điểm bất kì nằm trong đường tròn chứa cung chứa góc 55° . Gọi A', B' theo thứ tự là giao điểm của AM_1 và BM_1 với cung tròn $\widehat{AmB}$.

Vì $\widehat{AM_1B}$ là góc có đỉnh nằm ở bên trong đường tròn, nên:

$$\begin{aligned}\widehat{AM_1B} &= \frac{1}{2}(\widehat{sd AB} + \widehat{sd A'B'}) = \frac{\widehat{sd AB}}{2} + \frac{\widehat{sd A'B'}}{2} \\ &= 55^\circ + \frac{\widehat{sd A'B'}}{2} > 55^\circ \text{ (vì } \frac{\widehat{sd A'B'}}{2} > 0\text{)}\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{AM_1B} > 55^\circ$.



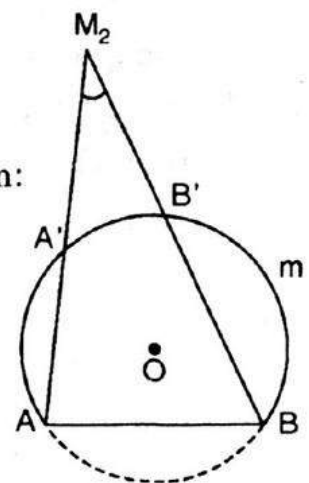
b) Chứng minh $\widehat{AM_2B} < 55^\circ$ khi M_2 ở ngoài đường tròn:

Theo đề bài, M_2 là điểm bất kì nằm ngoài đường tròn chứa cung chứa góc 55° . Gọi A', B' theo thứ tự là giao điểm của AM_2 và BM_2 với cung $\widehat{AmB}$.

Vì $\widehat{AM_2B}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn nên:

$$\begin{aligned}\widehat{AM_2B} &= \frac{1}{2}(\widehat{sd AB} - \widehat{sd A'B'}) \\ &= \frac{\widehat{sd AB}}{2} - \frac{\widehat{sd A'B'}}{2} \\ &= 55^\circ - \frac{\widehat{sd A'B'}}{2} < 55^\circ \text{ (vì } \frac{\widehat{sd A'B'}}{2} > 0\text{)}\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{AM_2B} < 55^\circ$.



Luyện tập

48. Cho hai điểm A, B cố định. Từ A vẽ các tiếp tuyến với các đường tròn tâm B có bán kính không lớn hơn AB. Tìm quỹ tích các tiếp điểm.
49. Dựng tam giác ABC, biết $BC = 6\text{cm}$, $\hat{A} = 40^\circ$ và đường cao $AH = 4\text{cm}$.
50. Cho đường tròn đường kính AB cố định, M là một điểm chạy trên đường tròn. Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = 2MB$.
- a) Chứng minh $\widehat{AIB}$ không đổi.
- b) Tìm tập hợp các điểm I nói trên.
51. Cho I, Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi H là giao điểm của các đường cao BB' và CC' . Chứng minh các điểm B, C, O, H, I cùng thuộc một đường tròn.
52. "Góc sút" của quả phạt đền 11 mét là bao nhiêu độ? Biết rằng chiều rộng cầu môn là 7,32m. Hãy chỉ ra hai vị trí khác trên sân có cùng "góc sút" như quả phạt đền 11 mét.

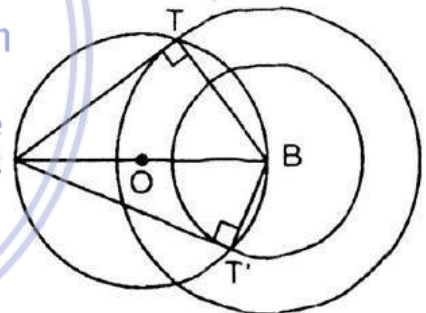
Giải

48. Trường hợp các đường tròn tâm B có bán kính nhỏ hơn BA.
Giả sử AT là tiếp tuyến của đường tròn tâm B. Với T là tiếp điểm.

Khi đó $AT \perp BT \Rightarrow \widehat{ATB} = 90^\circ$

Điểm T nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông nên quỹ tích của T là đường tròn đường kính AB.

Trường hợp đường tròn tâm B, có bán kính bằng BA. Khi đó quỹ tích chỉ là điểm A.



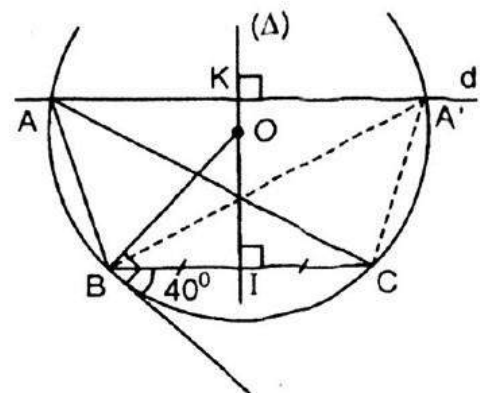
49. Các bước dựng bài toán như sau.

- Dựng đoạn thẳng $BC = 6\text{cm}$.
- Dựng cung chứa góc 40° trên đoạn thẳng BC.
- Dựng đường thẳng d song song với BC và cách BC một khoảng bằng 4cm, như sau:

Dựng đường trung trực (Δ) của BC; gọi I là giao điểm của (Δ) với BC, trên (Δ) lấy điểm K sao cho $IK = 4\text{cm}$.

Dựng đường thẳng d vuông góc với (Δ) tại K.

Gọi giao điểm của (d) và cung chứa góc là A và A'. Khi đó ta có hai tam giác ABC và A'BC đều thỏa mãn yêu cầu của đề bài.



50. a) Chứng minh $\widehat{AIB}$ không đổi.

Vì $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), nên trong tam giác vuông

$$BMI, \text{ ta có: } \operatorname{tg} \widehat{MIB} = \frac{MB}{MI} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \operatorname{tg} \widehat{MIB} = 26^\circ 34'$$

Vậy $\widehat{AIB}$ là một góc không đổi.

b) Tìm quỹ tích của I:

* *Phần thuận*: Khi điểm M chuyển động trên đường tròn đường kính AB thì điểm I cũng chuyển động, nhưng luôn nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc không đổi là $26^\circ 34'$.

Vậy điểm I thuộc hai cung chứa góc $26^\circ 34'$ dựng trên đoạn AB.

Tuy nhiên, khi M trùng với A thì cát tuyến AM trở thành tiếp tuyến I_1 và I_2 .

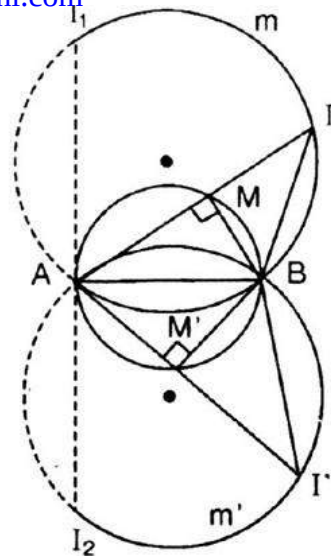
Khi đó, điểm I trùng với I_1 hoặc I_2 . Vậy điểm I chỉ thuộc hai cung $\widehat{I_1 m B}$ và $\widehat{I_2 m' B}$.

* *Phần đảo*: Lấy điểm I' bất kỳ thuộc $\widehat{I_1 m B}$ hoặc $\widehat{I_2 m' B}$, $I'A$ cắt đường tròn đường kính AB tại M.

$$\text{Trong tam giác vuông } BM'I' \text{ ta có: } \operatorname{tg} \widehat{I'} = \frac{BM'}{M'I'} = \operatorname{tg} 26^\circ 34' = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } M'I' = 2BM'.$$

* *Kết luận*: Quỹ tích các điểm I là hai cung $\widehat{I_1 m B}$ và $\widehat{I_2 m' B}$ chứa góc $26^\circ 34'$ dựng trên đoạn thẳng cố định AB.



51. Ta có $\widehat{BOC}$ là góc ở tâm và $\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp của (O) cùng chắn cung $\widehat{BC}$. Do đó: $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ (1)

Ta có: $\widehat{BHC} = \widehat{B'HC'}$ (đối đỉnh)

Trong tứ giác $AB'HC'$, ta có:

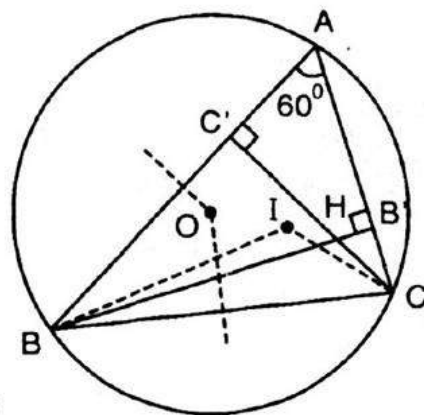
$$\widehat{B'HC'} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BHC} = 120^\circ \text{ (2)}$$

Trong $\triangle ABC$ ta có:

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 120^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 60^\circ.$$

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên:



$$\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 60^\circ.$$

Trong $\triangle BIC$: $\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Vậy $\widehat{BIC} = 120^\circ$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta thấy các điểm O, H, I cùng nằm trên cung chứa góc 120° dựng trên đoạn thẳng BC. Vậy năm điểm B, C, O, H, I cùng thuộc một đường tròn.

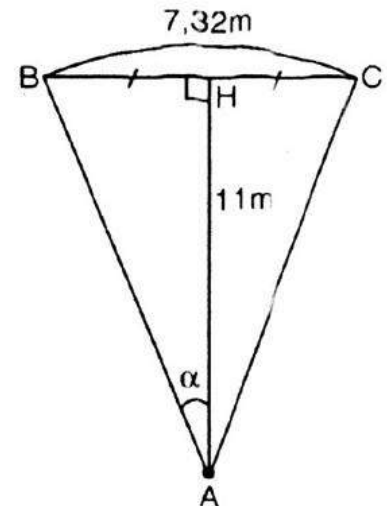
52. Gọi A là vị trí đặt quả bóng sút phạt đền và bề rộng cầu môn là BC thì điểm A nằm trên đường trung trực của BC. Gọi H là trung điểm của BC và $\widehat{HAB} = \alpha$. Theo đề bài cho thì trong tam giác vuông AHB, ta có

$$\tan \alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{7,32 : 2}{11} = \frac{3,66}{11} = 0,333$$

Suy ra $\alpha = 18^\circ 36'$

Vậy "góc sút" quả phạt đền là $2\alpha = 37^\circ 12'$.

Dựng cung chứa góc $37^\circ 12'$ trên đoạn BC thì bất cứ điểm nào trên cung chứa góc $37^\circ 12'$ cũng có "góc sút" như quả phạt đền 11 mét.



§7. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

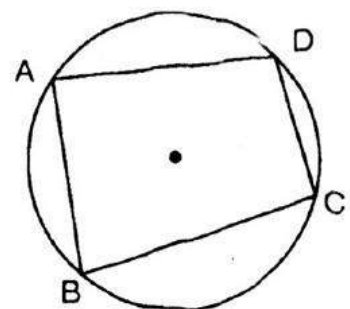
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Định nghĩa: Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Định lý: Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .

Nếu tứ giác ABCD nội tiếp (O) thì $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$, suy ra tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Tứ giác ABCD có: $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ (hoặc $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$)

$\Rightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp được đường tròn.



II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

53. Biết ABCD là tứ giác nội tiếp. Hãy điền vào ô trống trong bảng sau (nếu có thể):

Góc \ Trường hợp	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\hat{A}$	80°		60°			95°
$\hat{B}$	70°			40°	65°	
$\hat{C}$		105°			74°	
$\hat{D}$		75°				98°

54. Tứ giác ABCD có $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. Chứng minh rằng các đường trung trực của AC, BD, AB cùng đi qua một điểm.

55. Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp đường tròn tâm M, biết $\widehat{DAB} = 80^\circ$, $\widehat{DAM} = 30^\circ$, $\widehat{BMC} = 70^\circ$. Hãy tính số đo các góc:

$\widehat{MAB}$, $\widehat{BCM}$, $\widehat{AMB}$, $\widehat{DMC}$, $\widehat{AMD}$, $\widehat{MCD}$ và $\widehat{BCD}$.

Giải

53.

Góc \ Trường hợp	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\hat{A}$	80°	75°	60°	$0 < \alpha < 80^\circ$	106°	95°
$\hat{B}$	70°	105°	$0 < \alpha < 80^\circ$	40°	65°	82°
$\hat{C}$	100°	105°	120°	$180^\circ - \alpha$	74°	85°
$\hat{D}$	110°	75°	$180^\circ - \alpha$	140°	115°	98°

Ví dụ: Trường hợp 1: Vì ABCD nội tiếp (O) nên $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

54. Tứ giác ABCD có $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (hai góc đối diện) nên nội tiếp được trong đường tròn. Gọi O là tâm đường tròn đó.

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD nên:

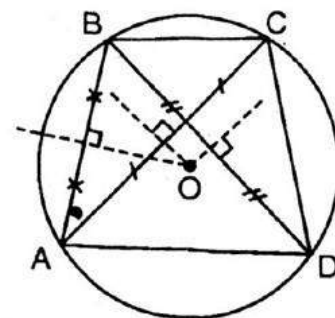
$$AO = OB = OC = OD$$

Ta có $OA = OC$ nên đường trung trực của AC đi qua O.

Ta có $OB = OD$ nên đường trung trực của BD đi qua O.

Ta có $OA = OB$ nên đường trung trực của AB đi qua O.

Tóm lại các đường trung trực của AC, BD và AB cùng đi qua O.



55. Ta có: $\widehat{MAB} = \widehat{DAB} - \widehat{DAM} = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$

Ta có $\triangle MBC$ cân tại M ($MB = MC$)

$$\text{Nên } \widehat{BCM} = \frac{180^\circ - \widehat{BMC}}{2}$$

$$\widehat{BCM} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$$

Ta có $\triangle MAB$ cân ($MA = MB$)

$$\text{nên } \widehat{AMB} = 180^\circ - 2\widehat{MAB} = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ.$$

Ta có $\triangle MAD$ cân ($MA = MD$)

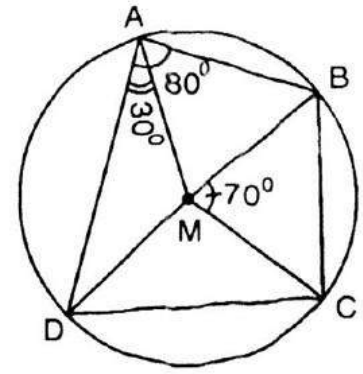
$$\text{nên } \widehat{AMD} = 180^\circ - 2\widehat{MAD} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \widehat{DMC} &= 360^\circ - (\widehat{AMD} + \widehat{AMB} + \widehat{BMC}) \\ &= 360^\circ - (120^\circ + 80^\circ + 70^\circ) = 90^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{MDC} = \widehat{MCD} = 45^\circ.$$

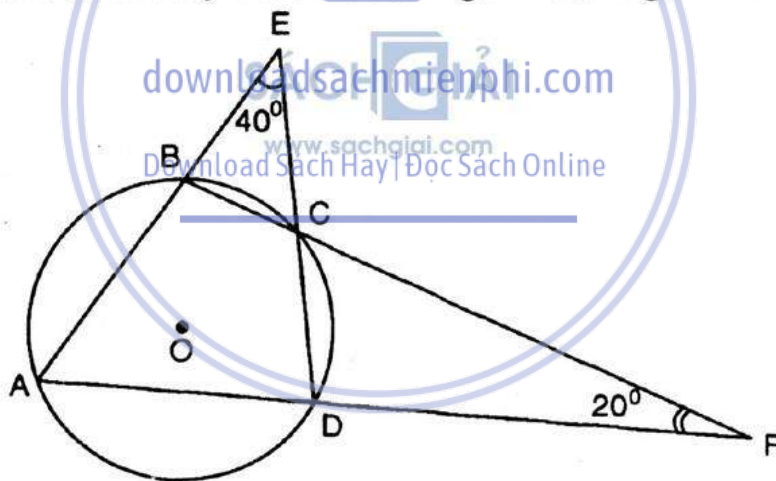
Ta có $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180^\circ$ (do ABCD nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$



Luyện tập

56. Xem hình bên dưới. Hãy tìm số đo các góc của tứ giác ABCD.



57. Trong các hình sau, hình nào nội tiếp được trong một đường tròn: Hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thang, hình thang vuông, hình thang cân? Vì sao?
58. Cho tam giác đều ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa đỉnh A, lấy điểm D sao cho $BD = DC$ và $\widehat{DCB} = \frac{1}{2} \widehat{ACB}$.
- Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.
 - Xác định tâm của đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D.
59. Cho hình bình hành ABCD. Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C cắt đường thẳng CD tại P khác C. Chứng minh $AP = AD$.

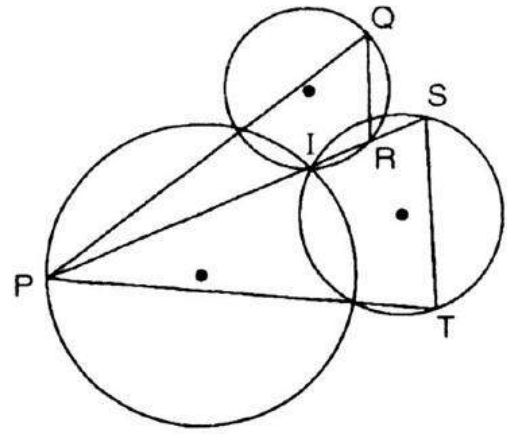
60. Xem hình bên.

Chứng minh $QR \parallel ST$.

Hướng dẫn:

Xét cặp góc so le trong $\widehat{PST}$, $\widehat{SRQ}$.

Giải



56. Ta có $\widehat{BCE} = \widehat{DCF}$ (đối đỉnh)

Đặt $x = \widehat{BCE} = \widehat{DCF}$

Áp dụng tính chất góc ngoài của $\triangle BCE$ và $\triangle DCF$, ta có:

$$\widehat{ABC} = x + 40^\circ \quad (1)$$

$$\widehat{ADC} = x + 20^\circ \quad (2)$$

Vì tứ giác ABCD nội tiếp trong (O) nên:

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} + \widehat{ADC} &= 180^\circ \Leftrightarrow x + 40^\circ + x + 20^\circ = 180^\circ \\ &\Leftrightarrow 2x = 120^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ \end{aligned}$$

Thế vào (1), ta được $\widehat{ABC} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$

Thế vào (2), ta được $\widehat{ADC} = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$

Ta có: $\widehat{BCD} + \widehat{DCF} = 180^\circ$ (góc kề bù)

$$\Leftrightarrow \widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{DCF} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Ta có $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ (tứ giác nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

57. Tổng quát: Hình bình hành không nội tiếp được trong đường tròn vì tổng hai góc đối diện không bằng 180° .

Hình chữ nhật, hình vuông nội tiếp được trong đường tròn, vì tổng hai góc đối diện bằng 180° .

Hình thang vuông không nội tiếp được trong đường tròn.

Tổng quát, hình thang không nội tiếp được trong đường tròn. Riêng hình thang cân nội tiếp được trong đường tròn vì có tổng hai góc đối bằng 180° .

58. a) Chứng minh ABDC nội tiếp:

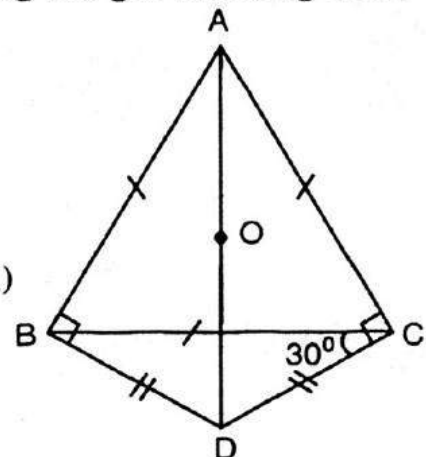
Theo đề bài ta có:

$$\widehat{DCB} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ. \quad (1)$$

Vì $\triangle BDC$ cân tại D ($BD = DC$)

$$\text{nên } \widehat{DBC} = 30^\circ.$$



$$\text{Vậy } \widehat{ABD} = 60^0 + 30^0 = 90^0 \text{ (2)}$$

$$\text{Xét tứ giác ABDC, ta có: } \widehat{ACD} + \widehat{ABD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

Vậy tứ giác ABDC nội tiếp được.

b) Xác định tâm đường tròn đi qua A, B, D, C:

Vì $\widehat{ABD} = 90^0$ nên $\widehat{ABD}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD, tâm O là trung điểm của AD.

Tương tự, $\widehat{ACD} = 90^0$, nên $\widehat{ACD}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD.

Vậy tứ giác ABDC nội tiếp trong đường tròn đường kính AD với tâm O là trung điểm của AD.

59. Theo đề bài, tứ giác ABCP nội tiếp, nên ta có:

$$\widehat{ABC} + \widehat{APC} = 180^0$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^0 - \widehat{APC} \text{ (1)}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{APD} + \widehat{APC} = 180^0 \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{APD} = 180^0 - \widehat{APC} \text{ (2)}$$

$$\text{So sánh (1) và (2), ta có: } \widehat{ABC} = \widehat{APD}.$$

Mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{ADP}$ (hai góc đối đỉnh của hình bình hành ABCD).

$$\text{Suy ra } \widehat{APD} = \widehat{ADP}.$$

Vậy $\triangle PAD$ cân tại A. Suy ra $AP = AD$.

60. Tứ giác SIMT nội tiếp trong (O_2) nên:

$$\widehat{S_1} + \widehat{IMT} = 180^0$$

$$\text{Mà } \widehat{M_1} + \widehat{IMT} = 180^0 \text{ (kề bù)}$$

$$\text{nên } \widehat{S_1} = \widehat{M_1} \text{ (1)}$$

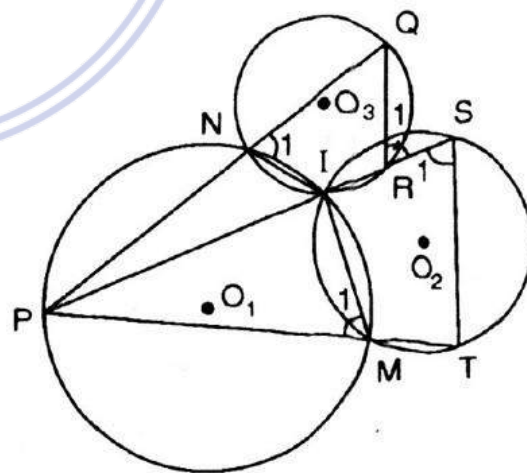
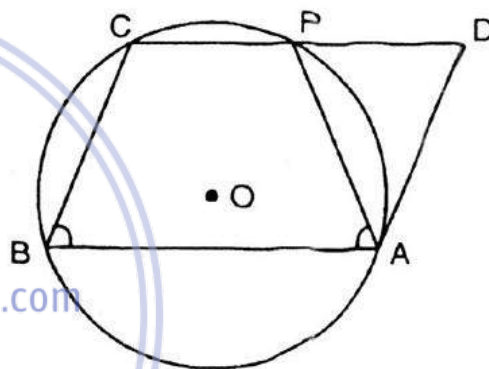
Tương tự, tứ giác PMIN nội tiếp trong (O_1) , nên:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M_1} + \widehat{PNI} = 180^0 \\ \text{mà } \widehat{PNI} + \widehat{N_1} = 180^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{N_1} \text{ (2)}$$

$$\text{Tương tự, trong tứ giác NQRI, ta có: } \widehat{N_1} = \widehat{R_1} \text{ (3)}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\widehat{S_1} = \widehat{R_1}$ (hai góc $\widehat{S_1}$ và $\widehat{R_1}$ ở vị trí so le trong).

Vậy $QR \parallel ST$.

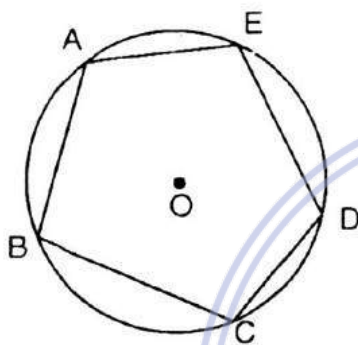


§8. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

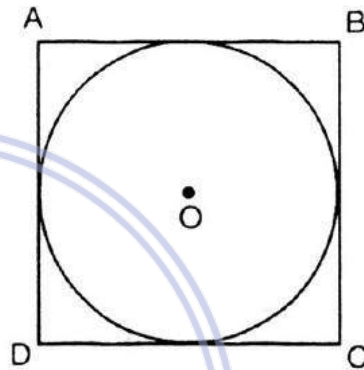
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa:

- Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.
- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.



Đường tròn (O) ngoại tiếp
đa giác ABCDE



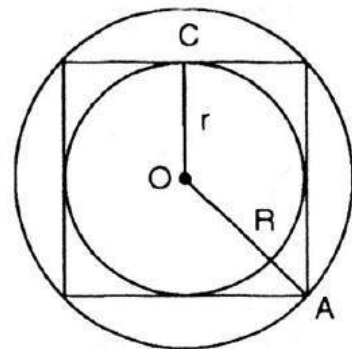
Đường tròn (O) nội tiếp
hình vuông ABCD

- Định lý: Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp nó.

- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp đa giác đều.

Giả sử cho đa giác đều n cạnh, có độ dài mỗi cạnh là a ; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và r là bán kính của đường tròn nội tiếp đa giác.

Ta có:
$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}}$$
$$r = \frac{a}{2 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}}$$



Chú ý: Kí hiệu tg hoặc tan đều đúng.

II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

- Vẽ đường tròn tâm O, bán kính 2cm.
 - Vẽ hình vuông nội tiếp đường tròn (O) ở câu a).
 - Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp hình vuông ở câu b) rồi vẽ đường tròn (O; r).

62. a) Vẽ tam giác đều ABC cạnh $a = 3\text{cm}$.
 b) Vẽ tiếp đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác đều ABC. Tính R .
 c) Vẽ tiếp đường tròn $(O; r)$ nội tiếp tam giác đều ABC. Tính r .
 d) Vẽ tiếp tam giác đều IJK ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$.
63. Vẽ hình lục giác đều, hình vuông, tam giác đều cùng nội tiếp đường tròn $(O; R)$ rồi tính cạnh của các hình đó theo R .
64. Trên đường tròn bán kính R lần lượt đặt theo cùng một chiều, kể từ điểm A, ba cung AB, BC, CD sao cho $\text{sđ } \widehat{AB} = 60^\circ$, $\text{sđ } \widehat{BC} = 90^\circ$, và $\text{sđ } \widehat{CD} = 120^\circ$.
 a) Tứ giác ABCD là hình gì?
 b) Chứng minh rằng hai đường chéo của tứ giác ABCD vuông góc với nhau.
 c) Tính độ dài các cạnh của tứ giác ABCD theo R .

Giải

61. a) Vẽ đường tròn $(O; 2\text{cm})$.
 b) Vẽ hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau.

Nối A, B, C, D lại với nhau, ta được tứ giác ABCD là hình vuông cần vẽ. Hình vuông ABCD đã nội tiếp trong đường tròn $(O; 2\text{cm})$.

- c) Vẽ $OH \perp BC$. Khi đó OH là bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD.

Vì $\triangle OBC$ là tam giác vuông cân nên:

$$OH = BH = HC$$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông HOB, ta có:

$$OB^2 = OH^2 + HB^2$$

$$\text{Tỉ số } 2^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow 2r^2 = 4 \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Vẽ đường tròn $(O; \sqrt{2} \text{ cm})$. Đường tròn này nội tiếp hình vuông ABCD, tiếp xúc với bốn cạnh của hình vuông tại trung điểm của mỗi cạnh.

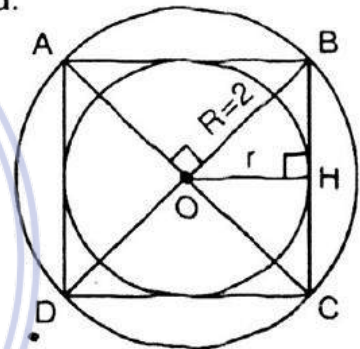
62. a) Vẽ đoạn $BC = a = 3\text{cm}$. Lấy B làm tâm, vẽ cung tròn có bán kính bằng 3cm và lấy C làm tâm, vẽ cung tròn có bán kính bằng 3cm. Chúng cắt nhau tại A.

Tam giác ABC là tam giác đều cần vẽ.

- b) Tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC là giao điểm của ba đường trung trực (đồng thời là 3 trung tuyến, 3 đường cao, 3 đường phân giác của tam giác đều ABC).

Theo tính chất đường trung tuyến trong tam giác, ta có:

$$R = OA = \frac{2}{3} AA'$$



Trong đó $AA' = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$

Vậy $R = \frac{2}{3} \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (cm)}$

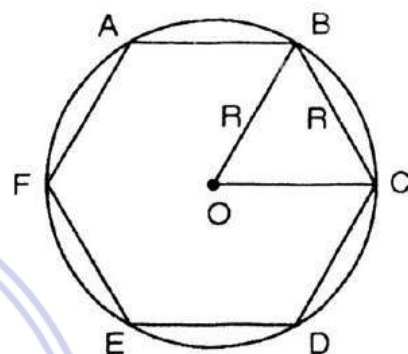
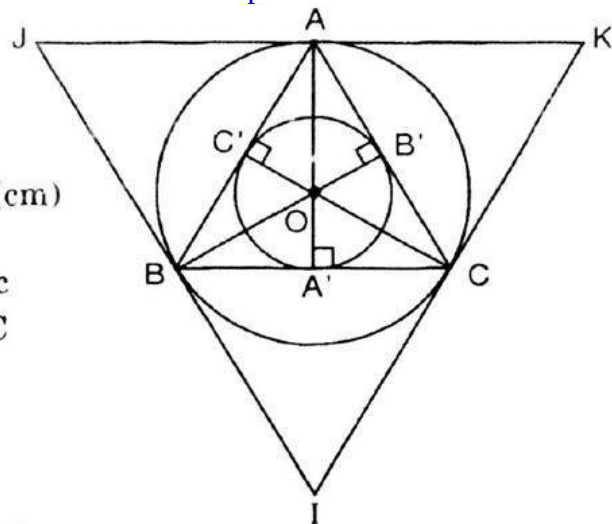
- c) Đường tròn nội tiếp (O; r) tiếp xúc với 3 cạnh của tam giác đều ABC tại các trung điểm A', B', C'.

Ta có: $r = OA' = \frac{1}{3} AA'$

$$= \frac{1}{3} \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}.$$

Vậy $r = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$

- d) Vẽ các tiếp tuyến với đường tròn (O; R) tại A, B, C. Ba tiếp tuyến này cắt nhau tại I, J, K. Ta có tam giác IJK là tam giác đều ngoại tiếp (O; R).



63. a) Vẽ hình lục giác đều nội tiếp trong (O; R).

Vì cạnh của hình lục giác đều có độ dài bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp. Do đó, cách vẽ như sau:

Vẽ đường tròn (O; R). Trên đường tròn ta vẽ liên tiếp các cung AB, BC, CD, DE, EF, FA mà dây căng cung đó có độ dài bằng R.

Nối các điểm liên tiếp A, B, C, D, E, F ta được lục giác đều ABCDEF nội tiếp trong đường tròn (O; R).

- b) Vẽ hình vuông nội tiếp trong (O; R)

Vẽ như câu b) bài tập 61.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông OAB, ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2.$$

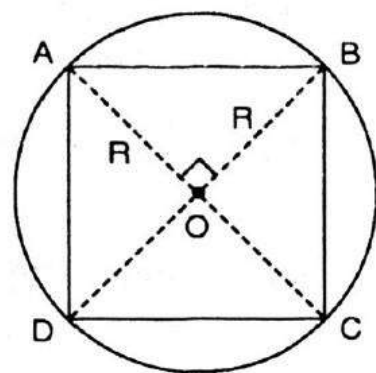
Suy ra $AB = R\sqrt{2}.$

- c) Vẽ tam giác đều nội tiếp trong (O; R):

Cách vẽ: Vẽ (O; R).

Trên đường tròn ta chia làm ba cung bằng nhau, mỗi cung có số đo bằng 120° . Vẽ ba dây căng ba cung đó. Ta có tam giác đều nội tiếp trong (O; R).

(Hoặc vẽ như bài 63.a) nhưng nối các đỉnh không liên tiếp lại với nhau, ta cũng được tam giác đều).



Tính AB theo R: Vì trong tam giác đều, đường cao cũng là đường phân giác và tâm đường tròn cũng là trọng tâm của tam giác.

$$\text{Do đó: } OA = \frac{2}{3}AH \Rightarrow AH = \frac{3}{2}OA \text{ hay } AH = \frac{3}{2}R.$$

$$\text{Ta có: } BH = \frac{AB}{2}.$$

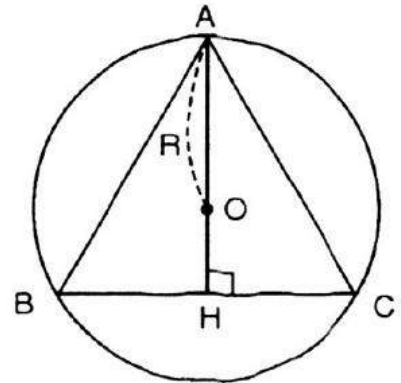
Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông HAB, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(\frac{3}{2}R\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}R^2 \Leftrightarrow \frac{3AB^2}{4} = \frac{9}{4}R^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 3R^2 \Leftrightarrow AB = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } AB = R\sqrt{3}.$$



64. a) Ta có tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O) nên:

$$\widehat{AD} = 360^\circ - (\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD}) = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 120^\circ)$$

$$\widehat{AD} = 90^\circ$$

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BC} = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ$$

$$\widehat{ACD} = \frac{1}{2} \widehat{AD} = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ACD} = \widehat{BAC}.$$

Mặt khác $\widehat{ACD}$ và $\widehat{BAC}$ là hai góc so le trong.

Suy ra $AB \parallel CD$.

Tứ giác ABCD có hai cạnh đối song song nên ABCD là hình thang, hơn nữa hình thang ABCD nội tiếp đường tròn (O) nên nó là hình thang cân. Vậy tứ giác ABCD là hình thang cân.

b) Giả sử hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I.

Ta có $\widehat{CID}$ là góc có đỉnh ở trong đường tròn nên:

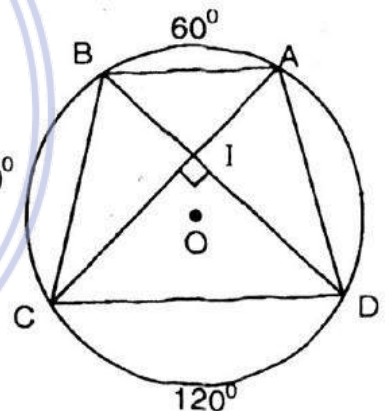
$$\widehat{CID} = \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{CD}) = \frac{1}{2} (60^\circ + 120^\circ) = 90^\circ$$

Vậy $AC \perp BD$.

c) Vì $\widehat{AB} = 60^\circ$ nên $AB = R$.

Vì $\widehat{BC} = \widehat{AD} = 90^\circ$ nên $BC = AD = R\sqrt{2}$ (cạnh hình vuông).

Vì $\widehat{CD} = 120^\circ$ nên $CD = R\sqrt{3}$ (cạnh tam giác đều).



§9. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

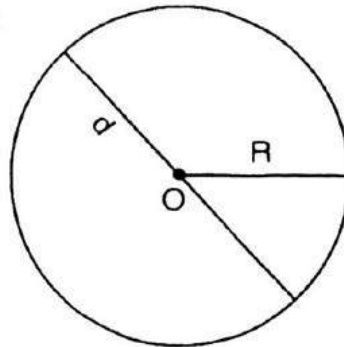
1. Công thức tính độ dài đường tròn:

Cho đường tròn (O; R). Gọi d là chiều dài đường kính và C là độ dài đường tròn.

Ta có:

$$C = 2\pi R = \pi d$$

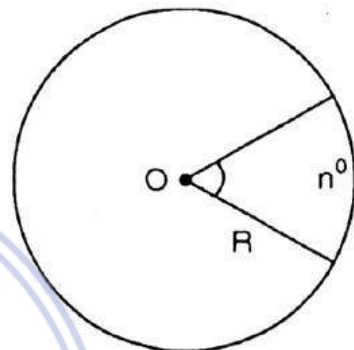
$$(d = 2R)$$



2. Công thức tính độ dài cung tròn:

Cho đường tròn (O; R). Độ dài của một cung n° được tính theo công thức:

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$



II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

65. Lấy giá trị gần đúng của π là 3,14, hãy điền vào các ô trống trong bảng sau (đơn vị độ dài: cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

Bán kính R đường tròn	10		3			
Đường kính d đường tròn		10		3		
Độ dài C đường tròn					20	25,12

66. a) Tính độ dài cung 60° của một đường tròn có bán kính 2dm.

b) Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 650mm.

67. Lấy giá trị gần đúng của π là 3,14 hãy điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất và đến độ):

Bán kính R của đường tròn	10cm		21cm	6,2cm	
Số đo n° của cung tròn	90°	50°		41°	25°
Độ dài l của cung tròn		35,6cm	20,8cm		9,2cm

68. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng sao cho B nằm giữa A và C. Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.

69. Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là 1,672cm và bánh xe trước có đường

kính là 88cm. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng?

Giải

65. Quy ước: $\pi = 3,14$; đơn vị độ dài: cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

Bán kính đường tròn (R)	10	5	3	1,5	3,2	4
Đường kính đường tròn (d)	20	10	6	3	6,4	8
Độ dài đường tròn (C)	62,8	31,4	18,84	9,42	20,10	25,12

HD: Sử dụng công thức $C = 2\pi R$ hoặc $C = \pi d$ để tìm các số chưa biết.

66. Học sinh tự làm.

67. Quy ước: $\pi = 3,14$; đơn vị độ dài: cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất và đến độ).

Bán kính R	10cm	40,8cm	21cm	6,2cm	21cm
Số đo của cung tròn (n°)	90°	50°	57°	41°	25°
Độ dài của cung tròn (ℓ)	15,7cm	35,6cm	20,8cm	4,4cm	9,2cm

HD: Áp dụng công thức $\ell = \frac{\pi R n}{180}$ để tính R, n° và ℓ .

68. Gọi C_1 , C_2 , C_3 lần lượt là độ dài của các nửa đường tròn đường kính AC, AB và BC, ta có:

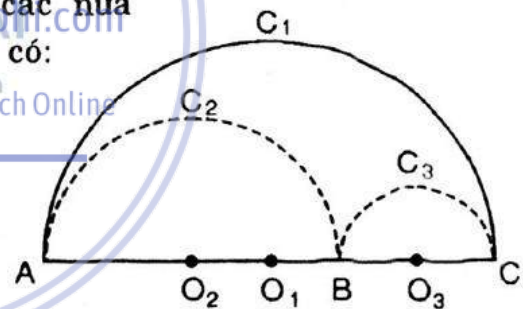
$$C_1 = \pi \cdot AC.$$

$$C_2 = \pi \cdot AB$$

$$C_3 = \pi \cdot BC.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C_2 + C_3 &= \pi AB + \pi BC \\ &= \pi(AB + BC) = \pi AC = C_1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } C_1 = C_2 + C_3.$$



69. Khi bơm căng: Chu vi bánh xe sau là: $\pi \cdot 1,672$ (m)

Chu vi bánh xe trước là: $\pi \cdot 0,88$ (m).

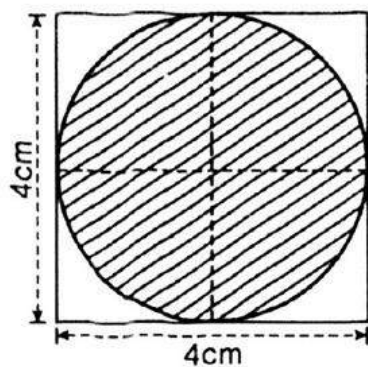
Khi bánh xe sau quay được 10 vòng thì quãng đường xe đi được là:

$$10 \times \pi \times 1,672 = 16,72\pi \text{ (m)}.$$

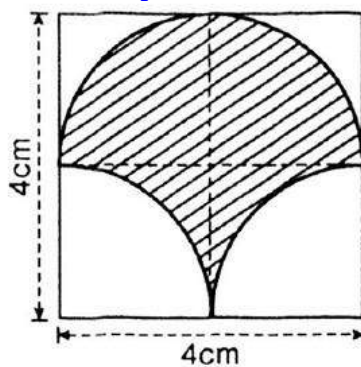
Khi đó số vòng lăn của bánh xe trước là: $\frac{16,72\pi}{0,88\pi} = 19$ (vòng).

Luyện tập

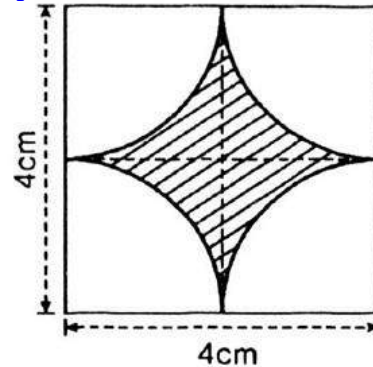
70. Vẽ lại ba hình (tạo bởi các cung tròn) dưới đây và tính chu vi mỗi hình (có gạch chéo):



a)

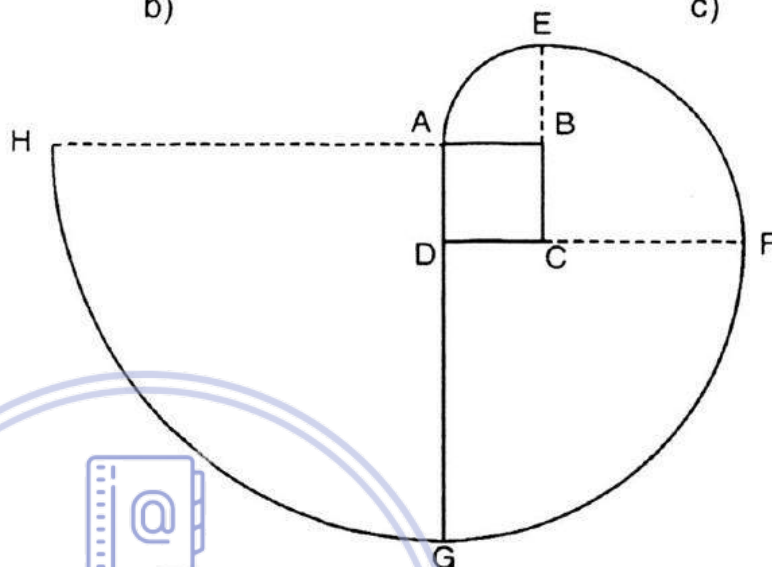


b)

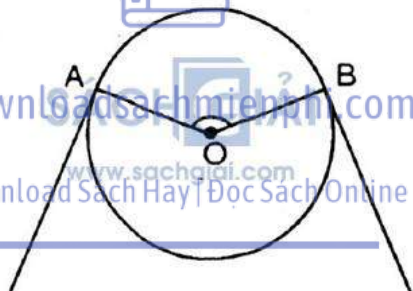


c)

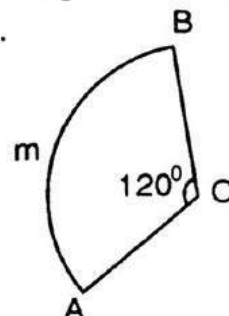
71. Vẽ lại hình tạo bởi các cung tròn (hình bên), với tâm lần lượt là B, C, D, A theo đúng kích thước đã cho (cạnh hình vuông ABCD dài 1cm). Nêu cách vẽ đường xoắn AEF GH. Tính độ dài đường xoắn đó.



72. Bánh xe của một ròng rọc có chu vi là 540mm. Dây cua-roa bao bánh xe theo cung AB có độ dài 200mm. Tính góc AOB (hình bên).



73. Đường tròn lớn của Trái Đất dài khoảng 40000km. Tính bán kính Trái Đất.
 74. Vĩ độ của Hà Nội là $20^{\circ}01'$. Mỗi vòng kinh tuyến của Trái Đất dài khoảng 40000km. Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo.
 75. Cho đường tròn (O), bán kính OM. Vẽ đường tròn tâm O' đường kính OM. Một bán kính OA của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') ở B. Chứng minh $\widehat{MA}$ và $\widehat{MB}$ có độ dài bằng nhau.
 76. Xem hình bên và so sánh độ dài của cung AmB với độ dài đường gấp khúc AOB.



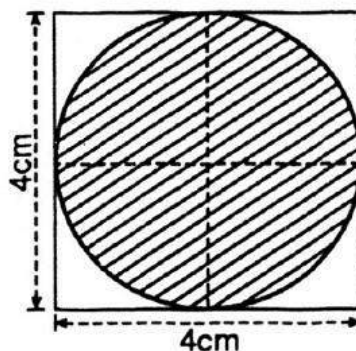
Giải

70. * Hình a

Đường tròn có đường kính là 4cm.

Vậy chu vi hình tròn là:

$$C = \pi d = 3,14 \cdot 4 = 12,56 \text{ (cm)}$$

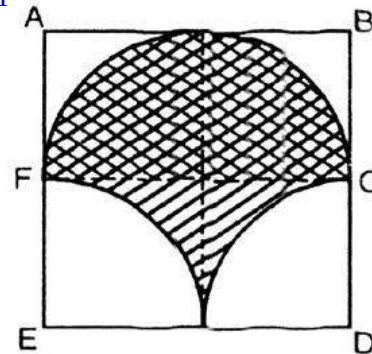


* Hình b:

Chu vi phần gạch chéo = Chu vi nửa
đường tròn + 2 chu vi $\frac{1}{4}$ đường tròn.

Vậy chu vi của hình gạch chéo ở hình b là:

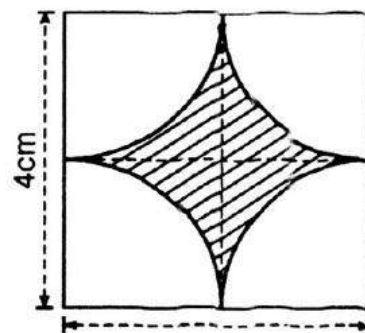
$$C = \pi d = 3,14 \times 4 = 12,56 \text{ (cm)}$$



* Hình c:

Chu vi hình gạch chéo = 4 lần chu vi
của $\frac{1}{4}$ đường tròn = chu vi hình tròn.

Vậy $c = \pi d = 3,14.4 = 12,56 \text{ (cm)}$.



71. * Cách vẽ đường xoắn AEFGH như sau:

- Trước hết vẽ hình vuông ABCD cạnh dài 1cm.
- Tiếp tục vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm B, bán kính 1cm. ta có cung $\widehat{AE}$.
- Tiếp tục vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm C, bán kính 2cm. ta có cung $\widehat{EF}$.
- Tiếp tục vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm D, bán kính 3cm. ta có cung $\widehat{FG}$.
- Tiếp tục vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm A, bán kính 4cm. ta có cung $\widehat{GH}$.

Như vậy, ta vẽ được đường xoắn AEFGH.

* Tính độ dài đường xoắn:

Gọi C là độ dài đường xoắn:

Ta kí hiệu độ dài cung $\widehat{AB}$ là $\ell_{\widehat{AB}}$ để tính cho tiện:

$$\ell_{\widehat{AE}} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 \text{ (cm)}; \quad \ell_{\widehat{EF}} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 \text{ (cm)}$$

$$\ell_{\widehat{FG}} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 3 \text{ (cm)}; \quad \ell_{\widehat{GH}} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4 \text{ (cm)}$$

$$C = \frac{1}{4} \cdot 2\pi(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 10 = 5\pi \text{ (cm)}$$

Vậy $C = 5\pi \text{ cm}$.

72. Gọi chu vi của rỗng rọc là $C = 540\text{mm}$, độ dài cung $\widehat{AB}$ là $\ell = 200\text{mm}$.

sđ $\widehat{AB} = n^\circ$.

Ta có công thức: $\ell = \frac{\pi.R.n}{180^0} = \frac{2\pi.R.n}{360} = \frac{C.n}{360}$

Suy ra $n^0 = \frac{360.\ell}{C} = \frac{360^0.200}{540} = 133^020'$

Vì góc $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm chắn cung $\widehat{AB}$ nên: $\widehat{AOB} = \text{sđ } \widehat{AB} = 133^020'$

Vậy $\widehat{AOB} = 133^020'$.

73. Gọi R là bán kính của Trái Đất thì độ dài đường tròn lớn của Trái Đất là $C = 2\pi R$.

Theo đề bài, ta có:

$$2\pi R = 40000 \text{ (km)} \Rightarrow R = \frac{40000}{2\pi} = \frac{20000}{3,14} \approx 6369 \text{ (km)}.$$

Vậy $R = 6369 \text{ (km)}$.

74. Vĩ độ của Hà Nội là $20^001'$ có nghĩa là số đo (độ) cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo có số đo là $20^001'$.

Ta có $20^001' = \left(20\frac{1}{60}\right)^0$

Vậy độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo là:

$$\ell = \frac{\pi.R.n}{180} = \frac{2\pi.R.n}{360} = \frac{C.n}{360} = \frac{40000.20\frac{1}{60}}{360} = \frac{40000.1201}{360 \cdot 60} \approx 2224 \text{ (km)}$$

Vậy $\ell = 2224 \text{ (km)}$

75. Ta có $\widehat{BOM}$ là góc nội tiếp của (O') và $\widehat{BOM}$ là góc ở tâm của đường tròn (O) .

Đặt $\widehat{BOM} = \alpha$ thì $\widehat{BO'M} = 2\alpha$.

Ta có:

Độ dài cung $\widehat{MB}$ là:

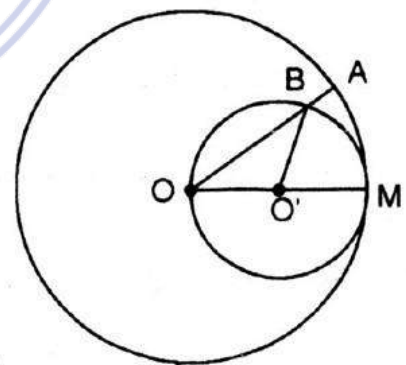
$$\ell_{\widehat{MB}} = \frac{\pi.O'M.2\alpha}{180} = \frac{\pi.\alpha.O'M}{90}. \quad (1)$$

Độ dài cung $\widehat{MA}$ là:

$$\ell_{\widehat{MA}} = \frac{\pi.OM.\alpha}{180} = \frac{\pi.2O'M.\alpha}{180} = \frac{\pi.\alpha.O'M}{90}. \quad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta có: $\ell_{\widehat{MA}} = \ell_{\widehat{MB}}$.

76. Ta có: Độ dài cung $\widehat{AmB}$ là: $\ell_{\widehat{AmB}} = \frac{\pi.R.n}{180} = \frac{\pi.R.120}{180} = \frac{2\pi R}{3} = 2R\frac{\pi}{3}$.

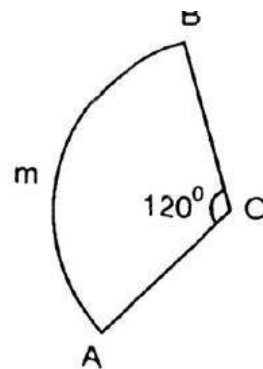


Độ dài đường gấp khúc AOB là:

$$d = R + R = 2R$$

Vì $\pi = 3,14 > 3 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} > 1$ nên $2R \frac{\pi}{3} > 2R$

Vậy $\ell_{\widehat{AmB}} > d$.



§10. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN. HÌNH QUẠT TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Công thức tính diện tích hình tròn:

Cho đường tròn (O; R). Gọi S là diện tích hình tròn. Ta có:

$$S = \pi R^2$$

2. Diện tích hình quạt tròn:

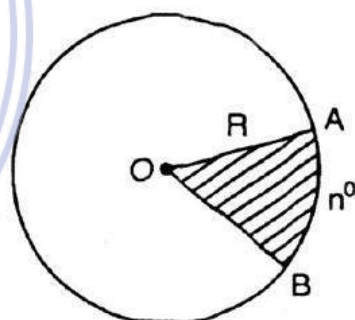
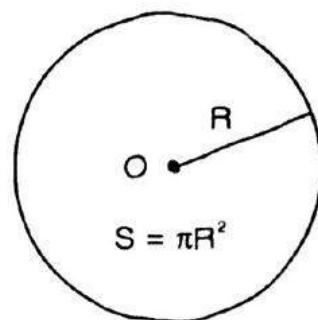
Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

- Diện tích hình quạt tròn ứng với cung n° là:

$$S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

- Diện tích hình quạt tròn có ℓ là độ dài cung n° là:

$$S_{\text{quạt}} = \frac{\ell R}{2} \quad (\ell = \frac{\pi R n}{180})$$



II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Chứng minh rằng diện tích hình tròn ngoại tiếp một hình vuông bằng hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông ấy.

Giải

Gọi cạnh hình vuông là a , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD.

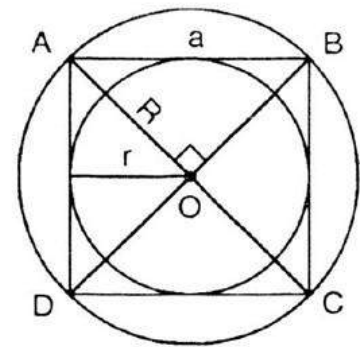
Ta có: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $r = \frac{a}{2}$

Gọi S_1 là diện tích hình tròn ngoại tiếp và S_2 là diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông ABCD.

$$\text{Ta có: } S_1 = \pi R^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{2}$$

$$S_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a^2}{2} \right) = \frac{1}{2} S_1$$

$$\text{Vì } S_2 = \frac{1}{2} S_1 \Rightarrow S_1 = 2S_2$$



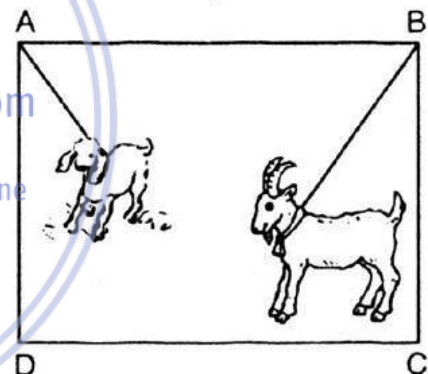
Vậy diện tích hình tròn ngoại tiếp một hình vuông bằng hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông ấy.

B. Bài tập giáo khoa căn bản

77. Tính diện tích hình tròn nội tiếp một hình vuông có cạnh là 4cm.
78. Chân một đồng cát đổ trên một nền phẳng nằm ngang là một hình tròn có chu vi 12m. Hỏi chân đồng cát đó chiếm một diện tích là bao nhiêu mét vuông?
79. Tính diện tích một hình quạt tròn có bán kính 6cm, số đo cung là 36° .
80. Một vườn cỏ hình chữ nhật ABCD có $AB = 40\text{m}$, $AD = 30\text{m}$. Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B. Có hai cách buộc:

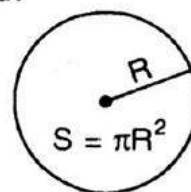
- Mỗi dây thừng dài 20m.
- Một dây thừng dài 30m và dây thừng kia dài 10m.

Hỏi với cách buộc nào thì diện tích cỏ mà cả hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn?

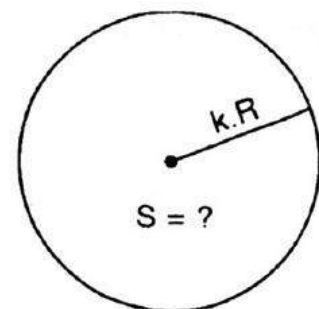


81. Diện tích hình tròn sẽ thay đổi thế nào nếu:

- a) Bán kính tăng gấp đôi?
- b) Bán kính tăng gấp ba?
- c) Bán kính tăng k lần ($k > 1$)?



a)



b)

82. Điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất):

Bán kính đường tròn (R)	Độ dài đường tròn (C)	Diện tích hình tròn (S)	Số đo của cung tròn (n°)	Diện tích hình quạt tròn cung n°
	13,2cm		$47,5^\circ$	
2,5cm				$12,50\text{cm}^2$
		$37,80\text{cm}^2$		$10,60\text{cm}^2$

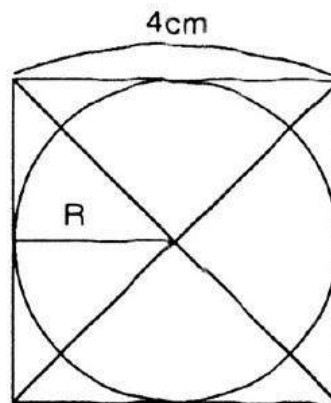
Giải

77. Hình tròn nội tiếp một hình vuông có cạnh là 4cm thì bán kính đường tròn là $R = 2\text{cm}$.

Vậy diện tích hình tròn là:

$$S = \pi R^2 = \pi 2^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Đáp số: $S = 4\pi \text{ cm}^2$



78. Vì chân đồng cát là hình tròn có chu vi 12 mét nên ta có:

$$C = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{C}{2\pi} = \frac{12}{2\pi} = \frac{6}{\pi} \text{ (m)}.$$

Vậy diện tích phần mặt đất mà đồng cát chiếm chỗ là:

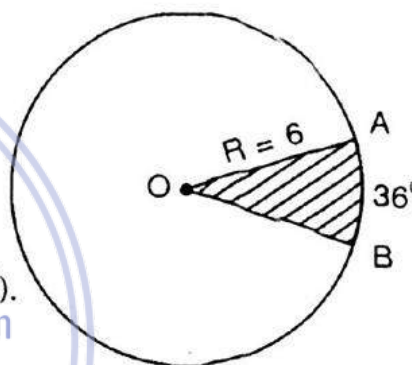
$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 = \frac{36}{\pi} = \frac{36}{3,14} \approx 11,5 \text{ (m}^2\text{)}.$$

79. Áp dụng công thức:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ với } \begin{cases} R = 6\text{cm} \\ n = 36. \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 36}{360} = 3,6\pi = 3,6 \times 3,14 \approx 11,3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy $S = 11,3 \text{ cm}^2$.



80. * Theo cách buộc thứ nhất: mỗi dây thừng dài 20cm thì diện tích cỏ dành cho mỗi con dê ăn được sẽ bằng nhau. Mỗi diện tích đó sẽ là $\frac{1}{4}$ đường tròn có bán kính $R = 20\text{cm}$, nghĩa là:

$$S_1 = \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot 20^2 = 100\pi \text{ (m}^2\text{)}.$$

Khi đó diện tích cả hai con dê ăn sẽ là $S = 2S_1 = 200\pi \text{ (m}^2\text{)}.$

- * Theo cách buộc thứ hai: (dùng dây dài: 10m và 30m)

Giả sử con dê buộc ở A có dây thừng dài 10m thì

$$S_A = \frac{1}{4} \pi 10^2 = 25\pi \text{ (m}^2\text{)}.$$

Con dê buộc ở B có dây thừng dài 30m thì:

$$S_B = \frac{1}{4} \pi 30^2 = 225\pi \text{ (m}^2\text{)}.$$

Khi đó diện tích cả hai con dê ăn sẽ là:

$$S' = S_A + S_B = 25\pi + 225\pi = 250\pi \text{ (m}^2\text{)}.$$

Ta có $S < S'$ ($200\pi < 250\pi$).

Vậy với cách buộc thứ hai thì diện tích cỏ mà hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn.

81. Gọi $S = \pi R^2$ là diện tích hình tròn lúc đầu.

a) Khi bán kính tăng lên gấp đôi, tức là $R_1 = 2R$, thì:

$$S_1 = \pi R_1^2 = \pi(2R)^2 = 4\pi R^2 = 4S.$$

b) Khi bán kính tăng lên gấp 3, tức là $R_2 = 3R$, thì:

$$S_2 = \pi R_2^2 = \pi(3R)^2 = 9\pi R^2 = 9S.$$

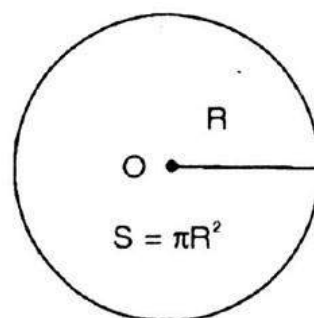
c) Khi bán kính tăng lên gấp k lần ($k > 1$) tức là:

$$R_k = k.R, \text{ thì: } S_k = \pi R_k^2 = \pi(k.R)^2 = k^2(\pi R^2) = k^2 S.$$

Tóm lại: Khi bán kính tăng lên gấp đôi thì diện tích đường tròn tăng lên gấp 4 ($= 2^2$) lần.

Khi bán kính tăng lên gấp ba thì diện tích đường tròn tăng lên gấp 9 ($= 3^2$) lần.

Khi bán kính tăng lên gấp k thì diện tích đường tròn tăng lên gấp k^2 lần.



82.

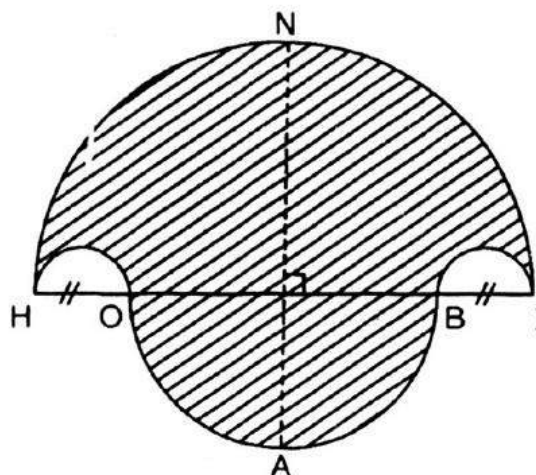
Bán kính đường tròn (R)	Độ dài đường tròn (C)	Diện tích hình tròn (S)	Số đo của cung tròn (n°)	Diện tích hình quạt tròn cung n°
2,1cm	13,2cm	13,8cm	47,50 $^\circ$	1,83cm 2
2,5cm	15,7cm	19,6cm	229,6 $^\circ$	12,50cm 2
3,5cm	22cm	37,80cm 2	101 $^\circ$	10,60cm 2

Luyện tập

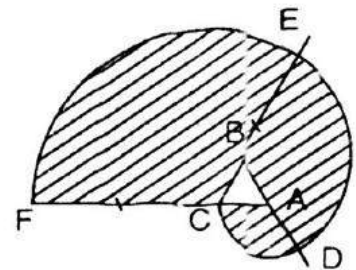
83. a) Vẽ hình bên (tạo bởi các cung tròn) với $HI = 10\text{cm}$ và $HO = BI = 2\text{cm}$.
Nêu cách vẽ.

b) Tính diện tích hình HOABINH (miền gạch sọc).

c) Chứng tỏ rằng hình tròn đường kính NA có cùng diện tích với hình HOABINH đó.

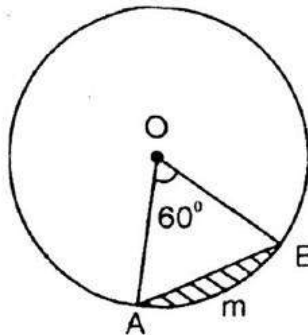


84. a) Vẽ lại hình tạo bởi các cung tròn xuất phát từ đỉnh C của tam giác đều ABC cạnh 1cm. Nêu cách vẽ (hình bên).



b) Tính diện tích miền gạch sọc.

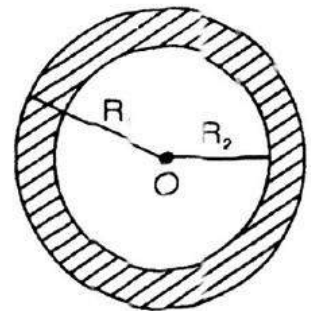
85. Hình viên phân là hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy. Hãy tính diện tích hình viên phân AmB, biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và bán kính đường tròn là 5,1cm (hình bên).



86. Hình vành khăn là phần hình tròn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm (hình bên).

a) Tính diện tích S của hình vành khăn theo R_1 và R_2 (giả sử $R_1 > R_2$).

b) Tính diện tích hình vành khăn khi $R_1 = 10,5\text{cm}$, $R_2 = 7,8\text{cm}$.



87. Lấy cạnh BC của một tam giác đều làm đường kính, vẽ một nửa đường tròn về cùng một phía với tam giác ấy đối với đường thẳng BC. Cho biết cạnh $BC = a$, hãy tính diện tích của hai hình viên phân được tạo thành.

Download Sách Miễn Phí Online

83. a) Cách vẽ:

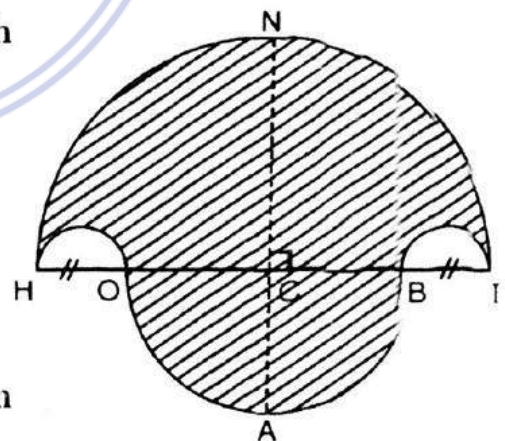
– Đầu tiên, vẽ nửa đường tròn đường kính $HI = 10\text{cm}$, tâm C.

– Trên đường kính HI ta lấy lần lượt các điểm O và B sao cho $HO = BI = 2\text{cm}$.

Vẽ hai nửa đường tròn đường kính HO và BI nằm cùng phía với nửa đường tròn (C).

– Vẽ nửa đường tròn đường kính OB nằm khác phía với nửa đường tròn (C).

Đường thẳng vuông góc với HI tại C cắt (C) tại N và cắt nửa đường tròn đường kính OB tại A.



b) Diện tích hình HOABINH:

$$S = \frac{1}{2} \pi \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2 = \frac{25}{2} \pi + \frac{9}{2} \pi - \pi = 16\pi \text{ (cm}^2\text{)} (1)$$

c) Diện tích hình tròn đường kính NA:

$$\Gamma \text{a có: } CN = \frac{HI}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{cm và } CO = CH - HO = 5 - 2 = 3\text{cm} = CA$$

$$\Gamma \text{a có } AC + CN = 3 + 5 = 8\text{cm}$$

$$\text{Suy ra bán kính } R \text{ của đường tròn đường kính } NA \text{ bằng: } \frac{NA}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ (cm}^2\text{)} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: hình tròn đường kính NA có cùng diện tích với hình HOABINH.

84. a) Vẽ lại hình:

– Trước tiên, ta vẽ tam giác đều ABC cạnh 1cm.

– Vẽ $\frac{1}{3}$ đường tròn tâm A, bán kính 1cm.

Ta được cung CD.

– Vẽ $\frac{1}{3}$ đường tròn tâm B, bán kính 2cm.

Ta được cung DE.

– Vẽ $\frac{1}{3}$ đường tròn tâm C, bán kính 3cm. Ta được cung EF.

$$\text{b) Diện tích hình quạt tròn CAD là: } S_1 = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 120}{360} = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2$$

$$\text{Diện tích hình quạt tròn DBE: } S_2 = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120}{360} = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2$$

$$\text{Diện tích hình quạt tròn ECF là: } S_3 = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 120}{360} = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2$$

$$\text{Vậy: Diện tích miền gạch sọc} = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{3} \pi (1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

85. Ta có tam giác OAB là tam giác đều
cạnh $R = 5,1 \text{ cm}$.

Áp dụng công thức tính diện tích tam

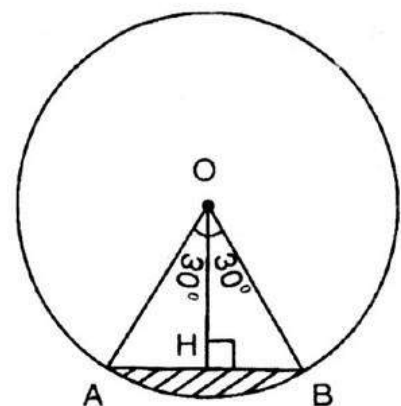
$$\text{gác đều cạnh } R \text{ là: } S_{\Delta OAB} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$$

Diện tích hình quạt tròn AOB là:

$$S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$$

Khi đó diện tích hình viên phân là:

$$S_{\text{vp}} = S_{\text{quạt}} - S_{\Delta OAB} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$



$$= 5,1^2 \left(\frac{3,14}{6} - \frac{1,73}{4} \right) \approx 2,4 \text{ (cm}^2\text{)}. \text{ Vậy: } S_{vp} = 2,4 \text{ cm}^2.$$

86. a) Diện tích hình tròn ($O; R_1$) là $S_1 = \pi R_1^2$. Diện tích hình tròn ($O; R_2$) là $S_2 = \pi R_2^2$. Khi đó diện tích hình vành khăn là:

$$S = S_1 - S_2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi (R_1^2 - R_2^2).$$

b) Thay số: $S = 3,14[(10,5)^2 - (7,8)^2] = 155,1 \text{ (cm}^2\text{)}$

87. Gọi nửa đường tròn tâm O đường kính BC cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại M và N . Vì $OC = ON$; $\hat{C} = 60^\circ$ nên tam giác ONC là tam giác đều. Do đó: $\widehat{NOC} = 60^\circ$.

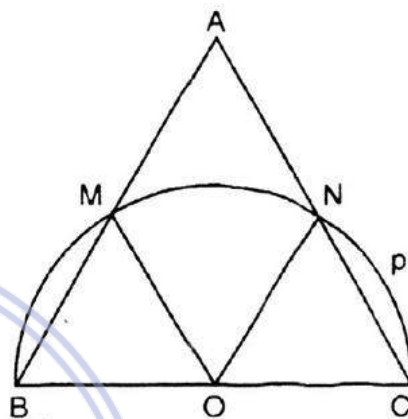
Ta có: $S_{\text{quạt } NOC} = \frac{\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi a^2}{24}$

$$S_{\Delta NOC} = \frac{\left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{16}$$

Diện tích hình viên phân: $S_{\text{Cp } N} = \frac{\pi a^2}{24} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{a^2}{48} (2\pi - 3\sqrt{3})$.

Vậy diện tích hai hình viên phân bên ngoài tam giác là:

$$2 \cdot \frac{a^2}{48} (2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{24} (2\pi - 3\sqrt{3}).$$



ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. Tóm tắt kiến thức cần nhớ

1. Các định nghĩa

1. Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.
2. a) Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
b) Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
c) Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .
3. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh tại tiếp điểm, một cạnh là tia tiếp tuyến và cạnh kia chứa dây cung.
5. Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn.
6. Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.
7. Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.

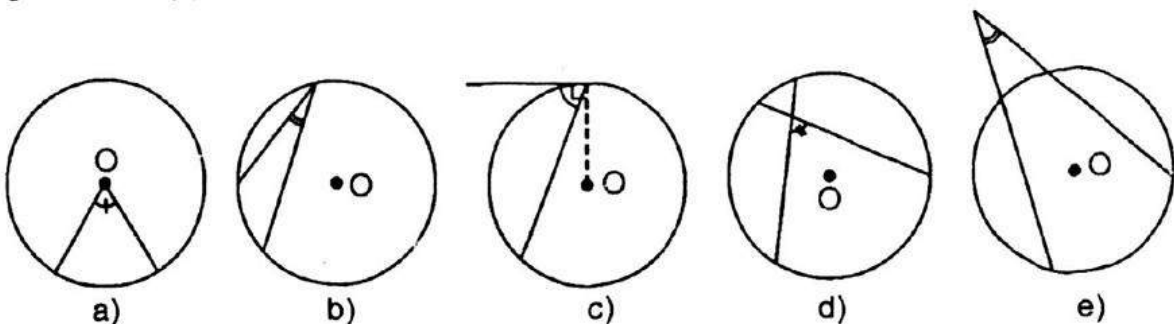
II. Các định lý

1. Nếu C là điểm nằm trên cung AB thì $\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$
2. Với 2 cung nhỏ trong một đường tròn, hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau và ngược lại.
3. Với hai cung nhỏ trong một đường tròn, cung lớn căng hai dây lớn hơn và ngược lại.
4. Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
5. Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.
6. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây cung (không phải là đường kính) thì chia cung căng dây ấy thành hai cung bằng nhau.
7. Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.
8. Số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.
9. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.
10. Trong một đường tròn:
 - a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn cung bằng nhau.
 - b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
 - c) Các góc nội tiếp chắn cung bằng nhau thì bằng nhau.
 - d) Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
 - e) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông và ngược lại, góc vuông nội tiếp thì chắn nửa đường tròn.
 - g) Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

11. Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.
12. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.
13. Quỹ tích (tập hợp) các điểm nhìn một đoạn thẳng cho trước dưới một góc α không đổi là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng đó ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$).
14. Một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì nội tiếp được đường tròn và ngược lại.
15. Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp:
 - a) Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° .
 - b) Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối của đỉnh đó.
 - c) Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
 - d) Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .
16. Hình thang nội tiếp được đường tròn là hình thang cân và ngược lại.
17. Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.
18. Trên đường tròn bán kính R , độ dài ℓ của một cung n° được tính theo công thức: $\ell = \frac{\pi R n}{180}$.
19. Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức: $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$ hay $S = \frac{\ell R}{2}$ (ℓ là độ dài cung n° của hình quạt tròn)

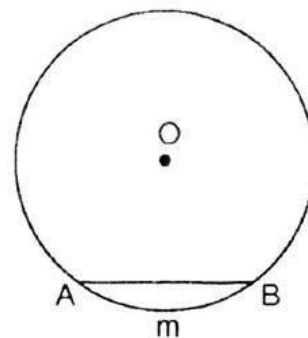
B. Bài tập giáo khoa cơ bản

88. Hãy nêu tên mỗi góc trong các hình dưới đây: (Ví dụ: Góc trên hình b) là góc nội tiếp).



89. Trong hình bên, cung $\widehat{AmB}$ có số đo là 60° . Hãy:

- Vẽ góc ở tâm chắn cung $\widehat{AmB}$. Tính góc $\angle AOB$.
- Vẽ góc nội tiếp đỉnh C chắn cung $\widehat{AmB}$. Tính góc $\angle ACB$.
- Vẽ góc tạo bởi tia tiếp tuyến Bt và dây cung BA . Tính góc $\angle ABt$.
- Vẽ góc $\angle ADB$ có đỉnh D ở bên trong đường tròn. So sánh $\widehat{ADB}$ với $\widehat{ACB}$.
- Vẽ góc $\angle AEB$ có đỉnh E ở bên ngoài đường tròn (E và C cùng phía đối với AB). So sánh $\widehat{AEB}$ và $\widehat{ACB}$.

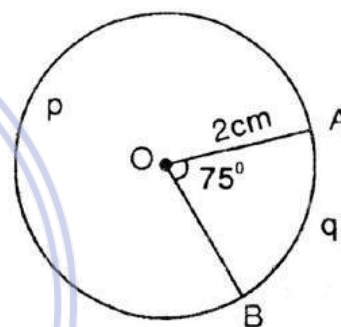


90. a) Vẽ hình vuông cạnh 4cm.

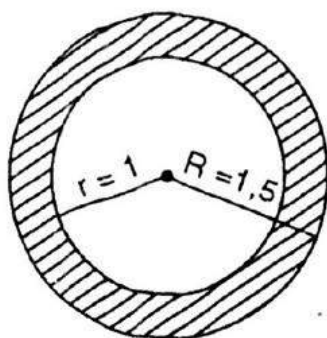
- Vẽ đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó. Tính bán kính R của đường tròn này.
- Vẽ đường tròn nội tiếp hình vuông đó. Tính bán kính r của đường tròn này.

91. Trong hình bên, đường tròn tâm O có bán kính $R = 2\text{cm}$, $\angle AOB = 75^\circ$.

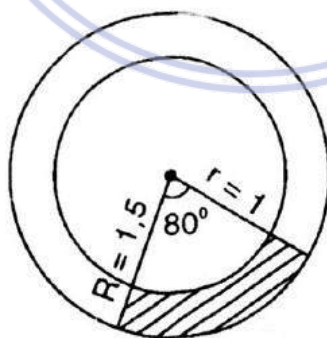
- Tính số đo $\widehat{ApB}$.
- Tính độ dài hai cung $\widehat{AqB}$ và $\widehat{ApB}$.
- Tính diện tích hình quạt tròn $OAqB$.



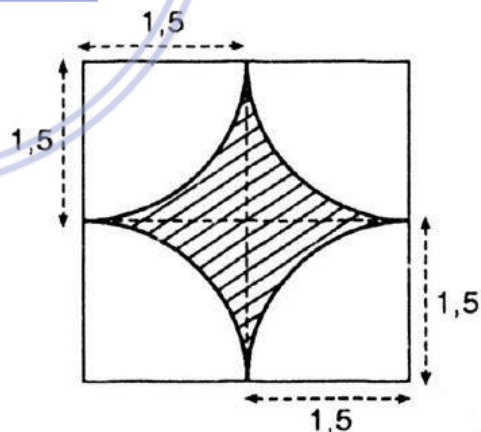
92. Hãy tính diện tích miền gạch sọc trong các hình a, b, c bên dưới (đơn vị đo độ dài: cm).



a)



b)



c)

93. Có ba bánh xe răng của A, B, C cùng chuyển động ăn khớp với nhau. Khi một bánh xe quay thì hai bánh xe còn lại cũng quay theo. Bánh xe A có 60 răng, bánh xe B có 40 răng, bánh xe C có 20 răng. Biết bán kính bánh xe C là 1cm. Hỏi:

- Khi bánh xe C quay 60 vòng thì bánh xe B quay mấy vòng?
- Khi bánh xe A quay 80 vòng thì bánh xe B quay mấy vòng?
- Bán kính của các bánh xe A và B là bao nhiêu?

-

- b) Lấy một điểm C bất kì trên (O). Nối C với hai đầu mút của $\widehat{AmB}$. Ta được góc nội tiếp $\widehat{ACB}$.

$$\text{Khi đó } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{AmB} = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ.$$

- c) Vẽ bán kính OB. Qua B vẽ $Bt \perp OB$. Ta được góc ABt là góc tạo bởi tia tiếp tuyến Bt với dây cung BA.

$$\text{Ta có } \widehat{ABt} = \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{AmB} = 30^\circ.$$

- d) Lấy điểm D bất kì ở bên trong đường tròn (O). Nối D với A và D với B. Ta có góc $\widehat{ADB}$ là góc ở bên trong đường tròn (O).

$$\text{Ta có: } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{AmB}$$

$$\widehat{ADB} = \frac{1}{2} (\text{ số } \widehat{AmB} + \text{ số } \widehat{CK})$$

$$\text{Mà } \text{ số } \widehat{AmB} + \text{ số } \widehat{CK} > \text{ số } \widehat{AmB} \text{ (do } \text{ số } \widehat{CK} > 0)$$

$$\text{nên } \widehat{ADB} > \widehat{ACB}.$$

- e) Lấy điểm E bất kì ở bên ngoài đường tròn, nối E với A và E với B, chúng cắt đường tròn lần lượt tại J và I.

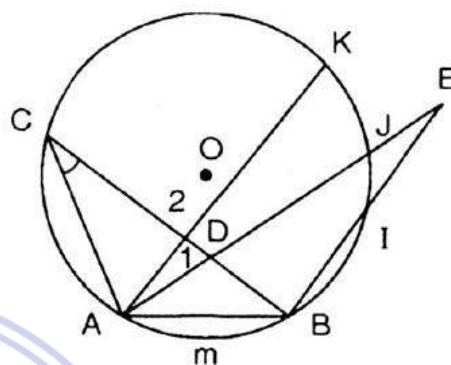
Ta có góc $\widehat{AEB}$ là góc ở bên ngoài đường tròn (O).

$$\text{Ta có } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{AmB}$$

$$\widehat{AEB} = \frac{1}{2} (\text{ số } \widehat{AmB} - \text{ số } \widehat{IJ}).$$

$$\text{Mà } \text{ số } \widehat{AmB} - \text{ số } \widehat{IJ} < \text{ số } \widehat{AmB} \text{ (do } \text{ số } \widehat{IJ} > 0)$$

$$\text{nên } \widehat{AEB} < \widehat{ACB}$$



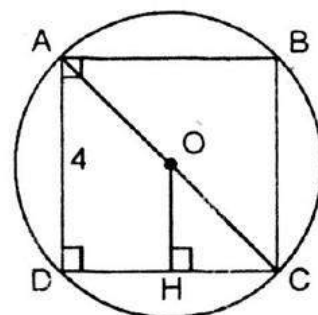
90. a) Dùng êke ta vẽ hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm như sau.

- Vẽ $AB = 4\text{cm}$.
- Vẽ $BC \perp AB$ và $BC = 4\text{cm}$
- Vẽ $DC \perp BC$ và $DC = 4\text{cm}$.
- Nối D với A, ta có $AD \perp DC$ và $AD = 4\text{cm}$.

- b) Tam giác ABC là tam giác vuông cân nên: $AB = BC$
Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2 \text{ hay } AC^2 = 2 \cdot 4^2 = 32$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$



$$\text{Vậy } AO = R = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy } R = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

- c) Vẽ $OH \perp DC$. Vẽ đường tròn tâm O, bán kính OH. Đó là đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD.

$$\text{Ta có: } OH = \frac{AD}{2} = 2 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } r = OH = 2 \text{ cm}$$

91. a) Ta có $\widehat{AOB}$ là góc nội tiếp chắn cung AqB nên:

$$\widehat{AOB} = \text{sđ } \widehat{AqB} \text{ hay sđ } \widehat{AqB} = 75^\circ.$$

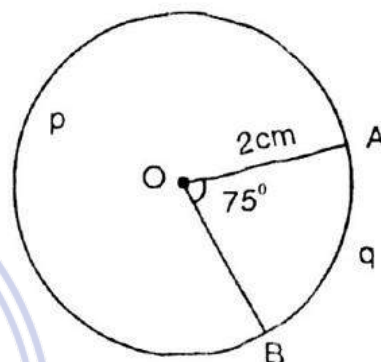
$$\begin{aligned} \text{Vậy sđ } \widehat{ApB} &= 360^\circ - \text{sđ } \widehat{AqB} \\ &= 360^\circ - 75^\circ = 285^\circ \end{aligned}$$

- b) Gọi $\ell_{\widehat{AqB}}$ là độ dài cung AqB, ta có:

$$\ell_{\widehat{AqB}} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 75}{180} = \frac{5}{6} \pi \text{ (cm)}$$

- Gọi $\ell_{\widehat{ApB}}$ là độ dài cung ApB, ta có:

$$\ell_{\widehat{ApB}} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 285}{180} = \frac{19\pi}{6} \text{ (cm)}$$



- c) Diện tích hình quạt tròn OAqB là: $S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 75}{360} = \frac{5\pi}{6} \text{ (cm}^2\text{)}$

92. * Hình a:

$$\text{Đối với hình tròn bán kính } R = 1,5: S_1 = \pi R^2 = \pi \cdot 1,5^2 = 2,25\pi.$$

$$\text{Đối với hình tròn bán kính } r = 1: S_2 = \pi r^2 = \pi 1^2 = \pi.$$

Vậy diện tích miền gạch sọc là:

$$S = S_1 - S_2 = 2,25\pi - \pi = 1,25\pi \text{ (đvdt)}.$$

- * Hình b:

$$\text{Diện tích hình quạt có bán kính } R = 1,5; n^\circ = 80^\circ$$

$$S_1 = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 1,5^2 \cdot 80}{360} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Diện tích hình quạt có bán kính } r = 1; n^\circ = 80^\circ$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 80}{360} = \frac{2\pi}{9}.$$

$$\text{Vậy diện tích miền gạch sọc là: } S = S_1 - S_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9} = \frac{9\pi - 4\pi}{18} = \frac{5\pi}{18}.$$

* Hình c:

Diện tích hình vuông cạnh $a = 3$ là:

$$S_1 = a^2 = 3^2 = 9.$$

Diện tích hình tròn có $R = 1,5$ là:

$$S_2 = \pi R^2 = \pi \cdot 1,5^2 = 2,25\pi = 7,06.$$

Vậy diện tích miền gạch sọc là:

$$S = S_1 - S_2 = 9 - 7,06 = 1,94 \text{ (dvd)}. \text{}$$

93. Vì bánh xe A, B, C chuyển động ăn khớp với nhau và khi một bánh xe quay thì hai bánh xe còn lại cũng quay theo nên số răng xe và bán kính các bánh xe phải tỉ lệ với nhau. Do đó:

a) Khi bánh xe C quay 60 vòng thì bánh xe B chỉ quay được 30 vòng.

b) Khi bánh xe A quay được 80 vòng thì bánh xe B quay được

$$80 \cdot \frac{60}{40} = 120 \text{ vòng.}$$

c) Vì bán kính bánh xe C là 1cm thì bán kính bánh xe B là 2cm và bán kính bánh xe A là 3cm.

94. Theo cách biểu diễn sự phân phối học sinh như biểu đồ thì:

a) ĐÚNG ($\frac{1}{2} = 50\%$)

b) ĐÚNG ($\frac{1}{3} \approx 33,3\%$)

c) Số học sinh nội trú chiếm $100\% - (50\% + 33,3\%) = 16,7\%$

d) Số học sinh ngoại trú:

$$1800 \cdot \frac{1}{2} = 900 \text{ (em)}$$

Số học sinh bán trú:

$$1800 \cdot \frac{1}{3} = 600 \text{ (em)}$$

Số học sinh nội trú:

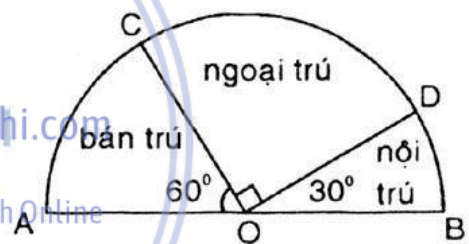
$$1800 - (900 + 600) = 300 \text{ (em).}$$

95. a) Ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{AEB}$ (cùng chắn $\widehat{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{CAE}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow sđ \widehat{CD} = sđ \widehat{CE}$.

Suy ra $CD = CE$.



- b) Ta có $\widehat{EBC}$ và $\widehat{CBD}$ là góc nội tiếp trong đường tròn O nên:

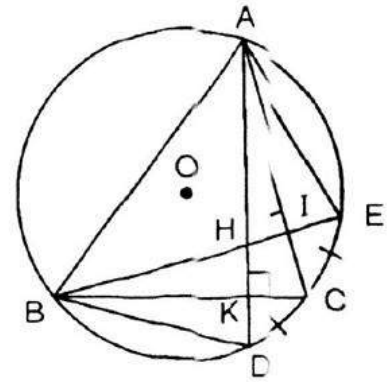
$$\widehat{EBC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{EC} \text{ và } \widehat{CBD} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{DC}.$$

$$\text{Mà } \widehat{EC} = \widehat{DC}$$

$$\text{nên } \widehat{EBC} = \widehat{CBD}.$$

Vậy $\triangle BHD$ cân tại B.

- c) Vì $\triangle BHD$ cân và BK là đường cao cũng là đường trung trực của HD. Điểm C nằm trên đường trung trực của HD nên $CH = CD$.



96. a) Vì AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$.

Mà $\widehat{BAM}$ và $\widehat{MAC}$ đều là góc nội tiếp của (O) nên $\widehat{BM} = \widehat{MC}$.

Suy ra M là điểm chính giữa của cung BC.

Vậy $OM \perp BC$ và OM đi qua trung điểm của BC.

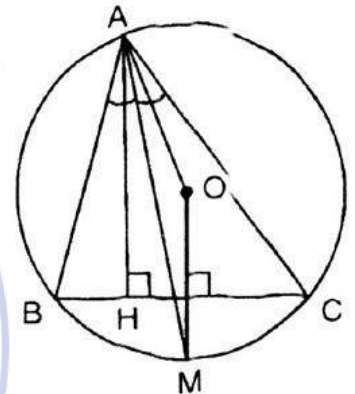
- b) Ta có: $OM \perp BC$ và $AH \perp BC$.

Suy ra $\widehat{HAM} = \widehat{AMO}$ (so le trong). (1)

Mà $\triangle OAM$ cân tại O nên $\widehat{AMO} = \widehat{MAO}$. (2)

So sánh (1) và (2), ta được: $\widehat{HAM} = \widehat{MAO}$.

Vậy AM là đường phân giác của góc OAH.



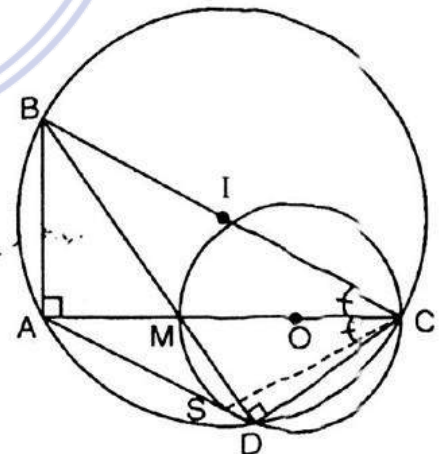
97. a) Ta có $\widehat{MDC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) nên $\widehat{MDC} = 90^\circ$.

Suy ra tam giác CDB là tam giác vuông nên nội tiếp trong đường tròn đường kính BC. (1)

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A.

Do đó, tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn đường kính BC. (2)

Từ (1) và (2) chứng tỏ rằng tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm I đường kính BC.



- b) Ta có $\widehat{ABD}$ là góc nội tiếp trong đường tròn (I) chắn cung AD

Tương tự, $\widehat{ACD}$ là góc nội tiếp trong đường tròn (I) chắn cung AD.

$$\text{Vậy } \widehat{ABD} = \widehat{ACD}.$$

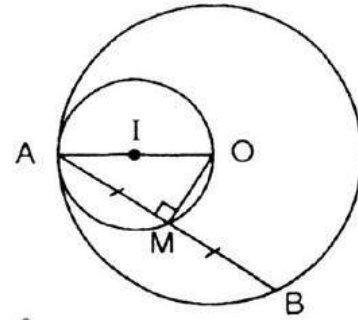
- c) Ta có $\widehat{SDM} = \widehat{SCM}$ (vì góc nội tiếp cùng chắn cung MS của đường tròn (O)). (1)

Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (là góc nội tiếp cùng chắn cung AB của đường tròn (I)). (2)

Mà $\widehat{ADB} = \widehat{SDM}$ nên $\widehat{SCM} = \widehat{ACB}$.

Vậy tia CA là tia phân giác của góc SCB.

98. * *Phần thuận:* Giả sử M là trung điểm của dây AB. Do đó $OM \perp AB$. Khi B di động trên đường tròn (O) điểm M luôn nhìn đoạn OA cố định dưới một góc vuông. Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn tâm I đường kính OA.



- * *Phần đảo:* Lấy một điểm M' bất kì trên đường tròn (I). Nối M' với A, đường thẳng M'A cắt đường tròn (O) tại B'. Nối M' với O, ta có $\widehat{AM'O} = 90^\circ$ hay $OM' \perp AB'$. Suy ra M' là trung điểm của AB'.

Kết luận: Tập hợp các trung điểm M của dây AB là đường tròn đường kính OA.

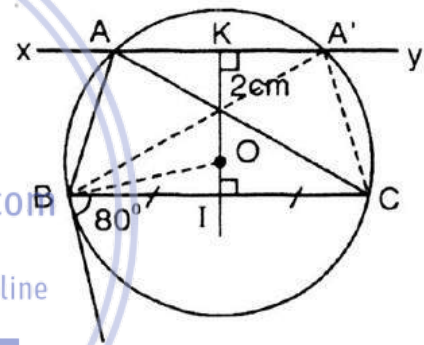
99. Cách dựng như sau.

- Trước hết dựng đoạn $BC = 6\text{cm}$.
- Dựng cung chứa góc 80° trên đoạn BC.
- Dựng đường thẳng $xy \parallel BC$ và cách BC một khoảng là 2cm.

Đường thẳng xy cắt cung chứa góc 80° tại hai điểm A và A'.

- Tam giác ABC là tam giác phải dựng thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Bài toán có hai nghiệm hình ($\triangle ABC$ và $\triangle A'BC$).



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Nếu $\widehat{AOB} = 100^\circ$; $\widehat{BOC} = 60^\circ$ thì $\widehat{ABC}$ có số đo bằng:

A. 90° ;	B. 95° ;	C. 100° ;	D. 105° .
-----------------	-----------------	------------------	------------------
2. Cho đường tròn (O; R) và dây $AB = R\sqrt{2}$. Khi đó số đo của $\widehat{ABO}$ bằng:

A. 30° ;	B. 45° ;	C. 60° ;	D. 75° .
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------
3. Cho đường tròn (O; R), bán kính OM vuông góc với dây $AB = R\sqrt{3}$ tại I ($I \in AB$). Khi đó số đo $\widehat{MOB}$ bằng:

A. 30° ;	B. 60° ;	C. 45° ;	D. 80° .
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Nếu $\widehat{AOC} = 120^\circ$ thì độ dài cạnh AC bằng:
- A. $R\sqrt{2}$; B. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$; C. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; D. $R\sqrt{3}$.
5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), biết AB = 10cm, AC = 15cm, đường cao AH = 5cm. Khi đó, bán kính của đường tròn (O) bằng:
- A. 15cm; B. 6cm; C. 7cm; D. 8cm.
6. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn. Hai cạnh đối AB và DC cắt nhau tại M. nếu $\widehat{BAD} = 70^\circ$ thì $\widehat{BCM}$ bằng:
- A. 90° ; B. 35° ; C. 70° ; D. 110° .
7. Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình lục giác đều cạnh a là:
- A. a; B. 2a; C. $\sqrt{a}$; D. $2\sqrt{a}$.
8. Cho đường tròn (O, 2cm) và cung $\widehat{AB} = 60^\circ$. Khi đó cung AB có độ dài là:
- A. $\frac{2\pi}{3}$; B. $\frac{3}{2}$; C. $\frac{2}{3}$; D. $\frac{3\pi}{2}$.
9. Nếu đường kính của đường tròn tăng π lần thì diện tích tăng lên bao nhiêu đơn vị?
- A. 2π ; B. 3π ; C. π^2 ; D. $\frac{\pi}{2}$.
10. Cho hình quạt tròn có bán kính 12cm và góc ở tâm tương ứng bằng 60° thì có diện tích bằng:
- A. $12\pi\text{cm}^2$; B. $15\pi\text{cm}^2$; C. $18\pi\text{cm}^2$; D. $24\pi\text{cm}^2$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1. C | 2. B | 3. B | 4. D | 5. A |
| 6. C | 7. A | 8. A | 9. C | 10. D |

Chương IV.

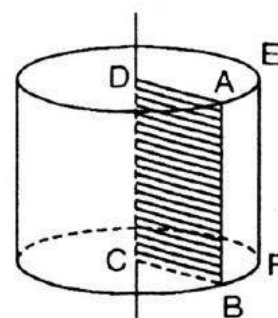
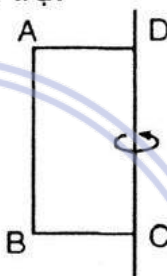
HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN - HÌNH CẦU

§1. HÌNH TRỤ. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hình trụ: Khi quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một hình trụ.

- EF là đường sinh.
- Các đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là chiều cao của hình trụ.
- DC gọi là trục của hình trụ.



2. Diện tích xung quanh - Diện tích toàn phần của hình trụ:

Cho hình trụ với bán kính đáy r và chiều cao h , ta có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

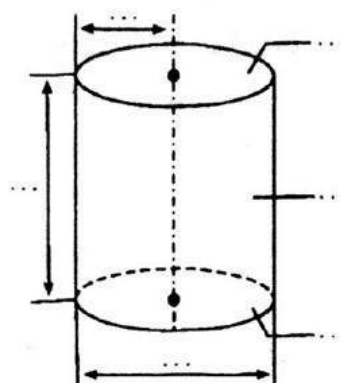
3. Thể tích hình trụ:

$$V = Sh = \pi r^2 h$$

S: diện tích đáy, h: chiều cao

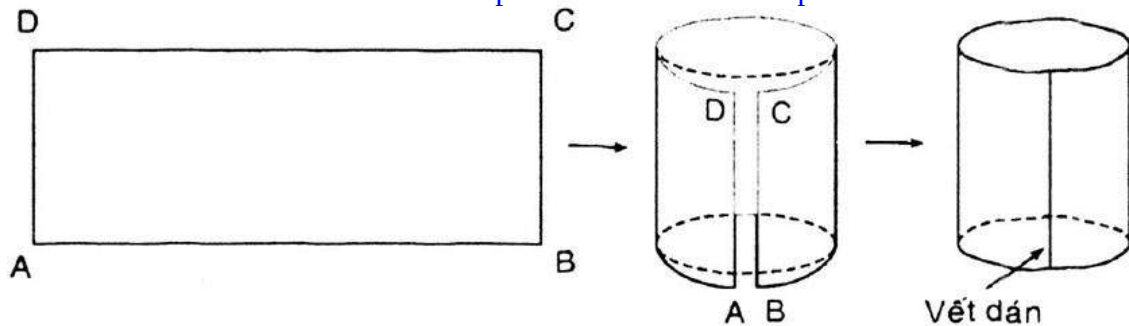
II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Hãy điền thêm các tên gọi vào dấu "..."

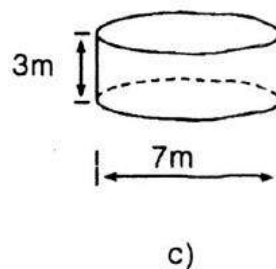
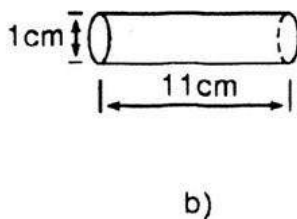
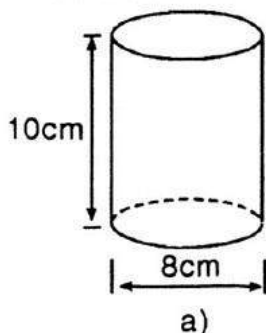


2. Lấy một băng giấy hình chữ nhật ABCD (hình vẽ bên dưới). Biết $AB = 10\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$; dán băng giấy như hình vẽ (B sát với A và C sát với D, không được xoắn).

Có thể dán băng giấy để tạo nên mặt xung quanh của hình trụ được không?



3. Quan sát ba hình dưới đây và chỉ ra chiều cao, bán kính đáy của mỗi hình.



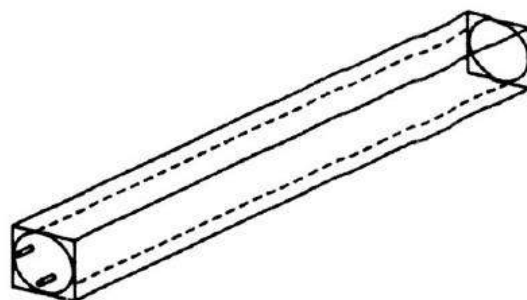
4. Một hình trụ có bán kính đáy là 7cm, diện tích xung quanh bằng 352cm^2 . Khi đó, chiều cao của hình trụ là:
- (A) 3,2cm; (B) 4,6cm; (C) 1,8cm;
(D) 2,1cm; (E) Một kết quả khác.
- Hãy chọn kết quả đúng.

5. Điền đủ các kết quả vào những ô trống của bảng sau:

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm^2)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	1	10				
	5	4				
		8	4π			

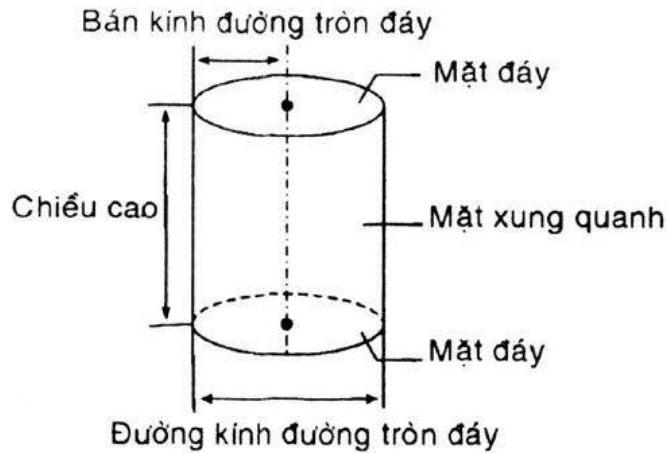
6. Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình trụ là 314cm^2 .
Hãy tính bán kính đường tròn đáy và thể tích hình trụ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

7. Một bóng đèn huỳnh quang dài 1,2m, đường kính của đường tròn đáy là 4cm, được đặt khít vào một ống giấy cứng dạng hình hộp (hình bên). Tính diện tích phần giấy cứng dùng để làm một hộp. (Hộp hở hai đầu, không tính lề và mép dán).



Giải

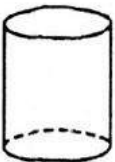
1.



2. Được. Các em thực hành như hình vẽ đã hướng dẫn.

3. * Hình a): $h = 10\text{cm}$; $r = \frac{8}{2} = 4\text{cm}$.* Hình b): $h = 11\text{cm}$; $r = \frac{1}{2} = 0,5\text{ cm}$.* Hình c): $h = 3\text{m}$; $r = \frac{7}{2} = 3,5\text{ m}$.4. Ta có $S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi r} = \frac{352}{14\pi} = \frac{352}{14 \cdot 3,14} \approx 8,01\text{ cm}$. Chọn câu (E).

5.

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm ²)	Diện tích xung quanh (cm ²)	Thể tích (cm ³)
	1	10	2π	π	20π	10π
	5	4	10π	25π	40π	100π
	2	8	4π	4π	32π	32π

6. Theo đề bài, ta có: $h = r$; $S = 314\text{ cm}^2$.

Ta có bán kính đường tròn đáy được tính từ công thức:

$$S_{xq} = 2\pi rh \text{ hay } 314 = 2 \cdot 3,14 \cdot r^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 50 \Leftrightarrow r = 7,07\text{ (cm)}.$$

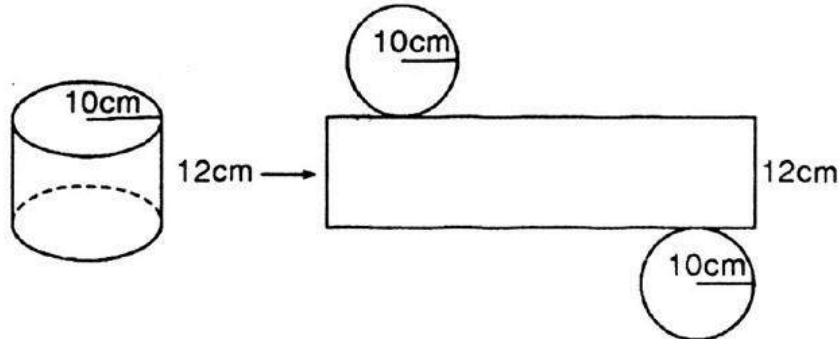
$$\text{Thể tích } V = \pi r^2 h = \pi \cdot 50 \cdot \sqrt{50} \approx 1110,16\text{ (cm}^3\text{)}.$$

7. Theo đề bài, diện tích phần giấy cứng cần tính chính là diện tích xung quanh của một hình hộp chữ nhật có chu vi đáy là: $4 \cdot 4 = 16\text{ (cm)}$ và chiều cao $h = 1,2\text{m} = 120\text{cm}$.

$$\text{Vậy } S = 16 \cdot 120 = 1920\text{ (cm}^2\text{)} = 0,192\text{ (m}^2\text{)}.$$

Luyện tập

8. Cho hình chữ nhật ABCD ($AB = 2a$, $BC = a$). Quay hình chữ nhật đó quanh AB thì được hình trụ có thể tích V_1 ; quanh BC thì được hình trụ có thể tích V_2 . Trong các đẳng thức dưới đây, hãy chọn đẳng thức đúng:
 (A) $V_1 = V_2$; (B) $V_1 = 2V_2$; (C) $V_2 = 2V_1$; (D) $V_2 = 3V_1$; (E) $V_1 = 3V_2$.
9. Hình vẽ là một hình trụ cùng với hình khai triển của nó kèm theo kích thước.



Hãy điền vào các chỗ ... và các ô trống những cụm từ hoặc các số cần thiết.

$$\dots : \square \cdot \square \cdot 10 = \square \text{ (cm}^2\text{)};$$

$$\dots : (2 \cdot \square \cdot 10) \cdot \square = \square \text{ (cm}^2\text{)};$$

$$\dots : \square \cdot 2 + \square = \square \text{ (cm}^2\text{)}.$$

10. Hãy tính:

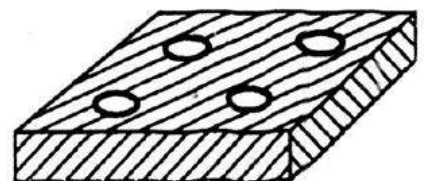
- a) Diện tích xung quanh của một hình trụ có chu vi hình tròn đáy là 13cm và chiều cao là 3cm.
 b) Thể tích của hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 5mm và chiều cao là 8mm.

11. Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có nước dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là $12,8\text{cm}^2$. Nước trong lọ dâng lên thêm 8,5mm. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu?

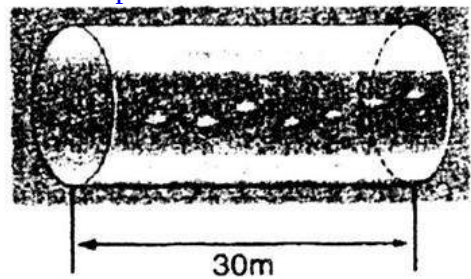
12. Điền đầy đủ các kết quả vào những ô trống của bảng sau:

Hình	Bán kính đáy	Đường kính đáy	Chiều cao	Chu vi đáy	Diện tích đáy	Diện tích xung quanh	Thể tích
	25mm		7cm				
		6cm	1m				
	5cm						1l

13. Một tấm kim loại được khoan thủng bốn lỗ như hình bên (lỗ khoan dạng hình trụ), tấm kim loại dày 2cm, đáy của nó là hình vuông có cạnh là 5cm. Đường kính của mỗi khoan là 8mm. Hỏi thể tích phần còn lại của tấm kim loại là bao nhiêu?



14. Đường ống nối hai bể cá trong một thủy cung ở miền nam nước Pháp có dạng một hình trụ, độ dài của đường ống là 30m (hình bên). Dung tích của đường ống nối trên là 1 800 000 lít.



Tính diện tích đáy của đường ống.

Giải

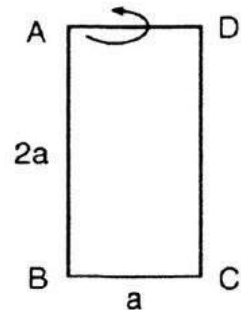
8. Khi quay hình chữ nhật ABCD quanh AB thì:

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3.$$

Khi quay quanh BC, ta có:

$$V_2 = \pi r'^2 h' = \pi (2a^2) \cdot a = 4\pi a^3 = 2(2\pi a^3) = 2V_1.$$

Vậy chọn câu (C).



9. Dòng 1: Diện tích đáy: $\pi \cdot 10 \cdot 10 = 100\pi$ (cm²)

Dòng 2: Diện tích xung quanh: $(2 \cdot \pi \cdot 10) \cdot 12 = 240\pi$ (cm²)

Dòng 3: Diện tích toàn phần: $100\pi \cdot 2 + 240\pi = 440\pi$ (cm²)

10. a) Ta có $S_{xq} = (2\pi r) \cdot h = 13,3 = 39$ (cm²).

b) Ta có $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 200\pi \approx 628$ (mm³).

11. Theo đề bài, thể tích tượng đá bằng thể tích hình trụ có diện tích đáy là 12,8 cm² và chiều cao bằng 8,5 mm. Vậy $V = S \cdot h = 12,8 \cdot 0,85 = 10,88$ (cm³).

12. Học sinh tự làm.

13. Theo đề bài ta có:

Bán kính đáy lỗ khoan hình trụ là 4mm, tấm kim loại dày 2cm = 20mm chính là chiều cao hình trụ.

Do đó, thể tích của một lỗ khoan hình trụ là:

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 \approx 1005 \text{ (mm}^3\text{)} = 1,005 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

- ♦ Vậy thể tích 4 lỗ khoan là: $V_2 = 4V_1 = 4 \cdot 1,005 = 4,02$ (cm³).

Thể tích tấm kim loại là: $V_3 = a \cdot a \cdot h = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ (cm³).

Vậy thể tích phần còn lại của tấm kim loại là:

$$V = V_3 - V_2 = 50 - 4,02 = 45,98 \text{ (cm}^3\text{)}$$

14. Ta có 1 lít = 1 dm³. Do đó 1 800 000 lít = 1800 m³.

Theo đề bài, ta có: Dung tích của đường ống hình trụ chính là thể tích của hình trụ. Còn độ dài đường ống chính là đường cao hình trụ.

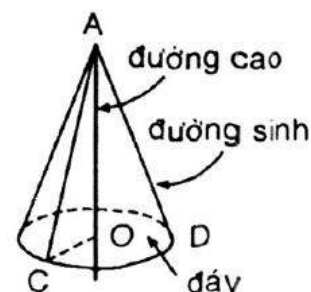
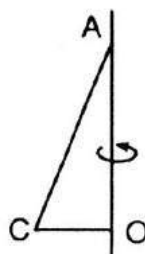
$$\text{Ta có: } V = S \cdot h \Rightarrow S = \frac{V}{h} = \frac{1800}{30} = 60 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích đáy của đường ống là 60m².

§2. HÌNH NÓN - HÌNH NÓN CỤT. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hình nón: Khi quay tam giác vuông AOC một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định thì được một hình nón.



2. Diện tích xung quanh hình nón:

Gọi r là bán kính đáy hình nón,
 ℓ là đường sinh, h là đường cao.

- Diện tích xung quanh hình nón:

$$S_{xq} = \pi r \ell$$

- Diện tích toàn phần hình nón
(tổng diện tích xung quanh và
diện tích đáy) là:

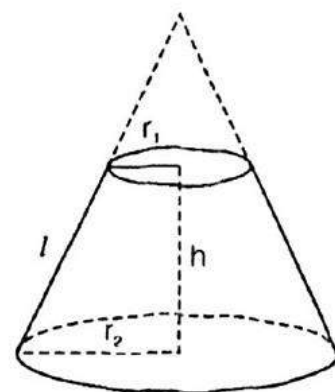
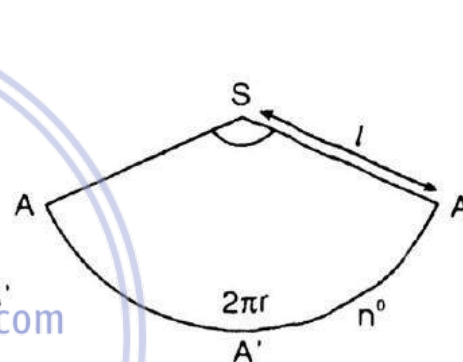
$$S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2$$

3. Thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ($V_{hn} = \frac{1}{3} V_{trv}$)

4. Diện tích xung quanh và thể tích hình nón cụt:

$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)\ell$$

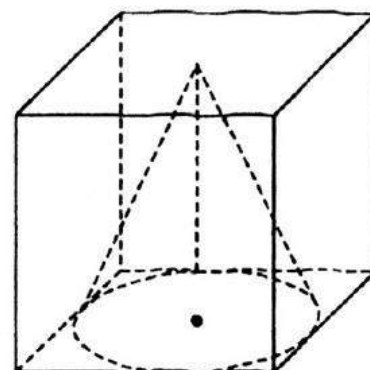
$$V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$



II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

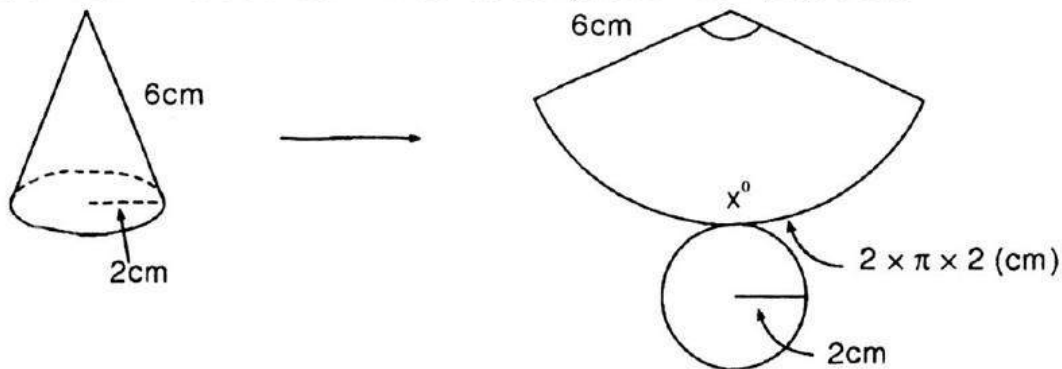
15. Một hình nón được đặt vào bên trong một hình lập phương như hình vẽ (cạnh của hình lập phương bằng 1) (hình bên). Hãy tính:

- a) Bán kính đáy của hình nón.
b) Độ dài đường sinh.



16. Cắt mặt xung quanh của một hình nón theo một đường sinh và trải phẳng ra thành một hình quạt. Biết bán kính hình quạt tròn bằng độ dài đường sinh và độ dài cung bằng chu vi đáy.

Quan sát hình vẽ dưới và tính số đo cung của hình quạt tròn.

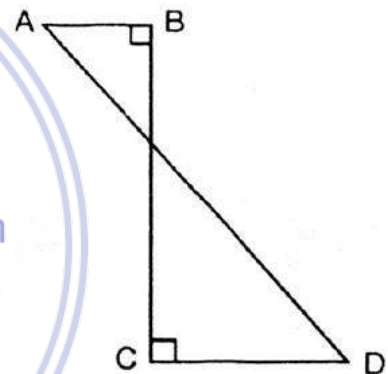


17. Khi quay tam giác vuông để tạo ra một hình nón như ở hình 87 SGK Toán 6 tập 2 thì góc CAO gọi là nửa góc ở đỉnh của hình nón. Biết nửa góc ở đỉnh của một hình nón là 30° , độ dài đường sinh là a . Tính số đo cung của hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón.

18. Hình ABCD (hình bên) khi quay quanh BC thì tạo ra:

- (A) Một hình trụ;
(B) Một hình nón;
(C) Một hình nón cụt.
(D) Hai hình nón;
(E) Hai hình trụ;

Hãy chọn câu trả lời đúng.



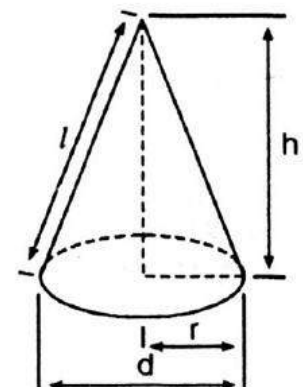
19. Hình khai triển của mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt. Nếu bán kính hình quạt là 16cm, số đo cung là 120° thì độ dài đường sinh của hình nón là:

- (A) 16cm; (B) 8cm; (C) $\frac{16}{3}$ cm; (D) 4cm; (E) $\frac{16}{5}$ cm.

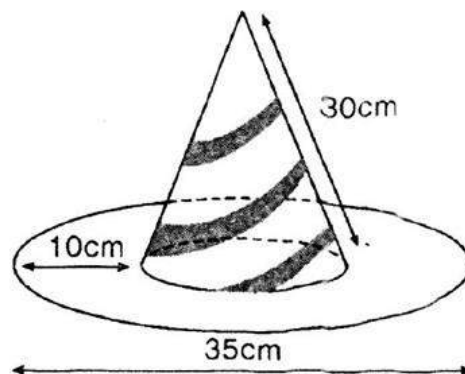
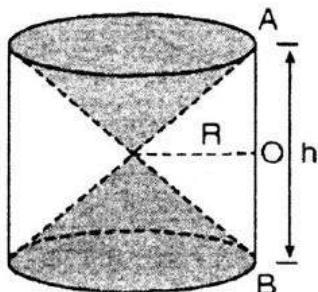
Hãy chọn kết quả đúng.

20. Hãy điền đủ vào các ô trống ở bảng sau (xem hình vẽ)

Bán kính đáy r (cm)	Đường kính đáy d (cm)	Chiều cao h (cm)	Độ dài đường sinh l (cm)	Thể tích V (cm ³)
10		10		
	10	10		
		10		1000
10				1000
	10			1000



21. Cái mũ của chú hề với các kích thước cho theo hình vẽ (hình bên). Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ (không kể riềm, mép, phần thừa).



22. Hình bên cho ta hình ảnh của một cái đồng hồ cát với các kích thước kèm theo ($AO = OB$).

Hãy so sánh tổng các thể tích của hai hình nón và thể tích của hình trụ.

Giải

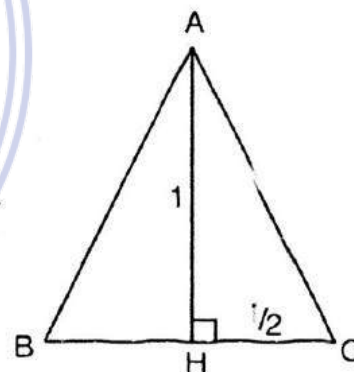
15. a) Vì đáy của hình nón là đường tròn nội tiếp trong hình vuông có cạnh bằng 1. Do đó, bán kính đáy của hình nón là $r = \frac{1}{2}$.

- b) Độ dài đường sinh của hình nón chính là cạnh AC của tam giác vuông HAC với $AH = 1$. $HC = \frac{1}{2}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông HAC, ta có:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Suy ra } AC = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



16. Theo đề bài, ta có:

Độ dài ℓ của cung hình quạt tròn bán kính $r = 6\text{cm}$, bằng chu vi đáy hình nón: $\ell = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ (cm)

Theo công thức tính độ dài cung tròn x° , ta có:

$$\ell = \frac{\pi r x}{180} = 4\pi \Rightarrow x = \frac{180 \cdot \ell}{\pi r} = \frac{180 \cdot 4\pi}{6\pi} = \frac{720}{6} = 120^\circ.$$

Vậy số đo cung hình quạt tròn là 120° .

17. Tam giác CAO vuông tại O, có $\widehat{CAO} = 30^\circ$, đường sinh $CA = a$. Do đó, $\triangle CAO$ là nửa tam giác đều cạnh a . Suy ra $OC = \frac{a}{2}$.

Vậy bán kính hình nón là $\frac{a}{2}$.

Ta có độ dài cung hình quạt tròn n° , bán kính bằng chu vi đáy của hình nón nên ta có: $l = \frac{\pi an}{180} = 2\pi \frac{a}{2} \Leftrightarrow n = 180$

Vậy số đo cung hình quạt tròn là 180° .

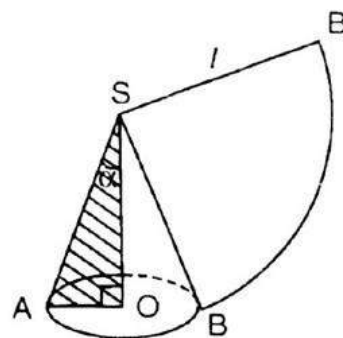
18. Chọn câu D.

19. Từ đề bài ta triển khai ra được như hình vẽ.

Ta nhận thấy rằng bán kính của hình quạt cũng chính là đường sinh của hình nón.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là $l = 16\text{cm}$.

Do đó, chọn câu A.



20. Kết quả cho ở bảng sau:

r (cm)	d (cm)	h (cm)	l (cm)	v (cm ³)
10	20	10	$10\sqrt{2}$	$\frac{10^3\pi}{3}$
5	10	10	$5\sqrt{5}$	$\frac{250\pi}{3}$
$10\sqrt{\frac{3}{\pi}}$	$20\sqrt{\frac{3}{\pi}}$	10	$10\sqrt{\frac{3}{\pi} + 1}$	1000
10	20	$\frac{30}{\pi}$	$10\sqrt{\frac{9}{\pi^2} + 1}$	1000
5	10	$\frac{120}{\pi}$	$\sqrt{25 + \left(\frac{120}{\pi}\right)^2}$	1000

21. Theo đề bài, ta nhận xét rằng tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ bằng tổng diện tích của hình vành khăn và hình nón:

Ta có diện tích hình vành khăn:

$$S_1 = \pi R^2 - \pi r^2 \text{ với } \begin{cases} R = \frac{35}{2} = 17,5 \text{ (cm)} \\ r = \frac{35 - 20}{2} = 7,5 \text{ (cm)} \end{cases}$$

$$= \pi[(17,5)^2 - (7,5)^2] = 250\pi.$$

Ta có diện tích hình nón: $S_2 = \pi rl = \pi \cdot 7,5 \cdot 30 = 225\pi$.

Khi đó diện tích vải cần có để làm nên cái mũ là:

$$S = S_1 + S_2 = 250\pi + 225\pi = 475\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy $S = 475\pi \text{ cm}^2$.

22. Theo đề bài cho thì hai hình nón trên hình bằng nhau, do đó thể tích của chúng cũng bằng nhau.

$$\text{Do đó } V_{\text{h nón}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{h}{2}. \text{ Suy ra } 2V_{\text{h nón}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{\pi R^2 h}{3}. \quad (1)$$

$$\text{Thể tích hình trụ: } V_{\text{trụ}} = \pi R^2 h. \quad (2)$$

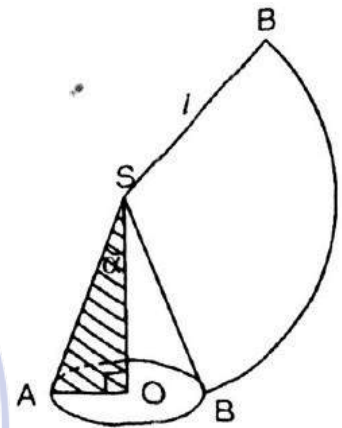
$$\text{So sánh: Ta có: } \frac{2V_{\text{h nón}}}{V_{\text{trụ}}} = \frac{\frac{\pi R^2 h}{3}}{\pi R^2 h} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } 2 \cdot V_{\text{h nón}} = \frac{1}{3} V_{\text{trụ}}.$$

Vậy tổng các thể tích của hai hình nón bằng một phần ba thể tích hình trụ.

Luyện tập

23. Viết công thức tính nửa góc ở đỉnh của một hình nón (góc α của tam giác vuông AOS – hình bên) sao cho diện tích mặt khai triển của mặt nón bằng một phần tư diện tích của hình tròn (bán kính SA).
24. Hình khai triển của mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt, bán kính hình quạt đó là 16cm, số đo cung là 120° . Tang của nửa góc ở đỉnh của hình nón là:



- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (C) $\sqrt{2}$; (D) $2\sqrt{2}$.

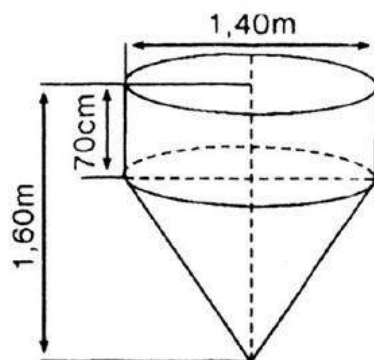
Hãy chọn kết quả đúng.

25. Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón cụt biết hai bán kính đáy là a , b ($a < b$) và độ dài đường sinh là l (a , b , l có cùng đơn vị đo).
26. Hãy điền vào các ô trống cho ở bảng sau (đơn vị độ dài: cm)

Hình	Bán kính đáy r	Đường kính đáy d	Chiều cao h	Độ dài đường sinh l	Thể tích V
	5		12		
		16	15		
	7			25	
		40		29	

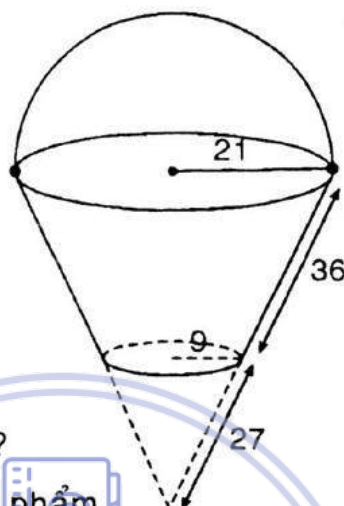
27. Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình bên. Hãy tính:

- a) Thể tích của dụng cụ này;
b) Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đáy).



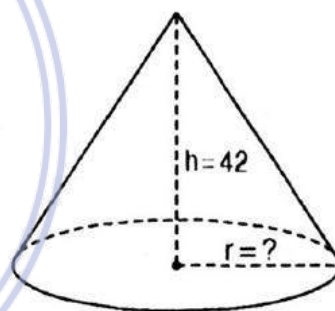
28. Một cái xô bằng inox có dạng hình nón cụt đựng hóa chất, có các kích thước cho ở hình bên (đơn vị: cm).

- a) Hãy tính diện tích xung quanh của xô.
b) Khi xô chứa đầy hóa chất thì dung tích của nó là bao nhiêu?



29. Cối xay của Đôn-ki-hô-tê (từ tác phẩm của Xec-van-téc (Cervantès)). Phần trên của cối xay gió có dạng một hình nón (hình bên). Chiều cao của hình nón là 42cm và thể tích của nó là 17600cm^3 .

Em hãy giúp chàng Đôn-ki-hô-tê tính bán kính của đáy hình nón (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Giải

23. Diện tích hình quạt có bán kính ℓ với số đo cung $n^\circ = 90^\circ$ là:

$$S_{\text{quạt}} = \frac{\pi \ell^2 n}{360} = \frac{\pi \ell^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi \ell^2}{4} \quad (*)$$

Theo đề bài ta có: $S_{\text{quạt}} = S_{\text{xq}}$ (hình nón). (1)

Mà diện tích xung quanh hình nón có bán kính $r = OA$ và đường sinh $SB = \ell$.

$$S_{\text{xq}} = \pi \cdot r \cdot \ell$$

$$\text{Từ (1) ta có: } \pi \cdot r \cdot \ell = \frac{\pi \ell^2}{4} \Rightarrow \ell = 4r$$

$$\text{Trong tam giác vuông SOA, ta có: } \sin \alpha = \frac{OA}{SA} = \frac{r}{\ell} = \frac{r}{4r} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Suy ra } \alpha \approx 14^\circ 28'.$$

24. Theo đề bài ta có: đường sinh của hình nón $l = 16$, độ dài cung AB của hình quạt tròn là:

$$l' = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 120}{180} = \frac{32\pi}{3}$$

Chu vi đáy hình nón bằng $2\pi r$.

Theo đề bài ta có: $l' = 2\pi r$ (r : bán kính đường tròn đáy hình nón)

$$\text{hay } \frac{32\pi}{3} = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{16}{3}$$

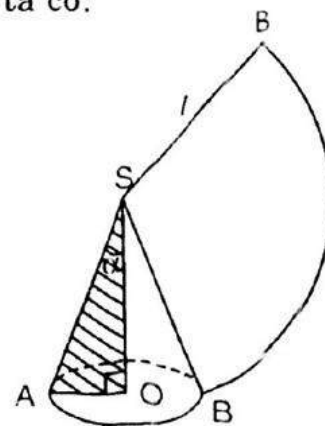
Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông AOS, ta có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{16^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2}$$

$$\text{hay } h = \sqrt{16^2 - \left(1 - \frac{1}{9}\right)} = 16 \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{32}{3} \sqrt{2}$$

$$\text{Ta có: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{h} = \frac{16}{3} : \frac{32}{3} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy ta chọn câu (A).



25. Theo công thức tính diện tích xung quanh hình nón cụt, ta có:

$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2) \cdot \ell \text{ với } \begin{cases} r_1, r_2 : \text{bán kính 2 đường tròn đáy} \\ \ell : \text{đường sinh} \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có: $S_{xq} = \pi(a + b)\ell$

26.

Hình	Bán kính đáy r (cm)	Đường kính đáy d (cm)	Chiều cao h (cm)	Độ dài đường sinh l (cm)	Thể tích V (cm ³)
	5	10	12	13	314
	8	16	15	17	320π
	7	14	24	25	392π
	20	40	21	29	2800π

27. a) Thể tích dụng cụ này gồm một hình trụ có đường kính đáy là 1,4m, đường cao 70cm và một hình nón có bán kính đáy bằng bán kính đáy hình trụ (0,7m), chiều cao hình nón là 0,9m.

$$\text{Thể tích hình trụ: } V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 0,7^2 \cdot 0,7 = 0,343\pi \text{ (m}^3\text{)}$$

Thể tích hình nón: $V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi \cdot 0,7^2 \cdot 0,9}{3} = 0,147\pi \text{ (m}^3\text{)}$

Vậy thể tích của dụng cụ là:

$$V = V_1 + V_2 = 0,343\pi + 0,147\pi = 0,49\pi \text{ (m}^3\text{)}.$$

- b) Diện tích mặt ngoài của dụng cụ chính là tổng diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích xung quanh của hình nón.

Diện tích xung quanh của hình trụ:

$$S_1 = 2\pi r h = 2\pi \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,98\pi \approx 3,08 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích xung quanh hình nón:

Ta có độ dài đường sinh hình nón bằng:

$$\ell = \sqrt{0,9^2 - 0,7^2} = \sqrt{0,32} \approx 0,57 \text{ (m)}$$

$$S_2 = \pi r \ell = \pi \cdot 0,7 \cdot 0,57 \approx 1,25 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích mặt ngoài của dụng cụ là:

$$S = S_1 + S_2 = 3,08 + 1,25 = 4,33 \text{ (m}^2\text{)}.$$

28. a) Hình nón cụt có $r_1 = 21\text{cm}$; $r_2 = 9\text{cm}$ và $\ell = 36\text{cm}$.

Do đó diện tích xung quanh của xô là:

$$S = \pi(r_1 + r_2) \cdot \ell = \pi(21 + 9) \cdot 36 = 3391,2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

- b) Khi xô đựng đầy hóa chất thì dung tích của nó cũng chính là thể tích của hình nón cụt trong hình vẽ.

Ta có: $V = \frac{1}{3} \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \cdot h$ với $r_1 = 21\text{cm} \Rightarrow r_1^2 = 441\text{cm}^2$

$$r_2 = 9\text{cm} \Rightarrow r_2^2 = 81\text{cm}^2$$

$$r_1 r_2 = 21 \cdot 9 = 189\text{cm}^2.$$

Gọi h_1 và h_2 là chiều cao từ đỉnh đến đáy nhỏ và đáy lớn hình nón:

$$h_1 = \sqrt{27^2 - 9^2} = \sqrt{648} \approx 25,5 \text{ (cm)}$$

$$h_2 = \sqrt{63^2 - 21^2} = \sqrt{3528} \approx 59,4 \text{ (cm)}.$$

Khi đó chiều cao hình nón cụt là:

$$h = h_2 - h_1 = 59,4 - 25,5 = 33,9 \text{ (cm)}.$$

Thay vào công thức ta được:

$$V = \frac{1}{3} \pi(441 + 81 + 189) \cdot 33,9 = 25227,7 \text{ (cm}^3\text{)} = 25,3 \text{ (lít)}.$$

Vậy dung tích của xô khi chứa đầy hóa chất là 25,3 lít.

29. Ta có công thức thể tích hình nón là: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{3v}{\pi \cdot h} = \frac{3 \cdot 17600}{\pi \cdot 42} = \frac{52800}{131,9} \approx 400 \Rightarrow r = \sqrt{400} \approx 20$$

Vậy bán kính đáy của hình nón là 20cm.

§3. HÌNH CẦU. DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hình cầu: Khi quay nửa đường tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu.

Nửa đường tròn trong phép quay nói trên tạo nên mặt cầu.

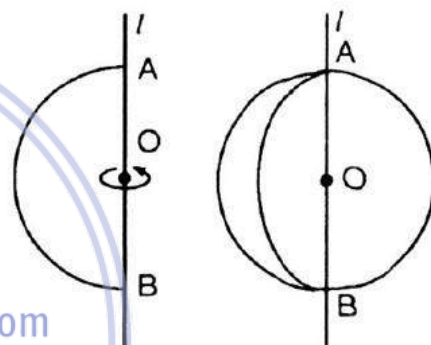
Điểm O được gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu.

2. Diện tích mặt cầu – Thể tích hình cầu:

* Diện tích: $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$

(R: bán kính, d: đường kính của mặt cầu)

* Thể tích: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$



II. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

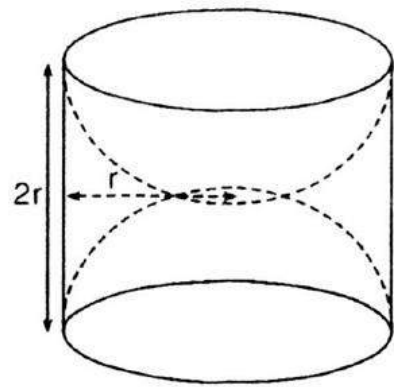
30. Nếu thể tích của một hình cầu là $113\frac{1}{7} \text{ cm}^3$ thì trong các kết quả sau đây, kết quả nào là bán kính của nó (lấy $\pi \approx \frac{22}{7}$)?

(A) 2cm; (B) 3cm; (C) 5cm; (D) 6cm; (E) Một kết quả khác.

31. Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau:

Bán kính hình cầu	0,3mm	6,21dm	0,283m	100km	6hm	50dam
Diện tích mặt cầu						
Thể tích hình cầu						

32. Một khối gỗ dạng hình trụ, bán kính đường tròn đáy là r , chiều cao $2r$ (đơn vị: cm). Người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu như hình bên. Hãy tính diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại (diện tích cả ngoài lẫn trong).

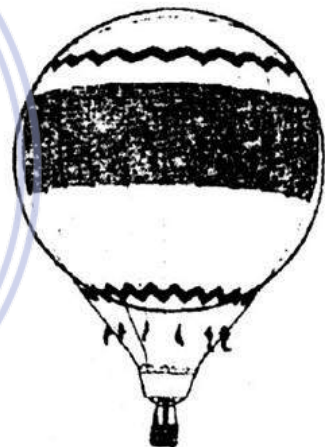


33. Dụng cụ thể thao. Các loại bóng cho trong bảng đều có dạng hình cầu. Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten-nít	Quả bóng bàn	Quả bi-a
Đường kính	42,7mm		6,5cm	40mm	61mm
Độ dài đường tròn lớn		23cm			
Diện tích					
Thể tích					

34. Kinh khí cầu của nhà Mông-gôn-fi-ê (Montgolfier).

Ngày 4/6/1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát minh ra kinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi kinh khí cầu này là hình cầu có đường kính 11m. Hãy tính diện tích mặt kinh khí cầu đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Giải

30. Áp dụng công thức $V = \frac{4}{3}\pi.R^3$ với $\pi = \frac{22}{7}$ để tính R .

$$\text{Ta có } R^3 = \frac{\frac{3}{4}.V}{\pi} = \frac{\frac{3}{4}.113\frac{1}{7}}{\frac{22}{7}} = 27 \Rightarrow R = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ (cm)}. \text{ Vậy chọn câu (B).}$$

31. Áp dụng các công thức tính S và v với: $S = 4\pi R^2$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{S.R}{3}$.

Ta có kết quả:

Bán kính hình cầu	0,3mm	6,21dm	0,283m	100km	6hm	50dam
Diện tích mặt cầu	1,13mm ²	484,37dm ²	1,006m ²	125600km ²	452,16hm ²	31400dam ²
Thể tích hình cầu	0,11mm ³	1002,64dm ³	0,095m ³	4186666,7km ³	904,32hm ³	523333dam ³

32. Theo đề bài, ta có: Diện tích phần cần tính gồm diện tích xung quanh của hình trụ (bán kính đường tròn đáy là r (cm); chiều cao là $2r$ (cm)). Ta có:

$$\text{Diện tích xung quanh hình trụ là: } S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot r \cdot 2r = 4\pi \cdot r^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Tổng diện tích hai nửa mặt cầu là: } S_1 = 4\pi \cdot r^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vậy diện tích cần tính là: } S = S_{xq} + S_1 = 4\pi \cdot r^2 + 4\pi \cdot r^2 = 8\pi \cdot r^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vậy } S = 8\pi r^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

33. Lấy $\pi \approx 3,14$. Ta có kết quả:

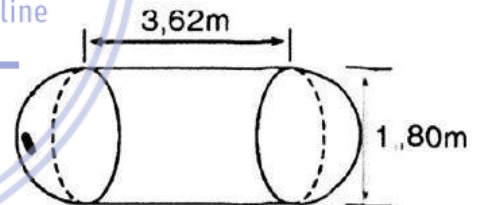
Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten-nít	Quả bóng bàn	Quả bi-a
Đường kính	42,7mm	7,32cm	6,5cm	40mm	61mm
Độ dài đường tròn lớn	134,08 mm	23cm	20,41 cm	125,6 mm	191,54 mm
Diện tích	57,25 cm ²	168,25 cm ²	132,67 cm ²	502400 mm ²	11683,94 mm ²
Thể tích	40,74 cm ³	205,26 cm ³	143,72 cm ³	3349333 mm ³	118786,7 mm ³

34. Ta có diện tích mặt cầu tính theo công thức:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi (5,5)^2 = 379,94 \text{ m}^2.$$

Download Sách Hay / Đọc Sách Online
Luyện tập

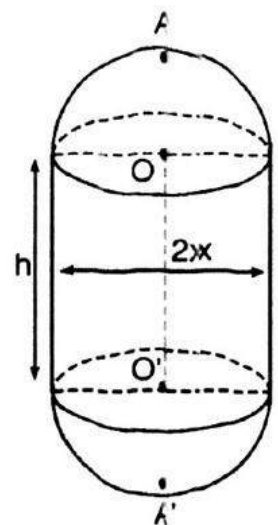
35. Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (hình bên). Hãy tính thể tích của bồn chứa theo các kích thước cho trên hình vẽ.



36. Một chi tiết máy gồm một hình trụ và hai nửa hình cầu với các kích thước đã cho trên hình bên (đơn vị: cm).

a) Tìm một hệ thức giữa x và h khi AA' có độ dài không đổi và bằng $2a$.

b) Với điều kiện ở a), hãy tính diện tích bề mặt và thể tích của chi tiết máy theo x và a .



37. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$, Ax và By là hai tiếp tuyến với nửa đường tròn tại A và B . Lấy trên tia Ax điểm M rồi vẽ tiếp tuyến MP cắt By tại N .

a) Chứng minh rằng MON và APB là hai tam giác vuông đồng dạng

b) Chứng minh $AM.BN = R^2$.

c) Tính tỉ số $\frac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi $AM = \frac{R}{2}$.

d) Tính thể tích của hình do nửa hình tròn APB quay quanh AB sinh ra.

Giải

35. Theo đề bài cho, thể tích hình cầu cần tính bằng tổng thể tích của hình trụ và thể tích của một hình cầu có đường kính bằng 1,8m. Ta có:

Thể tích hình trụ là: $V_1 = \pi r^2 h = \pi.0,9^2.3,62 \approx 9,21 \text{ (m}^3\text{)}$

Thể tích hình cầu là: $V_2 = \frac{4}{3} \pi.R^3 = \frac{4}{3} \pi.0,9^3 \approx 3,05 \text{ (m}^3\text{)}$

Vậy thể tích bồn xăng là: $V = V_1 + V_2 = 9,21 + 3,05 = 12,26 \text{ m}^3$.

36. a) Theo đề bài và nhìn hình vẽ ta có: Hai nửa mặt cầu đều có bán kính bằng x. Như vậy đường kính hình cầu sẽ là 2x. Do đó ta có hệ thức:

$$h + 2x = AA' = 2a$$

Vậy hệ thức $h + 2x = 2a$ là hệ thức cần tìm.

b) Theo đề bài thì diện tích bề mặt chi tiết máy bằng tổng diện tích hình trụ và hình cầu. Do đó:

$$S = 2\pi.x.h + 4\pi.x^2 = 2\pi.x(h + 2x) = 4\pi.a.x.$$

Tương tự cho thể tích chi tiết máy.

$$V = \pi.x^2.h + \frac{4}{3}\pi.x^3 = 2\pi.x^2(a - x) + \frac{4}{3}\pi.x^3 = 2\pi.x^2.(a - \frac{1}{3}x).$$

37. a) Xét hai tam giác vuông MON và APB, ta có:

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \text{ (tính chất hai tiếp tuyến)}$$

$$\widehat{M}_2 = \widehat{A}_1 \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{A}_1 = \widehat{M}_1.$$

Vậy $\triangle MON \sim \triangle APB$ (c.c).

b) Ta có: $AM = MP$ (tính chất hai tiếp tuyến) (1)

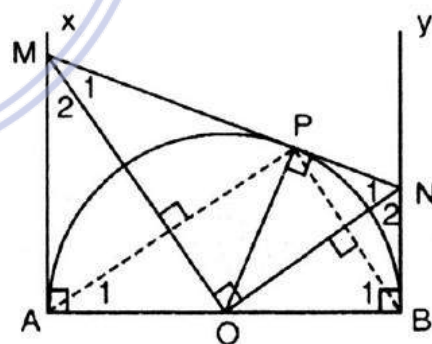
$$BN = NP.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OMN, ta có:

$$OP^2 = MP.NP = R^2 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2), ta có: $AM.BN = MP.NP = OP^2 = R^2$.

c) Vì $\triangle MON \sim \triangle APB$ nên ta có: $\frac{S_{MON}}{S_{APB}} = \frac{MN^2}{AB^2}$. (3)



Khi $AM = \frac{R}{2}$ và $AM \cdot BN = R^2$, suy ra $BN = \frac{R^2}{AM} = \frac{R^2}{\frac{R}{2}} = 2R$.

Do đó: $MN = MP + PN = AM + BN = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5R}{2}$.

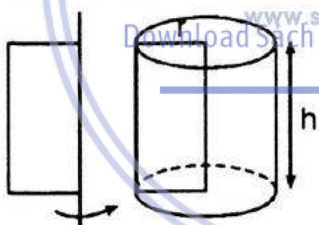
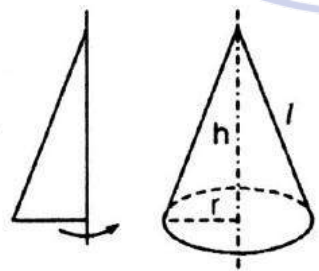
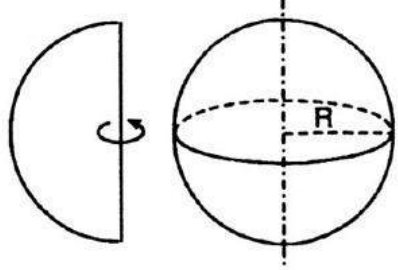
Suy ra $MN^2 = \left(\frac{5R}{2}\right)^2 = \frac{25R^2}{4}$.

Thế vào (3), ta có: $\frac{S_{MON}}{S_{APB}} = \frac{MN^2}{AB^2} = \frac{\frac{25R^2}{4}}{4R^2} = \frac{25R^2}{16R^2} = \frac{25}{16}$.

d) Vì nửa hình tròn APB quay quanh đường kính AB tạo ra một hình cầu bán kính R. Khi đó thể tích hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

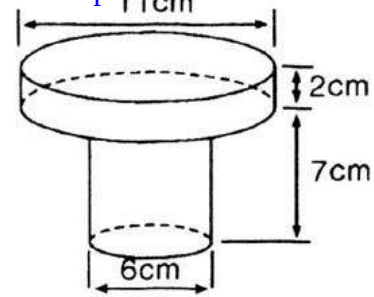
ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. Lí thuyết

Hình	Hình vẽ	Diện tích xung quanh	Thể tích
Hình trụ		$S_{xq} = 2\pi rh$	$V = \pi r^2 h$
Hình nón		$S_{xq} = \pi rl$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Hình cầu		$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

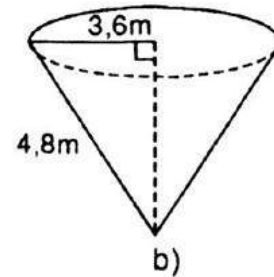
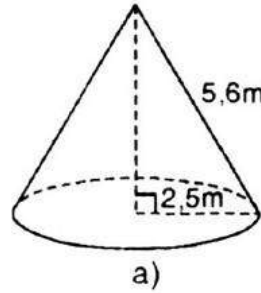
B. Bài tập

38. Hãy tính thể tích, diện tích bề mặt một chi tiết máy theo kích thước đã cho trên hình bên.



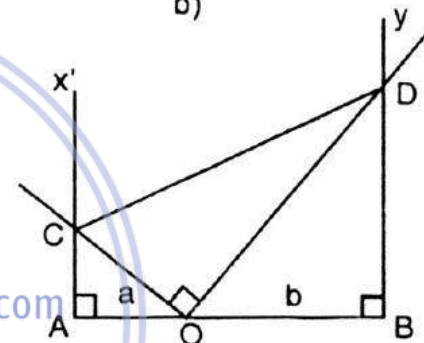
39. Một hình chữ nhật ABCD có $AB > AD$, diện tích và chu vi của nó theo thứ tự là $2a^2$ và $6a$. Cho hình vẽ quay xung quanh cạnh AB, ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ này.

40. Hãy tính diện tích toàn phần của các hình tương ứng theo các kích thước đã cho trên hình bên.



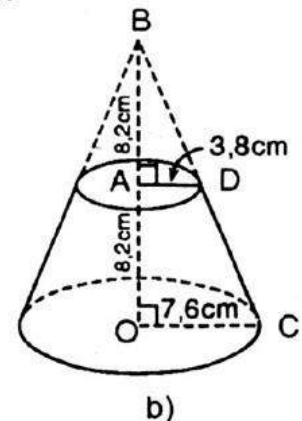
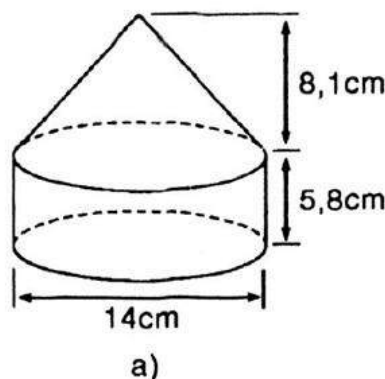
41. Cho ba điểm A, O, B thẳng hàng theo thứ tự đó, $OA = a$, $OB = b$, (a, b cùng đơn vị: cm)

Qua A và B vẽ theo thứ tự các tia Ax và By cùng vuông góc với AB và cùng phía với AB. Qua O vẽ hai tia vuông góc với nhau và cắt Ax ở C, By ở D (xem hình bên).

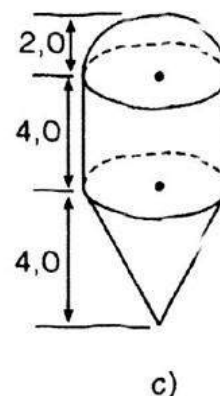
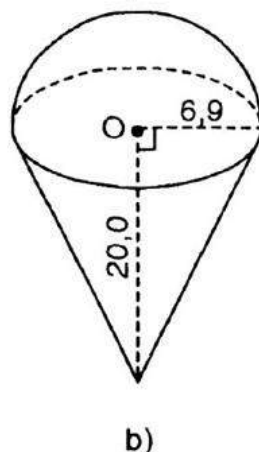
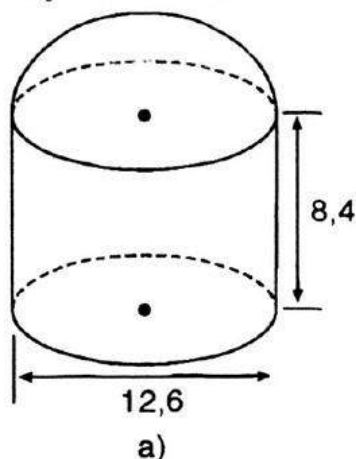


- a) Chứng minh AOC và BDO là hai tam giác đồng dạng; từ đó suy ra tích $AC \cdot BD$ không đổi.
- b) Tính diện tích hình thang ABCD khi $\widehat{COA} = 60^\circ$.
- c) Với $\widehat{COA} = 60^\circ$ cho hình vẽ quay xung quanh AB. Hãy tính tỉ số thể tích các hình do các tam giác AOC và BOD tạo thành.

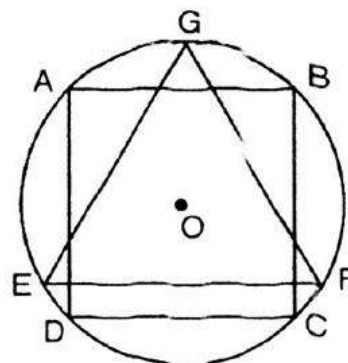
42. Hãy tính thể tích các hình dưới đây theo kích thước đã cho (hình bên).



43. Hãy tính thể tích các hình a, b, c dưới đây theo kích thước đã cho (đơn vị: cm)

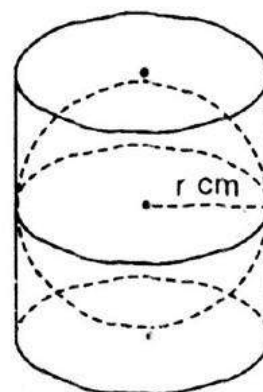


44. Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và GEF là tam giác đều nội tiếp đường tròn đó, EF là dây song song với AB (hình bên). Cho hình đó quay xung quanh trục GO. Chứng minh rằng:



- Bình phương thể tích của hình trụ sinh ra bởi hình vuông bằng tích của thể tích hình cầu sinh ra bởi hình tròn và thể tích hình nón do tam giác đều sinh ra.
- Bình phương diện tích toàn phần của hình trụ bằng tích của diện tích hình cầu và diện tích toàn phần của hình nón.

45. Hình bên mô tả một hình cầu được đặt khít vào trong một hình trụ, các kích thước cho trên hình vẽ. Hãy tính:



- Thể tích hình cầu;
- Thể tích hình trụ;
- Hiệu giữa thể tích hình trụ và thể tích hình cầu;
- Thể tích của một hình nón có bán kính đường tròn đáy là r cm và chiều cao $2r$ cm;
- Từ các kết quả a), b), c), d), hãy tìm mối liên hệ giữa chúng.

Giải

38. a) Theo đề bài ta có: Thể tích phần cần tính là tổng thể tích của hai hình trụ có đường kính là 11cm và 6cm.

Thể tích hình trụ có đường kính đáy là 11cm và chiều cao là 2m.

$$V_1 = \pi R^2 h_1 = \pi \left(\frac{11}{2} \right)^2 \cdot 2 = 60,5\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích hình trụ có đường kính đáy là 6cm, chiều cao là 7cm.

$$V_2 = \pi R^2 h_2 = \pi \left(\frac{6}{2} \right)^2 \cdot 7 = 63\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vậy thể tích của chi tiết máy cần tính là:

$$V = V_1 + V_2 = 60,5\pi + 63\pi = 123,5\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b) Tương tự, theo đề bài diện tích bề mặt của chi tiết máy bằng tổng diện tích xung quanh của hai chi tiết máy.

Diện tích xung quanh của hình trụ có đường kính đáy 11cm và chiều cao là 2cm là:

$$S_{xq(1)} = 2\pi R h_1 = 2\pi \frac{11}{2} \cdot 2 = 22\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích xung quanh của hình trụ có đường kính đáy là 6cm và chiều cao là 7cm là:

$$S_{xq(2)} = 2\pi R h_2 = 2\pi \frac{6}{2} \cdot 7 = 42\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích bề mặt của chi tiết máy là:

$$S = S_{xq(1)} + S_{xq(2)} = 22\pi + 42\pi = 64\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

39. Khi hình chữ nhật ABCD quay quanh trục AB cố định ta được mặt hình trụ. Vì đề bài cho chúng ta biết diện tích và chu vi hình chữ nhật ABCD nên ta xem AB và AD như là các ẩn số. Để tìm các ẩn số đó thì ta tính được diện tích xung quanh và thể tích hình trụ do hình chữ nhật tạo ra.

Diện tích hình chữ nhật ABCD là: $AB \cdot AD = 2a^2$ (1)

Chu vi hình chữ nhật là: $2(AB + CD) = 6a \Rightarrow AB + CD = 3a$ (2)

Từ (1) và (2), ta có AB và CD là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ hay } X^2 - 3aX + 2a^2 = 0$$

Giải phương trình ta được: $X_1 = 2a$; $X_2 = a$.

Theo giả thiết $AB > CD$ nên ta chọn:

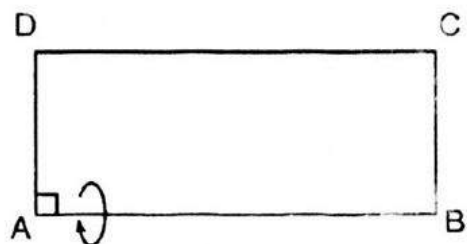
$$AB = 2a; AD = a.$$

Vậy diện tích xung quanh hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi \cdot AD \cdot AB = 2\pi \cdot a \cdot 2a = 4\pi a^2$$

Thể tích hình trụ là:

$$V = \pi \cdot AD^2 \cdot AB = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3.$$



40. * Với hình a:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi r l + \pi r^2 = \pi \cdot 2,5 \cdot 5,6 + \pi \cdot 2,5^2 = 63,59 \text{ (m}^2\text{)}$$

- * Với hình b:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi \cdot 3,6 \cdot 4,8 + \pi \cdot 3,6^2 = 94,95 \text{ (m}^2\text{)}.$$

41. a) Xét hai tam giác vuông AOC và BDO, ta có: $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$

$\widehat{AOC} = \widehat{BDO}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Vậy $\triangle AOC \sim \triangle BDO$

$$\text{Suy ra: } \frac{AC}{AO} = \frac{BO}{BD} \text{ hay } \frac{AC}{a} = \frac{b}{BD}.$$

Vậy $AC \cdot BD = a \cdot b = \text{không đổi}$.

b) Khi $\widehat{AOC} = 60^\circ$ thì tam giác AOC trở thành nửa tam giác đều cạnh là OC, chiều cao AC.

$$\text{Suy ra } OC = 2AO = 2a \text{ và } AC = \frac{OC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Thay $AC = a\sqrt{3}$ vào (1), ta có:

$$a\sqrt{3} \cdot BD = a \cdot b \Rightarrow BD = \frac{ab}{a\sqrt{3}} = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có công thức tính diện tích hình thang ABCD là:

$$S = \frac{AC + BD}{2} \cdot AB = \frac{a\sqrt{3} + \frac{b\sqrt{3}}{3}}{2} \cdot (a + b) = \frac{\sqrt{3}}{6} (3a^2 + 4ab + b^2) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

c) Theo đề bài, khi quay hình vẽ xung quanh AB thì:

$\triangle AOC$ tạo nên hình nón có bán kính đáy là $AC = a\sqrt{3}$ và chiều cao là $AO = a$.

$\triangle BOD$ tạo nên hình nón có bán kính đáy là $BD = \frac{b\sqrt{3}}{3}$ và chiều cao $OB = b$.

$$\text{Ta có: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AO}{\frac{1}{3}\pi \cdot BD^2 \cdot OB} = \frac{AC^2 \cdot AO}{BD^2 \cdot OB} = \frac{(a\sqrt{3})^2 \cdot a}{\left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot b} = \frac{3a^3}{\frac{b^3}{3}} = \frac{9a^3}{b^3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{9a^3}{b^3}.$$

42. * Hình a): Hình cần tính thể tích gồm:

Hình trụ có đường kính đáy 14cm, đường cao 5,8cm.

$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 7^2 \cdot 5,8 = 284,2\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Hình nón có đường kính đáy 14cm và đường cao 8,1cm.

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 7^2 \cdot 8,1 = 132,3\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vậy thể tích hình cần tính là:

$$V = V_1 + V_2 = 284,2\pi + 132,3\pi = 416,5\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Đáp số: $V = 416,5\pi \text{ cm}^3$.

- * Hình b) là một hình nón cụt với các điều kiện đã cho, để tính thể tích của hình này ta lấy thể tích hình nón lớn trừ đi thể tích hình nón nhỏ.

$$\text{Thể tích hình nón lớn: } V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi (7,6)^2 \cdot 16,4 = 991,47 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Thể tích hình nón nhỏ: } V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi (3,8)^2 \cdot 8,2 = 123,93 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Thể tích hình nón cụt là: } V = V_1 - V_2 = 991,47 - 123,93 = 867,54 \text{ cm}^3.$$

43. * Hình a) là một hình trụ có đường kính đáy là 12,6cm, chiều cao là 8,4cm và nửa hình cầu có đường kính là 12,6cm. Vậy:

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(\frac{12,6}{2} \right)^2 \cdot 8,4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{12,6}{2} \right)^3 \\ &= \pi \cdot (6,3)^2 \cdot (8,4 + \frac{12,6}{3}) = 500,094\pi \text{ (cm}^3\text{)}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V = 500,094\pi \text{ cm}^3.$$

- * Hình b) là một hình nón và nửa hình cầu.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi (6,9)^2 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (6,9)^3 \\ &= \frac{1}{3} \pi (6,9)^2 (20 + 13,8) = 536,406\pi \text{ (cm}^3\text{)}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V = 536,406\pi \text{ cm}^3.$$

- * Hình c) Thể tích hình cần tính là tổng các thể tích của một hình nón, một hình trụ và một nửa hình cầu

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 4 + \pi \cdot 2^2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = 4 \cdot 2^2 \cdot \pi \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{80\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{80\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

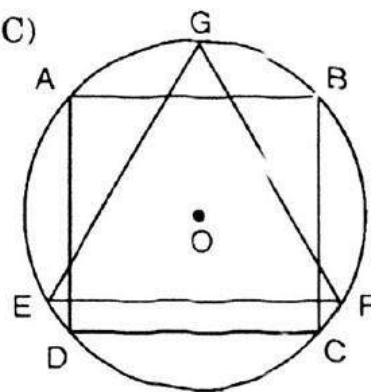
44. a) Ta biết rằng khi hình vẽ quay quanh trục GO thì:

Thể tích hình trụ sinh ra bởi hình vuông ABCD là:

$$V = \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 \cdot BC \quad \text{với} \quad \begin{array}{l} AB \text{ là đường chéo của} \\ \text{hình vuông có cạnh là } R \\ \text{và } AB = R\sqrt{2} (= BC) \end{array}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(\frac{R\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot R\sqrt{2} \\ &= \pi \cdot \frac{2R^2}{4} \cdot R\sqrt{2} = \frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } V^2 = \left(\frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{2\pi^2 R^6}{4} = \frac{\pi^2 R^6}{2} \quad (1)$$



$$\text{Ta có thể tích hình cầu có bán kính } R \text{ là: } V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (2)$$

Thể tích hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng $\frac{EF}{2}$ là:

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{EF}{2} \right)^2 \cdot GH$$

với $EF = R\sqrt{3}$ (cạnh tam giác đều nội tiếp trong đường tròn $(C; R)$)

$$\text{và } GH = \frac{EF\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$\text{Thay vào } V_2, \text{ ta có: } V_2 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3}{8} \pi R^3 \quad (3)$$

$$\text{Ta có: } V_1 \cdot V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{3}{8} \pi R^3 = \frac{\pi^2 R^6}{2} \quad (4)$$

So sánh (1) và (4), ta được: $V^2 = V_1 \cdot V_2$.

b) Diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính $\frac{AB}{2}$ là:

$$S = 2\pi \left(\frac{AB}{2} \right) \cdot BC + 2\pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2$$

$$S = 2\pi \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot R\sqrt{2} + 2\pi \left(\frac{R\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$S = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$$

$$\text{Suy ra } S^2 = (3\pi R^2)^2 = 9\pi^2 R^4 \quad (1)$$

$$\text{Diện tích mặt cầu có bán kính } R \text{ là: } S_1 = 4\pi R^2 \quad (2)$$

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S_2 = \pi \frac{EF}{2} \cdot FG + \pi \left(\frac{EF}{2} \right)^2 = \pi \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R\sqrt{3} + \pi \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{9\pi R^2}{4}.$$

Ta có $S_1 \cdot S_2 = 4\pi R^2 \cdot \frac{9\pi R^2}{4} = 9\pi^2 R^4$. (2)

So sánh (1) và (2), ta có: $S^2 = S_1 \cdot S_2$.

45. a) Vì hình cầu có bán kính bằng r (cm) nên thể tích của hình cầu là:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

- b) Hình trụ có bán kính bằng r (cm) và chiều cao bằng $2r$ (cm) (bằng đường kính hình cầu).

Vậy thể tích hình trụ là $V_2 = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \text{ (cm}^3\text{)}$.

- c) Hiệu giữa thể tích hình trụ và thể tích hình cầu là:

$$V_3 = V_2 - V_1 = 2\pi r^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

- d) Thể tích hình nón có bán kính đường tròn đáy là r (cm) và chiều cao

là $2r$ (cm) là: $V_4 = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3} \pi r^3 \text{ (cm}^3\text{)}$

- e) Từ các kết quả ở câu a, b, c, d ta có hệ thức: $V_4 = V_2 - V_1$.

hay "Thể tích hình nón nội tiếp trong hình trụ bằng hiệu giữa thể tích hình trụ và thể tích hình cầu nội tiếp trong hình trụ ấy".

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

- Cho hình trụ có bán kính bằng a và độ dài đường sinh bằng 2. Biết diện tích xung quanh bằng thể tích hình trụ. Khi đó thể tích hình trụ bằng:

A. 2π ; B. 4π ; C. 6π ; D. 8π ;
- Cho hình nón có bán kính đáy bằng R . Diện tích xung quanh hình nón bằng hai lần diện tích đáy của nó. Khi đó thể tích hình nón bằng:

A. πR^2 ; B. $\pi R^3 \sqrt{3}$; C. $\pi R^3 \sqrt{2}$; D. $\pi R^3 \sqrt{6}$.
- Cho hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh 2dm. Khi đó thể tích hình trụ bằng:

A. π ; B. 3π ; C. 2π ; D. 4π .

- Download Sách Hay | Đọc Sách Online

- (A) 20dm (B) 5cm (C) 10dm (D) 6dm.
15. *Chọn câu trả lời đúng.* Một hình trụ có bán kính đáy là 7dm, chiều cao 9cm. Thể tích của hình trụ là :
- (A) $414\pi \text{ dm}^3$ (B) 441 dm^3 (C) $441\pi \text{ dm}^3$ (D) $144\pi \text{ dm}^3$.
16. *Chọn câu trả lời đúng.* Một hình trụ có diện tích xung quanh là $160\pi \text{ m}^2$, diện tích toàn phần là $360\pi \text{ m}^2$. Bán kính của hình trụ là :
- (A) 10m (B) 8m (C) 12m (D) 9m.
17. *Chọn câu trả lời đúng.* Một hình trụ có thể tích 500cm^3 , chiều cao của hình trụ là 6cm. Bán kính của hình trụ là :
- (A) 54,6cm (B) 5,15cm (C) 45,2cm (D) 65,2cm.
18. *Chọn câu trả lời đúng.* Một hình trụ có chu vi đáy là 36cm và chiều cao là 5cm. Diện tích xung quanh của hình trụ là :
- (A) $565,2 \text{ cm}^2$ (B) 900 cm^2 (C) 450 cm^2 (D) 180 cm^2 .
19. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình chữ nhật MNPQ có $MN = 2NP$. Gọi V_1 là thể tích hình trụ khi quay hình chữ nhật này quanh MN. V_2 là thể tích hình trụ khi quay hình chữ nhật quanh NP. So sánh V_1, V_2 .
- (A) $V_1 = V_2$ (B) $V_1 = 2V_2$ (C) $V_2 = 2V_1$ (D) $V_2 = \frac{1}{2} V_1$.
20. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a, BC = 3a$. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh BC một vòng, ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.
- (A) $4\pi a^2$ (B) $6\pi a^2$ (C) $3\pi a^2$ (D) $6\pi a$.
21. *Chọn câu trả lời sai.* Hình nón có bán kính đáy là r , đường sinh là ℓ , chiều cao là h thì :
- (A) $S_{xq} = \pi r \ell$ (B) $S_{\text{đáy}} = 2\pi r^2$ (C) $S_{\text{tp}} = \pi r \ell + \pi r^2$ (D) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.
22. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình nón có bán kính đáy là 5dm, đường sinh là 12dm. Tính diện tích đáy của hình nón.
- (A) 60dm^2 (B) $188,4\text{dm}^2$ (C) $452,16\text{dm}^2$ (D) $78,5\text{dm}^2$.
23. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình nón có bán kính đáy là 7dm, đường sinh là 11dm. Tính diện tích toàn phần của hình nón.
- (A) $395,64\text{dm}^2$ (B) $241,78\text{dm}^2$ (C) $153,86\text{dm}^2$ (D) $307,72\text{dm}^2$.
24. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình nón có bán kính 9cm, đường sinh là 15cm. Tính thể tích của hình nón.
- (A) $972\pi \text{ cm}^3$ (B) $405\pi \text{ cm}^3$ (C) $324\pi \text{ cm}^3$ (D) 1215 cm^3 .
25. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình nón có đường kính đáy bằng 10cm, diện tích xung quanh bằng $235,5\text{cm}^2$. Tính độ dài đường sinh là :

- (A) 7,5cm (B) 15cm (C) 10cm (D) 3,75cm

26. Chọn câu trả lời đúng. Thể tích hình nón ban đầu là V_1 . Nếu tăng chiều cao và bán kính đáy của hình nón lên $\frac{3}{2}$ so với các kích thước ban đầu thì được thể tích hình nón mới là V_2 . Khi đó :

- (A) $V_1 = 2V_2$ (B) $V_1 = \frac{1}{2}V_2$ (C) $V_1 = \frac{27}{8}V_2$ (D) $V_1 = \frac{8}{27}V_2$.

27. Chọn câu trả lời đúng. Cho hình nón có thể tích bằng 500cm^3 . Nếu tăng chiều cao và bán kính của hình nón lên $\frac{6}{5}$ so với các kích thước ban đầu thì thể tích hình nón mới là :

- (A) 864cm^3 (B) 600cm^3 (C) 417cm^3 (D) 648cm^3 .

28. Chọn câu trả lời đúng. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng 125cm^2 . Nếu giảm đường sinh và bán kính đáy của hình nón xuống $\frac{3}{4}$ so với các kích thước tương ứng ban đầu thì diện tích xung quanh của hình nón mới bằng bao nhiêu?

- (A) $93,75\text{cm}^2$ (B) 167cm^2 (C) $70,3\text{cm}^2$ (D) $41,67\text{cm}^2$.

29. Chọn câu trả lời đúng. Cho hình nón có diện tích toàn phần bằng 628cm^2 . Bán kính đáy của hình nón bằng 8cm. Tính độ dài đường sinh của hình nón.

- (A) 15cm (B) 14cm (C) 16cm (D) 17cm.

30. Chọn câu trả lời đúng. Hình nón cụt có r_1, r_2 là các bán kính đáy, ℓ là độ dài đường sinh thì diện tích xung quanh hình nón cụt là :

- (A) $S_{xq} = \pi r_1 r_2 \ell$ (B) $S_{xq} = \pi |r_1 - r_2| \ell$
(C) $S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)\ell$ (D) $S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)^2 \ell$.

31. Chọn câu trả lời đúng. Cho hình nón cụt có r_1, r_2 là các bán kính đáy, ℓ là độ dài đường sinh, h là chiều cao thì thể tích của hình nón cụt là :

- (A) $V = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h$ (B) $V = \pi r_2^2 h$
(C) $V = \frac{1}{3} \pi h(r_1 + r_2)$ (D) $V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$.

32. Chọn câu trả lời đúng. Diện tích mặt cầu có bán kính R là :

- (A) $2\pi R^2$ (B) $4\pi R^2$ (C) $2\pi R$ (D) πR^2 .

33. Chọn câu trả lời đúng. Thể tích hình cầu có bán kính R là :

- (A) $3\pi R^3$ (B) $4\pi R^3$ (C) $\frac{4}{3} \pi R^3$ (D) $\frac{3}{4} \pi R^3$.

- 34.** Chọn câu trả lời đúng. Một mặt cầu có đường kính $d = 5\text{mm}$. Tính diện tích mặt cầu đó ?
 (A) $25\pi \text{ mm}^2$ (B) $100\pi \text{ mm}^2$ (C) $12,5\pi \text{ mm}^2$ (D) $20\pi \text{ mm}^2$.
- 35.** Chọn câu trả lời đúng. Một mặt cầu có diện tích bằng 1256dm^2 . Bán kính mặt cầu đó là
 (A) 12dm (B) 1m (C) 100dm (D) 10m .
- 36.** Chọn câu trả lời đúng. Một quả bóng bàn có bán kính bằng 35mm . Thể tích của quả bóng bàn đó bằng bao nhiêu ?
 (A) $179,503 \text{ cm}^3$ (B) 179503 cm^3 (C) $5128,67 \text{ mm}^3$ (D) $5128,67 \text{ cm}^3$.
- 37.** Chọn câu trả lời đúng. Diện tích của mặt cầu thay đổi như thế nào nếu bán kính của mặt cầu giảm 2 lần.
 (A) $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ (B) $S_2 = \frac{1}{3} S_1$ (C) $S_2 = \frac{1}{4} S_1$ (D) $S_2 = 2S_1$.
- 38.** Chọn câu trả lời đúng. Thể tích của hình cầu thay đổi như thế nào nếu bán kính của hình cầu tăng lên bằng $\frac{5}{4}$ bán kính ban đầu.
 (A) $V_2 = \frac{64}{125} V_1$ (B) $V_2 = \frac{25}{16} V_1$ (C) $V_2 = \frac{16}{25} V_1$ (D) $V_2 = \frac{125}{64} V_1$.
- 39.** Chọn câu trả lời đúng. Thể tích của hình cầu là V_1 . Nếu đường kính của hình cầu giảm xuống và bằng $\frac{2}{3}$ đường kính ban đầu thì thể tích hình cầu mới V_2 là
 (A) $V_2 = \frac{4}{9} V_1$ (B) $V_2 = \frac{1}{216} V_1$ (C) $V_2 = \frac{64}{729} V_1$ (D) $V_2 = \frac{8}{27} V_1$.
- 40.** Chọn câu trả lời đúng. Khi quay một tam giác vuông quanh một trong hai cạnh góc vuông ta được :
 (A) Một hình trụ (B) Một hình nón
 (C) Một hình nón cụt (D) Một hình khác.
- 41.** Chọn câu trả lời đúng. Cho tam giác ABC vuông tại A. Có $AB = 8\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AB. Tính diện tích xung quanh của hình tạo thành ?
 (A) $60\pi \text{ cm}^2$ (B) 48cm^2 (C) 55cm^2 (D) 64cm^2 .
- 42.** Chọn câu trả lời đúng. Cho hai hình cầu A và B lần lượt có bán kính đáy là 3cm và 6cm . So sánh diện tích của hai hình cầu đó
 (A) $S_B = S_A$ (B) $S_B = \frac{1}{2} S_A$ (C) $S_B = 2S_A$ (D) $S_B = 4S_A$.

43. Chọn câu trả lời đúng. Hình trụ có bán kính r , chiều cao h và có thể tích V_1 . Hình nón có bán kính r , chiều cao h và có thể tích V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$?
- (A) $\frac{V_2}{V_1} = 3$ (B) $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{3}$ (C) $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$ (D) $\frac{V_2}{V_1} = 1$.
44. Chọn câu trả lời đúng. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi AH là đường cao. Cho hình quay một vòng xung quanh đường cao AH. Tính thể tích của hình tạo thành
- (A) $\frac{\pi a^3}{24}$ (B) $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{12}$ (C) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$ (D) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$.
45. Chọn câu trả lời đúng. Mặt Trăng và Trái Đất có bán kính tương ứng là 1738km và 6371km. So sánh thể tích giữa Mặt Trăng và Trái Đất.
- (A) $V_T = 0,02V_D$ (B) $V_T = 0,01V_D$
 (C) $V_T = 0,03V_D$ (D) $V_T = 0,04V_D$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

1. Chọn câu D 2. Chọn câu D
 3. Chọn câu C 4. Chọn câu A
 5. $100\pi \text{ cm}^2$; $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$ 6. Chọn câu B
 7. Chọn câu C 8. Chọn câu D
 9. Chọn câu A 10. Chọn câu C
 11. Chọn câu C.
 12. $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. Chọn câu B.
 13. $S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi r} = \frac{36\pi}{2\pi \cdot 3} = 6\text{cm}$. Chọn câu A.
 14. $S_{\text{tp}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Leftrightarrow 80\pi = 2\pi \cdot 4h + 2\pi \cdot 4^2 \Leftrightarrow 48\pi = 8\pi h \Rightarrow h = \frac{48\pi}{8\pi} = 6\text{cm}$.
 Chọn câu D.
 15. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 7^2 \cdot 9 = 441\pi \text{ (dm}^3\text{)}$. Chọn câu C.
 16. Diện tích mỗi hình tròn đáy của hình trụ :

$$S_{\text{đáy}} = \frac{S_{\text{tp}} - S_{xq}}{2} = \frac{360\pi - 160\pi}{2} = 100\pi \text{ (m}^2\text{)}$$

Mà $S = \pi r^2$ nên $r^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{100\pi}{\pi} = 100 \Rightarrow r = 10\text{m}$. Chọn câu A.

17. $V = \pi R^2 \cdot h \Rightarrow R^2 = \frac{V}{\pi \cdot h} = \frac{500}{3,14 \cdot 6} \approx 26,54 \Rightarrow R = 5,15\text{cm}$. Chọn câu B.

18. $S_{xq} = 2\pi rh = C_{\text{đáy}} \cdot h = 36 \cdot 5 = 180 (\text{cm}^2)$. Chọn câu D.

19. Quay hình chữ nhật MNPQ quanh MN được hình trụ bán kính NP.

Thể tích $V_1 = \pi \cdot NP^2 \cdot MN$

Quay hình chữ nhật MNPQ quanh NP được hình trụ bán kính MN.

Thể tích $V_2 = \pi \cdot MN^2 \cdot NP$

Ta có : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \cdot NP^2 \cdot MN}{\pi \cdot MN^2 \cdot NP} = \frac{NP}{MN} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_2 = 2V_1$. Chọn câu C.

20. Khi quay hình chữ nhật quanh cạnh BC, ta được một hình trụ bán kính AB và chiều cao BC.

$S_{xq} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot AB \cdot BC = 2\pi \cdot a \cdot 3a = 6\pi a^2$. Chọn câu B.

21. Chọn câu B.

22. $S_{\text{đáy}} = \pi r^2 = 3,14 \cdot 5^2 = 78,5 (\text{dm}^2)$. Chọn câu D.

23. Diện tích xung quanh hình nón : $S_{xq} = \pi r \ell = 241,78 \text{ dm}^2$

Diện tích đáy hình nón : $S_{\text{đáy}} = \pi r^2 = 153,86 \text{ dm}^2$

Diện tích toàn phần hình nón : $S_{\text{tp}} = S_{xq} + S_{\text{đ}} = 395,64 \text{ dm}^2$.

Chọn câu A.

24. Chiều cao của hình nón: $h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm}$

Thể tích của hình nón : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 324\pi (\text{cm}^3)$.

Chọn câu C.

25. Bán kính đáy hình nón : $10 : 2 = 5\text{cm}$

Độ dài đường sinh : $S_{xq} = \pi r \ell \Rightarrow \ell = \frac{S_{xq}}{\pi r} = \frac{235,5}{3,14 \cdot 5} = 15 \text{ cm}$.

Chọn câu B.

26. $V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$V_2 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3}{2} r \right)^2 \cdot \frac{3}{2} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h \left(\frac{3}{2} \right)^3$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h \left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{8}{27} V_2. \text{ Chọn câu D.}$$

27. $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{6}{5}r\right)^2 \cdot \frac{6}{5}h = \frac{1}{3}\pi r^2 h \left(\frac{6}{5}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h \left(\frac{6}{5}\right)^3}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \left(\frac{6}{5}\right)^3$$

$$\Rightarrow V_2 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot V_1 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot 500 = 864 \text{ cm}^3. \text{ Chọn câu A.}$$

28. $S_{xq_1} = \pi r \ell$

$$S_{xq_2} = \pi \cdot \frac{3}{4}r \cdot \frac{3}{4}\ell = \pi r \ell \cdot \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{xq_2}}{S_{xq_1}} = \frac{\pi r \ell \cdot \frac{9}{16}}{\pi r \ell} = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S_{xq_2} = \frac{9}{16} S_{xq_1} = \frac{9}{16} \cdot 125 \approx 70,3 \text{ cm}^2. \text{ Chọn câu C.}$$

29. Ta có: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi r \ell + \pi r^2$

$$\Leftrightarrow 628 = 3,14 \cdot 8 \cdot \ell + 3,14 \cdot 8^2 \Rightarrow \ell = 17 \text{ cm. Chọn câu D.}$$

30. Chọn câu C.

31. Chọn câu D.

32. Chọn câu B.

33. Chọn câu C.

34. $S = 4\pi R^2 = \pi d^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ (mm}^2\text{)}. \text{ Chọn câu A.}$

35. $S = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{S}{4\pi} = \frac{1256}{4\pi} = 100 \Rightarrow R = 10 \text{ (dm)} = 1 \text{ (m)}. \text{ Chọn câu B.}$

36. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (35)^3 = 179503 \text{ (mm}^3\text{)} = 179,503 \text{ (cm}^3\text{)}. \text{ Chọn câu A.}$

37. $S_1 = 4\pi R_1^2$.

Khi bán kính giảm 2 lần $\Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{2}$

$$S_2 = 4\pi R_2^2 = 4\pi \left(\frac{R_1}{2}\right)^2 = \pi R_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{\pi R_1^2} = 4 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4} S_1. \text{ Chọn câu C.}$$

38. $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$

Khi bán kính của hình cầu tăng lên : $R_2 = \frac{5}{4} R_1$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5}{4} R_1\right)^3 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3 \left(\frac{5}{4}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{125}{64}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{125}{64} V_1. \text{ Chọn câu D.}$$

39. $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$

Đường kính hình cầu giảm : $d_2 = \frac{2}{3} d_1$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{d_2}{2} = \frac{\frac{2}{3} d_1}{2} = \frac{1}{3} d_1 = \frac{1}{3} \cdot 2R_1 = \frac{2}{3} R_1$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2}{3} R_1\right)^3 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{8}{27} V_1. \text{ Chọn câu D.}$$

40. Chọn câu B.

41. Hình tạo thành là hình nón có bán kính đáy $AC = 6\text{cm}$, đường sinh

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\text{cm}$$

$$S_{xq} = \pi r \cdot l = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi \text{ (cm}^2\text{)}. \text{ Chọn câu A.}$$

42. $S_A = 4\pi R_A^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

$$S_B = 4\pi R_B^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{144\pi}{36\pi} = 4 \Rightarrow S_B = 4S_A. \text{ Chọn câu D.}$$

43. Ta có: $V_1 = \pi r^2 h$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \pi r^2 h}{\pi r^2 h} = \frac{1}{3}. \text{ Chọn câu B.}$$

44. Khi quay hình tam giác xung quanh đường cao AH ta được hình nón với bán kính BH và đường cao AH.

$$V = \frac{1}{3} \pi BH^2 \cdot AH = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}. \text{ Chọn câu C.}$$

45. Thể tích Mặt Trăng: $V_T = \frac{4}{3} \pi R_T^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 1738^3$

Thể tích Trái Đất: $V_D = \frac{4}{3} \pi R_D^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 6371^3$

$$\Rightarrow \frac{V_T}{V_D} = \frac{\frac{4}{3} \pi (1738)^3}{\frac{4}{3} \pi (6371)^3} = 0,02$$

$$\Rightarrow V_T = 0,02V_D. \text{ Chọn câu A.}$$

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. Phần Đại số

1. Xét các mệnh đề sau:

I. $\sqrt{(-4) \cdot (-25)} = \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-25}$;

II. $\sqrt{(-4) \cdot (-25)} = \sqrt{100}$;

III. $\sqrt{100} = 10$;

IV. $\sqrt{100} = \pm 10$.

Những mệnh đề nào là sai?

Hãy chọn câu trả lời đúng trong các câu A, B, C, D dưới đây:

(A) Chỉ có mệnh đề I sai;

(B) Chỉ có mệnh đề II sai;

(C) Các mệnh đề I và IV sai;

(D) Không có mệnh đề nào sai.

Giải

(I): $\sqrt{(-4) \cdot (-25)} = \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-25}$ (S)

(II): $\sqrt{(-4) \cdot (-25)} = \sqrt{100}$ (Đ)

(III): $\sqrt{100} = 10$ (Đ)

(IV): $\sqrt{100} = \pm 10$ (S)

Chọn câu C.

2. Rút gọn các biểu thức: $M = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6+4\sqrt{2}}$; $N = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

$$M = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} - \sqrt{(2)^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = |\sqrt{2}-1| - |2+\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 - 2 - \sqrt{2} = -3$$

$$N = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad (\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} > 0)$$

$$\Rightarrow N^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3}$$

$$= 4 + 2\sqrt{4-3} = 6$$

Vì $N > 0$ nên từ $N^2 = 6 \Rightarrow N = \sqrt{6}$. Vậy $N = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

3. Giá trị của biểu thức $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ bằng:

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

(C) 1;

(D) $\frac{4}{3}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{3\sqrt{2 + \sqrt{3}}} &= \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2(2 + 2\sqrt{3})}{3\sqrt{(2 + \sqrt{3}) \cdot 2}} = \frac{2(2 + 2\sqrt{3})}{3\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} \\ &= \frac{2(2 + 2\sqrt{3})}{3(\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1^2})} = \frac{4(1 + \sqrt{3})}{3\sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}} = \frac{4(1 + \sqrt{3})}{3(1 + \sqrt{3})} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vậy chọn câu D.

4. Nếu $\sqrt{2 + \sqrt{x}} = 3$ thì x bằng:

- (A) 1; (B) $\sqrt{7}$; (C) 7; (D) 49.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

Ta có: $\sqrt{2 + \sqrt{x}} = 3$. Vì hai vế đều dương, ta bình phương hai vế:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2 + \sqrt{x}})^2 &= 3^2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x} = 9 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= 7 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 7^2 \Leftrightarrow x = 49 \end{aligned}$$

Vậy chọn câu D.

5. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$\left(\frac{2 + \sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

Giải

Điều kiện để biểu thức có nghĩa là: $0 < x \neq 1$. Đặt $\sqrt{x} = a$ ($a > 0$ và $a \neq 1$), ta có:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{2 + \sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right] \cdot \frac{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{2 + a}{a^2 + 2a + 1} - \frac{a - 2}{a^2 - 1} \right] \cdot \frac{a^3 + a^2 - a - 1}{a} \\ &= \left[\frac{(2 + a)(a - 1) - (a - 2)(a + 1)}{(a + 1)(a + 1)(a - 1)} \right] \cdot \frac{a^2(a + 1) - (a + 1)}{a} \\ &= \left[\frac{2a - 2 + a^2 - a - a^2 - a + 2a + 2}{(a + 1)(a^2 - 1)} \right] \cdot \frac{(a + 1)(a^2 - 1)}{a} \\ &= \frac{2a}{(a + 1)(a^2 - 1)} \cdot \frac{(a + 1)(a^2 - 1)}{a} = 2. \end{aligned}$$

6. Cho hàm số $y = ax + b$. Tìm a và b , biết rằng đồ thị của hàm số đã cho thỏa mãn một trong các điều kiện sau:
- Đi qua hai điểm $A(1; 3)$ và $B(-1; -1)$;
 - Song song với đường thẳng $y = x + 5$ và đi qua điểm $C(1; 2)$.

Giải

Gọi (d) là đồ thị hàm số $y = ax + b$.

- a) Vì $A(1; 3) \in (d)$ nên $3 = a + b$

Vì $B(-1; -1) \in (d)$ nên $-1 = -a + b$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = -1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $a = 2; b = 1$.

- b) Vì $(D): y = ax + b$ song song với đường thẳng $(d'): y = x + 5$ nên suy ra: $a = a' = 1$.

Ta được $(d): y = x + b$.

Vì $C(1; 2) \in (d): 2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy $a = 1; b = 1$.

7. Cho hai đường thẳng: $y = (m + 1)x + 5$ (d_1); $y = 2x + n$ (d_2).

Với giá trị nào của m và n thì:

- d_1 trùng với d_2 ?
- d_1 cắt d_2 ?
- d_1 song song với d_2 ?

Giải

- a) $(d_1) \equiv (d_2)$ khi và chỉ khi
$$\begin{cases} m + 1 = 2 \\ n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 5. \end{cases}$$

- b) (d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow m + 1 \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 1$.

- c) $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 2 \\ n \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n \neq 5. \end{cases}$

8. Chứng minh rằng khi k thay đổi, các đường thẳng $(k + 1)x - 2y = 1$ luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

Giải

Trong phương trình biểu diễn các đường thẳng $(k + 1)x - 2y = 1$, ta nhận thấy: Khi $x = 0$ thì $y = -\frac{1}{2}$ với mọi $k \in \mathbb{R}$.

Điều này chứng tỏ rằng các đường thẳng có phương trình:

$(k + 1)x - 2y = 1$ luôn luôn đi qua điểm cố định I có tọa độ $(0; -\frac{1}{2})$ với mọi $k \in \mathbb{R}$.

9. Giải các hệ phương trình: a) $\begin{cases} 2x + 3|y| = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -2 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

Giải

a) Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} 2x + 3|y| = 13 & (1) \\ 3x - y = 3. & (2) \end{cases}$

* Trường hợp $y \geq 0$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 13 & (1) \\ 3x - y = 3 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 9x - 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 22 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy $(x = 2; y = 3)$ là nghiệm của hệ phương trình.

* Trường hợp $y < 0$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ -9x + 3y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x = 4 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = -\frac{33}{7} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy $x = -\frac{4}{7}; y = -\frac{33}{7}$ là nghiệm của hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình (I) có hai cặp nghiệm: $(2; 3)$ và $\left(-\frac{4}{7}; -\frac{33}{7}\right)$.

b) Giải hệ phương trình (II) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -2 & (1) \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 & (2) \end{cases}$

Giải bằng cách đặt ẩn số phụ:

Đặt $X = \sqrt{x}$ (với $X \geq 0$); $Y = \sqrt{y}$ (với $Y \geq 0$)

$$\text{Khi đó: (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X - 2Y = -2 \\ 2X + Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X - 2Y = -2 \\ 4X + 2Y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7X = 0 \\ 2X + Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases} \text{ (nhận)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $(0; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

10. Giải các hệ phương trình: a) $\begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-1)^2 - 2y = 2 \\ 3(x-1)^2 + 3y = 1. \end{cases}$

Giải

a) Giải hệ phương trình: (I) $\begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2. \end{cases}$

Đặt $X = \sqrt{x-1}$ (điều kiện $X \geq 0$)

$Y = \sqrt{y-1}$ (điều kiện $Y \geq 0$).

Thế vào (I), ta được:

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2X - Y = 1 \\ X + Y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X = 3 \\ X + Y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 1 \end{cases} \text{ (nhận)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy (2; 2) là nghiệm của hệ phương trình.

b) Giải hệ phương trình: (I)
$$\begin{cases} (x-1)^2 - 2y = 2 \\ 3(x-1)^2 + 3y = 1. \end{cases}$$

Đặt $X = (x-1)^2$ (điều kiện $X \geq 0$).

Khi đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} X - 2y = 2 \\ 3X + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3X + 6y = -6 \\ 3X + 3y = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y = -5 \\ X - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{9} \\ X = \frac{8}{9} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Ta có $(x-1)^2 = X = \frac{8}{9} \Leftrightarrow x-1 = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

• Với $x-1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1$.

• Với $x-1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{5}{9})$ và $(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{5}{9})$.

11. Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ hai sẽ bằng $\frac{4}{5}$ số sách ở giá thứ nhất. Tính số sách lúc đầu trong mỗi giá.

Giải

Gọi x (cuốn) là số sách ở giá thứ nhất; y (cuốn) là số sách ở giá thứ hai lúc ban đầu. Điều kiện x và y : nguyên dương.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 450 \\ y + 50 = \frac{4}{5}(x - 50) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = 300$; $y = 150$.

Vậy số sách lúc đầu ở giá thứ I là 300 cuốn, ở giá thứ II là 150 cuốn.

12. Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 4km và một đoạn xuống dốc dài 5km. Một người đi xe đạp từ A đến B hết 40 phút và đi từ B về A hết 41 phút (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc và lúc xuống dốc.

Giải

Gọi x (km/h) và vận tốc của xe đạp lúc lên dốc và y (km/h) là vận tốc xe đạp lúc xuống dốc. Điều kiện $x > 0$, $y > 0$.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{40}{60} \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{41}{60} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được (12; 15) (nhận).

Vậy vận tốc xe đạp lúc lên dốc là 12km/h và xuống dốc là 15km/h.

13. Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$, biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A(-2; 1)$. Vẽ đồ thị của hàm số đó.

Giải

* Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

Vì $A(-2; 1) \in (P)$: $y = ax^2$ nên: $1 = a(-2)^2 \Leftrightarrow 4a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$.

Vậy ta có hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$

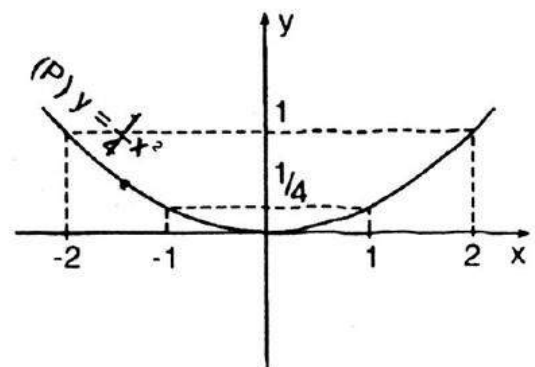
* Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

- Vẽ đồ thị: hình bên.



14. Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm của phương trình $3x^2 - ax - b = 0$.

Tổng $x_1 + x_2$ bằng: (A) $-\frac{a}{3}$; (B) $\frac{a}{3}$; (C) $\frac{b}{3}$; (D) $-\frac{b}{3}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

Vì x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn:

$$3x^2 - ax + b = 0 \text{ nên: } S = x_1 + x_2 = \frac{a}{3}.$$

Vậy chọn câu B.

15. Hai phương trình: $x^2 + ax + 1 = 0$ và $x^2 - x - a = 0$ có một nghiệm thực chung khi a bằng: (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, thì x_0 phải là nghiệm

của hệ:
$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 & (1) \\ x_0^2 - x_0 - a = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ cho (2), ta được: $(a + 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ x = -1 \end{cases}$

- Thay $a = -1$ vào (2), ta được: $x_0^2 - x_0 + 1 = 0$

Giải phương trình ta được phương trình vô nghiệm.

Vậy loại trường hợp $a = -1$.

- Thay $x_0 = -1$ vào (2), ta có $a = 2$.

Khi đó hai phương trình đã cho có nghiệm chung $x_0 = -1$.

Vậy chọn câu C.

16. Giải các phương trình:

a) $2x^3 - x^2 + 3x + 6 = 0$;

b) $x(x + 1)(x + 4)(x + 5) = 12$.

Giải

a) $2x^3 - x^2 + 3x + 6 = 0$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 3x + 6x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2(x + 1) - 3x(x + 1) + 6(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(2x^2 - 3x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 6 = 0. \end{cases}$$

* Giải phương trình $x + 1 = 0$, ta được $x = -1$.

* Giải phương trình $2x^2 - 3x + 6 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.2.6 = 9 - 48 < 0.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Tóm lại, phương trình (1) có một nghiệm $x = -1$.

b) $x(x + 1)(x + 4)(x + 5) = 12$. (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow [x(x + 5)][(x + 1)(x + 4)] = 12$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 4) = 12. (*)$$

Đặt $x^2 + 5x + 2 = y$ (3).

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow (y - 2)(y + 2) = 12 \Leftrightarrow y^2 - 4 = 12 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$.

- Với $y = 4$. Thay vào (3), ta được: $x^2 + 5x + 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2 = 0$.

Giải phương trình, ta được: $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$ và $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}$.

- Với $y = -4$: Thay vào (3), ta được: $x^2 + 5x + 2 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$.

Giải phương trình ta được: $x_3 = -3$; $x_4 = -2$.

Vậy phương trình (2) có 4 nghiệm: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$; $x_3 = -3$; $x_4 = -2$.

17. Một lớp học có 40 học sinh sắp xếp đều nhau trên các ghế băng. Nếu ta bớt đi 2 ghế băng thì mỗi ghế còn lại phải sắp xếp thêm 1 học sinh. Tính số ghế băng lúc đầu.

Giải

Gọi x (chiếc) là số ghế băng lúc đầu. Điều kiện: x : nguyên dương. Khi đó số học sinh chia đều trên mỗi ghế băng là $\frac{40}{x}$ (học sinh)

Nếu bớt đi 2 ghế băng thì số ghế băng còn lại là $(x - 2)$ cái. Khi đó mỗi ghế có $(\frac{40}{x} + 1)$ học sinh ngồi.

Theo đề bài ta có phương trình:

$$(x - 2)(\frac{40}{x} + 1) = 40 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 80 = 0.$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 10$ (nhận); $x_2 = -8$ (loại).

Vậy số ghế băng lúc đầu là 10 chiếc.

18. Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 10cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 2cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Giải

Gọi x (cm) và y (cm) lần lượt là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông. Giả sử $x > y$. Điều kiện: $x > 0$; $y > 0$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 100. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = 8$; $y = 6$.

Vậy hai cạnh góc vuông có độ dài là 8 (cm) và 6 (cm).

B. Phần Hình học

1. Chu vi hình chữ nhật ABCD là 20cm. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đường chéo AC.

Giải

Gọi x (cm) là độ dài cạnh AB ($x > 0$). Theo đề bài thì độ dài cạnh BC là $(10 - x)$.

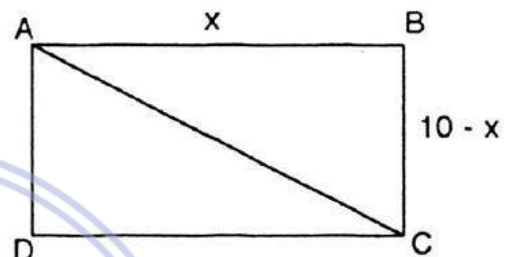
Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 = x^2 + (10 - x)^2 \\ &= 2(x^2 - 10x + 50) = 2[(x - 5)^2 + 25] \end{aligned}$$

$$AC^2 = 2(x - 5)^2 + 50 \geq 50$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của đường chéo AC là $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (cm).



2. Tam giác ABC có $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$. Nếu AC = 8 thì AB bằng:

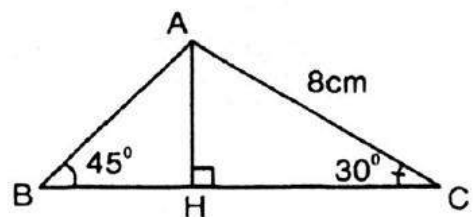
(A) 4; (B) $4\sqrt{2}$; (C) $4\sqrt{3}$; (D) $4\sqrt{6}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

Hạ $AH \perp BC$ ($H \in BC$).

Trong tam giác vuông HAC ($\hat{H} = 90^\circ$) có $\hat{C} = 30^\circ$. Vậy $\triangle HAC$ là nửa tam giác đều cạnh AC, đường cao CH cũng là đường trung tuyến.



$$\text{Suy ra } AH = \frac{AC}{2} = 4 \text{ (cm)}.$$

Xét hai tam giác vuông HAB ($\hat{H} = 90^\circ$) có $\hat{B} = 45^\circ$. Vậy $\triangle HAB$ là tam giác vuông cân tại H. Suy ra $AH = BH = 4$ (cm).

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông HAB, ta có:

$$AB = \sqrt{HA^2 + HB^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Vậy $AB = 4\sqrt{2}$ cm. Chọn câu (B).

3. Cho tam giác ABC vuông ở C có đường trung tuyến BN vuông góc với đường trung tuyến CM, cạnh BC = a. Tính độ dài đường trung tuyến EN.

Giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có: $BG = \frac{2}{3} BN$

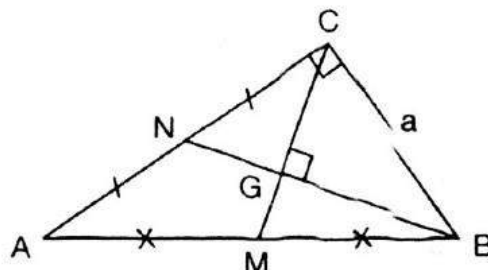
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông CNB, ta có:

$$BC^2 = BN \cdot BG = BN \cdot \frac{2}{3} BN = \frac{2}{3} BN^2$$

$$\Rightarrow BN^2 = \frac{3}{2} BC^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Rightarrow BN = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Vậy $BN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.



4. Nếu tam giác ABC vuông tại C và có $\sin A = \frac{2}{3}$ thì $\tan B$ bằng:

(A) $\frac{3}{5}$; (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải
Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Trong tam giác vuông ABC ($\hat{C} = 90^\circ$), ta có:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AB = \frac{3}{2} BC$$

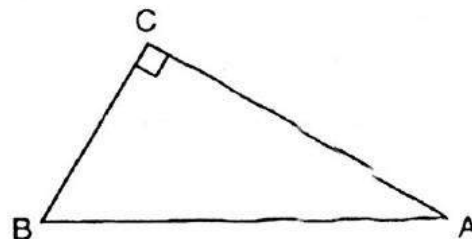
Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} BC\right)^2 - BC^2}$$

$$AC = \sqrt{\frac{5}{4} BC^2} = \frac{BC\sqrt{5}}{2}$$

Ta có $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{BC \frac{\sqrt{5}}{2}}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy chọn câu (D).



5. Tam giác ABC vuông tại C có AC = 15cm. Đường cao CH chia AE thành hai đoạn AH và HB. Biết HB = 16cm. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

Đặt $AH = x$ ($x > 0$)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC , ta có: $AC^2 = AB \cdot AH$

$$\text{hay } 15^2 = (x + 16)x \Leftrightarrow x^2 + 16x - 225 = 0.$$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 9$ (nhận); $x_2 = -25$ (loại).

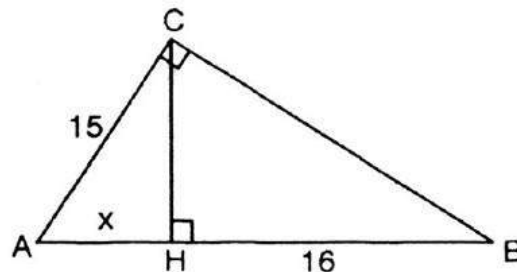
Vậy $AH = 9$ (cm)

$$\text{Ta có: } HC^2 = AH \cdot HB = 9 \cdot 16 = 144$$

$$\Rightarrow HC = 12 \text{ (cm)}.$$

Vậy diện tích tam giác ABC là:

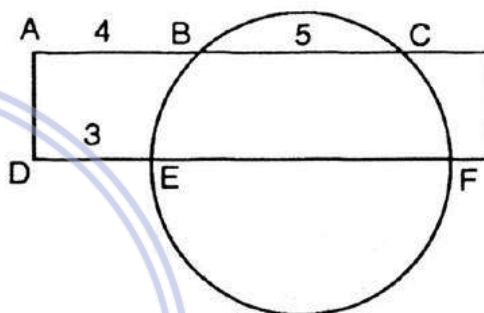
$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



6. Một hình chữ nhật cắt hình tròn như hình bên, biết $AB = 4$, $BC = 5$, $DE = 3$ (với cùng đơn vị đo). Độ dài EF bằng:

(A) 6; (B) 7; (C) $\frac{20}{3}$; (D) 8.

Hãy chọn câu trả lời đúng.



Gọi O là tâm của đường tròn. Qua O , kẻ đường vuông góc với BC , cắt DE ở P và BC ở Q .

$$\text{Ta có: } BQ = \frac{1}{2} BC = \frac{5}{2}$$

$$AQ = AB + BQ = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

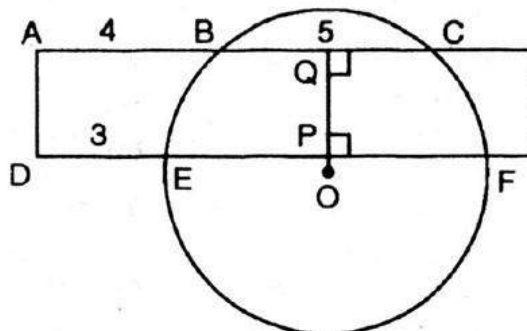
Vì $ADPQ$ là hình chữ nhật nên: $AQ = DP$.

Suy ra $EP = DP - DE = AQ - DE$

$$\text{hay } EP = \frac{13}{2} - 3 = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Mà } EF = 2EP = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7,$$

vậy chọn câu (B).



7. Cho tam giác đều ABC , O là trung điểm của BC . Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm di động D và E sao cho $\widehat{DOE} = 60^\circ$.

a) Chứng minh tích $BD \cdot CE$ không đổi.

b) Chứng minh $\triangle BOD \sim \triangle OED$. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

- c) Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

Giải

- a) Chứng minh tích $BD \cdot CE$ không đổi.

Xét hai tam giác: $\triangle BOD$ và $\triangle CEO$, ta có: $\widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$ (giả thiết). (1)

Ta có $\widehat{DOC}$ là góc ngoài của $\triangle BDO$ nên: $\widehat{DOC} = \widehat{B} + \widehat{D}_1$,

hay $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = \widehat{B} + \widehat{D}_1 \Leftrightarrow 60^\circ + \widehat{O}_2 = 60^\circ + \widehat{D}_1 \Leftrightarrow \widehat{O}_2 = \widehat{D}_1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\triangle BOD \sim \triangle CEO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BO} = \frac{CO}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BO \cdot CO,$$

$$\text{hay } BD \cdot CE = \frac{BC}{2} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{BC^2}{4} \text{ (không đổi).}$$

$$\text{Vậy } BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4} \text{ không đổi.}$$

- b) Chứng minh $\triangle BOD \sim \triangle OED$.

Theo câu a), ta có: $\triangle BOD \sim \triangle CEO$

$$\Rightarrow \frac{OD}{OE} = \frac{BD}{OC} = \frac{BD}{OB} \text{ (do } OC = OB)$$

$$\text{Mà } \widehat{B} = \widehat{DOE} = 60^\circ$$

vậy $\triangle BOD \sim \triangle OED$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{BDO} = \widehat{ODE}$,

hay DO là tia phân giác của góc BDE.

- c) Vẽ $OK \perp DE$ và gọi I là tiếp điểm của (O) với AB, khi đó $OI \perp AB$. Xét hai tam giác vuông: $\triangle IDO$ và $\triangle KDO$, ta có:

DO: chung; $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ (chứng minh trên).

Vậy $\triangle IDO = \triangle KDO$. Suy ra $OI = OK$.

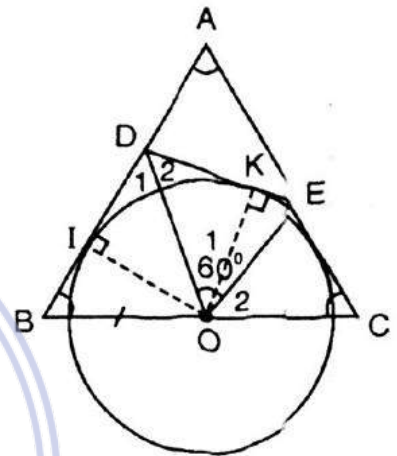
Điều này chứng tỏ rằng OK là bán kính của (O) và $OK \perp DE$ nên K là tiếp điểm của DE với (O) hay DE tiếp xúc với đường tròn (O).

8. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) tiếp xúc ngoài ($R > r$). Hai tiếp tuyến chung AB và A'B' của hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại P (A và A' thuộc đường tròn (O'), B và B' thuộc đường tròn (O)). Biết $PA = AB = 4\text{cm}$. Tính diện tích hình tròn (O').

Giải

Vì AB là tiếp tuyến chung của (O) và (O') nên $OB \perp AB$ và $O'A \perp A'B'$.

Xét hai tam giác vuông $\triangle OPB$ và $\triangle O'AP$, ta có:



$$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$$

$\hat{P}_1$: chung.

Vậy $\triangle OBP \sim \triangle O'AP$.

$$\text{Suy ra } \frac{r}{R} = \frac{PO'}{PO} = \frac{PA}{PB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

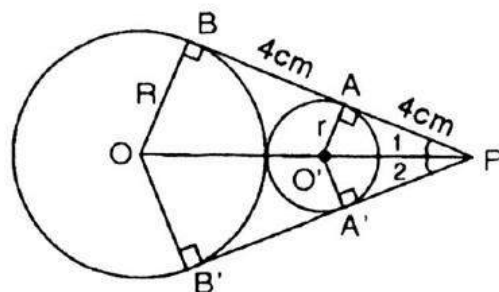
$$\Rightarrow R = 2r.$$

Ta có: $PO' = OO' = R + r = 3r$ (do AO' là đường trung bình của $\triangle OBP$)

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông $O'AP$:

$$O'P^2 = O'A^2 + AP^2 \text{ hay } (3r)^2 = r^2 + 4^2 \Leftrightarrow 9r^2 = r^2 + 16 \Leftrightarrow 8r^2 = 16 \Leftrightarrow r^2 = 2$$

Diện tích đường tròn (O' ; r) là: $S = \pi.r^2 = \pi.2 = 2\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$



9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O') và ngoại tiếp đường tròn (O). Tia AO cắt đường tròn (O') tại D. Ta có:

(A) $CD = BD = O'D$;

(B) $AO = CO = OD$;

(C) $CD = CO = BD$;

(D) $CD = OD = BD$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.



Vì AC và BC tiếp xúc với đường tròn (O), AD đi qua O nên ta có:

$\widehat{CAD} = \widehat{BAD} = \alpha$ (vì tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác là giao điểm của ba đường phân giác trong tam giác).

$$\text{Suy ra } \widehat{CD} = \widehat{DB} \Rightarrow CD = DB (*)$$

Tương tự, CO là tia phân giác của $\hat{C}$ nên:

$$\widehat{ACO} = \widehat{BCO} = \beta$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{DCO} = \widehat{DCB} + \widehat{BCO} = \alpha + \beta \quad (1) \text{ (do } \widehat{BAD} = \widehat{BCD} \text{)}$$

Ta có: $\widehat{COD}$ là góc ngoài của $\triangle AOC$ nên

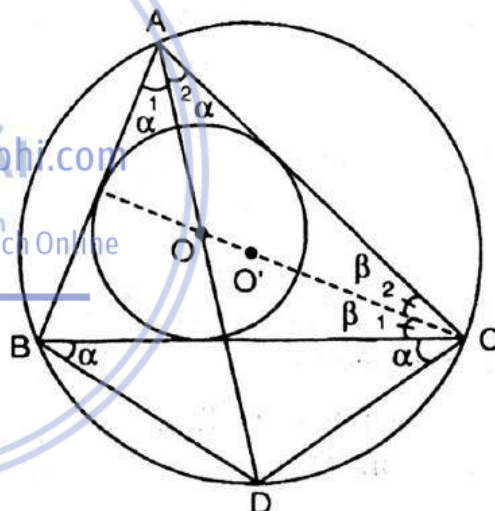
$$\widehat{COD} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} = \beta + \alpha. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{OCD} = \widehat{COD}$.

Vậy $\triangle DOC$ cân tại D. (**)

Từ (*) và (**), suy ra: $CD = OD = BD$.

Vậy chọn câu (D).



10. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các cung nhỏ AB, BC, CA có số đo lần lượt là $x + 75^\circ$, $2x + 25^\circ$, $3x - 22^\circ$. Một góc của tam giác ABC có số đo là:

(A) $57^{\circ}5'$; (B) 59° ; (C) 61° ; (D) 60° .

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

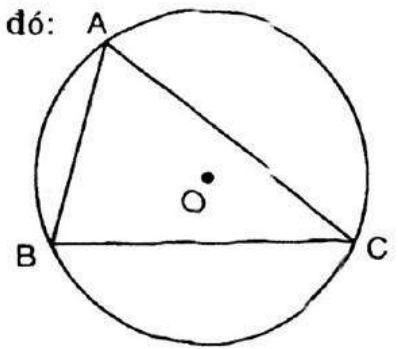
Vì các cung AB, BC, CA tạo thành đường tròn, do đó:

$$(x + 75^{\circ}) + (2x + 25^{\circ}) + (3x - 22^{\circ}) = 360^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow 6x + 78^{\circ} = 360^{\circ} \Leftrightarrow 6x = 282^{\circ} \Leftrightarrow x = 47^{\circ}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{AB} = x + 75^{\circ} = 47^{\circ} + 75^{\circ} = 122^{\circ}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \frac{122^{\circ}}{2} = 61^{\circ}.$$



$$* \widehat{BC} = 2x + 25^{\circ} = 2.47^{\circ} + 25^{\circ} = 119^{\circ} \Rightarrow \hat{A} = \frac{119^{\circ}}{2} = 59,5^{\circ}.$$

$$* \widehat{AC} = 3x - 22^{\circ} = 3.47^{\circ} - 22^{\circ} = 119^{\circ} \Rightarrow \hat{B} = \frac{119^{\circ}}{2} = 59,5^{\circ}.$$

Vậy chọn câu (C).

11. Từ một điểm P ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai cát tuyến PAB và PCD tới đường tròn. Gọi Q là một điểm nằm trên cung nhỏ BD (không chứa A và C) sao cho $\widehat{BQ} = 42^{\circ}$ và $\widehat{QD} = 38^{\circ}$. Tính tổng $\widehat{BPD} + \widehat{AQC}$.

GiảiTa có $\widehat{BPD}$ là góc ở ngoài đường tròn (O) nên:

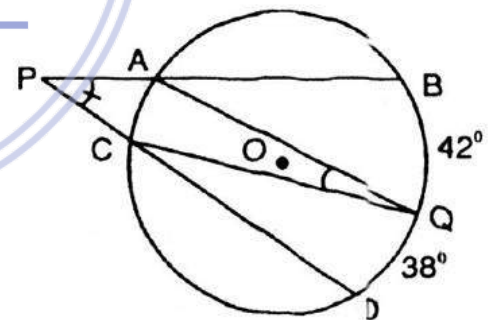
$$\widehat{BPD} = \frac{\widehat{BQD} - \widehat{AC}}{2}.$$

Ta có $\widehat{AQC}$ là góc nội tiếp trong đường tròn (O) nên:

$$\widehat{AQC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \widehat{BPD} + \widehat{AQC} &= \frac{\widehat{BQD} - \widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} \\ &= \frac{\widehat{BQD}}{2} = \frac{42^{\circ} + 38^{\circ}}{2} = 40^{\circ}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \widehat{BPD} + \widehat{AQC} = 40^{\circ}.$$



12. Một hình vuông và một hình tròn có chu vi bằng nhau. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn?

Giải

Giả sử, gọi cạnh hình vuông là a và bán kính đường tròn là R.

Khi đó, chu vi hình vuông là $4a$ và chu vi hình tròn $2\pi R$. Theo đề bài ta

$$\text{có: } 4a = 2\pi R \Rightarrow a = \frac{\pi R}{2}$$

Ta lập tỉ số diện tích hình vuông và hình tròn:

$$\frac{S_{\text{h.v.}}}{S_{\text{h.tr.}}} = \frac{a^2}{\pi R^2} = \frac{\left(\frac{\pi R^2}{2}\right)}{\pi R^2} = \frac{\pi^2 R^2}{4\pi R^2} = \frac{\pi}{4} < 1 \text{ (vì } \pi \approx 3,14).$$

Suy ra $S_{\text{h.v.}} < S_{\text{h.tr.}}$.

Vậy hình tròn có diện tích lớn hơn hình vuông.

13. Cho đường tròn (O), cung BC có số đo bằng 120° , điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Hỏi điểm D di chuyển trên đường nào?

Giải

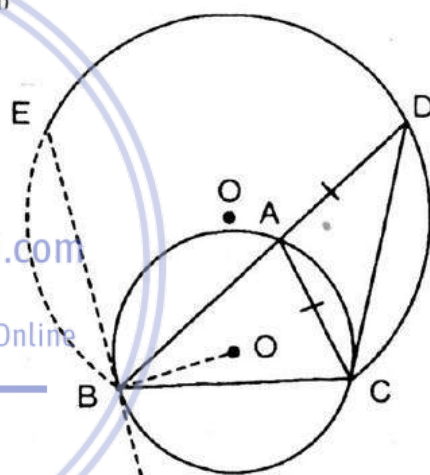
$$\text{Ta có } \widehat{A} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC} = 60^\circ; \widehat{BDC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

Như vậy, điểm D tạo với hai mút của đoạn thẳng BC cố định một góc

$\widehat{BDC} = 30^\circ$ nên D chuyển động trên cung chứa góc 30° dựng trên BC.

Ta có, khi $A \equiv B$ thì $D \equiv E$ và khi $A \equiv C$ thì $D \equiv C$.

Vậy khi A di chuyển trên cung lớn BC thì D di chuyển trên cung CE thuộc cung chứa góc 30° dựng trên BC.



14. Dựng tam giác ABC, biết $BC = 4\text{cm}$, $\widehat{A} = 60^\circ$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 1cm .

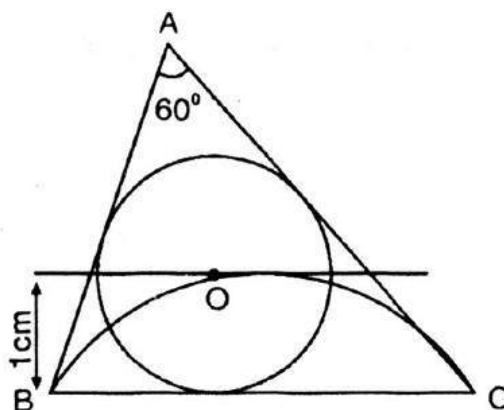
Giải

Dựng $BC = 4\text{cm}$ và đường thẳng (d) song song với BC và cách BC một khoảng là 1cm .

Tâm O của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là giao điểm của đường thẳng (d) với cung chứa góc $90^\circ + 60^\circ : 2 = 120^\circ$ dựng trên đoạn BC cố định.

Qua B và C vẽ các tiếp tuyến với (O), chúng cắt nhau tại A.

Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

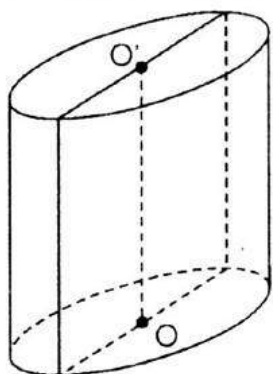


b) Đường cao hình trụ bằng 2cm.

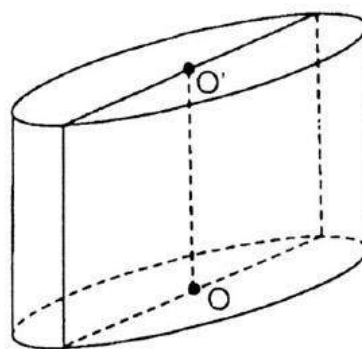
Khi đó chiều dài của hình chữ nhật là đường kính của hình trụ, suy ra $R = 1,5\text{cm}$.

Vậy $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 2 = 6\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 2 = 4,5\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



Trường hợp a)



Trường hợp b)

17. Khi quay tam giác ABC vuông ở A một vòng quanh cạnh góc vuông AC cố định, ta được một hình nón. Biết rằng $BC = 4\text{dm}$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.

Giải

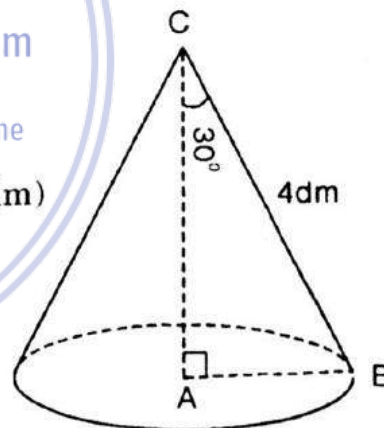
Trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AB = BC \cdot \sin C = BC \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ (dm)}$$

$$AC = BC \cdot \cos C = BC \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (dm)}$$

Ta có: $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi \text{ (dm}^2\text{)}$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \text{ (dm}^3\text{)}$$



18. Một hình cầu có số đo diện tích (đơn vị: m^2) bằng số đo thể tích (đơn vị: m^3). Tính bán kính hình cầu, diện tích mặt cầu và thể tích.

Giải

Gọi R là bán kính hình cầu (đơn vị: mét)

Khi đó ta có: $S = 4\pi R^2$ và $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Theo đề bài ta có: $4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \frac{R}{3} = 1 \Rightarrow R = 3 \text{ (m)}$

Ta có $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ (m}^2\text{)}$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ (m}^3\text{)}.$$

CÁC ĐỀ THI HỌC KÌ II VÀ THI TUYỂN VÀO LỚP 10

ĐỀ 1

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2006-2007, HUYỆN AN NHƠN, TỈNH BÌNH ĐỊNH

I. TRẮC NGHIỆM (3 điểm)

Từ câu 1 đến câu 6, hãy chọn phương án trả lời đúng (chọn một chữ cái A, B, C hoặc D).

Câu 1 : Điểm A(-1 ; -2) thuộc đồ thị hàm số $y = -mx^2$ khi m bằng :

- (A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4.

Câu 2 : Hàm số $y = \left(m - \frac{1}{2}\right)x^2$ đồng biến khi $x > 0$ nếu :

- (A) $m < \frac{1}{2}$ (B) $m > \frac{1}{2}$ (C) $m > -\frac{1}{2}$ (D) $m = 0$.

Câu 3 : Phương trình nào trong các phương trình sau có nghiệm kép

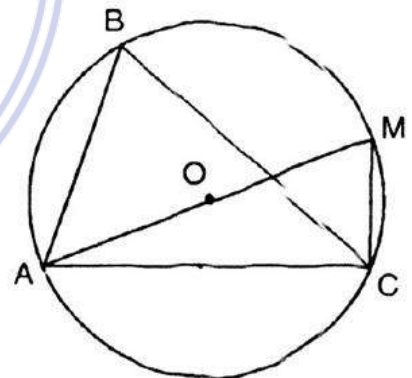
- (A) $x^2 - 4x - 4 = 0$ (B) $x^2 - 4x + 4 = 0$
(C) $-x^2 - 4x + 4 = 0$ (D) Cả ba phương trình trên.

Câu 4 : Trên hình vẽ, cho biết góc

ABC bằng 70° , AM là đường kính.

Số đo góc MAC bằng :

- (A) 20°
(B) 35°
(C) 70°
(D) Không tính được.



Câu 5 : Độ dài cung 120° của đường tròn có bán kính 3cm là :

- (A) π (cm) (B) 3π (cm) (C) 2π (cm) (D) 4π (cm).

Câu 6 : Một hình nón có bán kính đáy bằng 6cm và đường sinh bằng 10cm.

Thể tích hình nón đó là :

- (A) 288π (cm³) (B) 96π (cm³) (C) 120π (cm³) (D) Kết quả khác.

II. TỰ LUẬN (7 điểm)

Bài 1 : (1,5 điểm)

Cho phương trình : $x^2 + (2m - 1)x - m = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Tìm giá trị của m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 2 : (2 điểm)

Một ô tô đi từ Hà Nội đến Hải Phòng, đường dài 100km. Lúc về vận tốc tăng thêm 10 km/h, do đó thời gian lúc về ít hơn thời gian lúc đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Bài 3 : (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O ; R) đường kính AB. Điểm M chuyển động trên đường tròn và $MA < MB$. Kẻ đường thẳng qua M vuông góc với AB cắt đường tròn tại N. Kéo dài BM và AN cắt nhau tại I. Kẻ IH vuông góc với AB tại H.

- Chứng minh rằng tứ giác AHIM nội tiếp.
- Chứng minh góc AMH bằng góc ABM. Từ đó suy ra HM là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- Chứng minh tứ giác HMON nội tiếp. Tìm vị trí của điểm M trên đường tròn (O) sao cho A là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác HMON.

Hướng dẫn



I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Chọn câu B

Câu 3. Chọn câu B

Câu 5. Chọn câu C

Câu 2. Chọn câu B

Câu 4. Chọn câu A

Câu 6. Chọn câu B.

II. TỰ LUẬN

Bài 1 : a) $\Delta = (2m - 1)^2 + 4m = 4m^2 - 4m + 1 + 4m = 4m^2 + 1 > 0, \forall m$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m + 1 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

$$A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - x_1 x_2$$

$$= \dots = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} \geq \frac{15}{16}.$$

Bài 2 : $30 \text{ phút} = \frac{1}{2} \text{ h}$

Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h) (Điều kiện : $x > 0$)

$$\text{Phương trình lập được : } \frac{100}{x} - \frac{100}{x+10} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 40 ; x_2 = -50 \text{ (loại)}$$

Bài 3 : a) $\widehat{AHI} = 90^\circ$

$$\widehat{AMI} = 90^\circ$$

b) $\widehat{AMH} = \widehat{AIH}$

$$\widehat{AIH} = \widehat{ANM} \quad (IH \parallel MN)$$

$$\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$$

$$\widehat{AMH} + \widehat{AMO} = \widehat{ABM} + \widehat{MAO} = 90^\circ$$

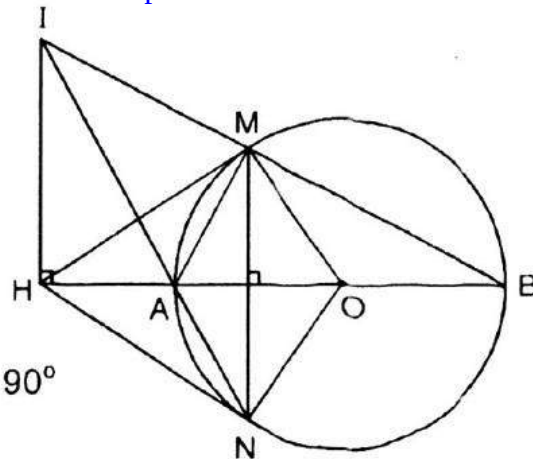
$$\Rightarrow \widehat{HMO} = 90^\circ$$

c) $\triangle HMO = \triangle HNO$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{HMO} = \widehat{HNO}$$

A là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác

$$HMON \Leftrightarrow AM = AO = R$$



ĐỀ 2

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2006-2007, QUẬN TÂN BÌNH, TP HỒ CHÍ MINH

I. TRẮC NGHIỆM (2đ)

Hướng dẫn cách làm : mỗi câu có 4 câu trả lời (A), (B), (C), (D).

Học sinh chọn câu trả lời nào thì ghi câu đó vào giấy làm bài của mình.
(Ví dụ : 1(A) ; 2(C) ;...)

- Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi :
(A) $\Delta = 0$ (B) $\Delta \leq 0$ (C) $\Delta > 0$ (D) $\Delta < 0$.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 5x - 6 = 0$ thì tổng của hai nghiệm này là :
(A) $x_1 + x_2 = -5$ (B) $x_1 + x_2 = 5$ (C) $x_1 + x_2 = 6$ (D) $x_1 + x_2 = -6$.
- Cung $\widehat{AOB}$ của đường tròn (O ; R) có số đo là 120° . Diện tích hình quạt tròn AOB tính theo π và R là :
(A) $\frac{1}{2}\pi R^2$ (B) $\frac{1}{3}\pi R^2$ (C) $\frac{1}{4}\pi R^2$ (D) $\frac{1}{6}\pi R^2$.
- Một hình trụ có bán kính $R = 4$ (cm), chiều cao $h = 12$ (cm), thì diện tích xung quanh tính theo π là :
(A) $S_{xq} = 48\pi$ (cm²) (B) $S_{xq} = 192\pi$ (cm²)
(C) $S_{xq} = 56\pi$ (cm²) (D) $S_{xq} = 96\pi$ (cm²).

II. BÀI TOÁN**Bài 1 : (1,5đ)**

Giải phương trình và hệ phương trình sau :

a)
$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

b)
$$x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0$$

Bài 2 : Cho parabol (P) : $y = \frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (d) : $y = x - 1$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ. (1đ)

b) Xác định tọa độ các giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính. (0,75đ)

Bài 3 : (1đ)Tính chu vi hình chữ nhật, biết rằng chiều dài hơn chiều rộng 4m và diện tích của nó bằng 320m².**Bài 4 :** Cho đường tròn (O ; R) và một điểm A nằm ngoài (O) sao cho OA = 3R. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B và C là hai tiếp điểm). AO cắt BC tại H.

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp. (1đ)

b) Chứng minh : AO ⊥ BC tại H. (1đ)

c) Tính diện tích tứ giác ABOC theo R. (1đ)

d) Vẽ dây cung CD của (O) song song với AB. Đường thẳng AD cắt (O) tại E (E khác D). Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Chứng minh ba điểm M, E, C thẳng hàng. (0,75đ)

Hướng dẫn**I. TRẮC NGHIỆM****Câu 1.** Chọn câu C**Câu 2.** Chọn câu A**Câu 3.** Chọn câu B**Câu 4.** Chọn câu D**II. BÀI TOÁN**

Bài 1 : a)
$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

b)
$$x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})x + \sqrt{15} = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 4\sqrt{15} = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 4\sqrt{3}\sqrt{5} = (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$$

$$\sqrt{\Delta} = |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Bài 2 : a) (P) đi qua các điểm: $(-2 ; 1) ; \left(-1 ; \frac{1}{4}\right) ; (0 ; 0) ; \left(1 ; \frac{1}{4}\right) ; (2 ; 1)$

(d) đi qua hai điểm $(0 ; -1) ; (1 ; 0)$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$\frac{x^2}{4} = x - 1 \Leftrightarrow x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Delta = 0, x_1 = x_2 = 2$$

$$x = 2 \text{ thì } y = \frac{2^2}{4} = 1.$$

(P) và (d) tiếp xúc nhau tại $(2 ; 1)$.

Bài 3 : Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là x (m) (điều kiện $x > 0$)

chiều dài của hình chữ nhật là $x + 4$ (m)

Phương trình lập được là $x(x + 4) = 320$

$$x^2 + 4x - 320 = 0$$

$$x_1 = 16 ; x_2 = -20 \text{ (loại)}.$$

Bài 4 : a) $\widehat{ABO} = 90^\circ, \widehat{ACO} = 90^\circ$

b) $\triangle ABC$ cân tại A, AO là đường phân giác.

c) $OB^2 + AC^2 = OA^2$

$$S_{ABOC} = S_{OAB} + S_{OAC}$$

d) Gọi M' là giao điểm của CE và AB.

$$\triangle M'EB \sim \triangle M'BC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow M'B^2 = M'E.M'C.$$

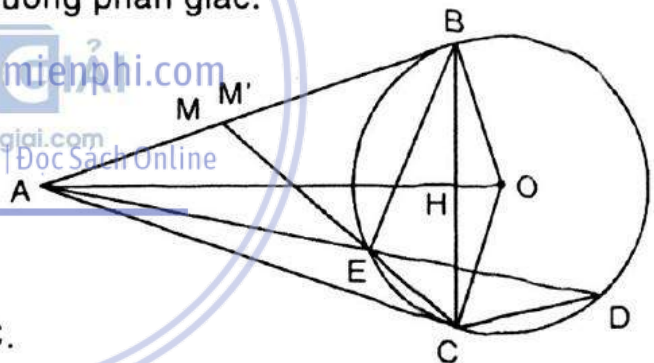
$$\triangle M'AE \sim \triangle M'CA$$

$$\widehat{AM'E} \text{ chung ; } \widehat{M'AE} = \widehat{M'CA} (= \widehat{CDE})$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow M'A^2 = M'E.M'C$$

Từ $M'A = M'B \Rightarrow M'$ là trung điểm của AB.

Do đó $M' \equiv M$.



ĐỀ 3**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NGÀY 10/07/2007, NĂM HỌC 2007-2008, TỈNH QUẢNG NGÃI****I. TRẮC NGHIỆM** (Mỗi câu 0,25 điểm)

Hãy chọn một phương án đúng trong các phương án (A), (B), (C) và (D).

Câu 1 : Kết quả của phép tính $\sqrt{8} + \sqrt{18}$ là :

- (A) $\sqrt{26}$ (B) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ (C) 7 (D) $5\sqrt{2}$.

Câu 2 : Giá trị của x để $\sqrt{(x-4)^2} = 4-x$ là :

- (A) $x = 4$ (B) $x > 4$ (C) $x \leq 4$ (D) $x \geq 4$.

Câu 3 : Rút gọn biểu thức $\sqrt{\frac{x}{1 - \frac{x-1}{x}}}$ khi $x < 0$ ta được :

- (A) $-x$ (B) x (C) 1 (D) $\sqrt{\frac{x}{2}}$.

Câu 4 : Cho hàm số $y = (\sqrt{3} - 1)x + 5$. Khi $x = \sqrt{3} + 1$ thì y nhận giá trị là :

- (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) $9 + 2\sqrt{3}$.

Câu 5 : Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $3x^2 - ax - b = 0$. Tổng $x_1 + x_2$ bằng :

- (A) $-\frac{a}{3}$ (B) $\frac{a}{3}$ (C) $\frac{b}{3}$ (D) $-\frac{b}{3}$.

Câu 6 : Cho a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - mx + 2 = 0$ và $a + \frac{1}{b}, b + \frac{1}{a}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$, thế thì giá trị của q là :

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{9}{2}$.

Câu 7 : Tam giác ABC vuông tại A. Khẳng định nào sau đây là sai ?

- (A) $AB = BC \cdot \sin C$ (B) $AB = AC \cdot \cot C$
(C) $AB = BC \cdot \cos B$ (D) $BC = \frac{AC}{\cos C}$.

Câu 8 : Cho đường tròn tâm O bán kính bằng 5cm và dây $AB = 8\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của AB, vẽ bán kính ON đi qua M. Tỷ số $\frac{MN}{AB}$ là:

- (A) 4 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$.

Câu 9 : Cho $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$. Khi đó $\cos \alpha$ nhận kết quả là :

- (A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 10 : Hàm số $y = (a - 2)x + 5$ luôn đồng biến khi :

- (A) $a > 0$ (B) $a > 2$ (C) $a = 2$ (D) $a \geq 2$.

Câu 11 : Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN (M, N là các tiếp điểm) khi đó :

- (A) $\widehat{MAN} > 90^\circ$ (B) $\widehat{MAN} = 90^\circ$
(C) $\widehat{MAN} < 90^\circ$ (D) $\widehat{MAN} = 60^\circ$.

Câu 12 : Nếu bán kính của một hình cầu tăng gấp đôi thì thể tích của hình cầu đó tăng gấp :

- (A) 2 lần (B) 4 lần (C) 6 lần (D) 8 lần.

II. TỰ LUẬN

Câu 1 : (3 điểm)

a) Rút gọn biểu thức : (1đ)

$$P = \frac{3x + \sqrt{9x - 3}}{x + \sqrt{x - 2}} - \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 1}} + \frac{1}{\sqrt{x + 2}} - 1 \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

b) Để chuyển hết số hàng trong một kho, người ta đã dùng hai ô tô, một loại lớn, một loại nhỏ. Sau 14 chuyến chuyên chở của cả hai ô tô đã chở hết hàng. Nếu chỉ dùng một ô tô loại lớn thì phải chở 12 chuyến mới hết hàng, nếu chỉ dùng một ô tô loại nhỏ thì phải chở tới 15 chuyến. Hỏi mỗi ô tô đã chở mấy chuyến hàng ? (Giả thiết mỗi chuyến ô tô đều chở đúng trọng tải). (2đ)

Câu 2 : (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 1$ (đơn vị độ dài). Trên tia BC lấy một điểm D, trên tia AB lấy một điểm E sao cho $AD = AE = BC$.

- a) Tính chu vi và diện tích của tứ giác BCDE. (2đ)
b) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp được trong một đường tròn. (1đ)

Câu 3 : (1 điểm)

Chứng minh rằng không tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho :

$$(a + b\sqrt{2})^2 = 100 + 101\sqrt{2}.$$

Hướng dẫn**I. TRẮC NGHIỆM**

Câu 1. Chọn câu D

Câu 3. Chọn câu A

Câu 5. Chọn câu B

Câu 7. Chọn câu B

Câu 9. Chọn câu B

Câu 11. Chọn câu B

Câu 2. Chọn câu C

Câu 4. Chọn câu B

Câu 6. Chọn câu D

Câu 8. Chọn câu D

Câu 10. Chọn câu B

Câu 12. Chọn câu D.

II. TỰ LUẬN

Câu 1 : a) $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 1 = \dots = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

b) Gọi số chuyển hàng ô tô loại lớn, loại nhỏ đã chở lần lượt là x (chuyển hàng) ; y (chuyển hàng)

(Điều kiện : x, y ∈ N*)

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ \frac{x}{12} + \frac{y}{15} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 10 \end{cases}$$

Câu 2 : a) $BC = \sqrt{2}$; $AD = AE = BC$; $DE = 2$

Chu vi BCDE = $3\sqrt{2}$ (đơn vị độ dài)

$$S_{BCDE} = S_{AED} - S_{ABC} = \dots = \frac{1}{2} \text{ (đơn vị diện tích)}$$

b) $\widehat{ABC} = \widehat{CDE} (= 45^\circ)$

Câu 3 : Giả sử tồn tại a, b ∈ Z sao cho $(a + b\sqrt{2})^2 = 100 + 101\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \sqrt{2}(2ab - 101) = 100 - a^2 - 2b^2$$

2ab là số chẵn, 101 là số lẻ

Do đó : $2ab - 101 \neq 0$

$$\sqrt{2} = \frac{100 - a^2 - 2b^2}{2ab - 101} \quad (*)$$

(*) không xảy ra !

Vậy không tồn tại a, b ∈ Z sao cho $(a + b\sqrt{2})^2 = 100 + 101\sqrt{2}$.

ĐỀ 4**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NGÀY 11/07/2007, TỈNH QUẢNG NGÃI****I. TRẮC NGHIỆM** (Mỗi câu 0,25 điểm)

Hãy chọn một phương án đúng trong các phương án (A), (B), (C) và (D).

Câu 1 : Nếu $3\sqrt{x} = 36$ thì x là số nào ?

- (A)
- $x = 81$
- (B)
- $x = 121$
- (C)
- $x = 144$
- (D)
- $x = 169$
- .

Câu 2 : Biểu thức $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} - 3\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2}$ có kết quả là :

- (A)
- $6\sqrt{5}$
- (B)
- $-6\sqrt{5}$
- (C)
- $6\sqrt{3}$
- (D)
- $-6\sqrt{3}$
- .

Câu 3 : Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{48} + \sqrt{75} - \sqrt{243}}{\sqrt{300}}$ ta được :

- (A)
- $-\frac{1}{5}$
- (B)
- $-\frac{2}{5}$
- (C)
- $-\frac{3}{5}$
- (D)
- $-\frac{4}{5}$
- .

Câu 4 : Cho đường thẳng (d) : $y = (a - 2)x + 5a$. Nếu đường thẳng (d) đi qua điểm M (-1 ; -6) thì giá trị của a là :

- (A)
- $a = 2$
- (B)
- $a = -2$
- (C)
- $a = 4$
- (D)
- $a = -4$
- .

Câu 5 : Đường thẳng (d) đi qua hai điểm P(-6 ; 1) và Q(2 ; 4) có hệ số góc là :

- (A)
- $\frac{1}{8}$
- (B)
- $\frac{2}{8}$
- (C)
- $\frac{3}{8}$
- (D)
- $\frac{5}{8}$
- .

Câu 6 : Cho phương trình : $x^2 - 6x + 4 - 3m = 0$. Số nguyên m nhỏ nhất thoả điều kiện : "Để phương trình có nghiệm" là :

- (A)
- $m = -2$
- (B)
- $m = -1$
- (C)
- $m = 0$
- (D)
- $m = 1$
- .

Câu 7 : Giả sử phương trình $x^2 + 8x + 6m - 6 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Nếu $2x_1 + 3x_2 = -12$ thì m sẽ là số :

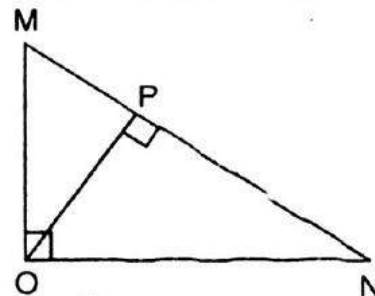
- (A)
- $m = -5$
- (B)
- $m = -6$
- (C)
- $m = -7$
- (D)
- $m = -8$
- .

Câu 8 : Với hình vẽ bên, cho

OP = 12cm, PN = 16cm.

Độ dài ON là :

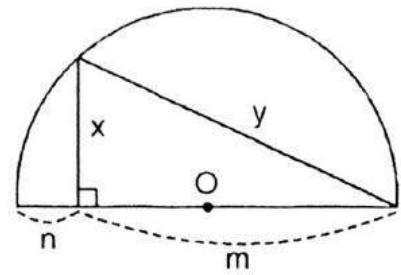
- (A) 19,5cm (B) 20cm
-
- (C) 21cm (D) 21,5cm.

**Câu 9 :** Cho tam giác ABC vuông tại A, có $\cos B = 0,8$. Khi đó :

- (A)
- $\tan C = \frac{3}{4}$
- (B)
- $\tan C = \frac{4}{3}$
- (C)
- $\tan C = \frac{5}{4}$
- (D)
- $\tan C = \frac{4}{5}$
- .

Câu 10 : Trong hình bên, độ dài x và y theo m, n là :

- (A) $x = m.n$; $y = n(m + n)$
 (B) $x = \sqrt{m.n}$; $y = \sqrt{m(m + n)}$
 (C) $x = \sqrt{m + n}$; $y = \sqrt{n(m + n)}$
 (D) $x = \sqrt{m.n}$; $y = \sqrt{n(m + n)}$.



Câu 11 : Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$, M là điểm tùy ý trên đường tròn (O), tiếp tuyến tại M cắt hai tiếp tuyến tại A và B lần lượt ở C và D. Tam giác COD là tam giác gì ?

- (A) Tam giác vuông tại O ; (B) Tam giác đều ;
 (C) Tam giác nhọn ; (D) Tam giác tù.

Câu 12 : Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 2\text{cm}$ và $AC = 3\text{cm}$. Quay tam giác vuông đó một vòng quanh cạnh AB, ta được một hình có thể tích V_1 . Quay tam giác vuông đó một vòng quanh cạnh AC, ta được một hình có thể tích V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng :

- (A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) 2,5.

II. TỰ LUẬN

Câu 1 : (3 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$ (1)

- a) Giải phương trình khi $m = 4$. (1đ)
 b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm. (1đ)
 c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)$.

Câu 2 : (3 điểm)

Cho đường tròn tâm O, bán kính R có AB là đường kính cố định, MN là đường kính thay đổi của đường tròn (O) sao cho MN không vuông góc với AB ($M \neq A, M \neq B$). Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B. Các đường thẳng AM và AN cắt đường thẳng d tương ứng tại C và D.

- a) Chứng minh rằng tứ giác CMND nội tiếp đường tròn. (1,5đ)
 b) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD và H là giao điểm của AI và MN. Chứng minh rằng AI vuông góc với MN, từ đó suy ra điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định. (1,5đ)

Câu 3 : (1 điểm)

Cho $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 2x + 1}$. Tính tổng $S = f(-5) + f(-4) + \dots + f(5) + f(6)$.

Hướng dẫn**I. TRẮC NGHIỆM****Câu 1.** Chọn câu C**Câu 3.** Chọn câu C**Câu 5.** Chọn câu C**Câu 7.** Chọn câu C**Câu 9.** Chọn câu B**Câu 11.** Chọn câu A**Câu 2.** Chọn câu D**Câu 4.** Chọn câu B**Câu 6.** Chọn câu B**Câu 8.** Chọn câu B**Câu 10.** Chọn câu B**Câu 12.** Chọn câu B.**II. TỰ LUẬN****Câu 1 :** a) $m = 4$. Phương trình trở thành : $x^2 - 10x + 5 = 0$

$$x_1 = 5 + 2\sqrt{5} ; x_2 = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$b) \Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 - 4m + 5) = \dots = 6m - 4$$

$$m \geq \frac{2}{3}$$

$$c) M = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = m^2 - 4m + 5 - 4(m + 1) \\ = m^2 - 8m + 1 = \dots = (m - 4)^2 - 15 \geq -15.$$

Câu 2 : a) $\widehat{AMN} = \widehat{ABN}$

$$\widehat{ABN} = \widehat{CDN}$$

Suy ra : $\widehat{AMN} = \widehat{CDN} \Rightarrow$ Tứ giác CMND nội tiếp

$$b) \widehat{CAD} = 90^\circ$$

$$IA = IC = ID$$

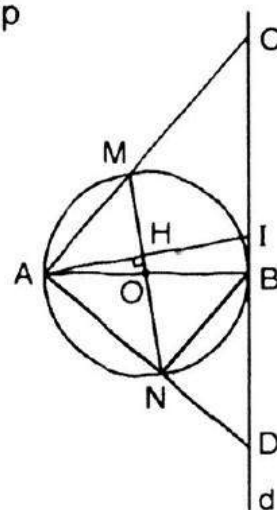
 ΔIAC cân tại I

$$\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICA}$$

$$\widehat{ICA} + \widehat{CDN} = 90^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{IAC} + \widehat{AMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHM} = 90^\circ$$

$$\widehat{AHO} = 90^\circ ; AO \text{ cố định.}$$



$$\text{Câu 3 : } f(a) + f(1 - a) = \frac{a^2}{2a^2 - 2a + 1} + \frac{(1 - a)^2}{2(1 - a)^2 - 2(1 - a) + 1} = \dots = 1$$

$$\text{Do đó : } f(6) + f(-5) = 1 ; f(5) + f(-4) = 1$$

$$f(4) + f(-3) = 1 ; f(3) + f(-2) = 1$$

$$f(2) + f(-1) = 1 ; f(0) + f(1) = 1.$$

Vậy $S = 6$.