

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ

1. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$	Cho $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$
① $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (a.c + b.d)^2$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.	① $(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2) \geq (a.m + b.n + c.p)^2$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$.
② $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq a.c + b.d$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.	② $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq a.m + b.n + c.p$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$.
③ $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq a.c + b.d$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \geq 0$.	③ $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq a.m + b.n + c.p$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \geq 0$.

Tổng quát:

1. Cho $2n$ số ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$): $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ ta có:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ (quy ước nếu $b_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$)

2. Hệ quả: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực bất kỳ, $b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số thực dương. Khi đó

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- a/ Nếu $2x + 3y = 4$ thì $2x^2 + 3y^2 \geq \frac{16}{5}$. b/ Nếu $6x + y = 5$ thì $9x^2 + y^2 \geq 5$.
c/ Nếu $3x + 4y = 7$ thì $x^2 + y^2 \geq \frac{49}{25}$. d/ Nếu $6x + 12y = 5$ thì $4x^2 + 9y^2 \geq 1$.
e/ Nếu $3x + 4y = 10$ thì $x^2 + y^2 \geq 4$. f/ Nếu $x + 7y = 10$ thì $x^2 + y^2 \geq 2$.
g/ Nếu $3a + 4b = 7$ thì $3a^2 + 4b^2 \geq 7$. h/ Nếu $2a - 3b = 7$ thì $3a^2 + 5b^2 \geq \frac{735}{47}$.
i/ Nếu $3a - 5b = 8$ thì $7a^2 + 11b^2 \geq \frac{2464}{137}$. j/ Nếu $a + 2b = 2$ thì $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$.
k/ Nếu $2a + 3b = 5$ thì $2a^2 + 3b^2 \geq 5$. l/ $(x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2 \geq \frac{9}{5}$.

Bài 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- a/ Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $|3x + 4y| \leq 5$. b/ Nếu $x^2 + 2y^2 = 8$ thì $|2x + 3y| \leq 2\sqrt{17}$.
c/ Nếu $x^2 + 4y^2 = 1$ thì $|x - y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. d/ Nếu $36x^2 + 16y^2 = 9$ thì $|y - 2x| \leq \frac{5}{4}$.
e/ Nếu $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ thì $|x(u + v) + y(u - v)| \leq \sqrt{2}$.
f/ Nếu $4(a - 1)^2 + 9(b - 2)^2 = 5$ thì $|2a + 6b - 20| \leq 5$.

Bài 3. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- a/ Nếu $x \in [1; 3]$ thì $A = 6\sqrt{x - 1} + 8\sqrt{3 - x} \leq 10\sqrt{2}$.
b/ Nếu $x \in [1; 5]$ thì $B = 3\sqrt{x - 1} + 4\sqrt{5 - x} \leq 10$.
c/ Nếu $x \in [-2; 1]$ thì $C = \sqrt{1 - x} + \sqrt{2 + x} \leq \sqrt{6}$.
d/ Nếu $x \in [4; 13]$ thì $D = 2\sqrt{x - 4} + \sqrt{13 - x} \leq 3\sqrt{5}$.
e/ Nếu $x \in [-5; 20]$ thì $E = 3\sqrt{x + 5} + 2\sqrt{20 - x} \leq 13$.
f/ Nếu $x \in [-9; 20]$ thì $F = 5\sqrt{x + 9} + 2\sqrt{20 - x} \leq 29$.

Bài 4. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- a/ Nếu $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$ thì $\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - y} + \sqrt{1 - z} \leq \sqrt{6}$.
b/ Nếu $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.
c/ Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ thì $a + 3b + 5c \leq \sqrt{35}$.
d/ Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ thì $a + 2b + 2\sqrt{5}c \leq 5$.
e/ Nếu $a > c > 0$ và $b > c > 0$ thì $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}$.
f/ Nếu $4a + 9b + 16c = 49$ thì $\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \geq 49$.
g/ Nếu $a + b + c = 1$ thì $\sqrt{a + 1} + \sqrt{b + 1} + \sqrt{c + 1} \leq 2\sqrt{3}$.
h/ Nếu $a + b + c = 12$ thì $\sqrt{a + 3} + \sqrt{b + 2} + \sqrt{c + 1} \leq 3\sqrt{6}$.
i/ Nếu $a + b + c = 4$ thì $\sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} \leq 2\sqrt{6}$.
j/ Nếu a, b, c là ba số thực thay đổi thỏa $a + b + c = 6$ thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$.

Bài 5. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- a/ Nếu $a + b \geq 1$ thì $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$. b/ Nếu $a + b \geq 1$ thì $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$.

c/ Nếu $a+b \geq 1$ thì $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$.

d/ Nếu $a+b=2$ thì $a^4+b^4 \geq 2$.

e/ Nếu $a, b > c \geq 0$ thì $(a+b)^2 \leq (a^3+b^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

f/ Nếu $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}=2\sqrt{1+z}$ thì $x+y \geq 2z$.

g/ Nếu $a(a-1)+b(b-1)+c(c-1) \leq \frac{4}{3}$ thì $a+b+c \leq 4$.

h/ Nếu $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z \leq 1 \end{cases}$ thì $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$

i/ Nếu $a, b, c \geq 0$ thì $a^3+b^3+c^3 \geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$.

j/ Nếu $x, y, z > 0$ thì $\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y} \geq 1$.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a/ $A=\sqrt{7-x}+\sqrt{2+x}$, với $-2 \leq x \leq 7$. b/ $B=6\sqrt{x-1}+8\sqrt{3-x}$ với $x \in [1;3]$.

c/ $C=y-2x+5$ với $36x^2+16y^2=9$. d/ $D=2x-y-2$ với $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

e/ $E=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$.

f/ $F=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}$.

g/ $G=2\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$.

h/ $H=5\sqrt{x+1}+3\sqrt{6-x}$.

i/ $I=4\sqrt{x+3}+5\sqrt{4-x}$.

j/ $J=\sqrt{1-2x}+\sqrt{x+8}$.

Bài 7. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức (nếu có)

a/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $x^2+y^2=5$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $A=2x+y$.

b/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $2x^2+3y^2=6$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $B=4x+2y$.

c/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $x^2+4y^2=10$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $C=3x+5y$.

d/ Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $xy+yz+zx=1$. Tìm GTNN của biểu thức $D=x^4+y^4+z^4$.

e/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $x^2+y^2=1$. Tìm GTLN của biểu thức $E=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$.

f/ Cho $a \geq 1$. Tìm GTLN của biểu thức $F=\sqrt{a+\sin x}+\sqrt{a+\sin x}$.

g/ Cho $x, y > 0$ và $x+y=1$. Tìm GTNN của biểu thức $G=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}$.

h/ Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+z=1$. Tìm GTLN của $H=\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}$.

i/ Cho $x \in [-2;2]$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $I=x+\sqrt{4-x^2}$ (Đại học B – 2003).

Bài 8. Cho ba số thực dương $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)}{2}$.

Bài 9. Cho a, b, c là độ dài của ba cạnh ΔABC .

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c$.

Bài 10. Cho ba số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 11. Cho ba số thực a, b, c bất kỳ. Chứng minh: $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Bài 12. Cho ba số $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$.

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$ thỏa điều kiện $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$.

Bài 14. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z \geq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z + (\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z + \sqrt{(1^2+1^2+1^2)(xy+yz+zx)}} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z + \sqrt{(1^2+1^2+1^2)\frac{1}{3}(x+y+z)^2}} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài 15. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$. Chứng minh $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + yz} + \frac{1}{z^2 + zx} \geq \frac{3}{2}$

HD: Đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a}$ đưa về bài toán trên.

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} &= \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 17. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{xy+2} + \frac{1}{yz+2} + \frac{1}{zx+2}$$

Bài 18. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} = \frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)} + \frac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)} + \frac{c^4}{c(c^2+ca+a^2)} \\
& \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \\
& \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a+b+c}{3}
\end{aligned}$$

Bài 19. Cho a, b, c là các số dương thỏa : $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3\sqrt{1}}{2}$$

Bài 20. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$. Chứng minh

$$\frac{x^3}{2x+3y+4z} + \frac{y^3}{2y+3z+4x} + \frac{z^3}{2z+3x+4y} \geq \frac{1}{30}$$

Bài 21. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Chứng minh

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} = \frac{a^4}{a^3b^2c^2} + \frac{b^4}{b^3c^2a^2} + \frac{c^4}{c^3a^2b^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(abc)^2(a+b+c)} \\
& = \frac{(3abc)^2}{(abc)^2(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}
\end{aligned}$$

Bài 22. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1 \end{cases}$, tìm GTLN của $P = \frac{1}{\sqrt{2}x+y+z} + \frac{1}{x+\sqrt{2}y+z} + \frac{1}{x+y+\sqrt{2}z}$

Lời giải

Ta có : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{(\sqrt[4]{2}+1)^2}{\sqrt{2}x+y+z} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}x+y+z} \leq \frac{1}{(\sqrt[4]{2}+1)^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$. Xây dựng thêm 2

bất đẳng thức tương tự nữa, cộng lại theo vế ta được kết quả.

Bài 23. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{a^4}{(a+b)^2(a+c)} + \frac{b^4}{(b+c)^2(b+a)} + \frac{c^4}{(c+a)^2(c+b)} \geq \frac{3}{8}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{(a+b)^2(a+c)} + \frac{b^4}{(b+c)^2(b+a)} + \frac{c^4}{(c+a)^2(c+b)} &= \frac{\frac{a^4}{(a+b)^2}}{a+c} + \frac{\frac{b^4}{(b+c)^2}}{b+a} + \frac{\frac{c^4}{(c+a)^2}}{c+b} \\ &\geq \frac{\left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}\right)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{\left(\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}\right)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{8} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Bài 24. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$

HD: $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$

Bài 25. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh

a) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

b) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

c) $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Bài 26. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

a) $\frac{a}{a+2bc} + \frac{b}{b+2ca} + \frac{c}{c+2ab} \geq 1$ b) $\frac{2a}{2a+bc} + \frac{2b}{2b+ca} + \frac{2c}{2c+ab} \leq 1$

Lời giải

a)

$$P = \frac{a}{a+2bc} + \frac{b}{b+2ca} + \frac{c}{c+2ab} = \frac{a^2}{a(a+2bc)} + \frac{b^2}{b(b+2ca)} + \frac{c^2}{c(c+2ab)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6abc}$$

Ta có

$$3(ab+bc+ca) = (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \geq 3abc \Rightarrow 2(ab+bc+ca) \geq 6abc \Rightarrow (a+b+c)^2 \geq a^2+b^2+c^2+6abc$$

Vậy $P \geq 1$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Ta cố gắng đổi chiều bất đẳng thức !

$$\frac{2a}{2a+bc} + \frac{2b}{2b+ca} + \frac{2c}{2c+ab} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2a+bc-bc}{2a+bc} + \frac{2b+ca-ca}{2b+ca} + \frac{2c+ab-ab}{2c+ab} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{2a+bc} + \frac{ca}{2b+ca} + \frac{ab}{2c+ab} \geq 1$$

Ta có

$$\frac{bc}{2a+bc} + \frac{ca}{2b+ca} + \frac{ab}{2c+ab} = \frac{(bc)^2}{bc(2a+bc)} + \frac{(ca)^2}{ca(2b+ca)} + \frac{(ab)^2}{ab(2c+ab)}$$

$$\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{6abc + (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(a+b+c)abc + (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}$$

$$= \frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2} \geq 1$$

Bài 27. Giả sử x và y là hai số dương và $x+y=1$. Tìm GTNN của $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$ (ĐH 2001)

Lời giải

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x\sqrt{y}} + \frac{y^2}{y\sqrt{x}} \geq \frac{(x+y)^2}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}$$

$$\geq \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x+y}\sqrt{xy+xy}} = \frac{1}{\sqrt{2xy}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$

Bài 28. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$

Lời giải

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} = \frac{a^2}{a\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c^2}{c\sqrt{c^2+8ab}}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt{a^3+8abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b}\sqrt{b^3+8cab}} + \frac{c^2}{\sqrt{c}\sqrt{c^3+8cab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}}$$

Như vậy ta cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}} \geq 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq \sqrt{a+b+c}\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo AM-GM. Kết thúc chứng minh.

Bài 29. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $P = \frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{3}{4}$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a(a+3b)} + \frac{b^2}{b(b+3c)} + \frac{c^2}{c(c+3a)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)+\frac{1}{3}(ab+bc+ca)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)} = \frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Bài 30. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{a^2+ab+b^2} + \frac{b}{b^2+bc+c^2} + \frac{c}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a(a^2+ab+b^2)} + \frac{b^2}{b(b^2+bc+c^2)} + \frac{c^2}{c(c^2+ca+a^2)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

Bài 31. Cho a, b, c là các số dương thỏa : $abc = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng : } P = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ thì $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$

BĐT cần chứng minh tương đương: $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ (BĐT Nesbit)

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow ((y+z)+(z+x)+(x+y)) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) \geq 9$$

$$\begin{aligned} \text{BĐT BCS ta có : } 9 &= (1 + 1 + 1)^2 = \left(\sqrt{y+z} \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{z+x} \frac{1}{\sqrt{z+x}} + \sqrt{x+y} \frac{1}{\sqrt{x+y}} \right)^2 \\ &\leq ((y+z) + (z+x) + (x+y)) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) \end{aligned}$$

Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

▪ **Cách 2:** Ta có $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \left(\frac{1}{a\sqrt{b+c}} \sqrt{b+c} + \frac{1}{b\sqrt{c+a}} \sqrt{c+a} + \frac{1}{c\sqrt{a+b}} \sqrt{a+b} \right)^2$

$$\leq \left(\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \right) (b+c + c+a + a+b) = 2(a+b+c).P$$

Suy ra $P \geq \frac{1}{2} \frac{1}{a+b+c} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2$

$$\geq \frac{3}{2} \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{3}{2} \frac{1}{a+b+c} \frac{a+b+c}{abc} = \frac{3}{2}. \text{ Dấu (=) xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Bài 32. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left(\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right) &= \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2}{1+1+1} + \frac{3}{2} \geq \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Bài 33. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 2$. Chứng minh

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}$$

Lời giải

Áp dụng BCS ta có

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \text{ và } (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Nhân hai BĐT trên theo vế ta được

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^3)(a+b+c)}{3} = \frac{(a^2 + b^2 + c^3)((a+b) + (b+c) + (c+a))}{6} \\ &\geq \frac{(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b})^2}{6} \end{aligned}$$

Mặt khác $a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 3\sqrt[3]{2\sqrt{8abc}} = 6$ suy ra

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 &\geq \frac{(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b})^2}{6} \\
&= \frac{a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}}{6} \cdot (a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}) \\
&\geq \frac{a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}}{6} \cdot 6 = a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}
\end{aligned}$$

Bài 34. Cho a, b, c là các số dương thỏa : $abc = 1$.

Chúng minh rằng : $P = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

▪ **Cách 1:** Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ thì $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$

BĐT cần chứng minh tương đương: $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ (BĐT Nesbit)

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow ((y+z) + (z+x) + (x+y)) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) \geq 9$$

$$\begin{aligned}
\text{BĐT BCS ta có : } 9 = (1+1+1)^2 &= \left(\sqrt{y+z} \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{z+x} \frac{1}{\sqrt{z+x}} + \sqrt{x+y} \frac{1}{\sqrt{x+y}} \right)^2 \\
&\leq ((y+z) + (z+x) + (x+y)) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right)
\end{aligned}$$

Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

$$\begin{aligned}
\text{▪ Cách 2: Ta có } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 &= \left(\frac{1}{a\sqrt{b+c}} \sqrt{b+c} + \frac{1}{b\sqrt{c+a}} \sqrt{c+a} + \frac{1}{c\sqrt{a+b}} \sqrt{a+b} \right)^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \right) (b+c+c+a+a+b) = 2(a+b+c) \cdot P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Suy ra } P &\geq \frac{1}{2} \frac{1}{a+b+c} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \\
&\geq \frac{3}{2} \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{3}{2} \frac{1}{a+b+c} \frac{a+b+c}{abc} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

▪ Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 35. Cho x, y, z là các số dương thay đổi thỏa điều kiện $xyz = 1$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

(TSDH - Khối A - Năm 2007)

▪ Nhận xét $\forall y, z > 0 : y + z \geq 2\sqrt{yz} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ (vì $xyz = 1$)

$$\Rightarrow x^2(y+z) \geq 2x\sqrt{x} \Rightarrow \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}$$

Xét hai bất đẳng thức tương tự nữa, ta thu được

$$P \geq 2 \left(\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \right)$$

▪ Đặt $a = x\sqrt{x}$, $b = y\sqrt{y}$, $c = z\sqrt{z} \Rightarrow a, b, c > 0$ và $abc = 1$.

$$\text{Khi đó : } P \geq 2 \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \right) = 2S$$

$$\begin{aligned} \text{▪ Ta có : } (a+b+c)^2 &= \left[\sqrt{a(b+2c)} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+2c}} + \sqrt{b(c+2a)} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+2a}} + \sqrt{c(a+2b)} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+2b}} \right]^2 \\ &\leq [a(b+2c) + b(c+2a) + c(a+2b)] \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 3(ab+bc+ca).S \text{ . Suy ra } S \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1 \text{ . Do đó : } P \geq 2$$

$$\text{Dấu (=) xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

▪ Vậy : $P_{\min} = 2$ khi $x = y = z = 1$

Bài 36. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa : $a + b + c + \sqrt{2abc} \geq 10$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4}} \geq 6\sqrt{6}$$

Lời giải

Áp dụng bất C - S, ta có

$$\sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} \geq \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{a} + 3\sqrt{2} \cdot \frac{3b}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{ca}{2} = \frac{4}{a} + 9b + ca$$

$$\sqrt{24} \cdot \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}} \geq \frac{4}{b} + 9c + ab, \quad \sqrt{24} \cdot \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4}} \geq \frac{4}{c} + 9a + bc$$

▪ Cộng 3 bất trên về theo về, suy ra : $\sqrt{24} \cdot (VT) \geq 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 9(a+b+c) + ab + bc + ca$

$$\begin{aligned}
&\geq \left(\frac{4}{a} + a\right) + \left(\frac{4}{b} + b\right) + \left(\frac{4}{c} + c\right) + (2a + bc) + (2b + ca) + (2c + ab) + 6(a + b + c) \\
&\geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \cdot a} + 2\sqrt{\frac{4}{b} \cdot b} + 2\sqrt{\frac{4}{c} \cdot c} + 2\sqrt{2abc} + 2\sqrt{2abc} + 2\sqrt{2abc} + 6(a + b + c) \\
&= 12 + 6(a + b + c + \sqrt{2abc}) \geq 12 + 6 \cdot 10 = 72 \Rightarrow (VT) \geq \frac{72}{\sqrt{24}} = 6\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Bài 37. Cho $x, y, z > 0$. Tìm GTNN của biểu thức : $P = \frac{3x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{5z}{x+y}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } P &= \left(\frac{3x}{y+z} + 3\right) + \left(\frac{4y}{z+x} + 4\right) + \left(\frac{5z}{x+y} + 5\right) - 12 \\
&= (x+y+z) \left(\frac{3}{y+z} + \frac{4}{z+x} + \frac{5}{x+y}\right) - 12 \\
&= \frac{1}{2} \left((\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{y+x})^2 + (\sqrt{z+x})^2 \right) \left[\left(\sqrt{\frac{3}{y+z}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{z+x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{x+y}}\right)^2 \right] - 12 \\
&\geq \frac{1}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5})^2 - 12
\end{aligned}$$

▪ Kết luận : $\text{Min}P = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12 \Leftrightarrow \frac{y+z}{\sqrt{3}} = \frac{z+x}{2} = \frac{x+y}{\sqrt{5}}$

Bài 38. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \left(1 + \frac{7}{3} \right) \\
& \geq \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \left((a+b+c)^2 + 7(ab+bc+ca) \right) \\
& = \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) (a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab+bc+ca)) \\
& = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{bc}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{ca}} \right)^2 \right) \\
& \quad \left(\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 + (3\sqrt{ab})^2 + (3\sqrt{bc})^2 + (3\sqrt{ca})^2 \right) \\
& \geq (1+3+3+3)^2 = 100 \\
& \Rightarrow \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30
\end{aligned}$$

Bài 39. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq 82$

Định hướng $\left(1 \cdot x + \alpha \frac{1}{x} \right)^2 \leq (1^2 + \alpha^2) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{1}{\alpha x} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 9$

Lời giải

$$\left(1 \cdot x + 9 \frac{1}{x} \right)^2 \leq (1^2 + 9^2) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}} \left(x + \frac{9}{x} \right). \text{ Vậy ta có}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}} \left(x + y + z + \frac{9}{x} + \frac{9}{y} + \frac{9}{z} \right) \\
& = \frac{1}{\sqrt{82}} \left(81x + 81y + 81z + \frac{9}{x} + \frac{9}{y} + \frac{9}{z} - 80(x + y + z) \right) \geq \frac{1}{\sqrt{82}} (6\sqrt{81^3 \cdot 9^3} - 80) = \sqrt{82}
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài 40. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = ab + bc + ca \end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ac} \geq \sqrt{3}$

$$\text{Định hướng giải } \frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ac} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}}$$

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, ta phải chứng minh

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} + \sqrt{y^2 + 2z^2} + \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \sqrt{3} \quad ; \quad x + y + z = 1$$

Ta có $(1.x + 1.y + 1.y)^2 \leq 3(x^2 + 2y^2) \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2y^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2y)$. Lập thêm 3 bất đẳng thức tương tự ta có đpcm.

Cách khác $(x + \alpha\sqrt{2}y)^2 \leq (1^2 + \alpha^2)(x^2 + 2y^2)$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{2}y}{\alpha} \\ x = y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$$

Ta có $(1.x + \sqrt{2}.\sqrt{2}y)^2 \leq (1^2 + (\sqrt{2})^2)(x^2 + 2y^2) \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2y^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2y)$. Suy ra

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} + \sqrt{y^2 + 2z^2} + \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \frac{3}{\sqrt{3}}(x + y + z) = \sqrt{3}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$x = y = z = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 3$$

Bài 41. Cho $a, b, c > 0$ chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+b)(c+a)}} \leq 1$$

Định hướng giải

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Ta có $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{a}.a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}} \geq \frac{a}{a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}} \geq \frac{a}{a + \sqrt{(a+c)(a+b)}}$. Xây dựng thêm 2 bất đẳng thức tương tự nữa, cộng lại theo vế ta có đpcm.

Bài 42. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{a+b+c+a}{b+c} + \frac{a+b+c+b}{c+a} + \frac{a+b+c+c}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac}{b(b+c)} + \frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ac)^2}{abc(b+c)} + \frac{(ab)^2}{abc(c+a)} + \frac{(bc)^2}{abc(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Theo bất đẳng thức C-S ta có

$$\begin{aligned} \frac{(ac)^2}{abc(b+c)} + \frac{(ab)^2}{abc(c+a)} + \frac{(bc)^2}{abc(a+b)} &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \\ &= \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab.bc+ca.ab+ab.bc)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2 \cdot \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 43. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \leq 3$

Lời giải

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \leq \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} + \dots = 3$$

Bài 44. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a\sqrt{a+b}} + \frac{1}{b\sqrt{b+c}} + \frac{1}{c\sqrt{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2abc}}$

HD: Áp dụng: $(x+y+z)^2 \geq \frac{1}{3}(xy+yz+zx)$ ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a\sqrt{a+b}} + \frac{1}{b\sqrt{b+c}} + \frac{1}{c\sqrt{c+a}} \right)^2 &\geq 3 \left(\frac{1}{ab\sqrt{a+b}\sqrt{b+c}} + \frac{1}{ca\sqrt{a+b}\sqrt{c+a}} + \frac{1}{bc\sqrt{c+a}\sqrt{b+c}} \right) \\ &= \frac{3}{abc} \left(\frac{c}{\sqrt{a+b}\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+b}\sqrt{c+a}} + \frac{a}{\sqrt{c+a}\sqrt{b+c}} \right) \\ &= \frac{3}{abc} \left(\frac{c^2}{c\sqrt{a+b}\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{a+b}\sqrt{c+a}} + \frac{a^2}{a\sqrt{c+a}\sqrt{b+c}} \right) \\ &\geq \frac{3}{abc} \left(\frac{c^2}{c \cdot \frac{a+2b+c}{2}} + \frac{b^2}{b \cdot \frac{2a+b+c}{2}} + \frac{a^2}{a \cdot \frac{2c+a+b}{2}} \right) \\ &\geq \frac{6}{abc} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2} = \frac{6}{abc} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)} \\ &\geq \frac{6}{abc} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a+b+c)^2} = \frac{9}{2abc} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$