

HÌNH HỌC CHO TUỔI TRẺ

VŨ HỮU BÌNH

EÁC BÀI TẬP VÀ CHUYÊN ĐỀ VỀ TỬ GIÁC

THEO CHƯƠNG TRÌNH CẢI CÁCH GIÁO DỤC LỚP 8





HÌNH HỌC CHO TUỔI TRẺ - TẬP V

VŨ HỮU BÌNH

**CÁC BÀI TẬP
VÀ CHUYÊN ĐỀ
VỀ TỨ GIÁC**

(THEO CHƯƠNG TRÌNH C.C.G.D LỚP 8)

- *otoanhoc2911@gmail.com* -



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 1994

CHƯƠNG 1

TỨ GIÁC

§ 1. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ TỨ GIÁC

1. *Tứ giác ABCD* là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng thuộc một đường thẳng.

2. Một tứ giác gọi là *lồi* nếu nó nằm cùng phía đối với mỗi đường thẳng chứa cạnh (h.1).

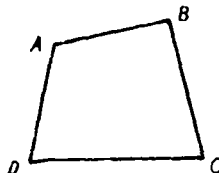
Chú ý . Từ nay, khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.

3. *Tính chất của tứ giác*

a) Hai đường chéo cắt nhau.

b) Tổng các góc bằng 360° .

Tứ giác ABCD: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$.



Hình 1

Ví dụ 1

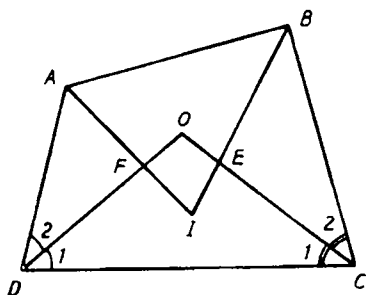
Cho tứ giác ABCD có O là giao điểm các tia phân giác của các góc C và D.

a) Tính $\widehat{COD}$ biết $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 90^\circ$.

b) Tính $\widehat{COD}$ theo $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$.

c) Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau ở I và cắt các tia phân giác các góc C và D thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng tứ giác OEIF có các góc đối bù nhau.

Giải (h.2)



Hình 2

a) Tứ giác ABCD có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 120^\circ + 90^\circ + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{D} = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = (\widehat{C} + \widehat{D}) : 2 = 150^\circ : 2 = 75^\circ.$$

$$\begin{aligned} \Delta COD \text{ có } \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 &= 75^\circ \text{ nên} \\ \widehat{COD} &= 180^\circ - (\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1) \\ &= 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ. \end{aligned}$$

b) Giải tương tự như câu a.

$$\text{Đáp số : } \widehat{COD} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}.$$

c) Chứng minh tương tự như câu b, ta được $\widehat{EIF} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$.

$$\text{Do đó } \widehat{COD} + \widehat{EIF} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{OEI} + \widehat{OFI} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

BÀI TẬP

1. a) Có tứ giác nào có bốn góc nhọn không?

b) Trong tứ giác, có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn? bao nhiêu góc tù? bao nhiêu góc vuông?

2. Tính tổng bốn góc ngoài tại các đỉnh A, B, C, D của tứ giác ABCD.

3. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$, tia phân giác của góc B cắt cạnh AD ở E, tia phân giác của góc D cắt cạnh BC ở F. Chứng minh rằng BE song song với DF.

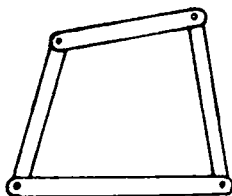
4. Chứng minh rằng tổng các đường chéo của tứ giác :

a) nhỏ hơn chu vi tứ giác;

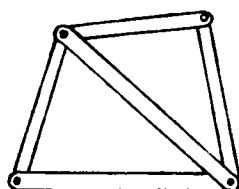
b) lớn hơn nửa chu vi tứ giác.

5. Tứ giác ABCD có $AB = CD$. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo tạo với AB và CD các góc bằng nhau.

6. Vì sao một tứ giác gồm bốn thanh gỗ khớp vít ở đầu (h.3) lại dễ biến dạng, còn nếu đặt thêm một thanh gỗ nữa bất chéo (h.4) thì tứ giác có dạng cố định ?



Hình 3



Hình 4

7. Vì sao dùng nhiều mảnh vải nhỏ tứ giác có hình dạng và kích thước như nhau có thể ghép được thành một miếng vải lớn hơn ?

§ 2. HÌNH THANG

1. Hình thang

a) *Định nghĩa.* Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song (h.5).

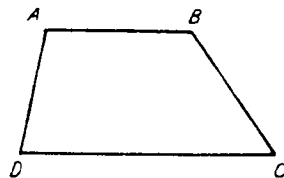
b) *Tính chất*

- Hai góc kề một cạnh bên bù nhau.
- Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên (tức là đường trung bình hình thang) thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

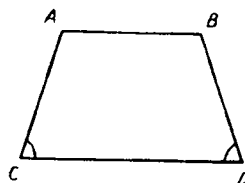
- Đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo thì song song với hai đáy và bằng nửa hiệu hai đáy.

2. Hình thang cân

a) *Định nghĩa.* Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau (h.6).



Hình 5



Hình 6

b) *Tính chất.* Ngoài các tính chất của hình thang, trong hình thang cân :

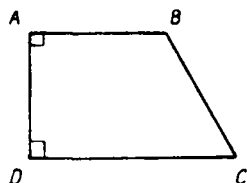
- hai góc đối bù nhau ;
- hai cạnh bên bằng nhau ;
- hai đường chéo bằng nhau.

c) *Dấu hiệu nhận biết*

- Sử dụng định nghĩa.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

3. Hình thang vuông

Định nghĩa. Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông (h.7).



Hình 7

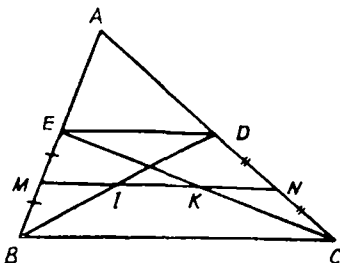
Ví dụ 2

Tam giác ABC có $BC = 8\text{cm}$, các trung tuyến BD, CE. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của BE, CD. Đường thẳng MN cắt BD, CE thứ tự ở I và K.

a) Chứng minh rằng I là trung điểm của BD, K là trung điểm của CE.

b) Tính các độ dài MI, IK, KN.

Giải (h.8)



Hình 8

a) ΔABC có $AE = EB$, $AD = DC$ nên ED là đường trung bình.

$$\text{Do đó } ED \parallel BC, ED = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (cm)}.$$

Tứ giác BEDC có $ED \parallel BC$ nên là hình thang. Ta lại có $BM = ME$, $CN = ND$ nên MN là đường trung bình, do đó $MN \parallel ED \parallel BC$.

ΔBED có $BM = ME$, $MI \parallel ED$ nên I là trung điểm của BD .

ΔCDE có $CN = ND$, $NK \parallel DE$ nên K là trung điểm của CE .

b) MI là đường trung bình của ΔBED nên $MI = \frac{ED}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (cm).

NK là đường trung bình của ΔCDE nên $NK = \frac{ED}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (cm).

IK là đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo hình thang $BEDC$ nên $IK = \frac{BC - ED}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2$ (cm).

Ví dụ 3

Chứng minh định lí :

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm hai đường chéo và đi qua trung điểm cạnh bên còn lại.

Giải (h.9)

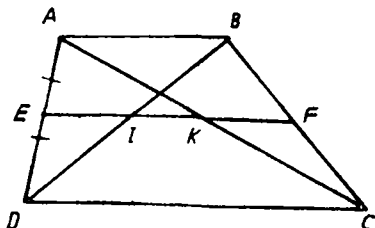
Xét hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

Đường thẳng qua trung điểm E của AD và song song với hai đáy, cắt BD , AC ở I , K và cắt BC ở F .

ΔADC có $AE = ED$, $EK \parallel DC$ nên K là trung điểm của AC .

ΔDAB có $AE = ED$, $EI \parallel AB$ nên I là trung điểm của BD .

ΔBDC có $BI = ID$, $IF \parallel DC$ nên F là trung điểm của BC .



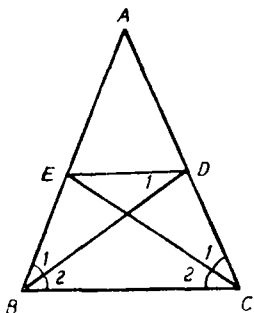
Hình 9

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC cân ở A , các phân giác BD , CE . Chứng minh rằng $BEDC$ là hình thang cân và đáy nhỏ của nó bằng cạnh bên.

Giải (h.10)

$\Delta ABD = \Delta ACE$ (g.c.g) $\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân ở A .



Hình 10

Các tam giác ADE và ABC cân ở A nên $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ (cùng bằng $\frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$), do đó $ED \parallel BC$ (cặp góc đồng vị bằng nhau).

BEDC là hình thang, lại có $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên là hình thang cân.

Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (giả thiết).

$\widehat{B}_2 = \widehat{D}_1$ (góc so le trong, $ED \parallel BC$) nên $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$. Suy ra $DE = BE$.

Vậy hình thang cân BEDC có $BE = ED = DC$.

BÀI TẬP

Hình thang

8. Cho hai đoạn thẳng AB và CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự bằng 3cm và 7cm. Gọi H là trung điểm của AC, K là trung điểm của BD. Tính độ dài HK.

9. Chứng minh rằng trong hình thang, tổng hai cạnh bên lớn hơn hiệu hai đáy.

10. Hình thang ABCD có đáy AB bằng tổng hai cạnh bên AD, BC. Chứng minh rằng các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau tại một điểm nằm trên đáy AB.

11. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). E và F thứ tự là trung điểm của BD và AC. Vẽ đường thẳng qua E vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC, chúng cắt nhau ở I. Chứng minh rằng $IC = ID$.

Hướng dẫn. Gọi K là trung điểm của AB. Các đường thẳng KE, KF cắt CD theo thứ tự ở M, N. Xét vị trí của điểm I trong $\triangle KMN$.

Dùng định lý ở ví dụ 3 để giải các bài tập sau (bài 12 - 15):

12. Cho hai điểm A và B có khoảng cách đến đường thẳng m theo thứ tự bằng 8cm và 2cm. Gọi C là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ C đến đường thẳng m.

13. Cho tam giác ABC, điểm O là trung điểm của trung tuyến AM. Vẽ đường thẳng m đi qua O và cắt hai cạnh AB, AC. Gọi A', B', C' thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên đường thẳng m.

Chứng minh rằng $AA' = \frac{BB' + CC'}{2}$

14. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE. Gọi I và K thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường thẳng ED. Chứng minh rằng EI = DK.

15. *Đố vui. Kho vàng bí mật*

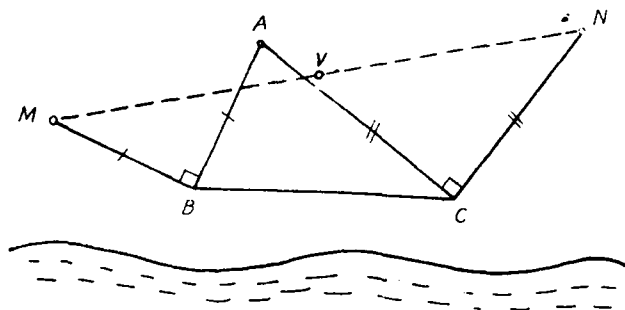
Một người cha khi hấp hối dặn các con :

- Cha có một kho vàng đặt ở một địa điểm bí mật. Các con hãy nhớ vị trí của miếu Bà và miếu Cô ở ven sông. Từ miếu Bà, đi một quãng bằng quãng từ miếu Bà đến tượng thần Ác và vuông góc với quãng này. Từ miếu Cô, cũng đi một quãng bằng quãng từ miếu Cô đến tượng thần Ác và vuông góc với quãng ấy. Ở chính giữa hai vị trí vừa tìm là chỗ giấu vàng.

Nói xong người cha qua đời. Sau khi cha chết, các con tìm kho vàng, nhưng tiếc thay, tượng thần Ác đã không còn dấu vết.

Có cách nào xác định được vị trí của kho vàng?

Trên hình 11, miếu Bà được ghi bởi điểm B, miếu Cô - điểm C, tượng thần Ác - điểm A, kho vàng - điểm V.



Hình 11

Hình thang cân

16 Tứ giác ABCD có $\hat{A} = 110^\circ$, $\hat{B} = 70^\circ$, $\hat{C} = 70^\circ$. Hãy xác định dạng của tứ giác đó.

17 Cho tam giác ABC cân ở A. Lấy điểm D thuộc tia đối của tia AB, lấy điểm E thuộc tia đối của tia AC sao cho $AE = AD$. Xác định dạng của tứ giác BEDC.

18 Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có I là giao điểm của hai đường chéo, K là giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên.

a) Chứng minh rằng $IC = ID$.

b) Gọi H là giao điểm của KI và DC. Chứng minh rằng $KH \perp DC$, $DH = HC$.

19 Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $\hat{C} = 60^\circ$, DB là tia phân giác của góc D, $AB = 4\text{cm}$.

a) Chứng minh rằng $DB \perp BC$.

b) Tính chu vi hình thang.

Hình thang vuông

20. Hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) có $AB = BC = 6\text{cm}$, $CD = 9\text{cm}$. Tính số đo các góc B và C.

21. Hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) có $AB = AD = 4\text{cm}$, $CD = 8\text{cm}$. Tính số đo các góc B và C.

§ 3. ĐỐI XỨNG TRỤC

1. Định nghĩa hai điểm đối xứng nhau qua một trục :

Cho đường thẳng d và điểm A (h.12). Điểm A' gọi là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d nếu :

d là đường trung trực của AA' (trường hợp A không thuộc d);

A' trùng A (trường hợp A thuộc d).

2. Định nghĩa hai hình đối xứng nhau qua một trục :

Hai hình H và H' gọi là đối xứng nhau qua trục d nếu :

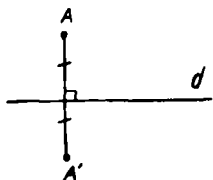
- mỗi điểm thuộc hình H đều có điểm đối xứng với nó qua d thuộc hình H' ;
- và ngược lại.

3. Nếu các điểm A và A' đối xứng nhau qua trục d , các điểm B và B' đối xứng nhau qua d thì :

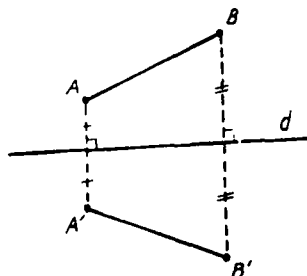
AB và $A'B'$ đối xứng nhau qua d ;

$AB = A'B'$ (h.13).

4. Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình.



Hình 12



Hình 13

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC vuông ở A . lấy D là điểm bất kì thuộc cạnh BC . Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB , F là điểm đối xứng với D qua AC .

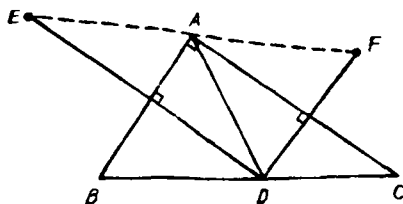
a) Chứng minh rằng A là trung điểm của EF .

b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì EF có độ dài ngắn nhất?

Giải (h.14)

a) E đối xứng với D qua $AB \Rightarrow AE = AD$ (1), $\widehat{BAE} = \widehat{BAD}$ (2).

F đối xứng với D qua $AC \Rightarrow AF = AD$ (3), $\widehat{CAF} = \widehat{CAD}$ (4).



Hình 14

Từ (1) và (3) suy ra
 $AE = AF$ (5).

Từ (2) và (4) suy ra
 $\widehat{DAE} + \widehat{DAF} = 2(\widehat{BAD} + \widehat{CAD})$
 $= 2\widehat{BAC} = 180^\circ$, do đó $\widehat{EAF} = 180^\circ$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra A là trung điểm của EF.

b) Ta có $EF = 2AD$ nên :
 EF nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là chân đường cao kẻ từ A đến BC.

BÀI TẬP

22. Trong bảng chữ cái in hoa : A, B, C, D, E, ..., X, Y, các chữ cái nào :

- chỉ có trục đối xứng dọc (ví dụ A) ?
- chỉ có trục đối xứng ngang (ví dụ B) ?
- có cả trục đối xứng dọc và trục đối xứng ngang (ví dụ H) ?

23. a) Hãy chỉ ra trục đối xứng của : đoạn thẳng AB, góc xOy, tam giác cân, hình thang cân.

- Tam giác đều có mấy trục đối xứng?
- Có hình nào có vô số trục đối xứng ?

24 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 70^\circ$, B và C là các góc nhọn. Gọi K là điểm đối xứng với trọng tâm H của tam giác ABC qua BC. Tính BKG

25 Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$). Hãy dựng điểm E thuộc cạnh AD sao cho $\widehat{AEB} = \widehat{DEC}$.

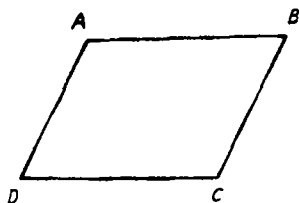
26 Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với d. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d. C là giao điểm của A'B và d. C' là điểm bất kì khác C thuộc đường thẳng d. So sánh $AC + CB$ và $AC' + C'B$.

§ 4. HÌNH BÌNH HÀNH

1. *Định nghĩa.* Hình bình hành là tứ giác có hai cặp cạnh đối song song (h.15).

2. *Tính chất.* Ngoài các tính chất của hình thang, trong hình bình hành :

- hai cặp cạnh đối bằng nhau đôi một ;
- hai cặp góc đối bằng nhau đôi một ;
- hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Hình 15

3. *Dấu hiệu nhận biết*

- Sử dụng định nghĩa.
- Tứ giác có hai cặp cạnh đối bằng nhau đôi một là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cặp góc đối bằng nhau đôi một là hình bình hành.
- Tứ giác có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

Ví dụ 6

Cho hình bình hành ABCD. Gọi H và K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và từ C đến BD.

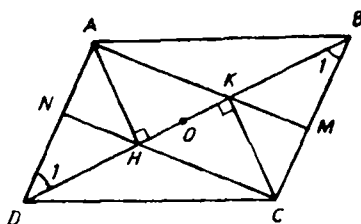
a) Chứng minh rằng AHCK là hình bình hành.

b) Gọi M là giao điểm của AK và BC, gọi N là giao điểm của CH

và AD. Chứng minh rằng $AN = CM$.

c) Gọi O là trung điểm của HK. Chứng minh rằng M, O, N thẳng hàng.

Giải (h.16)



Hình 16

a) *Cách 1*

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle CKB$ ($\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$): $AD = BC$ (cạnh đối hình bình hành); $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ (so le trong, $AD \parallel BC$). Vậy $\triangle AHD = \triangle CKB$ (trường hợp cạnh huyền và góc nhọn), suy ra $AH = CK$.

Ta lại có $AH \parallel CK$ (cùng vuông góc với BD). Tứ giác AHCK có $AH = CK$, $AH \parallel CK$ nên là hình bình hành.

Cách 2

Chứng minh rằng tứ giác AHCK có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Tứ giác AHCK là hình bình hành (câu a) nên $AK \parallel CH$, tức là $AM \parallel CN$. Ta lại có $AN \parallel CM$.

Tứ giác ANCM là hình bình hành (theo định nghĩa) nên $AN = CM$.

c) Hình bình hành AHCK có O là trung điểm của HK nên O là trung điểm của AC (tính chất đường chéo hình bình hành).

Hình bình hành ANCM có O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của MN. Vậy M, O, N thẳng hàng.

Chú ý

Một cách chứng minh ba điểm thẳng hàng: trong hình bình hành, hai đầu của một đường chéo và trung điểm của đường chéo kia là ba điểm thẳng hàng.

BÀI TẬP

27/ Cho hình bình hành ABCD, gọi I và K theo thứ tự là các trung điểm của CD và AB. Các đường thẳng AI và CK cắt BD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng $DM = MN = NB$.

28./ Cho hình bình hành ABCD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $BE = DG$, $BF = DH$. Chứng minh rằng :

a) EFGH là hình bình hành.

b) Bốn đoạn thẳng AC, BD, EG, FH đồng quy (cùng cắt nhau tại một điểm).

29. Cho tứ giác ABCD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các điểm I, K theo thứ tự là trung điểm của BD, AC. Chứng minh rằng :

a) EIGK là hình bình hành.

b) Các đường thẳng EG, FH, IK đồng quy.

30/ Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên cạnh BC. Qua A vẽ đường thẳng m song song với BC. Qua D vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở N và cắt m ở E. Qua D vẽ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở M và cắt m ở F. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BE, CF, MN đồng quy.

31/ Cho tam giác ABC. Vẽ các tam giác đều ABD, ACE nằm ngoài tam giác ABC. Vẽ tam giác đều BCF sao cho A và F nằm cùng phía đối với BC. Chứng minh rằng ADFE là hình bình hành.

32 Cho hình bình hành ABCD. Qua C vẽ đường thẳng d sao cho hình bình hành thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ d. Gọi A', B', D' thứ tự là hình chiếu của A, B, D trên d. Chứng minh rằng $AA' = BB' + DD'$

33 Cho tam giác ABC cân ở A. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên AC sao cho $AD = CE$. Gọi O là trung điểm của DE, gọi K là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng ADKE là hình bình hành.

34 Cho tam giác ABC. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho $BD = CE$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, DE. Vẽ các hình bình hành BDNI và CENK. Chứng minh rằng :

a) I, M, K thẳng hàng.

b) Các góc nhọn tạo bởi đường thẳng MN với các đường thẳng AB và AC bằng nhau.

§ 5. ĐỐI XỨNG TÂM

1. Định nghĩa hai điểm đối xứng nhau qua một tâm :

Cho điểm O và điểm A (h.17). Điểm A' gọi là điểm đối xứng với A qua điểm O nếu :

O là trung điểm của AA' (trường hợp A không trùng O) ;

A' trùng A (trường hợp A trùng O).

2. Định nghĩa hai hình đối xứng nhau qua một tâm :

Hai hình H và H' gọi là đối xứng nhau qua tâm O nếu :

- mỗi điểm thuộc hình H đều có điểm đối xứng với nó qua O thuộc hình H' ;

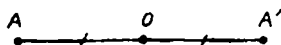
- và ngược lại.

3. Nếu các điểm A và A' đối xứng nhau qua tâm O, các điểm B và B' đối xứng nhau qua O thì :

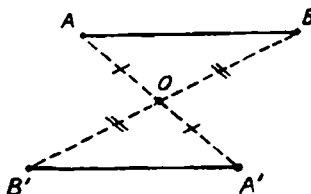
AB và A'B' đối xứng nhau qua O ;

$AB = A'B'$ (h.18).

4. Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình.



Hình 17



Hình 18

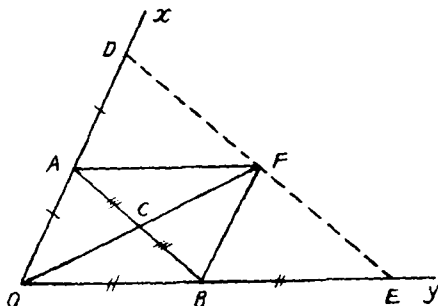
Ví dụ 7

Cho góc xOy khác góc bẹt, điểm A thuộc Ox , điểm B thuộc Oy . Gọi C là trung điểm của AB , điểm D đối xứng với O qua A , điểm E đối xứng với O qua B , điểm F đối xứng với O qua C .

a) Chứng minh rằng D đối xứng với E qua F .

b) Các điểm A và B có vị trí như thế nào thì D đối xứng với E qua đường thẳng OF ?

Giải (h.19)



Hình 19

a) Ta có $AO = AD$, $CO = CF$ nên AC là đường trung bình của $\triangle ODF$, do đó $FD = 2AC$, $FD \parallel AC$.

Chứng minh tương tự, CB là đường trung bình của $\triangle OEF$ nên $FE = 2CB$, $FE \parallel CB$.

Ta có $FD \parallel CA$, $FE \parallel CB$ mà C nằm giữa A và B nên D, F, E thẳng hàng, F nằm giữa D và E (1).

Ta có $FD = 2AC$, $FE = 2CB$ mà $AC = CB$ nên $FD = FE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra F là trung điểm của DE , do đó D đối xứng với E qua F .

b) D đối xứng với E qua $OF \Leftrightarrow OF$ là đường trung trực của $DE \Leftrightarrow OD = OE$ (vì đã có $FD = FE$) $\Leftrightarrow OA = OB$.

Như vậy nếu $OA = OB$ thì D đối xứng với E qua OF .

BÀI TẬP

35. Trong bảng chữ cái in hoa $A, B, C, \dots, X, Y$, các chữ cái nào có tâm đối xứng?

36. a) Hãy chỉ ra tâm đối xứng của : đoạn thẳng AB , hình bình hành $ABCD$, đường tròn $(O; R)$.

b) Tam giác đều có tâm đối xứng không ?

c) Có hình nào có vô số tâm đối xứng không ?

37. Cho điểm A nằm trong góc vuông xOy. Gọi B là điểm đối xứng với A qua Ox, C là điểm đối xứng với A qua Oy. Chứng minh rằng các điểm B và C đối xứng nhau qua O.

38. Cho tam giác ABC, trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với H qua M.

a) Chứng minh rằng $BD \perp BA$, $CD \perp CA$.

b) Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh rằng $IM \perp BC$.

39. Cho điểm O nằm trong tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các điểm đối xứng với O qua E, qua F, qua G, qua H. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành có các cạnh bằng các đường chéo của tứ giác ABCD.

40. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm hai đường chéo. Lấy điểm E trên cạnh AB, lấy điểm F trên cạnh CD sao cho $AE = CF$.

a) Chứng minh rằng E đối xứng với F qua O.

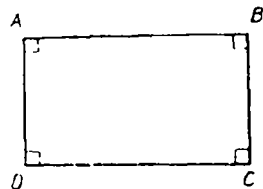
b) Gọi I là giao điểm của AF và DE, gọi K là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng I đối xứng với K qua O.

§ 6. HÌNH CHỮ NHẬT

1. *Định nghĩa.* Hình chữ nhật là hình bình hành có một góc vuông (h.20).

2. *Tính chất.* Hình chữ nhật có các tính chất của hình bình hành và hình thang cân.

Tính chất cần nhớ :



Hình 20

- Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau.
- Hình chữ nhật có hai trục đối xứng.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Sử dụng định nghĩa.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.

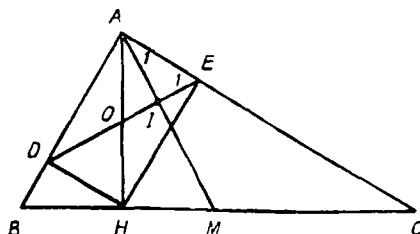
Ví dụ 8

Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH, trung tuyến AM. Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC.

a) Chứng minh rằng $DE \leq AM$. Trong trường hợp nào thì $DE = AM$?

b) Chứng minh rằng $DE \perp AM$.

Giải (h.21)



Hình 21

a) Tứ giác ADHE có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật do đó $DE = AH$.

Ta lại có $AH \leq AM$. Do đó $DE \leq AM$.

$DE = AM \Leftrightarrow H \equiv M$. Khi đó ABC là tam giác vuông cân ở A.

b) Gọi O là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của AM và DE. Ta có :

$$\widehat{E}_1 = \widehat{EAH} \text{ (}\triangle OAE \text{ cân ở O)}$$

$$\widehat{A}_1 = \widehat{C} \text{ (}\triangle MAC \text{ cân ở M)} \text{ nên } \widehat{E}_1 + \widehat{A}_1 = \widehat{EAH} + \widehat{C} = 90^\circ.$$

Do đó $\widehat{AIE} = 90^\circ$. Vậy $DE \perp AM$.

BÀI TẬP

41. Cho hai góc kề bù xOy , yOz . Gọi Om , On theo thứ tự là các tia phân giác của các góc đó. Gọi A là một điểm thuộc tia Oy , B và C thứ tự là các hình chiếu của A trên Om và On . Chứng minh rằng :

a) $ABOC$ là hình chữ nhật.

b) CB song song với xz .

42. Tứ giác $ABCD$ có E , F , G , H theo thứ tự là trung điểm của AB , BC , CD , DA . Cho biết $EG = FH$, chứng minh rằng AC vuông góc với BD .

43. Cho tam giác ABC vuông ở A . Gọi D là một điểm thuộc trung tuyến AM . Gọi E , F theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB , AC .

a) Chứng minh rằng EF song song với BC .

b) Điểm D ở vị trí nào trên AM thì $EF = \frac{1}{4} BC$?

44'. Cho hình chữ nhật $ABCD$, điểm E thuộc cạnh AB . Lấy điểm F thuộc tia đối của tia CB sao cho $\widehat{EDF} = 90^\circ$. Vẽ hình chữ nhật $EDFK$. Chứng minh rằng $\widehat{DBK} = 90^\circ$.

45. Cho tam giác ABC vuông ở A , đường cao AH . Vẽ $MD \perp AB$ ($D \in AB$), $ME \perp AC$ ($E \in AC$), điểm M thuộc cạnh BC .

a) Gọi I là trung điểm của DE . Chứng minh rằng I nằm trên đường trung trực của AH .

b) Điểm M ở vị trí nào trên BC thì DE có độ dài nhỏ nhất?

46. Cho tam giác ABC . Gọi M , N , P theo thứ tự là trung điểm của $B'C$, CA , AB . Các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Gọi I , K , R theo thứ tự là trung điểm của HA , HB , HC .

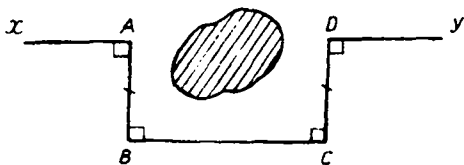
a) Chứng minh rằng các đoạn thẳng IM , KN , RP cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

b) Gọi O là trung điểm của các đoạn thẳng nói trên. Chứng minh rằng chín điểm M , N , P , I , K , R , D , E , F cách đều điểm O .

47. Với một sợi dây trong tay, hãy kiểm tra xem một tấm gỗ hình tứ giác có dạng hình chữ nhật hay không.

48. Để kiểm tra một tờ giấy hình tứ giác có phải là hình chữ nhật hay không, bạn An gấp tờ giấy hai lần theo hai đường thẳng d_1 và d_2 , đó là đường trung trực của hai cạnh kề nhau của tứ giác. Cả hai lần, An thấy hai phần của tờ giấy đều trùng nhau. Hãy chứng minh rằng tờ giấy có dạng hình chữ nhật.

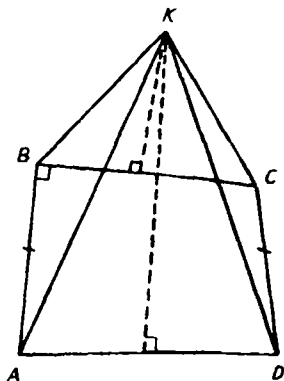
49. Khi làm đoạn đường xy , đến A gặp một vật che lấp tầm nhìn, người ta kẻ $AB \perp Ax$, $BC \perp AB$, $CD \perp BC$, $CD = AB$, $Dy \perp CD$ (h.22). Giải thích tại sao đoạn đường Dy là đoạn đường cần làm tiếp.



Hình 22

50. Chỉ dùng êke, hãy dựng trung điểm của một đoạn thẳng cho trước.

51. Tìm chỗ sai trong bài toán ngược biện " Góc vuông bằng góc tù" dưới đây :



Hình 23

Xét tứ giác ABCD có $\widehat{B} = 90^\circ$, $\widehat{C} > 90^\circ$, $AB = CD$. Gọi K là giao điểm các đường trung trực của BC và của AD (h.23).

Ta có $\Delta ABK = \Delta DCK$ (c.c.c).

$$\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{DCK} \quad (1).$$

Ta lại có ΔKBC cân nên $\widehat{KBC} = \widehat{KCB} \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\widehat{ABK} + \widehat{KBC} = \widehat{DCK} + \widehat{KCB} \text{ hay } \widehat{ABC} = \widehat{DCB}.$$

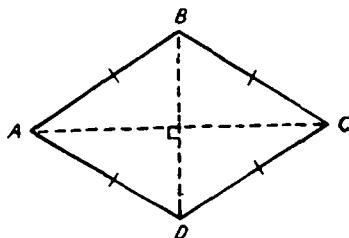
Như vậy góc vuông bằng góc tù (!).

§ 7. HÌNH THOI

1. *Định nghĩa.* Hình thoi là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau (h.24).

2. *Tính chất.* Ngoài các tính chất của hình bình hành, trong hình thoi :

- hai đường chéo vuông góc với nhau;
- hai đường chéo là phân giác của các góc hình thoi ;
- hai đường chéo là hai trục đối xứng.



Hình 24

3. *Dấu hiệu nhận biết*

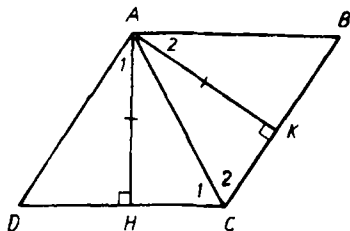
- Sử dụng định nghĩa.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là phân giác của một góc là hình thoi.
- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.

Ví dụ 9

Hình bình hành ABCD có các đường cao AH và AK bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình thoi.

Giải (h. 25)

Cách 1. Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AKB$: $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$; $AH = AK$



Hình 25

(giả thiết) ; $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (cùng phụ với hai góc B và D bằng nhau).

Vậy $\Delta AHD = \Delta AKB$ (g.c.g) suy ra $AD = AB$.

Hình bình hành ABCD có hai cạnh kề bằng nhau $AD = AB$ nên là hình thoi.

Cách 2. Xét ΔAHC và ΔAKC ($\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$) :

AC : cạnh chung ; $AH = AK$ (giả thiết).

Vậy $\Delta AHC = \Delta AKC$ (trường hợp cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$.

Hình bình hành ABCD có đường chéo CA là phân giác của góc C nên là hình thoi.

BÀI TẬP

52. a) Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của hình chữ nhật là đỉnh của một hình thoi.

b) Có thể thay "hình chữ nhật" bởi một tứ giác có điều kiện gì mà vẫn được kết quả trên ?

53 a) Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của hình thoi là đỉnh của một hình chữ nhật.

b) Có thể thay "hình thoi" bởi một tứ giác có điều kiện gì mà vẫn được kết quả trên ?

54. Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm các đường chéo. Chứng minh rằng các hình chiếu của O trên bốn cạnh hình thoi là đỉnh của một hình chữ nhật.

55. Hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Vẽ các đường cao BH, BK. Xác định dạng của tam giác BHK.

56. Tứ giác ABCD có $AB = CD$. Gọi M, N là trung điểm của BC, AD. Gọi I, K là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng MN là tia phân giác của góc IMK.

57. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE. Tia phân giác của góc DAC cắt BE, BC theo thứ tự ở I, K. Tia phân giác của góc EBC cắt AD, AC theo thứ tự ở M, N.

a) Chứng minh rằng $AK \perp BN$.

b) Tứ giác MINK là hình gì ?

58. Để kiểm tra một tờ giấy hình tứ giác có phải là hình thoi hay không, bạn Thu gấp tờ giấy hai lần theo hai đường chéo. Cả hai lần, Thu thấy hai phần của tờ giấy đều trùng nhau. Hãy chứng minh rằng tờ giấy có dạng hình thoi.

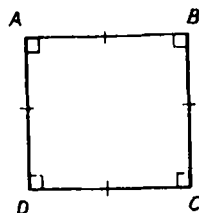
§ 8. HÌNH VUÔNG

1. *Định nghĩa.* Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau (h.26).

2. *Tính chất.* Hình vuông có các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

Tính chất cần nhớ :

- Hai đường chéo của hình vuông cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, vuông góc với nhau, là phân giác của các góc.



Hình 26

- Hình vuông có bốn trục đối xứng.

3. *Dấu hiệu nhận biết.*

- Sử dụng định nghĩa.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

Ví dụ 10

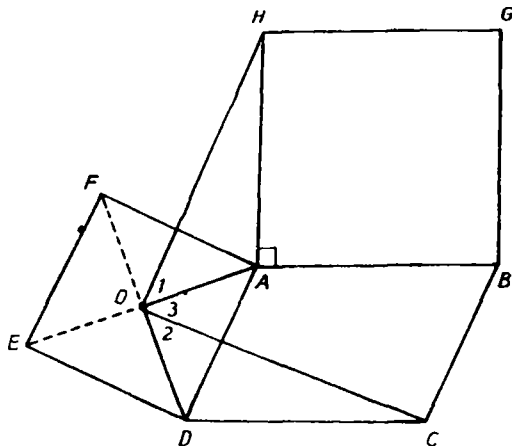
Cho hình bình hành ABCD. Ở phía ngoài hình bình hành, vẽ các hình vuông ADEF và ABGH. Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình vuông ADEF. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$.

b) $OH = OC$.

c) $OH \perp OC$.

Giải (h.27)



Hình 27

a) Ta có :

$OA \perp OD$ (tính chất đường chéo hình vuông) ;
 $AH \perp DC$ (vì $AH \perp AB$, $AB \parallel CD$).

Vậy $\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

b) Xét $\triangle OAH$ và $\triangle ODC$:

$OA = OD$ (tính chất đường chéo hình vuông) ;

$\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$ (câu a) ;

$AH = DC$ (cùng bằng AB).

Vậy $\triangle OAH = \triangle ODC$ (c.g.c) suy ra $OH = OC$.

c) $\triangle OAH = \triangle ODC \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$, mà $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$ (tính chất đường chéo hình vuông), nên $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 90^\circ$. Vậy $OH \perp OC$.

BÀI TẬP

59. Cho tam giác ABC vuông ở A, phân giác AD. Gọi E là hình chiếu của D trên AB, F là hình chiếu của D trên AC. Xác định dạng của tứ giác AEDF.

60. Ở phía ngoài hình chữ nhật ABCD, vẽ các hình vuông ABEF, BCGH. Chứng minh rằng $DE = FH$, $DE \perp FH$.

61. Các tia phân giác các góc của một hình chữ nhật cắt nhau tạo thành một tứ giác. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác đó là hình vuông.

b) Hình vuông đó có đường chéo song song với cạnh hình chữ nhật và độ dài của nó bằng hiệu hai cạnh kề của hình chữ nhật.

62. Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông ABDE, ACFG. Vẽ hình bình hành EAGK. Chứng minh rằng :

a) $AK = BC$.

b) $AK \perp BC$.

c) Các đường thẳng KA, BF, CD đồng quy.

63. Cho hình vuông ABCD, điểm K thuộc cạnh DC. Tia phân giác của góc DAK cắt DC ở E. Tia phân giác của góc BAK cắt BC ở F. Chứng minh rằng $EF \perp AK$.

64. Cho điểm M nằm giữa A và B. Vẽ các hình vuông AMCD và BMEF thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB.

a) Chứng minh rằng $AE = BC$, $AE \perp BC$.

b) Gọi G, I, H, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, CE, EB. Xác định dạng của tứ giác GIHK.

65. Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ AB, vẽ hình vuông ABCD và tam giác cân ABE có đáy AB, góc ở đáy bằng 15° . Vẽ tam giác đều AEF (F và D cùng phía đối với AE). Tính :

a) $\widehat{AFD}$; b) $\widehat{EFD}$; c) $\widehat{DEC}$.

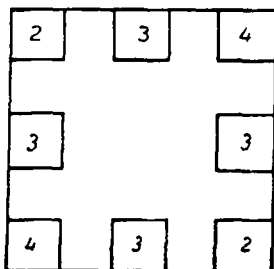
66. Cho hình vuông ABCD. Lấy E thuộc cạnh AB, lấy F thuộc cạnh AD sao cho $AF = AE$. Gọi H là hình chiếu của A trên BF. Chứng minh rằng $\widehat{EHC} = 90^\circ$.

Hướng dẫn. Gọi K là giao điểm của AH và CD. Chú ý rằng BEKC là hình chữ nhật.

67. *Đố vui. Quái vật bị mắc lư*

Một tráng sĩ cùng đội quân của chàng, tổng cộng 24 người bị một quái vật bắt nhốt vào tám hầm ngầm dưới đất xếp dọc theo các cạnh một hình vuông có sơ đồ như ở hình 28.

Địch thân quái vật hàng ngày đi kiểm tra tù nhân, nhưng vì chỉ biết đếm đến 9 nên nó đếm dọc theo từng cạnh, nếu thấy số người ở mỗi cạnh là 9 thì yên trí rằng số tù nhân còn đủ. Chẳng mấy chốc



Hình 28

tráng sĩ đã nhận ra điều đó, và chàng còn biết được

ràng quái vật sẽ mất hết sức mạnh nếu cùng một lúc nhìn thấy chàng và ba tráng sĩ bạn của chàng vào đúng lúc mặt trời mọc. Nhưng ba tráng sĩ này hiện đang ở ba vương quốc lân cận.

Nhờ có chiếc chìa khóa thần mở được mọi ổ khóa, tráng sĩ đã cử ba người

lính tin cậy và dùng cảm đến tìm ba tráng sĩ kia. Để quái vật không nghi ngờ, chàng đã xếp 21 người vào các hẻm sao cho dọc theo mỗi cạnh hình vuông đều có 9 người. Hôm đó quái vật đi kiểm tra, quả nhiên nó bị mắc lừa, tin rằng số tù nhân vẫn không đổi.

Qua nhiều ngày đêm vất vả, ba người lính đã mời được ba tráng sĩ đến sào huyệt của quái vật. Lúc này, mặt trời chưa mọc, mà quái vật lại sắp đi kiểm tra. Tráng sĩ lại xếp 27 người vào các hẻm để đếm theo mỗi cạnh vẫn được 9 người.

Cuối cùng các tráng sĩ đã giết chết quái vật, cứu được tất cả mọi người bị nhốt ở nhiều hẻm ngầm dưới đất.

Câu chuyện kết thúc, nhưng còn một vấn đề được đặt ra : Làm thế nào xếp 21 người và 27 người vào 8 hẻm nói trên sao cho đếm dọc theo mỗi cạnh của hình vuông đều có 9 người ?

§ 9. DA GIÁC

1. Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là hình gồm n đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng thuộc một đường thẳng.

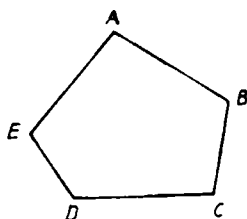
2. Một đa giác được gọi là *lồi* nếu nó nằm cùng phía đối với mỗi đường thẳng chứa cạnh (h.29).

Chú ý. Từ nay, khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.

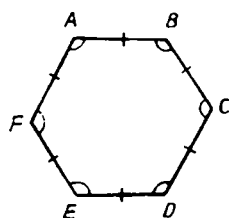
3. Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng $(n - 2) \cdot 2v$.

4. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau (h.30).

6. Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$



Hình 29



Hình 30

Ví dụ 11

a) Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

b) Vì sao có thể dùng các viên gạch như nhau có dạng hình vuông hoặc hình lục giác đều để lát sàn nhà ?

Giải

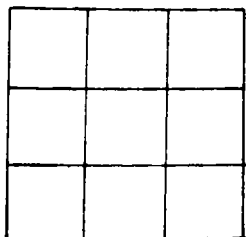
a) Mỗi góc của ngũ giác đều bằng : $\frac{(5 - 2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

Mỗi góc của lục giác đều bằng : $\frac{(6 - 2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$.

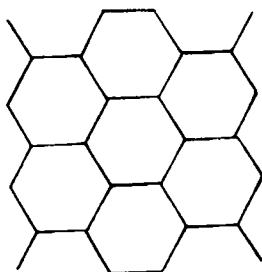
Mỗi góc của bát giác đều bằng : $\frac{(8 - 2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$.

b) Mỗi góc của hình vuông bằng 90° , mỗi góc của lục giác đều bằng 120° . Các số 90 và 120 đều là ước của 360.

Như vậy, ghép từng bộ bốn hình vuông với nhau như trên hình 31, hoặc ghép từng bộ ba hình lục giác đều với nhau như trên hình 32, một phần sàn nhà được lát kín.



Hình 31



Hình 32

Chú ý

Trong các đa giác đều, ngoài hình vuông và lục giác đều, còn có tam giác đều cũng có tính chất như trên.

Với các viên gạch hình đa giác đều khác, nếu dùng để lát sàn nhà thì đều có khe hở, vì số đo mỗi góc của chúng không phải là ước của 360. Thật vậy với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta có :

$$360 : \frac{(n-2) \cdot 180}{n} \Leftrightarrow 2n : n-2$$

$$\Leftrightarrow 2(n-2) + 4 : n-2 \Leftrightarrow 4 : n-2 \Leftrightarrow n \in \{3, 4, 6\}.$$

BÀI TẬP

68. a) Tính tổng các góc của đa giác 15 cạnh.

b) Đa giác nào có tổng các góc bằng 1620° .

69. Góc ngoài của đa giác là góc kề bù với một góc của đa giác, ta coi ở mỗi đỉnh của đa giác có một góc ngoài. Chứng minh rằng tổng các góc ngoài của đa giác bằng 360° .

70. Có đa giác nào có bốn góc nhọn không ?

71. Tính số cạnh của một đa giác biết rằng tổng các góc trong của nó bằng tổng các góc ngoài.

72. Tổng tất cả các góc trong và một trong các góc ngoài của một đa giác bằng 1100° . Tính số cạnh của đa giác đó.

73. a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh ?

74. Cho lục giác ABCDEF có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau. Chứng minh rằng các đường chéo AD, BE, CF đồng quy.

75. Cho lục giác đều ABCDEF. Trên các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA, lấy theo thứ tự các điểm A', B', C', D', E', F', sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng A'B'C'D'E'F' là lục giác đều.

Về phương pháp giải toán

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ.

I- Ví dụ mở đầu

Ví dụ 12

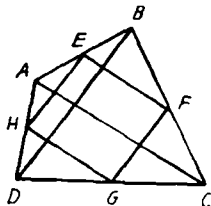
Tứ giác ABCD có E, F, G, H thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Xác định dạng của tứ giác EFGH.

b) Nếu ABCD là hình thoi thì EFGH là hình gì ?

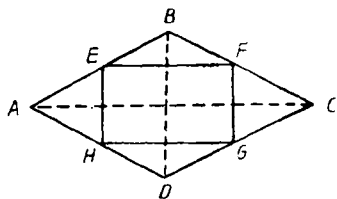
c) Nếu ABCD có $AC \perp BD$ thì EFGH là hình gì ?

Giải



Hình 3.5

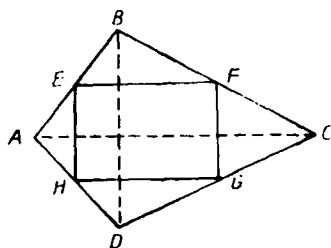
a) Dễ dàng chứng minh được EFGH là hình bình hành (h.33). Hình bình hành này có các cạnh song song với các đường chéo tương ứng của tứ giác ABCD và có độ dài bằng một nửa đường chéo ấy :



Hình 34

$$EF \parallel GH \parallel AC, EF = GH = \frac{AC}{2},$$

$$EH \parallel FG \parallel BD, EH = FG = \frac{BD}{2}.$$



Hình 35

b) Nếu ABCD là hình thoi (h. 34) thì $AC \perp BD$, do đó $EF \perp EH$. Khi đó hình bình hành EFGH trở thành hình chữ nhật.

c) (h. 35) Cũng chứng minh như câu b, EFGH là hình chữ nhật.

Nhận xét

Câu b của bài toán cho thấy : ABCD là hình thoi là *điều kiện đủ* để EFGH là hình chữ nhật. Nhưng để EFGH là hình chữ nhật, có nhất thiết ABCD cần phải là hình thoi không ? Câu c) chứng tỏ rằng *không cần* đến điều kiện ABCD là hình thoi, chỉ cần tứ giác ABCD có $AC \perp BD$ cũng dẫn đến EFGH là hình chữ nhật. Như vậy để EFGH là hình chữ nhật thì điều kiện "ABCD là hình thoi" chỉ là *điều kiện đủ* chứ không phải là *điều kiện cần*.

Ví dụ 12 đặt ra một nhu cầu tìm *điều kiện cần và đủ* để EFGH là hình chữ nhật.

II- Điều kiện cần và đủ

Ta nói A là *điều kiện đủ* để có B nếu mệnh đề " $A \Rightarrow B$ " là đúng.

Ta nói A là *điều kiện cần* để có B nếu mệnh đề "không $A \Rightarrow$ không B" là đúng hoặc mệnh đề " $B \Rightarrow A$ " là đúng.

Như vậy muốn chứng tỏ rằng A là điều kiện cần và đủ để có B, ta phải chứng minh cả hai mệnh đề sau :

$A \Rightarrow B$ (điều kiện đủ).

$B \Rightarrow A$ (điều kiện cần).

Lấy ví dụ :

Số tận cùng bằng 5 là điều kiện đủ để số đó chia hết cho 5 vì mệnh đề "số tận cùng bằng 5 thì chia hết cho 5 " là đúng, nhưng không phải là điều kiện cần vì mệnh đề "số chia hết cho 5 thì tận cùng bằng 5" là sai.

Số tận cùng bằng chữ số chẵn là điều kiện cần để số đó chia hết cho 4 vì mệnh đề "số chia hết cho 4 thì tận cùng bằng chữ số chẵn " là đúng, nhưng không phải là điều kiện đủ vì mệnh đề " số tận cùng bằng chữ số chẵn thì chia hết cho 4 " là sai.

Số có tổng các chữ số chia hết cho 3 là điều kiện cần và đủ để số đó chia hết cho 3.

III- Khi và chỉ khi

Điều kiện cần và đủ còn được diễn đạt bằng ngôn ngữ " khi và chỉ khi " : Nếu A là điều kiện đủ để có B, ta còn nói : *có B khi có A*. Nếu A là điều kiện cần để có B, ta còn nói : *có B chỉ khi có A*.

Ví dụ :

Một số chia hết cho 5 *khi* số đó tận cùng bằng 5.

Một số *chỉ* chia hết cho 4 *khi* số đó tận cùng bằng chữ số chẵn.

Một số chia hết cho 3 *khi và chỉ khi* tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.

Hình thang là hình thang cân *khi và chỉ khi* hai góc kề một đáy bằng nhau.

IV- Tìm điều kiện để một hình có một tính chất nào đó

Trong các bài toán tìm điều kiện để một hình có một tính chất nào đó, ta phải tìm điều kiện cần và đủ để hình có tính chất ấy.

Thường có ba cách trình bày lời giải của bài toán tìm điều kiện cần và đủ.

- *Cách 1.* Chứng minh tách riêng điều kiện cần, điều kiện đủ.
- *Cách 2.* Chứng minh những điều chung trong cả hai điều kiện cần và đủ, sau đó chứng minh riêng từng điều kiện.

Cách 3. Chứng minh đồng thời điều kiện cần và đủ.

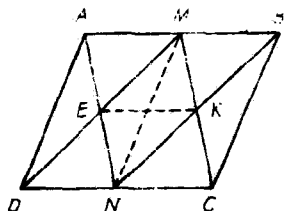
Trong ví dụ dưới đây, điều kiện cần và đủ được chứng minh đồng thời.

Ví dụ 13

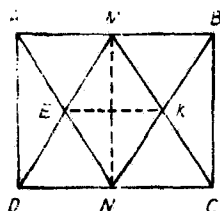
Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi E là giao điểm của AN và DM, gọi K là giao điểm của BN và CM. Tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để MENK là hình thoi.

Giải (h. 36)

Cách 1. Tứ giác AMCN có $AM = CN$, $AM \parallel CN$ nên là hình bình hành do đó $AN \parallel CM$. Chứng minh tương tự ta có $DM \parallel BN$. Suy ra MENK là hình bình hành.



Hình 36



Ta cũng có $AM \parallel DN$, $AM = DN$ nên AMND là hình bình hành.

Để hình bình hành MENK là hình thoi, cần và đủ là : $EN = EM$

$$\Leftrightarrow AN = DM \text{ (vì } EN = \frac{1}{2} AN, EM = \frac{1}{2} DM \text{)}.$$

$\Leftrightarrow$ hình bình hành AMND là hình chữ nhật.

$\Leftrightarrow$ hình bình hành ABCD là hình chữ nhật.

Cách 2. Trước hết chứng minh rằng MENK là hình bình hành như cách 1. Ta cũng có AMND, BMNC là hình bình hành nên $MN \parallel AD$. EK là đường trung bình của $\Delta MDC \Rightarrow EK \parallel DC$.

Để hình bình hành MENK là hình thoi, cần và đủ : $MN \perp EK$
 $\Leftrightarrow AD \perp DC \Leftrightarrow$ hình bình hành ABCD là hình chữ nhật.

Kết luận. Điều kiện để MENK là hình thoi là ABCD là hình chữ nhật.

BÀI TẬP

76. Điền các từ *cần*, hoặc *đủ*, hoặc *cần và đủ* vào các câu sau :

a) Bốn cạnh bằng nhau là điều kiện ... để tứ giác là hình bình hành.

b) Hai cạnh bên bằng nhau là điều kiện ... để hình thang là hình thang cân.

c) Các cặp cạnh đối bằng nhau là điều kiện ... để tứ giác là hình bình hành.

d) Hai góc kề một đáy bằng nhau là điều kiện ... để hình thang là hình thang cân.

77. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC. Tam giác ABC có điều kiện gì thì :

a) $AF = DE$.

b) AF là phân giác của góc A.

78. Cho tam giác ABC, các trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Gọi F và H thứ tự là trung điểm của GB và GC.

a) Tứ giác DEFH là hình gì ?

b) ΔABC có thêm điều kiện gì thì DEFH là hình chữ nhật ? là hình thoi ? là hình vuông ?

79. Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo BD, lấy các điểm E và K sao cho $BE = DK$.

a) Chứng minh rằng AKCE là hình bình hành.

b) Hình bình hành ABCD có điều kiện gì thì AKCE là hình thoi ?

c) Gọi M là giao điểm của AK và CE. Xác định vị trí của điểm K để M là trung điểm của CE.

80. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q thứ tự là trung điểm của AB, AC, CD, BD.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì ?

b) Các cạnh AD và BC có điều kiện gì thì MNPQ là hình chữ nhật? là hình thoi? là hình vuông?

81. Như ví dụ 13. Tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để tứ giác MENK là :

a) hình chữ nhật ; b) hình vuông .

82. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M,N thứ tự là trung điểm của AB,CD. Đường chéo BD cắt AN,CM thứ tự ở H,K.

a) Tứ giác MHNK là hình gì ?

b) Hình bình hành ABCD có điều kiện gì thì MHNK là hình chữ nhật ? là hình thoi ?

83. Tìm điều kiện của một tứ giác để đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối bằng nửa tổng hai cạnh đối còn lại.

84. Tìm điều kiện của một hình thang để một đoạn thẳng nối trung điểm hai đáy bằng nửa hiệu hai đáy.

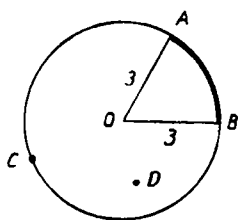
85. Tam giác ABC có các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Đường vuông góc với AB tại B và đường vuông góc với AC tại C cắt nhau ở K. Tam giác ABC có điều kiện gì thì BHCK là :

a) hình thoi ? b) hình chữ nhật ?

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

I- Mở đầu

Bên cạnh các bài toán về chứng minh, tính toán, dựng hình, chúng ta còn gặp các bài toán về tìm tập hợp điểm (còn gọi là quỹ tích).



Hình 37

Ta xét đường tròn $(O ; 3\text{cm})$ (h.37), lấy hai điểm A và B thuộc đường tròn. Phần đường tròn giới hạn bởi hai điểm A và B (kể cả hai điểm ấy) gọi là **cung AB**^(*). Phần mặt phẳng gồm tất cả các điểm nằm trên và nằm bên trong đường tròn $(O ; 3\text{cm})$ gọi là **hình tròn** $(O ; 3\text{cm})$.

(*) Trên hình 37 có hai cung AB. một cung nhỏ hơn nửa đường tròn. một cung lớn hơn nửa đường tròn. Khi nói cung AB mà không chú thích gì thêm. ta hiểu đó là cung nhỏ hơn hoặc bằng nửa đường tròn.

Tìm tập hợp các điểm cách điểm O một khoảng cách 3cm là *tìm đầy đủ* (không thừa, không thiếu) các điểm có tính chất nói trên.

Nếu trả lời tập hợp phải tìm là cung AB thì ta đã *kể thiếu*, chẳng hạn điểm C trên hình 37 không thuộc cung AB mà vẫn có tính chất nói trên.

Nếu trả lời tập hợp phải tìm là hình tròn $(O ; 3\text{cm})$ thì ta đã *kể thừa*, chẳng hạn điểm D trên hình 37 thuộc hình tròn $(O ; 3\text{cm})$ mà không có tính chất nói trên.

Câu trả lời đúng là : tập hợp phải tìm là đường tròn $(O ; 3\text{cm})$.

Như vậy muốn chứng tỏ tập hợp các điểm có chung một tính chất α nào đó là hình H , ta phải chứng minh :

Bước 1. Nếu điểm M có tính chất α thì điểm M thuộc hình H (tức là hình H không chứa thiếu điểm nào có tính chất α).

Bước 2. Nếu điểm M thuộc hình H thì điểm M có tính chất α (tức là hình H không chứa thừa điểm nào không có tính chất α).

Ta thường gọi bước 1 là phân thuận, khi đó bước 2 là phân đảo. Sau hai bước này ta mới kết luận rằng tập hợp các điểm có tính chất α là hình H .

II- Nhắc lại các tập hợp điểm đã học

1. Tập hợp các điểm cách một điểm O cố định một khoảng cách r không đổi là đường tròn tâm O bán kính r .

2. Tập hợp các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.

3. Tập hợp các điểm thuộc miền trong một góc cố định và cách đều hai cạnh của góc ấy là tia phân giác của góc ấy.

4. Tập hợp các điểm cách đường thẳng xy cố định một khoảng cách bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng cách bằng h .

III- Ví dụ

Ví dụ 14

Cho góc vuông xOy cố định, A là một điểm cố định thuộc Oy , B là điểm di chuyển trên tia Ox . Gọi M là điểm đối xứng với O qua AB . Tìm tập hợp các điểm M khi B di chuyển trên tia Ox .

Giải

a) *Phần thuận* (h.38)

M đối xứng với O qua AB nên AB là đường trung trực của OM , do đó $AM = AO$.

Điểm M cách điểm A cố định một khoảng bằng AO không đổi nên M thuộc đường tròn $(A; AO)$.

Giới hạn

Khi B trùng O thì M trùng O .

Khi B tiến ra xa vô hạn trên tia Ox thì M tiến đến C (C là điểm đối xứng với O qua A).

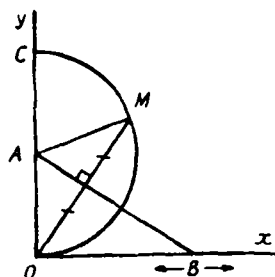
Điểm M chỉ di chuyển trên nửa đường tròn có đường kính là OC , trừ điểm C .

b) *Phần đảo* (h.39)

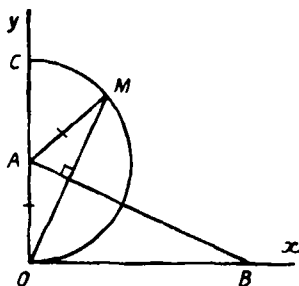
Lấy điểm M bất kì thuộc nửa đường tròn có đường kính OC (M khác C) với C là điểm đối xứng với O qua A . Qua A , vẽ đường vuông góc với OM , cắt Ox ở B . Ta có $\triangle AOM$ cân ở A , $AB \perp OM$ nên AB là đường trung trực của OM , do đó M đối xứng với O qua AB .

c) *Kết luận*

Khi B di chuyển trên tia Ox , tập hợp các điểm M phải tìm là nửa đường tròn có đường kính là OC , trừ điểm C .



Hình 38



Hình 39

(C là điểm đối xứng với O qua A ; nửa đường tròn thuộc miền trong của góc xOy).

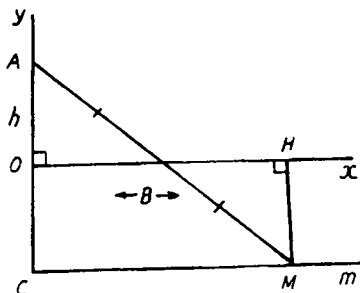
Ví dụ 15

Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định thuộc tia Oy, điểm B di chuyển trên tia Ox. Gọi M là điểm đối xứng với A qua B. Tìm tập hợp các điểm M khi B di chuyển trên tia Ox.

Giải

a) Phần thuận (h.40)

Kẻ $MH \perp Ox$. Ta có $\triangle MHB = \triangle AOB$ (trường hợp cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow MH = OA$. Đặt $OA = h$. Điểm M cách Ox cố định một khoảng cách h không đổi nên M thuộc đường thẳng song song với Ox, cách Ox khoảng cách h.



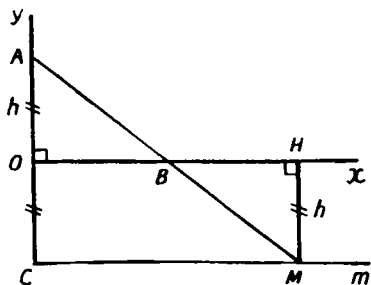
Hình 40

Giới hạn

Khi B trùng O thì M trùng C (C là điểm đối xứng với A qua O).

Điểm M chỉ di chuyển trên tia $Cm \parallel Ox$, cách Ox khoảng cách h ($h = OA$).

b) Phần đảo (h.41)



Hình 41

Lấy điểm M bất kì thuộc tia $Cm \parallel Ox$, cách Ox khoảng cách h (C đối xứng với A qua O).

Kẻ $MH \perp Ox$. Ta có $\triangle MHB = \triangle AOB$ (g.c.g) $\Rightarrow MB = AB$. Vậy M đối xứng với A qua B.

c) Kết luận

Khi B di chuyển trên tia Ox, tập hợp các điểm M phải tìm là

tia $Cm \parallel Ox$, cách Ox khoảng cách bằng OA (C đối xứng với A qua O).

IV- Cách giải bài toán tìm tập hợp điểm

1. Tìm hiểu đề bài và dự đoán tập hợp điểm phải tìm

Ở các ví dụ 14 và 15, để tìm hiểu đề bài, ta phân biệt :

- yếu tố cố định : góc vuông xOy , điểm A (ở cả hai ví dụ) ;
- yếu tố không đổi : độ dài AO (ở cả hai ví dụ) ;
- quan hệ không đổi : M đối xứng với O qua AB (ví dụ 14), M đối xứng với A qua B (ví dụ 15) ;
- yếu tố di chuyển : điểm B thuộc tia Ox , điểm M đang cần xác định vị trí (ở cả hai ví dụ).

Để dự đoán tập hợp các điểm M phải tìm, ta thường vẽ chính xác vài vị trí của điểm M (ít nhất là ba vị trí) rồi bằng trực giác đoán nhận điểm M di chuyển trên hình nào.

Khi dự đoán tập hợp điểm nên chú ý đến :

- *Điểm đặc biệt*. Ở ví dụ 14, khi B trùng O thì M trùng O , O là một điểm của tập hợp phải tìm. Ở ví dụ 15, khi B trùng O thì M trùng C , C là một điểm của tập hợp phải tìm.

- *Vị trí giới hạn*. Ở ví dụ 14, khi B di chuyển xa điểm O vô tận trên tia Ox thì M tiến đến C , điểm C là vị trí giới hạn của tập hợp phải tìm.

- *Điểm vô tận*. Ở ví dụ 15, khi điểm B di chuyển xa điểm O vô tận trên tia Ox thì M cũng di chuyển xa vô tận. Như vậy ta loại bỏ khả năng điểm M di chuyển trên một đường tròn.

- *Tính đối xứng*. Nếu ở ví dụ 14 và 15, ta cho điểm B di chuyển trên đường thẳng Ox thì chuyển động của điểm B có tính đối xứng qua trục Oy , do đó tập hợp các điểm M phải tìm cũng nhận Oy làm trục đối xứng.

2. Cách trình bày bài toán tìm tập hợp điểm

Bài toán tìm tập hợp điểm M thường được trình bày như sau :

a) Phần thuận

- Phát hiện quan hệ giữa điểm M cần xác định vị trí với các điểm cố định, các đường thẳng cố định. Nếu dự đoán điểm M thuộc đường tròn, ta chứng tỏ nó cách một điểm cố định một khoảng không đổi. Nếu dự đoán điểm M thuộc đường thẳng, ta chứng tỏ nó cách đều hai điểm cố định, hoặc cách đều hai cạnh của một góc cố định, hoặc cách một đường thẳng cố định một khoảng cách không đổi.

Để phát hiện ra các quan hệ ấy, có thể phải vẽ thêm đường phụ (đoạn thẳng MH trong ví dụ 15).

- Dựa vào các tập hợp điểm cơ bản đã học, chỉ ra điểm M thuộc một hình H nào đó.

- Giới hạn, nếu điểm M không thuộc toàn bộ hình H mà chỉ thuộc hình H' , một bộ phận của hình H (nửa đường tròn, trừ điểm C trong ví dụ 14 ; tia Cm trong ví dụ 15).

b) Phần đảo (*)

- Lấy điểm M bất kì thuộc hình H' . Bằng cách vẽ hình, tạo ra các điểm chuyển động khác được nêu trong bài toán (điểm B ở ví dụ 14 và 15).

- Chứng tỏ rằng điểm M có tính chất mà đề bài nêu lên (M đối xứng với O qua AB ở ví dụ 14, M đối xứng với A qua B ở ví dụ 15).

c) Kết luận

Tập hợp các điểm M phải tìm là hình H' .

BÀI TẬP

86. Tìm tập hợp các đỉnh B và các giao điểm O của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$ có AD cố định, AB có độ dài không đổi bằng 4cm .

87. Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định nằm trên tia Ox . Gọi Oz là tia bất kì nằm giữa hai tia Ox và Oy . Gọi M là điểm đối xứng với A qua Oz . Tìm tập hợp các điểm M khi tia Oz thay đổi vị trí.

(*) Chỉ tiết hơn về cách chứng minh đảo và tìm tập hợp điểm, xem *Một số vấn đề phát triển Hình học 8*.

88. Cho tam giác ABC, điểm D di chuyển trên cạnh BC. Qua D kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở E. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở F. Gọi M là trung điểm của EF.

a) Chứng minh rằng A, M, D thẳng hàng.

b) Tìm tập hợp các điểm M khi D di chuyển trên cạnh BC.

89. Cho đoạn thẳng AB, điểm M bất kì nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác AMC vuông cân ở C, BMD vuông cân ở D. Tìm tập hợp các trung điểm I của CD khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB.

90. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Các điểm D, E thứ tự di chuyển trên các cạnh AB, AC sao cho $DHE = 90^\circ$. Tìm tập hợp các trung điểm M của DE.

91. Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định thuộc tia Oy, điểm B di chuyển trên tia Ox. Vẽ tam giác đều ABC (C khác phía với O đối với AB). Tìm tập hợp các điểm C.

92*. Cho góc vuông xOy cố định. Một tam giác vuông cân ABC thay đổi vị trí có $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = AC = a$ (không đổi), $B \in Ox$, $C \in Oy$, A và O khác phía đối với BC. Tìm tập hợp các điểm A.

93. Cho góc xOy cố định. Tìm tập hợp các điểm M nằm trong hoặc nằm trên cạnh của góc xOy sao cho hiệu các khoảng cách từ M đến Ox và từ M đến Oy bằng 1cm.

94. Cho góc xOy cố định. Tìm tập hợp các điểm M nằm trong hoặc nằm trên cạnh của góc xOy sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh của góc bằng 3cm.

95*. Cho tam giác ABC.

a) Các điểm D, E thứ tự di chuyển trên các tia BA, CA sao cho $BD = CE$. Tìm tập hợp các trung điểm M của DE.

b) Cũng hỏi như câu a nếu D, E thứ tự di chuyển trên tia BA và tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$.

DỤNG HÌNH

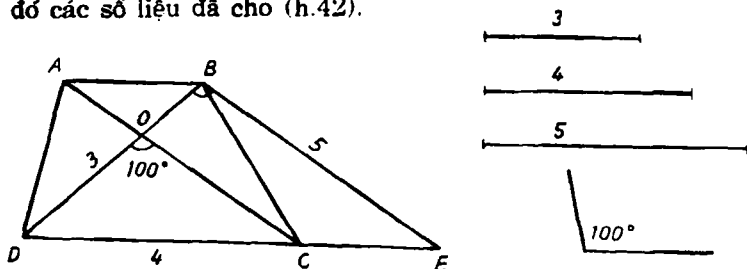
Xét ví dụ sau :

Ví dụ 16

Dựng hình thang ABCD biết đáy $CD = 4\text{cm}$, các đường chéo $AC = 5\text{cm}$, $BD = 3\text{cm}$, và $\widehat{COD} = 100^\circ$ (O là giao điểm của hai đường chéo).

Tìm tòi cách giải

Trước hết ta *phân tích* bài toán : Ta vẽ hình thang ABCD và ghi vào đó các số liệu đã cho (h.42).



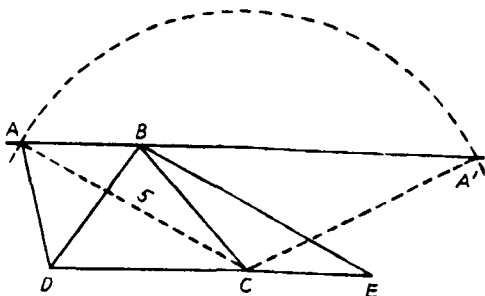
Hình 42

Có thể dựng được ngay góc COD, hoặc một trong ba đoạn thẳng CD, AC, BD. Nhưng sau đó lại không dựng tiếp được đoạn thẳng khác.

Các đoạn thẳng AC, BD cắt nhau tạo thành góc COD có số đo 100° , nhưng vị trí điểm O trên các đoạn thẳng ấy chưa xác định. Ta nghĩ đến việc "dời" đoạn thẳng AC đến một vị trí mới thuận lợi hơn (mà vẫn tạo với BD góc 100°), đó là vị trí hai đoạn thẳng ấy có một đầu chung. Do đó ta vẽ qua B đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng DC tại E. Ta có $BE = AC = 5\text{cm}$, $\widehat{EBD} = \widehat{COD} = 100^\circ$. Như vậy trong hình vẽ xuất hiện $\triangle DBE$ dựng được, từ đó dễ dàng dựng được điểm C và điểm A.

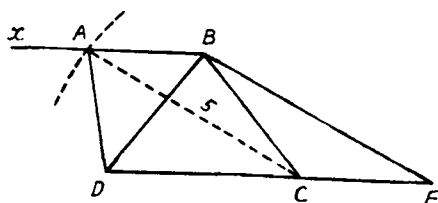
Trong phần *cách dựng*, ta trình bày thứ tự từng bước dựng dựa vào các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản (xem Các bài tập và chuyên đề về tam giác).

Để kiểm tra xem hình dựng được có thỏa mãn điều kiện của bài toán không, ta phải *chứng minh*. Chú ý rằng sau khi dựng $\triangle BDE$ và điểm C, có thể dựng điểm A bằng nhiều cách. Với mỗi cách dựng, có một cách chứng minh tương ứng.



Hình 43

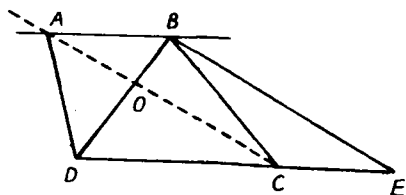
Cách 1. Vẽ đường thẳng đi qua B song song với DE và vẽ đường tròn (C ; 5cm), chúng có hai giao điểm (h.43), chỉ có một trong hai giao điểm là phù hợp với bài toán.



Hình 44

Cách 2. A là giao điểm của đường tròn (C ; 5cm) và tia Bx song song với BE (h.44) trong đó tia Bx và điểm C nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BE.

Cách 3. A giao điểm của đường thẳng đi qua B song song với DE và đường thẳng đi qua C song song với BE (h.45).



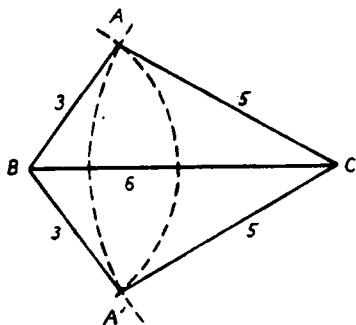
Hình 45

Rõ ràng là nên chọn cách dựng 3 để chứng minh được đơn giản :

$AC = BE = 5\text{cm}$ (tính chất đoạn chắn). ABCD là hình thang (vì $AB \parallel CD$) có đáy $DC = 4\text{cm}$, các đường chéo $BD = 3\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$, $\widehat{COD} = \widehat{DBE} = 100^\circ$ (O là giao điểm của AC và BD).

Hình thỏa mãn các điều kiện của bài toán gọi là *thử nghiệm hình*. Trong việc quy định số thử nghiệm hình của bài toán, người ta phân biệt ra hai loại bài toán dựng hình : dựng hình về kích thước và dựng hình về vị trí.

Ví dụ. Dựng ΔABC biết độ dài ba cạnh : $BC = 6\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$. Đây là bài toán dựng hình về kích thước : tam giác phải có kích thước như trên, còn vị trí của nó có thể tùy ý. Sau khi dựng cạnh $BC = 6\text{cm}$, có thể dựng được hai tam giác ABC và $A'BC$ thỏa mãn điều kiện của bài toán (h.46). Hai tam giác này bằng nhau (c.c.c) và chỉ coi là một nghiệm hình.



Hình 46

Nếu diễn đạt nội dung của bài toán trên dưới dạng : "Cho đoạn thẳng $BC = 6\text{cm}$. Dựng ΔABC sao cho $AB = 3\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$ " thì đây lại là bài toán dựng hình về vị trí. Trong bài toán này, ΔABC không những phải có kích thước như đề bài mà còn phải có vị trí nhất định sau khi đã xác định vị trí của đoạn thẳng BC . Các tam giác ABC và $A'BC$ tuy bằng nhau nhưng có vị trí khác nhau, chúng được coi là hai nghiệm hình.

Như vậy, trong bài toán dựng hình về kích thước, hai hình bằng nhau (*) được coi là một nghiệm hình ; còn trong bài toán dựng hình về vị trí, hai hình bằng nhau nhưng có vị trí khác nhau được coi là hai nghiệm hình.

Nói về số nghiệm hình của bài toán, đó là nội dung của phần *biện luận*. Ở ví dụ 16, ΔBDE dựng được (ta xem như dựng được duy nhất một tam giác BDE vì đây là bài toán dựng hình về kích thước), sau đó ta xác định được duy nhất điểm C , điểm A , do đó bài toán có một nghiệm hình.

(*) Hai tứ giác gọi là bằng nhau nếu chúng có bốn cặp cạnh bằng nhau đôi một và bốn cặp góc tương ứng bằng nhau.

Qua ví dụ trên, ta thấy lời giải bài toán dựng hình gồm bốn bước :

1. Phân tích

- Giả sử đã có một hình thỏa mãn các điều kiện của bài toán.
- Có thể vẽ thêm những hình mới nhằm làm xuất hiện các yếu tố nêu trong đề bài hoặc làm xuất hiện các hình có thể dựng được ngay.
- Dưa việc dựng các yếu tố còn lại về các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản đã học.

2. Cách dựng

Nêu thứ tự từng bước dựng hình dựa vào các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản, đồng thời thể hiện các bước dựng hình đó trên hình vẽ.

3. Chứng minh

Bằng lập luận, chứng tỏ rằng với cách dựng như trên, hình đã dựng thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

4. Biện luận

Chỉ rõ trong trường hợp nào bài toán có nghiệm hình và có bao nhiêu nghiệm hình.

BÀI TẬP

96. Dựng tứ giác ABCD biết :

- a) $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 120^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$, $AB = 2 \text{ cm}$, $AD = 3 \text{ cm}$;
- b) $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$, $AB = a$, $AD = b$.

97. Dựng tứ giác ABCD có AC là phân giác của góc A biết độ dài bốn cạnh : $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 3,5 \text{ cm}$, $CD = 3 \text{ cm}$, $DA = 3 \text{ cm}$.

98. Dựng hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) biết $AD = 2 \text{ cm}$, $DC = 4 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$, $\hat{D} = 70^\circ$.

99. Dựng hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) biết $AD = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$, $\hat{D} - \hat{ACD} = 20^\circ$.

100. Dựng hình thang cân ABCD có đường chéo DB là phân giác của góc D biết đáy CD bằng a, đường cao bằng h.

101. Dựng ΔABC biết hai cạnh $AB = 2\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$ và trung tuyến $AM = 2,5\text{cm}$.

102. Dựng hình chữ nhật $ABCD$ biết $DC - AD = 1\text{cm}$, $\widehat{BOC} = 80^\circ$ (O là giao điểm hai đường chéo).

103. Dựng hình thoi biết độ dài một cạnh và tổng của hai đường chéo.

104. Dựng hình vuông biết hiệu của đường chéo và cạnh của nó bằng $1,5\text{cm}$.

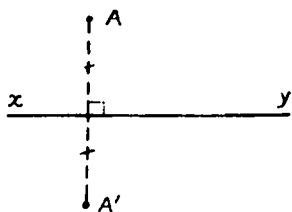
105. Dựng hình lục giác đều biết một trong các điều kiện sau :

- đường chéo nhỏ nhất của nó bằng 3cm ;
- đường chéo lớn nhất của nó bằng 4cm .

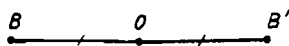
VẬN DỤNG CÁC PHÉP BIẾN HÌNH VÀO TÌM TẬP HỢP ĐIỂM VÀ Dựng HÌNH

I- So lược về phép biến hình

Trên hình 47, điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng xy ; trên hình 48, điểm B' đối xứng với điểm B qua điểm O . Phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm là các phép biến hình.



Hình 47



Hình 48

Phép biến hình của mặt phẳng là một quy tắc cho tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một và chỉ một điểm M' của mặt phẳng (M gọi là *tạo ảnh* của M' , M' là *ảnh* của M) sao cho :

- hai điểm M, N khác nhau có hai ảnh M', N' khác nhau ;
- mỗi điểm thuộc mặt phẳng đều có tạo ảnh thuộc mặt phẳng.

Chi tiết hơn về phép biến hình và các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, tịnh tiến, xem *Một số vấn đề phát triển Hình học 8*.

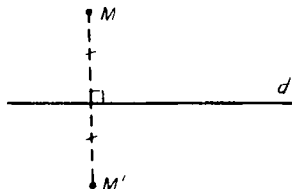
II- Một số phép biến hình

1. Phép đối xứng trục

Cho đường thẳng d . Phép đối xứng trục d là phép biến hình :

- biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó ;

- biến mỗi điểm M không thuộc d của mặt phẳng thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của MM' (h.49).



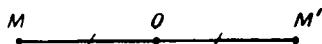
Hình 49

2. Phép đối xứng tâm

Cho điểm O . Phép đối xứng tâm O là phép biến hình :

- biến điểm O thành chính nó ;

- biến mỗi điểm M không trùng O của mặt phẳng thành M' sao cho O là trung điểm của MM' (h.50).



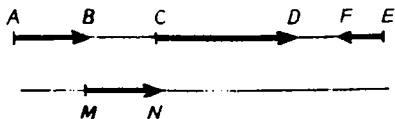
Hình 50

3. Phép tịnh tiến

a) Vectơ

Đoạn thẳng AB có định hướng : A là điểm đầu, B là điểm cuối gọi là *vectơ* AB , kí hiệu $\overrightarrow{AB}$.

A là gốc của vectơ, B là ngọn, độ dài của đoạn thẳng AB gọi là *độ dài* của vectơ AB , đường thẳng AB gọi là *giá* của vectơ AB .



Hình 51

Vectơ có gốc và ngọn trùng nhau gọi là *vectơ không*.

Trên hình 51 ta có bốn vectơ cùng phương, chúng có thể :

- cùng hướng : $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$;

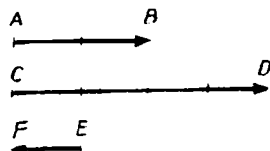
- hoặc ngược hướng : $\vec{EF}$ và $\vec{AB}$.
 $\vec{EF}$ và $\vec{CD}$, $\vec{EF}$ và $\vec{MN}$.

Hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{MN}$ cùng hướng và cùng độ dài gọi là *hai vectơ bằng nhau*.

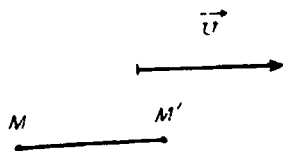
Trên hình 52 :

- vectơ $\vec{CD}$ cùng hướng với $\vec{AB}$, có độ dài gấp đôi độ dài của $\vec{AB}$, ta viết :
 $\vec{CD} = 2.\vec{AB}$;

- vectơ $\vec{EF}$ ngược hướng với $\vec{AB}$, có độ dài bằng một nửa độ dài của $\vec{AB}$, ta viết : $\vec{EF} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$.



Hình 52



Hình 53

b) Phép tịnh tiến

Cho vectơ $\vec{v}$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép biến hình biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành điểm M' sao cho $\vec{MM'} = \vec{v}$ (h.53).

III- Tính chất của các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, tịnh tiến

Các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, tịnh tiến đều có tính chất : chúng biến ba điểm A, B, C thẳng hàng thành ba điểm A', B', C' thẳng hàng ; nếu C nằm giữa A và B thì C' nằm giữa A' và B' .

Trong các phép biến hình nói trên :

- một đường thẳng biến thành một đường thẳng ;
- một tia biến thành một tia ;
- một đoạn thẳng biến thành một đoạn thẳng bằng nó ;
- một góc biến thành một góc bằng nó ;
- một tam giác biến thành một tam giác bằng nó ;
- một đường tròn biến thành một đường tròn bằng nó.

IV- Vận dụng các phép biến hình vào tìm tập hợp điểm và dựng hình

Người ta vận dụng tính chất sau để tìm cách giải các bài toán tìm

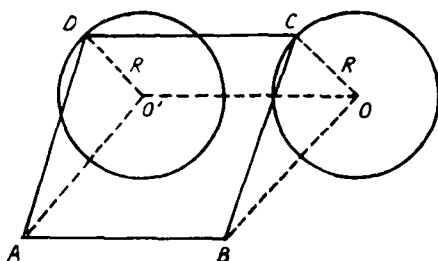
tập hợp điểm và dựng hình :

Nếu điểm M' là ảnh của M trong một phép biến hình thì khi điểm M chuyển động tạo thành một hình H , điểm M' sẽ chuyển động tạo thành hình H' , ảnh của hình H trong phép biến hình nói trên.

Ví dụ 17

Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B cố định. Điểm C di chuyển trên đường tròn đó. Tìm tập hợp các điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Phân tích bài toán bằng ngôn ngữ biến hình



Hình 54

D là ảnh của C trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{BA}$, tập hợp các điểm C là đường tròn $(O; R)$ nên tập hợp các điểm D là ảnh của đường tròn $(O; R)$ trong phép tịnh tiến nói trên; đó là đường tròn $(O'; R)$ trong đó O' là ảnh của O trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{BA}$, (h.54).

Cách giải thông thường

Dựng hình bình hành $ABOO'$ thì O' là điểm cố định. Ta có $DC \parallel AB$, $DC = AB$, mà $O'O \parallel AB$, $O'O = AB$ nên $DC \parallel O'O$, $DC = O'O$, do đó $DCOO'$ là hình bình hành, suy ra $O'D = OC = R$.

D cách O' cố định khoảng cách R không đổi nên D di chuyển trên đường tròn $(O'; R)$.

Bạn đọc tự chứng minh phân đảo.

Ví dụ 18

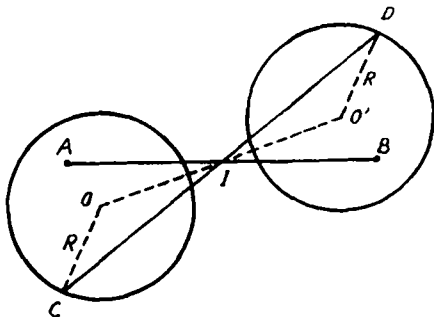
Cho đường tròn $(O; R)$, điểm A nằm bên trong đường tròn, điểm B nằm bên ngoài đường tròn.

a) Điểm C di chuyển trên đường tròn. Tìm tập hợp các điểm D sao cho $ACBD$ là hình bình hành.

b) Dụng hình bình hành ACBD sao cho C và D thuộc đường tròn $(O; R)$.

Giải

a) (h.55) *Phân tích bằng ngôn ngữ biến hình*



Hình 55

Gọi I là trung điểm của AB thì I là điểm cố định. Điểm D đối xứng với C qua I, tập hợp các điểm C là đường tròn $(O; R)$ nên tập hợp các điểm D là ảnh của đường tròn $(O; R)$ trong phép đối xứng tâm I, đó là đường tròn $(O'; R)$ trong đó O' là điểm đối xứng với O qua I.

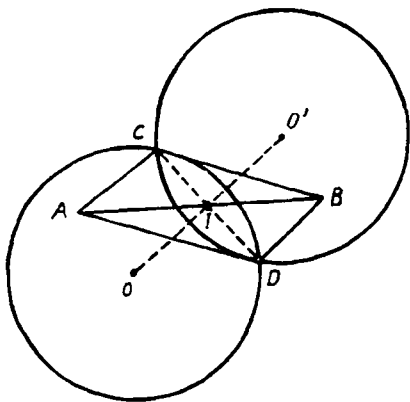
Bạn đọc tự trình bày cách giải thông thường.

b) (h.56) *Phân tích bằng ngôn ngữ biến hình*

Điểm D phải thỏa mãn hai điều kiện :

- Theo câu a, điểm D thuộc đường tròn $(O'; R)$.
- Theo đề bài, điểm D thuộc đường tròn $(O; R)$.

Giao điểm của hai đường tròn đó cho ta điểm D.



Hình 56

Cách giải thông thường

Phân tích

Giả sử đã dựng được hình bình hành ACBD có $C, D \in (O; R)$.

Gọi I là trung điểm của AB , O' là điểm đối xứng với O qua I .

Tứ giác $OCO'D$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên là hình bình hành, do đó $O'D = OC = R$.

Điểm D thỏa mãn hai điều kiện :

- D thuộc đường tròn $(O ; R)$;
- D thuộc đường tròn $(O' ; R)$.

Từ đó dựng tiếp được điểm C .

Cách dựng

- Dựng trung điểm I của AB .
- Dựng O' đối xứng với O qua I .
- Dựng đường tròn $(O' ; R)$.
- Gọi D là giao điểm (nếu có) của $(O' ; R)$ và $(O ; R)$.
- Gọi C là giao điểm của DI với (O) , $ACBD$ là hình bình hành phải dựng.

(Chú ý rằng C chính là giao điểm thứ hai của các đường tròn tâm O' và tâm O nói trên nếu chúng có hai điểm chung).

Chứng minh

Bạn đọc tự chứng minh.

Biện luận

Nếu các đường tròn (O') và (O) có hai điểm chung (h. 56) thì hai giao điểm đó chính là C và D : bài toán có một nghiệm hình.

Nếu các đường tròn (O') và (O) không có điểm chung (h.55) thì bài toán vô nghiệm.

Nếu các đường tròn (O') và (O) chỉ có một điểm chung thì bài toán vô nghiệm (khi đó hình bình hành $ACBD$ "suy biến" thành đoạn thẳng).

Ví dụ 19

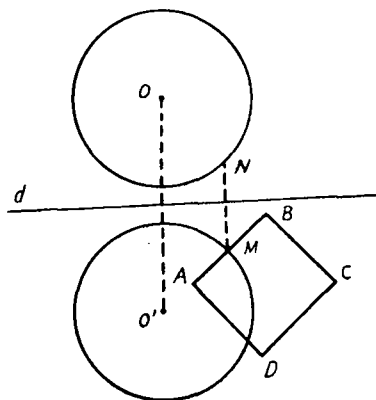
Cho đường thẳng d . Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ d , cho đường tròn $(O ; R)$ và hình vuông $ABCD$. Dựng đoạn thẳng MN có M thuộc một cạnh hình vuông, N thuộc đường tròn sao cho d là đường trung trực của MN .

Giải (h.57)

Phân tích bằng ngôn ngữ biến hình

M là ảnh của N trong phép đối xứng trục d .

Khi N di chuyển trên đường tròn $(O; R)$ thì M di chuyển trên ảnh của đường tròn ấy trong phép đối xứng trục d , đó là đường tròn $(O'; R)$ trong đó O' đối xứng với O qua d .



Hình 57

Cách dựng

- Dựng O' đối xứng với O qua d .
- Dựng đường tròn $(O'; R)$.
- Giao điểm của đường tròn $(O'; R)$ với cạnh hình vuông cho ta điểm M.

Chứng minh

Bạn đọc tự chứng minh.

Biện luận

Tùy số giao điểm của đường tròn $(O'; R)$ với cạnh hình vuông mà bài toán có từ 0 đến 8 nghiệm hình (trên hình 57 bài toán có 2 nghiệm hình).

BÀI TẬP

Đối xứng trục

106. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$). Dựng điểm M thuộc cạnh AD sao cho tia phân giác của góc BMC song song với hai đáy hình thang.

107. Cho hai đường thẳng b và c không vuông góc với nhau và một điểm A nằm ngoài hai đường thẳng ấy. Dựng các điểm B thuộc b , C thuộc c sao cho b và c là các đường phân giác trong hoặc ngoài tại đỉnh B và C của tam giác ABC.

Đối xứng tâm

108. Cho tam giác ABC có điểm A nằm ngoài tờ giấy. Hãy dựng, đường trung tuyến đi qua đỉnh A.

109. Cho ba điểm E, O, F không thẳng hàng. Dựng hình vuông ABCD có O là giao điểm hai đường chéo, E và F thứ tự thuộc các đường thẳng AB và CD.

Tịnh tiến

110. Cho tam giác ABC. Dựng điểm D thuộc cạnh AB, điểm E, thuộc cạnh AC sao cho $AE = BD$ và $DE \parallel BC$.

111. Dựng tứ giác ABCD biết $AB = 3\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, $AD = 5\text{cm}$, $\widehat{AID} = 50^\circ$ (I là giao điểm của các đường thẳng AB và CD).

112. Dựng hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) biết hai đáy :

$AB = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, hai đường chéo : $AC = 5\text{cm}$, $BD = 4\text{cm}$.

113. Cho hai địa điểm A và B nằm về hai phía của một con sông (giả thiết rằng hai bờ sông là hai đường thẳng song song). Hãy tìm các điểm C và D ở hai bờ sông sao cho CD vuông góc với bờ sông và độ dài $AC + CD + BD$ ngắn nhất (A và C nằm cùng phía với con sông).

Bài đọc thêm

TỪ MIỀN TRONG VÀ MIỀN NGOÀI CỦA ĐA GIÁC ĐẾN CÁC MỀ CUNG

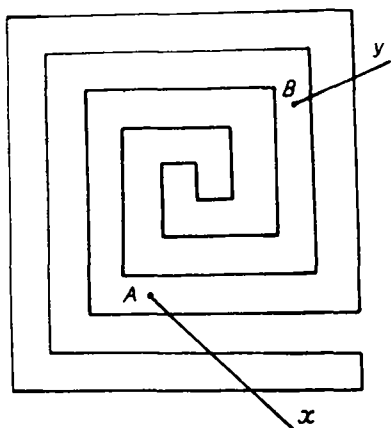
1. Định lý Jordăng

Hình 58 biểu diễn một đa giác đơn^(*) và hai điểm A, B. Liệu có thể tìm được một đường đi từ A đến B mà không cắt cạnh nào của đa giác hay không ?

Câu trả lời là : không tìm được. Điều này đã được nhà toán học Pháp Jordăng (Camille Jordan, 1838 - 1922) chứng minh trong định lý mang tên ông :

(*) Đa giác đơn là đa giác mà:

- mỗi đỉnh chỉ là điểm chung của hai cạnh;
- hai cạnh bất kì hoặc không cắt nhau, hoặc cắt nhau tại đỉnh.



Hình 58

Mỗi đa giác đơn phân chia mặt phẳng thành hai tập hợp có tính chất :

- hai điểm bất kì thuộc cùng một tập hợp đều có thể nối được với nhau bởi một đường gấp khúc không cắt cạnh đa giác ;
- bất kì đường gấp khúc nào nối hai điểm thuộc hai tập hợp cũng phải cắt cạnh đa giác.

Mỗi tập hợp điểm như vậy gọi là một *miền* ; miền chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó gọi là *miền ngoài*, miền còn lại gọi là *miền trong*.

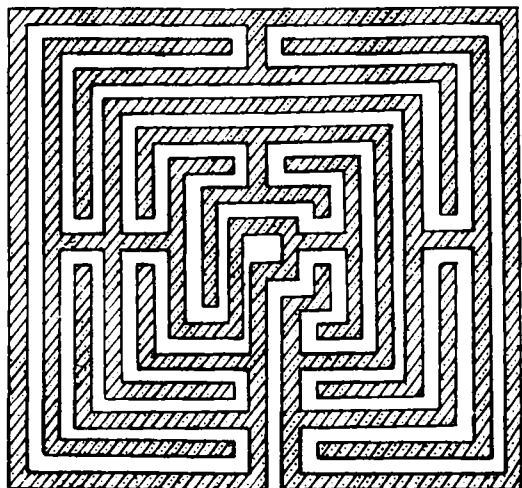
Với một hình chữ nhật, xác định một điểm thuộc miền trong hay miền ngoài của nó không có gì khó khăn. Nhưng với đa giác ở hình 58, điều này không phải đơn giản. Định lí Jordăng cho phép xác định nhanh chóng một điểm thuộc miền trong hay miền ngoài của đa giác : chỉ cần vẽ qua điểm đó một tia không đi qua đỉnh nào của đa giác rồi đếm số giao điểm của tia đó với các cạnh của đa giác :

- nếu số giao điểm là số chẵn thì điểm đó thuộc miền ngoài của đa giác ;
- nếu số giao điểm là số lẻ thì điểm đó thuộc miền trong.

Một cách trực quan, ta thấy rằng từ miền ngoài của đa giác, muốn vào miền trong của đa giác, phải "vượt biên giới" một lần, sau đó muốn ra miền ngoài của đa giác, phải "vượt biên giới" một lần nữa.

Trên hình 58, tia Ax có ba giao điểm với các cạnh đa giác nên A thuộc miền trong của đa giác, tia By có hai giao điểm với các cạnh

đa giác nên B thuộc miền ngoài của đa giác. Do A và B thuộc hai miền khác nhau nên mọi đường gấp khúc nối từ A đến B đều phải cắt cạnh của đa giác.



Hình 59

2. Mê cung và những truyền thuyết

Hình 59 là một đa giác đơn, cũng là một mê cung ở Italia thế kỷ XII. Mê cung (hay mê lộ, mê đạo, tiếng Hi Lạp là *labyrinth*) thường được hiểu là một hệ thống đường ngầm gồm nhiều nhánh ngang dọc nối chằng chịt với nhau. Mê cung cũng được dùng để chỉ những công trình gồm

rất nhiều lối đi, hành lang bị bao bọc xung quanh với vô vàn ngã ba, ngã tư, ngõ cụt.

Người bị dẫn vào mê cung chỉ nhìn thấy một phần của đường đi nên rất khó định hướng và có thể không tìm được lối ra. Các mê cung trong các Kim tự tháp ở Ai Cập là những đường hầm tối đen như mực, chỉ cao có một mét, ngang một mét. Càng vào sâu, đường càng hóc hiểm, có đoạn dẫn đến giếng nước, có đoạn dẫn đến bức tường đá. Phải rất khó khăn mới tìm đến được những gian buồng rộng rãi có quan tài ướp xác các vua chúa, hoàng hậu.

Theo truyền thuyết Hi Lạp thì mê cung đầu tiên được xây dựng trên đảo Cret, một đảo lớn ở Địa Trung Hải. Trên đảo này có con quỷ Minôtap đầu bò mình người. Nó bắt người thợ xây tài ba Dédan phải làm một mê cung gồm vô số căn phòng với những đường ngang lối dọc ngoằn ngoèo và những ngõ cụt bất ngờ. Chín năm một lần, dân thành Aten phải cống nạp bảy cặp trai tài gái sắc nhốt vào mê

cung cho quái vật ăn thịt. Đã có nhiều tráng sĩ lần mò vào mê cung, nhưng nếu không bị lạc lối rồi kiệt sức thì cũng không chống cự nổi với sức mạnh hung hãn của quái vật. Cuối cùng hoàng tử Têđê, con trai vua Êghe, đã vào được mê cung nhờ lần theo sợi chỉ của nàng công chúa xinh đẹp Ariatna, con vua Minôt trao cho. Sau một trận chiến đấu quyết liệt, chàng đã giết chết quái vật và ra được khỏi mê cung cũng bởi chính cuộn chỉ này (h.60).



Hình 60

Mê cung đã trở thành một từ để chỉ một tình huống phức tạp nan giải, còn *cuộn chỉ Ariatna* được dùng để chỉ một giải pháp hợp lý sáng suốt nhằm thoát khỏi tình trạng bế tắc.

Mê cung khá phổ biến ở nhiều nước châu Âu trước kia. Vào thế kỷ XII, vua Anh Henri II đã xây một mê cung để dấu cô tình nhân xinh đẹp, nhưng cuối cùng cũng bị hoàng hậu Êlêôno phát hiện nhờ dùng "sợi chỉ Ariatna".

Ở Trung Quốc, trận đồ bát quái bằng đá do Khổng Minh bày ra cũng chính là một mê cung. Tướng Ngó là Lục Tốn không biết đã đi vào từ cửa *Tử*, lạc lối không tìm được đường ra, may nhờ cụ già Hoàng Thừa Ngạn, chính là bố vợ Khổng Minh, dắt ra cửa *Sinh* mới thoát chết.

3. Rất có thể Cổ Loa là một thành mê cung^(*)

Việc xây dựng thành Cổ Loa của An Dương Vương thế kỷ III-II trước công nguyên đã được huyền thoại hóa với thần Kim Quy. Nhưng thành Cổ Loa lại là một công trình có thật.

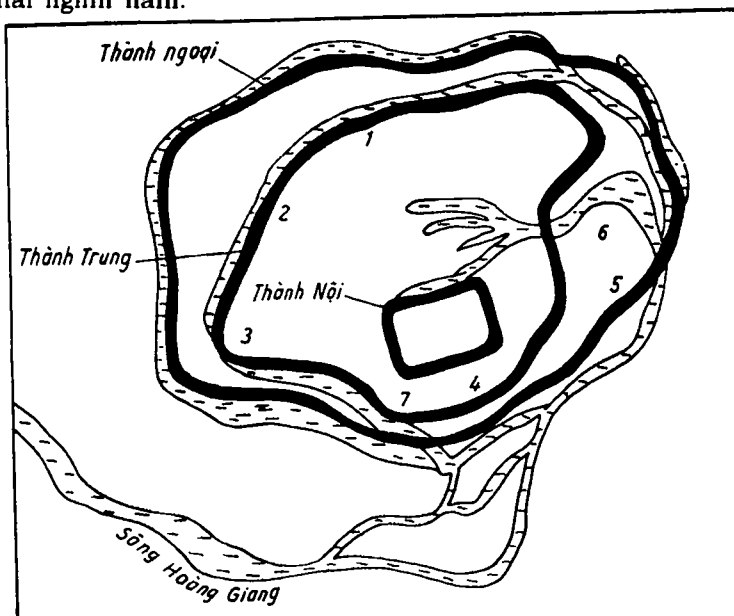
(*) Theo Nguyễn Như Mai, báo *Nhân Dân* chủ nhật ngày 28 - 5 - 1989.

Theo sử cũ thành được xây dựng quanh co *chín lớp* theo hình con ốc. Di tích còn lại đến nay chỉ thấy *ba lớp* gồm ba vòng thành đắp bằng đất khếp kín theo thứ tự từ trong ra ngoài là thành Nội, thành Trung và thành Ngoại.

Thành Nội hình chữ nhật chu vi 1650 m, mặt thành cao 5m, rộng 6-12m. Thành Trung chu vi 6500m, mặt thành rộng 10m, chỗ cao nhất là 10m. Thành Ngoại chu vi 8000m, đoạn cao nhất còn lại khoảng 8m (h.61).

Từ trước đến nay, đã có nhiều tác phẩm phân tích tài năng sáng tạo của người Âu Lạc trong việc đắp thành và giá trị quân sự của thành Cổ Loa.

Nhưng có một điều rất rõ ràng mà chưa thấy ai đề cập : *thành Cổ Loa thực chất là một mê cung* rất độc đáo, ra đời cách đây đã hơn hai nghìn năm.



Hình 61. Thành Cổ Loa :

- 1- cửa Bắc : 2- cửa Tây Bắc : 3- cửa Tây Nam :
4- cửa Nam : 5- cửa Đông : 6- đầm Cá : 7- giếng Ngọc.

Chỉ căn cứ trên bình đồ của ba lớp thành còn lại cũng đủ thấy sự phức tạp và đầy bí ẩn của việc thiết kế mê cung này. Các lớp thành bao quanh có dạng đồng tâm lệch, ở phía nam sát gần nhau, tỏa rộng ra về phía bắc. Thành Nội chỉ có một cổng ở cửa Nam. Các cổng ở thành Trung và thành Ngoại không thẳng tuyến mà dặt lệch nhau. Các vách thành trùng điệp kết hợp với mạng lưới sông, hào, ao, đầm chằng chịt tạo thành những chỗ đón lõng, những vật cản khó vượt qua được. Ở đây có cả những cửa "tử" như cửa Đông. Muốn đột nhập thành tại cửa này, phải vượt sông Hoàng Giang, nhưng rẽ sang trái vấp phải ngách cụt, rẽ sang phải sa lầy vào đầm Cà.

Cửa Nam là hướng tiếp cận với thành Nội gần nhất, nhưng ở đây thành cao, hào sâu xen kẽ nhau ba bốn tầng với những ụ cạnh nhô cao, không dễ gì mà lọt qua được.

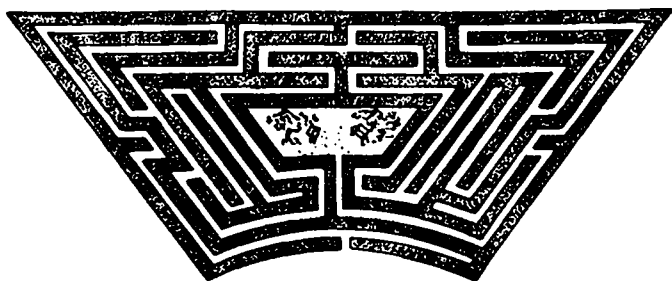
Có thể nói chắc chắn rằng quân Triệu Đà, nhất là quân kỵ, tiến công vào Cổ Loa là sa vào một mê cung khổng lồ, không có lối thoát. Trọng Thủy trong vai trò ở rể xâm nhập vào triều đình An Dương Vương chắc không chỉ ăn cắp bí mật của nỏ liên hoàn (nỏ thần Kim Quy trong truyền thuyết). Cũng giống như nàng Ariatna, nàng Mị Châu đã trao "sợi chỉ đỏ" cho người tình đột nhập mê cung. Nhưng tiếc thay, Trọng Thủy không phải là hoàng tử Têđê nên vua An Dương Vương phải bỏ thành Cổ Loa mà chạy và Mị Châu đã phải trả giá đắt cho sự cả tin ấy bằng cả cuộc đời mình !

4. Con chuột máy của Sannon

Ngày nay, mê cung không chỉ là một đề tài giải trí. Người ta đã đề ra nhiều bài toán về mê cung, lập các thuật toán, các chương trình để giải các bài toán đó. Năm 1951, nhà toán học và kĩ sư Mỹ Sannon (Shannon) đã chế tạo ra con chuột máy biết tìm đường đi trong mê cung. Những bài toán về mê cung như tránh các ngõ cụt để tìm đường vào hoặc đường ra nhanh nhất, đi đến mọi nhánh của mê cung, mỗi nhánh đi đúng hai lần và mỗi lần theo một chiều khác nhau ... là những bài toán có ứng dụng quan trọng cho một ngành toán học trẻ tuổi : ngành điều khiển học.

5. Mời bạn vào thăm vườn

Hãy quan sát hình 62, đó là một vườn hoa đẹp do vua Anh Vinh III xây dựng vào thế kỉ XVII, đến nay vẫn còn.



Hình 62

Hai bên lối đi là hai hàng rào cây nhiều màu sắc. Ở chính giữa vườn có hai cây đại thụ và hai ghế đá quý. Nhưng vào được giữa vườn không phải dễ dàng. Nào, bây giờ mời bạn vào thăm vườn hoa đó !

CHƯƠNG II

DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

§ 10. KHÁI NIỆM VỀ DIỆN TÍCH ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT, HÌNH VUÔNG, TAM GIÁC VUÔNG

1. Tính chất cơ bản của diện tích đa giác

Ứng với mỗi đa giác, có một số dương duy nhất gọi là diện tích của nó thỏa mãn các tính chất sau :

- Nếu một đa giác được chia thành các đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của các đa giác đó (tính cộng).

- Các đa giác bằng nhau có diện tích bằng nhau (tính bất biến).

- Hình vuông có cạnh bằng một đơn vị dài thì diện tích của nó là một đơn vị vuông (tính chuẩn hoá).

2. Hình chữ nhật (h.63a)

$$S = a.b$$

(a, b là hai kích thước).

3. Hình vuông (h.63b)

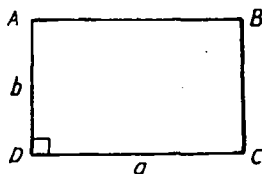
$$S = a^2$$

(a là độ dài một cạnh).

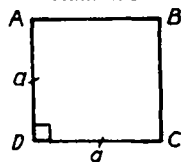
4. Tam giác vuông (h.64)

$$S = \frac{1}{2} bc$$

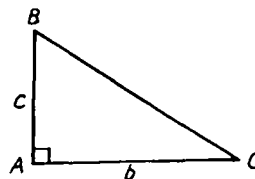
(b, c là độ dài các cạnh góc vuông).



Hình 63a



Hình 63b



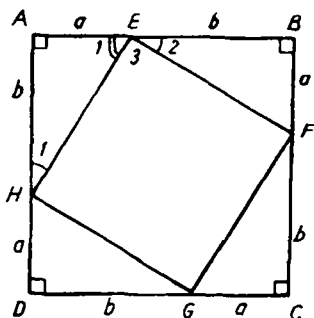
Hình 64

Ví dụ 20

Cho hình vuông ABCD. Các điểm E, F, G, H thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $AE = BF = CG = DH = a$, $BE = CF = DG = AH = b$.

- Tứ giác EFGH là hình gì ?
- Tính diện tích tứ giác EFGH theo a và b.

Giải (h.65)



Hình 65

$$\begin{aligned} & \text{a) } \triangle HAE = \triangle EBF = \\ & \triangle FCG = \triangle GDH \text{ (c.g.c)} \\ & \Rightarrow HE = EF = FG = GH \\ & \Rightarrow EFGH \text{ là hình thoi.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Ta lại có } \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \\ & \widehat{E}_1 + \widehat{H}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E}_3 = 90^\circ. \end{aligned}$$

Hình thoi EFGH có $\widehat{E} = 90^\circ$ nên là hình vuông.

$$\text{b) } S_{ABCD} = AB^2 = (a+b)^2 \quad (1).$$

$$S_{HAE} = \frac{1}{2} AE \cdot AH = \frac{1}{2} ab$$

$$\text{nên } S_{HAE} + S_{EBF} + S_{FCG} +$$

$$S_{GDH} = \frac{1}{2} ab \cdot 4 = 2ab \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$S_{EFGH} = (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

Chú ý

Từ bài toán trên suy ra : nếu $\triangle AEH$ vuông ở A có $AE = a$, $AH = b$ thì $EH^2 = a^2 + b^2$. Đây là một cách chứng minh định lý Pitago (định lý này được trình bày trong cuốn *Các bài tập và chuyên đề về tam giác đồng dạng*).

BÀI TẬP

114. Tính diện tích hình vuông biết độ dài đường chéo bằng d .

15. Tứ giác ABCD có AC vuông góc với BD, $AC = 16\text{cm}$, $BD = 10\text{cm}$. Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Tính diện tích tứ giác EFGH.

116. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AD lấy điểm E, trên tia đối của tia CD lấy điểm K sao cho $AE = CK$.

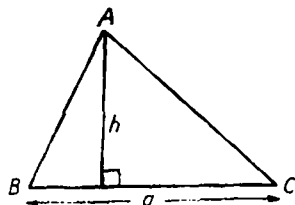
a) Chứng minh rằng $BE \perp BK$.

b) Cho biết $DK = a$, $DE = b$. Tính các diện tích DEK, ABCD, BEK.

§ 11. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

$$S = \frac{1}{2} a h$$

(a là độ dài một cạnh, h là chiều cao tương ứng) (h.66)



Hình 66

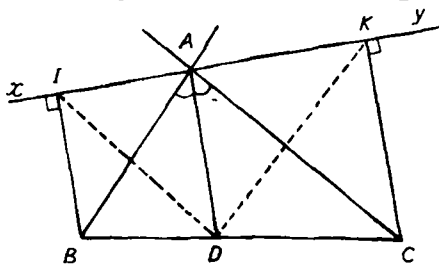
Ví dụ 21

Cho tam giác ABC, phân giác AD. Gọi xy là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh A. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của B, C trên xy . Chứng minh rằng

$$S_{ABC} = \frac{AD \cdot IK}{2}$$

Giải (h.67)

Ta có $AD \perp xy$, $BI \perp xy$,
 $CK \perp xy$ nên $AD \parallel BI \parallel CK$.



Hình 67

$$AD \parallel BI \Rightarrow S_{ABD} = S_{AID} = \frac{1}{2}AI \cdot AD.$$

$$CK \parallel AD \Rightarrow S_{ACD} = S_{AKD} = \frac{1}{2}AK \cdot AD.$$

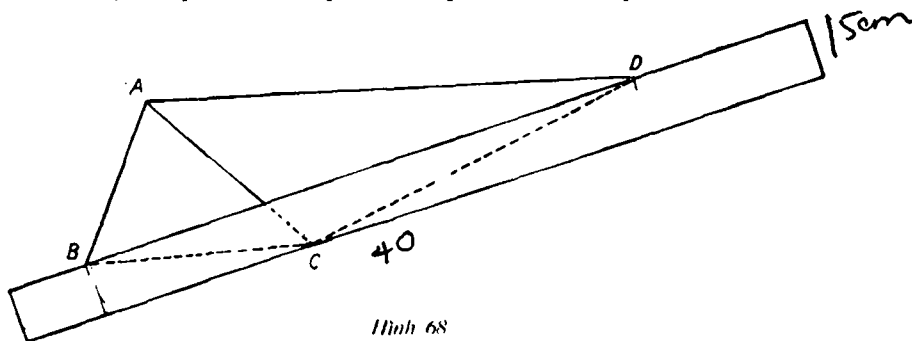
$$\text{Do đó : } S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2}AD(AI + AK) = \frac{1}{2}AD \cdot IK.$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{AD \cdot IK}{2}.$$

BÀI TẬP

117. Chứng minh rằng ba trung tuyến của một tam giác chia tam giác đó thành sáu tam giác có diện tích bằng nhau.

118. Để đo diện tích tam giác ABC, người ta đặt một thước thẳng sao cho một mép thước đi qua B. mép đối diện đi qua C (h.68).



Hình 68

Đường thẳng đi qua A và song song BC cắt mép thước đi qua B ở D. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng BD = 40cm và chiều rộng của thước bằng 5cm.

119. Tam giác ABC có chu vi 10cm. Gọi I là giao điểm của các phân giác. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng khoảng cách từ I đến các cạnh tam giác bằng 1cm.

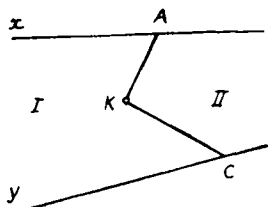
120. Cho tam giác ABC có đáy BC bằng 20cm, chiều cao tương ứng bằng 25cm. Một đường thẳng song song với BC, cách BC là 5cm, cắt các cạnh AB, AC thứ tự ở D, E. Tính diện tích tam giác ADE.

121. Cho tam giác ABC vuông ở A, $AB = a$, $AC = b$, đường cao AH. Ở phía ngoài tam giác vẽ các hình vuông ABDE, ACFG, BCIK.

a) Tính diện tích tam giác DBC.

b) Chứng minh rằng $AK = DC$.

c) Đường thẳng AH cắt KI ở M. Tính diện tích các tứ giác BHKM, CHMI, BCIK.



Hình 69

122. Hai mảnh đất I và II được phân chia bởi đường gấp khúc AKC như trên hình 69. Hãy thay đường gấp khúc này bởi một đoạn thẳng đi qua A sao cho diện tích của mỗi mảnh đất không đổi.

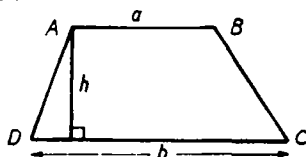
123. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC ($DB > DC$). Hãy dựng một đường thẳng đi qua D chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

§ 12. DIỆN TÍCH HÌNH THANG, HÌNH BÌNH HÀNH

1. Hình thang (h. 70)

$$S = \frac{(a + b)h}{2}$$

(a, b là độ dài hai đáy, h là chiều cao)

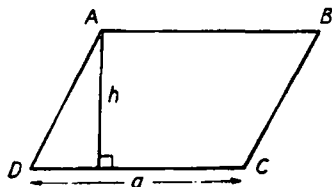


Hình 70

2. Hình bình hành (h.71)

$$S = ah$$

(a là độ dài một cạnh, h là chiều cao tương ứng)



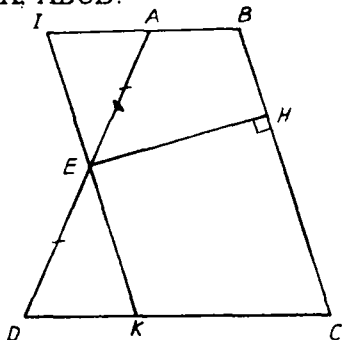
Hình 71

Ví dụ 22

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), E là trung điểm của AD. Gọi H là hình chiếu của E trên đường thẳng BC. Qua E vẽ đường thẳng song song với BC, cắt các đường thẳng AB và CD theo thứ tự ở I và K.

a) Chứng minh rằng $\triangle AEI = \triangle DEK$.

b) Cho biết $BC = 8\text{cm}$, $EH = 5\text{cm}$. Tính diện tích các tứ giác IBCK, ABCD.



Hình 72

Giải (h.72)

a) $\triangle AEI = \triangle DEK$ (g.c.g).

b) IBCK là hình bình hành,
 $S_{IBCK} = BC \cdot EH = 8 \cdot 5 = 40$
 (cm^2) .

Ta có $\triangle AEI = \triangle DEK$

$$\Rightarrow S_{AEI} = S_{DEK}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{IBCK}$$

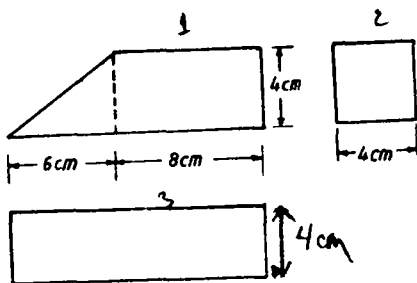
$$\text{Vậy } S_{ABCD} = 40 \text{ cm}^2.$$

BÀI TẬP

Hình thang

124. Hình 73 là ba hình chiếu của hình cái búa trên mặt phẳng. Tính diện tích của mỗi hình ấy.

125. Hình thang ABCD có đáy $AB = 20\text{cm}$, đáy CD bằng 60cm , chiều cao 50cm . Một đường thẳng song song với CD , cách CD là 20cm , cắt các cạnh AD, BC thứ tự ở E, F . Tính độ dài EF .



Hình 73

126. Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo vuông góc, $AB = 40\text{cm}$, $CD = 60\text{cm}$. Tính diện tích hình thang.

127. Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo vuông góc. Biết $AC = d$, tính diện tích hình thang.

128. Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có chiều cao h , $DC - AB = d$. Gọi I là trung điểm của BD . Tính diện tích tam giác AIC.

129 Cho tam giác ABC có B và C là các góc nhọn, đáy BC bằng 30cm, đường cao AH bằng 20cm. MNPQ là hình vuông có $M \in AB$, $N \in AC$, $PQ \in BC$. Tính độ dài cạnh hình vuông.

130 Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có các đường chéo cắt nhau ở O. Biết diện tích tam giác AOB và COD thứ tự bằng a^2 và b^2 .

a) Chứng minh rằng $S_{AOD} = S_{BOC}$.

b) Tính S_{AOD} , S_{BOC} theo a và b .

c) Tính diện tích hình thang theo a và b .

Hình bình hành

131. Cho tứ giác ABCD có diện tích 40 cm^2 . Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Tứ giác EFGH là hình gì ?

b) Tính diện tích tứ giác EFGH.

132. Cho hình bình hành ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng AE và DC.

Chứng minh rằng $S_{ECD} = S_{EBK}$.

133. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng song song với AC cắt các cạnh AB, BC thứ tự ở E và K.

Chứng minh rằng $S_{ADE} = S_{CDK}$.

134. Một mảnh đất hình bình hành có một giếng ở bên trong. Hãy chia mảnh đất ấy thành hai phần có diện tích bằng nhau bởi một đoạn thẳng sao cho giếng nước nằm trên đoạn thẳng ấy.

135. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đoạn thẳng AG, CE, BH, DF cắt nhau tạo thành một tứ giác.

a) Tứ giác đó là hình gì ?

b) Chứng minh rằng diện tích tứ giác đó bằng $\frac{1}{5}$ diện tích hình bình hành ABCD.

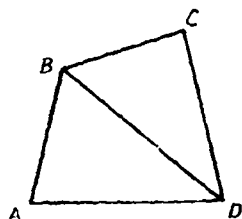
Hình thoi

136. Hình thoi ABCD có $AC = m$, $BD = n$. Tính diện tích hình thoi.

137. Hình thoi ABCD có $\hat{A} = 30^\circ$, $AB = 4\text{cm}$. Tính diện tích hình thoi.

§ 13. DIỆN TÍCH TỨ GIÁC

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} \text{ (h.74)}$$



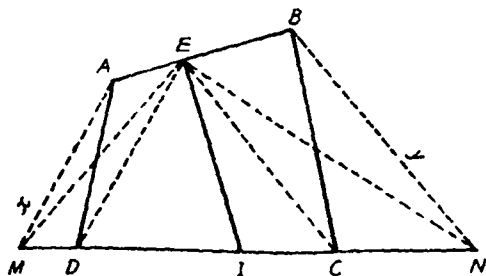
Hình 74

Ví dụ 23

Cho tứ giác ABCD, điểm E thuộc cạnh AB (các diện tích EAD, EBC nhỏ hơn một nửa diện tích tứ giác). Qua E dựng đường thẳng chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Giải

Phân tích. Giả sử EI là đường thẳng phải dựng (h.75).



Hình 75

Kẻ $Ax \parallel ED$, cắt DC ở $M \Rightarrow S_{AED} = S_{MED}$.

Kẻ $By \parallel EC$, cắt DC ở $N \Rightarrow S_{BEC} = S_{NEC}$.

Do đó $S_{EAD} = S_{EMI}$, $S_{EBC} = S_{ENI}$, suy ra $S_{EMI} = S_{ENI}$. Vậy I là trung điểm của MN .

Cách dựng. Bạn đọc tự giải.

Chứng minh. Bạn đọc tự giải.

Biện luận. Bài toán có một nghiệm hình.

Chú ý

a) Do $S_{BEC} < \frac{1}{2} S_{ABCD}$ nên

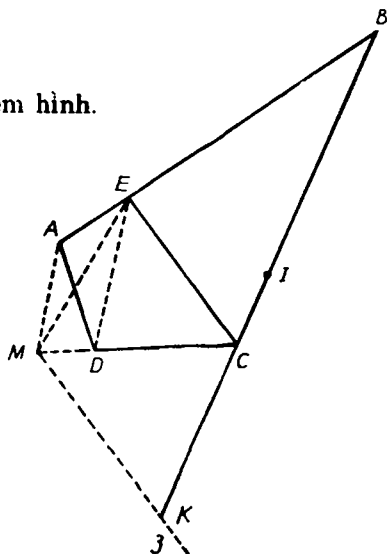
$S_{ENC} < \frac{1}{2} S_{EMN}$, do đó $NC < NI$.

Tương tự $MD < MI$.

Vậy I thuộc cạnh DC .

b) Trường hợp chẳng hạn $S_{EBC} > \frac{1}{2} S_{ABCD}$ thì sau khi dựng điểm

M như trên, ta dựng $Mz \parallel EC$, cắt BC ở K , sau đó dựng I là trung điểm của BK (h.76). Trong trường hợp này điểm I thuộc cạnh BC .



Hình 76

BÀI TẬP

138. Tính diện tích tứ giác $ABCD$ biết $AC = BD$, các đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối của tứ giác theo thứ tự bằng 10cm và 15cm .

139. Một tứ giác có độ dài mỗi cạnh đều nhỏ hơn 1dm . Chứng minh rằng diện tích của tứ giác nhỏ hơn 1dm^2 .

140. Cho tứ giác $ABCD$. Dựng đoạn thẳng AE (E thuộc một cạnh của tứ giác) chia tứ giác ra hai phần có diện tích bằng nhau.

141. Cho tam giác ABC . Dựng điểm O nằm trong tam giác sao cho các tam giác AOB , BOC , COA có diện tích bằng nhau.

§ 14. ÔN TẬP

142. Cho tam giác ABC ($AC > AB$), đường cao AH. Gọi D, E, F thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC.

- a) Tứ giác BDEF là hình gì ?
- b) Tứ giác DEFH là hình gì ?
- c) Xác định dạng của tứ giác BDEF nếu ΔABC cân ở B.
- d) Xác định dạng của tứ giác DEFH nếu ΔABC vuông ở B.

143. Cho tam giác ABC cân ở A ($AB = AC = a$). Gọi M là một điểm thuộc đáy BC. Vẽ $MD \parallel AC$ ($D \in AB$), vẽ $ME \parallel AB$ ($E \in AC$).

- a) Xác định dạng của tứ giác ADME và tính chu vi của nó.
- b) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì $AD = AE$?
- c) Gọi H và K thứ tự là hình chiếu của D và E trên BC. Xác định dạng của tứ giác DEKH.
- d) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì DE có độ dài ngắn nhất? Khi đó DEKH là hình gì ?

144. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm hai đường chéo. Điểm E thuộc cạnh AB, gọi F là giao điểm của EO và CD. Vẽ $EG \parallel AC$, $FH \parallel AC$ ($G \in BC$, $H \in AD$).

- a) Chứng minh rằng EGFH là hình bình hành.
- b) Chứng minh rằng nếu ABCD là hình chữ nhật thì chu vi hình bình hành EGFH gấp đôi AC.

145. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$), các đường cao AH, BK.

- a) Tứ giác ABKH là hình gì ?
- b) Chứng minh rằng $DH = CK$.
- c) Gọi E là điểm đối xứng với D qua H. Các điểm D và E đối xứng với nhau qua đường thẳng nào ?
- d) Xác định dạng của tứ giác ABCE.
- e) Chứng minh rằng DH bằng nửa hiệu hai đáy của hình thang ABCD.

g) Biết độ dài đường trung bình hình thang ABCD bằng 8 cm, $DH = 2\text{ cm}$, $AH = 5\text{ cm}$. Tính diện tích các hình ADH, ABKH, ABCE, ABCD.

146. Cho hình vuông ABCD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $BE = BF = DG = DH$.

a) Xác định dạng của tứ giác EFGH.

b) Chứng minh rằng chu vi của tứ giác đó bằng $2AC$.

c) * Biết cạnh hình vuông bằng 10 m. Tính giá trị lớn nhất của S_{EFGH} .

Về phương pháp giải toán

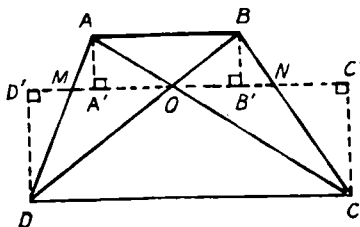
DÙNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ SO SÁNH ĐỘ DÀI CÁC ĐOẠN THẲNG

Các công thức diện tích cho ta quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng. Do đó, nhiều khi để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song và các quan hệ khác về độ dài của các đoạn thẳng, ta có thể sử dụng công thức diện tích của các hình.

Ví dụ 24

Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có O là giao điểm hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng song song với hai đáy, cắt các cạnh bên AD, BC ở M, N. Chứng minh rằng $OM = ON$.

Giải (h.77)



Hình 77

Cách 1. Kẻ AA' , BB' , CC' , DD' vuông góc với MN. Đặt $AA' = BB' = h_1$, $CC' = DD' = h_2$.

Ta có $S_{ADC} = S_{BDC}$. Cùng trừ đi S_{DOC} ta được $S_{AOD} = S_{BOC}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{AOD} &= \frac{1}{2} OM \cdot AA' + \frac{1}{2} OM \cdot DD' \\ &= \frac{1}{2} OM (h_1 + h_2). \end{aligned}$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} ON.BB' + \frac{1}{2} ON.CC' = \frac{1}{2} ON (h_1 + h_2).$$

$$\text{Từ các kết quả trên suy ra } \frac{1}{2} OM (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} ON (h_1 + h_2).$$

Vậy $OM = ON$.

Cách 2 (chứng minh bằng phản chứng)

Cũng chứng minh như cách 1, ta được $S_{AOD} = S_{BOC}$ (1).

Giả sử $OM > ON$ thì $S_{AOM} > S_{BON}$

$$S_{DOM} > S_{CON}.$$

$$\text{Suy ra } S_{AOM} + S_{DOM} > S_{BON} + S_{CON}$$

tức là $S_{AOD} > S_{BOC}$, trái với (1).

Giả sử $OM < ON$, chứng minh tương tự ta được $S_{AOD} < S_{BOC}$, trái với (1). Vậy $OM = ON$.

BÀI TẬP

147. Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có các tia DA, CB cắt nhau ở K. Gọi F là trung điểm của CD, E là giao điểm của KF và AB. Chứng minh rằng E là trung điểm của AB.

148. Cho tam giác đều ABC. Gọi M là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác có giá trị không đổi khi điểm M thay đổi vị trí trong tam giác.

149. Cho tam giác ABC cân ở A.

a) Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh đáy BC. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên có giá trị không đổi khi điểm M di chuyển trên cạnh BC.

b) Hãy nêu bài toán tương tự câu a nếu điểm M là một điểm bất kì thuộc đường thẳng BC nhưng không thuộc cạnh BC.

150 Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Gọi M là một điểm thuộc tia đối của tia CB. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng AB, AC. Chứng minh rằng $MI - MK = AH$.

151. Cho tam giác ABC có BC bằng nửa tổng hai cạnh còn lại. Gọi I là giao điểm các phân giác, G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh rằng :

- a) $S_{IBC} = S_{GBC}$.
- b) IG song song với BC.

152. Cho tam giác ABC có các góc nhỏ hơn 120° , điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA}$. Vẽ đường vuông góc với MA tại A, đường vuông góc với MB tại B, đường vuông góc MC tại C. Ba đường vuông góc trên cắt nhau ở A', B', C'.

- a) Xác định dạng của tam giác A'B'C'.
- b) Gọi N là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng $MA + MB + MC \leq NA + NB + NC$. Với vị trí nào của điểm N thì xảy ra dấu đẳng thức ?

TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA DIỆN TÍCH MỘT HÌNH BẰNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ

Để tìm điều kiện của một hình sao cho diện tích của nó đạt giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất, trong nhiều trường hợp ta có thể thiết lập biểu thức diện tích của hình đó rồi tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của biểu thức ấy.

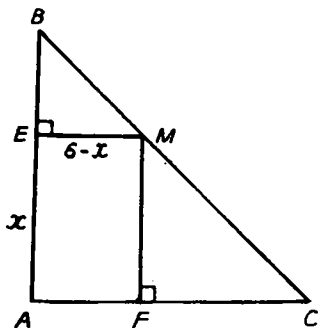
Ví dụ 25

Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 6\text{cm}$, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu của M trên AB, AC.

- a) Tính chu vi tứ giác AEMF.
- b) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác AEMF có diện tích lớn nhất ? Tìm diện tích lớn nhất ấy.

Giải (h.78)

- a) AEMF là hình chữ nhật. Ta có $ME = EB$ (vì ΔBEM vuông cân) nên chu vi AEMF bằng : $2(AE + EM) = 2(AE + EB) = 2AB = 12\text{ cm}$.



Hình 78

b) Đặt $AE = x$ thì $EM = 6 - x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } S_{AEMF} &= AE \cdot EM = \\ x(6 - x) &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x + 9) + 9 \\ &= -(x - 3)^2 + 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do } -(x - 3)^2 &\leq 0 \text{ nên} \\ -(x - 3)^2 + 9 &\leq 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max S_{AEMF} &= 9 \Leftrightarrow x = 3 \\ \Leftrightarrow E &\text{ là trung điểm của } AB \\ \Leftrightarrow M &\text{ là trung điểm của } BC. \end{aligned}$$

Vậy khi M là trung điểm của BC thì hình chữ nhật $AEMF$ có diện tích lớn nhất, diện tích đó bằng 9 cm^2 .

BÀI TẬP

153. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 10 \text{ cm}$. Điểm D thuộc cạnh AB , điểm E thuộc cạnh AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí của các điểm D và E để diện tích tứ giác $BDEC$ có giá trị nhỏ nhất, tính giá trị nhỏ nhất đó.

154. Cho đoạn thẳng AC cố định có độ dài 4 cm .

a) Tìm tập hợp các đỉnh B và D của các hình chữ nhật $ABCD$.

b) Trong các hình chữ nhật đó, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

155. Người ta dùng một đoạn dây dài 100 m căng thành ba đoạn thẳng tạo với một bức tường làm thành một hình chữ nhật. Trong trường hợp nào, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất? Tính diện tích đó.

156. Trong các hình chữ nhật có chu vi 100 m , hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích đó.

157. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 16 \text{ m}$, $BC = 8 \text{ m}$. Các điểm E, F, G, H thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $AE = AH = CF = CG = x$.

a) Tứ giác $EFGH$ là hình gì?

b) Biểu thị diện tích S của hình $EFGH$ theo x .

c) Tính x để S có giá trị lớn nhất.

158. Cho tam giác ABC có B và C là các góc nhọn, đáy BC bằng $20m$, đường cao AH bằng $10m$. Vẽ hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp tam giác sao cho M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC , PQ thuộc cạnh BC .

a) Đặt $NP = x$, $MN = y$, hãy biểu thị y theo x .

b) Tính x để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

HỆ THỐNG MỘT SỐ CÁCH CHỨNG MINH CÁC QUAN HỆ HÌNH HỌC

(Tiếp theo tập I)

1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

- Hai cạnh bên của hình thang cân.
- Hai cạnh đối của hình bình hành, hình chữ nhật.
- Các cạnh của hình thoi, hình vuông.
- Hai đường chéo của hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông.
- Sử dụng tính chất các đường thẳng song song cách đều.
- Sử dụng tính chất đường chéo của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.
- Sử dụng định nghĩa hai điểm đối xứng nhau qua một trục hoặc qua một tâm.
- Hai đoạn thẳng đối xứng nhau qua một trục hoặc qua một tâm.
- Cặp cạnh đáy của hai tam giác, hai hình bình hành cùng diện tích có các đường cao tương ứng bằng nhau.
- Cặp đường cao của hai tam giác, hai hình bình hành cùng diện tích có các cạnh đáy tương ứng bằng nhau.

2. Chứng minh hai góc bằng nhau

- Hai góc kề một đáy của hình thang cân.
- Hai góc đối của hình bình hành, hình thoi.
- Các góc của hình chữ nhật, hình vuông.

- Sử dụng tính chất đường chéo hình thoi, hình vuông.
- Hai góc đối xứng nhau qua một trục hoặc qua một tâm.

3. Chứng minh hai đường thẳng song song

- Hai đáy của hình thang.
- Hai cạnh đối của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

- Sử dụng tính chất đường trung bình của hình thang.
- Sử dụng tập hợp các điểm cách một đường thẳng cho trước một khoảng cho trước.

4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

- Hai cạnh kề nhau của hình chữ nhật, hình vuông.
- Hai đường chéo của hình thoi, hình vuông.
- Sử dụng định nghĩa hai điểm đối xứng nhau qua một trục.

5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

- Trung điểm một đường chéo và hai đầu đường chéo kia của hình bình hành.

6. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

- Các đường chéo của hai hình bình hành có chung một đường chéo.

Bài đọc thêm

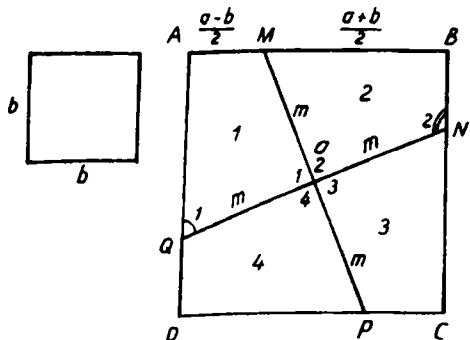
CẮT VÀ GHÉP CÁC HÌNH

Trong đời sống, nhiều lúc phải cắt ghép các hình : người thợ may cắt tấm vải ra nhiều mảnh rồi ghép chúng lại thành một hình khác, người thợ mộc ghép nhiều mảnh gỗ nhỏ lại thành một hình lớn hơn. Các bài toán cắt ghép hình trong chuyên đề này không chỉ có ý nghĩa thực tế, chúng còn đòi hỏi sự suy luận chặt chẽ, hợp lí và sáng tạo.

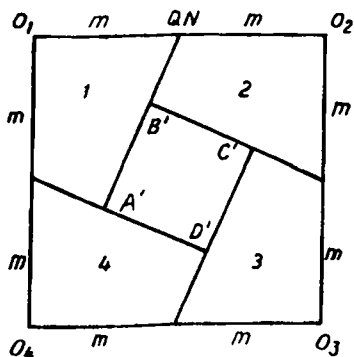
Ví dụ 26

Có hai mảnh vải hình vuông cạnh a và b ($a > b$). Hãy cắt hình vuông lớn ra bốn mảnh để ghép với hình vuông nhỏ thành một hình vuông mới.

Giải



Hình 79



Hình 80

Bây giờ ta chứng minh rằng $A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh b . Thật vậy các góc đỉnh A', B', C', D' đều vuông và $A'B', B'C', C'D', D'A'$ đều bằng: $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$ (đ.p.c.m).

Yêu cầu chứng minh bài toán ghép hình cần được đặt ra vì nếu chỉ bằng quan sát, con mắt có thể bị đánh lừa. Xét ví dụ sau:

Ví dụ 27

Một cậu bé cắt một hình vuông cạnh 8cm ra hai tam giác vuông

Cách dựng

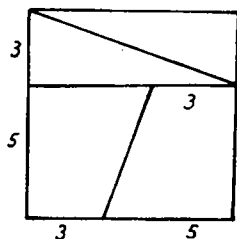
Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông lớn, lấy các đoạn thẳng AM, BN, CP, DQ bằng $\frac{a-b}{2}$.

Nối các điểm chia trên các cạnh đối, hình vuông lớn được chia thành bốn mảnh (h.79). Ghép bốn mảnh ấy với hình vuông nhỏ như h.80, ta được một hình vuông mới.

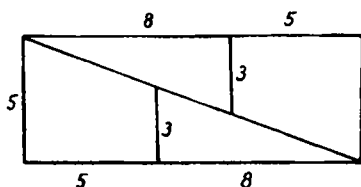
Chứng minh

Xét hai mảnh 1 và 2 ghép với nhau như h.80, do $\widehat{Q_1} + \widehat{N_2} = 180^\circ$ nên O_1, Q, N, O_2 thẳng hàng. Tương tự đối với các mảnh còn lại, ta được hình vuông $O_1O_2O_3O_4$ (chú ý rằng $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \widehat{O_3} = \widehat{O_4} = 90^\circ$, $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1 = 2m$).

và hai hình thang vuông như trên hình 81 rồi ghép bốn hình này lại thành một hình chữ nhật có chiều rộng 5cm, chiều dài 13cm như trên hình 82.



Hình 81

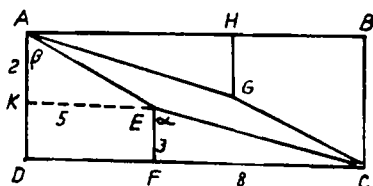


Hình 82

Câu nghi ngại không hiểu tại sao diện tích hình vuông bằng : $8 \times 8 = 64(\text{cm}^2)$, còn diện tích hình chữ nhật lại bằng : $5 \times 13 = 65(\text{cm}^2)$. Vậy 1cm^2 ở đâu ra?

Giải

Tổng diện tích của hai tam giác vuông và hai hình thang vuông bằng 64cm^2 . Khi ghép chúng lại thành một hình chữ nhật, có một khe hở nhỏ dọc theo đường chéo hình chữ nhật (h.83). Khe hở đó có dạng hình bình hành diện tích 1cm^2 , có một đường chéo là đường chéo của hình chữ nhật (trên hình 83 khe hở được phóng to).



Hình 83

Chú ý

a) Ta có thể thấy rằng $\widehat{AEK} + \widehat{KEF} + \widehat{CEF} > 180^\circ$ bằng cách chứng minh rằng $\widehat{CEF} > \widehat{EAK}$ (tức là $\alpha > \beta$). Thật vậy $\text{tg } \alpha = \frac{8}{3}$, còn $\text{tg } \beta = \frac{5}{2}$, mà $\frac{8}{3} > \frac{5}{2}$ nên $\text{tg } \alpha > \text{tg } \beta$, do đó $\alpha > \beta$.

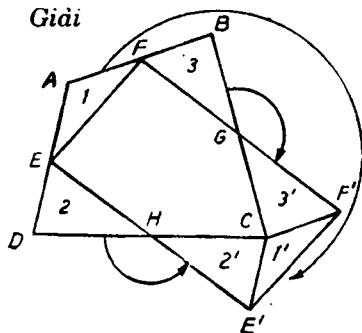
b) Có nhiều cách tạo ra những nghịch lý như bài toán trên. Ta hãy xét dãy số Fibonaxi: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... (hai số hạng đầu

bảng 1, các số hạng kể từ số hạng thứ ba bằng tổng của hai số hạng liền trước). Các kích thước 5, 8, 13 trong bài toán trên là ba số hạng liên tiếp của dãy Fibonaxi. Có thể thay các kích thước này bởi ba số hạng liên tiếp khác của dãy, chẳng hạn 3, 5, 8 hoặc 8, 13, 21, ta đều được các hình vuông và hình chữ nhật có diện tích hơn kém nhau là 1. Càng chọn các kích thước lớn thì sai số tương đối càng nhỏ, và điều phi lý càng khó nhận ra.

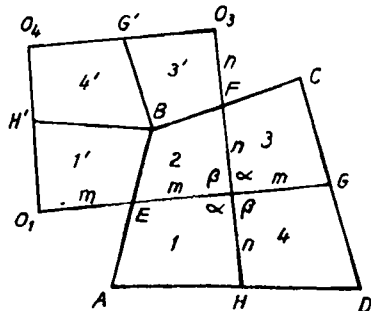
Ví dụ 28

Chia một tứ giác lồi thành bốn phần rồi ghép lại thành một hình bình hành.

Giải



Hình 84



Hình 85

Cách 1. Gọi E, F, G, H là trung điểm AD, AB, BC, CD (h.84), E' đối xứng với E qua H, F' đối xứng với F qua G. Tứ giác EFF'E' là hình bình hành có diện tích bằng diện tích tứ giác ABCD (chú ý rằng $\widehat{BCD} + \widehat{HCE'} + \widehat{GCF'} = \widehat{BCD} + \widehat{D} + \widehat{B} > 180^\circ$ nên E'F' không cắt các tia CB, CD).

Cách 2. Nối trung điểm các cạnh đối của tứ giác ABCD (h.85), tứ giác được chia thành bốn mảnh. Ta ghép bốn mảnh đó lại sao cho các góc α ở vị trí hai góc đối, các góc β cũng vậy : chuyển mảnh 1 đến vị trí đối xứng với nó qua E, chuyển mảnh 3 đến vị trí đối xứng với nó qua F. Dễ dàng chứng minh được bốn mảnh ghép lại thành một hình bình hành.

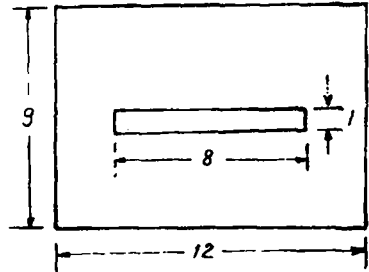
(*) Fibonaxi (Fibonacci), nhà toán học Italia đã đưa ra dãy số này năm 1225 trong một ngày hội ở thành phố Pado.

BÀI TẬP

159. Một tấm bìa hình chữ nhật có chiều dài 9m, chiều rộng 4m. Có thể cắt tấm bìa thành hai mảnh để ghép lại thành một hình vuông được không ?

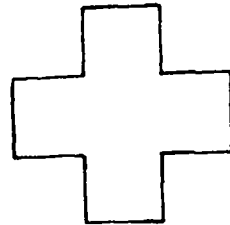
160. Có năm miếng gỗ nhỏ hình vuông bằng nhau. Hãy ghép năm miếng gỗ ấy thành một hình vuông lớn sao cho mỗi tấm chỉ được của nhiều nhất là một nhất.

161. Cho một tấm bìa hình chữ nhật kích thước 9×12 , ở chính giữa bị khuyết một dải hình chữ nhật kích thước 1×8 (h.86). Hãy cắt tấm bìa này thành hai mảnh để ghép lại thành một hình vuông.



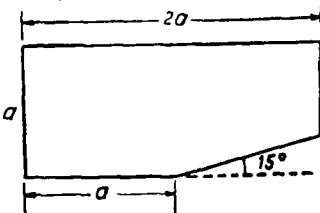
Hình 86

162*. Cho một tấm bìa hình chữ thập như trên hình 87. Hãy chia hình đó làm ba mảnh để ghép lại thành một hình chữ nhật.



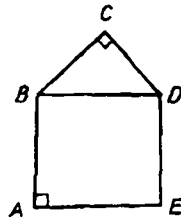
Hình 87

163*. Một tấm ván hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng bị vát một góc 15° như hình 88. Hãy chia tấm ván thành ba mảnh rồi ghép lại thành một hình vuông.



Hình 88

164*. Một miếng vải hình ngũ giác gồm hình vuông ABDE và tam giác vuông cân BCD như hình 89. Hãy cắt tấm vải làm ba mảnh rồi ghép lại thành một hình vuông.



Hình 89

165. Chứng minh rằng từ một tứ giác lồi bao giờ cũng có thể cắt được ra một hình bình hành có hai cạnh là hai cạnh liên tiếp của tứ giác.

LỜI GIẢI HOẶC CHỈ DẪN

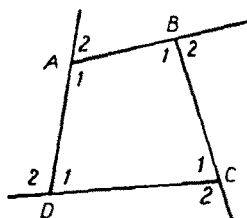
CHƯƠNG 1

TỨ GIÁC

1. a) Không có tứ giác nào có bốn góc nhọn.

b) Trong tứ giác, có nhiều nhất là ba góc nhọn, ba góc tù, bốn góc vuông.

2. (h.90)



Hình 90

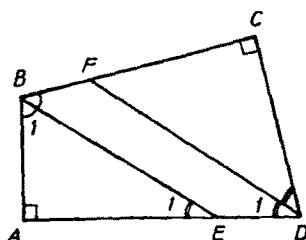
Gọi $\hat{A}_1, \hat{B}_1, \hat{C}_1, \hat{D}_1$ là số đo các góc trong và $\hat{A}_2, \hat{B}_2, \hat{C}_2, \hat{D}_2$ là số đo các góc ngoài tương ứng.

$$\text{Ta có: } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \cdot 4 = 720^\circ,$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = 360^\circ, \text{ do}$$

$$\text{do } \hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 360^\circ.$$

3. (h.91)



Hình 91

Xét tam giác vuông ABE, ta có

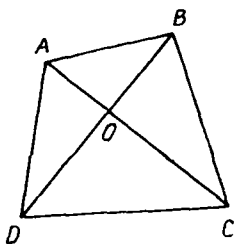
$$\hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \quad (1)$$

Ta lại có $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ nên $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$, do đó $\hat{B}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{E}_1 = \hat{D}_1$.
Vậy $BE \parallel DF$.

4. (h.92)

a) Xét ΔABC : $AC < AB + BC$.



Hình 92

Xét $\triangle ADC$: $AC < AD + CD$.
Suy ra $2AC < AB + BC + CD + DA$.

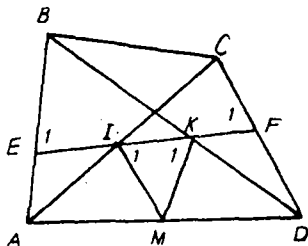
Tương tự : $2BD < AB + BC + CD + DA$. Do đó $AC + BD <$ chu vi tứ giác.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có : $OA + OB > AB$,
 $OB + OC > BC$, $OC + OD > CD$, $OD + OA > DA$. Cộng từng vế bốn bất đẳng thức trên.

5. (h.93)

Gọi M là trung điểm của AD. Gọi I, K thứ tự là trung điểm của AC, BD. Đường thẳng IK cắt AB, CD ở E và F. Ta có $\triangle MIK$ cân, suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{I_1}$.

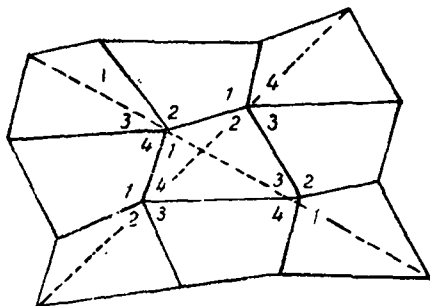
Từ đó $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$.



Hình 93

6. Muốn xác định một tứ giác, cần biết năm yếu tố của nó. Biết độ dài bốn cạnh, chưa xác định được tứ giác. Nếu biết thêm một đường chéo thì tứ giác được xác định.

7. Các mảnh vải nhỏ được ghép lại như trên hình 94. Trong hình vẽ, các góc bằng nhau được kí hiệu bởi các chữ số giống nhau. Do tổng các góc của tứ giác bằng 360° nên tổng các góc ở mỗi đỉnh đều bằng 360° , do đó các mảnh vải được xếp khít nhau.

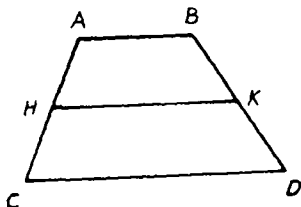


Hình 94

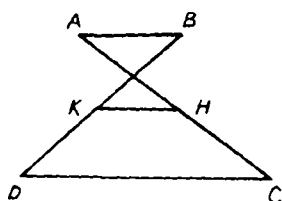
8. Xét hai trường hợp :

a) $ABDC$ là tứ giác lồi (h.95). khi đó $HK = \frac{7+3}{2} = 5$ (cm)

b) ABCD là tứ giác lồi (h.96), khi đó $HK = \frac{7-3}{2} = 2$ (cm).

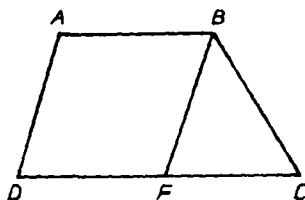


Hình 95

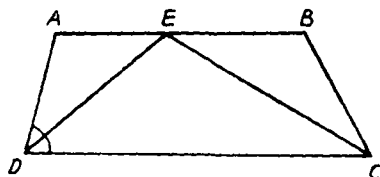


Hình 96

9. Xét hình thang ABCD có $AB \parallel CD$, $DC \geq AB$. Nếu $DC = AB$, bài toán hiển nhiên đúng. Nếu $DC > AB$ (h.97), kẻ $BF \parallel AD$ và xét tam giác BFC (sẽ có $BF + BC > FC$).



Hình 97



Hình 98

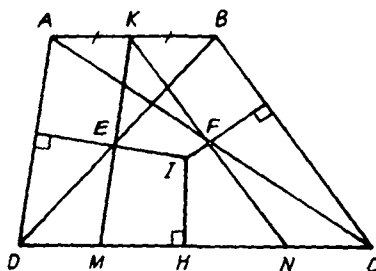
10. (h.98)

Vẽ tia phân giác của góc D, cắt AB ở E. Chứng minh rằng CE là tia phân giác của góc C.

11. (h.99)

Trong tam giác KMN, I là giao điểm các đường trung trực của KM và KN. Vẽ $IH \perp DC$ thì $HM = HN$. Ta lại có $MD = NC$, do đó $ID = IC$.

12. Có hai đáp số : 5cm ; 3cm ứng với hai trường hợp : A,B nằm cùng phía đối với m; A,B nằm khác phía đối với m.

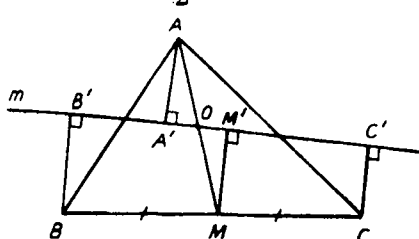


Hình 99

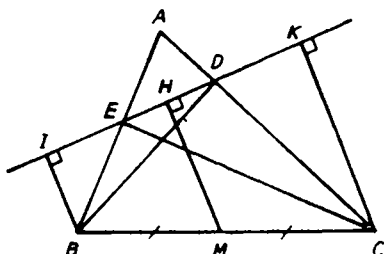
13. (h.100)

Vẽ $MM' \perp m$. Chứng minh rằng $AA' = MM'$ và

$$MM' = \frac{BB' + CC'}{2}.$$



Hình 100



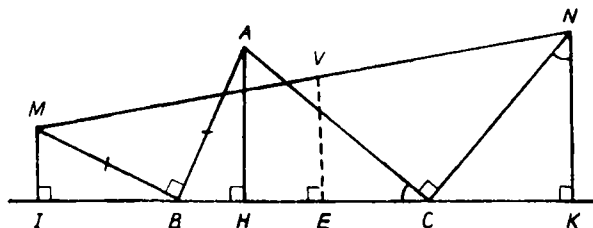
Hình 101

14. (h.101)

Gọi M là trung điểm của BC, vẽ $MH \perp ED$. Chứng minh rằng $HI = HK$ và $HE = HD$.

15. (h.102)

Vẽ VE, MI, NK, AH vuông góc với BC. $\triangle BMI = \triangle ABH$ (trường hợp cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow BI = AH, MI = BH$. Tương tự $\triangle CNK = \triangle ACH \Rightarrow CK = AH, NK = CH$.



Hình 102

Hình thang MIKN có $MV = VN$, $VE \parallel MI \parallel NK$ nên E là trung điểm của IK. Ta lại có $BI = CK$ (cùng bằng AH). Do đó $EB = EC$. Vậy $\triangle VBC$ cân ở V.

$$\text{Ta lại có } VE = \frac{MI + NK}{2} = \frac{BH + CH}{2} = \frac{BC}{2}.$$

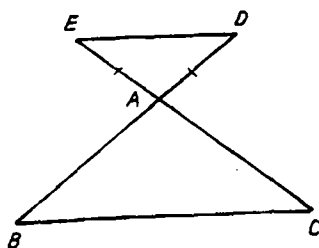
Tam giác VBC có trung tuyến VE bằng một nửa cạnh BC nên $\triangle VBC$ vuông ở V. Vậy $\triangle VBC$ vuông cân ở V. Điều này cho phép xác

định vị trí V của kho vàng khi biết các vị trí B (miếu Bà) và C (miếu Cô).

16. $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow ABCD$ là hình thang.

$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow$ hình thang $ABCD$ là hình thang cân.

17. (h.103)



Hình 103

Các tam giác cân ABC , ADE có góc ở đỉnh bằng nhau nên góc ở đáy bằng nhau: $\hat{ABC} = \hat{ADE} \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow BEDC$ là hình thang.

Hình thang $BEDC$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

18. (h.104)

a) $\triangle ACD = \triangle BDC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow ID = IC$.

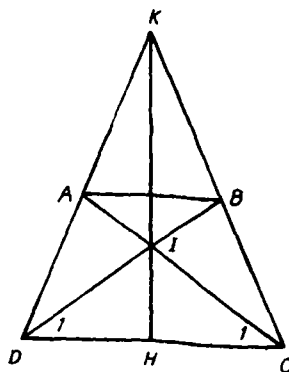
b) $ABCD$ là hình thang cân

$\Rightarrow \hat{D} = \hat{C} \Rightarrow \triangle KDC$ cân

$\Rightarrow KD = KC$ (1)

Ta lại có $ID = IC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra KI là đường trung trực của DC , suy ra $KH \perp DC$, $DH = HC$.

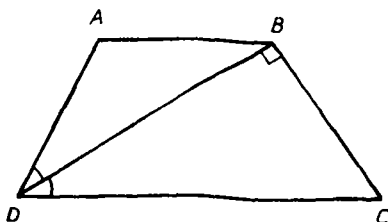


Hình 104

19. (h.105)

a) Dễ dàng tính được $\hat{ADC} = \hat{C} = 60^\circ$, $\hat{BDC} = 30^\circ$. Suy ra $DB \perp BC$.

b) $\triangle ABD$ cân nên $AD = 4\text{cm}$. Theo tính chất hình thang cân, $BC = AD = 4\text{cm}$.



Hình 105

Tam giác vuông BDC có $\widehat{BDC} = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2}CD \Rightarrow DC = 8\text{cm}$.

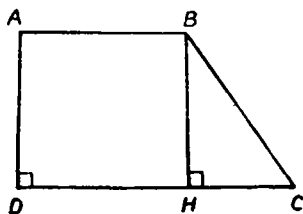
Chu vi hình thang bằng 20cm.

20. (h.106)

Kẻ $BH \perp CD$ thì $HC = 3\text{cm}$.

Tam giác vuông BHC có

$$HC = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \widehat{HBC} = 30^\circ.$$



Hình 106

Suy ra $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$.

21. Kẻ đường cao BH. Đáp số : $\widehat{ABC} = 135^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$.

22. a) Các chữ cái chỉ có trục đối xứng dọc : A, M, T, U, V, Y.

b) Các chữ cái chỉ có trục đối xứng ngang : B, C, D, D, E, K.

c) Các chữ cái có cả trục đối xứng dọc và trục đối xứng ngang : H, I, O, X.

Chú ý

Khi cắt các chữ cái (in, viết hoa), ta gấp tờ giấy làm đôi nếu nó có một trục đối xứng, gấp tờ giấy làm bốn nếu nó có hai trục đối xứng vuông góc.

23. a) Trục đối xứng của :

- đoạn thẳng : đoạn thẳng AB có hai trục đối xứng là đường thẳng AB và đường trung trực của AB;

- góc : đường phân giác ;

- tam giác cân : đường trung trực của đáy ;

- hình thang cân : đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy.

b) Tam giác đều có ba trục đối xứng.

c) Có, ví dụ :

- đường thẳng (mọi đường thẳng vuông góc với đường thẳng a đều là trục đối xứng của đường thẳng a);

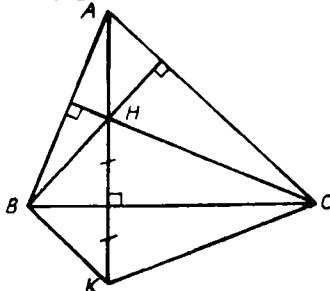
- đường tròn (trục đối xứng là bất kì đường kính nào).

24. (h.107)

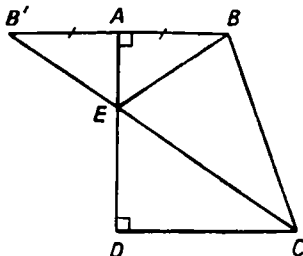
H đối xứng với K qua BC $\Rightarrow BH = BK$, $CH = CK$. Do đó

$\Delta BHC = \Delta BKC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BKC}$.

Ta tính được $\widehat{BHC} = 110^\circ$ (A và BHC là cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc), do đó $\widehat{BKC} = 110^\circ$.



Hình 107



Hình 108

Chú ý

Có thể chứng minh $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$ bằng cách : H đối xứng với K qua BC $\Rightarrow$ góc BHC đối xứng với góc BKC qua BC $\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BKC}$.

25. (h.108)

Dựng B' đối xứng với B qua AD. Nối B'C, cắt AD ở E.

26. (h.109)

Do A đối xứng với A' qua d nên CA = CA' (1), C'A = C'A' (2).

Xét $\Delta AC'B$, ta có : $A'B < A'C' + C'B$
 $\Rightarrow AC + CB < AC' + C'B$ (3)

Từ (1) và (2), (3) suy ra :

$AC + CB < AC' + C'B$.

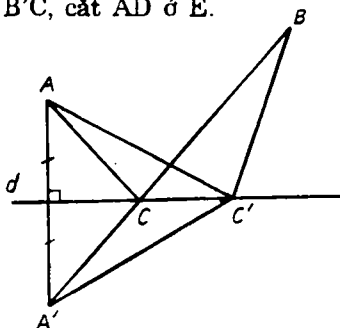
Chú ý

Bài toán trên cho ta cách dựng điểm

C trên đường thẳng d sao cho AC + CB ngắn nhất. Nhiều bài toán thực tế dẫn đến bài toán này (xem Các bài tập và chuyên đề về tam giác, mục Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).

27. (h.110)

Cách 1. Tứ giác AICK có AK // IC. AK = IC nên là hình bình hành, do đó AI = CK.



Hình 109

ΔDCN có $DI = IC$, $IM \parallel CN$ nên $DM = MN$.

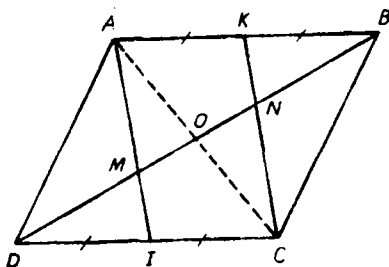
ΔABM có $AK = KB$, $KN \parallel AM$
nên $MN = NB$.

Vậy $DM = MN = NB$.

Cách 2. Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình bình hành. Ta có M là trọng tâm của ΔADC nên

$$DM = \frac{2}{3} DO, \text{ mà } DO = \frac{1}{2} DB \text{ nên}$$

$$DM = \frac{1}{3} DB.$$



Hình 110

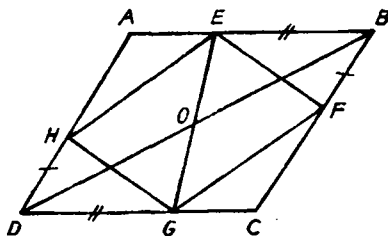
Chứng minh tương tự, $BN = \frac{1}{3} DB$.

Từ đó suy ra : $DM = MN = NB$.

28. (h.111)

a) Chứng minh rằng tứ giác EFGH có hai cặp cạnh đối bằng nhau đôi một.

b) Tứ giác BEDG có $BE = DG$, $BE \parallel DG$ nên là hình bình hành. Do đó EG, BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.



Hình 111

Sau đó chứng minh rằng AC cũng đi qua O (vì ABCD là hình bình hành). HF cũng đi qua O (vì EFGH là hình bình hành).

Ghi nhớ về phương pháp

Sử dụng tính chất đường chéo của hình bình hành để chứng minh các đường thẳng đồng quy.

29. (h.112)

a) EI và GK cùng song song với AD và bằng $\frac{1}{2} AD$.

b) Chứng minh tương tự câu a. ta được HIFK là hình bình hành.

Do đó EG và HF cùng đi qua trung điểm của IK.

Chú ý

Từ câu b suy ra : trong tứ giác, đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối gặp nhau tại một điểm (định lý Giecgôn).

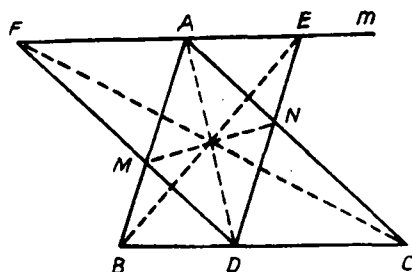
Gergaune, nhà toán học Pháp thế kỷ XIX.

30. (h.113)

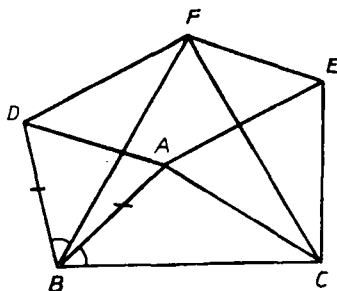
Chứng minh rằng AMDN, AEDB, AFDC là các hình bình hành.

31. (h.114)

$\triangle ABC = \triangle DBF$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = DF$. Ta lại có $AC = AE$ nên $DF = AE$ (1).



Hình 113



Hình 114

$\triangle ABC = \triangle EFC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = EF$. Ta lại có $AB = AD$ nên $EF = AD$ (2).

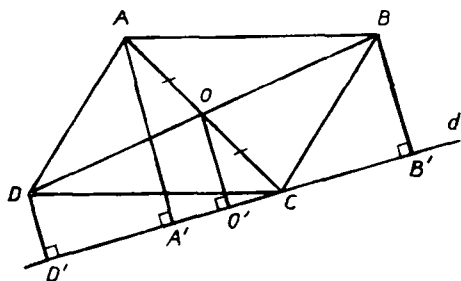
Từ (1) và (2) suy ra ADFE là hình bình hành.

32. Cách 1 (h.115)

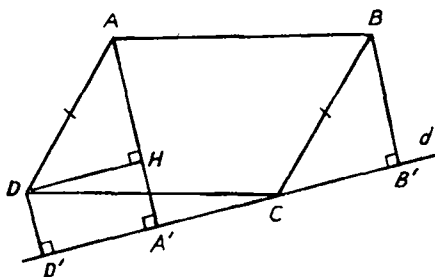
$AC \cap BD = \{O\}$. Kẻ $OO' \perp d$. Chứng minh rằng $AA' = 2 OO'$, $BB' + DD' = 2 OO'$.

Cách 2 (h.116)

Kẻ $DH \perp AA'$. Chứng minh rằng $HA' = DD'$, $AH = BB'$.



Hình 115

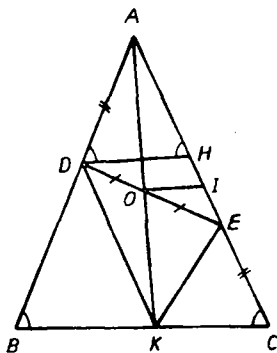


Hình 116

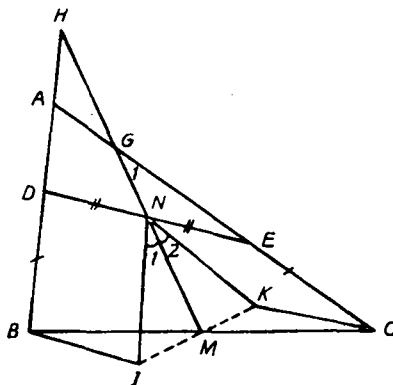
33. (h.117)

Kẻ $DH \parallel BC$, $OI \parallel BC$. Ta có $\widehat{ADH} = \widehat{B}$, $\widehat{AHD} = \widehat{C}$, mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên $\widehat{ADH} = \widehat{AHD}$.

ΔADH cân $\Rightarrow AH = AD = EC$. Chứng minh tiếp $HI = IE$ để suy ra $AI = IC$, $AO = OK$.



Hình 117



Hình 118

34. (h.118)

a) Ta có $BI \parallel DN$, $BI = DN$, $CK \parallel NE$, $CK = NE$, mà $DN = NE$ nên $BI \parallel CK$, $BI = CK$. Suy ra : BICK là hình bình hành.

Trong hình bình hành BICK, M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của IK.

b) Gọi G, H thứ tự là giao điểm của MN với AC, AB.

Ta có ΔNIK cân ở N, NM là trung tuyến (câu a) $\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$.

Ta lại có $NI \parallel HB \Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{H}$, $NK \parallel AC \Rightarrow \widehat{N}_2 = \widehat{G}_1$.

Vậy $\widehat{H} = \widehat{G}_1$.

35. Các chữ cái có tâm đối xứng : H, I, N, O, S, X.

36. a) Tâm đối xứng của đoạn thẳng AB là trung điểm của nó.

Tâm đối xứng của hình bình hành là giao điểm hai đường chéo.

Tâm đối xứng của đường tròn (O ; R) là O.

b) Tam giác đều không có tâm đối xứng.

c) Có, chẳng hạn đường thẳng : mọi điểm thuộc đường thẳng đều là tâm đối xứng của đường thẳng.

37. Giải tương tự câu a của ví dụ 5.

38. (h.119)

a) Chứng minh rằng BHCD là hình bình hành.

b) IM là đường trung bình của ΔAHD .

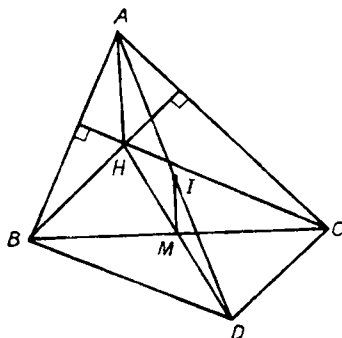
39. (h.120)

MN = AC (cùng bằng 2 EF).

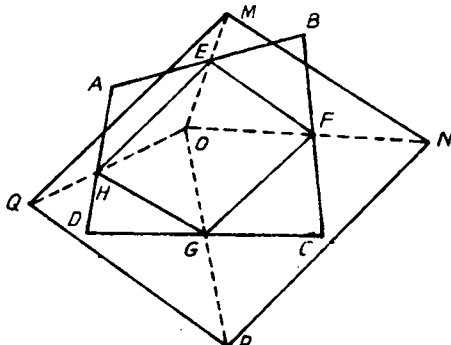
Tương tự $PQ = AC$, $MQ = BD$, $NP = BD$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

40. (h.121)

a) Chứng minh rằng AEFC là hình bình hành.



Hình 119



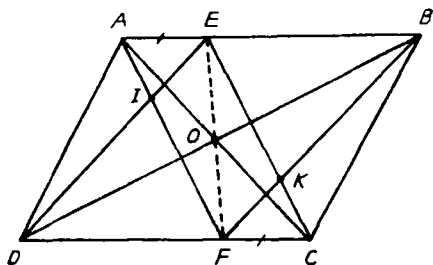
Hình 120

b) Chứng minh rằng EIFK là hình bình hành.

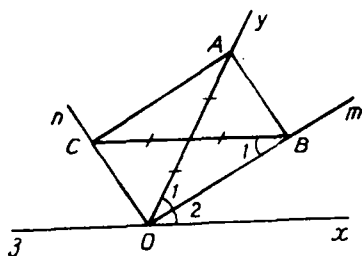
41. (h.122)

a) Tứ giác ABOC có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

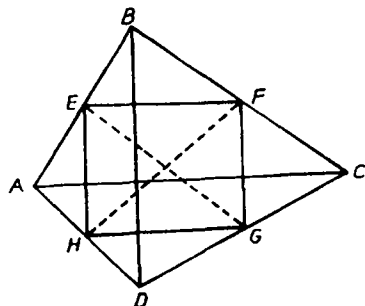
b) Theo tính chất hình chữ nhật : $\widehat{B}_1 = \widehat{O}_1$, mà $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{O}_2$. Do đó $BC \parallel xz$.



Hình 121



Hình 122



Hình 123

42. (h.123)

Chứng minh EFGH là hình chữ nhật (hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau). suy ra $EH \perp HG$, do đó $BD \perp AC$.

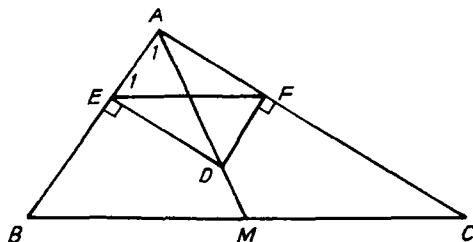
43. (h.124)

a) Chứng minh rằng $\widehat{E}_1$ và $\widehat{B}$ cùng bằng $\widehat{A}_1$.

b) Ta có $EF = AD$,
 $BC = 2 AM$. Do đó : $EF = \frac{1}{4} BC$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{1}{2} AM$$

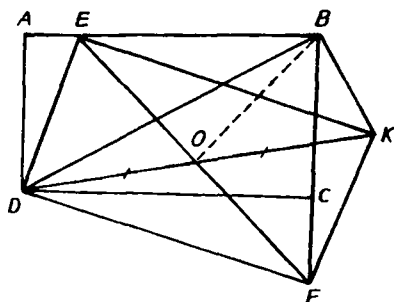
$\Leftrightarrow D$ là trung điểm của AM .



Hình 124

44. (h.125)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình chữ nhật $EDFK$, ta có $OD = OK = OE = OF$. Tam giác vuông BEF có BO là trung tuyến ứng với cạnh huyền $\Rightarrow BO = OE = OF$. ΔBDK có $BO = OD = OK$ nên $\widehat{DBK} = 90^\circ$.



Hình 125

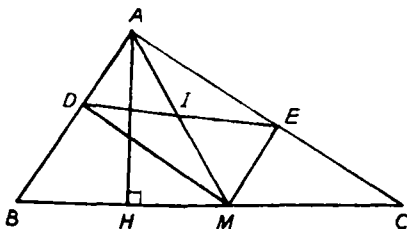
45. (h.126)

a) Chứng minh rằng $IA = IH$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2} AM$).

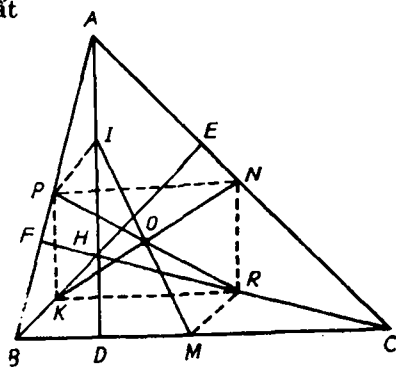
b) Ta có $DE = AM$ nên DE nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M \equiv H$.



Hình 126



Hình 127

46. (h.127)

a) Chứng minh rằng $KPNR$, $PIRM$ là hình chữ nhật.

b) Xét tam giác vuông IDM , ta có $OD = OI = OM$.

Tương tự , $OE = OK = ON$, $OF = OP = OR$.

Vậy chín điểm $M, N, P, I, K, R, D, E, F$ cách đều điểm O .

47. Do các cặp cạnh đối, nếu chúng bằng nhau đôi một thì tứ giác là hình bình hành. Do tiếp hai đường chéo, nếu chúng bằng nhau thì hình bình hành là hình chữ nhật.

48. (h.128)

Sau lần gấp thứ nhất ta có $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{C}$. Sau lần gấp thứ hai ta có $\widehat{A} = \widehat{B}$, $\widehat{C} = \widehat{D}$.

Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$.

49. Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

50. (h.129)

Để dàng dựng được hình chữ nhật ABCD bằng êke. Sau đó dựng giao điểm O của hai đường chéo, rồi dựng $OH \perp AB$.

51. Sai lầm do vẽ sai vị trí của điểm K, thực ra B và D không nằm cùng phía đối với KC. Giải thích như sau :

Vẽ hình chữ nhật ABCE (h.130) thì B và E nằm cùng phía đối với CD. Ta có $\triangle ABK = \triangle ECK$ (c.g.c) $\Rightarrow KA = KE$ (1).

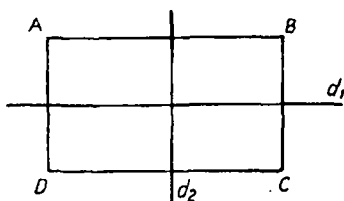
Ta cũng có $\triangle ABK = \triangle DCK$ (c.g.c) $\Rightarrow KA = KD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $KD = KE$. mà $CD = CE$ nên KC là đường trung trực của DE.

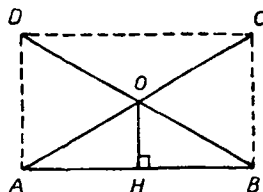
$\Rightarrow D$ và E nằm khác phía đối với KC.

$\Rightarrow D$ và B nằm khác phía đối với KC.

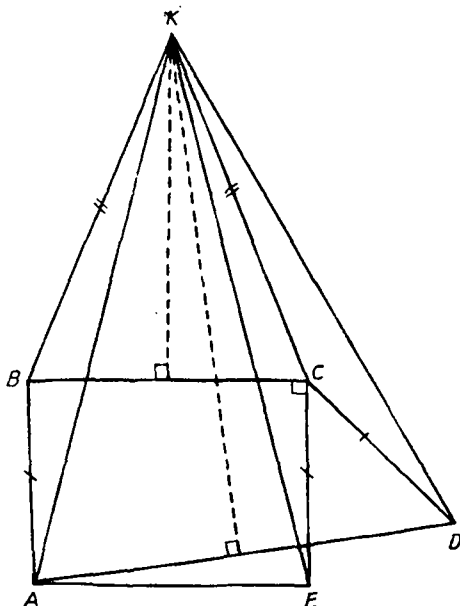
Do đó $\widehat{DCK} - \widehat{KCB}$ không bằng $\widehat{DCB}$ nên không có đẳng thức $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$.



Hình 128



Hình 129

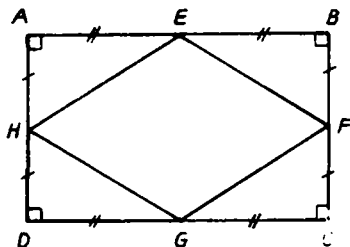


Hình 130

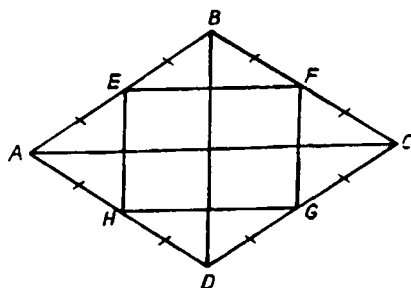
52. (h.131)

Chứng minh rằng các tam giác AEH, BEF, CGF, DGH bằng nhau.

b) Thay "hình chữ nhật" bởi "tứ giác có hai đường chéo bằng nhau", ta vẫn được EFGH là hình thoi.



Hình 131



Hình 132

53. (h.132)

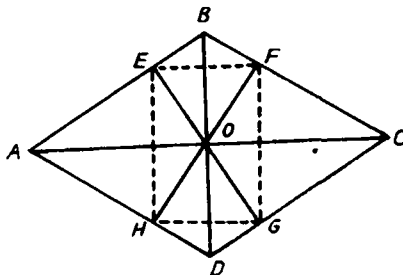
a) Chứng minh EFGH là hình bình hành, sau đó chứng minh thêm $\widehat{E} = 90^\circ$ hoặc $EG = FH$.

b) Thay "hình thoi" bởi "tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau", ta được EFGH là hình chữ nhật.

54. (h.133)

Theo tính chất tia phân giác của một góc ta có $OE = OF = OG = OH$

Ta lại có E, O, G thẳng hàng. F, O, H thẳng hàng. Từ đó dễ dàng chứng minh được EFGH là hình chữ nhật.



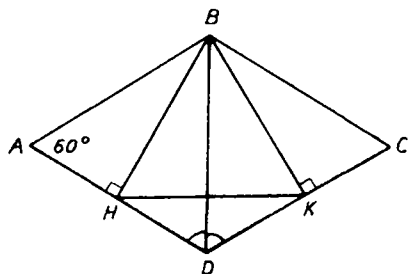
Hình 133

55. (h.134)

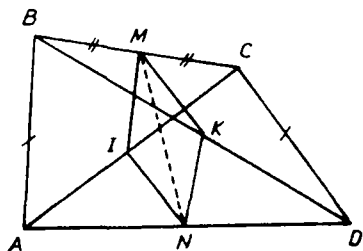
DB là tia phân giác của góc D $\Rightarrow BH = BK$ (1)

Ta lại có $\widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{HDK} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{HBK} = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta BHK$ là tam giác đều.



Hình 134



Hình 135

56. (h.135)

Chứng minh rằng MINK là hình thoi.

57. (h.136)

a) Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{EBC}$ (cùng phụ với góc C) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.

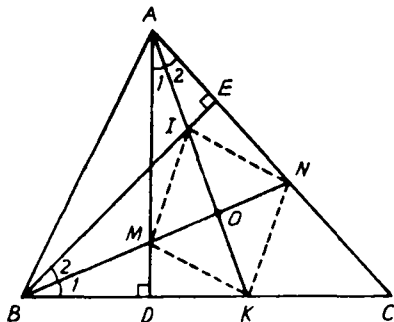
Gọi O là giao điểm của AK và BN. Xét ΔAMO và ΔBMD : $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, $\widehat{AMO} = \widehat{BMD}$

$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BDM} = 90^\circ$.

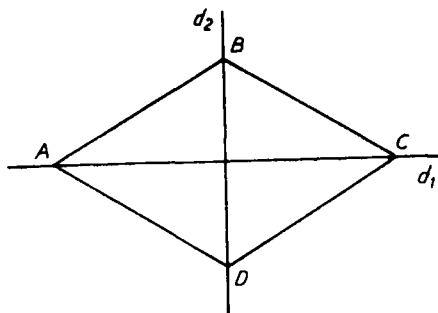
b) MINK là hình thoi.

58. (h.137)

Sau lần gấp thứ nhất ta có $AB = AD$, $BC = CD$.



Hình 136



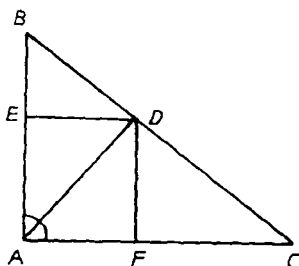
Hình 137

Sau lần gấp thứ hai ta có $AB = BC$, $AD = DC$.

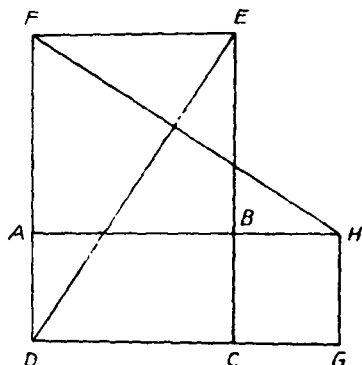
Vậy $AB = BC = CD = DA$.

59. (h.138)

Lần lượt chứng minh tứ giác $AEDF$ là hình bình hành, hình thoi (vì AD là tia phân giác của góc A), hình vuông.



Hình 138



Hình 139

60. (h.139)

Trước hết chứng minh rằng $\triangle AFH = \triangle FED$ (c.g.c).

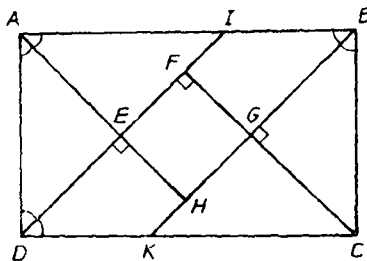
61. (h.140)

a) Tứ giác $EFGH$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật (1).

Ta lại có $\triangle DFC$ cân $\Rightarrow FD = FC$. $\triangle AED = \triangle BGC$ (g.c.g)
 $\Rightarrow ED = GC$.

Suy ra $EF = FG$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow EFGH$ là hình vuông.

b) Chứng minh rằng $DE = GK$ vì $DE = \frac{1}{2} DI$, $GK = \frac{1}{2} BK$.
 $DI = BK$. Từ đó suy ra $DEGK$ là hình bình hành và suy ra điều phải chứng minh.



Hình 140

62. (h.141)

a) $\triangle ABC = \triangle EAK$ (c.g.c)

$\Rightarrow BC = AK$.

b) $KA \cap BC = \{H\}$.

Từ câu a, ta có $\hat{C}_1 = \hat{K}_1$ mà $\hat{K}_1 = \hat{A}_1$ nên $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$.

Suy ra : $\hat{C}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$.

c) $\triangle BCF = \triangle KAC$ (c.g.c)
từ đó dễ dàng chứng minh được $BF \perp KC$.

Tương tự , $CD \perp BK$.

$\triangle KBC$ có KH, BF, CD là các đường cao nên chúng đồng quy.

63. (h.142)

Vẽ $EH \perp AK$,

$EH \cap BC = \{F'\}$.

Chứng minh rằng AF' là tia phân giác của góc BAK để suy ra F' trùng F .

64. (h.143)

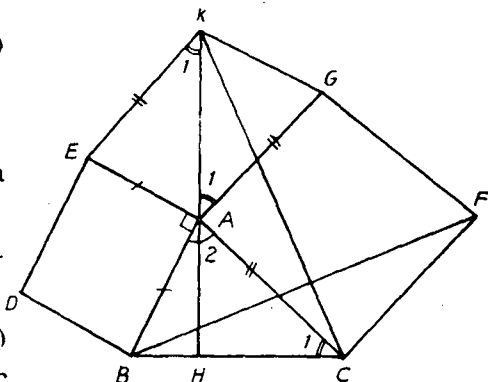
a) $\triangle AME = \triangle CMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow AE = BC, \hat{A}_1 = \hat{C}_1$.

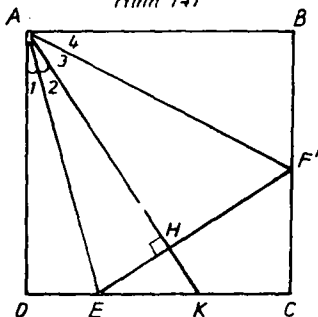
$AE \cap BC = \{N\}$. $\triangle CNE$ và $\triangle AME$ có hai cặp góc bằng nhau nên $\hat{CNE} = \hat{AME}$

$\Rightarrow AE \perp BC$.

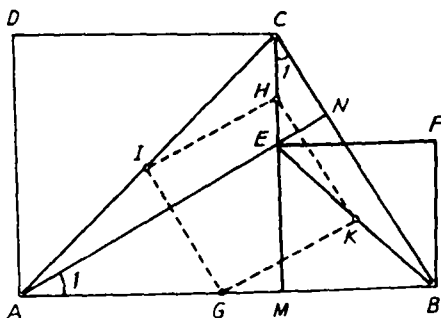
b) IG và HK đều bằng $\frac{1}{2}BC$.



Hình 141



Hình 142



Hình 143

IH và GK đều bằng $\frac{1}{2}AE$, mà $BC = AE$ nên $IG = HK = IH = GK$.

Chứng minh tiếp $IH \perp HK$ để suy ra $GIHK$ là hình vuông.

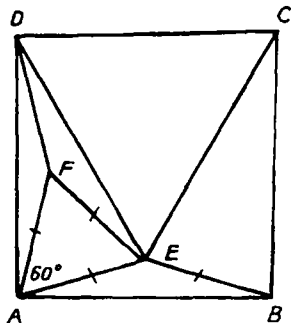
65. (h.144)

a) $\triangle AFD = \triangle AEB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{AEB} = 150^\circ$.

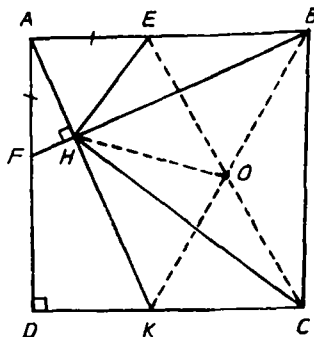
b) $\widehat{EFD} = 360^\circ - (\widehat{AFD} + \widehat{AFE}) = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$.

c) $\triangle EFD = \triangle AFD$ (c.g.c) $\Rightarrow ED = AD = DC$.

$\triangle EDC$ cân ở D có $\widehat{EDC} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.



Hình 144



Hình 145

66. (h.145)

$AH \cap CD = \{K\}$. $\triangle ADK = \triangle BAF$ (g.c.g) $\Rightarrow DK = AF = AE$
 $\Rightarrow BE = CK$.

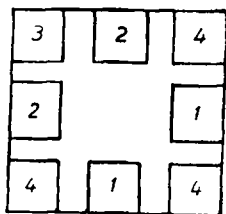
Để dàng chứng minh $BEKC$ là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình chữ nhật.

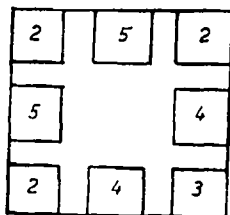
Hãy sử dụng điều kiện $HO = OB = OK$ để chứng minh

$HO = OE = OC$ và suy ra $\widehat{EHC} = 90^\circ$.

67. Có nhiều cách xếp, chẳng hạn ở hình 146 (xếp 21 người) và ở hình 147 (xếp 27 người).



Hình 146



Hình 147

68. a) 26 v.

b) Đa giác có 11 cạnh.

69. Tổng các góc trong và ngoài của đa giác tại một đỉnh bằng $2v$, tại n đỉnh bằng $2nv$.

Ta đã biết tổng các góc trong của đa giác bằng $(n-2).2v$.

Vậy tổng các góc ngoài của đa giác bằng : $2nv - (n-2).2v = 4v$.

70. Giả sử tồn tại một đa giác có bốn góc nhọn thì bốn góc ngoài tương ứng là bốn góc tù, tổng của chúng lớn hơn $4v$, trái với kết luận ở bài 69.

Vậy không có đa giác nào có bốn góc nhọn.

71. Giải phương trình :

$$(n-2).2v = 4v, \text{ ta được } n = 4.$$

72. Gọi số cạnh của đa giác là n , số đo của góc ngoài nêu trong bài toán là α , ta có :

$$(n-2).180^\circ + \alpha = 1100^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } \alpha &= 1100^\circ - 180^\circ(n-2) = 1460^\circ - 180^\circ n \\ &= 180^\circ(8-n) + 20^\circ. \end{aligned}$$

Do $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $8-n = 0$, vậy $n = 8$.

73. a) Từ mỗi đỉnh của hình n -giác lồi, kẻ được $n-1$ đoạn thẳng đến các đỉnh còn lại, trong đó có hai đoạn thẳng là cạnh của đa giác, $n-3$ đoạn thẳng là đường chéo.

Đa giác có n đỉnh nên kẻ được $n(n-3)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo được tính hai lần. Vậy số đường chéo của hình n -giác lồi là $\frac{n(n-3)}{2}$.

b) Giải phương trình $\frac{n(n-3)}{2} = n$.

Ta được $n = 5$.

74. (h.148)

Chứng minh rằng FBCE và ACDF là các hình bình hành.

75. (h.149)

Chứng minh rằng các tam giác $AA'F'$, $BB'A'$, $CC'B'$, $DD'C'$, $EE'D'$, $FF'E'$ bằng nhau.

76. a) đủ.

b) cần.

c) cần và đủ.

d) cần và đủ.

77. a) $\triangle ABC$ vuông ở A.

b) $\triangle ABC$ cân ở A.

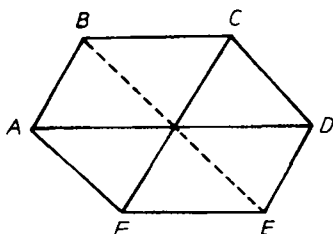
78. (h.150)

a) DEFH là hình bình hành.

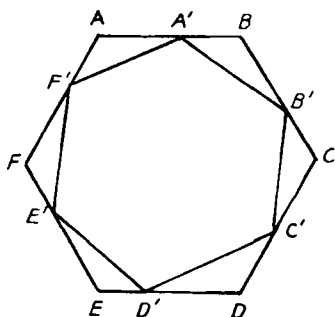
b) $\triangle ABC$ cân ở A thì DEFH là hình chữ nhật.

$\triangle ABC$ có $BD \perp CE$ thì DEFH là hình thoi.

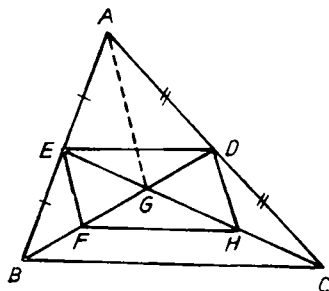
$\triangle ABC$ cân ở A và $BD \perp CE$ thì DEFH là hình vuông.



Hình 148



Hình 149



Hình 150

79. (h.151)

a) Tứ giác AKCE có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường chéo nên là hình bình hành.

b) Hình bình hành AKCE là hình thoi.

$$\Leftrightarrow AC \perp KE$$

$\Leftrightarrow$ hình bình hành ABCD là hình thoi

c) M là trung điểm của CD

$\Leftrightarrow K$ là trọng tâm của ΔADC

$$\Leftrightarrow DK = \frac{1}{3} DB.$$

80. (h.152)

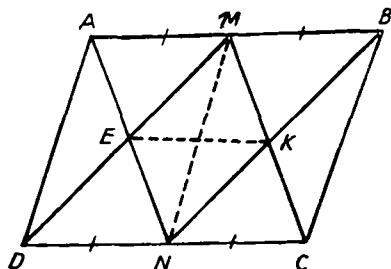
a) MNPQ là hình bình hành.

b) Nếu $AD \perp BC$ thì MNPQ là hình chữ nhật.

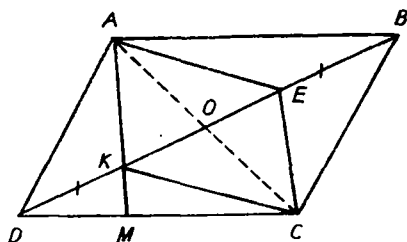
Nếu $AD = BC$ thì MNPQ là hình thoi.

Nếu $AD \perp BC, AD = BC$ thì MNPQ là hình vuông.

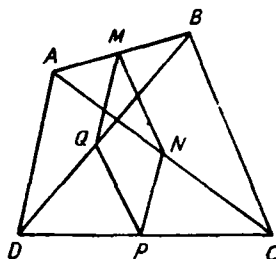
81. (h.153)



Hình 153



Hình 151



Hình 152

a) Dưới đây là một số cách chứng minh điều kiện cần. điều kiện đủ bạn đọc tự chứng minh.

Cách 1. MENK là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{E} = 90^\circ \Rightarrow AMND$ là hình thoi $\Rightarrow AM = AD$

$$\Rightarrow AD = \frac{1}{2} DC.$$

Cách 2. MENK là hình chữ nhật $\Rightarrow MN = EK.$

Mà $MN = AD$, $EK = \frac{1}{2} DC$ nên $AD = \frac{1}{2} DC$.

Cách 3. $MENK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{M} = 90^\circ \Rightarrow$ trung tuyến $AM = \frac{1}{2} DC \Rightarrow AD = \frac{1}{2} DC$.

b) Điều kiện : $ABCD$ là hình chữ nhật có $DC = 2AD$.

82. (h.154)

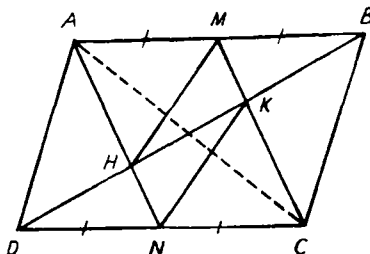
a) H là trọng tâm của $\Delta ADC \Rightarrow HN = \frac{1}{3} AN$,

K là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow MK = \frac{1}{3} MC$, mà $AN = MC$ (vì $AMCN$ là hình bình hành) nên $HN = MK$.

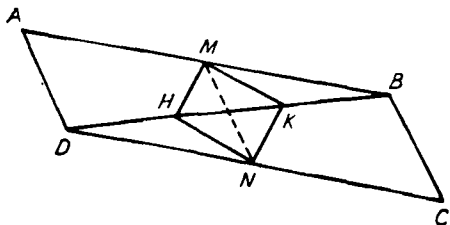
Ta lại có $HN \parallel MK$, suy ra $MHNK$ là hình bình hành.

b) $MHNK$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow MN = HK \Leftrightarrow AD = \frac{1}{3} DB$ (h.155).

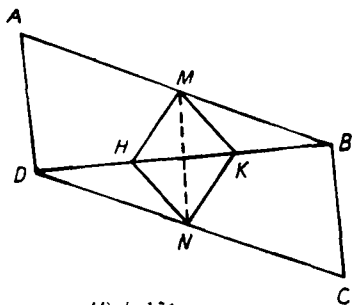
$MHNK$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN \perp HK \Leftrightarrow AD \perp DB$ (h.156).



Hình 154



Hình 155



Hình 156

83. Xét tứ giác $ABCD$ có E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC (h.157). Gọi K là trung điểm của BD , KE là đường trung bình

của ΔABD nên $KE \parallel AB$, $KE = \frac{AB}{2}$.

Tương tự $KF \parallel CD$, $KF = \frac{CD}{2}$. Do đó

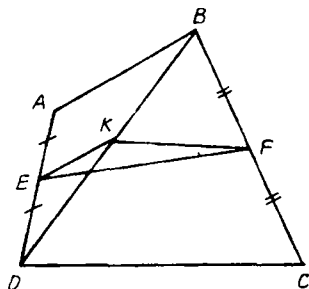
$$KE + KF = \frac{AB + CD}{2}.$$

$$\text{Ta có : } EF = \frac{AB + CD}{2}$$

$$\Leftrightarrow EF = KE + KF$$

$$\Leftrightarrow K \text{ nằm giữa } E \text{ và } F$$

$$\Leftrightarrow AB \parallel CD.$$



Hình 157

84. Xét hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BD, AC (h.158).

Dễ dàng chứng minh được IMKN là hình bình hành và

$$MN = \frac{DC - AB}{2}.$$

$$\text{Do đó : } IK = \frac{DC - AB}{2}$$

$$\Leftrightarrow IK = MN$$

$$\Leftrightarrow IMKN \text{ là hình chữ nhật}$$

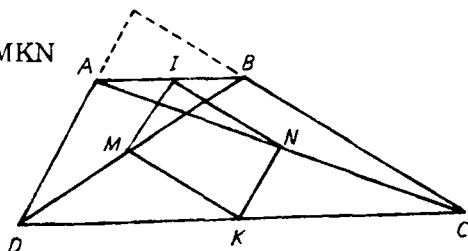
$$\Leftrightarrow IM \perp KN$$

$$\Leftrightarrow AD \perp BC \text{ (vì } IM \parallel AD, IN \parallel BC).$$

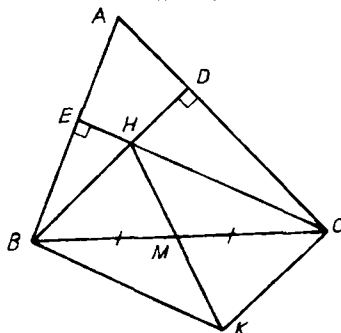
Điều kiện phải tìm là hình thang có hai cạnh bên vuông góc với nhau.

85. (h.159)

BHCK là hình bình hành, gọi M là giao điểm của hai đường chéo BC và HK.



Hình 158



Hình 159

a) BHCK là hình thoi $\Leftrightarrow HM \perp BC$. Ta lại có $HA \perp BC$ nên :

$HM \perp BC \Leftrightarrow A, H, M$ thẳng hàng $\Leftrightarrow AM \perp BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân ở A.

b) BHCK là hình chữ nhật $\Leftrightarrow BH \perp HC$.

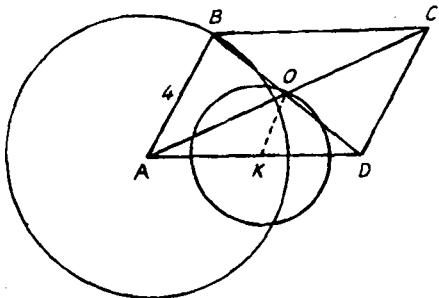
Ta lại có $BE \perp HC, CD \perp BH$ nên :

$BH \perp HC \Leftrightarrow H, D, E$ trùng nhau ; khi đó H, D, E cũng trùng A, ΔABC là tam giác vuông ở A.

86. (h.160)

Tập hợp các điểm B là đường tròn (A ; 4cm) trừ giao điểm của đường tròn với đường thẳng AD.

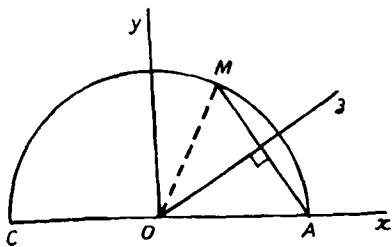
Gọi K là trung điểm của AD. Tập hợp các điểm O là đường tròn (K ; 2cm) trừ giao điểm của đường tròn với đường thẳng AD.



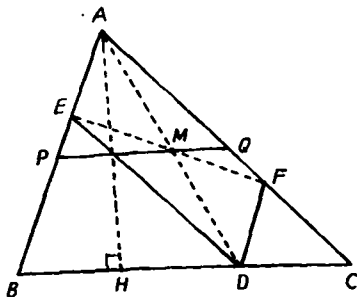
Hình 160

87. (h.161)

Tập hợp các điểm M là nửa đường tròn có đường kính AC (C đối xứng với A qua O) trừ các điểm A và C.



Hình 161



Hình 162

88. (h.162)

a) Chú ý rằng AEDF là hình bình hành.

b) Tập hợp các điểm M là đường trung bình của ΔABC .

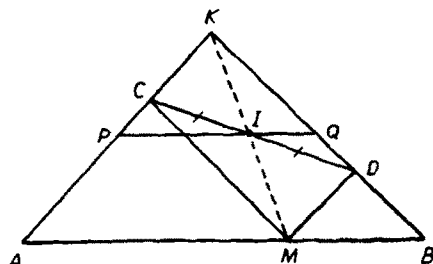
Cách 1. Kẻ $AH \perp BC$. Đưa về quỹ tích đường thẳng song song bằng cách chứng tỏ rằng khoảng cách từ M đến BC không đổi.

Cách 2. Đưa về quỹ tích đường trung trực bằng cách chứng tỏ rằng $MA = MH$.

Cách 3. Gọi P, Q là trung điểm của AB, AC . Chứng tỏ rằng ba điểm P, M, Q thẳng hàng.

89. (h.163)

$AC \cap BD = \{K\}$, ΔKAB vuông cân cố định.



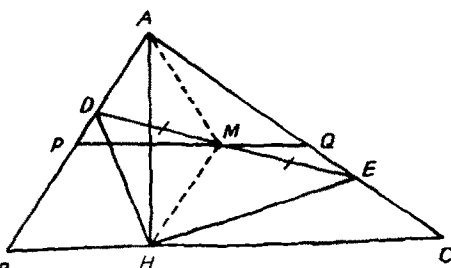
Hình 163

Giải tương tự như bài 88. Tập hợp các điểm I là đường trung bình PQ của ΔKAB .

90. (h.164)

Chứng minh rằng $MA = MH$.

Tập hợp các điểm M là đoạn thẳng PQ thuộc đường trung trực của AH .

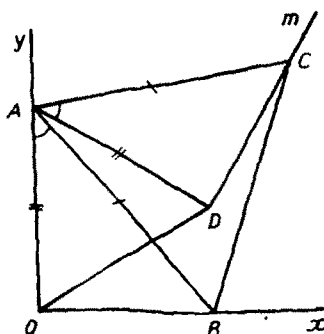


Hình 164

91. (h.165)

Đặc biệt hóa : Khi $B \equiv O$ thì $C \equiv D$ (ΔAOD đều, D nằm trong góc xOy). D là điểm cố định và là một điểm của quỹ tích. $\Delta ADC = \Delta AOB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AOB} = 90^\circ$.

Tập hợp các điểm C là tia $Dm \perp AD$ tại D .



Hình 165

92. (h.166)

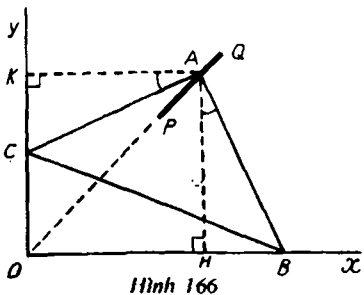
Vẽ $AH \perp Ox$, $AK \perp Oy$. Ta có $\widehat{KAC} = \widehat{HAB}$, $\Delta KAC = \Delta HAB$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = AH \Rightarrow A \in$ tia phân giác của góc xOy .

Giới hạn :

Khi $C \equiv 0$ (hoặc $B \equiv 0$) thì
 $A \equiv P$ ($OP = a$).

Khi $AB \perp O_x$ (lúc đó $AC \perp O_y$)
thì $A \equiv Q$ ($OQ = BC$).

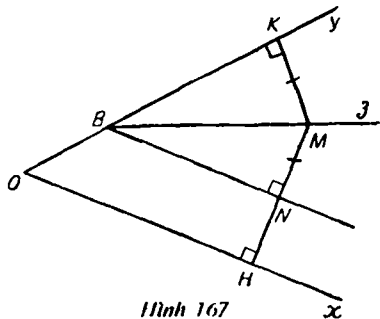
Tập hợp các điểm A là đoạn thẳng PQ thuộc tia phân giác của góc xOy.



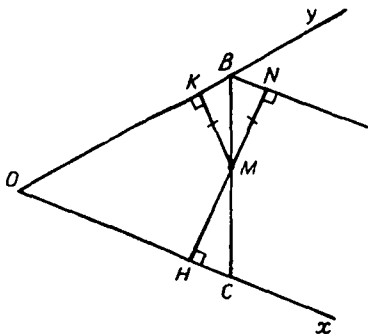
93. (h. 167)

Vẽ $MH \perp Ox$, $MK \perp Oy$. Trên MH lấy $MN = MK$ thì $NH = 1\text{cm}$. Qua N kẻ đường thẳng song song với Ox , cắt Oy ở B . BN là tia cố định, góc NBy cố định, M cách đều hai cạnh của góc đó.

Tập hợp các điểm M là tia phân giác Bz của góc NBy.



94. (h.168)



Vẽ $MH \perp Ox$, $MK \perp Oy$. Trên tia đối của tia MH lấy N , sao cho $MN = MK$ thì $HN = 3 \text{ cm}$. Qua N vẽ đường thẳng song song với Ox , cắt Oy ở B . Ta có tia BN cố định, góc OBN cố định, M cách đều hai cạnh của góc đó.

Tập hợp các điểm M là đoạn thẳng BC thuộc tia phân giác của góc OBN.

Chú y

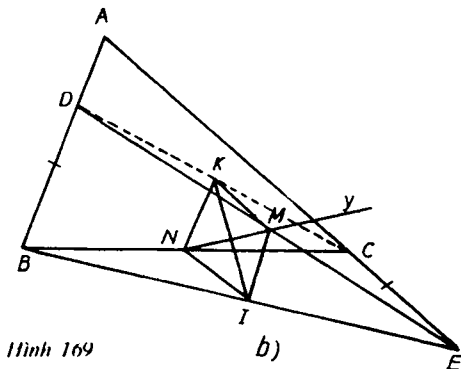
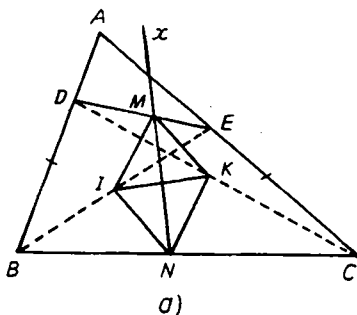
BC là đáy của tam giác cân có góc ở đỉnh là xOy , đường cao ứng với cạnh bên bằng 3 cm.

95. (h.169 a,b)

Gọi N là trung điểm của BC, I và K là trung điểm của BE và CD. Ta có MINK là hình thoi.

a) Tập hợp các điểm M là tia Nx song song với phân giác trong của góc BAC (h. 169 a).

b) Tập hợp các điểm M là tia Ny song song với phân giác ngoài của góc BAC (h. 169 b).



Hình 169

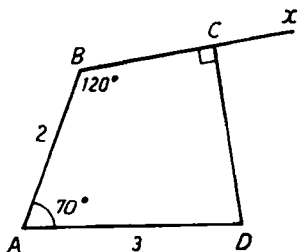
96. a) (h. 170)

Dựng $\triangle ABD$ có $\hat{A} = 70^\circ$, $AB = 2\text{cm}$, $AD = 3\text{cm}$.

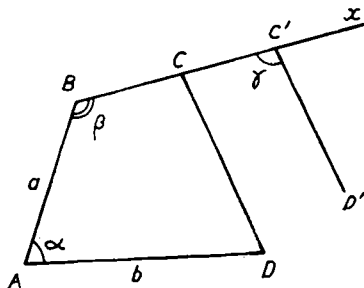
Dựng góc ABx sao cho Bx và AD cùng phía đối với AB, $\hat{ABx} = 120^\circ$.

Dựng $DC \perp Bx$.

b) (h. 171)



Hình 170



Hình 171

Dựng ΔABD rồi dựng tia Bx tương tự như câu a.

Lấy C' bất kì thuộc tia Bx, dựng góc $BC'D'$ sao cho $C'D'$ và BA cùng phía đối với BC' , $\widehat{BC'D'} = \gamma$.

Qua D dựng $DC \parallel D'C'$.

97. (h.172)

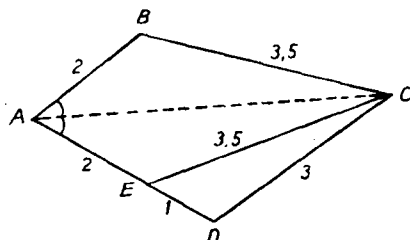
Phân tích

Lấy E trên AD sao cho $AE = 2\text{cm}$.

$\Delta AEC = \Delta ABC$ (c.g.c)

$\Rightarrow EC = BC = 3,5\text{cm}$.

ΔEDC dựng được biết ba cạnh.



Hình 172

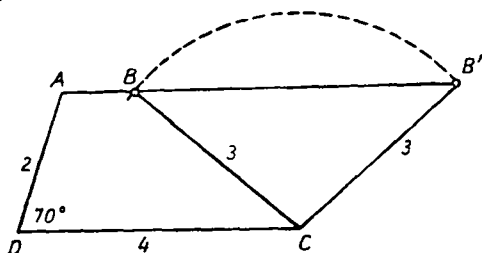
Dễ dàng dựng được đỉnh A, rồi đỉnh B.

98. Cách dựng được thể hiện trên hình 173. Bài toán có hai nghiệm hình.

99. (h.174)

Dựng ΔABC có $\widehat{ACB} = 20^\circ$, $AC = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$.

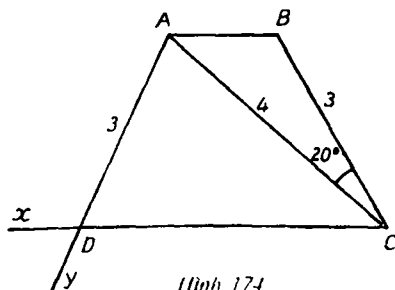
Dựng $Cx \parallel AB$, dựng Ay sao cho $\widehat{BAy} = \widehat{B}$.



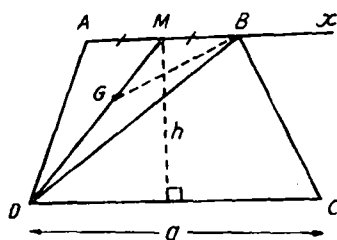
Hình 173

100. (h.175)

Gọi M là trung điểm của AB.



Hình 174



Hình 175

ΔMDC cân ở M có đáy a , đường cao tương ứng h nên dựng được.

Trọng tâm G của ΔABD dựng được ($DG = \frac{2}{3} DM$).

Do $\widehat{ADB} = \widehat{BDC} = \widehat{ABD}$ nên ΔABD cân ở A , do đó xác định được B :

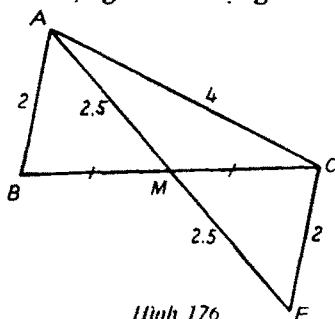
$B \in$ đường thẳng $Mx \parallel DC$;

$B \in$ đường tròn $(G ; GD)$.

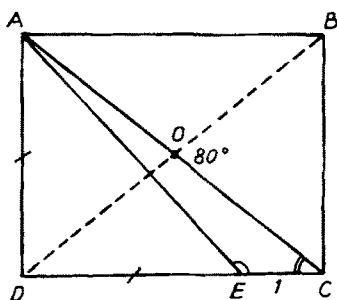
Bài toán có một nghiệm hình vì $GB = GD > GM$.

101. (h.176)

Lấy E đối xứng với A qua M . Trước hết dựng ΔAEC biết ba cạnh.
Sau đó dựng M rồi dựng B .



Hình 176



Hình 177

102. (h.177)

Dựng ΔAEC có

$EC = 1\text{cm}$, $\widehat{AEC} = 135^\circ$,

$\widehat{ACE} = 40^\circ$.

Sau đó dựng B và D .

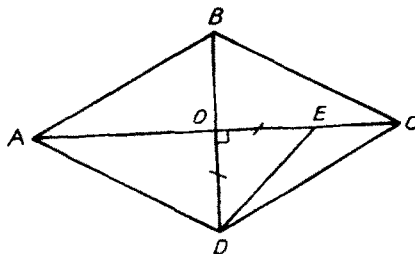
103. (h.178)

Trên OC lấy E sao cho
 $OE = OD$.

Các độ dài AE , AD đã
biết, $\widehat{AED} = 45^\circ$.

Trước hết dựng ΔAED .

Sau đó dựng B và C .



Hình 178

104. (h.179)

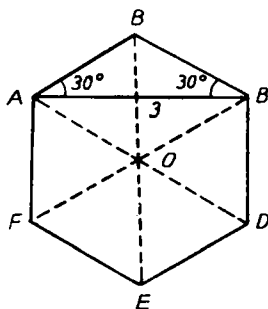
Trên AC lấy E sao cho
 $AE = AD$ thì $EC = 1,5\text{cm}$.

Ta có $\widehat{ECD} = 45^\circ$,

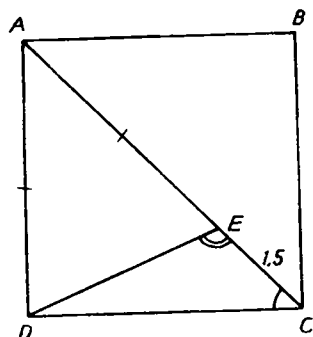
$$\widehat{DEC} = 90^\circ + \frac{45^\circ}{2}.$$

Trước hết dựng $\triangle DEC$.
 Sau đó dựng A và B.

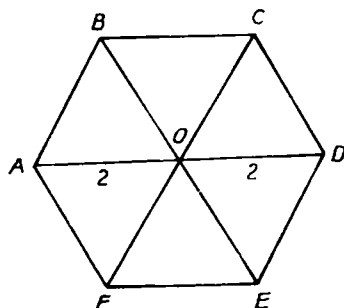
105. Cách dựng được thể
 hiện trên các hình 180, 181.



Hình 180



Hình 179



Hình 181

106. (h. 182)

Dựng B' đối xứng với B qua AD.

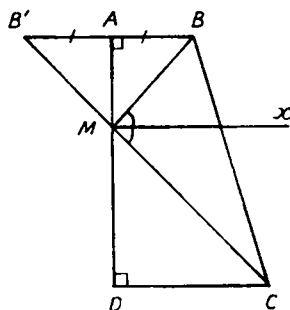
$$B'C \cap AD = \{ M \}$$

107. (h.183)

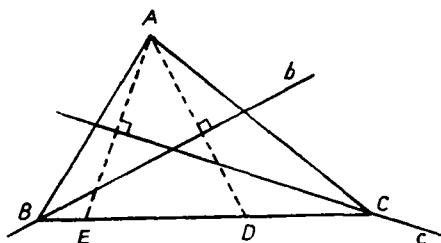
Dựng D đối xứng với A qua b.

Dựng E đối xứng với A qua c.

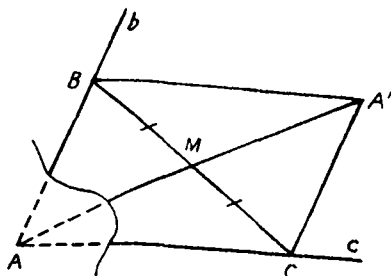
Đường thẳng DE cắt b và c theo
 thứ tự ở B và C.



Hình 182



Hình 183



Hình 184

108. (h. 184)

Gọi các đường thẳng AB và AC theo thứ tự là b và c .

Qua B dựng đường thẳng song song với c ; qua C dựng đường thẳng song với b ; chúng cắt nhau tại A' .

Dựng M là trung điểm của BC, $A'M$ là đường thẳng phải dựng.

109. (h.185)

Dựng E' đối xứng với E qua O.

Dựng F' đối xứng với F qua O.

EF' là đường thẳng chứa cạnh AB, FE' là đường thẳng chứa cạnh CD. Dễ dàng dựng các đỉnh A, B, C, D của hình vuông.

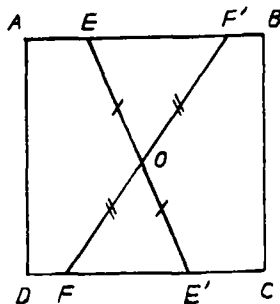
Bài toán có một nghiệm hình.

110. (h.186)

Phân tích

Kẻ $EF \parallel AB$ ($F \in BC$) thì $BD = EF$, do đó $AE = EF$.

Suy ra $\hat{A}_1 = \hat{F}_1 = \hat{A}_2$.



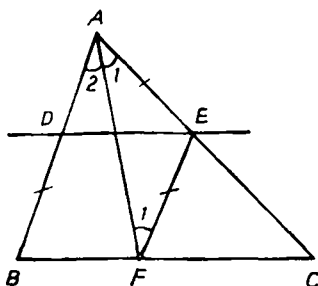
Hình 185

Vậy F thuộc tia phân giác của góc A.

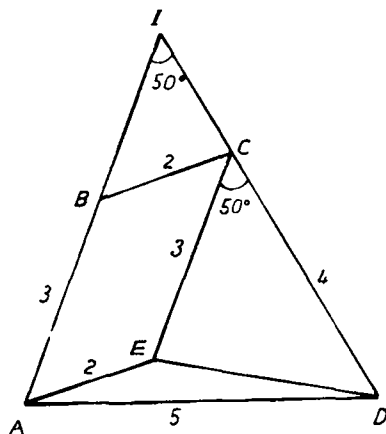
Nhận xét

Đoạn thẳng FE chính là ảnh của BD trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{DE}$. Nhờ phép tịnh tiến này, đoạn thẳng BD được dời đến vị trí FE là vị trí thuận lợi : hai đoạn thẳng AE, EF là cạnh bên của tam giác cân AEF.

111. (h.187)



Hình 186



Hình 187

Phân tích

Vẽ hình bình hành ABCE.

Cách dựng

Dựng $\triangle CED$ biết hai cạnh và một góc xen giữa.

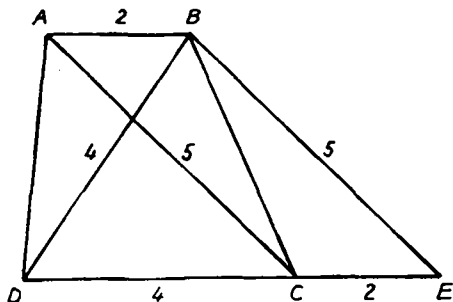
Dựng $\triangle AED$ biết ba cạnh. Sau đó dựng đỉnh B.

112. (h.188)

Phân tích

Vẽ hình bình hành ABEC.

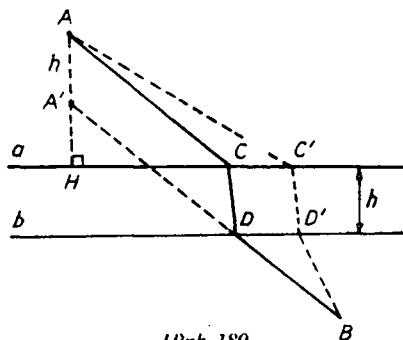
Cách dựng



Hình 188

Sau đó dựng đỉnh A.

113. (h.189)



Kẻ $AH \perp a$. Trên tia AH lấy A' sao cho $AA' = h$.

$$A'B \cap b = \{D\}.$$

Kẻ DC $\perp$ a. Hãy chứng minh rằng $AC + CD + DB < AC' + C'D' + D'B$.

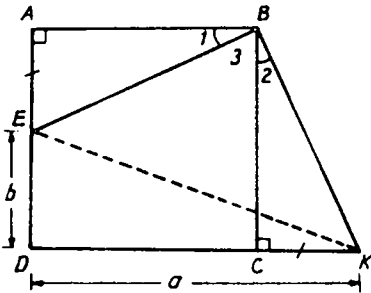
CHƯƠNG II

DIỆN TÍCH DA GIÁC

114. Đáp số : $\frac{d^2}{2}$.

115. Chứng minh rằng EFGH là hình chữ nhật. Đáp số : 40 cm^2 .

116. (h.190)



Hình 190

a) $\triangle BAE = \triangle BCK$
(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$. Do đó
 $\widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_3 = 90^\circ$.

b) $S_{DEK} = \frac{1}{2} ab$.

Ta có : $a + b =$
 $(CD + CK) + (AD - AE) =$
 $CD + AD = 2CD$

$$\Rightarrow CD = \frac{a + b}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \left(\frac{a + b}{2} \right)^2.$$

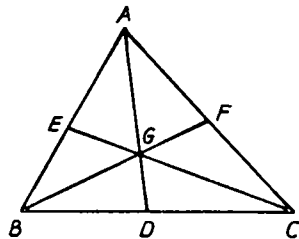
Ta có : $S_{BEK} + S_{DEK} = S_{BEDK} = S_{ABCD}$. Do đó :

$$S_{BEK} = \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 - \frac{ab}{2} = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

117. (h.191)

$$S_{BGD} = \frac{1}{3} S_{ABD}, \text{ mà } S_{ABD} =$$

$$\frac{1}{2} S_{ABC} \text{ nên } S_{BGD} = \frac{1}{6} S_{ABC}.$$



Hình 191

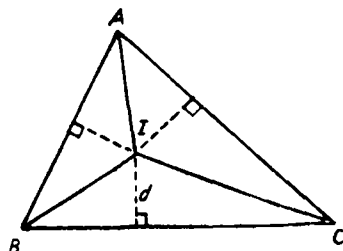
Tương tự đối với năm tam giác còn lại.

118. Chứng minh rằng $S_{ABC} = S_{DBC}$. Đáp số : 100 cm^2 .

119. (h.192)

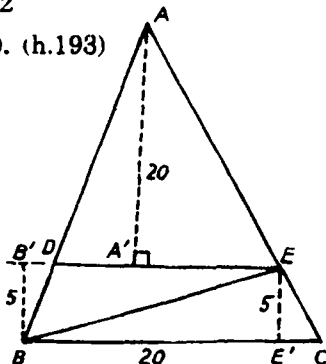
Gọi d là khoảng cách từ I đến các cạnh của tam giác ABC .

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{IAB} + S_{IBC} + S_{ICA} \\ &= \frac{AB}{2} \cdot d + \frac{BC}{2} \cdot d + \frac{CA}{2} \cdot d \\ &= \frac{AB + BC + CA}{2} \cdot d \\ &= \frac{10}{2} \cdot 1 = 5 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$



Hình 192

120. (h.193)



Hình 193

$$\begin{aligned} S_{BEC} &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EE' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5 = 50 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25 = \\ &= 250 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ABE} &= S_{ABC} - S_{BEC} = \\ &= 250 - 50 = 200 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

$\triangle ADE$ và $\triangle BDE$ có chung đáy DE , đường cao AA' gấp bốn lần đường cao BB' , do đó $S_{ADE} = 4 S_{BDE}$.

$$S_{ADE} = \frac{4}{5} S_{ABE} = \frac{4}{5} \cdot 200 = 160 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

121. (h.194)

$$\text{a) } S_{DBC} = \frac{1}{2} S_{ABDE} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{b) } \triangle ABK = \triangle DBC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AK = DC.$$

c) $S_{BHMK} =$
 $2 S_{ABK} = 2 S_{DBC} = a^2.$

Chứng minh tương tự,
 $S_{CHMI} = S_{ACFG} = b^2.$

Vậy $S_{BCIK} = a^2 + b^2.$

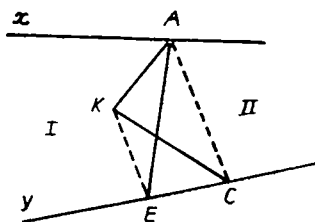
Chú ý

Bài toán trên cho ta một cách chứng minh định lí Pitago : nếu ΔABC vuông ở A thì $BC^2 = AB^2 + AC^2.$

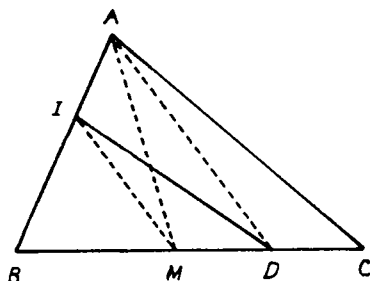
122. (h.195)

Nối AC. Qua K, vẽ đường thẳng song song với AC, cắt y ở E.

AE là đoạn thẳng phải dựng.



Hình 195



Hình 196

123. Cách 1 (h.196)

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$

Cần dựng $I \in AB$ sao cho $S_{DIM} = S_{AIM}.$

Muốn vậy kẻ $MI \parallel AD$ ($I \in AB$), DI là đường thẳng phải dựng.

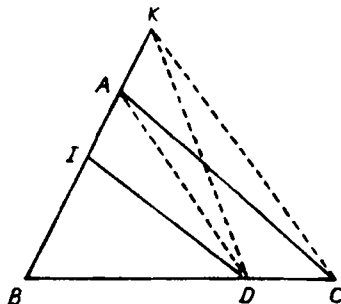
Chứng minh

$S_{DIM} = S_{AIM}$. Cùng cộng thêm S_{BIM} được :

$$S_{BID} = S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Cách 2 (h.197)

Trước hết ta dựng điểm K thuộc tia đối của tia AB sao cho $S_{AKD} = S_{ACD}$: qua C dựng đường thẳng song song với AD, cắt tia BA ở K.



Hình 197

Như vậy $S_{BDK} = S_{ABC}$.

Để chia ΔDBK thành hai phần có diện tích bằng nhau bởi một đường thẳng đi qua D, chỉ cần dựng trung tuyến DI của tam giác.

124. Diện tích hình thang : $44 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Diện tích hình chữ nhật : $56 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Diện tích hình vuông : $16 \text{ (cm}^2\text{)}.$

125. (h.198)

Lần lượt tính diện tích hình thang ABCD, S_1 , S_2 , S_{ADF} .

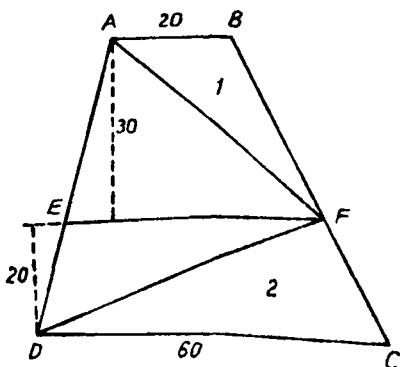
Chú ý rằng $S_{AEF} = \frac{3}{2} S_{DEF}$ (hai tam giác này có đáy chung) nên $S_{AEF} = \frac{3}{5} S_{ADF}$. Từ đó tính được EF.

Đáp số : $44\text{cm}.$

126. (h.199)

Kẻ $BE \parallel AC$ ($E \in DC$).

Ta có $CE = AB = 40\text{cm} \Rightarrow DE = 100 \text{ cm}.$



Hình 198

Ta lại có $BE = AC = BD$
 $\Rightarrow \Delta BDE$ cân ở B.

Kẻ $BH \perp DE$ thì BH cũng là trung tuyến.

Do $AC \perp BD$, $AC \parallel BE$
 nên $BD \perp BE \Rightarrow \Delta BDE$
 vuông ở E $\Rightarrow BH = \frac{1}{2} DE =$

50cm.

$$S_{ABCD} = (40 + 60) \cdot 50 : 2 \\ = 2500 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

127. Đáp số : $\frac{d^2}{2}$.

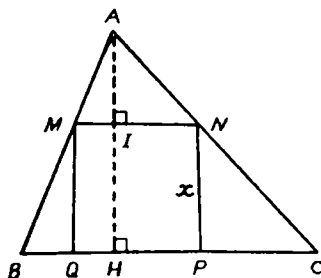
128. (h.200)

Gọi K là trung điểm của AC.

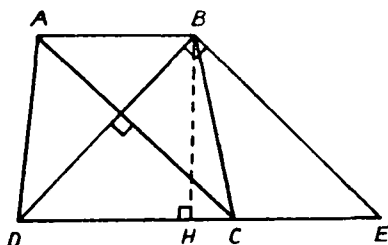
Ta có $IK = (DC - AB) : 2 = \frac{d}{2}$.

$$S_{AIC} = S_{AIK} + S_{CIK} = \\ \frac{1}{2} \cdot IK \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} IK \cdot \frac{h}{2} = IK \cdot \frac{h}{2} = \frac{dh}{4}$$

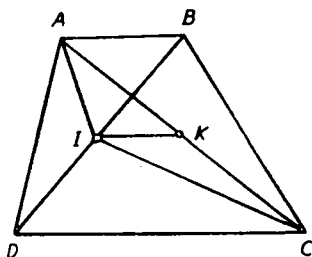
129. (h.201)



Hình 201



Hình 199



Hình 200

Gọi cạnh hình vuông là x,
 $AH \cap MN = \{I\}$, $AI = AH -$
 $- IH = 20 - x$.

Ta có : $S_{AMN} + S_{BMNC} =$
 S_{ABC}

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x(20 - x) + \frac{1}{2}x(30 + x) \\ = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 20$$

$$\Rightarrow x(20 - x) + x(30 + x) = 600 \Rightarrow 20x - x^2 + 30x + x^2 = 600$$

$$\Rightarrow x = 12.$$

Cạnh hình vuông bằng 12 cm.

130 (h.202)

a) Ta có : $S_{ADC} = S_{BDC}$. Cùng trừ đi S_{ODC} được : $S_{AOD} = S_{BOC}$.

b) Kí hiệu $S_{AOD} = S_{BOC} = S$.

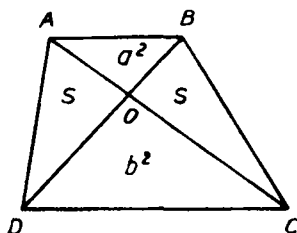
Xét tỉ số $OA : OC$. Ta có $OA : OC = S_{AOB} : S_{BOC} = a^2 : S$ (1)
(hai tam giác có chung đường cao kẻ từ B nên tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy).

Tương tự, $OA : OC = S_{AOD} : S_{DOC} = S : b^2$ (2).

$$\text{Từ (1) và (2)} \quad \frac{a^2}{S} = \frac{S}{b^2} \Rightarrow$$

$$S^2 = a^2 \cdot b^2 \Rightarrow S = a \cdot b.$$

$$c) S_{ABCD} = a^2 + b^2 + ab + ab = (a+b)^2.$$



Hình 202

131. (h.203)

a) EFGH là hình bình hành.

b) Gọi I, K là các giao điểm của EF, GH với BD.

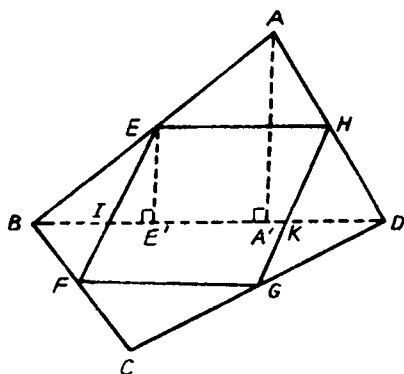
Kẻ EE' , AA' vuông góc với BD.

Xét hình bình hành EHKI, ta

$$\text{có : } EH = \frac{1}{2} BD, EE' = \frac{1}{2} AA'$$

$$\Rightarrow S_{EHKI} = EH \cdot EE' =$$

$$\frac{1}{4} \cdot BD \cdot AA' = \frac{1}{2} S_{ABD} \quad (1)$$



Hình 203

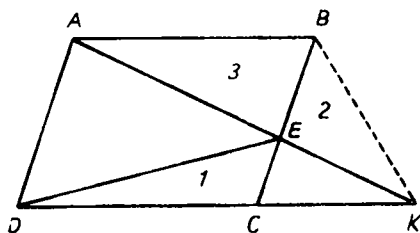
Xét hình bình hành FGKI và chứng minh tương tự :

$$S_{FGKI} = \frac{1}{2} S_{BCD} \quad (2)$$

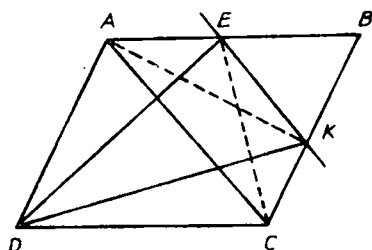
Từ (1) và (2) suy ra $S_{EFGH} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 20 \text{ cm}^2$.

132. (h.204)

Chứng minh rằng $S_1 + S_3$ và $S_2 + S_3$ đều bằng $\frac{1}{2} S_{ABCD}$.



Hình 204



Hình 205

133. (h.205)

$$S_{ADE} = S_{ACE} \quad (1)$$

$$S_{CDK} = S_{CAK} \quad (2)$$

$$S_{ACE} = S_{CAK} \quad (\text{vì } EK \parallel AC) \quad (3)$$

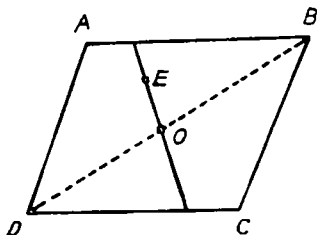
Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{ADE} = S_{CDK}$.

134. Nếu E không trùng O (tâm của hình bình hành), bài toán có một nghiệm hình. Cách dựng : xem hình 206.

Nếu E trùng O, bài toán có vô số nghiệm hình.

135. (h.207)

a) Gọi tứ giác tạo thành là MNPQ như trên hình 207. Để



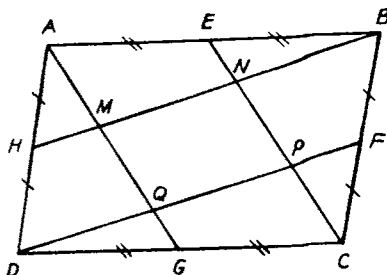
Hình 206

dùng chứng minh $AG \parallel CE$,
 $BH \parallel DF$ nên $MNPQ$ là hình
 bình hành.

b) ΔADQ có $AH = HD$,
 $HM \parallel DQ \Rightarrow AM = MQ$.

Tương tự : $NP = PC$, mà
 $MQ = NP$ nên $AM = MQ = PC$.

Ta lại có $QG = \frac{1}{2} PC$ nên



Hình 207

$QG = \frac{1}{2} MQ$. Vậy $MQ = \frac{2}{5} AG$.

Suy ra $S_{MNPQ} = \frac{2}{5} S_{AECG}$, mà $S_{AECG} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Do đó $S_{MNPQ} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$.

136. Đáp số : $\frac{1}{2}$ mn.

137. Trước hết tính đường cao hình thoi, được 2cm. Đáp số : 8cm^2 .

138. (h.208)

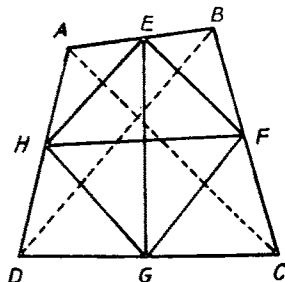
Gọi E, F, G, H theo thứ
 tự là trung điểm của AB,
 BC, CD, DA.

Giả sử $EG = 15\text{cm}$,

$HF = 10\text{cm}$.

Trước hết chứng minh
 $EFGH$ là hình thoi có diện
 tích 75cm^2 .

Suy ra diện tích tứ giác
 ABCD bằng 150cm^2 .



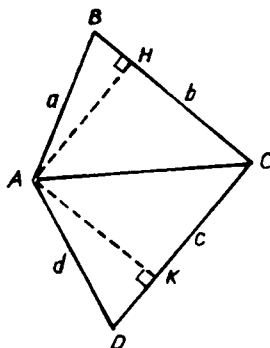
Hình 208

139. (h.209)

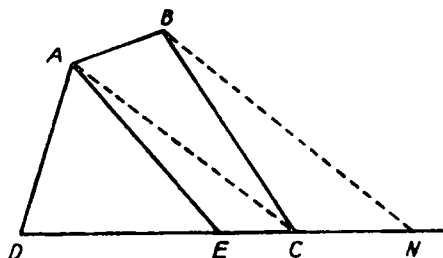
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH \leq \frac{1}{2} BC \cdot AB < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} (\text{dm}^2).$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AK \leq \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} (\text{dm}^2).$$

Vậy $S_{ABCD} < 1 \text{dm}^2$.



Hình 209



Hình 210

140. Cách 1.

Giả sử $S_{ADC} \geq S_{ABC}$ (h.210).

Dựng $BN \parallel AC$ ($N \in DC$).

Dựng E là trung điểm của DN.

Cách 2. (h.211)

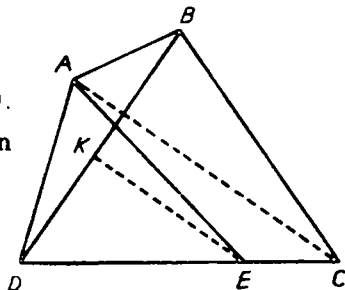
Gọi K là trung điểm của BD.

Dựng $KE \parallel AC$ ($E \in DC$). AE là đoạn thẳng phải dựng.

141. Điểm O là trọng tâm của ΔABC .

142. (h.212)

a) BDEF là hình bình hành.

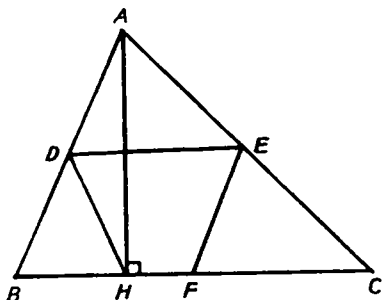


Hình 211

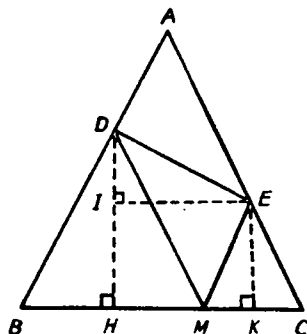
b) DEFH là hình thang cân (trước hết chứng minh $DE \parallel HF$, sau đó chứng minh $DF = HE$ vì cùng bằng $\frac{1}{2} AC$).

c) Nếu ΔABC cân ở B thì BDEF là hình thoi.

d) Nếu ΔABC vuông ở B thì DEFH là hình chữ nhật.



Hình 212



Hình 213

143. (h.213)

a) ADME là hình bình hành có chu vi bằng $2a$.

b) $AD = AE \Leftrightarrow ADME$ là hình thoi $\Leftrightarrow AM$ là phân giác của góc A.
 $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC.

c) DEKH là hình thang vuông.

d) Kẻ $EI \perp DH$. Ta có $DE \geq EI = HK = \frac{BC}{2}$.

min $DE = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow DE = IE$. Khi đó $DH = EK$, $MH = MK$,

$MB = MC$, M là trung điểm của BC. Khi đó DEKH là hình chữ nhật.

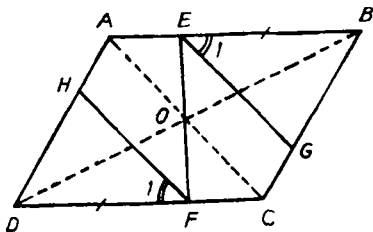
144. a) (h.214)

Ta có $\Delta BOE = \Delta DOF$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = DF$. Ta lại có

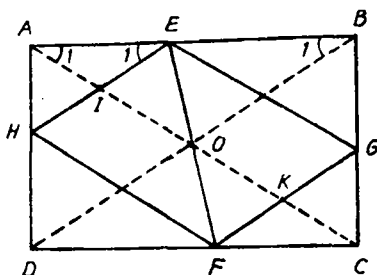
$\widehat{EBG} = \widehat{FDH}$ (góc đối đỉnh), $\widehat{E}_1 = \widehat{F}_1$ (góc có cạnh tương ứng song song).

Do đó $\Delta BEG = \Delta DFH$ (g.c.g) $\Rightarrow EG = FH$.

Tứ giác EGFH có $EG = FH$, $EG \parallel FH$ nên là hình bình hành.



Hình 214



Hình 215

b) (h.215)

Gọi I, K thứ tự là giao điểm của EH và FG với AC.

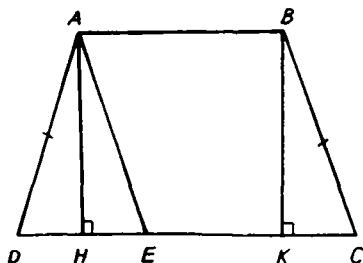
Ta có $EH \parallel BD \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{B_1}$ mà $\widehat{B_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow EI = AI$.

Tương tự $GK = KC$. Do đó $IE + EG + GK = AI + IK + KC = AC$.

Chứng minh tương tự $IH + HF + FK = AC$.

Vậy chu vi hình bình hành EGFH bằng $2 AC$.

145. (h.216)



Hình 216

a) ABKH là hình chữ nhật.

b) Xét $\triangle AHD$ và $\triangle BKC$.

c) D đối xứng với E qua AH.

d) ABCE là hình bình hành.

e) Cách 1

$$DC - AB = DC - KH =$$

$$DH + KC = 2 DH$$

$$\Rightarrow DH = (DC - AB) : 2.$$

Cách 2

$$DC - AB = DC - EC = DE \\ = 2 DH$$

$$\Rightarrow DH = (DC - AB) : 2.$$

$$g) S_{ADH} = 5\text{cm}^2, S_{ABKH} = 30\text{cm}^2, \\ S_{ABCE} = 30\text{cm}^2, S_{ABCD} = 40\text{cm}^2.$$

146. (h.217)

a) EFGH là hình chữ nhật.

b) Gọi M, N là giao điểm của EH, FG với AC. Ta có :

$$EF = MN, ME = MA, NF = NC \\ \Rightarrow ME + EF + FN = AC.$$

Chu vi hình chữ nhật EFGH bằng 2 AC.

c) Đặt $BE = x$.

Gọi S_{EFGH} là S, ta có :

$$S = S_{ABCD} - 2 S_{AEH} - 2 S_{BEF} \\ = 100 - (10 - x)^2 - x^2 \\ = - 2x^2 + 20x \\ = - 2(x^2 - 10x + 25) + 50 \\ = - 2(x - 5)^2 + 50 \leq 50.$$

$$\max S = 50 \Leftrightarrow x = 5.$$

Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật EFGH bằng 50m^2 . Khi đó E, F, G, H là trung điểm các cạnh của hình vuông ABCD và EFGH cũng là hình vuông.

147. (h.218)

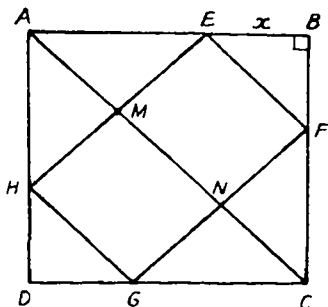
$$\text{Giả sử } AE < EB \Rightarrow S_1 < S_2,$$

$$S_3 < S_4 \Rightarrow S_1 + S_3 < S_2 + S_4.$$

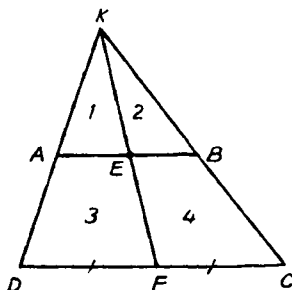
$$\Rightarrow S_{KDF} < S_{KFC} \text{ vô lí.}$$

Giả sử $AE > EB$, tương tự dẫn đến $S_{KDF} > S_{KFC}$ vô lí.

$$\text{Vậy } AE = EB.$$



Hình 217



Hình 218

148. (h.219)

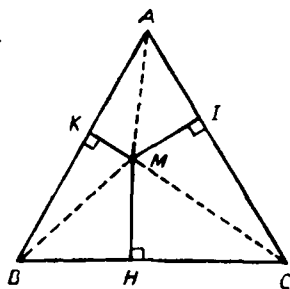
Gọi các cạnh của ΔABC bằng a , đường cao h .

$$S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \cdot MH + \frac{a}{2} \cdot MI + \frac{a}{2} \cdot MK = \frac{a}{2} \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} (MH + MI + MK) = \frac{a}{2} \cdot h$$

$$\Rightarrow MH + MI + MK = h.$$



Hình 219

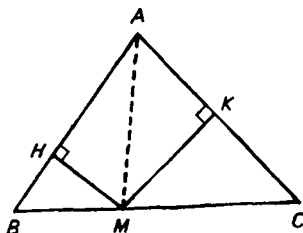
149. a) (h. 220)

Đặt $AB = AC = a$, đường cao tương ứng bằng h .

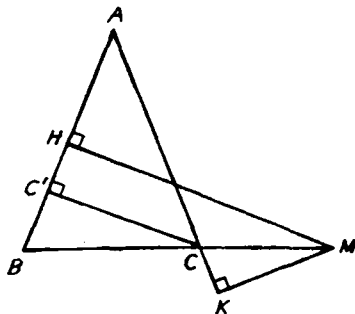
$$\text{Ta có : } S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \cdot MH + \frac{a}{2} \cdot MK = \frac{a}{2} \cdot h$$

$$\Rightarrow MH + MK = h.$$



Hình 220



Hình 221

b) Nếu M thuộc đường thẳng BC nhưng không thuộc cạnh BC thì hiệu các khoảng cách từ M đến hai cạnh bên có giá trị không đổi.

Trên hình 221, M thuộc tia đối của tia CB , ta có : $MH - MK = CC'$.

150. (h. 222)

Đặt $AB = AC = BC = a$. Ta có :

$$S_{MAB} - S_{MAC} = S_{ABC}$$

$$\frac{a}{2} \cdot MI - \frac{a}{2} \cdot MK = \frac{a}{2} \cdot AH$$

$$MI - MK = AH.$$

Chú ý

Tổng quát hơn, nếu ΔABC cân ở A thì $MI - MK$ bằng đường cao ứng với cạnh bên của tam giác cân.

151. (h. 223)

a) I cách đều ba cạnh của tam giác ABC. Ta có :

$$S_{ABC} = S_{BIC} + S_{CIA} + S_{AIB}$$

$$2S_{ABC} = BC \cdot II' + AC \cdot II' + AB \cdot II' = II' (BC + AC + AB) = II' \cdot 3BC = 6 S_{IBC}$$

$$\Rightarrow S_{IBC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } GG' = \frac{1}{3} AA'$$

$$\Rightarrow S_{GBC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{IBC} = S_{GBC}$.

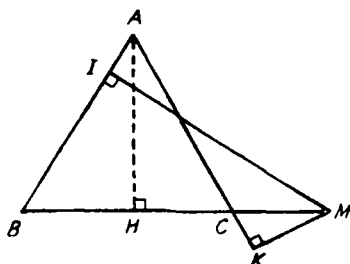
$$b) S_{IBC} = S_{GBC} \Rightarrow II' = GG' \\ \Rightarrow IG \parallel BC.$$

152. (h. 224)

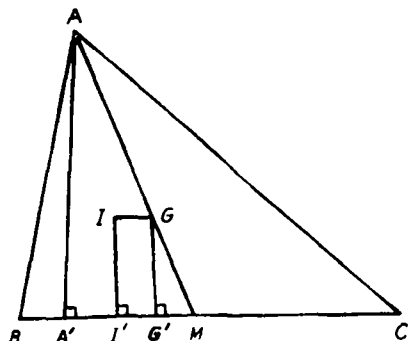
a) $\Delta A'B'C'$ có các góc bằng 60° nên là tam giác đều.

b) Kẻ $NH \perp B'C'$, $NI \perp A'C'$, $NK \perp A'B'$. Theo kết quả của bài 148, ta có : $MA + MB + MC = NH + NI + NK$. Ta lại có :

$NH \leq NA$ (đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow N \in$ đường thẳng AM) ; $NI \leq NB$ (đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow N \in$ đường thẳng BM) ; $NK \leq NC$ (đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow N \in$ đường thẳng CM).



Hình 222



Hình 223

Do đó $NH + NI + NK \leq NA + NB + NC$ (đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv M$).

Vậy $MA + MB + MC \leq NA + NB + NC$.

Khi $N \equiv M$ thì xảy ra dấu đẳng thức.

Chú ý

Bài toán trên cho thấy : Cho ΔABC có các góc nhỏ hơn 120° , điểm M nằm trong tam giác có tổng khoảng cách từ M đến ba đỉnh của tam giác có giá trị nhỏ nhất là điểm nhìn ba cạnh của tam giác dưới góc 120° .

Để dựng điểm M như vậy, ta dựng bên ngoài ΔABC các tam giác đều ABD, ACE , điểm M là giao điểm của các đoạn thẳng DC và BE .

Theo bài 167 Các bài tập chuyên đề về tam giác, $\widehat{BMC} = \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 120^\circ$.

Điều kiện các góc của ΔABC nhỏ hơn 120° nhằm đảm bảo cho giao điểm M nằm trong tam giác.

153. (h. 225)

Đặt $AE = x$.

$$S_{ADE} = x(10 - x) : 2$$

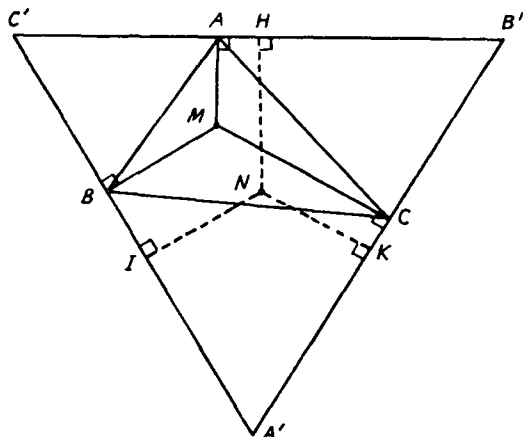
$$S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \\ = 50 - x(10 - x) : 2$$

$$= 50 - 5x + \frac{1}{2}x^2$$

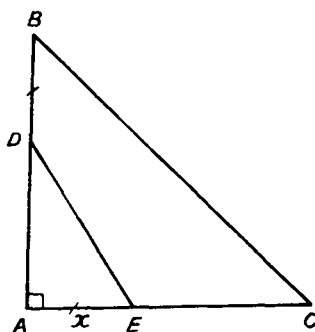
$$= \frac{1}{2}(x - 5)^2 + 37,5 \geq 37,5$$

$$\min S_{BDEC} = 37,5(\text{cm}^2)$$

$\Leftrightarrow x = 5$ (cm) $\Leftrightarrow DE$ là đường trung bình của ΔABC .



Hình 224



Hình 225

154. (h. 226)

a) Tập hợp các điểm B và D là đường tròn có đường kính là AC.

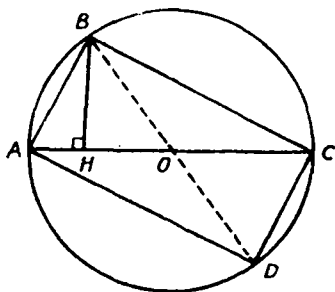
b) Kẻ $BH \perp AC$.

$$S_{ABCD} = AC \cdot BH.$$

Ta có AC cố định nên S_{ABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow BH$ lớn nhất.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $BH \leq BO = 2$, do đó:

$\max BH = 2(\text{cm})$, $\max S = 8 (\text{cm}^2)$
 $\Leftrightarrow H \equiv O$. Khi đó ABCD là hình vuông.



Hình 226

155. (h.227)

Giả sử hình chữ nhật ABCD có $AB = CD = x$ thì $BC = AD = 100 - 2x$.

Cách 1. $S = x(100 - 2x)$

$$= -2x^2 + 100x$$

$$= -2(x - 25)^2 + 1250$$

$$\max S = 1250(\text{m}^2) \Leftrightarrow x = 25(\text{m}).$$

Cách 2. Xét $2S = 2x(100 - 2x)$.

Các số $2x$ và $100 - 2x$ có tổng không đổi nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi $2x = 100 - 2x$, tức là $x = 25$ (chứng minh điều này dựa vào bất đẳng thức

$$(x + y)^2 \geq 4xy.$$

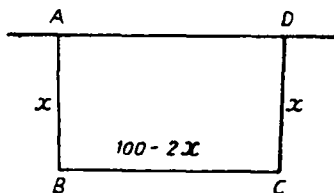
156. Gọi x và y là các kích thước của hình chữ nhật. Ta có $x + y = 50$. Cần tìm giá trị lớn nhất của $S = xy$.

Đáp số : $\max S = 625 (\text{m}^2) \Leftrightarrow x = y = 25 (\text{m}).$

157. (h.228)

a) EFGH là hình bình hành.

$$b) S_{EFGH} = S_{ABCD} - 2S_{AEH} - 2S_{EBF}$$



Hình 227

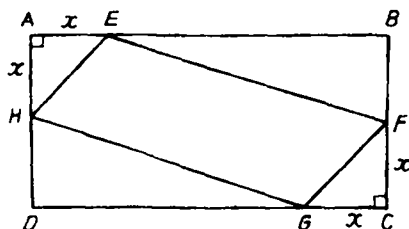
$$= 16.8 - x^2 - (16 - x)(8 - x)$$

$$= -2x^2 + 24x.$$

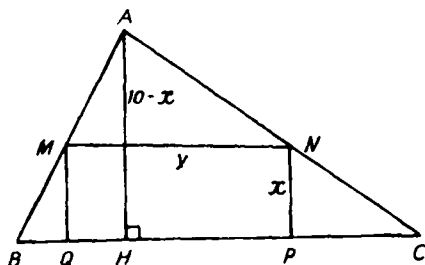
$$c) S = -2x^2 + 24x$$

$$= -2(x - 6)^2 + 72 \leq 72.$$

$$\max S = 72 \text{ (m}^2\text{)} \Rightarrow x = 6 \text{ (m)}.$$



Hình 228



Hình 229

158. (h.229)

$$a) S_{AMN} + S_{BMNC} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot y(10 - x) + \frac{1}{2} \cdot (20 + y)x = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10$$

$$\Rightarrow y(10 - x) + (20 + y)x = 200$$

$$\Rightarrow 10y + 20x = 200$$

$$\Rightarrow y + 2x = 20$$

$$\Rightarrow y = 20 - 2x$$

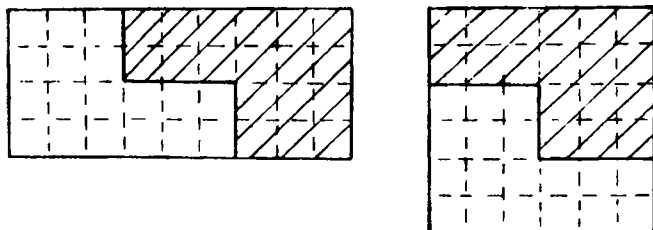
$$b) S_{MNPO} = xy = x(20 - 2x)$$

$$= -2(x - 5)^2 + 50 \leq 50$$

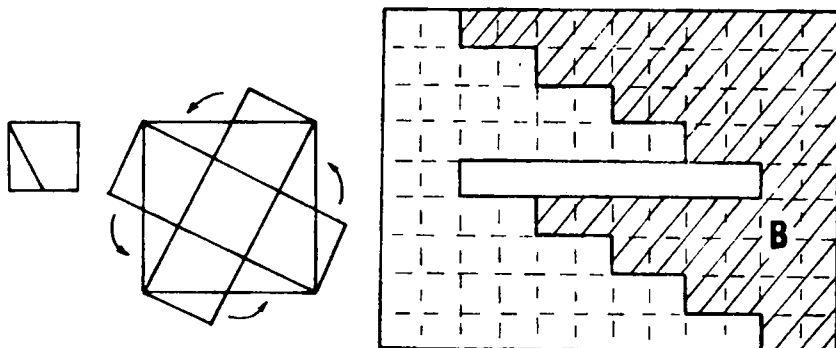
$$\max S = 50 \text{ (m}^2\text{)} \Leftrightarrow x = 5 \text{ (m)}.$$

159. Cắt và ghép hình như hình 230.

160. Cắt và ghép hình như hình 231.



Hình 230



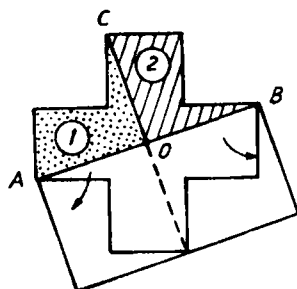
Hình 231

Hình 232

161. Cắt như hình 232. Dịch hình B lên phía trên một đơn vị dài rồi dịch sang trái hai đơn vị.

162. Cắt theo AB (h. 233) rồi CO (O là trung điểm của AB). Quay mảnh 1 quanh A góc 90° theo chiều kim đồng hồ. Quay mảnh 2 quanh B góc 90° ngược chiều kim đồng hồ.

163. Nối trung điểm M của AB với trung điểm N của CD rồi kẻ $EH \perp MN$ (h.234a). Quay mảnh 2 quanh E góc 90° theo chiều kim đồng hồ cho EA trùng ED. Sau đó lật mảnh 3 lại rồi ghép với hai mảnh kia (h.234b).

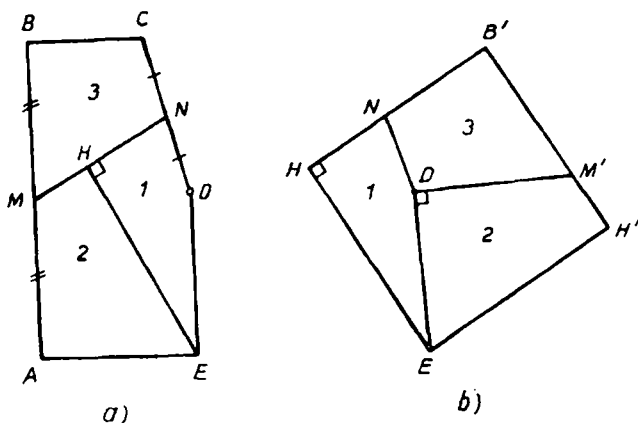


Hình 233

Chứng minh : $\widehat{EDN} = 165^\circ$, $\widehat{BCN} = 105^\circ$, $\widehat{BMN} = 60^\circ$

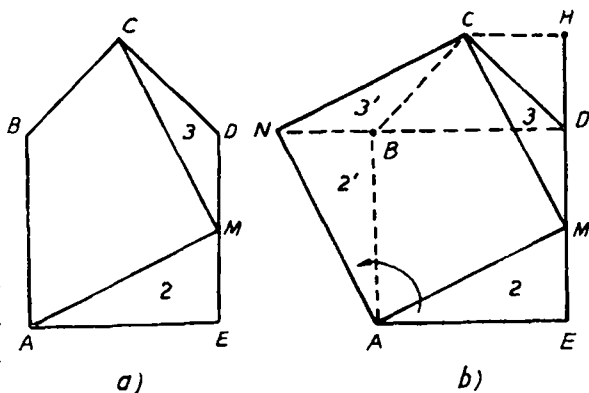
$$\Rightarrow \widehat{MNC} = 105^\circ.$$

Do $\widehat{MNC} = \widehat{BCN} = 105^\circ$ nên sau khi lật mảnh 3 lại rồi ghép với hai mảnh kia, ta được một hình vuông.



Hình 234

164. Nối AM, CM (M là trung điểm của DE) (h.235a). Quay mảnh 2 quanh A góc 90° ngược chiều kim đồng hồ sao cho AE trùng AB. Quay mảnh 3 quanh C góc 90° theo chiều kim đồng hồ sao cho CD trùng CB. Khi đó M trùng N (h. 235b). Bạn đọc tự chứng minh.

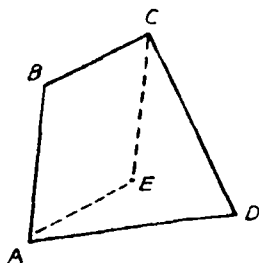


Hình 235

165. (h.236)

Trong hai cạnh đối của tứ giác, tồn tại một cạnh có tính chất : tổng hai góc kề nó lớn hơn hoặc bằng 180° (thật vậy, nếu trái lại thì tổng các góc của tứ giác nhỏ hơn 360°).

Trong hai cạnh AB , CD , tồn tại một cạnh có tính chất đó, chẳng hạn AB . Trong hai cạnh BC và CD , tồn tại một cạnh có tính chất đó, chẳng hạn cạnh BC . Ta vẽ hình bình hành $ABCE$.



Hình 2.46

Ta thấy : $\hat{A} + \hat{B} \geq 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAE} \leq \hat{A} \Rightarrow E$ thuộc miền trong của góc A ;

$\hat{B} + \hat{C} \geq 180^\circ \Rightarrow \widehat{BCE} \leq \hat{C} \Rightarrow E$ thuộc miền trong của góc C .

Do đó E thuộc miền trong của tứ giác.

MỤC LỤC

Trang

CHƯƠNG I - TỨ GIÁC

§1. Khái niệm chung về tứ giác	3
§2. Hình thang	5
§3. Đối xứng trục	10
§4. Hình bình hành	13
§5. Đối xứng tâm	16
§6. Hình chữ nhật	18
§7. Hình thoi	22
§8. Hình vuông	24
§9. Đa giác	27

Về phương pháp giải toán

Điều kiện cần và đủ	30
Tìm tập hợp điểm	35
Dựng hình	42
Vận dụng các phép biến hình vào tìm tập hợp điểm và dựng hình	46

Bài đọc thêm

Tứ miền trong và miền ngoài của đa giác đến các mê cung	53
---	----

CHƯƠNG II - DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

§10. Khái niệm về diện tích đa giác. Diện tích hình chữ nhật, hình vuông, tam giác vuông	60
§11. Diện tích tam giác	62
§12. Diện tích hình thang, hình bình hành	64
§13. Diện tích tứ giác	67
§14. Ôn tập	69

Về phương pháp giải toán

Dùng công thức diện tích để so sánh độ dài các đoạn thẳng	70
Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của diện tích một hình bằng các phép biến đổi đại số	72
Hệ thống một số cách chứng minh các quan hệ hình học	74

Bài đọc thêm

Cắt và ghép các hình	75
LỜI GIẢI HOẶC CHỈ DẪN	80

VŨ HỮU BÌNH

CÁC BÀI TẬP VÀ CHUYÊN ĐỀ VỀ TƯ GIÁC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Pgs.Pts TÔ DĂNG HẢI

Biên tập : NGUYỄN NĂNG QUỐC, NGUYỄN THỊ KHOÀI

Sửa chế bản : NGUYỄN THỊ KHOÀI

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 TRẦN HƯNG ĐẠO - HÀ NỘI

- otoanhoc2911@gmail.com -

in 3000 bản khổ 14,5x 20,5 cm, tại xí nghiệp in Thương Mại
Số XB 121/ KHKT do cục xuất bản ký ngày 13/5/1994
In xong nộp lưu chiểu tháng 5/1994

Đã xuất bản:

CÁC BÀI TẬP VÀ CHUYÊN ĐỀ VỀ TAM GIÁC

(Theo chương trình C.C.G.D lớp 7)

CÁC BÀI TẬP VÀ CHUYÊN ĐỀ VỀ TỨ GIÁC

(Theo chương trình C.C.G.D lớp 8)

CÁC BÀI TẬP VÀ CHUYÊN ĐỀ VỀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

(Theo chương trình C.C.G.D lớp 8)

Sẽ xuất bản :

CÁC BÀI TẬP VÀ CHUYÊN ĐỀ VỀ ĐƯỜNG TRÒN

Theo chương trình C.C.G.D lớp 9