

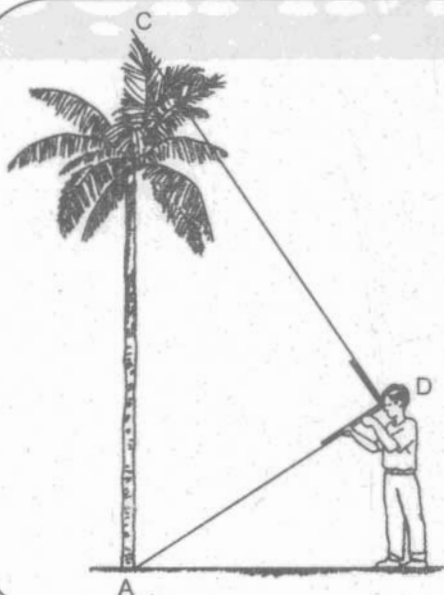
Phần

HÌNH HỌC

Chương I – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

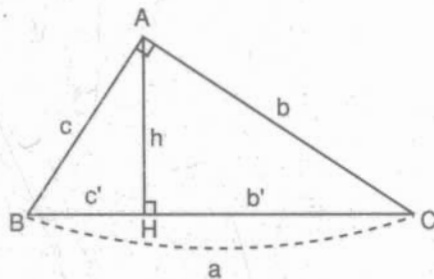
Trong tam giác vuông, nếu biết hai cạnh, hoặc một cạnh và một góc nhọn thì có thể tính được các góc và các cạnh còn lại của tam giác đó hay không ?

§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông



Nhờ một hệ thức trong tam giác vuông, ta có thể "đo" được chiều cao của cây bằng một chiếc thước thợ.

Xét tam giác ABC vuông tại A , cạnh huyền $BC = a$, các cạnh góc vuông $AC = b$ và $AB = c$. Gọi $AH = h$ là đường cao ứng với cạnh huyền và $CH = b'$, $BH = c'$ lần lượt là hình chiếu của AC , AB trên cạnh huyền BC (h.1).



Hình 1

1. Hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

ĐỊNH LÝ 1

Trong một tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

Cụ thể, trong tam giác ABC vuông tại A (h.1), ta có

$$b^2 = ab', c^2 = ac'. \quad (1)$$

Chứng minh (h.1)

Xét hai tam giác vuông AHC và BAC. Hai tam giác vuông này có chung góc nhọn C nên chúng đồng dạng với nhau. Do đó $\frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ suy ra

$AC^2 = BC.HC$, tức là $b^2 = a.b'$. Tương tự, ta có $c^2 = a.c'$.

Ví dụ 1. (Định lý Py-ta-go – Một hệ quả của định lý 1)

Rõ ràng, trong tam giác vuông ABC (h.1), cạnh huyền $a = b' + c'$, do đó

$$b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2.$$

Như vậy, từ định lý 1, ta cũng suy ra được định lý Py-ta-go.

2. Một số hệ thức liên quan tới đường cao

ĐỊNH LÝ 2

Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Cụ thể, với các quy ước ở hình 1, ta có

$$h^2 = b'c'. \quad (2)$$

❓ Xét hình 1. Chứng minh $\triangle AHB \sim \triangle CHA$. Từ đó suy ra hệ thức (2).

Ví dụ 2. Tính chiều cao của cây trong hình 2, biết rằng người đo đứng cách cây 2,25m và khoảng cách từ mắt người đo đến mặt đất là 1,5m.

Giải. Ta có tam giác ADC vuông tại D , DB là đường cao ứng với cạnh huyền AC và $AB = 1,5$ m. Theo định lí 2, ta có

$$BD^2 = AB \cdot BC$$

tức là

$$(2,25)^2 = 1,5 \cdot BC,$$

suy ra

$$BC = \frac{(2,25)^2}{1,5} = 3,375 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của cây là

$$AC = AB + BC = 1,5 + 3,375 = 4,875 \text{ (m)}.$$

- Định lí 2 thiết lập mối quan hệ giữa đường cao ứng với cạnh huyền và các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền của một tam giác vuông. Định lí 3 dưới đây thiết lập mối quan hệ giữa đường cao này với cạnh huyền và hai cạnh góc vuông.

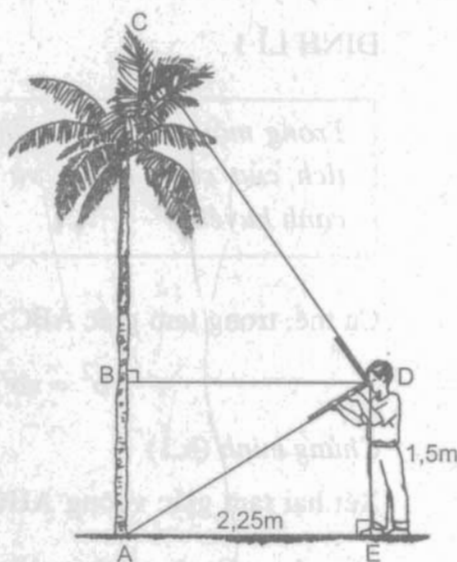
ĐỊNH LÍ 3

Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.

Với các kí hiệu trong hình 1, kết luận của định lí 3 có nghĩa là

$$bc = ah.$$

(3)



Hình 2

Từ công thức tính diện tích tam giác, ta nhanh chóng suy ra hệ thức (3). Tuy nhiên, có thể chứng minh hệ thức (3) bằng cách khác.

?2 Xét hình 1. Hãy chứng minh hệ thức (3) bằng tam giác đồng dạng.

Nhờ định lí Py-ta-go, từ hệ thức (3), ta có thể suy ra một hệ thức giữa đường cao ứng với cạnh huyền và hai cạnh góc vuông. Thật vậy, ta có

$$ah = bc \Rightarrow a^2 h^2 = b^2 c^2 \Rightarrow (b^2 + c^2) h^2 = b^2 c^2 \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \quad (4)$$

Hệ thức (4) được phát biểu thành định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 4

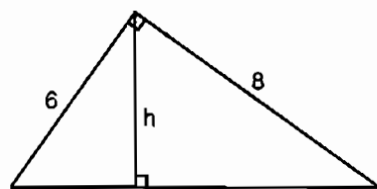
Trong một tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.

Ví dụ 3. Cho tam giác vuông trong đó các cạnh góc vuông dài 6cm và 8cm. Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông.

Giải. (h.3)

Gọi đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông của tam giác này là h . Theo hệ thức giữa đường cao ứng với cạnh huyền và hai cạnh góc vuông, ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2}.$$



Hình 3

Từ đó suy ra $h^2 = \frac{6^2 \cdot 8^2}{6^2 + 8^2} = \frac{6^2 \cdot 8^2}{10^2}$, do đó $h = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$ (cm).

➤ **Chú ý.** Trong các ví dụ và các bài tập tính toán bằng số của chương này, các số đo độ dài ở mỗi bài nếu không ghi đơn vị ta quy ước là cùng đơn vị đo.



Có thể em chưa biết

Các hệ thức $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$ (1) và $h^2 = b'c'$ (2) (xem hình 1) còn được phát biểu dựa vào khái niệm trung bình nhân.

Hệ thức (1) được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

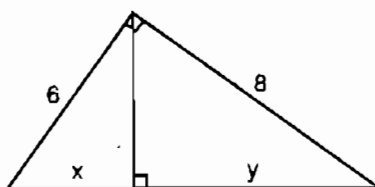
Tương tự, hệ thức (2) được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của hai đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.

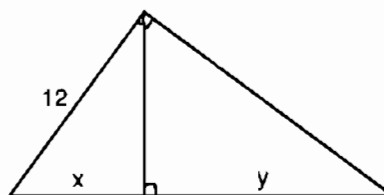
Bài tập

Hãy tính x và y trong mỗi hình sau :

1. (h.4a, b)



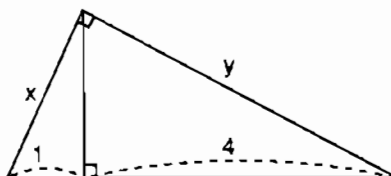
a)



b)

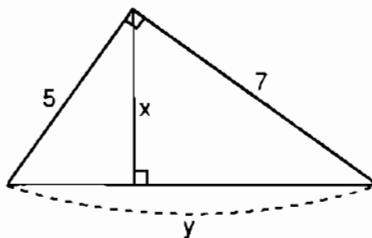
Hình 4

2. (h.5)



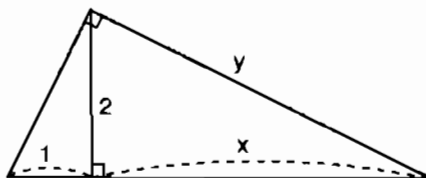
Hình 5

3. (h.6)



Hình 6

4. (h.7)

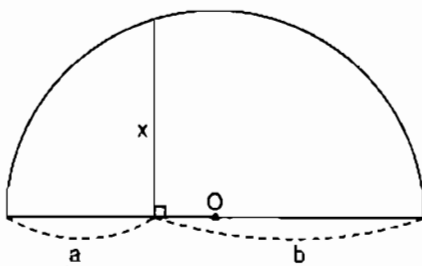


Hình 7

Luyện tập

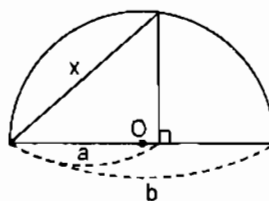
5. Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 và 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.
6. Đường cao của một tam giác vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 1 và 2. Hãy tính các cạnh góc vuông của tam giác này.
7. Người ta đưa ra hai cách vẽ đoạn trung bình nhân x của hai đoạn thẳng a, b (tức là $x^2 = ab$) như trong hai hình sau :

Cách 1 (h.8)



Hình 8

Cách 2 (h.9)



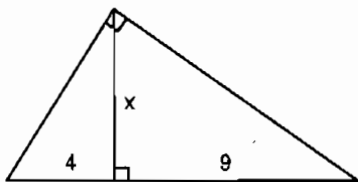
Hình 9

Dựa vào các hệ thức (1) và (2), hãy chứng minh các cách vẽ trên là đúng.

Gợi ý. Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác ấy là tam giác vuông.

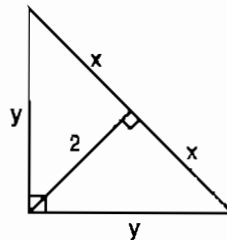
8. Tìm x và y trong mỗi hình sau :

a) (h.10)



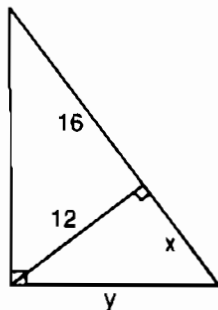
Hình 10

b) (h.11)



Hình 11

c) (h.12)



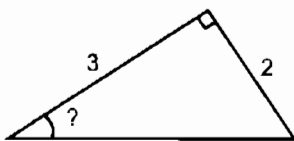
Hình 12

9. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI. Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh rằng

a) Tam giác DIL là một tam giác cân ;

b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

§2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn



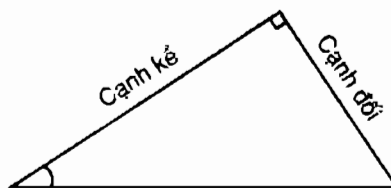
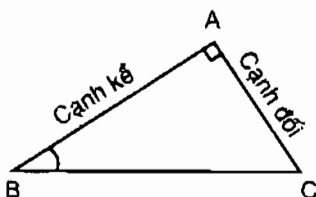
Trong một tam giác vuông, nếu biết tỷ số độ dài của hai cạnh thì có biết được độ lớn của các góc nhọn hay không ?

1. Khái niệm tỷ số lượng giác của một góc nhọn

a) Mở đầu

Cho tam giác ABC vuông tại A. Xét góc nhọn B của nó. Nhắc lại rằng : Cạnh AB được gọi là *cạnh kề* của góc B, cạnh AC được gọi là *cạnh đối* của góc B.

Ta cũng đã biết : Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số đo của một góc nhọn, hoặc các tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của một góc nhọn trong mỗi tam giác đó là như nhau (h.13). Như vậy, tỷ số giữa cạnh đối và cạnh kề của một góc nhọn trong tam giác vuông đặc trưng cho độ lớn của góc nhọn đó.



Hình 13

? Xét tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = \alpha$. Chứng minh rằng

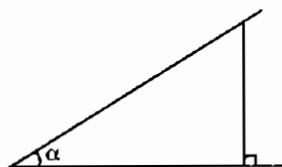
$$a) \alpha = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 ;$$

$$b) \alpha = 60^\circ \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}.$$

Ngoài tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề, ta còn xét các tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối, cạnh đối và cạnh huyền, cạnh kề và cạnh huyền của một góc nhọn trong tam giác vuông. Các tỉ số này chỉ thay đổi khi độ lớn của góc nhọn đang xét thay đổi và ta gọi chúng là các *tỉ số lượng giác* của góc nhọn đó.

b) Định nghĩa

Cho góc nhọn α . Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn α (ta có thể vẽ như sau : Vẽ góc α , từ một điểm bất kì trên một cạnh của góc α kẻ đường vuông góc với cạnh kia (h.14)), xác định cạnh đối và cạnh kề của góc α . Khi đó :



Hình 14

*Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là **sin** của góc α , kí hiệu $\sin \alpha$.*

*Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là **côsin** của góc α , kí hiệu $\cos \alpha$.*

*Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là **tang** của góc α , kí hiệu $\operatorname{tg} \alpha$ (hay $\tan \alpha$).*

*Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là **côtang** của góc α , kí hiệu $\operatorname{cotg} \alpha$ (hay $\cot \alpha$).*

Như vậy

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; & \cos \alpha &= \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; & \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}. \end{aligned}$$



Nhận xét. Từ định nghĩa trên, dễ thấy các tỉ số lượng giác của một góc nhọn luôn luôn dương. Hơn nữa, ta có

$$\sin \alpha < 1, \cos \alpha < 1.$$

??

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = \beta$. Hãy viết các tỉ số lượng giác của góc β .

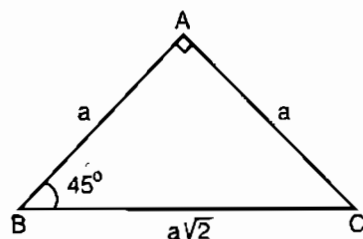
Ví dụ 1. (h.15). Ta có

$$\sin 45^\circ = \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = 1;$$

$$\operatorname{cotg} 45^\circ = \operatorname{cotg} \widehat{B} = \frac{AB}{AC} = 1.$$



Hình 15

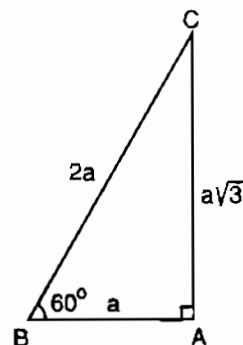
Ví dụ 2. (h.16). Ta có

$$\sin 60^\circ = \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{cotg} 60^\circ = \operatorname{cotg} \widehat{B} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



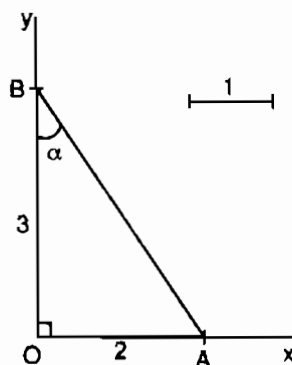
Hình 16

• Như vậy, cho góc nhọn α , ta tính được các tỉ số lượng giác của nó. Ngược lại, cho một trong các tỉ số lượng giác của góc nhọn α , ta có thể dựng được góc đó.

Ví dụ 3. Dựng góc nhọn α , biết $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.

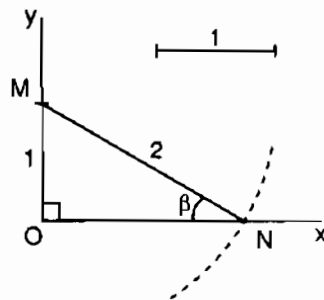
Giải. (h.17) Dựng góc vuông xOy. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị. Trên tia Ox, lấy điểm A sao cho OA = 2; trên tia Oy, lấy điểm B sao cho OB = 3. Góc OBA bằng góc α cần dựng. Thật vậy,

$$\text{ta có } \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \widehat{OBA} = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}.$$



Hình 17

Ví dụ 4. Hình 18 minh hoạ cách dựng góc nhọn β , khi biết $\sin \beta = 0,5$.



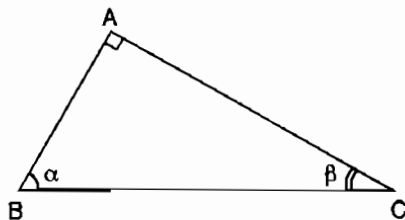
Hình 18

?3 Hãy nêu cách dựng góc nhọn β theo hình 18 và chứng minh cách dựng đó là đúng.

► **Chú ý.** Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin \alpha = \sin \beta$ (hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$, hoặc $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, hoặc $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$) thì $\alpha = \beta$ vì chúng là hai góc tương ứng của hai tam giác vuông đồng dạng.

2. Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau

?4 Cho hình 19. Hãy cho biết tổng số đo của góc α và góc β . Lập các tỷ số lượng giác của góc α và góc β . Trong các tỷ số này, hãy cho biết các cặp tỷ số bằng nhau.



Hình 19

Từ các cặp tỷ số bằng nhau đó, ta rút ra

$$\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta, \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

Vì hai góc phụ nhau bao giờ cũng bằng hai góc nhọn của một tam giác vuông nào đó, nên ta có định lý sau đây về quan hệ giữa các tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

ĐỊNH LÝ

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

Ví dụ 5. Theo ví dụ 1, ta có

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1.$$

Ví dụ 6. Ta có các góc 30° và 60° là hai góc phụ nhau. Do đó, theo ví dụ 2 và theo quan hệ giữa các tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, ta có

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{cotg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

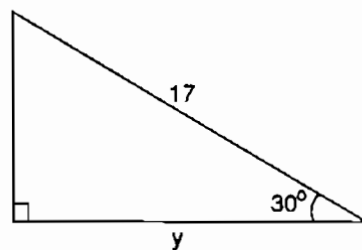
Qua ví dụ 5 và ví dụ 6, ta rút ra bảng tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt như sau :

α Tỉ số lượng giác	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{cotg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 7. Trong hình 20, cạnh y được tính như sau :

$$\text{Ta có } \cos 30^\circ = \frac{y}{17},$$

$$\text{do đó } y = 17 \cos 30^\circ = \frac{17\sqrt{3}}{2} \approx 14,7.$$



Hình 20

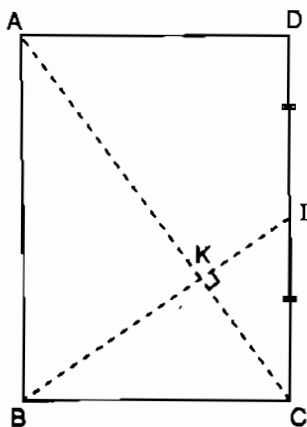
► **Chú ý.** Từ nay khi viết các tỉ số lượng giác của một góc nhọn trong tam giác, ta bỏ kí hiệu " $^\circ$ " đi. Chẳng hạn, viết $\sin A$ thay cho $\sin \hat{A}$, ...



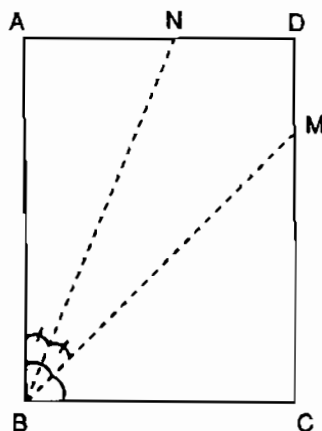
Có thể em chưa biết

Bất ngờ về cỡ giấy A4 (21cm × 29,7cm)

- Tỷ số giữa chiều dài và chiều rộng của tờ giấy A4 xấp xỉ bằng $\sqrt{2}$.
- Giả sử tờ giấy A4 được minh họa trên các hình 21 và 22.
Nếu gấp tờ giấy theo các đường thẳng AC và BI (I là trung điểm của CD) thì ta sẽ có một góc hầu như vuông ! (h.21).
Nếu gấp tờ giấy theo đường phân giác BM của góc ABC, sau đó gấp tiếp theo đường phân giác BN của góc ABM thì điểm M sẽ trùng với điểm A ! (h.22)



Hình 21



Hình 22

Bằng hiểu biết của mình, em có thể giải thích được các điều lí thú này đấy.

Bài tập

10. Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn 34° rồi viết các tỉ số lượng giác của góc 34° .
11. Cho tam giác ABC vuông tại C, trong đó $AC = 0,9\text{m}$, $BC = 1,2\text{m}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.
12. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :

$$\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \cotg 82^\circ, \tg 80^\circ.$$

Luyện tập

13. Dựng góc nhọn α , biết :

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; b) $\cos \alpha = 0,6$; c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; d) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{2}$.

14. Sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác của một góc nhọn để chứng minh rằng : Với góc nhọn α tùy ý, ta có

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$;

b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

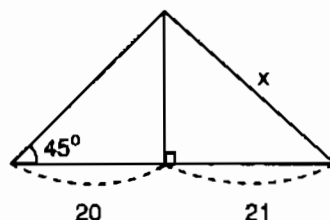
Gợi ý. Sử dụng định lí Py-ta-go.

15. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\cos B = 0,8$, hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C.

Gợi ý. Sử dụng bài tập 14.

16. Cho tam giác vuông có một góc 60° và cạnh huyền có độ dài là 8. Hãy tìm độ dài của cạnh đối diện với góc 60° .

17. Tìm x trong hình 23.



Hình 23

§3. Bảng lượng giác

Dùng bảng lượng giác ta có thể nhanh chóng tìm được giá trị các tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho trước và ngược lại, tìm được số đo của một góc nhọn khi biết giá trị tỉ số lượng giác của góc đó.

Trong bài này, ta giới thiệu cấu tạo và cách dùng bảng lượng giác của V.M. Bra-di-xơ.

1. Cấu tạo của bảng lượng giác

Bảng lượng giác bao gồm bảng VIII, bảng IX và bảng X của cuốn "Bảng số với 4 chữ số thập phân", Nhà xuất bản Giáo dục, tác giả V.M. Bra-di-xơ.

Người ta lập bảng dựa trên tính chất sau đây của các tỉ số lượng giác :

Nếu hai góc nhọn α và β phụ nhau ($\alpha + \beta = 90^\circ$) thì $\sin \alpha = \cos \beta$, $\cos \alpha = \sin \beta$, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$, $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

- Bảng VIII dùng để tìm giá trị sin và cosin của các góc nhọn đồng thời cũng dùng để tìm góc nhọn khi biết sin hoặc cosin của nó. Bảng VIII có cấu tạo như sau : Bảng được chia thành 16 cột và các hàng, trong đó :

Cột 1 và cột 13 ghi các số nguyên độ. Kể từ trên xuống dưới, cột 1 ghi số độ tăng dần từ 0° đến 90° , cột 13 ghi số độ giảm dần từ 90° đến 0° .

Từ cột 2 đến cột 12, hàng 1 và hàng cuối ghi các số phút là bội của 6 từ $0'$ đến $60'$ (kể từ trái sang phải, hàng 1 ghi theo chiều tăng, hàng cuối ghi theo chiều giảm) ; các hàng giữa ghi giá trị sin, cosin của các góc tương ứng.

Ba cột cuối ghi các giá trị dùng để hiệu chỉnh đối với các góc sai khác $1'$, $2'$, $3'$.

- Bảng IX dùng để tìm giá trị tang của các góc từ 0° đến 76° và cotang của các góc từ 14° đến 90° và ngược lại, dùng để tìm góc nhọn khi biết tang hoặc cotang của nó. Bảng IX có cấu tạo tương tự như bảng VIII.

- Bảng X dùng để tìm giá trị tang của các góc từ 76° đến $89^\circ 59'$ và cotang của các góc từ $1'$ đến 14° và ngược lại, dùng để tìm góc nhọn khi biết tang hoặc cotang của nó. Bảng X không có phân hiệu chỉnh.

Nhận xét. Quan sát các bảng nói trên ta thấy : Khi góc α tăng từ 0° đến 90° ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) thì $\sin \alpha$ và $\operatorname{tg} \alpha$ tăng còn $\cos \alpha$ và $\operatorname{cotg} \alpha$ giảm.

Nhận xét này là cơ sở cho việc sử dụng phân hiệu chỉnh của Bảng VIII và Bảng IX.

2. Cách dùng bảng

a) Tìm tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho trước

Khi tìm tỉ số lượng giác của một góc nhọn bằng bảng VIII và bảng IX, ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1. Tra số độ ở cột 1 đối với sin và tang (cột 13 đối với cosin và cotang).

Bước 2. Tra số phút ở hàng 1 đối với sin và tang (hàng cuối đối với cosin và cotang).

Bước 3. Lấy giá trị tại giao của hàng ghi số độ và cột ghi số phút.

Trong trường hợp số phút không là bội của 6 thì lấy cột phút gần nhất với số phút phải xét, số phút chênh lệch còn lại xem ở phần hiệu chỉnh.

Ví dụ 1. Tìm $\sin 46^{\circ}12'$.

Tra Bảng VIII : Số độ tra ở cột 1, số phút tra ở hàng 1. Lấy giá trị tại giao của hàng ghi 46° và cột ghi $12'$ làm phần thập phân (mẫu 1). Vậy $\sin 46^{\circ}12' \approx 0,7218$.

SIN			
A	...	12'	...
...			
46°		7218	
...			
...			

Mẫu 1

Ví dụ 2. Tìm $\cos 33^{\circ}14'$.

Tra Bảng VIII : Số độ tra ở cột 13, số phút tra ở hàng cuối. Tại giao của hàng ghi 33° và cột ghi số phút gần

nhất với $14'$ - đó là cột ghi $12'$, ta thấy 8368. Vậy $\cos 33^{\circ}12' \approx 0,8368$. (mẫu 2).

Ta có

$$\cos 33^{\circ}14' = \cos(33^{\circ}12' + 2').$$

Theo nhận xét ở phần 1, $\cos 33^{\circ}14' < \cos 33^{\circ}12'$, nên giá trị của $\cos 33^{\circ}14'$ được suy ra từ giá trị $\cos 33^{\circ}12'$ bằng cách trừ đi phần hiệu chỉnh tương ứng (đối với

	8368		33°		3	
	↑		.		↑	
			.			
			.			
...	12'	...	A	1'	2'	3'

CÔSIN

Mẫu 2

sin thì cộng thêm). Tại giao của hàng ghi 33° và cột ghi $2'$ (ở phần hiệu chỉnh), ta thấy số 3. Ta dùng số 3 này để hiệu chỉnh chữ số cuối ở số 0,8368 như sau :

$$\begin{aligned}\cos 33^{\circ}14' &\approx 0,8368 - 0,0003 \\ &= 0,8365.\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tìm $\tan 52^{\circ}18'$.

Tra bảng IX : Số độ tra ở cột 1, số phút tra ở hàng 1. Lấy giá trị tại giao của hàng

TANG				
A	0'	...	18'	...
50°	1,1918			
51°				
52°			2938	
53°				
54°				

Mẫu 3

ghi 52° và cột ghi $18'$ làm phần thập phân. Phần nguyên được lấy theo phần nguyên của giá trị gần nhất đã cho trong bảng (mẫu 3). Vậy

$$\operatorname{tg} 52^\circ 18' \approx 1,2938.$$

?1 Sử dụng bảng, tìm $\cotg 47^\circ 24'$.

Ví dụ 4. Tìm $\cotg 8^\circ 32'$.

Sử dụng bảng X, cột cuối, hàng cuối.

Lấy giá trị tại giao của hàng ghi $8^\circ 30'$ với cột ghi $2'$ (mẫu 4). Vậy

$$\cotg 8^\circ 32' \approx 6,665.$$

			⋮
	6,665	←	$8^\circ 30'$
	⋮		⋮
.....	$2'$		A

CÔTANG

Mẫu 4

?2 Sử dụng bảng, tìm $\operatorname{tg} 82^\circ 13'$.

➤ Chú ý

1) Khi sử dụng Bảng VIII hay Bảng IX, đối với những góc có số phút khác bội của 6, ta dùng phần hiệu chỉnh theo nguyên tắc :

– Đối với *sin* và *tang*, góc lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) thì cộng thêm (hoặc trừ đi) phần hiệu chỉnh tương ứng.

– Đối với *côsin* và *côtang* thì ngược lại, góc lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) thì trừ đi (hoặc cộng thêm) phần hiệu chỉnh tương ứng (xem ví dụ 2).

2) Có thể chuyển từ việc tìm $\cos \alpha$ sang tìm $\sin (90^\circ - \alpha)$ và tìm $\cotg \alpha$ sang tìm $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$.

b) Tìm số đo của góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của góc đó

Ví dụ 5. Tìm góc nhọn α (làm tròn đến phút), biết $\sin \alpha = 0,7837$.

Tra Bảng VIII : Tìm số 7837 ở trong bảng, dóng sang cột 1 và hàng 1, ta thấy 7837 nằm ở giao của hàng ghi 51° và cột ghi $36'$ (mẫu 5). Vậy $\alpha \approx 51^\circ 36'$.

SIN			
A	...	$36'$	...
⋮		⋮	
51°	←	7837	
⋮			

Mẫu 5

?3 Sử dụng bảng tìm góc nhọn α , biết $\cotg \alpha = 3,006$.

➤ **Chú ý.** Khi biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn, nói chung, ta tìm được góc nhọn sai khác không đến $6'$. Tuy nhiên, thông thường trong tính toán ta làm tròn đến độ.

Ví dụ 6. Tìm góc nhọn α (làm tròn đến độ), biết $\sin \alpha = 0,4470$.

Tra bảng VIII, ta không tìm thấy số 4470 ở trong bảng. Tuy nhiên, ta tìm thấy hai số gần với 4470 nhất, đó là 4462 và 4478 (mẫu 6). Ta có

$$0,4462 < 0,4470 < 0,4478 \text{ hay}$$

$$\sin 26^{\circ}30' < \sin \alpha < \sin 26^{\circ}36'.$$

Theo nhân xét ở mục 1 thì

$26^{\circ}30' < \alpha < 26^{\circ}36'$. Từ đó suy ra $\alpha \approx 27^{\circ}$.

		SIN		
A	...	30'	36'	...
26°	←	4462	4478	

Mẫu 6

24 Tìm góc nhọn α (làm tròn đến độ), biết $\cos \alpha = 0,5547$.



Bài đọc thêm

TÌM TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ GÓC BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI CASIO fx-220

Ngoài chức năng thực hiện bốn phép toán cộng, trừ, nhân, chia với số thập phân, máy tính CASIO fx-220 (h. 24) còn có nhiều chức năng khác, trong đó có chức năng tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn và tính số đo của góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của nó.

Trong chương trình THCS, ta chỉ học số đo góc là độ, phút, giây nên sau khi bật máy (nhấn phím **AC** hay **ON**) ta chọn kiểu độ (Mode degree) bằng cách nhấn liên tiếp hai phím **MODE** **4**. Khi đó, ở phía trên của màn hình xuất hiện chữ DEG.



Hình 24

Khi tính toán, ta thường lấy kết quả với 4 chữ số thập phân nên ta nhấn liên tiếp ba phím **[MODE]** **[7]** **[4]**. Khi đó, ở phía trên của màn hình xuất hiện chữ FIX.

Trong các ví dụ sau đây, chỉ khi trên màn hình xuất hiện chữ DEG và chữ FIX, ta mới bắt đầu tính toán.

Để nhập độ, phút, giây, ta dùng phím **[° '"]**.

Để hiển thị độ, phút, giây, ta dùng hai phím **[SHIFT]**, **[←]**.

Ví dụ 1. Để hiển thị $14^{\circ}21'$, ta nhấn lần lượt các phím

[1] **[4]** **[° '"]** **[2]** **[1]** **[° '"]** **[SHIFT]** **[←]**.

Khi đó trên màn hình sẽ hiện ra $14^{\circ}21'0''$. Đó là kí hiệu của $14^{\circ}21'$. Khi chỉ cần nạp vào máy mà không cần hiển thị, ta bỏ đi hai phím cuối cùng.

a) Tìm tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho trước

Ta sử dụng các phím **[sin]**, **[cos]**, **[tan]**.

Ví dụ 2. Tìm $\cos 25^{\circ}13'$.

Nhấn lần lượt các phím

[2] **[5]** **[° '"]** **[1]** **[3]** **[° '"]** **[cos]**

Khi đó trên màn hình hiện số 0.9047, nghĩa là $\cos 25^{\circ}13' \approx 0,9047$.

Ví dụ 3. Tính $\cotg 56^{\circ}25'$.

Ta đã biết $\cotg 56^{\circ}25' = \frac{1}{\operatorname{tg} 56^{\circ}25'}$, nên để tìm $\cotg 56^{\circ}25'$ ta lần lượt

nhấn các phím

[5] **[6]** **[° '"]** **[2]** **[5]** **[° '"]** **[tan]** **[SHIFT]** **[1/x]**

Khi đó trên màn hình hiện số 0.6640, nghĩa là $\cotg 56^{\circ}25' \approx 0,6640$.

b) Tìm số đo của góc nhọn khi biết tỉ số lượng giác của góc đó

Nhấn liên tiếp các phím

[SHIFT] **[sin⁻¹]** để tìm α khi biết $\sin \alpha$;

[SHIFT] **[cos⁻¹]** để tìm α khi biết $\cos \alpha$;

[SHIFT] **[tan⁻¹]** để tìm α khi biết $\operatorname{tg} \alpha$.

Ví dụ 4. Tìm góc nhọn x , biết $\sin x = 0,2836$.

Nhấn lần lượt các phím

$\boxed{0} \boxed{.} \boxed{2} \boxed{8} \boxed{3} \boxed{6} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sin^{-1}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\leftarrow}$.

Khi đó trên màn hình xuất hiện $16^{\circ}28'30.66$ nghĩa là $16^{\circ}28'30,66''$.

Làm tròn đến phút, ta lấy $x \approx 16^{\circ}29'$.

Làm tròn đến độ, ta lấy $x \approx 16^{\circ}$.

► Chú ý

1) Nếu phải tìm góc nhọn x khi biết $\cotg x$, ta có thể chuyển thành bài toán tìm góc nhọn x khi biết $\tg x$ vì $\tg x = \frac{1}{\cotg x}$.

Ví dụ 5. Tìm góc nhọn x (làm tròn đến phút), biết rằng $\cotg x = 2,675$.

Nhấn lần lượt các phím

$\boxed{2} \boxed{.} \boxed{6} \boxed{7} \boxed{5} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{1/x} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\tan^{-1}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\leftarrow}$.

Khi đó trên màn hình xuất hiện $20^{\circ}29'50.43$ nghĩa là $20^{\circ}29'50,43''$.

Làm tròn đến phút, ta lấy $x \approx 20^{\circ}30'$.

2) Sau khi tìm xong một tỉ số lượng giác hoặc một góc, ta nhấn phím $\boxed{\text{AC}}$ để chuyển sang phép tính khác.

3) Nếu không phải tính toán nữa, ta nhấn phím $\boxed{\text{OFF}}$ để tắt máy.

4) Ta có thể dùng các máy tính khác có các chức năng tương tự như máy CASIO fx-220, chẳng hạn máy tính SHARP EL-500M,...

Bài tập

18. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm các tỉ số lượng giác sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) :

a) $\sin 40^{\circ}12'$;

b) $\cos 52^{\circ}54'$;

c) $\tg 63^{\circ}36'$;

d) $\cotg 25^{\circ}18'$.

19. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm số đo của góc nhọn x (làm tròn đến phút), biết rằng :

a) $\sin x = 0,2368$;

b) $\cos x = 0,6224$;

c) $\operatorname{tg} x = 2,154$;

d) $\operatorname{cotg} x = 3,251$.

Luyện tập

20. Dùng bảng lượng giác (có sử dụng phần hiệu chỉnh) hoặc máy tính bỏ túi, hãy tìm các tỉ số lượng giác sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) :

a) $\sin 70^{\circ}13'$; b) $\cos 25^{\circ}32'$; c) $\operatorname{tg} 43^{\circ}10'$; d) $\operatorname{cotg} 32^{\circ}15'$.

21. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm góc nhọn x (làm tròn kết quả đến độ), biết rằng :

a) $\sin x = 0,3495$; b) $\cos x = 0,5427$; c) $\operatorname{tg} x = 1,5142$; d) $\operatorname{cotg} x = 3,163$.

22. So sánh

a) $\sin 20^{\circ}$ và $\sin 70^{\circ}$;

b) $\cos 25^{\circ}$ và $\cos 63^{\circ}15'$;

c) $\operatorname{tg} 73^{\circ}20'$ và $\operatorname{tg} 45^{\circ}$;

d) $\operatorname{cotg} 2^{\circ}$ và $\operatorname{cotg} 37^{\circ}40'$.

23. Tính

a) $\frac{\sin 25^{\circ}}{\cos 65^{\circ}}$;

b) $\operatorname{tg} 58^{\circ} - \operatorname{cotg} 32^{\circ}$.

24. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần :

a) $\sin 78^{\circ}$, $\cos 14^{\circ}$, $\sin 47^{\circ}$, $\cos 87^{\circ}$;

b) $\operatorname{tg} 73^{\circ}$, $\operatorname{cotg} 25^{\circ}$, $\operatorname{tg} 62^{\circ}$, $\operatorname{cotg} 38^{\circ}$.

25. So sánh

a) $\operatorname{tg} 25^{\circ}$ và $\sin 25^{\circ}$;

b) $\operatorname{cotg} 32^{\circ}$ và $\cos 32^{\circ}$;

c) $\operatorname{tg} 45^{\circ}$ và $\cos 45^{\circ}$;

d) $\operatorname{cotg} 60^{\circ}$ và $\sin 30^{\circ}$.

§4. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông



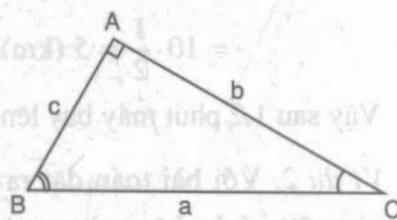
Một chiếc thang dài 3m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc "an toàn" 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng) ?

1. Các hệ thức

Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền a và các cạnh góc vuông b, c (h.25).

?1

Viết các tỉ số lượng giác của góc B và góc C. Từ đó hãy tính mỗi cạnh góc vuông theo :



Hình 25

- Cạnh huyền và các tỉ số lượng giác của góc B và góc C ;
- Cạnh góc vuông còn lại và các tỉ số lượng giác của góc B và góc C.

Từ các kết quả trên, ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÝ

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng :

a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề ;

b) Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.

Như vậy, trong tam giác ABC vuông tại A (h.25), ta có các hệ thức

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C ; \quad b = c \cdot \operatorname{tg} B = c \cdot \operatorname{cotg} C ;$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B ; \quad c = b \cdot \operatorname{tg} C = b \cdot \operatorname{cotg} B.$$

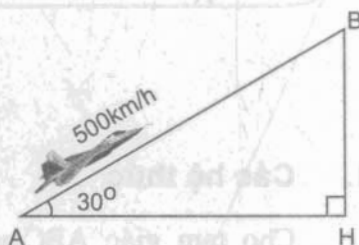
Ví dụ 1. Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° (h. 26). Hỏi sau 1,2 phút máy bay lên cao được bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng ?

Giải. Giả sử trong hình 26, AB là đoạn đường máy bay bay lên trong 1,2 phút thì BH chính là độ cao máy bay đạt được sau 1,2 phút đó.

$$\text{Vì } 1,2 \text{ phút} = \frac{1}{50} \text{ giờ nên } AB = \frac{500}{50} = 10 \text{ (km).}$$

Do đó

$$\begin{aligned} BH &= AB \cdot \sin A \\ &= 10 \cdot \sin 30^\circ \\ &= 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ (km).} \end{aligned}$$



Hình 26

Vậy sau 1,2 phút máy bay lên cao được 5km.

Ví dụ 2. Với bài toán đặt ra trong khung ở đầu §4, chân chiếc thang cần phải đặt cách chân tường một khoảng là

$$3 \cdot \cos 65^\circ \approx 1,27 \text{ (m).}$$

2. Áp dụng giải tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và góc còn lại của nó. Bài toán đặt ra như thế gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".

Lưu ý rằng, trong kết quả của các ví dụ và các bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì ta làm tròn đến độ (với số đo góc) và đến chữ số thập phân thứ ba (với số đo độ dài).

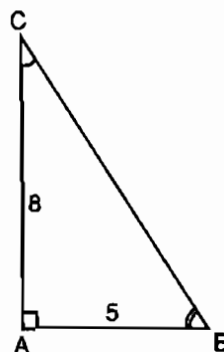
Ví dụ 3. Cho tam giác vuông ABC với các cạnh góc vuông $AB = 5$, $AC = 8$ (h.27). Hãy giải tam giác vuông ABC.

Giải. Theo định lí Py-ta-go, ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} \approx 9,434.$$

Mặt khác

$$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8} = 0,625.$$



Hình 27

Tra bảng hay dùng máy tính bỏ túi, ta tìm được $\hat{C} \approx 32^\circ$, do đó $\hat{B} \approx 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

?2 Trong ví dụ 3, hãy tính cạnh BC mà không áp dụng định lí Py-ta-go.

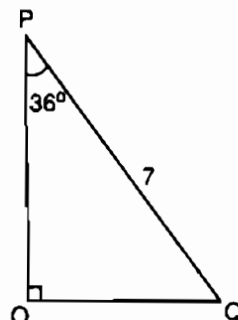
Ví dụ 4. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\hat{P} = 36^\circ$, $PQ = 7$ (h.28). Hãy giải tam giác vuông OPQ.

Giải. Ta có $\hat{Q} = 90^\circ - \hat{P} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$$OP = PQ \cdot \sin Q = 7 \cdot \sin 54^\circ \approx 5,663 ;$$

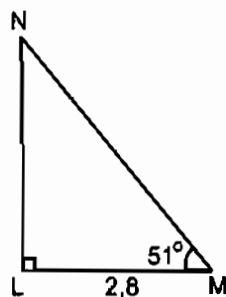
$$OQ = PQ \cdot \sin P = 7 \cdot \sin 36^\circ \approx 4,114.$$



Hình 28

?3 Trong ví dụ 4, hãy tính các cạnh OP, OQ qua cosin của các góc P và Q.

Ví dụ 5. Cho tam giác LMN vuông tại L có $\hat{M} = 51^\circ$, $LM = 2,8$ (h.29). Hãy giải tam giác vuông LMN.



Hình 29

Giải. Ta có

$$\widehat{N} = 90^\circ - \widehat{M} = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ.$$

Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$$LN = LM \cdot \operatorname{tg} M = 2,8 \cdot \operatorname{tg} 51^\circ \approx 3,458;$$

$$MN = \frac{LM}{\cos 51^\circ} \approx \frac{2,8}{0,6293} \approx 4,449.$$

Nhận xét. Cũng như trong ví dụ 3, ở đây ta có thể tính MN bằng cách áp dụng định lí Py-ta-go. Tuy nhiên khi đó, trong việc sử dụng bảng số và máy tính, ta sẽ gặp các thao tác phức tạp hơn. Do đó, khi giải tam giác vuông, trong nhiều trường hợp, nếu đã biết hai cạnh ta nên tìm một góc nhọn trước; sau đó dùng các hệ thức giữa cạnh và góc để tính cạnh thứ ba. Cách này có thể giúp cho việc thực hiện các phép toán bằng bảng số và máy tính đơn giản hơn.

Bài tập

26. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34° và bóng của một tháp trên mặt đất dài 86m (h.30). Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét).

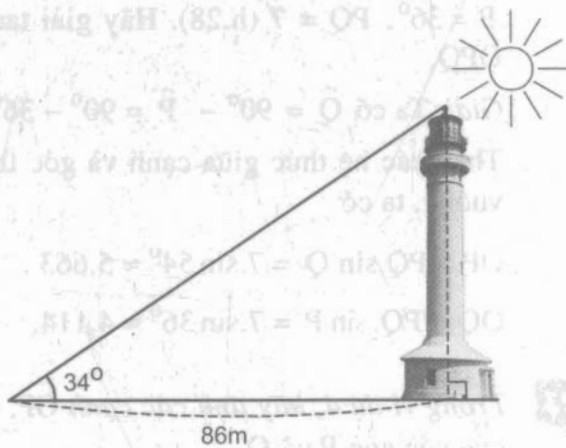
27. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết rằng

a) $b = 10\text{cm}$, $\widehat{C} = 30^\circ$;

b) $c = 10\text{cm}$, $\widehat{C} = 45^\circ$;

c) $a = 20\text{cm}$, $\widehat{B} = 35^\circ$;

d) $c = 21\text{cm}$, $b = 18\text{cm}$.



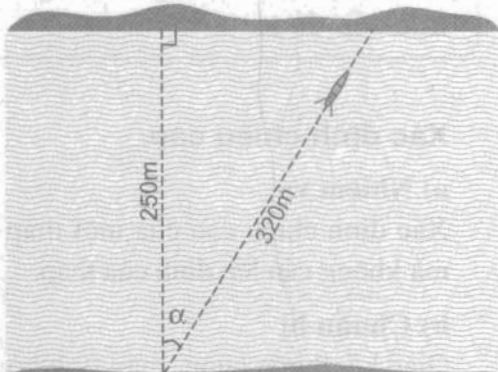
Hình 30

Luyện tập

28. Một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất (góc α trong hình 31).



Hình 31



Hình 32

29. Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một chiếc đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu độ? (góc α trong hình 32).

30. Cho tam giác ABC, trong đó $BC = 11\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC. Hãy tính:

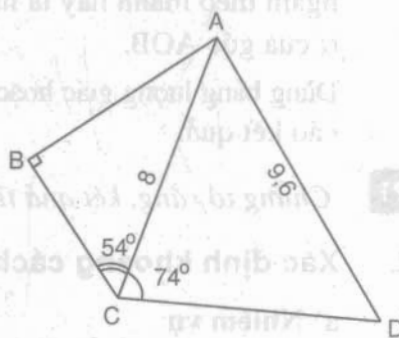
- Đoạn thẳng AN;
- Cạnh AC.

Gợi ý. Kẻ BK vuông góc với AC.

31. Trong hình 33, $AC = 8\text{cm}$, $AD = 9,6\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 54^\circ$ và $\widehat{ACD} = 74^\circ$.

Hãy tính:

- AB;
- $\widehat{ADC}$.



Hình 33

32. Một con thuyền với vận tốc 2km/h vượt qua một khúc sông nước chảy mạnh mất 5 phút. Biết rằng đường đi của con thuyền tạo với bờ một góc 70° . Từ đó đã có thể tính được chiều rộng của khúc sông chưa? Nếu có thể hãy tính kết quả (làm tròn đến mét).

§5. Ứng dụng thực tế các tỉ số lượng giác của góc nhọn. Thực hành ngoài trời

Nhờ tỉ số lượng giác của góc nhọn, có thể tính được chiều cao của tháp và khoảng cách giữa hai điểm mà ta không thể đo trực tiếp được.

1. Xác định chiều cao

a) Nhiệm vụ

Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp.

b) Chuẩn bị

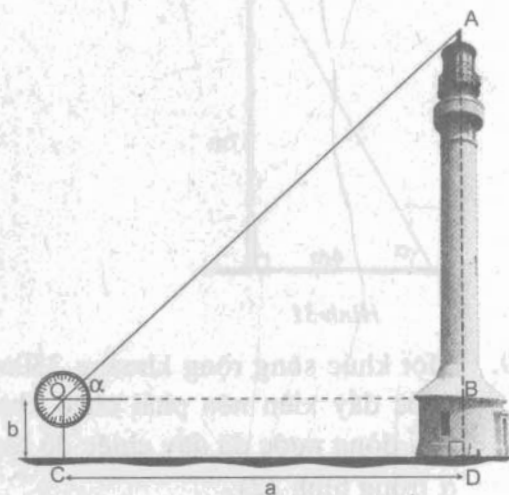
Giác kế, thước cuộn, máy tính bỏ túi (hoặc bảng lượng giác).

c) Hướng dẫn thực hiện (h.34)

Đặt giác kế thẳng đứng cách chân tháp một khoảng a ($CD = a$), giả sử chiều cao của giác kế là b ($OC = b$).

Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh này ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo α của góc AOB .

Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tính $\tan \alpha$. Tính tổng $b + a \cdot \tan \alpha$ và báo kết quả.



Hình 34

?

Chứng tỏ rằng, kết quả tính được ở trên chính là chiều cao AD của tháp.

2. Xác định khoảng cách

a) Nhiệm vụ

Xác định chiều rộng của một khúc sông mà việc đo đạc chỉ tiến hành tại một bờ sông.

b) Chuẩn bị

Ê-ke đặc, giác kế, thước cuộn, máy tính bỏ túi hoặc bảng lượng giác.

c) Hướng dẫn thực hiện (h.35)

Ta coi hai bờ sông song song với nhau.

Chọn một điểm B phía bên kia sông. Lấy một điểm A bên này sông sao cho AB vuông góc với các bờ sông.

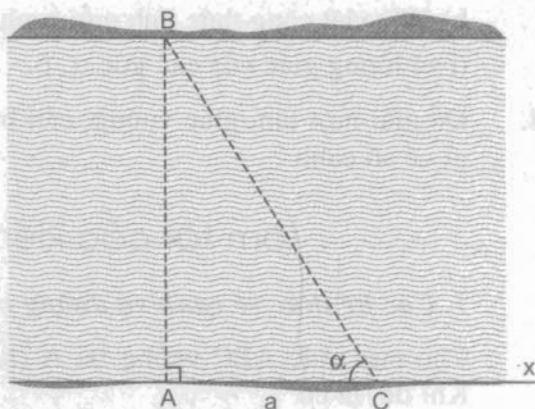
Dùng ê-ke đặc kẻ đường thẳng Ax phía bên này sông sao cho $Ax \perp AB$.

Lấy điểm C trên Ax, giả sử $AC = a$.

Dùng giác kế đo góc ACB, giả sử $\widehat{ACB} = \alpha$.

Dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng lượng giác để tính $\text{tg} \alpha$.

Tính tích $a \cdot \text{tg} \alpha$ và báo kết quả.



Hình 35

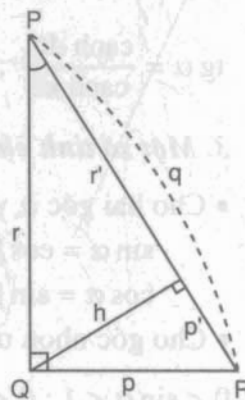
??

Vì sao kết quả trên lại là chiều rộng AB của khúc sông ?

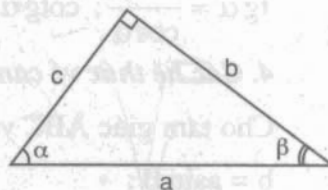
Ôn tập chương I

Câu hỏi

- Cho hình 36. Hãy viết hệ thức giữa :
 - Cạnh huyền, cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền ;
 - Các cạnh góc vuông p, r và đường cao h ;
 - Đường cao h và hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền p', r'.
- Cho hình 37.
 - Hãy viết công thức tính các tỉ số lượng giác của góc α .
 - Hãy viết hệ thức giữa các tỉ số lượng giác của góc α và các tỉ số lượng giác của góc β .
- Xem hình 37.
 - Hãy viết công thức tính các cạnh góc vuông b và c theo cạnh huyền a và tỉ số lượng giác của các góc α, β ;



Hình 36



Hình 37

b) Hãy viết công thức tính mỗi cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông kia và tỉ số lượng giác của các góc α, β .

4. Để giải một tam giác vuông, cần biết ít nhất mấy góc và cạnh ? Có lưu ý gì về số cạnh ?

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

1. Các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A (h.38).

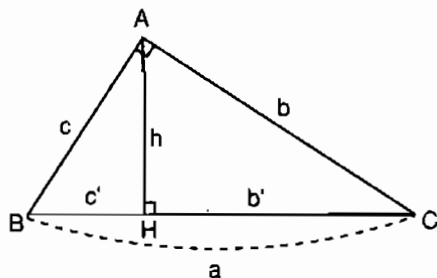
Khi đó, ta có

$$1) b^2 = ab'; \quad c^2 = ac';$$

$$2) h^2 = b'c';$$

$$3) ha = bc;$$

$$4) \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

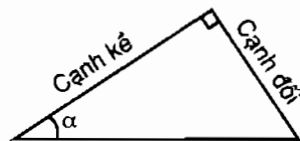


Hình 38

2. Định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn (h.39)

$$\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}.$$



Hình 39

3. Một số tính chất của các tỉ số lượng giác

- Cho hai góc α và β phụ nhau. Khi đó

$$\sin \alpha = \cos \beta; \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta;$$

$$\cos \alpha = \sin \beta; \quad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

- Cho góc nhọn α . Ta có

$$0 < \sin \alpha < 1; \quad 0 < \cos \alpha < 1; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

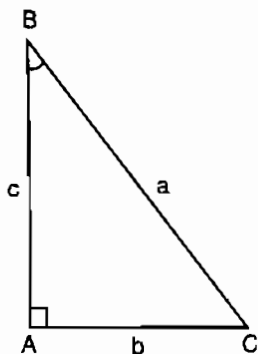
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1.$$

4. Các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A (h.40). Khi đó

$$b = a \sin B;$$

$$c = a \sin C;$$



Hình 40

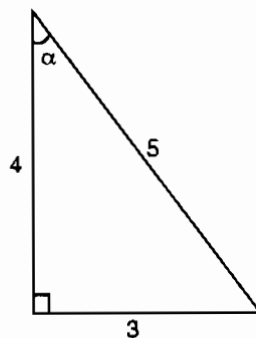
$$\begin{aligned} b &= a \cos C; & c &= a \cos B; \\ b &= ctg B; & c &= btg C; \\ b &= c \cotg C; & c &= b \cotg B. \end{aligned}$$

Bài tập

33. Chọn kết quả đúng trong các kết quả dưới đây :

a) Trong hình 41, $\sin \alpha$ bằng

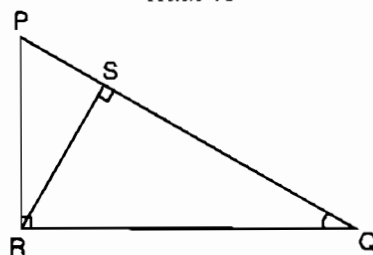
- (A) $\frac{5}{3}$; (B) $\frac{5}{4}$;
(C) $\frac{3}{5}$; (D) $\frac{3}{4}$.



Hình 41

b) Trong hình 42, $\sin Q$ bằng

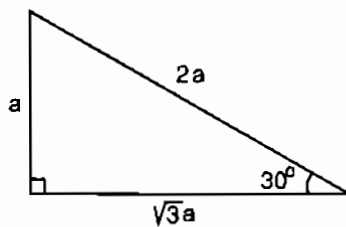
- (A) $\frac{PR}{RS}$; (B) $\frac{PR}{QR}$;
(C) $\frac{PS}{SR}$; (D) $\frac{SR}{QR}$.



Hình 42

c) Trong hình 43, $\cos 30^\circ$ bằng

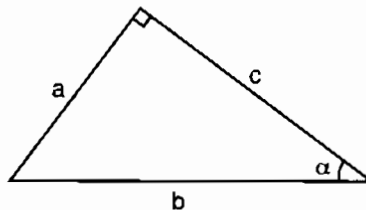
- (A) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; (B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$;
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $2\sqrt{3}a^2$.



Hình 43

34. a) Trong hình 44, hệ thức nào trong các hệ thức sau là đúng ?

- (A) $\sin \alpha = \frac{b}{c}$; (B) $\cotg \alpha = \frac{b}{c}$;



Hình 44

(C) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{c}$; (D) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{a}{c}$.

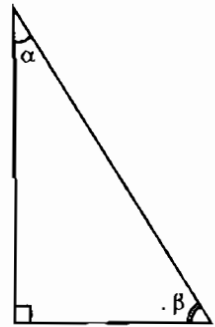
b) Trong hình 45, hệ thức nào trong các hệ thức sau *không đúng* ?

(A) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

(B) $\sin \alpha = \cos \beta$;

(C) $\cos \beta = \sin (90^\circ - \alpha)$;

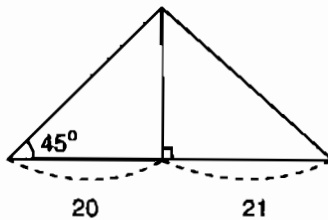
(D) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.



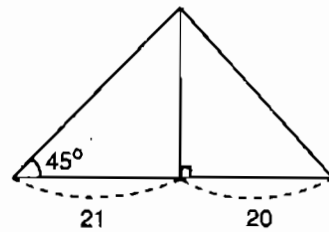
Hình 45

35. Tỉ số giữa hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông bằng 19 : 28. Tìm các góc của nó.

36. Cho tam giác có một góc bằng 45° . Đường cao chia một cạnh kề với góc đó thành các phần 20cm và 21cm. Tính cạnh lớn trong hai cạnh còn lại (lưu ý có hai trường hợp hình 46 và hình 47).



Hình 46



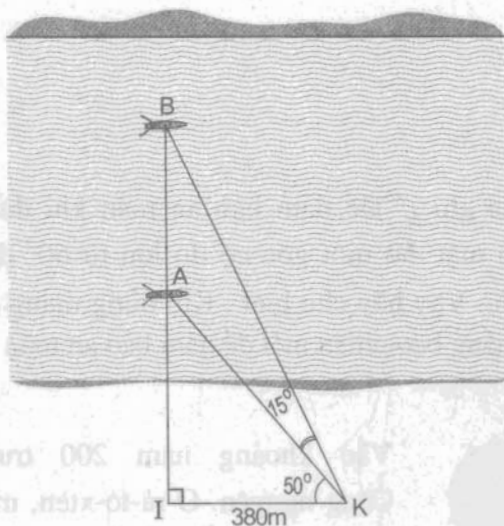
Hình 47

37. Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 4,5\text{cm}$, $BC = 7,5\text{cm}$.

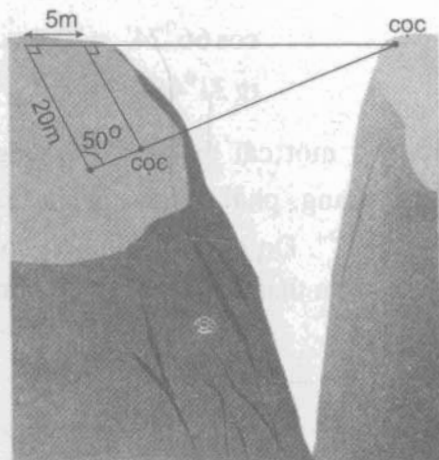
a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A. Tính các góc B, C và đường cao AH của tam giác đó.

b) Hỏi rằng điểm M mà diện tích tam giác MBC bằng diện tích tam giác ABC nằm trên đường nào ?

38. Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh họa như trong hình 48. Tính khoảng cách giữa chúng (làm tròn đến mét).

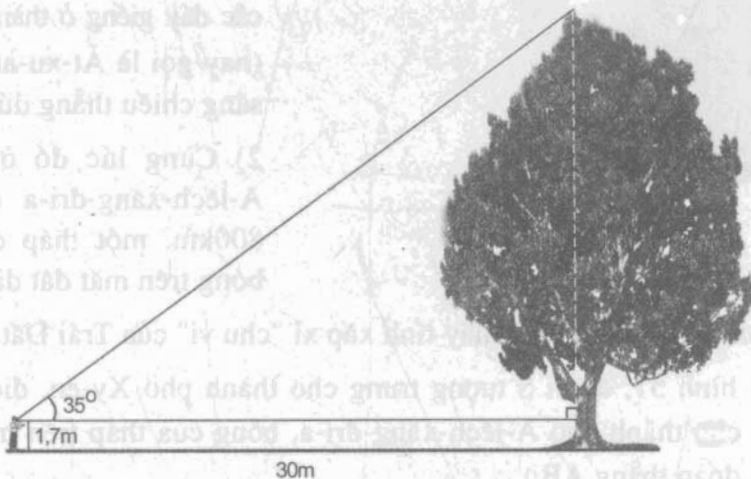


Hình 48



Hình 49

39. Tìm khoảng cách giữa hai cọc để căng dây vượt qua vực trong hình 49 (làm tròn đến mét).
40. Tính chiều cao của cây trong hình 50 (làm tròn đến đêximét).



Hình 50

41. Tam giác ABC vuông tại C có $AC = 2\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $\widehat{BAC} = x$, $\widehat{ABC} = y$.
Dùng các thông tin sau (nếu cần) để tìm $x - y$:

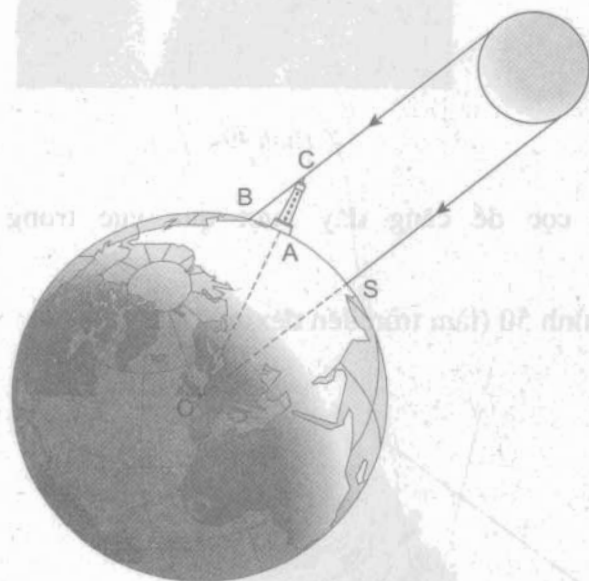
$$\sin 23^\circ 36' \approx 0,4 ;$$

$$\cos 66^\circ 24' \approx 0,4 ;$$

$$\text{tg } 21^\circ 48' \approx 0,4.$$

42. Ở một cái thang dài 3m người ta ghi : "Để đảm bảo an toàn khi dùng thang, phải đặt thang này tạo với mặt đất một góc có độ lớn từ 60° đến 70° ". Đo góc thì khó hơn đo độ dài. Vậy hãy cho biết : Khi dùng thang đó chân thang phải đặt cách tường khoảng bao nhiêu mét để đảm bảo an toàn ?

43. **Đố**



Hình 51

Vào khoảng năm 200 trước Công nguyên, Ô-ra-tô-xten, một nhà toán học và thiên văn học Hi Lạp, đã ước lượng được "chu vi" của Trái Đất (chu vi đường Xích Đạo) nhờ hai quan sát sau :

- 1) Một ngày trong năm, ông ta để ý thấy Mặt Trời chiếu thẳng các đáy giếng ở thành phố Xy-en (nay gọi là Át-xu-an), tức là tia sáng chiếu thẳng đứng.
- 2) Cùng lúc đó ở thành phố A-lếch-xăng-đri-a cách Xy-en 800km, một tháp cao 25m có bóng trên mặt đất dài 3,1m.

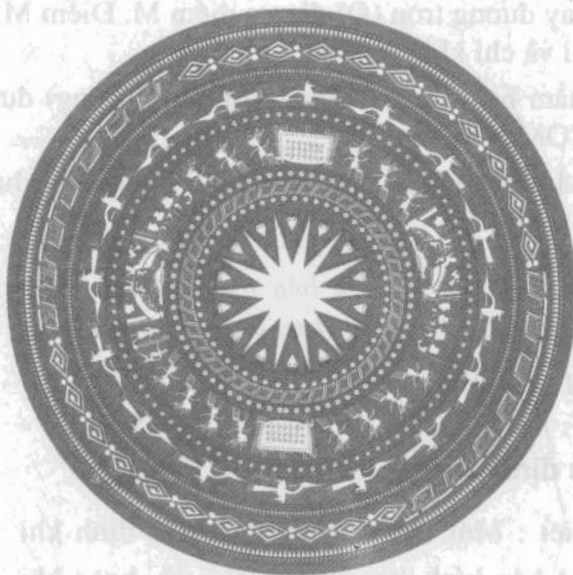
Từ hai quan sát trên, em hãy tính xấp xỉ "chu vi" của Trái Đất.

(Trên hình 51, điểm S tượng trưng cho thành phố Xy-en, điểm A tượng trưng cho thành phố A-lếch-xăng-đri-a, bóng của tháp trên mặt đất được coi là đoạn thẳng AB.)

Chương II – ĐƯỜNG TRÒN



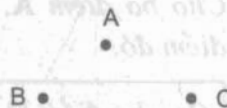
Hình 51



Mặt trống đồng (Văn hoá Đông Sơn).

§1. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

Đặt mũi nhọn của compa ở vị trí nào thì vẽ được đường tròn đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng ?



Trong chương này, ta chỉ xét các điểm nằm trên một mặt phẳng.

1. Nhắc lại về đường tròn

Ở lớp 6, ta đã biết :

Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R (h.52).



Hình 52

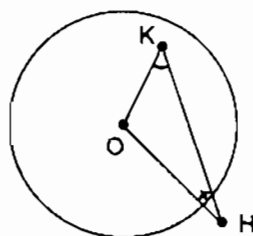
Đường tròn tâm O bán kính R được kí hiệu là $(O; R)$, ta cũng có thể kí hiệu là (O) khi không cần chú ý đến bán kính.

Khi điểm M thuộc đường tròn (O) , ta còn nói : Điểm M nằm trên đường tròn (O) hay đường tròn (O) đi qua điểm M . Điểm M nằm trên đường tròn $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM = R$.

Điểm M nằm bên trong (hay nằm trong, ở trong) đường tròn $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM < R$.

Điểm M nằm bên ngoài (hay nằm ngoài, ở ngoài) đường tròn $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM > R$.

- ?1** Trên hình 53, điểm H nằm bên ngoài đường tròn (O) , điểm K nằm bên trong đường tròn (O) . Hãy so sánh $\widehat{OKH}$ và $\widehat{OHK}$.



Hình 53

2. Cách xác định đường tròn

- Ta đã biết : Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính của đường tròn đó, hoặc khi biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn đó.

- ?2** Cho hai điểm A và B .

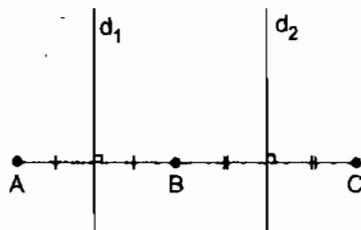
- Hãy vẽ một đường tròn đi qua hai điểm đó.
- Có bao nhiêu đường tròn như vậy ? Tâm của chúng nằm trên đường nào ?

- ?3** Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Hãy vẽ đường tròn đi qua ba điểm đó.

Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

► **Chú ý.** Không vẽ được đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng.

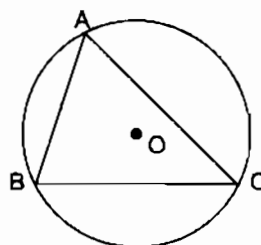
Thật vậy, giả sử có đường tròn (O) đi qua ba điểm thẳng hàng A, B, C (h.54) thì tâm O là giao điểm của đường trung trực d_1 của AB (vì $OA = OB$) và đường trung trực



Hình 54

d_2 của BC (vì $OB = OC$). Do $d_1 \parallel d_2$ nên không tồn tại giao điểm của d_1 và d_2 , mâu thuẫn.

• Ở lớp 7, ta đã biết : Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC gọi là *đường tròn ngoại tiếp* tam giác ABC (h.55). Khi đó tam giác ABC gọi là *tam giác nội tiếp* đường tròn.

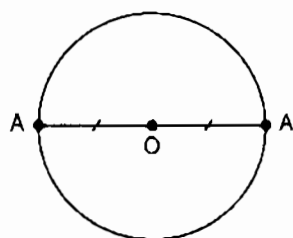


Hình 55

3. Tâm đối xứng

?4 Cho đường tròn (O), A là một điểm bất kì thuộc đường tròn. Vẽ A' đối xứng với A qua điểm O (h.56). Chứng minh rằng điểm A' cũng thuộc đường tròn (O).

Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

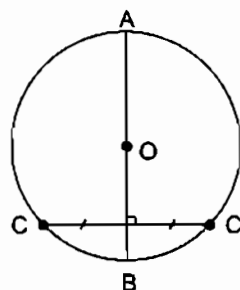


Hình 56

4. Trục đối xứng

?5 Cho đường tròn (O), AB là một đường kính bất kì và C là một điểm thuộc đường tròn. Vẽ C' đối xứng với C qua AB (h.57). Chứng minh rằng điểm C' cũng thuộc đường tròn (O).

Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.



Hình 57

Bài tập

1. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 12\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

2. Hãy nối mỗi ô ở cột trái với một ô ở cột phải để được khẳng định đúng :

(1) Nếu tam giác có ba góc nhọn	(4) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó nằm bên ngoài tam giác.
(2) Nếu tam giác có góc vuông	(5) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó nằm bên trong tam giác.
(3) Nếu tam giác có góc tù	(6) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là trung điểm của cạnh lớn nhất.
	(7) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là trung điểm của cạnh nhỏ nhất.

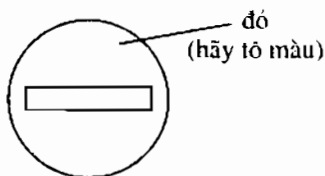
3. Chứng minh các định lí sau :

- a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.
b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

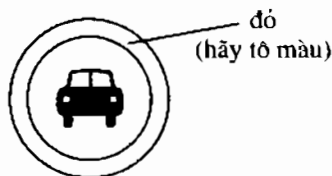
4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy xác định vị trí của mỗi điểm $A(-1; -1)$, $B(-1; -2)$, $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ đối với đường tròn tâm O bán kính 2.
5. **Đố.** Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy tìm lại tâm của hình tròn đó.

Luyện tập

6. Trong các biển báo giao thông sau, biển nào có tâm đối xứng, biển nào có trục đối xứng ?
a) Biển cấm đi ngược chiều (h.58) ;
b) Biển cấm ô tô (h.59).



Hình 58



Hình 59

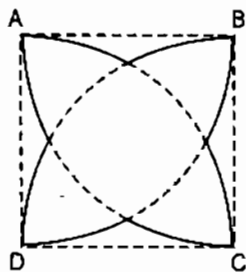
7. Hãy nối mỗi ô ở cột trái với một ô ở cột phải để được khẳng định đúng :

(1) Tập hợp các điểm có khoảng cách đến điểm A cố định bằng 2cm	(4) là đường tròn tâm A bán kính 2cm.
(2) Đường tròn tâm A bán kính 2cm gồm tất cả những điểm	(5) có khoảng cách đến điểm A nhỏ hơn hoặc bằng 2cm.
(3) Hình tròn tâm A bán kính 2cm gồm tất cả những điểm	(6) có khoảng cách đến điểm A bằng 2cm.
	(7) có khoảng cách đến điểm A lớn hơn 2cm.

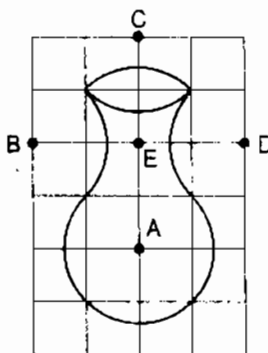
8. Cho góc nhọn $\angle xAy$ và hai điểm B, C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) đi qua B và C sao cho tâm O nằm trên tia Ay.

9. **Đố**

a) *Vẽ hình hoa bốn cánh.* Hình hoa bốn cánh trên hình 60 được tạo bởi các cung có tâm A, B, C, D (trong đó A, B, C, D là các đỉnh của một hình vuông và tâm của cung là tâm của đường tròn chứa cung đó). Hãy vẽ lại hình 60 vào vở.



Hình 60



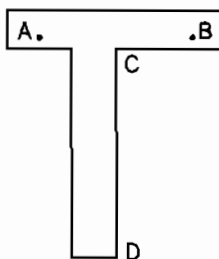
Hình 61

b) *Vẽ lọ hoa.* Chiếc lọ hoa trên hình 61 được vẽ trên giấy kẻ ô vuông bởi năm cung có tâm A, B, C, D, E. Hãy vẽ lại hình 61 vào giấy kẻ ô vuông.

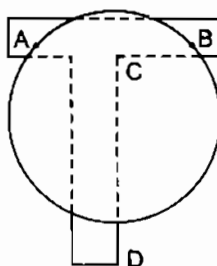


Có thể em chưa biết

Hình 62 vẽ một dụng cụ tìm tâm đường tròn, đó là một tấm bìa cứng hình chữ T có hai đỉnh A, B và mép bìa CD là đường trung trực của AB.



Hình 62



Hình 63

Để tìm tâm của một nắp hộp tròn, ta đặt mép của nắp hộp chạm vào A và B rồi vạch theo CD ta được một đường thẳng đi qua tâm của nắp hộp (h.63). Xoay nắp hộp và làm tương tự, ta được một đường thẳng nữa đi qua tâm của nắp hộp. Giao điểm của hai đường thẳng vừa kẻ là tâm của nắp hộp.

§2. Đường kính và dây của đường tròn

Trong các dây của đường tròn tâm O bán kính R, dây lớn nhất có độ dài bằng bao nhiêu ?

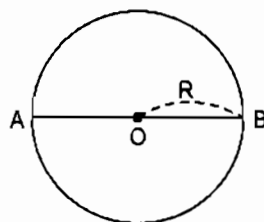
1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Bài toán. Gọi AB là một dây bất kì của đường tròn (O ; R). Chứng minh rằng $AB \leq 2R$.

Giải

Trường hợp dây AB là đường kính (h.64) : Ta có

$$AB = 2R.$$



Hình 64

Trường hợp dây AB không là đường kính (h.65) :
Xét tam giác AOB, ta có

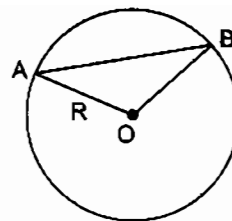
$$AB < AO + OB = R + R = 2R.$$

Vậy ta luôn có $AB \leq 2R$.

Kết quả của bài toán trên được phát biểu thành định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.



Hình 65

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

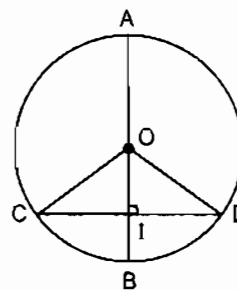
ĐỊNH LÍ 2

Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

Chứng minh. Xét đường tròn (O) có đường kính AB vuông góc với dây CD.

Trường hợp CD là đường kính : Hiển nhiên AB đi qua trung điểm O của CD.

Trường hợp CD không là đường kính (h.66) :
Gọi I là giao điểm của AB và CD. Tam giác OCD có $OC = OD$ (bán kính) nên nó là tam giác cân tại O, OI là đường cao nên cũng là đường trung tuyến, do đó $IC = ID$.



Hình 66

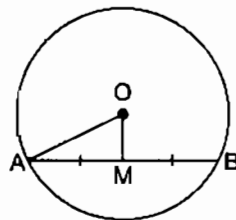
?1 Hãy đưa ra một ví dụ để chứng tỏ rằng đường kính đi qua trung điểm của một dây có thể không vuông góc với dây ấy.

Ta chứng minh được định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 3

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

- 22** Cho hình 67. Hãy tính độ dài dây AB, biết $OA = 13\text{cm}$, $AM = MB$, $OM = 5\text{cm}$.



Hình 67

Bài tập

10. Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Chứng minh rằng :
 a) Bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.
 b) $DE < BC$.
11. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng $CH = DK$.
 Gợi ý. Kẻ OM vuông góc với CD.

§3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Biết khoảng cách từ tâm của đường tròn đến hai dây, có thể so sánh được độ dài của hai dây đó.

1. Bài toán

Cho AB và CD là hai dây (khác đường kính) của đường tròn (O ; R). Gọi OH, OK theo thứ tự là các khoảng cách từ O đến AB, CD. Chứng minh rằng

$$OH^2 + HB^2 = OK^2 + KD^2.$$

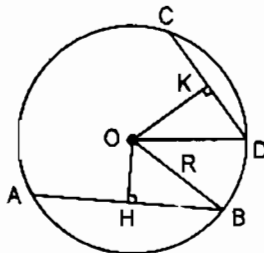
Giải (h.68)

Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông OHB và OKD, ta có :

$$OH^2 + HB^2 = OB^2 = R^2, \quad (1)$$

$$OK^2 + KD^2 = OD^2 = R^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OH^2 + HB^2 = OK^2 + KD^2$.



Hình 68

➤ **Chú ý.** Kết luận của bài toán trên vẫn đúng nếu một dây là đường kính hoặc hai dây là đường kính.

2. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

?1 Hãy sử dụng kết quả của bài toán ở mục 1 để chứng minh rằng :

a) Nếu $AB = CD$ thì $OH = OK$.

b) Nếu $OH = OK$ thì $AB = CD$.

Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

Trong một đường tròn :

a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

?2 Hãy sử dụng kết quả của bài toán ở mục 1 để so sánh các độ dài:

a) OH và OK , nếu biết $AB > CD$.

b) AB và CD , nếu biết $OH < OK$.

Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

Trong hai dây của một đường tròn :

a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

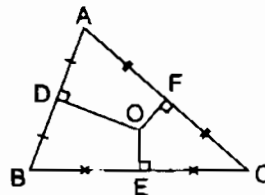
b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

?3 Cho tam giác ABC , O là giao điểm của các đường trung trực của tam giác ; D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, AC . Cho biết $OD > OE, OE = OF$ (h.69).

Hãy so sánh các độ dài :

a) BC và AC ;

b) AB và AC .



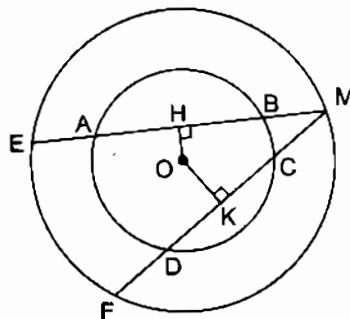
Hình 69

Bài tập

- 12.** Cho đường tròn tâm O bán kính 5cm , dây AB bằng 8cm .
- Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .
 - Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1\text{cm}$. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB . Chứng minh rằng $CD = AB$.
- 13.** Cho đường tròn (O) có các dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại điểm E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng :
- $EH = EK$;
 - $EA = EC$.

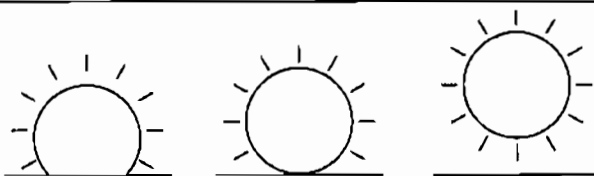
Luyện tập

- 14.** Cho đường tròn tâm O bán kính 25cm , dây AB bằng 40cm . Vẽ dây CD song song với AB và có khoảng cách đến AB bằng 22cm . Tính độ dài dây CD .
- 15.** Cho hình 70 trong đó hai đường tròn cùng có tâm là O . Cho biết $AB > CD$. Hãy so sánh các độ dài :
- OH và OK ;
 - ME và MF ;
 - MH và MK .
- 16.** Cho đường tròn (O) , điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại A . Vẽ dây EF bất kì đi qua A và không vuông góc với OA . Hãy so sánh độ dài hai dây BC và EF .



Hình 70

§4. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn



Các vị trí của Mặt Trời so với đường chân trời cho ta hình ảnh ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

Xét đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng a . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng a , khi đó OH là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a .

1. Ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

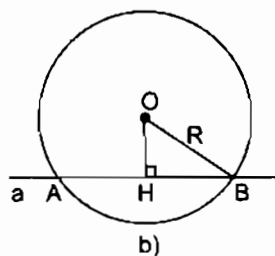
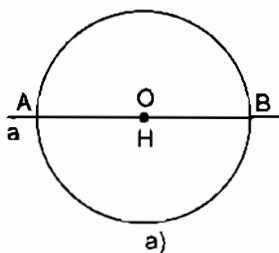
?1 Vì sao một đường thẳng và một đường tròn không thể có nhiều hơn hai điểm chung?

Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và đường tròn mà ta có các vị trí tương đối của chúng.

a) Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

Khi đường thẳng a và đường tròn (O) có hai điểm chung A và B (h.71), ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) *cắt nhau*. Đường thẳng a còn gọi là *cát tuyến* của đường tròn (O) .

Khi đó $OH < R$ và $HA = HB = \sqrt{R^2 - OH^2}$.



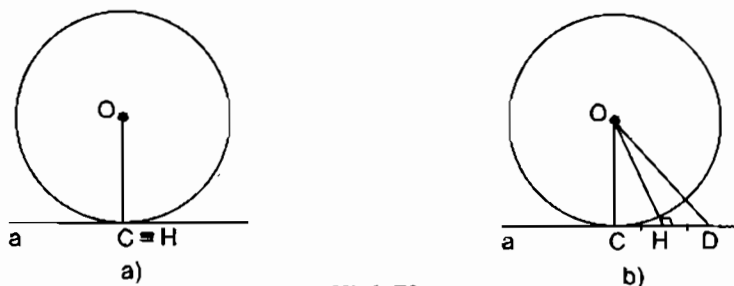
Hình 71

22 Hãy chứng minh khẳng định trên.

b) Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

Khi đường thẳng a và đường tròn (O) chỉ có một điểm chung C , ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) *tiếp xúc nhau*. Ta còn nói đường thẳng a là *tiếp tuyến* của đường tròn (O) . Điểm C gọi là *tiếp điểm*.

Khi đó H trùng với C , $OC \perp a$ và $OH = R$ (h.72a).



Hình 72

Thật vậy, giả sử H không trùng với C , lấy điểm D thuộc đường thẳng a sao cho H là trung điểm của CD (h.72b). Khi đó C không trùng với D . Vì OH là đường trung trực của CD nên $OC = OD$. Ta lại có $OC = R$ nên $OD = R$.

Như vậy, ngoài điểm C ta còn có điểm D cũng là điểm chung của đường thẳng a và đường tròn (O) , điều này mâu thuẫn với giả thiết là đường thẳng a và đường tròn (O) chỉ có một điểm chung.

Vậy H phải trùng với C . Điều đó chứng tỏ rằng $OC \perp a$ và $OH = R$.

Kết quả trên còn được phát biểu thành định lí sau đây.

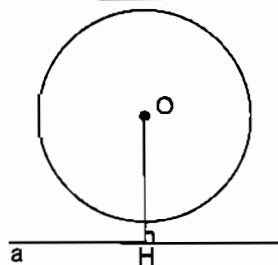
ĐỊNH LÍ

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

c) Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

Khi đường thẳng a và đường tròn (O) không có điểm chung (h.73), ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) *không giao nhau*.

Ta chứng minh được rằng $OH > R$.



Hình 73

2. Hệ thức giữa khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính của đường tròn

Đặt $OH = d$, ta có các kết luận sau :

Nếu đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau thì $d < R$.

Nếu đường thẳng a và đường tròn (O) tiếp xúc nhau thì $d = R$.

Nếu đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau thì $d > R$.

Đảo lại, ta cũng chứng minh được :

Nếu $d < R$ thì đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau.

Nếu $d = R$ thì đường thẳng a và đường tròn (O) tiếp xúc nhau.

Nếu $d > R$ thì đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau.

Ta có bảng tóm tắt sau :

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

23 Cho đường thẳng a và một điểm O cách a là 3cm. Vẽ đường tròn tâm O bán kính 5cm.

a) Đường thẳng a có vị trí như thế nào đối với đường tròn (O) ? Vì sao ?

b) Gọi B và C là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn (O) . Tính độ dài BC .

Bài tập

17. Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng) :

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5cm	3cm	...
6cm	...	Tiếp xúc nhau
4cm	7cm	...

18. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(3; 4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(A; 3)$ và các trục toạ độ.
19. Cho đường thẳng xy. Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm và tiếp xúc với đường thẳng xy nằm trên đường nào ?
20. Cho đường tròn tâm O bán kính 6cm và một điểm A cách O là 10cm. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB.

§5. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Làm thế nào để nhận biết một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn ?

1. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Ở §4, ta đã biết những dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn :

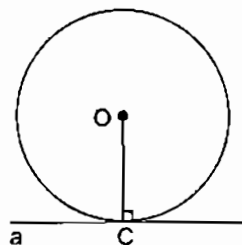
- a) Nếu một đường thẳng và một đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.
- b) Nếu khoảng cách từ tâm của một đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

Dấu hiệu nhận biết b) còn được phát biểu thành định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Trên hình 74, đường thẳng a đi qua điểm C của đường tròn (O) và vuông góc với bán kính OC nên đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Hình 74

?

Cho tam giác ABC, đường cao AH. Chứng minh rằng đường thẳng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$.

2. Áp dụng

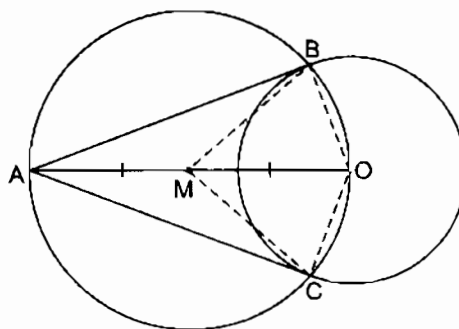
Bài toán. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), hãy dựng tiếp tuyến của đường tròn.

Cách dựng. (h.75)

Dựng M là trung điểm của AO.

Dựng đường tròn có tâm M bán kính MO, cắt đường tròn (O) tại B và C.

Kẻ các đường thẳng AB và AC. Ta được các tiếp tuyến cần dựng.

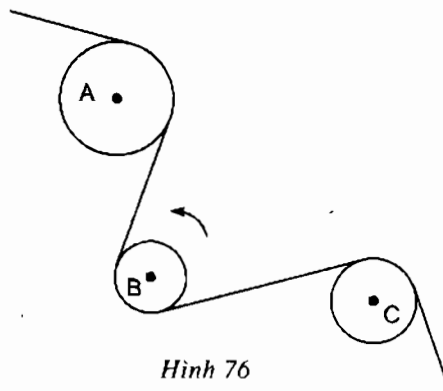


Hình 75

22 Hãy chứng minh cách dựng trên là đúng.

Bài tập

21. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Vẽ đường tròn (B : BA). Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn.
22. Cho đường thẳng d, điểm A nằm trên đường thẳng d, điểm B nằm ngoài đường thẳng d. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và tiếp xúc với đường thẳng d tại A.
23. **Đố.** Dây cua-roa trên hình 76 có những phần là tiếp tuyến của các đường tròn tâm A, B, C. Chiều quay của đường tròn tâm B ngược chiều quay của kim đồng hồ. Tìm chiều quay của đường tròn tâm A và đường tròn tâm C (cùng chiều quay hay ngược chiều quay của kim đồng hồ).



Hình 76

Luyện tập

24. Cho đường tròn (O), dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ở điểm C.

- a) Chứng minh rằng CB là tiếp tuyến của đường tròn.
 b) Cho bán kính của đường tròn bằng 15cm, $AB = 24\text{cm}$. Tính độ dài OC.
25. Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.
- a) Tứ giác OCAB là hình gì ? Vì sao ?
 b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, nó cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

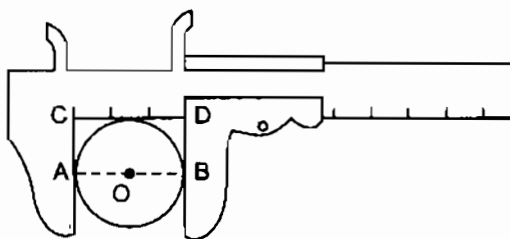


Có thể em chưa biết

Thước đo đường kính hình tròn

Hình 77 là một thước cặp (pan-me) dùng để đo đường kính của một vật hình tròn.

Các đường thẳng AC, BD, CD tiếp xúc với đường tròn. Gọi O là tâm của đường tròn. Các góc ACD, CDB, OAC, OBD đều là góc vuông nên ba điểm A, O, B thẳng hàng. Độ dài CD cho ta đường kính của hình tròn.



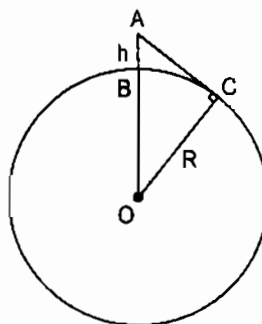
Hình 77

Tính tầm nhìn xa tối đa

Một người quan sát đặt mắt ở vị trí A có độ cao cách mặt nước biển là $AB = 5\text{m}$. Tầm nhìn xa tối đa là đoạn thẳng AC (với C là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ qua A, xem hình 78). Cho biết bán kính Trái Đất là $OB = OC \approx 6400\text{km}$, ta tính được độ dài AC.

Cách 1. Theo định lý Py-ta-go :

$$\begin{aligned} AC^2 &= OA^2 - OC^2 \\ &\approx (6400,005)^2 - 6400^2 \\ &= 40960064,000025 - 40960000 \\ &= 64,000025 \\ AC &\approx 8 \text{ (km)}. \end{aligned}$$



Hình 78

Cách 2. Đặt $AB = h$, $OB = OC = R$, ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= OA^2 - OC^2 = (R + h)^2 - R^2 \\ &= R^2 + 2Rh + h^2 - R^2 = 2Rh + h^2. \end{aligned}$$

Như vậy $AC^2 = 2Rh + h^2$.

Vì chiều cao h rất nhỏ so với bán kính R của Trái Đất nên $AC^2 \approx 2Rh$, do đó

$$AC \approx \sqrt{2Rh} = 80\sqrt{2h}.$$

Với $AB = 5\text{m} = 0,005\text{km}$, ta có

$$AC \approx 80\sqrt{2 \cdot 0,005} = 80\sqrt{0,01} = 80 \cdot 0,1 = 8 \text{ (km)}.$$

► **Chú ý.** Nếu vị trí quan sát có độ cao h (km) so với mặt nước biển thì tầm nhìn xa tối đa d (km) có thể tính bởi công thức gần đúng :

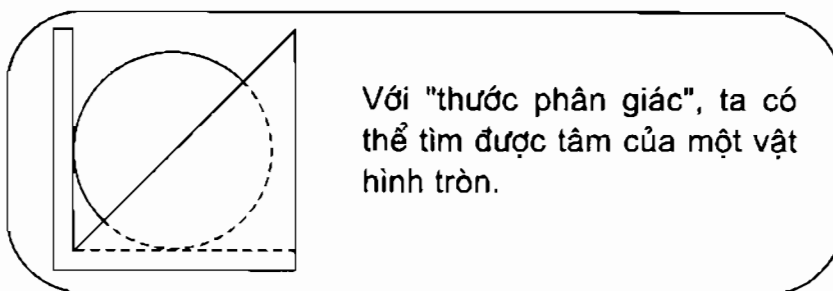
$$d \approx 80\sqrt{2h}.$$

Với $h = 20\text{m}$, ta có $d \approx 80\sqrt{2 \cdot 0,02} = 80 \cdot 0,2 = 16 \text{ (km)}$.

Với $h = 80\text{m}$, ta có $d \approx 80\sqrt{2 \cdot 0,08} = 80 \cdot 0,4 = 32 \text{ (km)}$.

Với $h = 125\text{m}$, ta có $d \approx 80\sqrt{2 \cdot 0,125} = 80 \cdot 0,5 = 40 \text{ (km)}$.

§6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

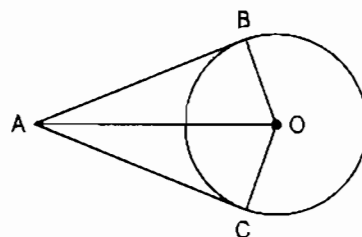


1. Định lý về hai tiếp tuyến cắt nhau

?

Cho hình 79 trong đó AB , AC theo thứ tự là các tiếp tuyến tại B , tại C của đường tròn (O) . Hãy kẻ tên một vài đoạn thẳng bằng nhau, một vài góc bằng nhau trong hình.

Ta gọi góc tạo bởi hai tiếp tuyến AB và AC là góc BAC , góc tạo bởi hai bán kính OB và OC là góc BOC .



Hình 79

ĐỊNH LÝ

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

Chứng minh. Gọi BA, CA theo thứ tự là các tiếp tuyến tại B, tại C của đường tròn (O) (h.79). Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có $AB \perp OB$, $AC \perp OC$.

Hai tam giác vuông AOB và AOC có

$$OB = OC,$$

OA là cạnh chung

nên $\triangle AOB = \triangle AOC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông). Suy ra :

$$AB = AC.$$

$\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$ nên AO là tia phân giác của góc BAC.

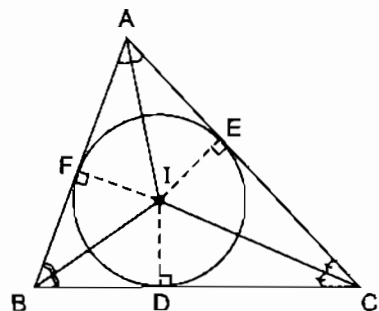
$\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ nên OA là tia phân giác của góc BOC.

?2 Hãy nêu cách tìm tâm của một miếng gỗ hình tròn bằng "thước phân giác" (xem hình vẽ trong khung ở đầu §6).

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

?3 Cho tam giác ABC. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác các góc trong của tam giác ; D, E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ I đến các cạnh BC, AC, AB (h.80). Chứng minh rằng ba điểm D, E, F nằm trên cùng một đường tròn tâm I.

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp tam giác*, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp đường tròn*.

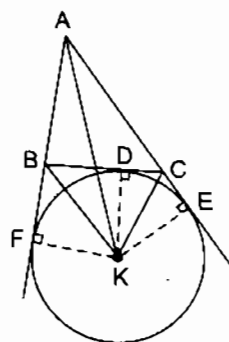


Hình 80

Trên hình 80, đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong của tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

24 Cho tam giác ABC, K là giao điểm các đường phân giác của hai góc ngoài tại B và C ; D, E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ K đến các đường thẳng BC, AC, AB (h.81). Chứng minh rằng ba điểm D, E, F nằm trên cùng một đường tròn có tâm K.



Hình 81

Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là *đường tròn bàng tiếp tam giác*. Trên hình 81 ta có đường tròn (K) bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC.

Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác góc ngoài tại B (hoặc C). Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.

Bài tập

26. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).
 - a) Chứng minh rằng OA vuông góc với BC.
 - b) Vẽ đường kính CD. Chứng minh rằng BD song song với AO.
 - c) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC ; biết $OB = 2\text{cm}$, $OA = 4\text{cm}$.
27. Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), nó cắt các tiếp tuyến AB và AC theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng chu vi tam giác ADE bằng $2AB$.

28. Cho góc xAy khác góc bẹt. Tâm của các đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của góc xAy nằm trên đường nào ?
29. Cho góc xAy khác góc bẹt, điểm B thuộc tia Ax . Hãy dựng đường tròn (O) tiếp xúc với Ax tại B và tiếp xúc với Ay .

Luyện tập

30. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB (đường kính của một đường tròn chia đường tròn đó thành hai nửa đường tròn). Gọi Ax , By là các tia vuông góc với AB (Ax , By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Ax và By theo thứ tự ở C và D . Chứng minh rằng :

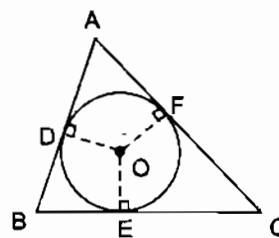
- $\widehat{COD} = 90^\circ$.
- $CD = AC + BD$.
- Tích $AC \cdot BD$ không đổi khi điểm M di chuyển trên nửa đường tròn.

31. Trên hình 82, tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O) .

- Chứng minh rằng :

$$2AD = AB + AC - BC.$$

- Tìm các hệ thức tương tự như hệ thức ở câu a).



Hình 82

32. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn bán kính 1cm . Diện tích của tam giác ABC bằng :

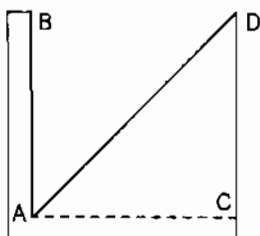
- | | |
|--|------------------------------|
| (A) 6cm^2 ; | (B) $\sqrt{3}\text{cm}^2$; |
| (C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$; | (D) $3\sqrt{3}\text{cm}^2$. |

Hãy chọn câu trả lời đúng.

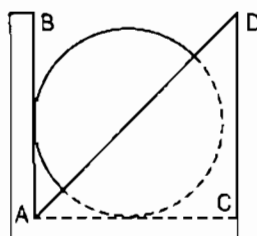


Có thể em chưa biết

Hình 83 minh họa "thước phân giác". Thước gồm hai thanh gỗ ghép lại thành góc vuông BAC, hai thanh gỗ này được đóng lên một tấm gỗ hình tam giác vuông, trong đó AD là tia phân giác của góc BAC.



Hình 83



Hình 84

Để tìm tâm của một hình tròn, ta đặt hình tròn đó tiếp xúc với hai cạnh AB và AC (h.84). Vạch theo AD ta được một đường thẳng đi qua tâm của hình tròn. Xoay hình tròn và làm tương tự, ta được một đường thẳng nữa đi qua tâm của hình tròn. Giao điểm của hai đường vừa kẻ là tâm của hình tròn.

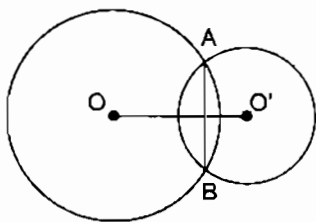
§7. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Hai đường tròn có thể có bao nhiêu điểm chung ?

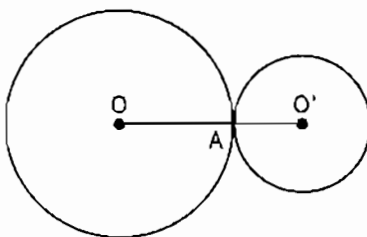
1. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn

? Ta gọi hai đường tròn không trùng nhau là hai đường tròn phân biệt. Vì sao hai đường tròn phân biệt không thể có quá hai điểm chung ?

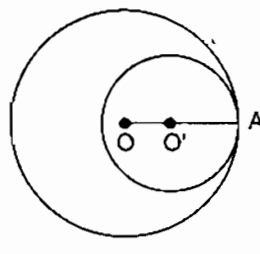
- Hai đường tròn có hai điểm chung (h.85) được gọi là hai đường tròn *cắt nhau*. Hai điểm chung đó gọi là hai *giao điểm*. Đoạn thẳng nối hai điểm đó gọi là *dây chung*.



Hình 85



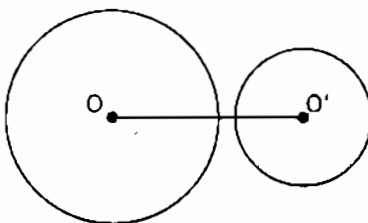
a)



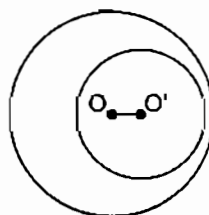
b)

Hình 86

- Hai đường tròn chỉ có một điểm chung (h.86) được gọi là hai đường tròn *tiếp xúc nhau*. Điểm chung đó gọi là *tiếp điểm*.
- Hai đường tròn không có điểm chung (h.87) được gọi là hai đường tròn *không giao nhau*.



a)



b)

Hình 87

2. Tính chất đường nối tâm

Cho hai đường tròn (O) và (O') có tâm không trùng nhau. Đường thẳng OO' gọi là *đường nối tâm*, đoạn thẳng OO' gọi là *đoạn nối tâm*.

Do đường kính là trục đối xứng của mỗi đường tròn nên đường nối tâm là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.

?

a) Quan sát hình 85, chứng minh rằng OO' là đường trung trực của AB.

b) Quan sát hình 86, hãy dự đoán về vị trí của điểm A đối với đường nối tâm OO'.

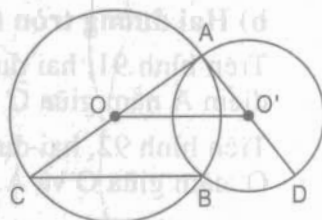
Ta chứng minh được định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

- a) Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức là đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.
b) Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

33 Cho hình 88.

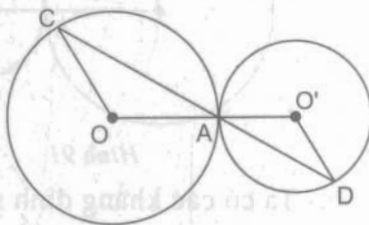
- a) Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O') .
b) Chứng minh rằng $BC \parallel OO'$ và ba điểm C, B, D thẳng hàng.



Hình 88

Bài tập

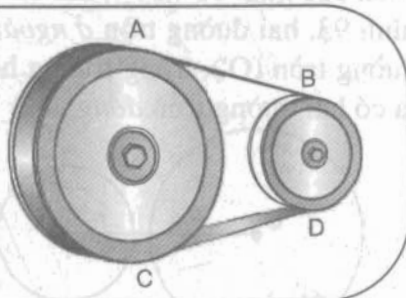
33. Trên hình 89, hai đường tròn tiếp xúc nhau tại A. Chứng minh rằng $OC \parallel O'D$.
34. Cho hai đường tròn $(O; 20\text{cm})$ và $(O'; 15\text{cm})$ cắt nhau tại A và B. Tính đoạn nối tâm OO' , biết rằng $AB = 24\text{cm}$. (Xét hai trường hợp: O và O' nằm khác phía đối với AB; O và O' nằm cùng phía đối với AB).



Hình 89

§8. Vị trí tương đối của hai đường tròn (tiếp theo)

Các đoạn dây cua-roa AB, CD cho ta hình ảnh tiếp tuyến chung của hai đường tròn.



1. Hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính

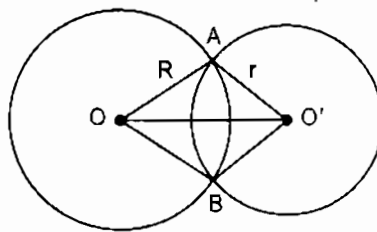
Trong mục này ta xét hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ trong đó $R \geq r$.

a) Hai đường tròn cắt nhau

Trên hình 90, hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B.

Ta có khẳng định sau :

Nếu hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau thì $R - r < OO' < R + r$.



Hình 90

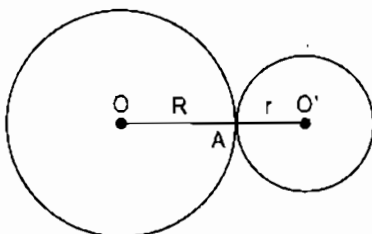
?1

Hãy chứng minh khẳng định trên.

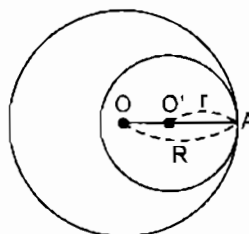
b) Hai đường tròn tiếp xúc nhau

Trên hình 91, hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A, khi đó tiếp điểm A nằm giữa O và O'.

Trên hình 92, hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại A, khi đó điểm O' nằm giữa O và A.



Hình 91



Hình 92

Ta có các khẳng định sau :

Nếu hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài thì $OO' = R + r$.

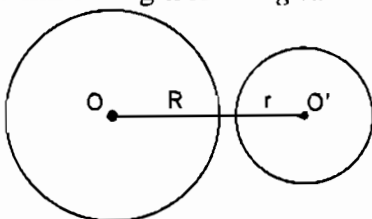
Nếu hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong thì $OO' = R - r$.

?2

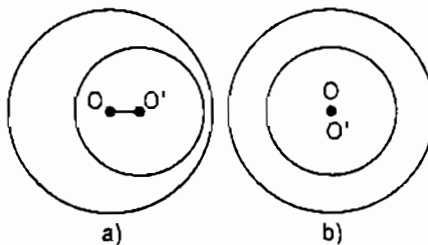
Hãy chứng minh các khẳng định trên.

c) Hai đường tròn không giao nhau

Trên các hình 93 và 94, hai đường tròn (O) và (O') không giao nhau. Trên hình 93, hai đường tròn ở ngoài nhau. Trên hình 94, đường tròn (O) đựng đường tròn (O'), trong trường hợp đặc biệt khi hai tâm trùng nhau (h.94b) ta có hai đường tròn đồng tâm.



Hình 93



Hình 94

Ta chứng minh được các khẳng định sau :

Nếu hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau thì $OO' > R + r$.

Nếu đường tròn (O) đựng đường tròn (O') thì $OO' < R - r$.

- Ta cũng chứng minh được điều đảo lại của các khẳng định ở các mục a, b, c nói trên.

Ta có bảng sau :

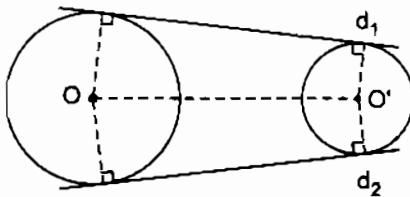
Vị trí tương đối của hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) ($R \geq r$)	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau : – Tiếp xúc ngoài – Tiếp xúc trong	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r > 0$
Hai đường tròn không giao nhau : – (O) và (O') ở ngoài nhau – (O) đựng (O')	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$

2. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

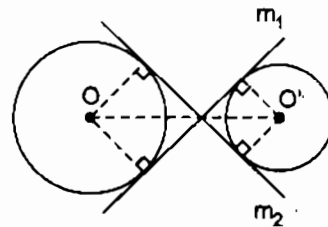
Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

Trên hình 95, các đường thẳng d_1 và d_2 là các *tiếp tuyến chung ngoài* của hai đường tròn (O) và (O') (tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn nối tâm).

Trên hình 96, các đường thẳng m_1 và m_2 là các *tiếp tuyến chung trong* của hai đường tròn (O) và (O') (tiếp tuyến chung trong cắt đoạn nối tâm).



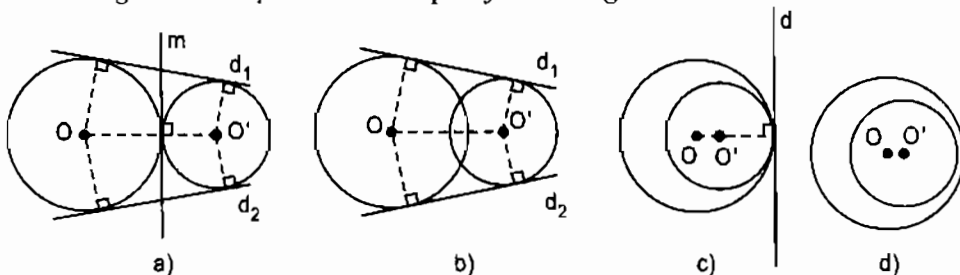
Hình 95



Hình 96

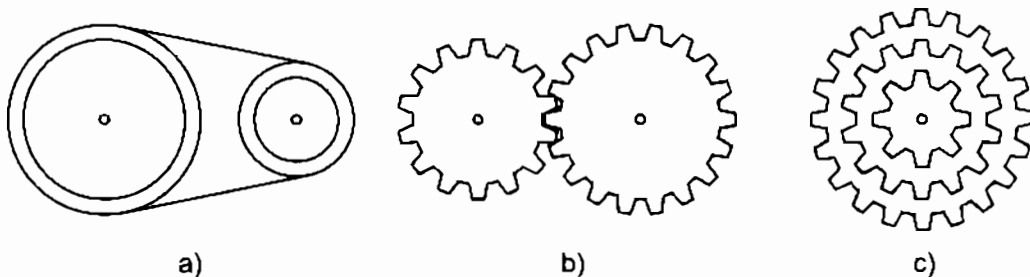
33

Quan sát các hình 97a, b, c, d, trên hình nào có vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn? Đọc tên các tiếp tuyến chung đó.



Hình 97

Trong thực tế, ta thường gặp những đồ vật có hình dạng và kết cấu liên quan đến những vị trí tương đối của hai đường tròn: bánh xe và dây cua-roa (h.98a), hai bánh răng khớp nhau (h.98b), lốp nhiều tầng của xe đạp (h.98c).



Hình 98

Bài tập

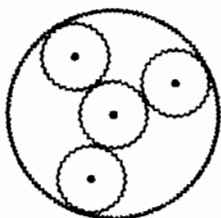
35. Điền vào các ô trống trong bảng, biết rằng hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ có $OO' = d$, $R > r$.

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d, R, r
$(O; R)$ đựng $(O'; r)$		
		$d > R + r$
Tiếp xúc ngoài		
		$d = R - r$
	2	

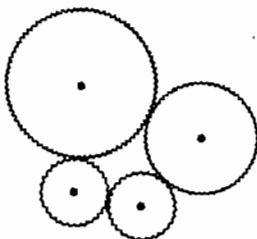
36. Cho đường tròn tâm O bán kính OA và đường tròn đường kính OA.
- Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.
 - Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C. Chứng minh rằng $AC = CD$.
37. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Dây AB của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C và D. Chứng minh rằng $AC = BD$.

Luyện tập

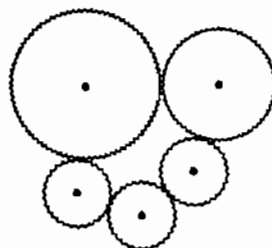
38. Điền các từ thích hợp vào chỗ trống (...):
- Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm tiếp xúc ngoài với đường tròn (O ; 3cm) nằm trên ...
 - Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm tiếp xúc trong với đường tròn (O ; 3cm) nằm trên ...
39. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.
- Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
 - Tính số đo góc OIO' .
 - Tính độ dài BC, biết $OA = 9\text{cm}$, $O'A = 4\text{cm}$.
40. **Đố.** Trên các hình 99a, 99b, 99c, các bánh xe tròn có răng cưa được khớp với nhau. Trên hình nào hệ thống bánh răng chuyển động được? Trên hình nào hệ thống bánh răng không chuyển động được?



a)



b)



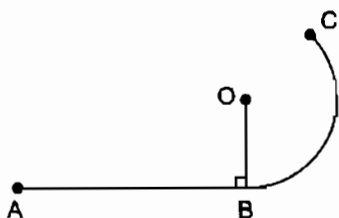
c)

Hình 99

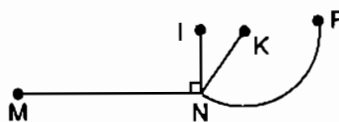


Vẽ chắp nối trơn

Trên hình 100, ta có đoạn thẳng AB và cung BC của đường tròn tâm O, đoạn thẳng AB tiếp xúc với cung BC (vì $AB \perp BO$). Tại B, đường đi ABC "trơn" chứ không "gãy" (còn trên hình 101 : đoạn thẳng MN không tiếp xúc với cung NP, đường đi MNP bị "gãy" tại N). Ta nói đoạn thẳng AB được vẽ *chắp nối trơn* với cung BC.

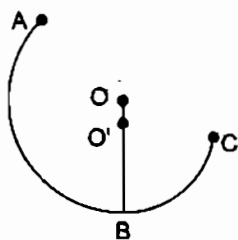


Hình 100

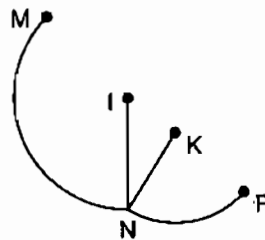


Hình 101

Trên hình 102, cung AB của đường tròn tâm O tiếp xúc với cung BC của đường tròn tâm O' (vì các tiếp tuyến tại B của các đường tròn đó trùng nhau, khi đó ba điểm O, O', B thẳng hàng). Tại B, đường đi ABC cũng "trơn" chứ không "gãy" (còn trên hình 103 : cung MN không tiếp xúc với cung NP, đường đi MNP bị "gãy" tại N). Ta nói cung AB được vẽ *chắp nối trơn* với cung BC.



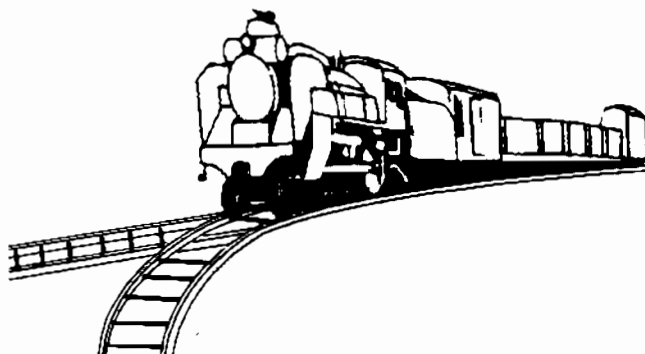
Hình 102



Hình 103

Trong kĩ thuật, nhiều khi ta phải vẽ chắp nối trơn một cung với một đoạn thẳng hoặc vẽ chắp nối trơn hai cung với nhau. Các thanh đường ray xe lửa được

chấp nối trơn với nhau khi xe lửa đổi hướng từ đường thẳng sang đường cong (h.100) hoặc từ đường cong này sang đường cong khác (h.102).

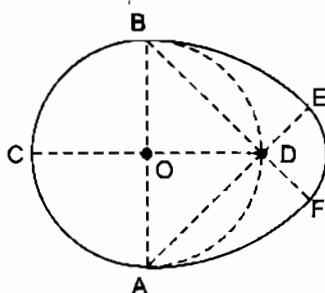


Đường ray xe lửa, hình ảnh đường thẳng được chấp nối trơn với đường cong.

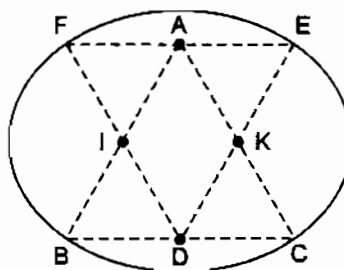
Em hãy tập vẽ chấp nối trơn để được các hình sau :

a) Hình "quả trứng".

Hình "quả trứng" (h.104) được tạo bởi bốn cung vẽ chấp nối trơn : nửa đường tròn ACB có đường kính AB, cung BE có tâm A, cung EF có tâm D, cung FA có tâm B (tâm của cung là tâm của đường tròn chứa cung đó).



Hình 104



Hình 105

b) Hình "trái xoan".

Hình "trái xoan" (h.105) được tạo bởi bốn cung vẽ chấp nối trơn : cung BC có tâm A, cung CE có tâm K, cung EF có tâm D, cung FB có tâm I (các tam giác ABC và DEF là các tam giác đều ; D, I, K là trung điểm các cạnh của tam giác ABC).

Ôn tập chương II

Câu hỏi

1. Thế nào là đường tròn ngoại tiếp một tam giác ? Nêu cách xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác.
2. Thế nào là đường tròn nội tiếp một tam giác ? Nêu cách xác định tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.
3. Chỉ rõ tâm đối xứng của đường tròn, trục đối xứng của đường tròn.
4. Chứng minh định lí : Trọng các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.
5. Phát biểu các định lí về quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.
6. Phát biểu các định lí về liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây.
7. Nêu các vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Ứng với mỗi vị trí đó, viết hệ thức giữa d (khoảng cách từ tâm đến đường thẳng) và R (bán kính của đường tròn).
8. Phát biểu định nghĩa tiếp tuyến của đường tròn. Phát biểu tính chất của tiếp tuyến và dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến. Phát biểu các tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.
9. Nêu các vị trí tương đối của hai đường tròn. Ứng với mỗi vị trí đó, viết hệ thức giữa đoạn nối tâm d với các bán kính R, r .
10. Tiếp điểm của hai đường tròn tiếp xúc nhau có vị trí như thế nào đối với đường nối tâm ? Các giao điểm của hai đường tròn cắt nhau có vị trí như thế nào đối với đường nối tâm ?

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R .
2. Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

CÁC ĐỊNH LÝ

1. a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.
b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.
2. a) Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
b) Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.
3. Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.
4. Trong một đường tròn :
a) Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
b) Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.
5. Trong một đường tròn :
a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm, hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
b) Dây lớn hơn thì gần tâm hơn, dây gần tâm hơn thì lớn hơn.
6. a) Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
b) Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.
7. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :
a) Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
b) Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
c) Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.
8. Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

Bài tập

- 41.** Cho đường tròn (O) có đường kính BC , dây AD vuông góc với BC tại H .
Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC .
Gọi $(I), (K)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF .
- a) Hãy xác định vị trí tương đối của các đường tròn : (I) và (O) , (K) và (O) , (I) và (K) .
 - b) Tứ giác $AEHF$ là hình gì ? Vì sao ?
 - c) Chứng minh đẳng thức $AE.AB = AF.AC$.
 - d) Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K) .
 - e) Xác định vị trí của điểm H để EF có độ dài lớn nhất.
- 42.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A , BC là tiếp tuyến chung ngoài, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt BC ở điểm M . Gọi E là giao điểm của OM và AB , F là giao điểm của $O'M$ và AC . Chứng minh rằng :
- a) Tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật.
 - b) $ME.MO = MF.MO'$.
 - c) OO' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là BC .
 - d) BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là OO' .
- 43.** Cho hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; r)$ cắt nhau tại A và B ($R > r$). Gọi I là trung điểm của OO' . Kẻ đường thẳng vuông góc với IA tại A , đường thẳng này cắt các đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; r)$ theo thứ tự tại C và D (khác A).
- a) Chứng minh rằng $AC = AD$.
 - b) Gọi K là điểm đối xứng với điểm A qua điểm I . Chứng minh rằng KB vuông góc với AB .

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Trang

Chương I. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

§1. Căn bậc hai	4
§2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	8
§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương	12
§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương	16
§5. Bảng căn bậc hai	20
§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai	24
§7. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai (tiếp theo)	27
§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai	31
§9. Căn bậc ba	34
Ôn tập chương I	39

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số	42
§2. Hàm số bậc nhất	46
§3. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)	49
§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau	52
§5. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)	55
Ôn tập chương II	59

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông	64
§2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn	71
§3. Bảng lượng giác	77
§4. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông	85
§5. Ứng dụng thực tế các tỉ số lượng giác của góc nhọn. Thực hành ngoài trời	90
Ôn tập chương I	91

Chương II. ĐƯỜNG TRÒN

§1. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn	97
§2. Đường kính và dây của đường tròn	102
§3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây	104
§4. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	107
§5. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn	110
§6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau	113
§7. Vị trí tương đối của hai đường tròn	117
§8. Vị trí tương đối của hai đường tròn (tiếp theo)	119
Ôn tập chương II	126



HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH



VƯƠNG MIỀN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 9

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| 1. Ngữ văn 9 (tập một, tập hai) | 10. Công nghệ |
| 2. Lịch sử 9 | - Nấu ăn |
| 3. Địa lí 9 | - Trồng cây |
| 4. Giáo dục công dân 9 | - Cắt may |
| 5. Âm nhạc và Mĩ thuật 9 | - Lắp đặt mạng điện trong nhà |
| 6. Toán 9 (tập một, tập hai) | - Sửa chữa xe đạp |
| 7. Vật lí 9 | 11. Tiếng nước ngoài : |
| 8. Hoá học 9 | - Tiếng Anh 9 |
| 9. Sinh học 9 | - Tiếng Nga 9 |
| | - Tiếng Pháp 9 |
| | - Tiếng Trung Quốc 9 |

ISBN 978-604-0-00116-0



8 934994 024372



Giá : 6.500đ