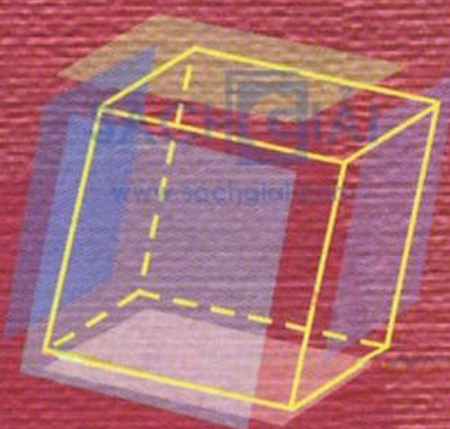


TS. VŨ THẾ HỮU - NGUYỄN VĨNH CẬN
DƯƠNG ĐỨC KIM - ĐỖ DUY ĐỒNG

Giải bài tập TOÁN

8

TẬP HAI



(Tái bản
lần thứ bảy)

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$x = -\frac{b}{a}$$



NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

**TS. VŨ THẾ HỮU - NGUYỄN VĨNH CẬN
DƯƠNG ĐỨC KIM - ĐỖ DUY ĐỒNG**

GIẢI BÀI TẬP

TOÁN 8



TẬP 2

(Tái bản lần thứ tám)

NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

GIẢI BÀI TẬP TOÁN 8 – TẬP 2

TS. VŨ THẾ HỰU - NGUYỄN VINH CẬN
DƯƠNG ĐỨC KIM - ĐỖ DUY ĐỒNG

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng Biên tập
NGUYỄN THỊ THANH HƯƠNG

Biên tập : CAO NGHI THỰC
Sửa bản in : CAO NGHI THỰC
Trình bày : THÁI VĂN
Bìa : THÁI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

62 Nguyễn Thị Minh Khai – Q.1

Điện thoại: 38225340 – 38296764 – 38247225 **Fax:** 84.8.38222726

• **Email:** tonghop@nxbhcm.com.vn

Website: www.nxbhcm.com.vn

Sách điện tử: www.sachweb.vn

NHÀ SÁCH TỔNG HỢP I

62 Nguyễn Thị Minh Khai – Q.1 – TP. HCM – ĐT: 38256804

NHÀ SÁCH TỔNG HỢP II

86 – 88 Nguyễn Tất Thành – Q. 4 – TP. HCM – ĐT: 39433868



Thực hiện liên kết: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

20 Nguyễn Thị Minh Khai - Quận I

In 5.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH MTV In Tín Lộc.

Địa chỉ: 292/32 Lê Lợi, P. 3, Q. Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh.

XNĐKXB số: 440-2014/CXB/45-41/THTPHCM ngày 11/03/2014

QĐXB số: 1381/QĐ – THTPHCM – 2014 ngày 07/11/2014.

ISBN: 978-604-58-1827-5

In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2015.

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

§1. Mở đầu về phương trình

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Phương trình một ẩn

- Một phương trình ẩn số x (ẩn x) có dạng : $A(x) = B(x)$ trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là các biểu thức của cùng biến x . $A(x)$ đứng phía trái dấu "=" gọi là **vế trái**, $B(x)$ gọi là **vế phải** của phương trình.

Ví dụ : $x^2 - 1 = 2x + 2$

- Trong thí dụ trên, khi $x = 3$ giá trị vế trái và vế phải bằng nhau. Ta bảo số 3 **nghiệm đúng** phương trình đã cho và gọi $x = 3$ là **một nghiệm** của phương trình đó. Một phương trình có thể có một, hai, ba, ... nghiệm hoặc không có nghiệm nào, hoặc có vô số nghiệm. Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình thường được kí hiệu là S gọi là **tập nghiệm** của phương trình đó.

2. Giải phương trình

Giải một phương trình là tìm tập nghiệm của phương trình đó.

3. Phương trình tương đương

Hai phương trình có cùng tập nghiệm gọi là **hai phương trình tương đương**. Phương trình $A(x) = B(x)$ tương đương với phương trình $C(x) = D(x)$, kí hiệu là :

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow C(x) = D(x)$$

Ví dụ : $3x + 2 = 4x - 1 \Leftrightarrow x - 3 = 0$.

BÀI TẬP

- 1** Với mỗi phương trình sau, hãy xét xem $x = -1$ có là nghiệm của nó không :

a) $4x - 1 = 3x - 2$

b) $x + 1 = 2(x - 3)$

c) $2(x + 1) + 3 = 2 - x$.

Giải

- a) Tính giá trị hai biểu thức ở hai vế phương trình $4x - 1 = 3x - 2$ tại $x = -1$, ta có :

$$4(-1) - 1 = -5 = 3(-1) - 2$$

Vậy $x = -1$ là nghiệm của phương trình này.

- b) Làm như câu a), ta có :

$$(-1) + 1 = 0 \neq 2(-1 - 3) = -8$$

Vậy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình $x + 1 = 2(x - 3)$.

- c) $x = -1$ là nghiệm.

- 2** Trong các giá trị $t = -1$, $t = 0$ và $t = 1$, giá trị nào là nghiệm của phương trình :

$$(t + 2)^2 = 3t + 4.$$

Giải

Tìm giá trị của các biểu thức ở hai vế của phương trình đã cho lần lượt tại $t = -1$, $t = 0$ và $t = 1$, ta được :

$$(-1 + 2)^2 = 3 \cdot (-1) + 4; \quad (0 + 2)^2 = 3 \cdot 0 + 4; \quad (1 + 2)^2 \neq 3 \cdot 1 + 4$$

Vậy các giá trị $t = -1$ và $t = 0$ là những nghiệm của phương trình trên, còn giá trị $t = 1$ không phải là nghiệm.

- 3** Xét phương trình $x + 1 = 1 + x$. Ta thấy mọi số thực đều là nghiệm của nó (ta còn nói : phương trình này nghiệm đúng với mọi x (thuộc $\mathbb{R}$)). Hãy cho biết tập nghiệm của phương trình đó.

Giải

Mọi số thực đều là nghiệm của phương trình $x + 1 = 1 + x$. Khi đó ta nói tập nghiệm của phương trình là tập hợp số thực và kí hiệu là :

$$S = \mathbb{R} \quad \text{hay} \quad S = \{a / a \in \mathbb{R}\}.$$

- 4** Nối mỗi phương trình sau với các nghiệm của nó (theo mẫu) :

$$3(x - 1) = 2x - 1 \quad (a)$$

$$\frac{1}{x+1} = 1 - \frac{x}{4} \quad (b)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (c)$$

(-1)

(2)

(3)

Giải

Nối (a) — (2), (b) — (3), (c) — (-1), (3)

- 5** Hai phương trình $x = 0$ và $x(x - 1) = 0$ có tương đương không? Vì sao?

Giải

Tập nghiệm của phương trình thứ nhất là $S_1 = \{0\}$. Tập nghiệm của phương trình thứ hai là $S_2 = \{0; 1\}$. Vì $S_1 \neq S_2$ nên hai phương trình không tương đương.

§2. Phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải

§3. Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân

- Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

Ví dụ : $2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 + 1$

- Trong một phương trình, ta có thể nhân (hoặc chia) hai vế với cùng một số khác 0.

2. Giải phương trình bậc nhất một ẩn

- Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$, trong đó a, b là hai hằng số với $a \neq 0$.
- Để giải phương trình $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) ta chuyển vế hằng số b sang một vế rồi nhân hai vế với nghịch đảo của a (tức là chia hai vế cho a).

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}.$$

Như vậy phương trình $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) luôn có một nghiệm $x = \frac{-b}{a}$.

Ví dụ : $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$

3. Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$

Phương trình $A(x) = B(x)$, trong đó các vế của phương trình là các biểu thức nguyên của ẩn x . Sau khi thực hiện các phép tính, các phép biến đổi phương trình (chuyển vế, nhân với số khác 0) và rút gọn có thể đưa phương trình đã cho về dạng $ax + b = 0$ với $a \neq 0$.

Nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{-b}{a}$.

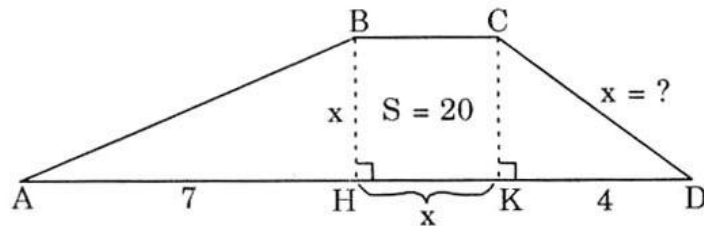
Ví dụ : $(x + 2)^2 - x = x^2 - 4x - 10$
 $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - x = x^2 - 4x - 10$
 $\Leftrightarrow 7x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$

BÀI TẬP

6 Tính diện tích S của hình thang $ABCD$ (hình dưới) theo x bằng hai cách :

a) Theo công thức $S = BH \times (BC + DA) : 2$;

b) $S = S_{ABH} + S_{BCKH} + S_{CKD}$.



Sau đó sử dụng giả thiết $S = 20$ để thu được hai phương trình tương đương với nhau. Trong hai phương trình ấy, có phương trình nào là phương trình bậc nhất không?

Giải

Theo cách tính thứ nhất, diện tích hình thang là :

$$x.(x + x + 11) : 2 = 20$$

Theo cách tính thứ hai : $\frac{1}{2}.7x + x^2 + \frac{1}{2}.4x = 20$

Ta có : $x(x + x + 11) : 2 = 20 \Leftrightarrow \frac{7}{2}x + x^2 + 2x = 20$

Cả hai phương trình thu được, không có phương trình nào đưa được về dạng $ax + b = 0$ với a, b là hai hằng số và $a \neq 0$. Vậy trong hai phương trình không có phương trình nào là bậc nhất.

7 Hãy chỉ ra các phương trình bậc nhất trong các phương trình sau :

a) $1 + x = 0$;

b) $x + x^2 = 0$;

c) $1 - 2t = 0$

d) $3y = 0$;

e) $0x - 3 = 0$.

Giải

Phương trình $1 + x = 0$ là phương trình bậc nhất ẩn số x (vì có dạng $ax + b = 0$ với $a = 1, b = 1$).

Phương trình $1 - 2t = 0$ là phương trình bậc nhất ẩn số t (vì có dạng $at + b = 0$ với $a = -2, b = 1$).

Phương trình $3y = 0$ là phương trình bậc nhất ẩn số y (vì có dạng $ay + b = 0$ với $a = 3, b = 0$).

Các phương trình còn lại không phải là phương trình bậc nhất.

8 Giải các phương trình :

a) $4x - 20 = 0$;

b) $2x + x + 12 = 0$

c) $x - 5 = 3 - x$;

d) $7 - 3x = 9 - x$.

Giải

Áp dụng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân ta được :

$$\text{a) } 4x - 20 = 0 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 20 : 4.$$

Tập nghiệm $S = \{5\}$.

$$\text{b) } 2x + x + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x = -12 \Leftrightarrow x = -12 : 3$$

Tập nghiệm $S = \{-4\}$.

$$\text{c) } x - 5 = 3 - x \Leftrightarrow x + x = 3 + 5 \Leftrightarrow x = 8 : 2$$

Tập nghiệm $S = \{4\}$.

$$\text{d) } 7 - 3x = 9 - x \Leftrightarrow x - 3x = 9 - 7 \Leftrightarrow x = 2 : (-2)$$

Tập nghiệm $S = \{-1\}$.

9

Giải các phương trình sau, viết số gần đúng của mỗi nghiệm ở dạng số thập phân bằng cách làm tròn đến hàng phần trăm.

$$\text{a) } 3x - 11 = 0;$$

$$\text{b) } 12 + 7x = 0;$$

$$\text{c) } 10 - 4x = 2x - 3.$$

Giải

$$\text{a) } 3x - 11 = 0 \Leftrightarrow 3x = 11 \Leftrightarrow x = 11 : 3 \Rightarrow x \approx 3,67$$

$$\text{b) } 12 + 7x = 0 \Leftrightarrow 7x = -12 \Leftrightarrow x = -12 : 7 \Rightarrow x \approx -1,71$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 10 - 4x = 2x - 3 &\Leftrightarrow -2x - 4x = -3 - 10 \\ &\Leftrightarrow -6x = -13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{6} \Rightarrow x \approx 2,17. \end{aligned}$$

10

Tìm chỗ sai và sửa lại các bài giải sau cho đúng :

$$\text{a) } 3x - 6 + x = 9 - x$$

$$\text{b) } 2t - 3 + 5t = 4t + 12$$

$$\Leftrightarrow 3x + x - x = 9 - 6$$

$$\Leftrightarrow 2t + 5t - 4t = 12 - 3$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3$$

$$\Leftrightarrow 3t = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\Leftrightarrow t = 3.$$

Giải

a) Viết $3x - 6 + x = 9 - x \Leftrightarrow 3x + x - x = 9 - 6$ là sai, vì -6 chuyển vế từ trái sang phải và $-x$ từ vế phải sang vế trái mà không đổi dấu của các hạng tử này. Cần làm như sau :

$$3x - 6 + x = 9 - x \Leftrightarrow 3x + x + x = 9 + 6 \Leftrightarrow 5x = 15$$

$$\Leftrightarrow x = 15 : 5 = 3.$$

b) Viết $2t - 3 + 5t = 4t + 12 \Leftrightarrow 2t + 5t - 4t = 12 - 3$, sai ở chỗ chuyển -3 từ vế trái sang vế phải mà không đổi dấu của số hạng đó. Cần làm như sau :

$$2t - 3 + 5t = 4t + 12 \Leftrightarrow 2t + 5t - 4t = 12 + 3 \Leftrightarrow 3t = 15$$

$$\Leftrightarrow t = 5.$$

11 Giải phương trình :

a) $3x - 2 = 2x - 3$;

b) $3 - 4u + 24 + 6u = u + 27 + 3u$;

c) $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x)$;

d) $-6(1,5 - 2x) = 3(-15 + 2x)$;

e) $0,1 - 2(0,5t - 0,1) = 2(t - 2,5) - 0,7$;

f) $\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{5}{8} = x$.

Giải

a) $3x - 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow 3x - 2x = -3 + 2 \Leftrightarrow x = -1$

b) $3 - 4u + 24 + 6u = u + 27 + 3u \Leftrightarrow 2u + 27 = 4u + 27$

$\Leftrightarrow 2u - 4u = 27 - 27 \Leftrightarrow -2u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

c) $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x) \Leftrightarrow 5 - x + 6 = 12 - 8x$

$\Leftrightarrow 8x - x = 12 - 6 - 5 \Leftrightarrow 7x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$

d) $-6(1,5 - 2x) = 3(-15 + 2x) \Leftrightarrow -9 + 12x = -45 + 6x$

$\Leftrightarrow 12x - 6x = -45 + 9 \Leftrightarrow 6x = -36 \Leftrightarrow x = -6$

e) $0,1 - 2(0,5t - 0,1) = 2(t - 2,5) - 0,7$

$\Leftrightarrow 0,1 - t + 0,2 = 2t - 5 - 0,7 \Leftrightarrow -t - 2t = -5,7 - 0,3$

$\Leftrightarrow -3t = -6 \Leftrightarrow t = 2$

f) $\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{5}{8} = x \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{15}{8} - \frac{5}{8} = x \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 3x}{8} - \frac{20}{8} = \frac{8x}{8}$

$\Leftrightarrow 12x - 8x = 20 \Leftrightarrow x = 5$.

12 Giải các phương trình :

a) $\frac{5x - 2}{3} = \frac{5 - 3x}{2}$;

b) $\frac{10x + 3}{12} = 1 + \frac{6 + 8x}{9}$;

c) $\frac{7x - 1}{6} + 2x = \frac{16 - x}{5}$;

d) $4(0,5 - 1,5x) = -\frac{5x - 6}{3}$.

Giải

a) Quy đồng mẫu ta được : $\frac{2(5x - 2)}{6} = \frac{3(5 - 3x)}{6}$.

Khử mẫu phương trình thu được ta có :

$2(5x - 2) = 3(5 - 3x) \Leftrightarrow 10x - 4 = 15 - 9x$

$\Leftrightarrow 10x + 9x = 15 + 4 \Leftrightarrow x = 1$

b) Quy đồng mẫu và khử mẫu ta được :

$3(10x + 3) = 36 + 4(6 + 8x) \Leftrightarrow 30x + 9 = 36 + 24 + 32x$

$\Leftrightarrow 30x - 32x = 60 - 9 \Leftrightarrow -2x = 51 \Leftrightarrow x = -25,5$

c) Quy đồng mẫu và khử mẫu chung ta được :

$$5(7x - 1) + 30.2x = 6(16 - x) \Leftrightarrow 35x - 5 + 60x = 96 - 6x$$

$$\Leftrightarrow 35x + 60x + 6x = 96 + 5 \Leftrightarrow 101x = 101 \Leftrightarrow x = 1.$$

d) Quy đồng mẫu và khử mẫu ta có :

$$12(0,5 - 1,5x) = -(5x - 6) \Leftrightarrow 6 - 18x = -5x + 6$$

$$\Leftrightarrow -18x + 5x = 6 - 6 \Leftrightarrow x = 0.$$

13 Bạn Hòa giải phương trình :

$$x(x + 2) = x(x + 3) \text{ như hình bên.}$$

Theo em, bạn Hòa giải đúng hay sai ?

Em sẽ giải phương trình đó như thế nào ?

Giải

Bạn Hòa đã viết : $x(x + 2) = x(x + 3) \Leftrightarrow x + 2 = x + 3$

Vì bạn đã chia hai vế của phương trình thứ nhất cho x . Điều này không đúng vì biến số x có thể nhận giá trị 0. Ta chỉ nhận được một phương trình mới tương đương nếu chia hai vế của một phương trình cho một số khác 0.

Ta giải như sau :

$$x(x + 2) = x(x + 3) \Leftrightarrow x^2 + 2x = x^2 + 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 + 2x - 3x = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

14 Số nào trong ba số -1 ; 2 và -3 nghiệm đúng mỗi phương trình sau :

$$|x| = x \quad (1); \quad x^2 + 5x + 6 = 0 \quad (2) \quad \text{và} \quad \frac{6}{1-x} = x + 4 \quad (3)$$

Giải

Thử mỗi số đã cho vào từng phương trình ta thấy -1 là nghiệm của phương trình (3), 2 là nghiệm của phương trình (1) và -3 là nghiệm của phương trình (2).

15 Một xe máy khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng với vận tốc trung bình 32km/h . Sau đó 1 giờ, một ô tô cũng khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng, cùng đường với người đi xe máy và với vận tốc trung bình là 48km/h . Hãy viết phương trình biểu thị việc ô tô gặp xe máy sau x giờ, kể từ khi ô tô khởi hành.

Giải

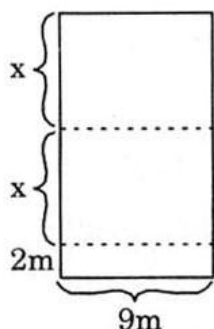
Gọi x (giờ) là thời gian ô tô đã chạy cho tới lúc gặp xe máy thì thời gian xe máy đã đi cho tới lúc gặp ô tô là $x + 1$.

Quãng đường ô tô đã đi được là : $48x$ (km).

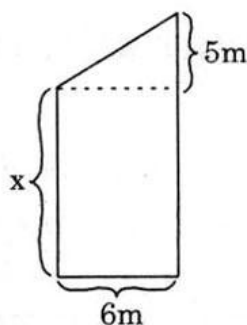
Quãng đường xe máy đã đi cho tới lúc gặp ô tô là : $32(x + 1)$ (km).

Vì quãng đường đi từ Hà Nội cho tới chỗ gặp nhau của hai xe là như nhau nên ta có phương trình : $48x = 32(x + 1)$.

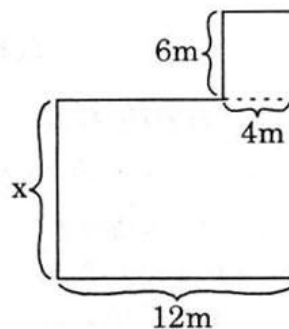
- 19** Viết phương trình ẩn x rồi tính x (mét) trong mỗi hình dưới đây (S là diện tích của hình) :



a) $S = 144\text{m}^2$



b) $S = 75\text{m}^2$



c) $S = 168\text{m}^2$

Giải

a) $9(2x + 2) = 144$

b) $6x + 15 = 75$

c) $12x + 24 = 168$.

- 20** **Đố :**

Trung bảo Nghĩa hãy nghĩ ở trong đầu (không cho Trung biết) một số tự nhiên tùy ý, sau đó Nghĩa thêm 5 vào số ấy, nhân tổng nhận được với 2, được bao nhiêu đem trừ đi 10, tiếp tục nhân hiệu tìm được với 3 rồi cộng thêm 66, cuối cùng chia kết quả cho 6. Chẳng hạn, nếu Nghĩa nghĩ đến số 7 thì quá trình tính toán sẽ là :

$$7 \rightarrow (7 + 5 = 12) \rightarrow (12 \times 2 = 24) \rightarrow (24 - 10 = 14) \rightarrow (14 \times 3 = 42) \rightarrow (42 + 66 = 108) \rightarrow (108 : 6 = 18)$$

Trung chỉ cần biết kết quả cuối cùng (số 18) là đoán ngay được số Nghĩa đã nghĩ là số nào.

Nghĩa thử mấy lần, Trung đều đoán đúng. Nghĩa phục tài Trung lắm. Đố em tìm ra bí quyết của Trung đấy !

Giải

Ta biểu thị các việc Nghĩa thực hiện theo ý của Trung như sau : Gọi x là số mà Nghĩa nghĩ ra thì biểu thức biểu diễn kết quả là :

$$\{3[2(x + 5) - 10] + 66\} : 6$$

Rút gọn biểu thức này ta được $x + 11$. Trung chỉ việc lấy kết quả cuối cùng mà Nghĩa cho biết, rồi đem trừ kết quả đó đi 11 là được số Nghĩa đã nghĩ.

Bí quyết của Trung là bảo Nghĩa làm có vẻ rắc rối nhưng kết quả Trung biết trước.

§4. Phương trình tích

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng $A(x).B(x) = 0$.

Muốn giải phương trình trên (tức là tìm tập nghiệm của nó) ta giải hai phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$. Tất cả các nghiệm của hai phương trình là các nghiệm của phương trình đã cho.

$$A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \quad \text{hoặc} \quad B(x) = 0$$

Ví dụ : Giải phương trình $(2x - 3)(3x + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \quad \text{hoặc} \quad 3x + 4 = 0$$

$$\bullet \quad 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\bullet \quad 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ -\frac{4}{3}; \frac{3}{2} \right\}$.

2. Phương trình đưa về phương trình tích

Phương trình $P(x) = Q(x)$ (1). Sau khi thực hiện các phép tính và các phép biến đổi phương trình (chuyển vế, nhân hai vế với số khác 0) ta đưa được về dạng $f(x) = 0$, trong đó bậc của $f(x)$ lớn hơn 1. Ta phân tích $f(x)$ thành nhân tử $f(x) = A(x).B(x)$

Khi đó nghiệm của phương trình (1) là tập các nghiệm của các phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$.

Ví dụ : Giải phương trình : $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)(x + 1)$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (x - 1)^3 - (x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{hoặc} \quad x^2 - 3x = 0$$

Tập nghiệm của (1) là $S = \{0; 1; 3\}$.

BÀI TẬP

21 Giải phương trình :

a) $(3x - 2)(4x + 5) = 0$;

b) $(2,3x - 6,9)(0,1x + 2) = 0$

c) $(4x + 2)(x^2 + 1) = 0$;

d) $(2x + 7)(x - 5)(5x + 1) = 0$.

Giải

$$\text{a) } (3x - 2)(4x + 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \text{ hoặc } 4x + 5 = 0$$

$$\bullet \quad 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \quad 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{5}{4} \right\}$.

$$\text{b) } (2,3x - 6,9)(0,1x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2,3x - 6,9 = 0 \text{ hoặc } 0,1x + 2 = 0$$

$$\bullet \quad 2,3x - 6,9 = 0 \Leftrightarrow 2,3x = 6,9 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\bullet \quad 0,1x + 2 = 0 \Leftrightarrow 0,1x = -2 \Leftrightarrow x = -20$$

Tập nghiệm của phương trình đã cho : $S = \{3; -20\}$.

$$\text{c) } (4x + 2)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 1 = 0$$

$$\bullet \quad 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x = -2 \Leftrightarrow x = -0,5$$

$$\bullet \quad x^2 + 1 = 0, \text{ phương trình này vô nghiệm vì } x^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-0,5\}$.

$$\text{d) } (2x + 7)(x - 5)(5x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x + 7 = 0 \text{ hoặc } x - 5 = 0 \text{ hoặc } 5x + 1 = 0$$

Giải các phương trình bậc nhất mới nhận được ta có tập nghiệm của phương trình cho ban đầu là $S = \left\{ -\frac{7}{2}; 5; -\frac{1}{5} \right\}$.

22 Bằng cách phân tích vế trái thành nhân tử, giải các phương trình sau :

$$\text{a) } 2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0$$

$$\text{b) } (x^2 - 4) + (x - 2)(3 - 2x) = 0$$

$$\text{c) } x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\text{d) } x(2x - 7) - 4x + 14 = 0$$

$$\text{e) } (2x - 5)^2 - (x + 2)^2 = 0$$

$$\text{f) } x^2 - x - (3x - 3) = 0.$$

Giải

$$\text{a) } 2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(2x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ hoặc } 2x + 5 = 0$$

$$\bullet \quad x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\bullet \quad 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Tập nghiệm cần tìm $S = \left\{ 3; -\frac{5}{2} \right\}$.

b) $(x^2 - 4) + (x - 2)(3 - 2x) = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) + (x - 2)(3 - 2x) = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2 + 3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } 5 - x = 0$
 Tập nghiệm $S = \{2; 5\}$.

c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
 Tập nghiệm $S = \{1\}$.

d) $x(2x - 7) - 4x + 14 = 0 \Leftrightarrow x(2x - 7) - 2(2x - 7) = 0$
 $\Leftrightarrow (2x - 7)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0$

• $2x - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

• $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Tập nghiệm của phương trình cho ban đầu : $S = \left\{\frac{7}{2}; 2\right\}$.

e) $(2x - 5)^2 - (x + 2)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow [(2x - 5) + (x + 2)][(2x - 5) - (x + 2)] = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \text{ hoặc } x - 7 = 0$

Tập nghiệm $S = \{1; 7\}$.

f) $x^2 - x - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x) - (3x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x(x - 1) - 3(x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } x - 3 = 0$

Suy ra tập nghiệm cần tìm $S = \{1; 3\}$.

23 Giải phương trình :

a) $x(2x - 9) = 3x(x - 5)$

b) $0,5x(x - 3) = (x - 3)(1,5x - 1)$

c) $3x - 15 = 2x(x - 5)$

d) $\frac{3}{7}x - 1 = \frac{1}{7}x(3x - 7)$.

Giải

a) $x(2x - 9) = 3x(x - 5) \Leftrightarrow x(2x - 9) - 3x(x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow x[2x - 9 - 3(x - 5)] = 0$

$\Leftrightarrow x(2x - 9 - 3x + 15) = 0$

$\Leftrightarrow x(6 - x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } 6 - x = 0$

Tập nghiệm $S = \{0; 6\}$.

b) $0,5x(x - 3) = (x - 3)(1,5x - 1) \Leftrightarrow (x - 3)[0,5x - (1,5x - 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(1 - x) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ hoặc } 1 - x = 0$

Tập nghiệm $S = \{1; 3\}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } 3x - 15 &= 2x(x - 5) \Leftrightarrow (x - 5)(3 - 2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ hoặc } 3 - 2x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Tập nghiệm } S = \left\{5; \frac{3}{2}\right\}.$$

$$\text{d) } \frac{3}{7}x - 1 = \frac{1}{7}x(3x - 7) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}x - 1\right)(1 - x) = 0$$

$$\text{Tập nghiệm } S = \left\{1; \frac{7}{3}\right\}.$$

24 Giải các phương trình :

$$\text{a) } (x^2 - 2x + 1) - 4 = 0$$

$$\text{b) } x^2 - x = -2x + 2$$

$$\text{c) } 4x^2 + 4x + 1 = x^2$$

$$\text{d) } x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^2 - 2x + 1) - 4 &= 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow [(x - 1) + 2][(x - 1) - 2] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow S = \{-1; 3\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - x &= -2x + 2 \Leftrightarrow x(x - 1) + 2(x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow S = \{-2; 1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4x^2 + 4x + 1 &= x^2 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x + 1 + x)(2x + 1 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (3x + 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow S = \left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 - 5x + 6 &= 0 \Leftrightarrow x(x - 2) - 3(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow S = \{2; 3\}. \end{aligned}$$

25 Giải các phương trình :

$$\text{a) } 2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x$$

$$\text{b) } (3x - 1)(x^2 + 2) = (3x - 1)(7x - 10)$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x^3 + 6x^2 &= x^2 + 3x \Leftrightarrow (x + 3)(2x^2 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x + 3)(2x - 1) = 0 \Rightarrow S = \left\{0; -3; \frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } (3x - 1)(x^2 + 2) = (3x - 1)(7x - 10)$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)[(x^2 + 2) - (7x - 10)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x^2 - 7x + 12) = 0$$

Phân tích $x^2 - 7x + 12$ thành nhân tử :

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 2x - 5x + 12 = x(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(x - 5)$$

$$\text{Vậy } (3x - 1)(x^2 + 2) = (3x - 1)(7x - 10)$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 2)(x - 5) = 0 \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{3}; 2; 5\right\}.$$

§5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Ví dụ phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

$$\frac{x-4}{x(x+2)} + \frac{2}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{x(x-2)}$$

Trong phương trình này ẩn số x có ở mẫu thức của biểu thức.

2. Điều kiện xác định (ĐKXD) của phương trình

Đó là ẩn số lấy các giá trị sao cho tất cả các mẫu thức có trong phương trình phải khác 0.

Trong ví dụ trên, điều kiện xác định là $x \neq 0$, $x - 2 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$, $x - 4 \neq 0$, $x + 4 \neq 0$.

ĐKXD : $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$, $x \neq \pm 4$.

3. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế của phương trình rồi khử mẫu thức chung.

Bước 3. Giải phương trình nhận được sau khi khử mẫu thức.

Bước 4. Loại các nghiệm của phương trình ở bước 3 không thỏa mãn ĐKXD.

Các nghiệm còn lại (thỏa mãn ĐKXD) là các nghiệm của phương trình cho ban đầu.

BÀI TẬP

27 Giải phương trình :

a) $\frac{2x-5}{x+5} = 3$

b) $\frac{x^2-6}{x} = x + \frac{3}{2}$

c) $\frac{(x^2+2x)-(3x+6)}{x-3} = 0$

d) $\frac{5}{3x+2} = 2x-1.$

Giải

a) ĐKXD : $x + 5 \neq 0$ hay $x \neq -5$.

Quy đồng và khử mẫu ta được phương trình :

$$2x - 5 = 3(x + 5) \Leftrightarrow 2x - 3x = 15 + 5$$

$$\Leftrightarrow x = -20 \text{ (thỏa mãn ĐKXD, nhận)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-20\}$.

b) ĐKXĐ : $x \neq 0$

Quy đồng và khử mẫu ta được :

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 6) &= 2x^2 + 3x &\Leftrightarrow & 3x = -12 \\ &&\Leftrightarrow & x = -4 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ, nhận)} \end{aligned}$$

Kết luận : $S = \{-4\}$.

c) ĐKXĐ : $x - 3 \neq 0$ hay $x \neq 3$

Khử mẫu ta được :

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x) - (3x + 6) &= 0 &\Leftrightarrow & x(x + 2) - 3(x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) &= 0 &\Leftrightarrow & x + 2 = 0 \text{ hoặc } x - 3 = 0 \end{aligned}$$

- $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (thỏa mãn ĐKXĐ, nhận)
- $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (loại vì không thỏa mãn ĐKXĐ)

Kết luận : $S = \{-2\}$.

d) ĐKXĐ : $3x + 2 \neq 0$ hay $x \neq -\frac{2}{3}$

Quy đồng và khử mẫu ta được :

$$\begin{aligned} 5 &= (2x - 1)(3x + 2) &\Leftrightarrow & 5 = 6x^2 + x - 2 \\ \Leftrightarrow 6x^2 - 6x + 7x - 7 &= 0 &\Leftrightarrow & 6x(x - 1) + 7(x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(6x + 7) &= 0 &\Leftrightarrow & x - 1 = 0 \text{ hoặc } 6x + 7 = 0 \\ \bullet \quad x - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = 1 && \text{(thỏa mãn ĐKXĐ, nhận)} \\ \bullet \quad 6x + 7 = 0 &\Leftrightarrow x = -\frac{7}{6} && \text{(thỏa mãn ĐKXĐ, nhận)} \end{aligned}$$

Kết luận : $S = \left\{-\frac{7}{6}; 1\right\}$.

28

Giải phương trình :

a) $\frac{2x-1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x-1}$

b) $\frac{5x}{2x+2} + 1 = -\frac{6}{x+1}$

c) $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$

d) $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$.

Giải

a) ĐKXĐ : $x - 1 \neq 0$ hay $x \neq 1$

Quy đồng và khử mẫu :

$$\begin{aligned} 2x - 1 + x - 1 &= 1 &\Leftrightarrow & 3x = 3 \\ &&\Leftrightarrow & x = 1 \text{ (không thỏa mãn ĐKXĐ, loại)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. $S = \emptyset$.

b) ĐKXĐ : $2x + 2 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$ hay $x \neq -1$

Quy đồng và khử mẫu :

$$\begin{aligned} 5x + 2x + 2 &= -12 &\Leftrightarrow & 7x = -14 \\ &&\Leftrightarrow & x = -2 \text{ (nhận vì thỏa mãn ĐKXĐ)} \end{aligned}$$

Vậy $S = \{-2\}$.

c) ĐKXD : $x \neq 0$

Quy đồng và khử mẫu :

$$\begin{aligned} x^3 + x &= x^4 + 1 \Leftrightarrow x^4 - x^3 - x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3(x - 1) - (x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \text{ hoặc } x^2 + x + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (nhận)}$$

$$\bullet x^2 + x + 1 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

$$(\text{vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x)$$

Kết luận : $S = \{1\}$.

d) ĐKXD : $x \neq -1$ và $x \neq 0$

Quy đồng và khử mẫu :

$$\begin{aligned} x(x + 3) + (x + 1)(x - 2) &= 2x(x + 1) \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x + x^2 - x - 2 &= 2x^2 + 2x \Leftrightarrow 0x = -2 \text{ vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Vậy $S = \emptyset$.

29 Bạn Sơn giải phương trình $\frac{x^2 - 5x}{x - 5} = 5$ (1) như sau :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2 - 5x = 5(x - 5) \Leftrightarrow x^2 - 5x = 5x - 25 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

Bạn Hà cho rằng Sơn giải sai vì đã nhân hai vế với biểu thức $x - 5$ có chứa ẩn. Hà giải bằng cách rút gọn phân thức ở vế trái như sau :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x(x - 5)}{x - 5} = 5 \Leftrightarrow x = 5.$$

Hãy cho biết ý kiến của em về hai lời giải trên.

Giải

Sơn sai vì đã nhân hai vế với cùng một biểu thức mà không đặt điều kiện biểu thức đó phải khác 0. Hà sai vì đã rút gọn phân thức mà không đặt điều kiện nhân tử rút gọn $x - 5 \neq 0$.

Ta cần giải như sau :

Điều kiện xác định $x - 5 \neq 0$ hay $x \neq 5$. Với điều kiện đó ta rút gọn :

$$\frac{x^2 - 5x}{x - 5} = 5 \Leftrightarrow \frac{x(x - 5)}{(x - 5)} = 5$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ (loại vì không thỏa mãn ĐKXD)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

30 Giải phương trình :

a) $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{x-3}{2-x}$

b) $2x - \frac{2x^2}{x+3} = \frac{4x}{x+3} + \frac{2}{7}$

c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

d) $\frac{3x-2}{x+7} = \frac{6x+1}{2x-3}$

Giảia) ĐKXD : $x \neq 2$

Quy đồng và khử mẫu ta có :

$$1 + 3(x-2) = 3-x \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại)}$$

Kết luận : Phương trình đã cho vô nghiệm. $S = \emptyset$.b) ĐKXD : $x \neq -3$

Quy đồng và khử mẫu :

$$2x \cdot 7(x+3) - 14x^2 = 28x + 2(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 14x^2 + 42x - 14x^2 = 30x + 6 \Leftrightarrow x = 0,5 \text{ (nhận)}$$

Vậy $S = \{0,5\}$.c) ĐKXD : $x \neq -1$ và $x \neq 1$

Quy đồng mẫu ta được :
$$\frac{(x+1)^2}{x^2-1} - \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{4}{x^2-1}$$

Khử mẫu ta có :

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại)}$$

Vậy $S = \emptyset$.d) ĐKXD : $x \neq -7$ và $x \neq \frac{3}{2}$

Quy đồng và khử mẫu :

$$(3x-2)(2x-3) = (6x+1)(x+7)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 6x^2 + 43x + 7$$

$$\Leftrightarrow -56x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{56} \text{ (thỏa mãn ĐKXD, nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{-\frac{1}{56}\right\}.$$

31 Giải các phương trình :

a) $\frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1}$

b) $\frac{3}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

$$\text{c) } 1 + \frac{1}{x+2} = -\frac{12}{8+x^3}$$

$$\text{d) } \frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}.$$

Giải

a) ĐKXD : $x \neq 1$

Quy đồng và khử mẫu :

$$x^2 + x + 1 - 3x^2 = 2x(x-1) \Leftrightarrow -4x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 - x + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x(4x+1) + (4x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x+1)(1-x) = 0 \Leftrightarrow 4x+1=0 \text{ hoặc } 1-x=0$$

$$\bullet \quad 4x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ (nhận)}$$

$$\bullet \quad 1-x=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}.$$

b) ĐKXD : $x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3$

Quy đồng và khử mẫu :

$$3(x-3) + 2(x-2) = x-1 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (loại)}$$

Vậy $S = \emptyset$ (tức phương trình đã cho vô nghiệm).

c) Chú ý rằng $8+x^3 = 2^3+x^3 = (2+x)(4-2x+x^2)$

Vì $4-2x+x^2 = 3+(1-2x+x^2) = 3+(1-x)^2 > 0$ với mọi x nên $8+x^3 \neq 0$ nếu và chỉ nếu $2+x \neq 0$, tức $x \neq -2$. Do đó ta có ĐKXD là $x \neq -2$.

Quy đồng và khử mẫu ta được :

$$8+x^3+4-2x+x^2=12 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2+2x^2-2x=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)+2x(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ (nhận) hoặc } x=1 \text{ (nhận) hoặc } x=-2 \text{ (loại)}$$

Vậy $S = \{0; 1\}$.

d) ĐKXD : $x \neq \pm 3, x \neq -\frac{7}{2}$

Quy đồng và khử mẫu :

$$13(x+3) + (x-3)(x+3) = 6(2x+7)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 13x + 30 = 12x + 42 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 3x - 12 = 0 \Leftrightarrow x(x+4) - 3(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ (nhận), } x = 3 \text{ (loại)}$$

Vậy $S = \{-4\}$.

32 Giải các phương trình :

$$\text{a) } \frac{1}{x} + 2 = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1) \quad \text{b) } \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2.$$

Giải

a) ĐKXD : $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + 2 &= \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1) - \left(\frac{1}{x} + 2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Rút gọn ta được : } x(1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại) và } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

b) ĐKXD : $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 &= \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) + \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)\right] \left[\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) - \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x \left(2 + \frac{2}{x}\right) = 0 \end{aligned}$$

Rút gọn phương trình trên ta nhận được :

$$4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \{-1\}.$$

33 Tìm các giá trị của a sao cho các biểu thức sau có giá trị bằng 2 :

$$\text{a) } \frac{3a-1}{3a+1} + \frac{a-3}{a+3} \quad \text{b) } \frac{10}{3} - \frac{3a-1}{4a+12} - \frac{7a+2}{6a+18}.$$

Giải

a) Bài toán tương đương với tìm các giá trị của a sao cho

$$3a + 1 \neq 0, \quad a + 3 \neq 0 \quad \text{và} \quad \frac{3a-1}{3a+1} + \frac{a-3}{a+3} = 2 \quad (1)$$

Điều này có nghĩa là phải giải phương trình (1) với ẩn số a.

$$\text{ĐKXD : } a \neq \frac{-1}{3}, \quad a \neq -3$$

Quy đồng và khử mẫu :

$$\begin{aligned} (3a-1)(a+3) + (a-3)(3a+1) &= 2(a+3)(3a+1) \\ \Leftrightarrow 6a^2 - 6 &= 6a^2 + 20a + 6 \Leftrightarrow 20a = -12 \Leftrightarrow a = \frac{-3}{5} \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

Kết luận : Giá trị cần tìm của a là : $a = -\frac{3}{5}$.

b) Ta cần giải phương trình : $\frac{10}{3} - \frac{3a-1}{4a+12} - \frac{7a+2}{6a+18} = 2$ (2)

ĐKXD : $a \neq -3$

Quy đồng và khử mẫu :

$$20(2a+6) - 3(3a-1) - 2(7a+2) = 12(2a+6)$$

$$\Leftrightarrow 7a = 47 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{47}{7} \text{ (nhận)}$$

Kết luận : Giá trị a cần tìm là $a = \frac{47}{7}$.

§6§7. Giải toán bằng cách lập phương trình

TÓM TẮT KIẾN THỨC

Các bước giải toán bằng cách lập phương trình

Bước 1. Lập phương trình.

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình thu được.

Bước 3. Kiểm tra để loại các nghiệm của phương trình không thỏa mãn điều kiện cho ẩn số. Căn cứ vào các nghiệm thỏa mãn điều kiện của ẩn số để trả lời.

BÀI TẬP

- 34** Mẫu số của một phân số lớn hơn tử số của nó là 3 đơn vị. Nếu tăng cả tử và mẫu của nó thêm 2 đơn vị thì được phân số mới bằng $\frac{1}{2}$.
Tìm phân số ban đầu.

Giải

Đặt x là tử số của phân số cần tìm. Điều kiện $x \in \mathbb{N}$.

Khi đó phân số cần tìm là $\frac{x}{x+3}$. Theo đề ta có phương trình :

$$\frac{x+2}{x+5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(x+2) = x+5 \Rightarrow x = 1$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{1}{4}$.

- 35** Học kì một, số học sinh giỏi của lớp 8A bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh cả lớp.

Sang học kì hai, có thêm 3 bạn phấn đấu trở thành học sinh giỏi nữa, do đó số học sinh giỏi bằng 20% số học sinh cả lớp. Hỏi lớp 8A có bao nhiêu học sinh ?

Giải

Gọi số học sinh của lớp 8A là x. Điều kiện : x nguyên dương.

Số học sinh giỏi học kì một của lớp 8A là $\frac{x}{8}$.

Số học sinh giỏi học kì hai là $\frac{x}{8} + 3$.

Theo đề thì số học sinh giỏi học kì hai là 20%, tức là $\frac{x}{5}$ và ta có

$$\text{phương trình : } \frac{x}{8} + 3 = \frac{x}{5} \quad (1)$$

Giải phương trình (1) :

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{8} = 3 \Leftrightarrow 3x = 120 \Leftrightarrow x = 40 \text{ (nguyên dương)}$$

Số học sinh của lớp 8A là 40.

- 36** (Bài toán nói về cuộc đời nhà toán học Đi-ô-phăng, lấy trong Hợp tuyển Hi Lạp – cuốn sách gồm 46 bài toán về số, viết dưới dạng thơ trào phúng).

Thời thơ ấu của Đi-ô-phăng chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời

$\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi

Thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời nữa ông sống độc thân

Sau khi lập gia đình được 5 năm thì sinh một con trai

Nhưng số mệnh chỉ cho con sống bằng nửa đời cha

Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất

Đi-ô-phăng sống bao nhiêu tuổi, hãy tính cho ra.

Giải

Gọi x (tuổi) là tuổi của Đi-ô-phăng. Điều kiện x nguyên dương.

Thời thơ ấu là $\frac{x}{6}$, thời thanh niên : $\frac{x}{12}$, thời kì độc thân sau tuổi

thanh niên : $\frac{x}{7}$. Tuổi của con Đi-ô-phăng : $\frac{x}{2}$.

Ta có phương trình : $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$

$$\frac{14x}{84} + \frac{7x}{84} + \frac{12x}{84} + \frac{42x}{84} = x - 9 \Rightarrow x = 84.$$

Tuổi của Đi-ô-phăng : 84.

- 37** Lúc 6 giờ sáng, một xe máy khởi hành từ A để đến B. Sau đó 1 giờ, một ô tô cũng xuất phát từ A đến B với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình của xe máy 20km/h. Cả hai xe đến B đồng thời vào lúc 9 giờ 30 phút sáng cùng ngày. Tính độ dài quãng đường AB và vận tốc trung bình của xe máy.

Giải

Cách thứ nhất :

Gọi x (km/h) là vận tốc xe máy. Vận tốc xe ô tô là x + 20 (km/h).
Điều kiện x dương.

Thời gian xe máy đi là : $9,5 - 6 = 3,5$ giờ

Thời gian ô tô đi : $3,5 - 1 = 2,5$ giờ

Quãng đường AB dài : $3,5x$ hay $2,5(x + 20)$.

Ta có phương trình : $3,5x = 2,5(x + 20) \Leftrightarrow x = 50\text{km/h}$

Vậy vận tốc trung bình của xe máy là 50km/h. Quãng đường AB dài $3,5 \cdot (50) = 175$ km.

Cách thứ hai :

Đặt x là độ dài quãng đường AB thì vận tốc của xe máy là $\frac{x}{3,5}$, vận

tốc xe ô tô là $\frac{x}{2,5}$.

Vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là :

$$\frac{x}{2,5} - \frac{x}{3,5} = 20 \Leftrightarrow x = 175\text{km}.$$

Độ dài quãng đường AB là 175km.

Vận tốc xe máy là $\frac{175}{3,5} = 50\text{km/h}$.

- 38** Điểm kiểm tra Toán của một tổ học tập được cho trong bảng sau :

Điểm số (x)	4	5	7	8	9	
Tần số (f)	1	*	2	3	*	n = 10

Biết điểm trung bình của cả tổ là 6,6. Hãy điền các giá trị thích hợp vào hai ô còn trống (được đánh dấu *).

Giải

Gọi x là tần số của điểm 5, thì x là số tự nhiên. Khi đó tần số điểm 9 là $10 - (1 + x + 2 + 3) = 4 - x$

Theo công thức tính số trung bình (điểm trung bình) ta có :

$$\frac{4 \times 1 + 5 \times x + 7 \times 2 + 8 \times 3 + 9(4 - x)}{10} = 6,6$$

$$\Leftrightarrow 78 - 4x = 66 \quad \Leftrightarrow x = 3$$

Kết quả ta có bảng tần số điểm kiểm tra Toán của tổ học sinh :

Điểm số (x)	4	5	7	8	9	
Tần số (f)	1	3	2	3	1	$n = 10$

- 39** Lan mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 120 nghìn đồng, trong đó đã tính cả 10 nghìn đồng là thuế giá trị gia tăng (viết tắt là thuế VAT). Biết rằng thuế VAT đối với loại hàng thứ nhất là 10%; thuế VAT đối với loại hàng thứ hai là 8%. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì Lan phải trả mỗi loại hàng bao nhiêu tiền ?

Ghi chú : Thuế VAT là thuế mà người mua hàng phải trả, người bán hàng thu và nộp cho Nhà nước. Giả sử thuế VAT đối với mặt hàng A được quy định là 10%. Khi đó nếu giá bán của A là a đồng thì kể cả thuế VAT, người mua mặt hàng này phải trả tổng cộng là $a + 10\% a$ đồng.

Giải

Giá tiền hai món hàng không kể thuế là $120 - 10 = 110$ nghìn.

Gọi x là giá tiền món hàng thứ nhất (không kể thuế), giá tiền món hàng thứ hai (không kể thuế) là $(110 - x)$ nghìn. Điều kiện $x > 0$.

Ta có phương trình :
$$\frac{110}{100}x + \frac{108}{100}(110 - x) = 120 \quad (1)$$

Giải phương trình (1) ta được $x = 60$.

Vậy số tiền phải trả (không kể thuế) cho món hàng thứ nhất là 60 nghìn và món hàng thứ hai là 50 nghìn.

- 40** Năm nay, tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ chỉ còn gấp 2 lần tuổi Phương thôi. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi ?

Giải

Gọi x là tuổi của Phương hiện nay thì tuổi của mẹ Phương hiện nay là $3x$. Điều kiện x nguyên dương.

Sau 13 năm nữa tuổi của Phương và mẹ Phương là $x + 13$ và $3x + 13$.

Theo đề, ta có phương trình : $3x + 13 = 2(x + 13) \Rightarrow x = 13$

Vậy năm nay Phương 13 tuổi.

- 41** Một số tự nhiên có hai chữ số. Chữ số hàng đơn vị gấp hai lần chữ số hàng chục. Nếu thêm chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số ấy thì được một số mới lớn hơn số ban đầu là 370. Tìm số ban đầu.

Giải

Gọi x là chữ số hàng chục, chữ số hàng đơn vị là $2x$. Điều kiện là x nguyên dương và $2x < 9$. Khi ta viết số 1 vào giữa hai chữ số ta làm tăng giá trị chữ số hàng chục của số đã cho lên 10 lần và thêm số 1 là thêm vào số cũ 10 đơn vị.

Như vậy số ban đầu là $10x + 2x$, số mới là $100x + 10 + 2x$ và ta có phương trình : $(100x + 10 + 2x) - (10x + 2x) = 370 \Rightarrow x = 4$

Vậy số đã cho là 48.

- 42** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 2 vào bên trái và một chữ số 2 vào bên phải số đó thì ta được một số lớn gấp 153 lần số ban đầu.

Giải

Gọi số tự nhiên lúc đầu là x . Đầu tiên ta viết thêm số 2 vào bên phải ta đã làm tăng giá trị x lên 10 lần và thêm 2 đơn vị. Khi viết thêm số 2 vào bên trái số trở thành có 4 chữ số ta lại thêm 2000 đơn vị. Như vậy ta có phương trình :

$$2000 + 10x + 2 = 153x \Rightarrow x = 14.$$

Số tự nhiên cho ban đầu là 14.

- 43** Tìm phân số có đồng thời các tính chất sau :

- Tử số của phân số là số tự nhiên có một chữ số;
- Hiệu giữa tử số và mẫu số bằng 4;
- Nếu giữ nguyên tử số và viết thêm vào bên phải của mẫu số một chữ số đúng bằng tử số, thì ta được một phân số bằng phân số $\frac{1}{6}$.

Giải

Nếu gọi x là mẫu số của phân số ban đầu, thì tử số lúc đầu là $x + 4$. Điều kiện $x + 4 \leq 9$, x nguyên dương.

Khi viết thêm chữ số bằng tử số lúc đầu vào bên phải thì giá trị của mẫu số mới sẽ là $10x + (x + 4)$ và ta có phương trình :

$$\frac{x + 4}{10x + x + 4} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 4$$

Phân số cho lúc đầu là $\frac{8}{4}$.

- 44** Điểm kiểm tra Toán của một lớp được cho trong bảng dưới đây :

Điểm số (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	0	0	2	*	10	12	7	6	4	1	N = *

trong đó có hai ô còn trống (thay bằng dấu *). Hãy điền số thích hợp vào ô trống, nếu điểm trung bình của lớp là 6,06.

Giải

Nếu tần số của điểm 4 là x thì tổng số học sinh tham gia kiểm tra là $N = 2 + x + 10 + 12 + 7 + 6 + 4 + 1 = x + 42$ ($x \in \mathbb{N}$)

Điểm trung bình kiểm tra là :

$$\frac{1 \times 0 + 2 \times 0 + 3 \times 2 + 4 \times x + 5 \times 10 + 6 \times 12 + 7 \times 7 + 8 \times 6 + 9 \times 4 + 10 \times 1}{x + 42} = 6,06$$

$$\Leftrightarrow 4x + 271 = 6,06(x + 42) \Leftrightarrow 2,06x = 16,48 \Leftrightarrow x = 8$$

Vậy ta có bảng sau :

Điểm số (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	0	0	2	8	10	12	7	6	4	1	N = 50

- 45** Một xí nghiệp kí hợp đồng dệt một số tấm thảm len trong 20 ngày. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất dệt của xí nghiệp đã tăng 20%. Bởi vậy, chỉ trong 18 ngày, không những xí nghiệp đã hoàn thành số thảm cần dệt mà còn dệt thêm được 24 tấm nữa. Tính số tấm thảm len mà xí nghiệp phải dệt theo hợp đồng.

Giải

Gọi x là số tấm thảm theo kế hoạch phải dệt trong một ngày. Điều kiện x nguyên dương.

Số thảm xí nghiệp kí hợp đồng bán là 20x.

Số tấm thảm dệt trong một ngày trong thực tế (nhờ cải tiến kĩ thuật) là $\frac{120}{100}x = 1,2x$.

Số thảm thực tế đã dệt :

$$18.(1,2x) = 20x + 24 \Leftrightarrow 1,6x = 24 \Leftrightarrow x = 15$$

Vậy số thảm phải dệt theo hợp đồng là 300 tấm.

- 46** Một người lái ô tô dự định đi từ A đến B với vận tốc 48km/h. Nhưng sau khi đi được một giờ với vận tốc ấy, ô tô bị tàu hỏa chắn đường trong 10 phút. Do đó, để kịp đến B đúng thời gian đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 6km/h. Tính quãng đường AB.

Giải

Gọi x (km) là độ dài quãng đường AB ($x > 0$). Thời gian dự định đi là $\frac{x}{48}$ (h). Độ dài quãng đường còn phải đi sau một giờ với vận tốc

48km/h là $(x - 48)$ km.

Vận tốc đi sau khi bị chặn đường là $48 + 6 = 54$ km/h.

Thời gian di chuyển trên quãng đường còn lại là : $\frac{x - 48}{54}$.

Ta có phương trình :

$$\frac{x}{48} = 1 + \frac{x - 48}{54} + \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{48} - \frac{x}{54} = \frac{7}{6} - \frac{8}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x = 120$$

Quãng đường AB dài 120km.

- 47** Bà An gửi vào quỹ tiết kiệm x nghìn đồng với lãi suất mỗi tháng là $a\%$ (a là một số cho trước) và lãi tháng này được tính gộp vào vốn cho tháng sau.

a) Hãy viết biểu thức biểu thị :

- + Số tiền lãi sau tháng thứ nhất;
- + Số tiền (cả gốc lẫn lãi) có được sau tháng thứ nhất;
- + Tổng số tiền lãi có được sau tháng thứ hai.

b) Nếu lãi suất là 1,2% (tức là $a = 1,2$) và sau 2 tháng tổng số tiền lãi là 48,288 nghìn đồng, thì lúc đầu bà An đã gửi bao nhiêu tiền tiết kiệm ?

Giải

a) + Số tiền lãi sau một tháng gửi với lãi suất $a\%$ với tiền gửi x nghìn đồng là ax . Số tiền có được (cả gốc lẫn lãi) sau tháng thứ nhất :

$$x + ax = x(1 + a) \text{ nghìn đồng}$$

+ Số tiền lãi sau hai tháng là :

$$L = ax + ax(1 + a) = x(a^2 + 2a)$$

b) Thay $a = 1,2\%$ và $L = 48,288$ ta được :

$$x \left(\frac{144}{1000000} + \frac{24}{1000} \right) = 48,288 \text{ nghìn đồng}$$

$$\Rightarrow x = 2\,000\,000 \text{ đồng.}$$

- 48** Năm ngoái, tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu. Năm nay, dân số của tỉnh A tăng thêm 1,1%, còn dân số của tỉnh B tăng thêm 1,2%. Tuy vậy số dân của tỉnh A năm nay vẫn nhiều hơn tỉnh B là 807200 người. Tính số dân năm ngoái của mỗi tỉnh.

Giải

Gọi x (triệu) là số dân tỉnh A năm ngoái ($x > 0$) thì số dân tỉnh B năm ngoái là $(4 - x)$ triệu.

Số dân tỉnh A và số dân tỉnh B năm nay lần lượt là

$1\,000\,000x \cdot (1,011)$ người và $1\,000\,000(4 - x) \cdot (1,012)$ người.

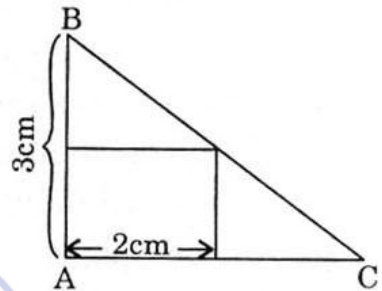
Ta có phương trình :

$$1,011 \times 1\,000\,000x = 1,012 \times 1\,000\,000(4 - x) + 807200$$

$$\Rightarrow x = 2,4 \text{ triệu.}$$

Số dân của hai tỉnh năm ngoái lần lượt là : 2,4 triệu và 1,6 triệu.

- 49** **Đố.** Lan có một miếng bìa hình tam giác ABC vuông tại A, cạnh AB = 3cm. Lan tính rằng nếu cắt từ miếng bìa đó ra một hình chữ nhật có chiều dài 2cm như hình bên thì hình chữ nhật ấy có diện tích bằng một nửa diện tích của miếng bìa ban đầu. Tính độ dài cạnh AC của tam giác ABC.

**Giải**

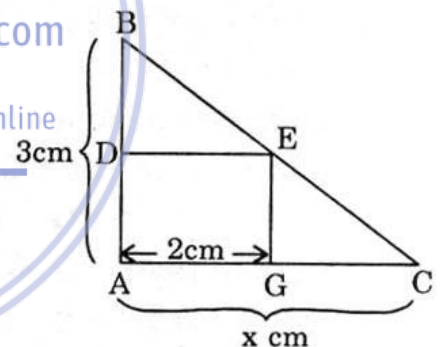
Gọi x (cm) là độ dài cạnh AC thì diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} 3x \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích hình chữ nhật ADEG (hình

bên) là $\frac{3x}{4} \text{ cm}^2$ và chiều rộng hình chữ

nhật là $\frac{3x}{4} : 2 = \frac{3x}{8} \text{ cm.}$



Diện tích hình chữ nhật bằng tổng diện tích hai tam giác BDE và CEG và ta có phương trình :

$$S_{ADEG} = S_{BDE} + S_{CEG}$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(3 - \frac{3x}{8} \right) + \frac{1}{2} (x - 2) \cdot \frac{3x}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{16} - \frac{3x}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 \left(\frac{x}{4} - 1 \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy cạnh AC của tam giác ABC có độ dài 4cm.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Thế nào là hai phương trình tương đương ?
2. Nhân hai vế của một phương trình với cùng một biểu thức chứa ẩn thì có thể không được phương trình tương đương. Em hãy cho một ví dụ.
3. Với điều kiện nào của a thì phương trình $ax + b = 0$ là một phương trình bậc nhất ? (a và b là hai hằng số)
4. Một phương trình bậc nhất một ẩn có mấy nghiệm ? Đánh dấu "x" vào ô vuông ứng với câu trả lời đúng :
 - ☐ Vô nghiệm
 - ☐ Luôn có một nghiệm duy nhất
 - ☐ Có vô số nghiệm
 - ☐ Có thể vô nghiệm, có thể có một nghiệm duy nhất và cũng có thể có vô số nghiệm.
5. Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta phải chú ý điều gì ?
6. Hãy nêu các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình.

Hướng dẫn

1. Hai phương trình có các tập nghiệm bằng nhau (cùng tập nghiệm).
2. Có thể nhận được một phương trình không tương đương với phương trình đã cho.

Ví dụ cho phương trình : $3x - 2 = x + 6$ (1)

Nhân hai vế của phương trình (1) với $(x - 3)$ ta được :

$$(3x - 2)(x - 3) = (x + 6)(x - 3) \quad (2)$$

Phương trình (1) có tập nghiệm là $S_1 = \{4\}$, phương trình (2) có tập nghiệm là $S_2 = \{3; 4\}$.

Hai tập nghiệm S_1 và S_2 khác nhau. Do đó hai phương trình không tương đương.

3. Điều kiện $a \neq 0$.
4. Đánh dấu : ☒ Luôn có một nghiệm duy nhất.
5. Phải đặt ĐKXD : các giá trị của ẩn phải làm cho các mẫu thức có trong các biểu thức ở hai vế của phương trình khác 0.

Giải phương trình nhận được sau khi khử mẫu thức chung và loại các nghiệm của phương trình này vi phạm ĐKXD.

6. Bước 1.

- + Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số.
- + Biểu diễn các đại lượng chưa biết và đã biết theo ẩn số.
- + Lập phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình thu được.

Bước 3. Trả lời. Thử các nghiệm để loại các nghiệm vi phạm điều kiện đặt ra cho ẩn rồi trả lời.

B. BÀI TẬP

50 Giải các phương trình :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad 3 - 4x(25 - 2x) = 8x^2 + x - 300 & \text{b)} \quad \frac{2(1 - 3x)}{5} - \frac{2 + 3x}{10} = 7 - \frac{3(2x + 1)}{4} \\ \text{c)} \quad \frac{5x + 2}{6} - \frac{8x - 1}{3} = \frac{4x + 2}{5} - 5 & \text{d)} \quad \frac{3x + 2}{2} - \frac{3x + 1}{6} = 2x + \frac{5}{3} \end{array}$$

Giải

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 3 - 4x(25 - 2x) = 8x^2 + x - 300 \\ \Leftrightarrow 3 - 100x + 8x^2 = 8x^2 + x - 300 \quad \Leftrightarrow 101x = 303 \\ \Leftrightarrow x = 3 \quad \Rightarrow S = \{3\}. \end{array}$$

b) Quy đồng và khử mẫu thì được :

$$\begin{array}{l} 8(1 - 3x) - 2(2 + 3x) = 140 - 15(2x + 1) \\ \Leftrightarrow -30x + 4 = -30x + 125 \quad \Leftrightarrow 0x = 121 \end{array}$$

Phương trình vô nghiệm. $S = \emptyset$.

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad \frac{5x + 2}{6} - \frac{8x - 1}{3} = \frac{4x + 2}{5} - 5 \\ \Leftrightarrow 5(5x + 2) - 10(8x - 1) = 6(4x + 2) - 150 \\ \Leftrightarrow -55x + 20 = 24x - 138 \quad \Leftrightarrow 79x = 158 \quad \Leftrightarrow x = 2 \end{array}$$

Vậy $S = \{2\}$.

$$\begin{array}{l} \text{d)} \quad \frac{3x + 2}{2} - \frac{3x + 1}{6} = 2x + \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow 3(3x + 2) - (3x + 1) = 12x + 10 \\ \Leftrightarrow 6x + 5 = 12x + 10 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6} \end{array}$$

$$\text{Đáp số: } S = \left\{ -\frac{5}{6} \right\}.$$

51 Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad (2x + 1)(3x - 2) = (5x - 8)(2x + 1) & \text{b)} \quad 4x^2 - 1 = (2x + 1)(3x - 5) \\ \text{c)} \quad (x + 1)^2 = 4(x^2 - 2x + 1) & \text{d)} \quad 2x^3 + 5x^2 - 3x = 0. \end{array}$$

Giải

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad (2x + 1)(3x - 2) = (5x - 8)(2x + 1) \\ \Leftrightarrow (2x + 1)(3x - 2) - (2x + 1)(5x - 8) = 0 \\ \Leftrightarrow (2x + 1)[(3x - 2) - (5x - 8)] = 0 \\ \Leftrightarrow (2x + 1)(6 - 2x) = 0 \quad \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \text{ hoặc } 6 - 2x = 0 \end{array}$$

$$\bullet \quad 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad 6 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

$$\text{Tập nghiệm } S = \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 4x^2 - 1 &= (2x + 1)(3x - 5) \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 1 = 6x^2 - 7x - 5 \\ \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 7x - 4 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 8x + x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2x(x - 4) + (x - 4) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 4)(2x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad x - 4 &= 0 \quad \text{hoặc} \quad 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Tập nghiệm } S = \left\{-\frac{1}{2}; 4\right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad (x + 1)^2 &= 4(x^2 - 2x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 - [2(x - 1)]^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad [(x + 1) + 2(x - 1)][(x + 1) - 2(x - 1)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (3x - 1)(3 - x) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 1 = 0 \quad \text{hoặc} \quad (3 - x) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Tập nghiệm } S = \left\{\frac{1}{3}; 3\right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad 2x^3 + 5x^2 - 3x &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 + 6x^2 - x^2 - 3x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2x^2(x + 3) - x(x + 3) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x + 3)(2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{hoặc} \quad x + 3 &= 0 \quad \text{hoặc} \quad 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Tập nghiệm } S = \left\{-3; 0; \frac{1}{2}\right\}.$$

52 Giải các phương trình :

$$\text{a)} \quad \frac{1}{2x - 3} - \frac{3}{x(2x - 3)} = \frac{5}{x}$$

$$\text{b)} \quad \frac{x + 2}{x - 2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x - 2)}$$

$$\text{c)} \quad \frac{x + 1}{x - 2} + \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{2(x^2 + 2)}{x^2 - 4}$$

$$\text{d)} \quad (2x + 3) \left(\frac{3x + 8}{2 - 7x} + 1 \right) = (x - 5) \left(\frac{3x + 8}{2 - 7x} + 1 \right).$$

Giải

$$\text{a)} \quad \text{ĐKXĐ : } 2x - 3 \neq 0, x \neq 0 \quad \text{hay} \quad x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}$$

Quy đồng mẫu thức và khử mẫu thức chung ta nhận được :

$$x - 3 = 5(2x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3} \quad (\text{thỏa mãn ĐKXĐ})$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình đã cho : } S = \left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

b) ĐKXĐ : $x \neq 0, x \neq 2$

Quy đồng và khử mẫu thức chung :

$$x(x+2) - (x-2) = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}, x = -1 \text{ (nhận)}$$

Kết luận : Tập nghiệm $S = \{-1\}$.

c) ĐKXĐ : $x \neq \pm 2$

Quy đồng và khử mẫu thức chung :

$$(x+2)(x+1) + (x-1)(x-2) = 2(x^2+2) \Leftrightarrow 2x^2 + 4 = 2(x^2+2)$$

Phương trình cuối cùng được nghiệm đúng với mọi giá trị thực x .

Loại các giá trị vi phạm ĐKXĐ ta được tập nghiệm

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 2\}$$

d) ĐKXĐ : $x \neq \frac{2}{7}$

Quy đồng và khử mẫu thức chung rồi chuyển vế ta được :

$$(2x+3)(10-4x) - (x-5)(10-4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (10-4x)[(2x+3) - (x-5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (10-4x)(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (nhận)}, x = -8 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \left\{-8; \frac{5}{2}\right\}$$

53 Giải phương trình: $\frac{x+1}{9} + \frac{x+2}{8} = \frac{x+3}{7} + \frac{x+4}{6}$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{9} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{8} + 1\right) = \left(\frac{x+3}{7} + 1\right) + \left(\frac{x+4}{6} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+10}{9} + \frac{x+10}{8} - \frac{x+10}{7} - \frac{x+10}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+10)\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+10 = 0 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{7} - \frac{1}{6} \neq 0\right) \Leftrightarrow x = -10.$$

54 Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B mất 4 giờ và ngược dòng từ bến B về bến A mất 5 giờ. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B, biết rằng vận tốc của dòng nước là 2km/h.

Giải

Gọi khoảng cách hai bến A và B là x (km) ($x > 0$).

Vận tốc xuôi dòng của ca nô là $\frac{x}{4}$ (km/h), vận tốc ngược dòng của ca

nô là $\frac{x}{5}$ (km/h).

Hiệu vận tốc xuôi dòng và vận tốc ngược dòng bằng hai lần vận tốc dòng nước. Do đó ta có : $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 4 \Leftrightarrow x' = 80\text{km}$

Vậy khoảng cách hai bến A, B là 80km.

- 55** Biết rằng 200g một dung dịch chứa 50g muối. Hỏi phải pha thêm bao nhiêu gam nước vào dung dịch đó để được một dung dịch chứa 20% muối ?

Giải

Lượng nước có trong dung dịch (trước khi pha thêm) là $200 - 50 = 150\text{g}$
Gọi x (gam) là lượng nước cần pha thêm thì lượng nước trong dung dịch mới là $150 + x$ (gam).

$$\text{Nồng độ dung dịch là : } \frac{50}{150 + x} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow 20(150 + x) = 5000$$

$$\Leftrightarrow x = 100$$

Vậy lượng nước cần pha thêm là 100g.

- 56** Để khuyến khích tiết kiệm điện, giá điện sinh hoạt được tính theo kiểu lũy tiến, nghĩa là nếu người sử dụng càng dùng nhiều điện thì giá mỗi số điện càng tăng lên theo các mức sau :

Mức thứ nhất : Tính cho 100 số điện đầu tiên;

Mức thứ hai : Tính cho số điện thứ 101 đến 150, mỗi số đắt hơn 150 đồng so với mức thứ nhất;

Mức thứ ba : Tính cho số điện thứ 151 đến 200, mỗi số đắt hơn 200 đồng so với mức thứ hai;

v.v...

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng (thuế VAT).

Tháng vừa qua, nhà Cường dùng hết 165 số điện và phải trả 95700 đồng. Hỏi mỗi số điện ở mức thứ nhất giá bao nhiêu ?

Giải

Tiền điện nhà Cường phải trả không kể thuế VAT là :

$$95700 : \frac{110}{100} = 87000 \text{ đồng}$$

Gọi x (đồng) là giá tiền (không kể thuế) một số điện ở mức thứ nhất thì giá tiền một số điện ở mức thứ hai, mức thứ ba theo thứ tự là $x + 150$, $x + 350$. Như vậy số tiền điện (không kể thuế) nhà Cường phải trả là :

$$100x + 50(x + 150) + 15(x + 350) = 87000$$

$$\Leftrightarrow 165x + 12750 = 87000 \Leftrightarrow x = 450.$$

Vậy giá tiền (không kể thuế) mỗi số điện ở mức thứ nhất là 450 đồng.

Chương IV

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN*§1. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng***TÓM TẮT KIẾN THỨC****1. Bất đẳng thức**

Các hệ thức dạng $a < b$, hay $a > b$, hay $a \leq b$, hay $a \geq b$ được gọi là các bất đẳng thức. Biểu thức đứng ở bên trái dấu $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ gọi là **vế trái**, biểu thức ở vế phải gọi là **vế phải** của bất đẳng thức.

Các bất đẳng thức $a < b$ và $c < d$ (hay $a > b$ và $c > d$) gọi là **cùng chiều**. Các bất đẳng thức $a < b$ và $c > d$ (hay $a > b$ và $c < d$) gọi là **trái chiều**.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với 3 số a, b, c tùy ý ta có :

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a + c < b + c; & a \leq b &\Rightarrow a + c \leq b + c \\ a > b &\Rightarrow a + c > b + c; & a \geq b &\Rightarrow a + c \geq b + c. \end{aligned}$$

BÀI TẬP

1 Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?

a) $(-2) + 3 \geq 2$

b) $-6 \leq 2 \cdot (-3)$

c) $4 + (-8) < 15 + (-8)$

c) $(-5) + 7 > (-6) + 7$

Giải

a) Sai vì $(-2) + 3 = 1$, $1 < 2$

b) Đúng vì $2 \cdot (-3) = -6$ mà $-6 \leq -6$ đúng

c) Đúng vì $4 < 15 \Rightarrow 4 + (-8) < 15 + (-8)$

d) Đúng vì $-5 > -6$, do đó $(-5) + 7 > (-6) + 7$.

2 Cho $a < b$, hãy so sánh :

a) $a + 1$ và $b + 1$

b) $a - 2$ và $b - 2$.

Giải

a) Theo tính chất của thứ tự và phép cộng :

$$a < b \Rightarrow a + 1 < b + 1$$

b) Tương tự câu a)

$$a < b \Rightarrow a + (-2) < b + (-2), \text{ nghĩa là } a - 2 < b - 2.$$

3 So sánh a và b nếu :

a) $a - 5 \geq b - 5$

b) $15 + a \leq 15 + b$.

Giải

a) $a - 5 \geq b - 5 \Rightarrow a - 5 + 5 \geq b - 5 + 5$, nghĩa là $a \geq b$.

b) $15 + a \leq 15 + b \Rightarrow 15 + a + (-15) \leq 15 + b + (-15)$,

rút gọn thì có : $a \leq b$.

4 **Đố.** Một biển báo giao thông với nền trắng, số 20 màu đen, viền đỏ (như hình bên) cho biết vận tốc tối đa mà các phương tiện giao thông được đi trên quãng đường có biển quy định là 20km/h. Nếu một ô tô đi trên đường đó có vận tốc là a (km/h) thì a phải thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau ?



Tốc độ tối đa cho phép

$a > 20$; $a < 20$; $a \leq 20$; $a \geq 20$.

Giải

Tốc độ a không vượt quá 20, nghĩa là a cần thỏa mãn bất đẳng thức $a \leq 20$.

§2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương

Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số tùy ý a, b, c mà $c > 0$ thì :

$$a < b \Rightarrow ac < bc ; \quad a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$$

$$a > b \Rightarrow ac > bc ; \quad a \geq b \Rightarrow ac \geq bc.$$

Ghi chú : Chia hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số c khác 0 nghĩa là nhân hai vế của nó với số nghịch đảo của c.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số âm

Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được một bất đẳng thức mới trái chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c tùy ý mà $c < 0$ thì :

$$a < b \Rightarrow ac > bc ; \quad a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$$

$$a > b \Rightarrow ac < bc ; \quad a \geq b \Rightarrow ac \leq bc.$$

3. Tính chất bắc cầu của thứ tự

Với ba số a, b, c ta có :

$$a < b \text{ và } b < c \Rightarrow a < c$$

$$a \leq b \text{ và } b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$a > b \text{ và } b > c \Rightarrow a > c$$

$$a \geq b \text{ và } b \geq c \Rightarrow a \geq c.$$

BÀI TẬP

5 Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?

a) $(-6).5 < (-5).5$

b) $(-6).(-3) < (-5).(-3)$

c) $(-2003).(-2005) \leq (-2005).2004$

d) $-3x^2 \leq 0.$

Giải

a) Đúng, vì $-6 < -5$, nhân hai vế với cùng số $5 > 0$ ta có $(-6).5 < (-5).5$

b) Sai, vì $-6 < -5$, nhân hai vế với cùng số $(-3) < 0$, bất đẳng thức phải đổi chiều nghĩa là : $(-6)(-3) > (-5)(-3)$

c) Sai, lí do như câu b)

d) Đúng, vì $x^2 \geq 0$, $-3 < 0$ nên $-3x^2 \leq -3.0 = 0$ nghĩa là $-3x^2 \leq 0.$

6 Cho $a < b$, hãy so sánh : $2a$ và $2b$; $2a$ và $a + b$; $-a$ và $-b$.

Giải

a) Do $2 > 0$ ta có $a < b \Rightarrow 2a < 2b.$

b) Theo sự liên hệ của phép cộng ta có :

$$a < b \Rightarrow a + a < a + b, \text{ tức là } 2a < a + b$$

c) Do $-1 < 0$ nên $a < b \Rightarrow -1.a > -1.b$, tức là $-a > -b.$

7 Số a là số âm hay dương nếu : $12a < 15a$; $4a < 3a$; $-3a > -5a$?

Giải

a) Ta có : $12 < 15$ mà $12a < 15a$ cùng chiều với $12 < 15$. Vậy $a > 0.$

b) Bất đẳng thức $4a < 3a$ ngược chiều với $4 > 3$. Vậy $a < 0.$

c) Do $-3a > -5a$ cùng chiều với $-3 > -5$. Vậy $a > 0.$

8 Cho $a < b$, chứng tỏ :

a) $2a - 3 < 2b - 3$

b) $2a - 3 < 2b + 5.$

Giải

a) Theo quy tắc nhân : $a < b \Rightarrow 2a < 2b$

Theo quy tắc cộng : $2a - 3 < 2b - 3.$

b) Ta có : $a < b \Rightarrow 2a < 2b \Rightarrow 2a - 3 < 2b - 3$ (1)

Ta lại có : $-3 < 5 \Rightarrow 2b + (-3) < 2b + 5$ (2)

Theo tính chất bắc cầu của thứ tự, từ (1) và (2) ta có :

$$2a - 3 < 2b + 5.$$

9 Cho tam giác ABC. Các khẳng định sau đúng hay sai ?

- a) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$ b) $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$
 c) $\hat{B} + \hat{C} \leq 180^\circ$ d) $\hat{A} + \hat{B} \geq 180^\circ$.

Giải

- a) Vì $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ nên khẳng định $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \leq 180^\circ$ đúng, do đó khẳng định $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$ là sai.
 b) Do số đo của một góc của tam giác là một số dương nên $\hat{C} > 0$.
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C} < 180^\circ$.
 Khẳng định $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$ là đúng.
 c) Do $\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$ nên khẳng định $\hat{B} + \hat{C} \leq 180^\circ$ đúng.
 d) Do khẳng định $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$ đúng, nên khẳng định ngược $\hat{A} + \hat{B} \geq 180^\circ$ là sai.

10 a) So sánh $(-2).3$ và $-4,5$.

- b) Từ kết quả câu a) hãy suy ra các bất đẳng thức sau :
 $(-2).30 < -45$; $(-2).3 + 4,5 < 0$.

Giải

- a) Do $-4,5 = (-1,5).3$ mà $-2 < -1,5$ nên $(-2).3 < (-1,5).3$, nghĩa là có $(-2).3 < -4,5$.
 b) Do $-2.3 < -4,5$ nên $-2.3.10 < -4,5.10$ (vì $10 > 0$)
 Bất đẳng thức cuối có thể viết lại là $(-2).30 < -45$
 Từ bất đẳng thức $(-2).3 < -4,5$ ta có $(-2).3 + 4,5 < -4,5 + 4,5$
 nghĩa là $(-2).3 + 4,5 < 0$.

11 Cho $a < b$, chứng minh :

- a) $3a + 1 < 3b + 1$ b) $-2a - 5 > -2b - 5$.

Giải

- a) $a < b$, theo tính chất của thứ tự liên hệ với phép nhân ta có :
 $3a < 3b$.

Theo tính chất của thứ tự liên hệ với phép cộng ta có tiếp :

$$3a + 1 < 3b + 1$$

- b) Vì $-2 < 0$ nên từ $a < b$ suy ra $-2a > -2b$. Theo tính chất của thứ tự liên hệ với phép cộng ta phải có :

$$-2a - 5 > -2b - 5.$$

12 Chứng minh :

- a) $4.(-2) + 14 < 4.(-1) + 14$ b) $(-3).2 + 5 < (-3).(-5) + 5$.

Giải

a) Giải tương tự bài 11 :

$$-2 < -1 \Rightarrow 4.(-2) < 4.(-1) \Rightarrow 4.(-2) + 14 < 4.(-1) + 14$$

b) Vì $-3 < 0$, từ $2 > -5$ suy ra $(-3).2 < (-3).(-5)$

$$\text{Suy ra } (-3).2 + 5 < (-3).(-5) + 5.$$

13 So sánh a và b nếu :

a) $a + 5 < b + 5$

b) $-3a > -3b$

c) $5a - 6 \geq 5b - 6$

d) $-2a + 3 \leq -2b + 3.$

Giải

a) $a + 5 < b + 5 \Rightarrow a + 5 + (-5) < b + 5 + (-5)$, do đó $a < b$.

b) Ta có $-\frac{1}{3} < 0$, nên từ $-3a > -3b$ suy ra

$$\left(-\frac{1}{3}\right).(-3a) < \left(-\frac{1}{3}\right).(-3b), \text{ do đó } a < b.$$

c) $5a - 6 \geq 5b - 6 \Rightarrow 5a - 6 + 6 \geq 5b - 6 + 6$, tức là ta có

$$5a \geq 5b \Rightarrow \frac{1}{5}.5a \geq \frac{1}{5}.5b, \text{ nghĩa là } a \geq b.$$

d) $-2a + 3 \leq -2b + 3 \Rightarrow -2a \leq -2b \Rightarrow a \geq b.$

14 Cho $a < b$, hãy so sánh :

$$2a + 1 \text{ với } 2b + 1; \quad 2a + 1 \text{ với } 2b + 3.$$

Giải

a) $a < b \Rightarrow 2a < 2b \Rightarrow 2a + 1 < 2b + 1$ (1)

b) $1 < 3 \Rightarrow 2b + 1 < 2b + 3$ (2)

Theo tính chất bắc cầu, từ các bất đẳng thức (1) và (2) ta có :

$$2a + 1 < 2b + 3.$$

*§3. Bất phương trình một ẩn***TÓM TẮT KIẾN THỨC****1. Khái niệm bất phương trình**

Bất phương trình một ẩn có dạng : $A(x) < B(x)$ hay $A(x) \leq B(x)$ hay $A(x) > B(x)$ hay $A(x) \geq B(x)$, trong đó $A(x)$, $B(x)$ là các biểu thức của cùng ẩn số x . Trong các bất phương trình trên, ta gọi $A(x)$ là **vế trái**, còn $B(x)$ là **vế phải** của bất phương trình.

Ví dụ : $x^2 + 2x < 3x + 6.$

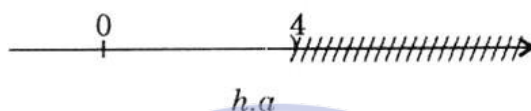
2. Tập nghiệm của bất phương trình

Xét bất phương trình $x^2 - 1 < x + 1$.

Cho ẩn số giá trị $x = 1$, biểu thức vế trái có giá trị 0, biểu thức vế phải có giá trị 2, mà $0 < 2$ nên ta bảo giá trị $x = 1$ là **một nghiệm** của bất phương trình. Nếu thay $x = 3$, vế trái có giá trị 8, vế phải có giá trị 4. Vì $8 > 4$ nên ta nói giá trị $x = 3$ không thỏa mãn bất phương trình hay là $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

Tập hợp tất cả các giá trị của ẩn số nghiệm đúng bất phương trình gọi là **tập nghiệm** của bất phương trình.

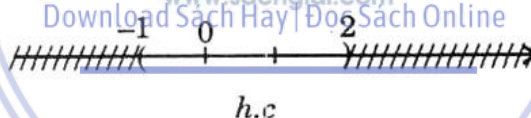
Tập nghiệm của bất phương trình $x < 4$ là $\{x / x < 4\}$. Biểu diễn trên trục số là hình h.a.



Tập nghiệm của bất phương trình $x \geq 3$ là $\{x / x \geq 3\}$. Biểu diễn trên trục số là hình h.b.



Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 1 < x + 1$ là $\{x / -1 < x < 2\}$. Biểu diễn trên trục số là hình h.c.



3. Bất phương trình tương đương

Bất phương trình $A(x) < B(x)$ (1) **tương đương** với bất phương trình $C(x) < D(x)$ (2)

Kí hiệu $A(x) < B(x)$ (1) $\Leftrightarrow C(x) < D(x)$ (2)

nếu (1) và (2) có cùng tập nghiệm.

BÀI TẬP

- 15** Kiểm tra xem giá trị $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau :

a) $2x + 3 < 9$; b) $-4x > 2x + 5$; c) $5 - x > 3x - 12$.

Giải

a) $x = 3$ không là nghiệm của bất phương trình $2x + 3 < 9$ vì

$$2.3 + 3 = 9.$$

b) $x = 3$ không là nghiệm của bất phương trình $-4x > 2x + 5$ vì

$$-4.(3) < 2.(3) + 5.$$

c) Ta có : $5 - 3 = 2$, $3.3 - 12 = -3$ mà $2 > -3$ nên $5 - 3 > 3.3 - 12$.

Vậy $x = 3$ là một nghiệm của bất phương trình $5 - x > 3x - 12$.

16 Viết và biểu diễn tập nghiệm trên trục số của mỗi bất phương trình sau :

a) $x < 4$

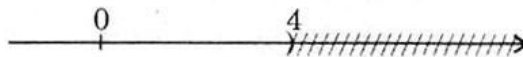
b) $x \leq -2$

c) $x > -3$

d) $x \geq 1$.

Giải

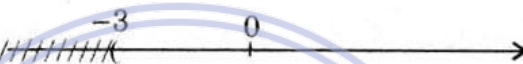
a) $\{x / x < 4\}$



b) $\{x / x \leq -2\}$



c) $\{x / x > -3\}$



d) $\{x / x \geq 1\}$



17 Hình vẽ sau đây biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào ? (Chỉ nêu một bất phương trình).



Giải

a) $x \leq 6$

b) $x > 2$

c) $x \geq 5$

d) $x < -1$.

18 Hãy lập bất phương trình cho bài toán sau :

Quãng đường từ A đến B dài 50km. Một ô tô đi từ A đến B, khởi hành lúc 7 giờ. Hỏi ô tô phải đi với vận tốc là bao nhiêu km/h để đến B trước 9 giờ cùng ngày ?

Giải

Gọi x (km/h) là vận tốc trung bình ô tô cần phải đi. Điều kiện $x > 0$ và $2x > 50 \Rightarrow x > 25$.

§4. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Định nghĩa

Mỗi bất phương trình có dạng : $ax + b < 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b > 0$; $ax + b \geq 0$ với a và b là các số đã cho, $a \neq 0$ được gọi là **bất phương trình bậc nhất một ẩn**.

2. Hai quy tắc biến đổi bất phương trình

a) Quy tắc chuyển vế :

Ta có thể chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia cùng với việc đổi dấu của hạng tử đó.

$$\text{Ví dụ : } 2x < x + 3 \Leftrightarrow 2x - x < 3.$$

b) Quy tắc nhân :

Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0 ta phải :

- Giữ nguyên chiều của bất phương trình nếu số đó dương.
- Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ : } x - 1 < 3 &\Leftrightarrow 4(x - 1) < 4.3 \\ 3 - x < 1 &\Leftrightarrow -2(3 - x) > -2.1 \end{aligned}$$

Thực hiện hai quy tắc biến đổi bất phương trình trên đây trên một bất phương trình ta nhận được một bất phương trình mới tương đương với bất phương trình đã cho.

BÀI TẬP

19 Giải các bất phương trình (theo quy tắc chuyển vế) :

a) $x - 5 > 3$

b) $x - 2x < -2x + 4$

c) $-3x > -4x + 2$

d) $8x + 2 < 7x - 1.$

Giải

a) Chuyển vế : $x - 5 > 3 \Leftrightarrow x > 5 + 3$

Tập nghiệm : $\{x / x > 8\}.$

b) $x - 2x < -2x + 4 \Leftrightarrow x - 2x + 2x < 4 \Leftrightarrow x < 4$

Tập nghiệm : $\{x / x < 4\}.$

c) $-3x > -4x + 2 \Leftrightarrow 4x - 3x > 2 \Leftrightarrow x > 2$

Tập nghiệm : $\{x / x > 2\}.$

d) $8x + 2 < 7x - 1 \Leftrightarrow 8x + 2 - 7x < -1$

$$\Leftrightarrow 8x - 7x < -1 - 2 \Leftrightarrow x < -3$$

Tập nghiệm : $\{x / x < -3\}.$

20 Giải các bất phương trình (theo quy tắc nhân) :

a) $0,3x > 0,6$

b) $-4x < 12$

c) $-x > 4$

d) $1,5x > -9$.

Giải

a) Chia hai vế cho 0,3 (nghĩa là nhân hai vế với số nghịch đảo của 0,3) ta có :

$$x > \frac{0,6}{0,3} \quad \text{hay} \quad x > 2. \quad \text{Tập nghiệm : } \{x / x > 2\}.$$

b) Chia hai vế cho -4 ta có : $x > -3$. Đáp số : $\{x / x > -3\}$.

c) Nhân hai vế với -1 ta có : $x < -4$. Đáp số : $\{x / x < -4\}$.

d) Chia hai vế cho 1,5 thì được $x > -6$.

Ghi chú : Để cho gọn, từ nay tập $\{x / x > -6\}$ chỉ cần viết là $x > -6$, $\{x / x \leq a\}$ chỉ cần viết là $x \leq a$...

21 Giải thích sự tương đương sau :

a) $x - 3 > 1 \Leftrightarrow x + 3 > 7$

b) $-x < 2 \Leftrightarrow 3x > -6$.

Giải

a) Cộng vào hai vế của bất phương trình $x - 3 > 1$ cùng số 6 ta được $x + 3 > 7$ tương đương.

b) Nhân cả hai vế của bất phương trình $-x < 2$ với cùng số -3 và đổi chiều dấu bất đẳng thức. Do đó ta có :

$$-x < 2 \Leftrightarrow 3x > -6.$$

22 Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $1,2x < -6$

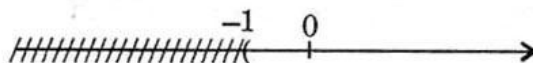
b) $3x + 4 > 2x + 3$.

Giải

$$\text{a) } 1,2x < -6 \Leftrightarrow x < \frac{-6}{1,2} \Leftrightarrow x < -5$$



$$\text{b) } 3x + 4 > 2x + 3 \Leftrightarrow 3x - 2x > 3 - 4 \Leftrightarrow x > -1$$



23 Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $2x - 3 > 0$

b) $3x + 4 < 0$

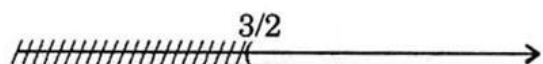
c) $4 - 3x \leq 0$

d) $5 - 2x \geq 0$.

Giải

$$\text{a) } 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 3$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$



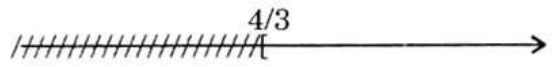
$$\text{b) } 3x + 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x < -4$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-4}{3}$$



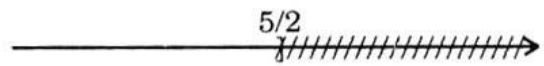
$$\text{c) } 4 - 3x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \leq -4$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$$



$$\text{d) } 5 - 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \geq -5$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$$



24 Giải các bất phương trình :

$$\text{a) } 2x - 1 > 5$$

$$\text{b) } 3x - 2 < 4$$

$$\text{c) } 2 - 5x \leq 17$$

$$\text{d) } 3 - 4x \geq 19.$$

Giải

$$\text{a) } 2x - 1 > 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 5 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{6}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > 3$$

$$\text{b) } 3x - 2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x < 4 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{6}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

$$\text{c) } 2 - 5x \leq 17 \quad \Leftrightarrow \quad -5x \leq 17 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{15}{-5} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3$$

$$\text{d) Đáp số : } x \leq -4.$$

25 Giải các bất phương trình :

$$\text{a) } \frac{2}{3}x > -6$$

$$\text{b) } -\frac{5}{6}x < 20$$

$$\text{c) } 3 - \frac{1}{4}x > 2$$

$$\text{c) } 5 - \frac{1}{3}x > 2.$$

Giải

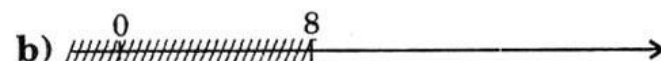
$$\text{a) } \frac{2}{3}x > -6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x > -6 \cdot \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > -9$$

$$\text{b) } -\frac{5}{6}x < 20 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{6}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}x\right) > \left(-\frac{6}{5}\right) \cdot 20 \quad \Leftrightarrow \quad x > -24$$

$$\text{c) Đáp số : } x < 4$$

$$\text{d) Đáp số : } x < 9.$$

26 Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào ? (Kể ba bất phương trình có cùng tập nghiệm).



Giải

a) Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình :

$$x \leq 12 \quad \text{hoặc} \quad 2x + 1 \leq 25 \quad \text{hoặc} \quad -3x + 6 \geq -30.$$

b) Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình :

$$x \geq 8 \quad \text{hoặc} \quad -2x + 3 \leq -13 \quad \text{hoặc} \quad 3x - 1 \geq 23.$$

27 **Đố.** Kiểm tra xem giá trị $x = -2$ có là nghiệm của bất phương trình sau không :

a) $x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5 < 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 6$

b) $(-0,001)x > 0,003.$

Giải

a) Giá trị của vế trái tại $x = -2$ là :

$$-2 + 2(-2)^2 - 3(-2)^3 + 4(-2)^4 - 5 = 89$$

Giá trị của vế phải tại $x = -2$ là :

$$2(-2)^2 - 3(-2)^3 + 4(-2)^4 - 6 = 90$$

Tại $x = -2$, giá trị của vế trái nhỏ hơn giá trị của biểu thức ở vế phải. Vậy -2 là nghiệm của bất phương trình.

Ghi chú : Trên đây ta áp dụng trực tiếp định nghĩa nghiệm của bất phương trình để giải bài toán. Tuy nhiên, để đơn giản, trước khi thay giá trị $x = -2$ vào mỗi vế ta sử dụng tính chất của thứ tự với phép cộng để tìm một bất phương trình tương đương :

$$x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5 < 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 6 \Leftrightarrow x - 5 < -6$$

Lúc đó thay $x = -2$ vào ta có $(-2) - 5 = -7 < -6.$

Vậy -2 là nghiệm của bất phương trình cho ban đầu.

b) Ta có : $(-0,001).(-2) = 0,002 < 0,003.$ Vậy $x = -2$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

28 Cho bất phương trình $x^2 > 0.$

a) Chứng tỏ $x = 2, x = -3$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Có phải mọi giá trị của ẩn x đều là nghiệm của bất phương trình đã cho hay không ?

Giải

a) Ta có : $(2)^2 = 4 > 0, (-3)^2 = 9 > 0.$

Vậy $x = 2, x = -3$ là những nghiệm của bất phương trình $x^2 > 0.$

b) Với $x = 0$ ta có $x^2 = 0.$ Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình. Như vậy không phải mọi giá trị của x đều là nghiệm của bất phương trình đã cho.

29 Tìm x sao cho :

a) Giá trị của biểu thức $2x - 5$ không âm;

b) Giá trị của biểu thức $-3x$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $-7x + 5.$

Giải

a) Ta có : $2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.

Vậy các giá trị của x để $2x - 5$ không âm là $\{x / x \geq \frac{5}{2}\}$.

b) Giải bất phương trình :

$$-3x \leq -7x + 5 \Leftrightarrow 7x - 3x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$$

Đáp số : $\{x / x \leq \frac{5}{4}\}$.

- 30** Một người có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá : loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng ?

Giải

Gọi x là số tờ giấy bạc mệnh giá 5000 đồng (x nguyên dương), số tờ giấy bạc mệnh giá 2000 đồng là $15 - x$. Trị giá của cả hai loại tiền là :

$$5000x + 2000(15 - x) \leq 70000$$

$$\Leftrightarrow 3000x + 30000 \leq 70000 \Leftrightarrow x \leq \frac{40}{3}.$$

Do điều kiện x nguyên dương nên ta lấy $x = 13$. Số tờ giấy bạc 5000 đồng của người đó không quá 13 tờ.

- 31** Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $\frac{15 - 6x}{3} > 5$

b) $\frac{8 - 11x}{4} < 13$

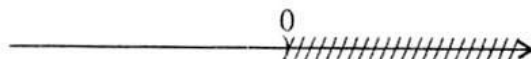
c) $\frac{1}{4}(x - 1) < \frac{x - 4}{6}$

d) $\frac{2 - x}{3} < \frac{3 - 2x}{5}$.

Giải

a) $\frac{15 - 6x}{3} > 5 \Leftrightarrow 15 - 6x > 5.3 \Leftrightarrow -6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

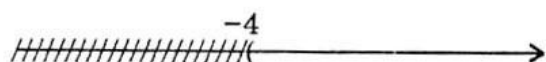
Tập nghiệm $\{x / x < 0\}$ được biểu diễn ở hình sau :



b) Nhân cả hai vế với 4 ta được :

$$8 - 11x < 52 \Leftrightarrow -11x < 44 \Leftrightarrow x > \frac{44}{-11} = -4$$

Tập nghiệm $\{x / x > -4\}$.



c) Nhân cả hai vế với 24 ta được :

$$6(x - 1) < 4(x - 4) \Leftrightarrow 6x - 4x < 6 - 16 \Leftrightarrow x < -5$$

Bạn tự vẽ.

d) Đáp số : $\{x / x < -1\}$.

32 Giải các bất phương trình :

a) $8x + 3(x + 1) > 5x - (2x - 6)$ b) $2x(6x - 1) > (3x - 2)(4x + 3)$.

Giải

a) $\Leftrightarrow 11x + 3 > 5x - 2x + 6 \Leftrightarrow 8x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{8}$

b) $\Leftrightarrow 12x^2 - 2x > 12x^2 + x - 6 \Leftrightarrow -2x > x - 6 \Leftrightarrow x < 2$.

33 **Đố.** Trong một kì thi, bạn Chiến phải thi bốn môn Văn, Toán, Tiếng Anh và Hóa. Chiến đã thi ba môn và được kết quả như bảng sau :

Môn	Văn	Tiếng Anh	Hóa
Điểm	8	7	10

Kì thi quy định muốn đạt loại giỏi phải có điểm trung bình các môn thi là 8 trở lên và không có môn nào bị điểm dưới 6. Biết môn Văn và Toán được tính hệ số 2. Hãy cho biết, để đạt loại giỏi bạn Chiến phải có điểm thi môn Toán ít nhất là bao nhiêu ?

Giải

Gọi x là điểm thi môn Toán (điều kiện : $x \geq 6$). Điểm trung bình (có hệ số) của các môn để đạt yêu cầu xếp loại giỏi.

$$\frac{8 \times 2 + 7 \times 1 + 10 \times 1 + x \times 2}{6} \geq 8 \Leftrightarrow 33 + 2x \geq 48 \Leftrightarrow x \geq \frac{15}{2}$$

Vậy muốn đạt loại giỏi, điểm thi môn Toán của Chiến phải không dưới 7,5.

34 **Đố.** Tìm sai lầm trong các "lời giải" sau :

a) Giải bất phương trình $-2x > 23$. Ta có :

$$-2x > 23 \Leftrightarrow x > 23 + 2 \Leftrightarrow x > 25$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 25$.

b) Giải bất phương trình $-\frac{3}{7}x > 12$. Ta có :

$$-\frac{3}{7}x > 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}x\right) > \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot 12 \Leftrightarrow x > -28$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -28$.

Giải

a) Viết $-2x > 23 \Leftrightarrow x > 23 + 2$ là sai, vì để xuất hiện x từ bất phương trình $-2x > 23$ ta cần áp dụng quy tắc nhân :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) < \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 23 \quad \text{Vậy } -2x > 23 \Leftrightarrow x < -\frac{23}{2}.$$

b) Viết $-\frac{3}{7}x > 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}x\right) > \left(-\frac{7}{3}\right).12$ là sai, vì nhân hai vế với số âm $-\frac{7}{3}$ phải đổi chiều dấu bất đẳng thức.

Cần giải lại là :

$$-\frac{3}{7}x > 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}x\right) < \left(-\frac{7}{3}\right).12 \Leftrightarrow x < 28.$$

§5. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Nhắc lại định nghĩa giá trị tuyệt đối

Giá trị tuyệt đối của số a , kí hiệu là $|a|$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

2. Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Giải một phương trình có biểu thức chứa ẩn số trong dấu giá trị tuyệt đối dẫn đến việc giải các phương trình có điều kiện.

Ví dụ : Giải phương trình $|x + 1| = 2x - 1$, tương đương giải hai phương trình sau :

$$x + 1 = 2x - 1 \quad \text{với điều kiện } x + 1 \geq 0 \quad \text{hay } x \geq -1$$

$$-(x + 1) = 2x - 1 \quad \text{với điều kiện } x + 1 < 0 \quad \text{hay } x < -1$$

Phương trình : $x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2$, thỏa mãn điều kiện $x \geq -1$.

Vậy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình : $-(x + 1) = 2x - 1 \Leftrightarrow -3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ không thỏa mãn điều kiện $x < -1$. Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Kết luận : Tập nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

BÀI TẬP

35 Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức :

a) $A = 3x + 2 + |5x|$ khi $x \geq 0$ và khi $x < 0$

b) $B = |-4x| - 2x + 12$ khi $x \leq 0$ và khi $x > 0$

c) $C = |x - 4| - 2x + 12$ khi $x > 5$

d) $D = 3x + 2 + |x + 5|$.

b) + Với $x \geq -4$ ta có : $x + 4 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = 9$ (nhận)
 + Với $x < -4$ ta có : $-x - 4 = 2x - 5 \Leftrightarrow 3x = 1$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (loại, vì $\frac{1}{3} > -4$)

Tập nghiệm phương trình đã cho $S = \{9\}$.

c) + Với $x \geq -3$ ta có : $x + 3 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)
 + Với $x < -3$ ta có : $-x - 3 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (loại)

Tập nghiệm phương trình đã cho $S = \{2\}$.

d) + Với $x \geq 4$ ta có : $x - 4 + 3x = 5 \Leftrightarrow 4x = 9$
 $\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ (loại)
 + Với $x < 4$ ta có : $-x + 4 + 3x = 5 \Leftrightarrow 2x = 1$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (nhận)

Tập nghiệm cần tìm : $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Cho ví dụ về bất đẳng thức theo từng loại có chứa dấu $<$, $\leq$, $>$ và $\geq$.
2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn có dạng như thế nào ? Cho ví dụ.
3. Hãy chỉ ra một nghiệm của bất phương trình trong ví dụ của câu hỏi 2.
4. Phát biểu quy tắc chuyển vế để biến đổi bất phương trình. Quy tắc này dựa trên tính chất nào của thứ tự trên tập số ?
5. Phát biểu quy tắc nhân để biến đổi bất phương trình. Quy tắc này dựa trên tính chất nào của thứ tự trên tập số ?

Hướng dẫn

1. $3 \cdot (-2) + 1 < 3$; $3 + 2 \cdot (-1) \leq 2$; $4a^2 + 1 > 0$; $x^2 + 1 \geq 2x$
2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn có dạng $ax + b > 0$ hoặc $ax + b \geq 0$ hoặc $ax + b < 0$ hoặc $ax + b \leq 0$, trong đó a, b là các hằng số và $a \neq 0$.
 Ví dụ : $3x - 1 > 0$; $-2x + 3 \leq 0$.
3. Ví dụ $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình $3x - 1 > 0$.
4. Quy tắc chuyển vế : "Khi chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia của bất phương trình, ta đổi dấu của hạng tử đó." Quy tắc này dựa vào tính chất của sự liên hệ giữa thứ tự và phép cộng của các số.

41 Giải các bất phương trình :

a) $\frac{2-x}{4} < 5$

b) $3 \leq \frac{2x+3}{5}$

c) $\frac{4x-5}{3} > \frac{7-x}{5}$

d) $\frac{2x+3}{-4} \geq \frac{4-x}{-3}$

Giải

a) $\Leftrightarrow 2-x < 5.4 \Leftrightarrow -x < 20-2 \Leftrightarrow x > -18$

b) $\Leftrightarrow 3.5 \leq 2x+3 \Leftrightarrow 15-3 \leq 2x \Leftrightarrow 6 \leq x \Leftrightarrow x \geq 6$

c) $\Leftrightarrow 5(4x-5) > 3(7-x) \Leftrightarrow 20x-25 > 21-3x$
 $\Leftrightarrow 20x+3x > 21+25 \Leftrightarrow 23x > 46 \Leftrightarrow x > 2$

d) $\Leftrightarrow -3(2x+3) \leq -4(4-x) \Leftrightarrow -6x-9 \leq -16+4x$
 $\Leftrightarrow -6x-4x \leq -16+9 \Leftrightarrow -10x \leq -7 \Leftrightarrow x \geq 0,7.$

42 Giải các bất phương trình :

a) $3-2x > 4$

b) $3x+4 < 2$

c) $(x-3)^2 < x^2-3$

d) $(x-3)(x+3) < (x+2)^2+3.$

Giải

a) $3-2x > 4 \Leftrightarrow -2x > 4-3 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

b) $\Leftrightarrow 3x < 2-4 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$

c) $\Leftrightarrow x^2-6x+9 < x^2-3 \Leftrightarrow -6x < -3-9 \Leftrightarrow x > 2$

d) $\Leftrightarrow x^2-9 < x^2+4x+4+3 \Leftrightarrow -16 < 4x$
 $\Leftrightarrow -4 < x \Leftrightarrow x > -4.$

43 Tìm x sao cho :

a) Giá trị của biểu thức $5-2x$ là số dương.

b) Giá trị của biểu thức $x+3$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $4x-5$.

c) Giá trị của biểu thức $2x+1$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $x+3$.

d) Giá trị của biểu thức x^2+1 không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x-2)^2$.

Giải

a) $5-2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -5 \Leftrightarrow x < 2,5$

b) $x+3 < 4x-5 \Leftrightarrow x-4x < -5-3$

$\Leftrightarrow -3x < -8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$

c) $2x+1 \geq x+3 \Leftrightarrow 2x-x \geq 3-1 \Leftrightarrow x \geq 2$

d) $x^2+1 \leq (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2+1 \leq x^2-4x+4$

$\Leftrightarrow 4x \leq 4-1 \Leftrightarrow x \leq 0,75.$

- 44 Đố.** Trong một cuộc thi đố vui, ban tổ chức quy định mỗi người dự thi phải trả lời 10 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có sẵn 4 đáp án, nhưng trong đó chỉ có 1 đáp án đúng. Người dự thi chọn đáp án đúng sẽ được 5 điểm, chọn đáp án sai sẽ bị trừ đi 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển Ban tổ chức tặng cho mỗi người thi 10 điểm và quy định người nào có tổng số điểm từ 40 trở lên mới được dự thi ở vòng tiếp theo. Hỏi người dự thi phải trả lời chính xác bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được dự thi tiếp ở vòng sau ?

Giải

Gọi x là số lần trả lời đúng (x nguyên, không âm). Số lần trả lời sai là $10 - x$. Số điểm đạt được, số điểm bị trừ sau vòng sơ tuyển theo thứ tự là $5x$ và $10 - x$. Số điểm cần đạt được ở vòng sơ tuyển để thi tiếp vòng sau :

$$5x - (10 - x) + 10 \geq 40 \Leftrightarrow 6x \geq 40 \Leftrightarrow x \geq \frac{40}{6}$$

Do điều kiện x nguyên nên cần phải cho ít nhất $x = 7$. Vậy người dự thi muốn được thi tiếp phải trả lời chính xác ít nhất 7 câu hỏi.

- 45** Giải các phương trình :

a) $|3x| = x + 8$

b) $|-2x| = 4x + 18$

c) $|x - 5| = 3x$

d) $|x + 2| = 2x - 10$.

Download Sách Đọc Sách Online

a) + Với $x \geq 0$ ta có : $3x = x + 8 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ (nhận)

+ Với $x < 0$ ta có : $-3x = x + 8 \Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2$ (nhận)

Tập nghiệm của phương trình cho ban đầu : $S = \{-2; 4\}$.

b) + Với $x \geq 0$ ta có : $2x = 4x + 18 \Leftrightarrow -2x = 18 \Leftrightarrow x = -9$ (loại)

+ Với $x < 0$ ta có : $-2x = 4x + 18 \Leftrightarrow -6x = 18 \Leftrightarrow x = -3$ (nhận)

Tập nghiệm $\{-3\}$.

c) + Với $x \geq 5$ ta có : $x - 5 = 3x \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -2,5$ (loại)

+ Với $x < 5$ ta có : $-x + 5 = 3x \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = 1,25$ (nhận)

Tập nghiệm $\{1,25\}$.

d) + Với $x \geq -2$ ta có : $x + 2 = 2x - 10 \Leftrightarrow x = 12$ (nhận)

+ Với $x < -2$ ta có : $-x - 2 = 2x - 10 \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$ (loại)

Tập nghiệm $\{12\}$.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§1. Định lý Ta-let trong tam giác

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Tỷ số của hai đoạn thẳng

là tỷ số độ dài của chúng (theo cùng một đơn vị đo).

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{hay} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

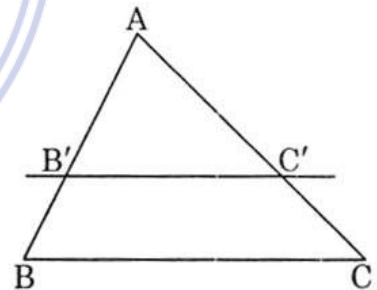
3. Định lý Ta-let trong tam giác

Định lý Ta-let : Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Trong hình : $B'C' \parallel BC$, $B' \in AB$, $C' \in AC$

thì ta có :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \quad \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}; \quad \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}$$



BÀI TẬP

1 Viết tỷ số của hai đoạn thẳng có độ dài như sau :

- a) $AB = 5\text{cm}$; $CD = 15\text{cm}$ b) $EF = 48\text{cm}$; $GH = 16\text{dm}$
 c) $PQ = 1,2\text{m}$; $MN = 24\text{cm}$.

Giải

a) $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

- b) Đổi số đo độ dài của các đoạn thẳng theo cùng đơn vị đo :
 $EF = 48\text{cm}$, $GH = 16\text{dm} = 160\text{cm}$.

Tỉ số của hai đoạn thẳng là : $\frac{EF}{GH} = \frac{48}{160} = \frac{3}{10}$

c) Làm như câu b) : $\frac{PQ}{MN} = \frac{120}{24} = 5$.

2 Cho biết $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$ và $CD = 12\text{cm}$. Tính độ dài của AB .

Giải

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9\text{cm}. \quad \text{Đáp số : } AB = 9\text{cm}.$$

3 Cho biết độ dài của AB gấp 5 lần độ dài của CD và độ dài của $A'B'$ gấp 12 lần độ dài của CD . Tính tỉ số của hai đoạn thẳng AB và $A'B'$.

Giải

Dùng đoạn thẳng CD làm đơn vị đo độ dài ta có :

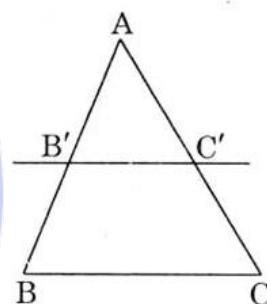
$$AB = 5CD, \quad A'B' = 12CD. \quad \text{Tỉ số : } \frac{AB}{A'B'} = \frac{5}{12}.$$

4 Cho biết $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. Chứng minh rằng :

a) $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$

b) $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$

Hướng dẫn : Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức.



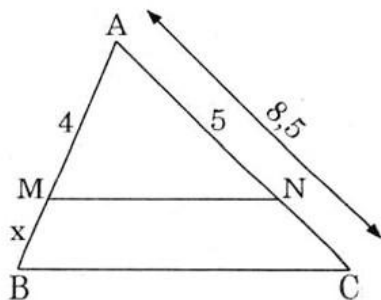
a) Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{AB'}{AB - AB'} = \frac{AC'}{AC - AC'} \Leftrightarrow \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$$

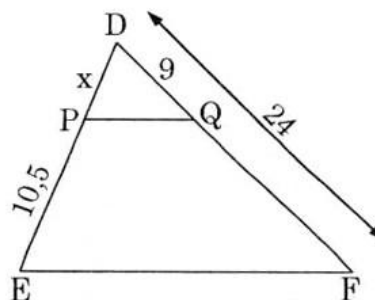
b) Cũng theo tính chất của tỉ lệ thức thì :

$$\begin{aligned} \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} &\Rightarrow \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB - AB'}{AC - AC'} \\ &\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'} \Rightarrow \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}. \end{aligned}$$

5 Tính x trong các trường hợp sau :



a) $MN \parallel BC$



b) $PQ \parallel EF$

Giải

a) Do $MN \parallel BC$, theo định lí Ta-let ta có :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad \text{hay} \quad \frac{4}{x} = \frac{5}{8,5 - 5} \Rightarrow x = \frac{4 \times 3,5}{5} = 2,8$$

b) Áp dụng định lí Ta-let ta có :

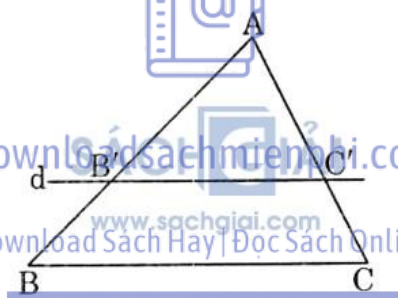
$$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{10,5} = \frac{9}{24 - 9} \Rightarrow x = \frac{9 \times 10,5}{15} = 6,3.$$

§2. Định lí đảo và hệ quả của định lí Ta-let

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Định lí đảo của định lí Ta-let

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên các cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.



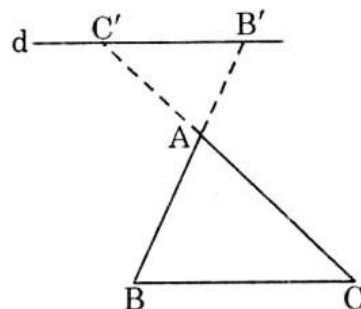
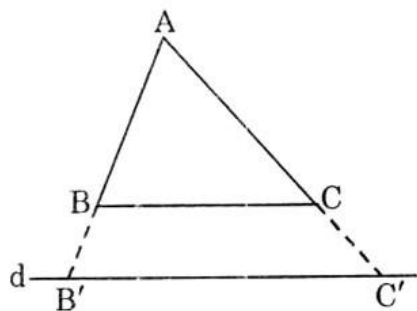
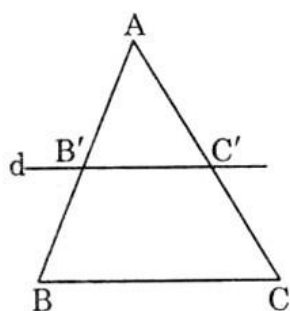
GT d cắt AB tại B' , cắt AC tại C'

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \quad \text{hoặc} \quad \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} \quad \text{hoặc} \quad \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$$

KL $d \parallel BC$.

2. Hệ quả của định lí Ta-let

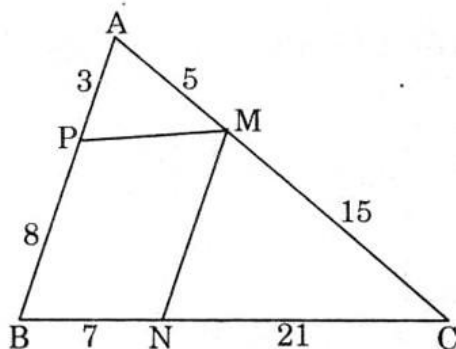
Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh tam giác đã cho.



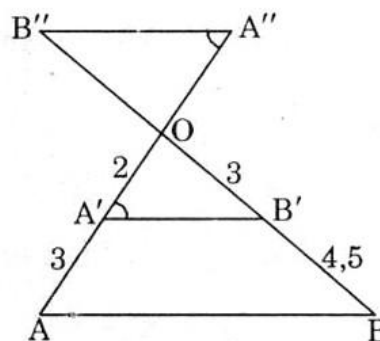
GT	$B'C' \parallel BC, B' \in AB, C' \in AC$
KL	$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

BÀI TẬP

- 6** Tìm các cặp đường thẳng song song trong các hình sau và giải thích tại sao chúng song song.



a)



b)

Giải

- a) Đường thẳng MN cắt hai cạnh của tam giác ABC và định ra trên các cạnh AC và BC các đoạn thẳng tỉ lệ :

$$\frac{CM}{MA} = \frac{15}{5} = \frac{21}{7} = \frac{CN}{NB}$$

Theo định lí đảo của định lí Ta-let thì $MN \parallel AB$.

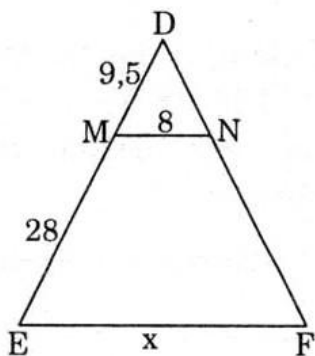
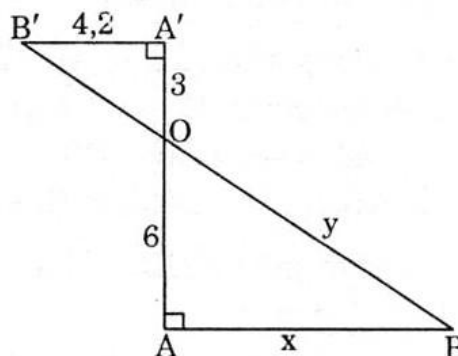
- b) Tương tự câu a), ta có : $\frac{OA'}{A'A} = \frac{2}{3} = \frac{3}{4,5} = \frac{OB'}{B'B}$

$\Rightarrow A'B' \parallel AB$ (theo định lí đảo của định lí Ta-let)

Ta lại có $\widehat{B''A''A'} = \widehat{A''A'B'}$ là hai góc so le trong bằng nhau.

Vậy $A''B'' \parallel A'B'$. Từ đó ta lại có $A''B'' \parallel AB$ (vì cùng song song với $A'B'$).

- 7** Tính các độ dài x, y trong hình dưới.

a) $MN \parallel EF$ 

b)

Giải

- a) Đường thẳng MN song song cạnh EF của tam giác DEF. Theo hệ quả của định lí Ta-let ta có :

$$\frac{DM}{DE} = \frac{MN}{EF}, \quad \text{từ đó suy ra : } \frac{9,5}{9,5 + 28} = \frac{8}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \times 37,5}{9,5} \approx 31,58.$$

- b) Do $A'B' \parallel AB$ (vì cùng vuông góc với AA'), theo hệ quả của định lí Ta-let ta có :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{4,2}{x} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 4,2}{3} = 8,4.$$

Theo định lí Pi-ta-go :

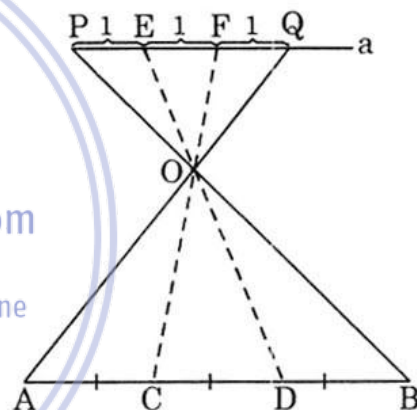
$$y^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow y = \sqrt{8,4^2 + 6^2} \approx 10,32.$$

8

- a) Để chia đoạn thẳng AB thành ba đoạn thẳng bằng nhau, người ta đã làm như hình bên.

Hãy mô tả cách làm trên và giải thích vì sao các đoạn thẳng AC, CD, DB bằng nhau ?

- b) Bằng cách làm tương tự, hãy chia đoạn thẳng AB cho trước thành 5 đoạn bằng nhau.



Hỏi có cách nào khác với cách làm như trên mà vẫn có thể chia đoạn thẳng AB cho trước thành 5 đoạn thẳng bằng nhau ?

Giải

- a) Để chia đoạn thẳng AB thành 3 đoạn thẳng bằng nhau $AC = CD = DB$ người ta làm như sau :

Kẻ đường thẳng $a \parallel AB$. Trên đường thẳng a đặt 3 đoạn thẳng kề nhau cùng độ dài 1 đơn vị dài : $PE = EF = FQ = 1$. Nối PB và AQ hai đoạn thẳng PB và AQ cắt nhau tại O. Đường thẳng EO cắt AB tại D và đường thẳng FO cắt AB tại C.

- Xét tam giác ODB, bởi vì $PE \parallel DB$ nên theo hệ quả của định lí Ta-let ta có :

$$\frac{BD}{PE} = \frac{OD}{OE} \quad (1)$$

- Xét tam giác OCD, vì $EF \parallel CD$ nên ta có :

$$\frac{CD}{EF} = \frac{OD}{OE} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có :

$$\frac{BD}{PE} = \frac{CD}{EF} \Rightarrow BD = DC \text{ (vì } PE = EF)$$

Chứng minh tương tự ta có $DC = AC$, suy ra $AC = DC = DB$.

- b) Để chia đoạn thẳng AB thành 5 đoạn thẳng bằng nhau ta kẻ $a \parallel AB$ và đặt liên tiếp 5 đoạn thẳng có cùng độ dài :**

$$HI = IK = KL = LM = MN$$

Nối HB và AN cắt nhau tại O. Kẻ các đường thẳng OI, OK, OL, OM. Các đường thẳng trên cắt AB lần lượt tại G, E, D, C ta sẽ được các đoạn thẳng bằng nhau :

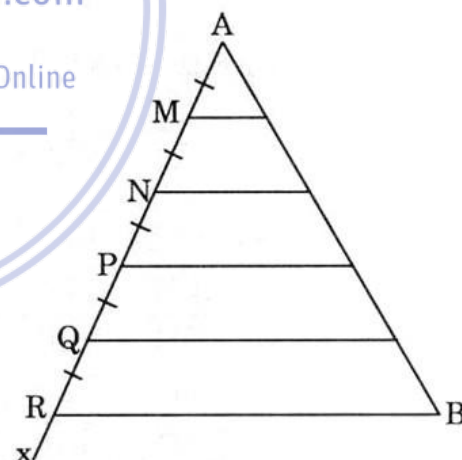
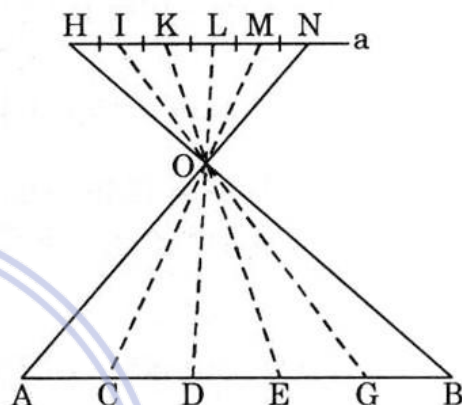
$$AC = CD = DE = EG = GB.$$

Ngoài cách chia đã trình bày trên, ta có thể chia AB thành 5 đoạn thẳng bằng nhau, như sau :

Từ đầu mút A của đoạn thẳng AB ta kẻ tia Ax. Trên Ax đặt 5 đoạn thẳng có cùng độ dài

$$AM = MN = NP = PQ = QR.$$

Nối RB, kẻ qua các điểm Q, P, N, M các đường thẳng song song với RB. Các đường thẳng này sẽ chia AB thành năm đoạn thẳng bằng nhau.



9

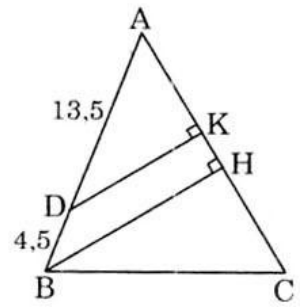
Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh AB sao cho $AD = 13,5\text{cm}$, $DB = 4,5\text{cm}$. Tính tỉ số các khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC.

Giải

Kẻ các đường vuông góc từ B và D đến đường thẳng AC là BH và DK. Do $DK \parallel BH$ (vì cùng vuông góc với AC) nên theo hệ quả của định lí Ta-let ta có :

$$\frac{DK}{BH} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD + DB} = \frac{13,5}{13,5 + 4,5} = \frac{3}{4}$$

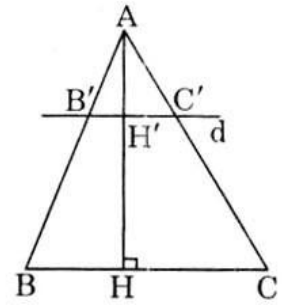
Vậy tỉ số các khoảng cách từ D và B đến cạnh AC là $\frac{3}{4}$.



- 10** Tam giác ABC có đường cao AH. Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C' và H' (hình bên).

a) Chứng minh rằng : $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$.

- b) Áp dụng : Cho biết $AH' = \frac{1}{3}AH$ và diện tích tam giác ABC là $67,5\text{cm}^2$. Tính diện tích tam giác AB'C'.



- a) Xét tam giác AHB, do B'C' // BC nên theo hệ quả của định lí Ta-let ta có :

$$\frac{B'H'}{BH} = \frac{AH'}{AH} \quad (1)$$

Tương tự như trên, trong tam giác AHC ta có :

$$\frac{H'C'}{HC} = \frac{AH'}{AH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{B'H'}{BH} = \frac{H'C'}{HC} = \frac{AH'}{AH} &\Rightarrow \frac{B'H' + H'C'}{BH + HC} = \frac{AH'}{AH} \\ \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{AH'}{AH} &\text{ (theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau).} \end{aligned}$$

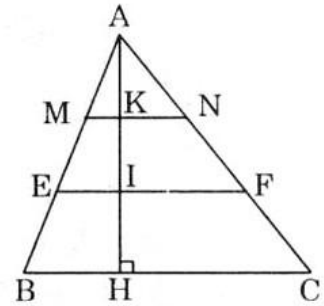
- b) Áp dụng :

$$AH' = \frac{1}{3}AH \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{3}$$

Diện tích tam giác AB'C' :

$$\begin{aligned} S_{AB'C'} &= \frac{1}{2}AH' \cdot B'C' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}AH \cdot \frac{1}{3}BC = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2}AH \cdot BC \right) \\ &= \frac{1}{9}S_{ABC} = \frac{1}{9} \cdot 67,5\text{cm}^2 = 7,5\text{cm}^2. \end{aligned}$$

- 11** Tam giác ABC có BC = 15cm. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho AK = KI = IH. Qua I và K vẽ các đường EF // BC, MN // BC (hình bên).



- a) Tính độ dài các đoạn thẳng MN và EF.
b) Tính diện tích tứ giác MNFE, biết rằng diện tích của tam giác ABC là 270cm^2 .

Giải

- a) Theo kết quả bài tập 10 ta có :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AK}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3}BC = 5\text{cm}$$

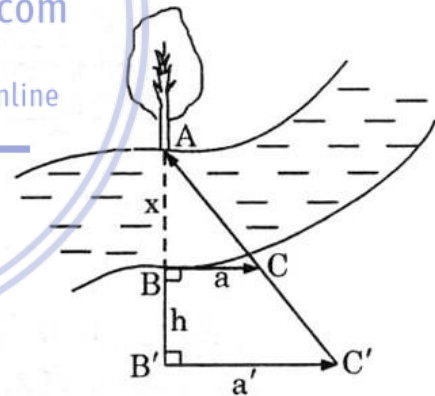
$$\frac{EF}{BC} = \frac{AI}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}BC = 10\text{cm}.$$

- b) Tứ giác MNFE là hình thang. Diện tích MNFE là :

$$\begin{aligned} S_{MNFE} &= \frac{1}{2}IK.(MN + EF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}AH. \left(\frac{1}{3}BC + \frac{2}{3}BC \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 270 = 90\text{cm}^2. \end{aligned}$$

- 12** Có thể đo được chiều rộng của một con sông mà không cần phải sang bờ bên kia hay không?

Người ta tiến hành đo đạc các yếu tố hình học cần thiết để tính chiều rộng của khúc sông mà không cần phải sang bờ bên kia. Nhìn hình vẽ đã cho, hãy mô tả những công việc cần làm và tính khoảng cách $AB = x$ ($BC = a$, $B'C' = a'$, $BB' = h$).



Giải

Để đo chiều rộng khúc sông là độ dài x của đoạn thẳng AB, ta chọn trên mặt đất điểm B' thẳng hàng với A, B. Chọn điểm C trên mặt đất sao cho $BC \perp BB'$. Trên đường thẳng $B'C' \perp BB'$ chọn điểm C' sao cho C' nằm trên đường thẳng B'C' và thẳng hàng với A, C. Đo độ dài các đoạn thẳng BB', BC, B'C'. Giả sử $BB' = h$, $BC = a$, $B'C' = a'$ (a , a' , h đã biết vì đo được), theo hệ quả của định lý Ta-let ta có :

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AB'} &= \frac{a}{a'} \Rightarrow \frac{x}{x+h} = \frac{a}{a'} \Rightarrow a'x = a(x+h) \\ &\Rightarrow x = \frac{ah}{a'-a} \end{aligned}$$

Chẳng hạn, chọn B' sao cho $BB' = h = 20\text{m}$, chọn C sao cho $BC = a = 35\text{m}$. Sau đó xác định $B'C'$. Ví dụ $B'C' = a' = 55\text{m}$. Khi đó ta có :

$$x = \frac{20 \cdot 35}{55 - 35} = 35\text{m}.$$

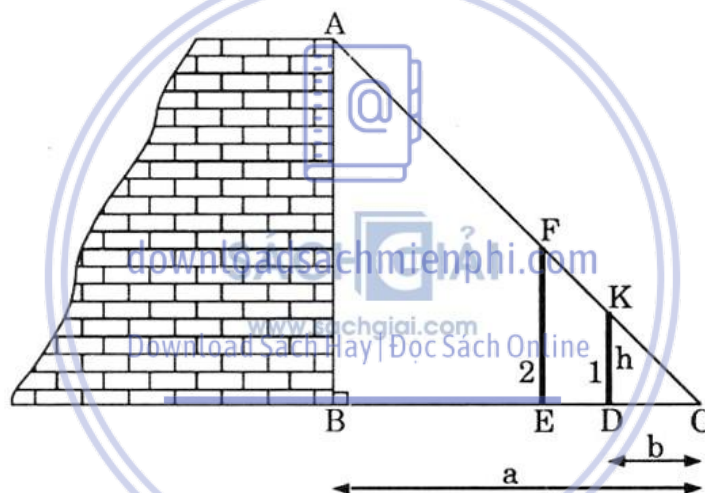
- 13** Có thể đo gián tiếp chiều cao của một bức tường khá cao bằng dụng cụ đơn giản được không ?

Hình dưới thể hiện cách đo chiều cao AB của một bức tường bằng các dụng cụ đơn giản gồm :

Hai cọc thẳng đứng (cọc (1) cố định; cọc (2) có thể di động được) và sợi dây FC . Cọc (1) có chiều cao $EF = h$. Các khoảng cách $BC = a$, $EC = b$ đo được bằng thước dây thông dụng.

a) Em hãy cho biết người ta tiến hành đo đạc như thế nào?

b) Tính chiều cao AB theo h , a , b .



Giải

a) Ta tiến hành đo chiều cao bức tường AB như sau :

- + Đặt cọc DK thẳng đứng (chiều cao h cố định đã biết trước).
- + Đặt cọc thứ hai EF , ngắm, vận điều chỉnh nút F sao cho đỉnh A của bức tường, đỉnh K của cọc cố định và đỉnh F nằm trên một đường thẳng.
- + Dùng sợi dây căng thẳng qua các đầu cọc F , K chạm mặt đất tại C (để F , K , C thẳng hàng, cũng có nghĩa là A , K , C thẳng hàng).
- + Dùng thước dây đo các khoảng cách CD và CB .

b) Giả sử $DK = h$. Đo được $CD = b$, $CB = a$, ta có :

$$\frac{DK}{AB} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{a \cdot h}{b}.$$

14 Cho ba đoạn thẳng có độ dài là m, n, p (cùng đơn vị đo).

Dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho :

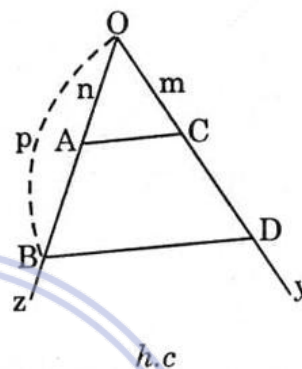
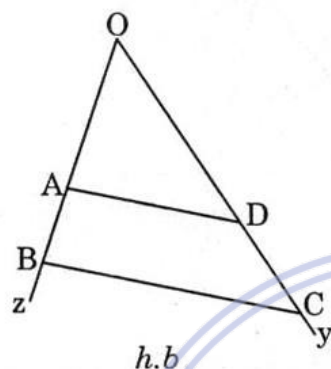
a) $\frac{x}{m} = 2$

b) $\frac{x}{n} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$.

Giải

a) Ta có : $x = 2m$. Muốn dựng đoạn thẳng có độ dài x ta chỉ việc đặt liên tiếp hai đoạn thẳng có độ dài m .



b) Dựng góc $\widehat{zOy}$ số đo tùy ý. Trên Oz lấy các điểm A, B sao cho $OA = 2$ đơn vị, $OB = 3$ đơn vị. Trên Oy lấy điểm C sao cho $OC = n$. Kẻ qua A đường thẳng song song với BC cắt Oy tại D thì OD là đoạn thẳng cần tìm (hình h.b).

c) Trên cạnh Oz của góc $\widehat{zOy}$ lấy $OA = n$, $OB = p$. Trên cạnh Oy lấy $OC = m$. Nối AC và kẻ qua B đường thẳng song song với AC cắt Oy tại D thì OD là đường thẳng cần tìm (hình h.c).

§3. Tính chất đường phân giác của một tam giác

TÓM TẮT KIẾN THỨC

Định lý

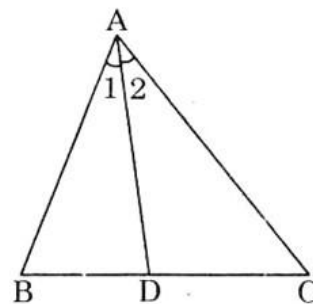
Đường phân giác của một góc trong tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

GT	$\triangle ABC$ có AD là đường phân giác của góc $\widehat{A}$
KL	$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

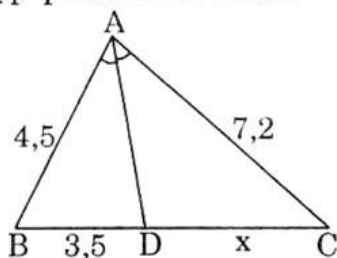
Ghi chú :

Nếu AD' là đường phân giác ngoài tại đỉnh A tam giác ABC thì :

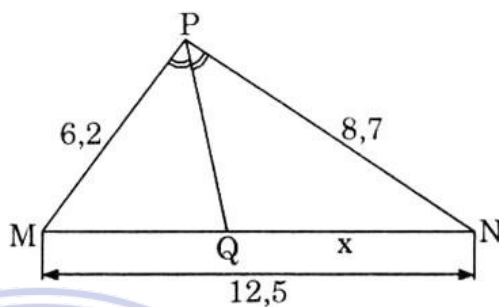
$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}.$$

**BÀI TẬP**

- 15** Tính độ dài x trong các hình vẽ sau và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



a)



b)

Giải

- a) Theo tính chất của đường phân giác trong tam giác ABC , ta có :

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{3,5}{4,5} = \frac{x}{7,2} \Rightarrow x = \frac{3,5 \times 7,2}{4,5} = 5,6 \text{ cm}$$

- b) Trong tam giác PMN ta có :

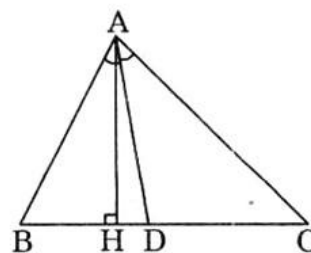
$$\frac{MQ}{PM} = \frac{QN}{PN} \Rightarrow \frac{12,5 - x}{6,2} = \frac{x}{8,7} \Rightarrow x = \frac{8,7 \times 12,5}{6,2 + 8,7} \approx 7,3 \text{ cm}.$$

- 16** Tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = m$, $AC = n$ và AD là đường phân giác trong của góc $\widehat{A}$. Chứng minh rằng tỉ số diện tích của tam giác ABD và diện tích của tam giác ACD bằng $\frac{m}{n}$.

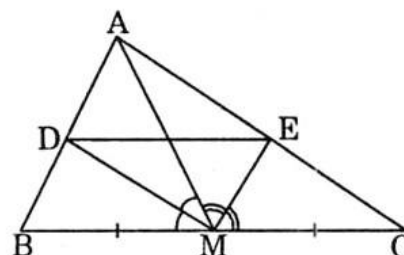
Giải

Hai tam giác ABD và ACD có chung đường cao AH kẻ từ đỉnh A . Ta có :

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BD}{\frac{1}{2}AH \cdot CD} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}.$$



- 17** Cho tam giác ABC với trung tuyến AM . Tia phân giác của góc $\widehat{AMB}$ cắt cạnh AB ở D , tia phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt cạnh AC ở E . Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.



Giải

Theo tính chất của đường phân giác trong tam giác ABM và tam giác ACM, ta có :

$$\frac{AD}{AM} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BM} \quad (1)$$

$$\frac{AE}{AM} = \frac{CE}{MC} \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AM}{MC} \quad (2)$$

Bởi vì $BM = CM$ nên từ (1) và (2) ta suy ra : $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

Theo định lí Ta-let đảo, ta kết luận $DE \parallel BC$.

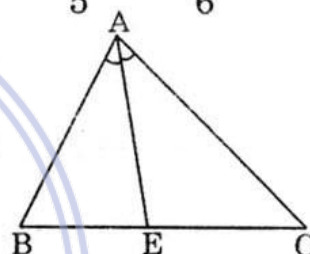
- 18** Tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$ và $BC = 7\text{cm}$. Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại E. Tính các đoạn EB, EC.

Giải

Ta có : $\frac{EB}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{BC - EB}{AC} \Rightarrow \frac{EB}{5} = \frac{7 - EB}{6}$

$$\Rightarrow EB = 3\frac{2}{11}\text{cm} \approx 3,18\text{cm}$$

$$EC \approx 3,82\text{cm}.$$



- 19** Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$).

Đường thẳng a song song với DC, cắt các cạnh AD và BC theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng :

a) $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

b) $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$

c) $\frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$

Giải

- a) Đường chéo AC cắt EF tại O. Do $EF \parallel CD$, áp dụng định lí Ta-let trong tam giác ACD ta có :

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{OC} \quad (a)$$

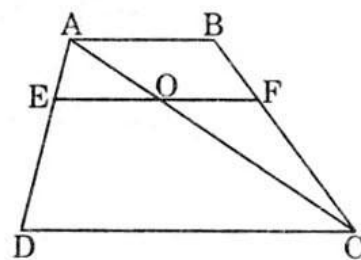
Áp dụng định lí Ta-let trong tam giác ABC ta có :

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BF}{FC} \quad (b)$$

Từ (a) và (b) suy ra : $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \quad (1)$

- b) Theo tính chất của tỉ lệ thức, từ (1) ta có :

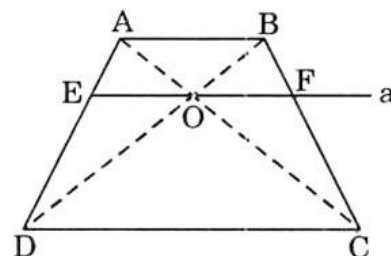
$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{AE}{AE + ED} = \frac{BF}{BF + FC} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} \quad (2)$$



c) Từ (2) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AE} = \frac{BC}{BF} &\Rightarrow \frac{AD}{AD - AE} = \frac{BC}{BC - BF} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{BC}{CF} \\ &\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB} \quad (3) \end{aligned}$$

- 20** Cho hình thang ABCD (AB // CD). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng a qua O và song song với đáy của hình thang cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng : OE = OF.



Giải

Do EF // CD, theo hệ quả của định lí Ta-let trong tam giác ACD ta có :

$$\frac{EO}{CD} = \frac{AO}{AC} \quad (1)$$

Trong tam giác BCD ta có :

$$\frac{OF}{CD} = \frac{BO}{BD} \quad (2)$$

Do AB // CD, theo định lí Ta-let, trong tam giác OCD ta có :

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{OB}{OB + OD} = \frac{OA}{OA + OC} \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{AO}{AC} \quad (3)$$

Từ các đẳng thức (1), (2) và (3) ta có :

$$\frac{EO}{CD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow OE = OF.$$

- 21** a) Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM và đường phân giác trong AD. Tính diện tích tam giác ADM, biết AB = m, AC = n (n > m) và diện tích của tam giác ABC là S.
b) Cho n = 7cm, m = 3cm, hỏi diện tích tam giác ADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích tam giác ABC ?

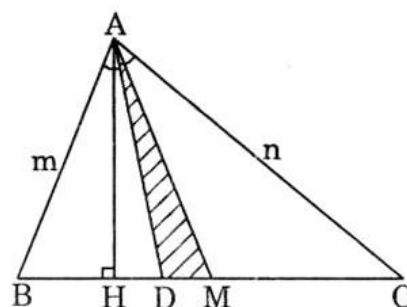
Giải

- a) Các tam giác ABM và ACM có cùng chiều cao AH kẻ từ A và các cạnh đáy BM = MC nên :

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{S}{2}$$

Theo kết quả bài 16 ta có :

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{m}{n} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{m}{n} \cdot S_{ACD}$$



Mặt khác :

$$S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC} = S \Rightarrow S_{ACD} = S : \left(1 + \frac{m}{n}\right)$$

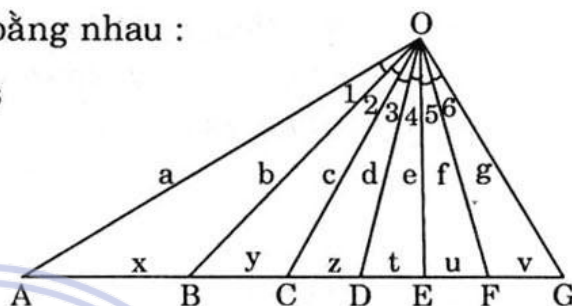
$$S_{ADM} = S_{ACD} - S_{ACM} = \frac{S}{1 + \frac{m}{n}} - \frac{S}{2} \Rightarrow S_{ADM} = \frac{(n-m)S}{2(n+m)} \quad (1)$$

b) Thay $n = 7\text{cm}$, $m = 3\text{cm}$ vào (1) ta có : $S_{ADM} = \frac{4}{20}S = 20\% S_{ABC}$.

22 **Đố.** Hình bên cho biết có 6 góc bằng nhau :

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = \hat{O}_5 = \hat{O}_6$$

Kích thước các đoạn thẳng đã được ghi trên hình. Hãy thiết lập những tỉ lệ thức đúng từ các số đã cho.



Giải

Trong tam giác OAC có OB là đường phân giác. Do đó ta có : $\frac{x}{a} = \frac{y}{c}$

Lập luận tương tự ta có các tỉ lệ thức sau :

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{d}; \quad \frac{z}{c} = \frac{t}{e}; \quad \frac{t}{d} = \frac{u}{f}; \quad \frac{u}{e} = \frac{v}{g}$$

Xét các tam giác OAE, OBF, OCG ta có các tỉ lệ thức :

$$\frac{x+y}{a} = \frac{z+t}{e}; \quad \frac{y+z}{b} = \frac{t+u}{f}; \quad \frac{z+t}{c} = \frac{u+v}{g}$$

và xét tam giác OAG ta có : $\frac{x+y+z}{a} = \frac{t+u+v}{g}$.

§4. Khái niệm tam giác đồng dạng

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Định nghĩa

Tam giác $A'B'C'$ **đồng dạng** với tam giác ABC , kí hiệu $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

nếu : $\hat{A}' = \hat{A}; \quad \hat{B}' = \hat{B}; \quad \hat{C}' = \hat{C}$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

Tỉ số các cạnh tương ứng $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ gọi là **tỉ số đồng dạng**.

2. Tính chất

a) $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ (Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó)

b) $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ thì $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

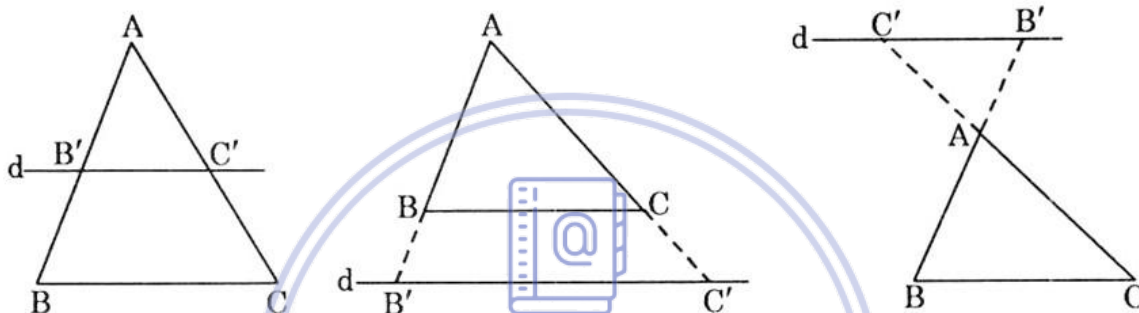
Ta bảo hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng với nhau.

c) Nếu $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ và $\triangle A''B''C'' \sim \triangle A'B'C'$

thì $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$ (Tính chất bắc cầu).

3. Định lý

Một đường thẳng cắt hai đường thẳng chứa hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại sẽ tạo thành một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho.



GT	$\triangle ABC, d \parallel BC, d \text{ cắt } AB \text{ tại } B', \text{ cắt } AC \text{ tại } C'$
KL	$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

BÀI TẬP

23 Trong hai mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng? Mệnh đề nào sai?

- a) Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau.
b) Hai tam giác đồng dạng với nhau thì bằng nhau.

Giải

- a) đúng b) sai.

24 $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ theo tỉ số đồng dạng k_1 . $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số đồng dạng k_2 . Tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số nào?

Giải

Giả sử $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số k , ta có: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$

$\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ theo tỉ số k_1 , nghĩa là $\frac{A'B'}{A''B''} = k_1$

$\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số k_2 , nghĩa là $\frac{A''B''}{AB} = k_2$, do đó

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{A''B''} \cdot \frac{A''B''}{AB} = k_1 \cdot k_2$$

Vậy $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = k_1 \cdot k_2$.

- 25** Cho tam giác ABC. Hãy vẽ một tam giác đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $\frac{1}{2}$.

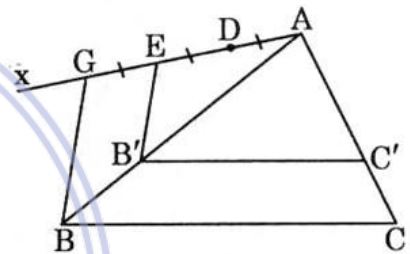
Giải

Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC và BC của tam giác ABC thì $\Delta ADE \sim \Delta ABC$, $\Delta EFC \sim \Delta ABC$, $\Delta DBF \sim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$.

- 26** Cho tam giác ABC, vẽ tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$.

Giải

Qua A kẻ tia Ax. Trên Ax đặt ba đoạn thẳng liên tiếp $AD = DE = EG$. Nối GB. Qua E kẻ đường thẳng song song với GB cắt AB tại điểm B'. Qua B' kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại điểm C' thì $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$.



Chứng minh: Xét tam giác ABG, do $EB' \parallel GB$ ta có :

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3}$$

Trong ΔABC , do $B'C' \parallel BC$ ta có : $\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3}$

Vậy $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số : $k = \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$.

- 27** Từ điểm M thuộc cạnh AB của tam giác ABC với $AM = \frac{1}{2}MB$, kẻ các tia song song với AC và BC, chúng cắt BC và AC lần lượt tại L và N.
- Nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng.
 - Đối với mỗi cặp tam giác đồng dạng hãy viết các cặp góc bằng nhau và tỉ số đồng dạng tương ứng.

Giải

a) Các cặp tam giác đồng dạng :

AMN và ABC; BLM và BCA; AMN và MBL

b) * $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ với tỉ số đồng dạng $k_1 = \frac{1}{3}$

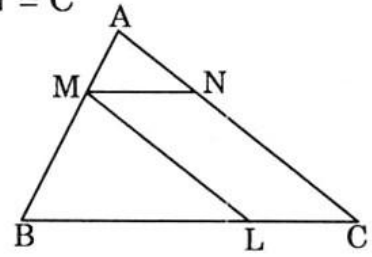
Các góc bằng nhau : $\hat{A}$ chung, $\hat{M} = \hat{B}$, $\hat{N} = \hat{C}$

* $\triangle BLM \sim \triangle BCA$, tỉ số đồng dạng $k_2 = \frac{2}{3}$

có $\hat{B}$ chung, $\hat{M} = \hat{A}$, $\hat{L} = \hat{C}$.

* $\triangle AMN \sim \triangle MBL$, tỉ số đồng dạng $k_3 = \frac{1}{2}$

có $\hat{A} = \hat{BML}$; $\hat{AMN} = \hat{B}$; $\hat{L} = \hat{C}$.



28 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$.

a) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.

b) Cho biết hiệu chu vi của hai tam giác là 40dm, tính chu vi của mỗi tam giác.

Giải

a) Ta có : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{3}{5} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC}$

Vậy tỉ số chu vi của hai tam giác bằng tỉ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$.

b) Gọi chu vi của $A'B'C'$ là $2p'$, chu vi tam giác ABC là $2p$. Ta có :

$$\frac{2p'}{2p} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2p'}{2p - 2p'} = \frac{3}{5 - 3} \Rightarrow \frac{2p'}{40} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2p' = 60\text{dm}$$

$$2p = 2p' + 40 = 100\text{dm}.$$

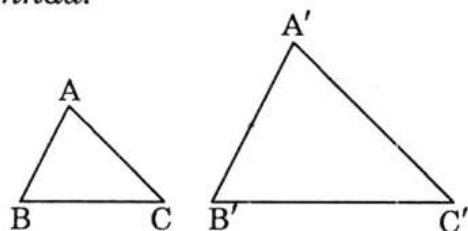
§5. Các trường hợp của hai tam giác đồng dạng

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Trường hợp đồng dạng thứ nhất

Định lý : Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

GT	$\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có :
	$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$
KL	$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$



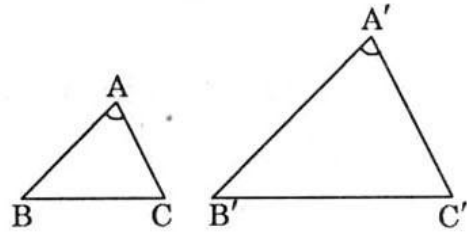
2. Trường hợp đồng dạng thứ hai

Định lí : Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác ấy đồng dạng với nhau.

GT | $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}, \hat{A} = \hat{A}$$

KL | $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$



3. Trường hợp đồng dạng thứ ba

Định lí : Nếu hai tam giác có hai cặp góc tương ứng bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

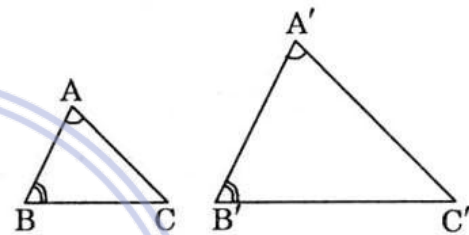
GT | $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có :

$$\hat{A} = \hat{A'} \text{ và } \hat{B} = \hat{B'}$$

$$(\text{hoặc } \hat{A} = \hat{A'} \text{ và } \hat{C} = \hat{C'})$$

$$\text{hoặc } \hat{B} = \hat{B'} \text{ và } \hat{C} = \hat{C'})$$

KL | $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$



BÀI TẬP

- 29** Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có kích thước như trong hình dưới.



- a) $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao?
b) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đó.

Giải

a) Ta có : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $\frac{A'C'}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $\frac{B'C'}{BC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Do đó : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$, theo định lí 1, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

với tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$.

- b) Theo bài 28. Tỉ số chu vi của $\triangle A'B'C'$ và $\triangle ABC$ bằng tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$.

- 30** Tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = 3\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$. Tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC và có chu vi bằng 55cm. Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác A'B'C' (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Giải

Do $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ ta có :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = \frac{55}{3 + 5 + 7} = \frac{11}{3}$$

$$A'B' = \frac{11}{3} AB = \frac{11}{3} \cdot 3 = 11\text{cm};$$

$$B'C' = \frac{11}{3} BC = \frac{11}{3} \cdot 7 \approx 25,67\text{cm};$$

$$A'C' = \frac{11}{3} AC = \frac{11}{3} \cdot 5 \approx 18,33\text{cm}.$$

- 31** Cho hai tam giác đồng dạng có tỉ số chu vi là $\frac{15}{17}$ và hiệu độ dài hai cạnh tương ứng của chúng là 12,5cm. Tính hai cạnh đó.

Giải

Ta biết rằng hai tam giác đồng dạng thì tỉ số chu vi của chúng bằng tỉ số đồng dạng. Giả sử $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ và $AB - A'B' = 12,5$.

Ta có : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{15}{17} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB - A'B'} = \frac{15}{17 - 15}$

$$\Rightarrow A'B' = \frac{15 \times 12,5}{2} = 93,75\text{cm}$$

$$AB = 93,75 + 12,5 = 106,25\text{cm}.$$

Trường hợp đồng dạng thứ hai

- 32** Trên một cạnh của một góc $\widehat{xOy}$ ($\widehat{xOy} \neq 180^\circ$), đặt các đoạn thẳng $OA = 5\text{cm}$, $OB = 16\text{cm}$. Trên cạnh thứ hai của góc đó, đặt các đoạn thẳng $OC = 8\text{cm}$, $OD = 10\text{cm}$.

a) Chứng minh hai tam giác OCB và OAD đồng dạng.

b) Gọi giao điểm của các cạnh AD và BC là I. Chứng minh rằng hai tam giác IAB và ICD có các góc bằng nhau từng đôi một.

Giải

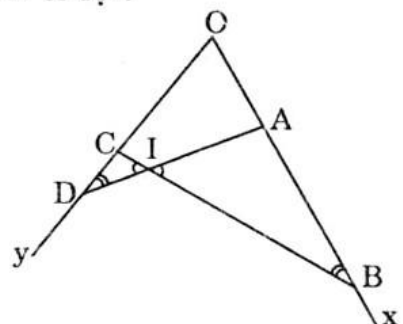
a) Hai tam giác OAD và OCB có hai cặp cạnh tỉ lệ :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{5}{8} = \frac{10}{16} = \frac{OD}{OB}$$

và góc $\widehat{O}$ tạo bởi các cặp cạnh đó là góc chung; theo định lí 2, $\Delta OAD \sim \Delta OCB$.

b) Hai tam giác ICD và IAB có:

$$\widehat{CID} = \widehat{AIB} \text{ (đối đỉnh)}$$



$\widehat{CDI} = \widehat{ABI}$ (vì $\triangle OAD \sim \triangle OCB$, hai góc tương ứng bằng nhau)

và $\widehat{ICD} = 180^\circ - (\widehat{CID} + \widehat{CDI}) = 180^\circ - (\widehat{AIB} + \widehat{ABI}) = \widehat{IAB}$

- 33** Chứng minh rằng nếu tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số k thì tỉ số của hai trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k .

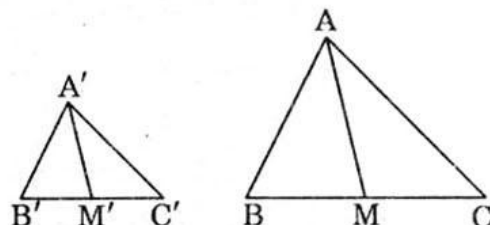
Giải

Giả sử $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

$A'M'$ và AM là các đường trung tuyến tương ứng.

Tỉ số đồng dạng của hai tam giác $A'B'C'$ và ABC là

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = k$$



Xét hai tam giác $A'B'M'$ và ABM có :

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{\frac{1}{2}B'C'}{\frac{1}{2}BC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} \quad \text{và} \quad \widehat{B'} = \widehat{B}$$

Theo định lí 2, $\triangle A'B'M' \sim \triangle ABM$. Từ đó ta có :

$$\frac{A'M'}{AM} = \frac{A'B'}{AB} = k \quad (\text{đpcm}).$$

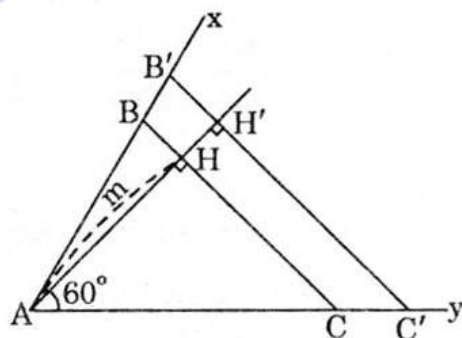
- 34** Dựng tam giác ABC cho biết góc $\widehat{A} = 60^\circ$, tỉ số $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$ và đường cao $AH = 6\text{cm}$.

Giải

Dựng góc $\widehat{xAy} = 60^\circ$.

Trên cạnh Ax lấy điểm B' sao cho $AB' = 8\text{cm}$, trên cạnh Ay lấy điểm C' sao cho $AC' = 10\text{cm}$.

Dựng tia $AH' \perp B'C'$. Trên tia AH' lấy điểm H sao cho $AH = 6\text{cm}$. Qua H kẻ đường thẳng song song với $B'C'$ cắt Ax tại B và Ay tại C . Tam giác ABC là tam giác cần dựng.



Chứng minh : Vì $BC \parallel B'C'$ nên $AH' \perp B'C'$ suy ra $AH \perp BC$.

$AH = m$ là đường cao của $\triangle ABC$. Ngoài ra, theo định lí Ta-let ta có

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{4}{5}.$$

Trường hợp đồng dạng thứ ba

- 35** Chứng minh rằng nếu tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số k thì tỉ số của hai đường phân giác trong tương ứng của chúng cũng bằng k .

Giải

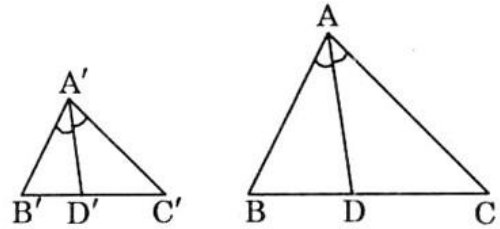
Giả sử $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, $A'D'$, AD là các đường phân giác tương ứng. Xét các tam giác $A'B'D'$ và ABD có :

$$\widehat{B'A'D'} = \frac{1}{2} \widehat{A'} = \frac{1}{2} \widehat{A} = \widehat{BAD}$$

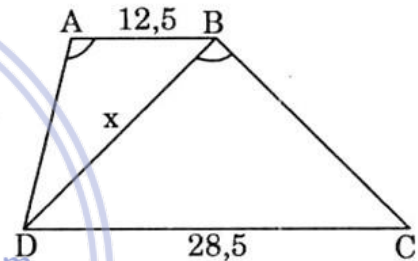
$$\widehat{B'} = \widehat{B} \quad (\text{Vì } \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \text{ nên } \widehat{A'} = \widehat{A}, \widehat{B'} = \widehat{B})$$

Do đó $\triangle A'B'D' \sim \triangle ABD$ (trường hợp thứ ba)

$$\text{Suy ra : } \frac{A'D'}{AD} = \frac{A'B'}{AB} = k \quad (\text{đpcm}).$$



- 36** Tính độ dài x của đoạn thẳng BD trong hình (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất). Biết rằng $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$); $AB = 12,5\text{cm}$; $CD = 28,5\text{cm}$; $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$.

**Giải**

Các tam giác ABD và BDC có

$$\widehat{DAB} = \widehat{DBC} \quad (\text{giả thiết}),$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC} \quad (\text{so le trong, } AB \parallel CD).$$

Vậy $\triangle ABD \sim \triangle BDC$, suy ra :

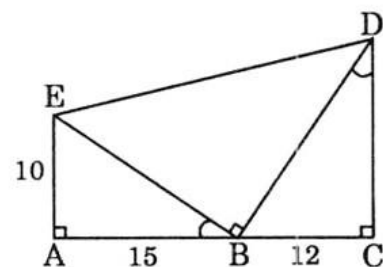
$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BD^2 = AB \cdot DC = 12,5 \times 18,5$$

$$\Rightarrow x = BD = \sqrt{231,25} \approx 15,2\text{cm}.$$

- 37** Hình bên cho biết $\widehat{EBA} = \widehat{BDC}$.

a) Hỏi trong hình vẽ có bao nhiêu tam giác vuông ? Hãy kể tên các tam giác đó.

b) Cho biết $AE = 10\text{cm}$, $AB = 15\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng CD , BE , BD và ED (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



- c) So sánh diện tích tam giác BDE với tổng diện tích của hai tam giác AEB và BCD.

Giải

- a) Trong tam giác vuông BCD có : $\widehat{BDC} + \widehat{DBC} = 90^\circ$.

Vì $\widehat{EBA} = \widehat{BDC}$ nên ta có : $\widehat{EBA} + \widehat{DBC} = 90^\circ$,

suy ra : $\widehat{EBD} = 180^\circ - (\widehat{EBA} + \widehat{DBC}) = 90^\circ$

Vậy $\triangle EBC$ là tam giác vuông tại B. Ngoài ra theo hình đã cho ta còn có các tam giác vuông EAB và DCB. Trong hình có cả thấy ba tam giác vuông.

- b) $\triangle EAB \sim \triangle BCD$ nên :

$$\frac{EA}{BC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow CD = \frac{AB \cdot BC}{EA} = \frac{15 \cdot 12}{10} = 18 \text{ cm}$$

Theo định lí Pi-ta-go :

$$BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{100 + 225} \approx 18,0 \text{ cm}$$

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{12^2 + 18^2} \approx 21,6 \text{ cm}$$

$$ED = \sqrt{BE^2 + BD^2} = \sqrt{325 + 468} \approx 28,2 \text{ cm}$$

$$\text{c) } S_{BDE} = \frac{1}{2} BE \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 21,6 \approx 194,4 \text{ cm}^2$$

$$S_{AEB} + S_{BCD} = \frac{1}{2} [10 \times 15 + 12 \times 18] = 183 \text{ cm}^2 < S_{BDE}.$$

- 38** Tính các độ dài x, y của các đoạn thẳng trong hình bên.

Giải

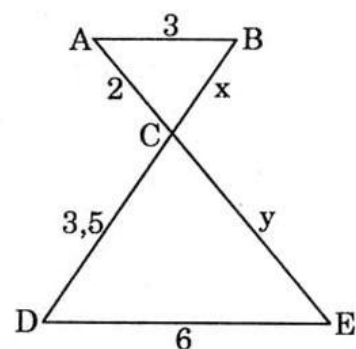
Từ hình vẽ ta thấy $AB \parallel DE$, do đó $\triangle CAB \sim \triangle CED$.

Tỉ số đồng dạng :

$$k = \frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{DE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra : } x = CB = \frac{1}{2} CD = \frac{7}{4}$$

$$y = CE = 2CA = 4.$$



- 39** Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.
- a) Chứng minh rằng $OA \cdot OD = OB \cdot OC$
- b) Đường thẳng qua O vuông góc với AB và CD theo thứ tự tại H và K. Chứng minh rằng $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$.

Giải

a) $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ (vì $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$; $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$)

$$\text{Do đó : } \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OA \cdot OD = OB \cdot OC$$

b) Dễ thấy $\triangle OHA \sim \triangle OKC$, do đó :

$$\frac{OH}{OK} = \frac{AH}{KC} \quad (1)$$

Ta cũng có $\triangle OHB \sim \triangle OKD$, do đó :

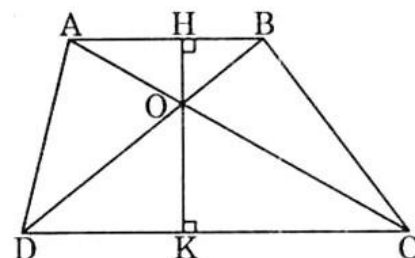
$$\frac{OH}{OK} = \frac{HB}{KD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{OH}{OK} = \frac{AH}{KC} = \frac{HB}{KD} = \frac{AH + HB}{CK + KD} = \frac{AB}{CD}$$

(theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau)

$$\text{Vậy } \frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$$



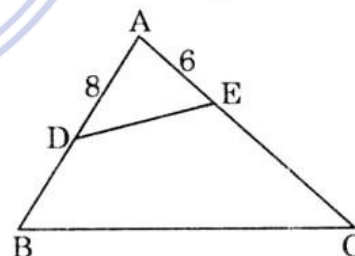
- 40** Cho tam giác ABC trong đó $AB = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $AD = 8\text{cm}$, $AE = 6\text{cm}$. Hai tam giác ABC và ADE có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

Giải

$\triangle ADE \sim \triangle ACB$ vì $\widehat{A}$ chung

$$\frac{AE}{AB} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{AD}{AC}$$

(trường hợp đồng dạng thứ hai)



LUYỆN TẬP 2

- 41** Tìm các dấu hiệu để nhận biết hai tam giác cân đồng dạng.

Giải

Từ ba trường hợp đồng dạng của tam giác thường suy ra các trường hợp đồng dạng của tam giác cân như sau :

- 1) Hai tam giác cân đồng dạng nếu cạnh bên và đáy của tam giác này tỉ lệ với cạnh bên và đáy của tam giác kia.
- 2) Hai tam giác cân đồng dạng nếu chúng có góc ở đỉnh bằng nhau hoặc một góc ở đáy tương ứng bằng nhau.

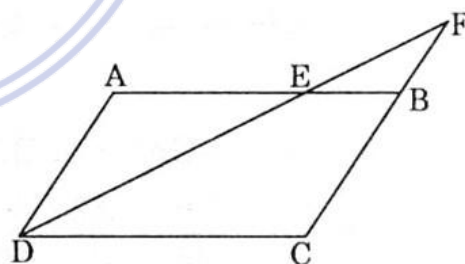
- 42** So sánh các trường hợp đồng dạng của tam giác với các trường hợp bằng nhau của tam giác (nêu lên những điểm giống nhau và khác nhau).

Giải

$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ nếu :	$\Delta A'B'C' = \Delta ABC$ nếu :
1) Hai cạnh của $\Delta A'B'C'$ <i>tỉ lệ</i> với hai cạnh của ΔABC và các góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}, \quad \hat{A}' = \hat{A}$ 2) Nếu hai góc của $\Delta A'B'C'$ lần lượt bằng hai góc của ΔABC $\hat{A}' = \hat{A}, \quad \hat{B}' = \hat{B}$ 3) Nếu ba cạnh của $\Delta A'B'C'$ <i>tỉ lệ</i> với ba cạnh của ΔABC $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$	1) Hai cạnh của $\Delta A'B'C'$ <i>bằng</i> hai cạnh của ΔABC và các góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau $A'B' = AB, A'C' = AC, \hat{A}' = \hat{A}$ 2) Hai góc của $\Delta A'B'C'$ bằng hai góc tương ứng của tam giác ABC và các cạnh kề với hai cặp góc đó bằng nhau. $\hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}, A'B' = AB$ 3) Nếu ba cạnh của $\Delta A'B'C'$ <i>bằng</i> ba cạnh của ΔABC $A'B' = AB; A'C' = AC; B'C' = BC$

- 43** Cho hình bình hành $ABCD$ có độ dài các cạnh là $AB = 12\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$. Trên cạnh AB lấy một điểm E sao cho $AE = 8\text{cm}$. Đường thẳng DE cắt cạnh CB kéo dài tại F .

- a) Trong hình vẽ đã cho có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau ? Hãy viết các cặp tam giác đồng dạng theo các đỉnh tương ứng.



- b) Tính độ dài các đoạn thẳng EF và BF , biết rằng $DE = 10\text{cm}$.

Giải

- a) Các cặp tam giác đồng dạng :

$$\Delta FEB \sim \Delta FDC; \Delta FEB \sim \Delta DEA; \Delta FDC \sim \Delta DEA$$

- b) Ta có : $\Delta EFB \sim \Delta EDA$, do đó $\frac{EF}{ED} = \frac{FB}{DA} = \frac{EB}{EA}$

Thay $ED = 10\text{cm}$, $EA = 8\text{cm}$, $DA = BC = 7\text{cm}$ (vì hình bình hành) ta được :

$$\frac{EF}{10} = \frac{FB}{7} = \frac{4}{8} \Rightarrow EF = 5\text{cm}; \quad BF = 3,5\text{cm}.$$

- 44** Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = 24\text{cm}$, $AC = 28\text{cm}$. Tia phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt cạnh BC tại D. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường thẳng AD.

a) Tính tỉ số $\frac{BM}{CN}$

b) Chứng minh rằng $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$.

Giải

a) $\triangle ABM \sim \triangle ACN$ (vì $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$; $\widehat{M} = \widehat{N}$)

$$\Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$$

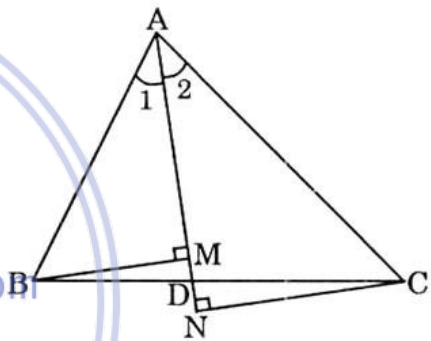
b) $\triangle BMD \sim \triangle CND$ (vì $\widehat{BDM} = \widehat{CDN}$; $\widehat{M} = \widehat{N}$) cho nên

$$\frac{BM}{CN} = \frac{DM}{DN} \quad (1)$$

Theo câu a) $\triangle ABM \sim \triangle ACN$ nên

$$\frac{BM}{CN} = \frac{AM}{AN} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$.

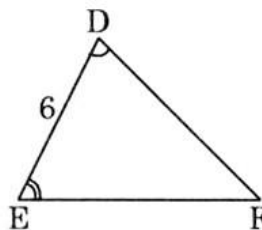
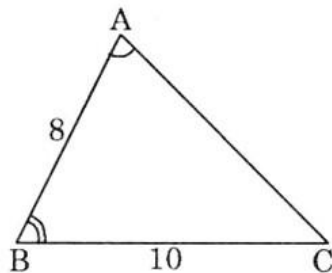


- 45** Hai tam giác ABC và DEF có $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $AB = 8\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$, $DE = 6\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh AC, DF và EF, biết rằng cạnh AC dài hơn cạnh DF là 3cm.

Giải

Ta có: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (vì $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$)

do đó: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{8}{6}$



$$\Rightarrow \frac{AC - DF}{DF} = \frac{8 - 6}{6} \quad \text{hay} \quad \frac{3}{DF} = \frac{2}{6} \quad \Rightarrow \quad DF = 9\text{cm}, AC = 12\text{cm}$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{8}{6} \quad \text{hay} \quad \frac{10}{EF} = \frac{8}{6} \quad \Rightarrow \quad EF = \frac{60}{8} = 7,5\text{cm}.$$

S6. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

TÓM TẮT KIẾN THỨC

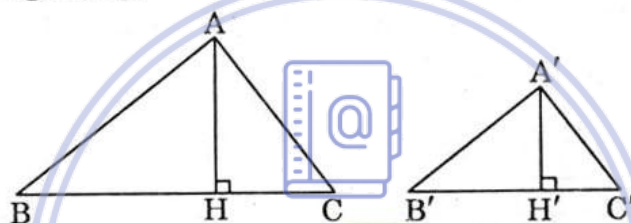
1. Dấu hiệu nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng

Hai tam giác vuông đồng dạng nếu :

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.
- Cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.

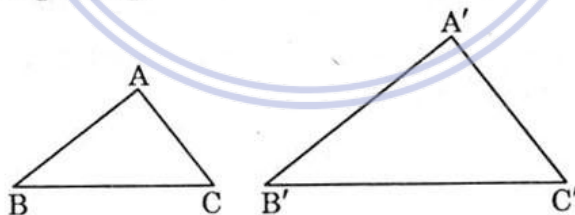
2. Áp dụng

Định lý 1. Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.



GT	$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$
KL	$\frac{A'H'}{AH} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

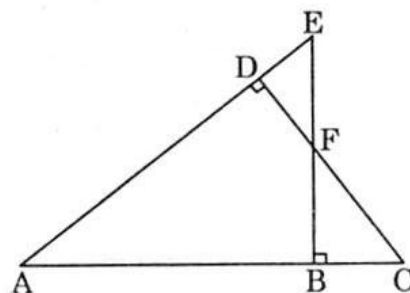
Định lý 2. Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.



GT	$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ tỉ số k
KL	$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{A'C'}{AC}\right)^2 = \left(\frac{B'C'}{BC}\right)^2 = k^2$

BÀI TẬP

- 46** Trên hình bên hãy chỉ ra các tam giác đồng dạng. Viết các tam giác này theo thứ tự các đỉnh tương ứng và giải thích vì sao chúng đồng dạng ?



Giải

Ta có :

 $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ vì các tam giác vuông có góc nhọn $\widehat{A}$ chung $\triangle ABE \sim \triangle FDE$ vì có cùng góc nhọn $\widehat{E}$ $\triangle ABE \sim \triangle FBC$ vì $\widehat{EAB} = \widehat{CFB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{FCB}$) $\triangle ADC \sim \triangle FBC$ vì có cùng góc $\widehat{C}$ $\triangle ADC \sim \triangle FDE$ có $\widehat{DEF} = \widehat{DCA}$ (cùng phụ với góc $\widehat{A}$) $\triangle DFE \sim \triangle BFC$ vì $\widehat{DFE} = \widehat{BFC}$ (đối đỉnh).

- 47** Tam giác ABC có độ dài các cạnh là 3cm, 4cm, 5cm. Tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC và có diện tích là 54cm^2 . Tính độ dài các cạnh của tam giác A'B'C'.

GiảiGiả sử tam giác ABC có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$.Do $3^2 + 4^2 = 5^2$, tức là $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Theo định lí Pi-ta-go đảo, tam giác ABC vuông tại A.

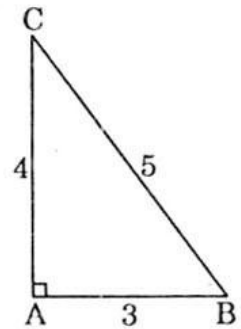
Diện tích tam giác ABC là :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} 3.4 = 6\text{ cm}^2$$

Tỉ số diện tích hai tam giác là :

$$k^2 = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{54}{6} = 9$$

Vậy tỉ số đồng dạng của tam giác A'B'C' và ABC là $k = \sqrt{9} = 3$. Suy ra độ dài các cạnh tam giác A'B'C' là : 9cm, 12cm, 15cm.



- 48** Bóng của một cột điện trên mặt đất có độ dài là 4,5m. Cùng thời điểm đó, một thanh sắt cắm vuông góc với mặt đất cao 2,1m và có bóng dài 0,6m. Tính chiều cao của cột điện.

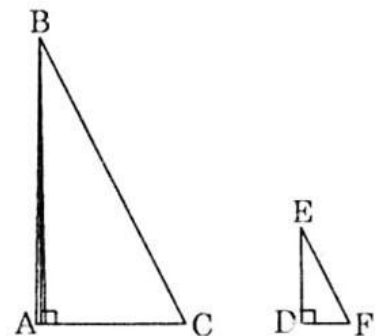
Giải

Giả sử cột điện AB vuông góc với mặt đất có bóng trên mặt đất $AC = 4,5\text{m}$. Thanh sắt $DE = 2,1\text{m}$ có bóng $DF = 0,6\text{m}$. Vì BC và EF đều là hình ảnh của tia nắng mặt trời nên $BC \parallel EF$, suy ra :

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF, \text{ do đó } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC.DE}{DF} = \frac{4,5.2,1}{0,6} = 15,75\text{ m}$$

Vậy chiều cao cột điện là : 15,75m.

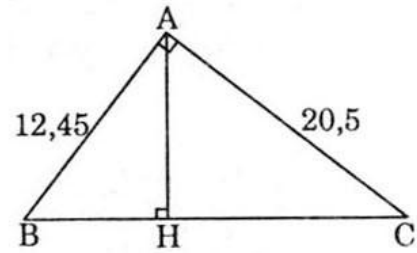


LUYỆN TẬP

- 49** Ở hình bên, tam giác ABC vuông ở A và có đường cao AH.

a) Trong hình vẽ có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau? (Hãy chỉ rõ từng cặp tam giác đồng dạng và viết theo các đỉnh tương ứng).

b) Cho biết $AB = 12,45\text{cm}$; $AC = 20,50\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, AH, BH và CH.



Giải

a) Các cặp tam giác đồng dạng có trong hình vẽ :

$\triangle ABH \sim \triangle CBA$ (các tam giác vuông có cùng góc $\hat{B}$)

$\triangle ACH \sim \triangle BCA$ (các tam giác vuông có cùng góc $\hat{C}$)

$\triangle ABH \sim \triangle CAH$ (có $\widehat{ABH} = \widehat{HAC}$ vì cùng phụ góc $\hat{C}$)

b) Vì $\triangle ABH \sim \triangle CBA$ ta có :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{BA} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}, \quad BH = \frac{AB^2}{BC}$$

Thay $AB = 12,45\text{cm}$; $AC = 20,50\text{cm}$; $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \approx 23,98\text{cm}$

$$AH = \frac{12,45 \cdot 20,50}{23,98} \approx 10,64\text{cm}$$

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{12,45^2}{23,98} \approx 6,46\text{cm}$$

$$CH = BC - BH = 23,98 - 6,46 \approx 17,52\text{cm}.$$

- 50** Bóng của một ống khói nhà máy trên mặt đất có độ dài bằng 36,9m. Cùng thời điểm đó, một thanh sắt cao 2,1m cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 1,62m. Tính chiều cao của ống khói.

Giải

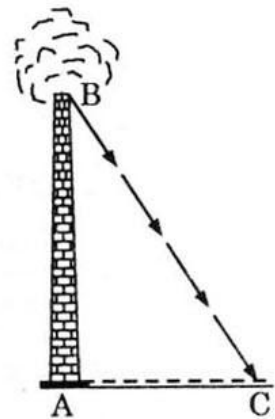
Làm tương tự như trong bài 48. Chiều cao ống khói là độ dài cạnh góc vuông AB, bóng của ống khói là độ dài cạnh góc vuông AC = 36,9m.

Độ dài thanh sắt là độ dài cạnh góc vuông DE = 2,1m. Độ dài bóng thanh sắt là độ dài cạnh góc vuông DF = 1,62m.

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF, \text{ do đó } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{DE \cdot AC}{DF} = \frac{2,1 \cdot 36,9}{1,62} \approx 47,83\text{m}$$

Vậy chiều cao ống khói là 47,83m.



- 51** Chân đường cao AH của tam giác vuông ABC chia cạnh huyền BC thành hai đoạn thẳng có độ dài 25cm và 36cm. Tính chu vi và diện tích của tam giác vuông đó.

Giải

$\triangle ABH \sim \triangle CAH$ vì $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ với góc B), do đó :

$$\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH = 25 \times 36$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{25 \cdot 36} = 30 \text{ cm}$$

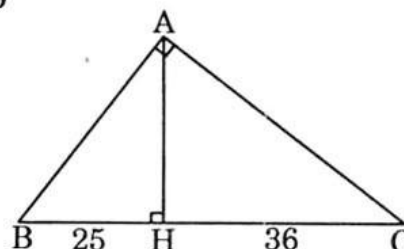
Theo định lí Pi-ta-go :

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} \approx 39,05 \text{ cm}$$

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} \approx 46,86 \text{ cm}$$

Chu vi tam giác : $2p = 39,05 + 46,86 + 61 = 146,91 \text{ cm}$

Diện tích tam giác : $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} 30 \cdot 61 = 915 \text{ cm}^2$.



- 52** Cho một tam giác vuông trong đó cạnh huyền dài 20cm và một cạnh góc vuông dài 12cm. Tính độ dài hình chiếu cạnh góc vuông kia trên cạnh huyền.

Giải

Theo định lí Pi-ta-go : $AC^2 + AB^2 = BC^2$

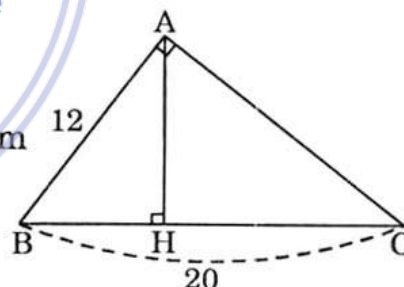
$$\Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{400 - 144} = 16 \text{ cm}$$

Ta lại có :

$\triangle AHC \sim \triangle BAC$ (vì góc C chung)

$$\text{Do đó : } \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{256}{20} = 12,8 \text{ cm}$$

Vậy hình chiếu của AC trên cạnh huyền là $HC = 12,8 \text{ cm}$.



§7. Ứng dụng thực tế của tam giác đồng dạng

- 53** Một người đo chiều cao của một cây nhờ một cọc chôn xuống đất, cọc cao 2m và đặt xa cây 15m. Sau khi người ấy lùi ra xa cách cọc 0,8m thì người ấy nhìn thấy đầu cọc và đỉnh cây cùng nằm trên một đường thẳng. Hỏi cây cao bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ chân đến mắt người ấy là 1,6m.

Giải

Các vị trí của cây CC', cọc BB', người đo AA' được vẽ thành sơ đồ như hình bên. Từ A là mắt người đo kẻ đường thẳng song song với mặt đất cắt cọc BB' tại D và cây CC' tại E. Ta có $\triangle ADB \sim \triangle AEC$, do đó :

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow CE = \frac{AE \cdot BD}{AD} \quad (1)$$

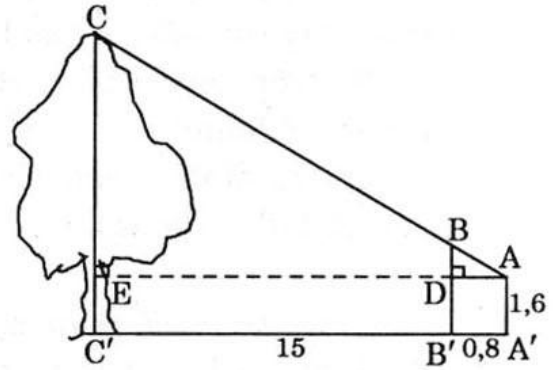
Thay $AE = AD + DE = 0,8 + 15 = 15,8\text{m}$;

$$BD = BB' - DB' = 2 - 1,6 = 0,4\text{m}; \quad AD = 0,8\text{m}$$

ta được : $CE = \frac{15,8 \cdot 0,4}{0,8} = 7,9\text{m}$

Chiều cao của cây là :

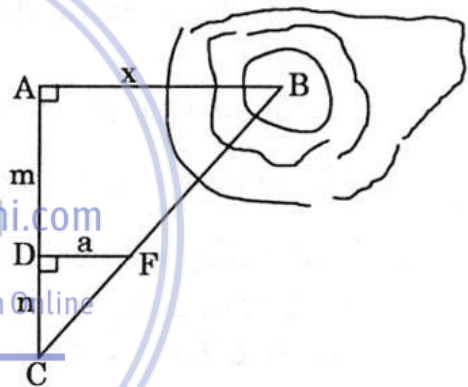
$$CC' = CE + EC' = 7,9 + 1,6 = 9,5\text{m}.$$



- 54** Để đo khoảng cách giữa hai địa điểm A và B, trong đó B không tới được, người ta tiến hành đo và tính khoảng cách AB như hình bên :

$AB \parallel DF$; $AD = m$; $DC = n$; $DF = a$.

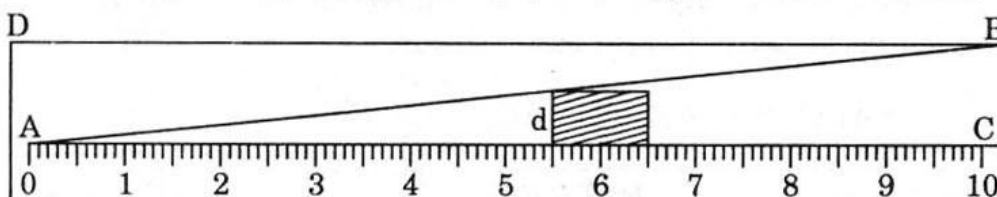
- a) Em hãy nói rõ cách đo như thế nào?
b) Tính độ dài x của khoảng cách AB.

**Giải**

- a) Chọn trên mặt đất điểm C sao cho $CA \perp AB$. Trên đoạn CB chọn điểm F. Từ F tìm điểm D trên CA sao cho $FD \perp CA$. Đo các đoạn thẳng $CD = n$, $DA = m$ và $DF = a$.
b) Để tính độ dài x ta sử dụng tỉ lệ thức của tam giác đồng dạng.

$$\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle DFC &\Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{AC}{DC} \\ \Rightarrow x = AB &= \frac{AC \cdot DF}{DC} = \frac{(m+n) \cdot a}{n} \end{aligned}$$

- 55** Hình dưới đây mô tả dụng cụ đo bề dày của một số loại sản phẩm. Dụng cụ này gồm thước AC được chia đến 0,1mm và gắn với một bản kim loại hình tam giác ABD, khoảng cách $BC = 10\text{mm}$.



Muốn đo bề dày của vật, ta kẹp vật vào giữa hai bản kim loại và thước (đáy của vật áp vào bề mặt của thước AC).

Khi đó, trên thước AC ta đọc được "bề dày" d của vật (trên hình vẽ ta có $d = 5,5\text{mm}$).

Hãy chỉ rõ định lý nào của hình học là cơ sở để ghi các vạch trên thước AC ($d \leq 10\text{mm}$).

Giải

Trên hình vẽ sơ đồ dụng cụ đo, ta thấy tam giác vuông ABC và tam giác đỉnh A với một cạnh giới hạn bởi vật cần đo bề dày là hai tam giác đồng dạng. Bề dày d của vật và khoảng cách từ vật đến đỉnh A và các độ dài BC và AC là các đoạn thẳng tỉ lệ. Do đó, thay cho việc đo bề dày của vật trên thước chia của đoạn BC, ta đo độ dài khoảng cách từ vật đến đầu mút A của thang chia.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. CÂU HỎI

1. Phát biểu và viết tỉ lệ thức biểu thị hai đoạn thẳng AB và CD tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D'.

Trả lời

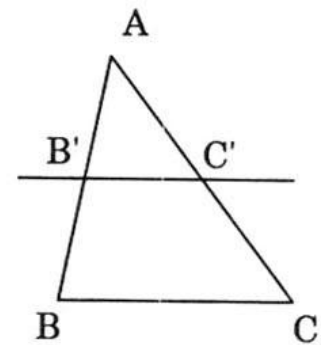
Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$

2. Phát biểu, vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận của định lý Ta-lét trong tam giác.

Trả lời: Định lý Ta-lét:

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

GT	$\triangle ABC; B'C' \parallel BC; (B' \in AB; C' \in AC)$
KT	$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}; \frac{B'B}{B'C} = \frac{C'C}{C'A}$

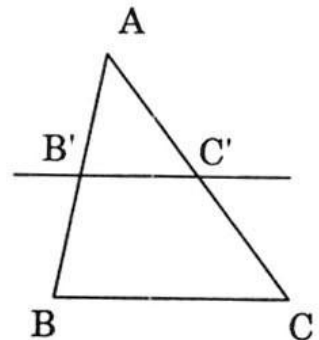


3. Phát biểu, vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận của định lý Ta-lét đảo:

Trả lời: Định lý Ta-lét đảo:

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

GT	$\triangle ABC; B' \in AB; C' \in AC; \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$
KT	$B'C' \parallel BC$

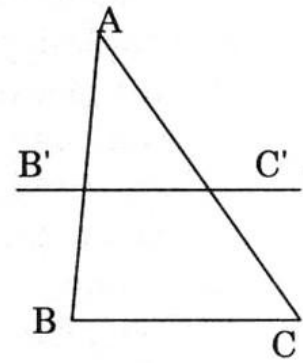


4. Phát biểu, vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận hệ quả của định lí Ta-lét:

Trả lời: Hệ quả định lí Ta-lét:

• Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

GT	$\triangle ABC; B'C' // BC; (B' \in AB; C' \in AC)$
KT	$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$



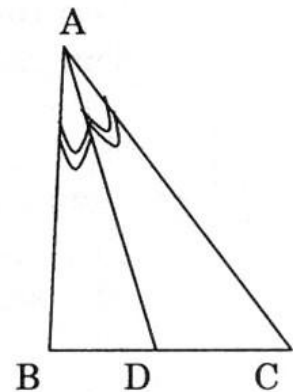
Chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

5. Phát biểu định lí về tính chất của đường phân giác trong của tam giác (vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận).

Trả lời: Định lí:

Trong tam giác, đường phân giác trong của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề bên đoạn thẳng ấy.

GT	$\triangle ABC; AD$ là phân giác góc $\widehat{A}$ ($D \in BC$)
KT	$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$



Chú ý: Định lí vẫn đúng với tia phân giác ngoài.

6. Phát biểu định nghĩa hai tam giác đồng dạng.

Trả lời: Tam giác A'B'C' gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:

$$\widehat{A'} = \widehat{A}; \widehat{B'} = \widehat{B}; \widehat{C'} = \widehat{C}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

Chú ý: Ta có thể phát biểu gọn hơn:

"Hai tam giác đồng dạng với nhau khi chúng có các góc tương ứng bằng nhau và các cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau".

7. Phát biểu định lí về đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh (hoặc phần kéo dài của hai cạnh) còn lại.

Trả lời: Định lí:

"Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho".

8. Phát biểu định lí về ba trường hợp đồng dạng của hai tam giác:

Trả lời:

* Trường hợp đồng dạng thứ nhất:

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đồng dạng.

* Trường hợp đồng dạng thứ hai:

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đồng dạng.

* Trường hợp đồng dạng thứ ba:

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

9. Phát biểu định lý về trường hợp đồng dạng đặc biệt của hai tam giác vuông (trường hợp cạnh huyền và một cạnh góc vuông).

Trả lời:

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

B. BÀI TẬP

- 56** Xác định tỉ số của hai đoạn thẳng AB và CD trong các trường hợp sau:

- a) $AB = 5\text{cm}$, $CD = 15\text{cm}$. c) $AB = 5$, $CD = 15$.
b) $AB = 45\text{dm}$, $CD = 150\text{cm}$.

Giải

a) $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

- b) Đổi các số đo các đoạn thẳng theo cùng một đơn vị đo ta có:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{450}{150} = 3.$$

- c) Dùng đoạn thẳng CD là đơn vị đo ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{5(CD)}{1(CD)} = 5$.

- 57** Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Có nhận xét gì về vị trí của ba điểm H, D, M.

Giải

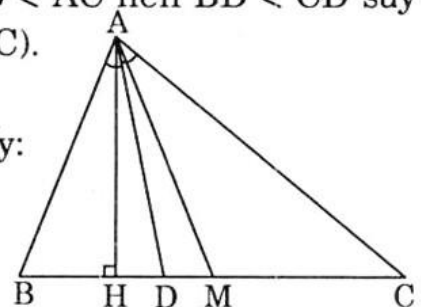
Theo tính chất của đường phân giác trong một tam giác. Các đoạn thẳng BD và CD tỉ lệ với AB và AC mà $AB < AC$ nên $BD < CD$ suy ra D nằm trên đoạn thẳng BM (vì $BM = MC$).

- a) Trường hợp $\hat{B} < 90^\circ$

Xét các tam giác vuông ABH và ACH ta thấy:

$$\widehat{BAH} + \hat{B} = 90^\circ,$$

$$\widehat{CAH} + \hat{C} = 90^\circ.$$



Vì $AC > AB$ nên $\hat{B} > \hat{C}$.

Suy ra $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$, $\widehat{BAH} < \frac{\hat{A}}{2}$,

do đó AH nằm trong góc $\widehat{BAD}$ (vì $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \frac{\hat{A}}{2}$).

Từ các điều chứng minh trên ta thấy tia AD nằm trong góc $\widehat{HAM}$ hay D nằm giữa H và M.

b) Trường hợp $\hat{B} > 90^\circ$, ta cũng có kết quả D nằm giữa H và M.

58 Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), vẽ đường cao BH và đường cao CK.

a) Chứng minh $BK = CH$.

b) Chứng minh $KH \parallel BC$.

c) Cho biết $BC = a$, $AB = AC = b$. Tính độ dài đoạn thẳng HK.

Giải

a) $\triangle BKC = \triangle CHB$ (cạnh huyền BC chung, $\widehat{KBC} = \widehat{HCB}$ vì $\triangle ABC$ cân đỉnh A). Do đó $BK = CH$.

b) Ta có: $AB = AC$, $BK = CH$ (vì $\triangle BKC = \triangle CHB$).

Suy ra $AK = AH$. Các tam giác cân AKH và ABC có góc đỉnh chung nên chúng đồng dạng.

Do đó $\widehat{AKH} = \widehat{ABC}$. Suy ra $KH \parallel BC$.

c) Kẻ đường cao AI của tam giác ABC.

Vì tam giác ABC cân nên AI đồng thời là trung tuyến và

$$BI = CI = \frac{a}{2}.$$

Hai tam giác đồng dạng: $\triangle ABI \sim \triangle CBK$ (tam giác vuông có chung góc nhọn $\hat{B}$) nên

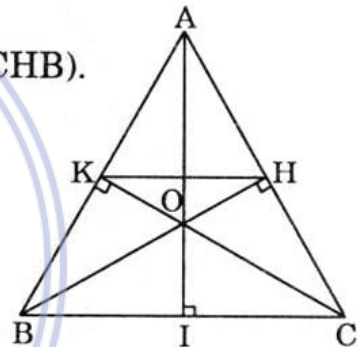
$$\frac{BI}{BK} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow BK = \frac{BC \cdot BI}{AB} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{b} = \frac{a^2}{2b}.$$

Ta đã có: $\triangle ABC \sim \triangle AKH$ nên

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{KH} \Rightarrow KH = \frac{BC \cdot AK}{AB} \quad (1)$$

Thay vào (1) với $BC = a$, $AK = AB - BK = b - \frac{a^2}{2b}$ ta được:

$$KH = \frac{a \cdot \left(b - \frac{a^2}{2b}\right)}{b} = \frac{a(2b^2 - a^2)}{2b^2}.$$



- 59** Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có các đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, hai cạnh bên AD và BC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng OK đi qua trung điểm của các cạnh AB và CD.

Giải

Gọi giao điểm của đường thẳng OK với AB và CD theo thứ tự là E và F. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB. Đường thẳng này cắt AD tại M, cắt BC tại N.

Theo kết quả bài 20 ta có $OM = ON$. Dễ thấy :

- * $\triangle KAE \sim \triangle KMO$, do đó

$$\frac{AE}{OM} = \frac{KE}{KO} \quad (1)$$

- * $\triangle KEB \sim \triangle KON$, do đó

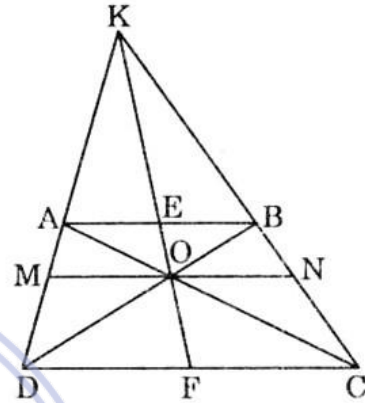
$$\frac{EB}{ON} = \frac{KE}{KO} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta được :

$$\frac{AE}{OM} = \frac{EB}{ON} \quad (3)$$

Từ (3), do $OM = ON$ ta được $AE = EB$, nghĩa là KO đi qua trung điểm E của AB.

Chứng minh tương tự với các cặp tam giác đồng dạng KMO và KDF, KON và KFC ta được F là trung điểm của CD.



- 60** Cho tam giác vuông ABC, $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$ và đường phân giác BD (D thuộc cạnh AC).

a) Tính tỉ số $\frac{AD}{CD}$.

b) Cho biết độ dài $AB = 12,5\text{cm}$, hãy tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

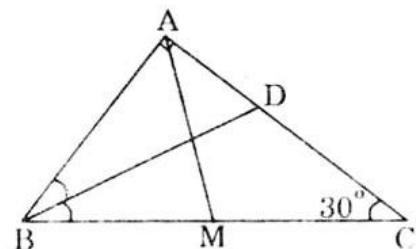
Giải

a) Kẻ trung tuyến AM, theo tính chất của đường trung tuyến tam giác vuông ứng với cạnh huyền, ta có $AM = BM = \frac{BC}{2}$.

Vì $\hat{C} = 30^\circ$ nên $\hat{B} = 60^\circ$, do đó tam giác ABM là tam giác đều và $AB = BM = \frac{BC}{2}$.

Theo tính chất của đường phân giác

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BC} = \frac{1}{2}$$



b) Ta có $BC = 2AB = 2 \times 12,5 = 25\text{cm}$.

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{25^2 - 12,5^2} \approx 21,65\text{cm}.$$

Chu vi tam giác :

$$2p = 12,5 + 25 + 21,65 \approx 59,15\text{cm}.$$

Diện tích tam giác :

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \approx \frac{1}{2} 12,5 \times 21,65 \approx 135,31 \text{ cm}^2.$$

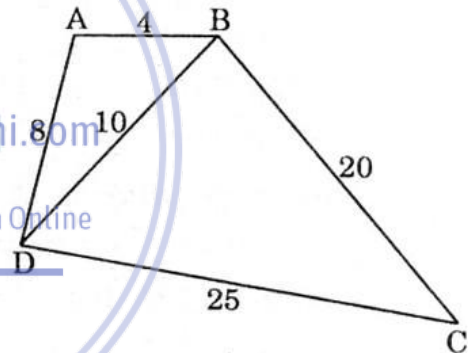
61 Tứ giác ABCD có $AB = 4\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$, $CD = 25\text{cm}$, $DA = 8\text{cm}$, đường chéo $BD = 10\text{cm}$.

- Nêu cách vẽ tứ giác ABCD có kích thước đã cho ở trên.
- Các tam giác ABD và BDC có đồng dạng với nhau không ? Vì sao ?
- Chứng minh rằng $AB \parallel CD$.

Giải

- Ta có thể vẽ tam giác BDC rồi vẽ tam giác ABD hoặc ngược lại. Cách làm như sau :

Dựng đoạn $CD = 25\text{cm}$. Vẽ đường tròn (C, 20cm) và đường tròn (D, 10cm) các đường tròn cắt nhau tại B. Vẽ đường tròn (B, 4cm) và đường tròn (D, 8cm) các đường tròn này cắt nhau tại A. Tứ giác ABCD thỏa mãn đề bài.



Ghi chú : Mỗi lần vẽ hai đường tròn như nêu trên, chúng cắt nhau tại hai điểm. Trong hai giao điểm ta lấy một giao điểm nào đó cũng được.

- Xét các tam giác ABD và BDC ta thấy :

$$\frac{AB}{BD} = \frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{AD}{BC} \quad ; \quad \frac{AB}{BD} = \frac{4}{10} = \frac{10}{25} = \frac{BD}{CD}$$

Suy ra $\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{CD}$

Vậy $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ (trường hợp đồng dạng thứ nhất).

- Do $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ suy ra $AB \parallel CD$.

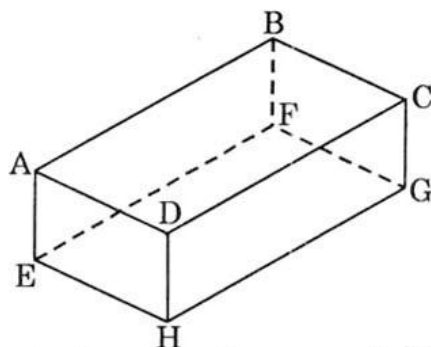
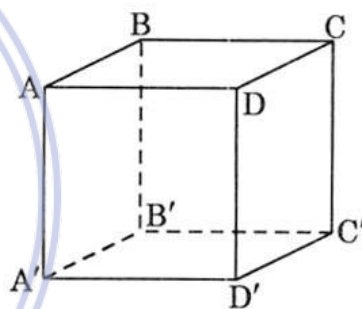
Chương IV

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU*§1, §2. Hình hộp chữ nhật**Đường thẳng, mặt phẳng song song***TÓM TẮT KIẾN THỨC****1. Hình hộp chữ nhật**

- Hình hộp chữ nhật là hình không gian có 6 mặt là những hình chữ nhật. Các đỉnh các cạnh của các hình chữ nhật này gọi là các **đỉnh**, các **cạnh** của hình hộp chữ nhật.

Một hình hộp chữ nhật có 8 đỉnh, 12 cạnh.

- Hai mặt của một hình hộp chữ nhật không có cạnh chung, gọi là **hai mặt đối diện** (có ba cặp mặt đối diện).
- Chọn một cặp mặt đối diện làm **hai đáy**, các mặt còn lại là các **mặt bên**. Ví dụ trong hình bên, nếu $ADHE$ và $BCGF$ là hai đáy thì các mặt $ABCD$, $CDHG$, $FGHE$, $ABFE$ là các mặt bên.

**2. Hình lập phương là một hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình vuông bằng nhau.****3. Hai đường thẳng song song trong không gian**

- Nếu một đường thẳng có hai điểm (phân biệt) thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm khác của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó. Khi đó ta bảo đường thẳng **nằm trong** mặt phẳng.
- Trong không gian hai đường thẳng song song với nhau nếu :
 - Chúng nằm trong cùng một mặt phẳng.
 - Chúng không có điểm chung.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
Ví dụ : Trong hình trên $AB \parallel CD$; $GH \parallel CD \Rightarrow AB \parallel GH$.
- Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt thì chúng có thể:
 - cắt nhau.
 - song song với nhau.
 - không cùng nằm trong một mặt phẳng nào.
 (Các trường hợp a) và b) hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng)

4. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Ví dụ : Trong hình hộp chữ nhật $ABCDEFGH$, mặt phẳng $EFGH$ chứa đường thẳng EF . Đường thẳng AB không thuộc mặt phẳng $EFGH$ và $AB \parallel EF$. Khi đó ta bảo đường thẳng AB song song với mặt phẳng $EFGH$ và kí hiệu $AB \parallel mp (EFGH)$.

Như vậy, một đường thẳng $a \parallel mp (P)$ nếu $mp (P)$ chứa đường thẳng b , $b \parallel a$.

5. Hai mặt phẳng song song

Ví dụ : Trên hình hộp chữ nhật $ABCDEFGH$, mặt phẳng $ADHE$ chứa hai đường thẳng giao nhau AD và AE , mặt phẳng $BCGF$ chứa hai đường thẳng giao nhau BC và BF và $AD \parallel BC$, $AE \parallel BF$. Khi đó ta nói hai mặt phẳng $ADHE$ và $BCGF$ song song với nhau, kí hiệu : $mp (ADHE) \parallel mp (BCGF)$.

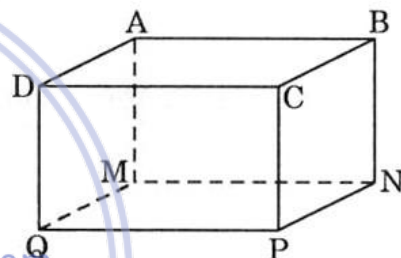
BÀI TẬP

- 1** Hãy kể tên những cạnh bằng nhau của hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$.

Giải

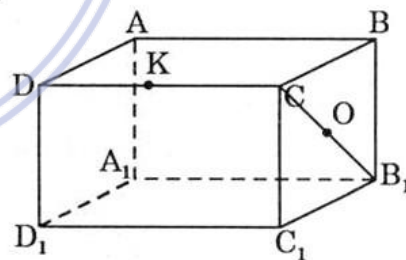
Hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ có các nhóm cạnh bằng nhau như sau :

- $AB = CD = MN = PQ$
- $AD = BC = PN = MQ$
- $AM = BN = CP = DQ$



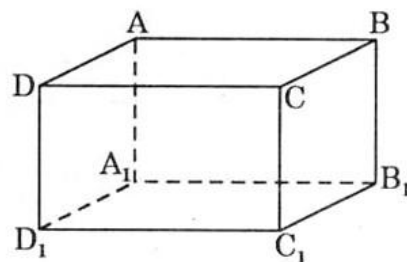
- 2** $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là một hình hộp chữ nhật.

- a) Nếu O là trung điểm của đoạn CB_1 thì O có là điểm thuộc đoạn BC_1 hay không ?
- b) K là điểm thuộc cạnh CD , liệu K có thể là điểm thuộc cạnh BB_1 hay không ?

**Giải**

- a) Do BCC_1B_1 là hình chữ nhật nên trung điểm O của đường chéo CB_1 đồng thời là trung điểm của đường chéo BC_1 , tức là $O \in BC_1$.
- b) K không thể là điểm thuộc cạnh BB_1 do CD và BB_1 không thể có điểm chung.

- 3** Các kích thước của hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là : $DC = 5\text{cm}$, $CB = 4\text{cm}$, $BB_1 = 3\text{cm}$. Hỏi độ dài DC_1 và CB_1 là bao nhiêu xentimet ?



Giải

a) Tam giác DCC_1 là tam giác vuông.

Theo định lí Pi-ta-go ta có :

$$DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5,83\text{cm}$$

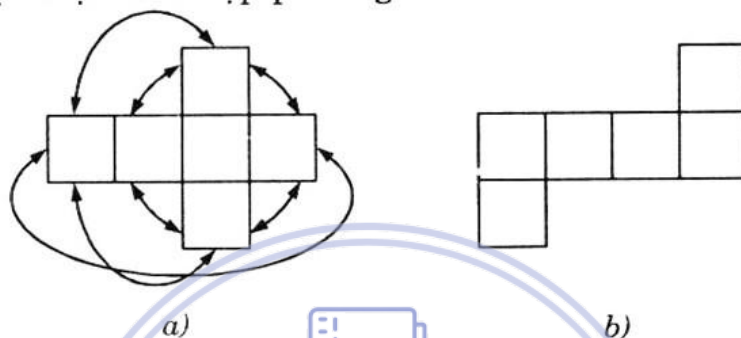
(vì $CC_1 = BB_1 = 3\text{cm}$).

b) Tương tự như trên, ta có :

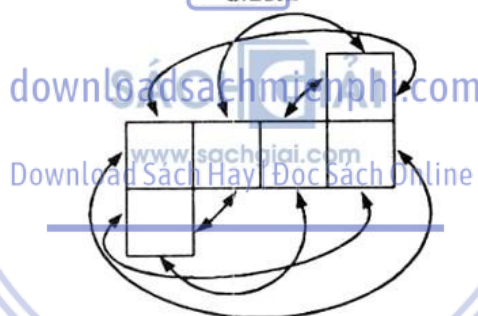
$$CB_1 = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{cm}.$$

4

Xem hình a), các mũi tên hướng dẫn cách ghép các cạnh với nhau để có được một hình lập phương.

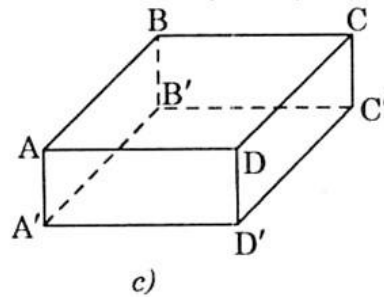
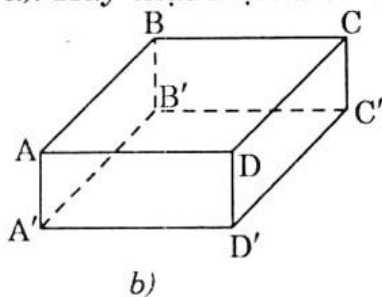
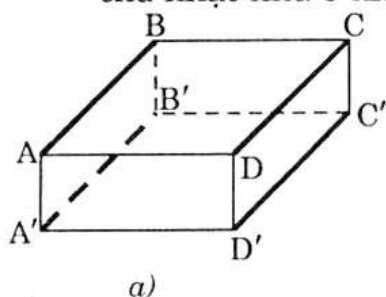
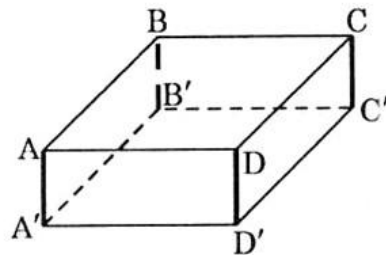
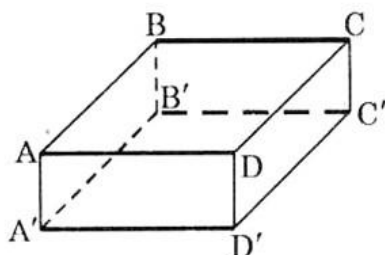


Hãy điền thêm vào hình b) các mũi tên như vậy.

Giải

5

Người ta tô đậm những cạnh song song và bằng nhau của một hình hộp chữ nhật như ở hình a). Hãy thực hiện điều đó đối với hình b) và c).

**Giải**

a) Tô hình b) các cạnh song song và bằng nhau

$$AD = BC = B'C' = A'D'.$$

b) Tô hình c) các cạnh song song và bằng nhau

$$AA' = BB' = CC' = DD'.$$

6

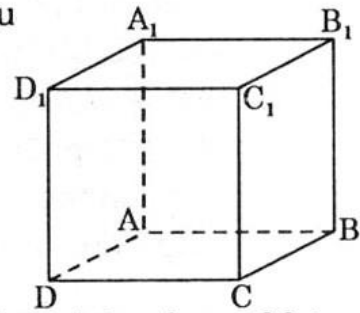
$ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là một hình lập phương

(xem hình bên). Quan sát hình và cho biết :

a) Những cạnh nào song song với cạnh C_1C ?

b) Những cạnh nào song song với A_1D_1 ?

Ghi chú : Hai cạnh song song của hình hộp chữ nhật nhưng không nằm trong một mặt của hình hộp gọi là hai cạnh đối diện. Ví dụ CD và A_1B_1 .



Giải

a) Các cạnh song song với C_1C là B_1B , A_1A và D_1D .

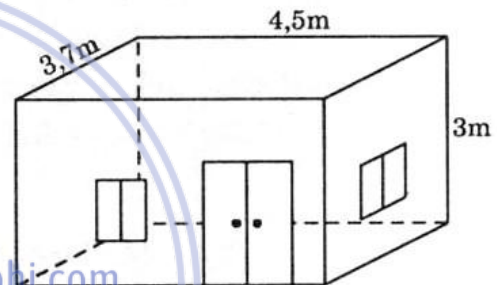
b) Những cạnh song song với A_1D_1 là B_1C_1 , BC và AD .

7

Một căn phòng dài 4,5m, rộng

3,7m và cao 3,0m.

Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $5,8m^2$. Hãy tính diện tích cần quét vôi.



Giải

Diện tích trần nhà :

$$S_1 = 4,5 \times 3,7 = 16,65 m^2$$

Diện tích một mặt các bức tường của căn phòng :

$$S_2 = (4,5 + 3,7) \times 2 \times 3 = 49,2 m^2$$

Diện tích cần quét vôi căn phòng (đã trừ diện tích các cửa) là :

$$S = S_1 + S_2 - 5,80 = 16,65 + 49,20 - 5,80 = 60,05 m^2.$$

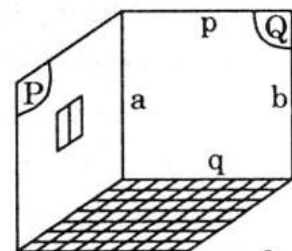
8

Hình bên dưới vẽ một phòng ở. Quan sát

hình và giải thích tại sao :

a) Đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) ?

b) Đường thẳng p song song với sàn nhà ?



Giải

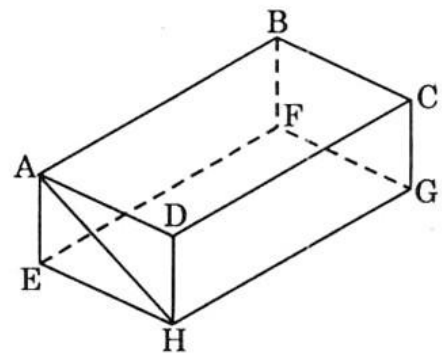
a) Đường thẳng b song song với đường thẳng a , mà đường thẳng a nằm trong mặt phẳng P . Vậy $b \parallel mp (P)$.

b) Đường thẳng p song song với đường thẳng q , mà đường thẳng q nằm trong mặt phẳng sàn nhà. Vậy p song song với sàn nhà.

9

Hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có cạnh AB song song với mặt phẳng $(EFGH)$.

- a) Hãy kể tên các cạnh khác song song với mặt phẳng (EFGH).
- b) Cạnh CD song song với mặt phẳng nào của hình hộp chữ nhật ?
- c) Đường thẳng AH không song song với mặt phẳng (EFGH), hãy chỉ ra mặt phẳng song song với đường thẳng đó.



Giải

- a) $BC \parallel FG$ mà FG nằm trong mặt phẳng (EFGH).
 Vậy $BC \parallel mp(EFGH)$.
 Tương tự, $CD \parallel GH$, GH thuộc $mp(EFGH)$. Vậy $CD \parallel mp(EFGH)$.
 Cũng lý do tương tự ta còn có $AD \parallel mp(EFGH)$.
- b) Cạnh CD song song với mặt phẳng (EFGH) vì $CD \parallel GH$ mà GH thuộc (EFGH).
 Cạnh CD cũng song song với mặt phẳng (ABFE) vì đường thẳng AB thuộc $mp(ABFE)$ mà $CD \parallel AB$.
- c) Kẻ đường thẳng BG nằm trong mặt phẳng BCGF. Ta có $AH \parallel BG$.
 Vậy đường thẳng AH song song với mặt phẳng (BCHG).

§3. Thế tích của hình hộp chữ nhật

Đường thẳng, mặt phẳng vuông góc

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng AE (hình bên) vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau EG và EI nằm trong mặt phẳng EGHI ta bảo là **đường thẳng AE vuông góc với mặt phẳng EGHI**, kí hiệu :

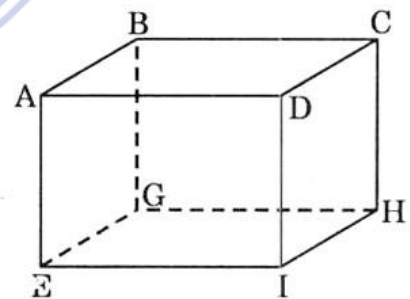
$$AE \perp mp(EGHI).$$

Khi một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Khi một trong hai mặt phẳng chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại ta bảo hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Trong hình trên, mặt phẳng ABGE chứa đường thẳng AE vuông góc với mặt phẳng EGHI thì hai mặt phẳng ABGE và EGHI vuông góc với nhau. Ta kí hiệu : $mp(ABGE) \perp mp(EGHI)$.

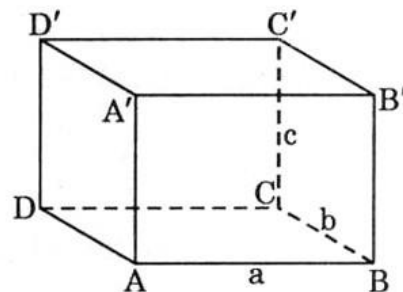


3. Thể tích của hình hộp chữ nhật

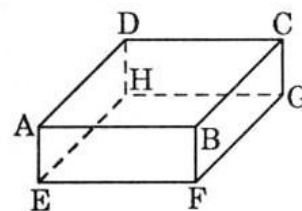
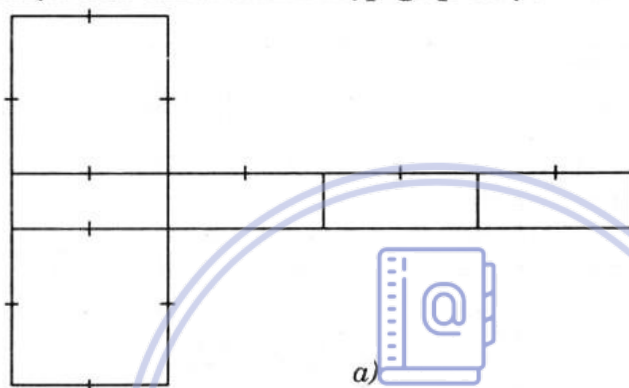
Nếu hình hộp chữ nhật có các kích thước a , b và c (cùng đơn vị đo độ dài) thì thể tích của nó là :

$$V = a.b.c$$

Đặc biệt, hình lập phương cạnh a có thể tích là: $V = a^3$.

**BÀI TẬP**

- 10** 1. Gấp hình a) theo các nét đã chỉ ra thì có được một hình hộp chữ nhật hay không ?
2. Kí hiệu các đỉnh hình hộp gấp được như hình b).



- a) Đường thẳng BF vuông góc với những mặt phẳng nào ?
b) Hai mặt phẳng (AEHD) và (CGHD) vuông góc với nhau, vì sao ?

Giải

1. Hình a) gồm 6 hình chữ nhật chia thành ba cặp hình chữ nhật bằng nhau nên khi gấp theo các nét được đánh dấu ta được một hình hộp chữ nhật.
2. a) Đường thẳng BF vuông góc với mặt phẳng ABCD (vì $BF \perp AB$, $BF \perp BC$ mà AB và BC là hai đường thẳng giao nhau nằm trong mặt phẳng ABCD) và BF vuông góc với mặt phẳng EFGH (vì $BF \perp EF$ và $BF \perp FG$), các đường thẳng EF và FG nằm trong mặt phẳng EFGH và EF và FG giao nhau tại F.
- b) mp(AEHD) $\perp$ mp(CGHD) do mặt phẳng AEHD chứa đường thẳng AD mà $AD \perp CD$, $AD \perp DH$ và các đường thẳng CD và DH nằm trong mặt phẳng CGHD và giao nhau tại D.

- 11** a) Tính các kích thước của một hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4, 5 và thể tích của hình hộp này là 480cm^3 .
b) Diện tích toàn phần của một hình lập phương là 486m^2 . Thể tích của nó là bao nhiêu?

Giải

a) Gọi các kích thước của hình hộp là a, b, c . Theo giả thiết ta có :

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow k^3 = \frac{a \cdot b \cdot c}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{480}{60} = 8 \Rightarrow k = 2$$

Vậy các kích thước của hình hộp chữ nhật là

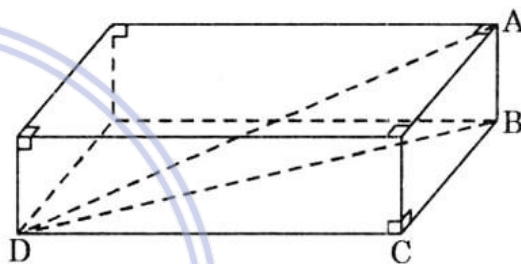
$$a = 6\text{cm}, b = 8\text{cm}, c = 10\text{cm}.$$

b) Hình lập phương có 6 mặt là các hình vuông bằng nhau. Vậy diện tích một mặt hình vuông là : $486 : 6 = 81\text{m}^2$. Một cạnh hình lập phương dài bằng : $a = \sqrt{81} = 9\text{m}$. Thể tích hình lập phương là :

$$V = 9 \times 9 \times 9 = 729\text{m}^3.$$

12 A, B, C và D là những đỉnh của hình hộp chữ nhật cho ở hình bên dưới. Hãy điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau :

AB	6	13	14	
BC	15	16		34
CD	42		70	62
DA		45	75	75



Kết quả bài 12 minh họa công thức quan trọng sau :

$$DA = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2}$$

Giải

a) Số cần điền vào ô trống ở cột 1 là :

$$DA = \sqrt{6^2 + 15^2 + 42^2} = 45$$

b) Số điền vào ô trống cột 2 là :

$$CD = \sqrt{45^2 - (13^2 + 16^2)} = 40$$

c) Số điền vào ô trống cột 3 là :

$$BC = \sqrt{75^2 - (70^2 + 14^2)} = 23$$

d) Số điền vào ô trống cột 4 là :

$$AB = \sqrt{75^2 - (62^2 + 34^2)} = 25$$

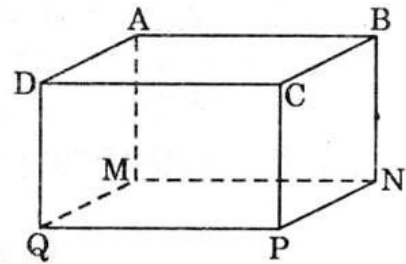
Kết quả ta có bảng bên :

AB	6	13	14	25
BC	15	16	23	34
CD	42	40	70	62
DA	45	45	75	75

13 a) Viết công thức tính thể tích của hình hộp chữ nhật ABCD.MNPQ.

b) Điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau :

Chiều dài	22	18	15	20
Chiều rộng	14			
Chiều cao	5	6	8	
Diện tích một đáy		90		260
Thể tích			1320	2080



Giải

a) Thể tích : $V = AB \times AD \times AM$.

b) Các số cần điền

Cột 1 : Diện tích một đáy : $22 \times 14 = 308$

Thể tích : $308 \times 5 = 1540$

Cột 2 : Chiều rộng : $90 : 18 = 5$

Thể tích : $90 \times 6 = 540$

Cột 3 : Diện tích một đáy : $1320 : 8 = 165$

Chiều rộng : $165 : 15 = 11$

Cột 4 : Chiều cao : $2080 : 260 = 8$

Chiều rộng : $260 : 20 = 13$

Kết quả được ghi ở bảng sau :

Chiều dài	22	18	15	20
Chiều rộng	14	5	11	13
Chiều cao	5	6	8	8
Diện tích một đáy	308	90	165	260
Thể tích	1540	540	1320	2080

LUYỆN TẬP

- 14** Một bể nước hình hộp chữ nhật, chiều dài 2m. Lúc đầu bể không có nước. Sau khi đổ vào bể 120 thùng nước, mỗi thùng chứa 20 lít thì mực nước của bể cao 0,8m.

a) Tính chiều rộng của bể nước.

b) Người ta đổ thêm vào bể 60 thùng nước nữa thì đầy bể. Hỏi bể cao bao nhiêu mét ?

Giải

a) Khối nước được đổ vào lần đầu là :

$$120 \times 20 = 2400 \text{ lít} = 2,4\text{m}^3.$$

Diện tích đáy bể là : $2,4 : 0,8 = 3\text{m}^2$.

Chiều rộng đáy bể là : $3 : 2 = 1,5\text{m}$.

b) Lượng nước đổ vào bể cả hai lần là :

$$(120 + 60) \times 20 = 3600 \text{ lít} = 3,6\text{m}^3$$

Chiều cao của bể là : $3,6 : 3 = 1,2\text{m}$.

- 15** Một cái thùng hình lập phương, cạnh 7dm, có chứa nước với độ sâu của nước là 4dm. Người ta thả 25 viên gạch có chiều dài 2dm, chiều rộng 1dm và chiều cao 0,5dm vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miệng thùng bao nhiêu đêximét? (Giả thiết toàn bộ gạch ngập trong nước và chúng hút nước không đáng kể).

Giải

Thể tích tổng cộng của 25 viên gạch là :

$$2 \times 1 \times 0,5 \times 25 = 25\text{dm}^3.$$

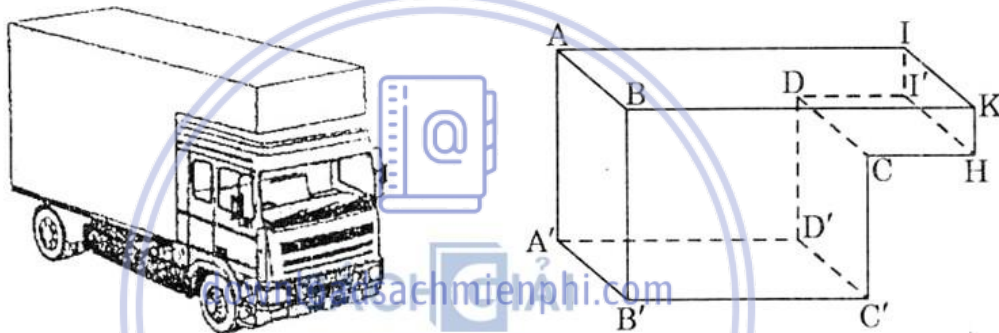
Chiều cao nước dâng lên khi bỏ gạch vào thùng là :

$$25 : (7 \times 7) \approx 0,51\text{dm}.$$

Mức nước trong thùng cách miệng thùng là :

$$7 - (4 + 0,51) = 2,49\text{dm}.$$

- 16** Thùng chứa của một xe chở hàng đông lạnh có dạng như hình dưới. Một số mặt là những hình chữ nhật, chẳng hạn (ABKI), (DCC'D'), ... Quan sát hình và trả lời các câu hỏi sau :



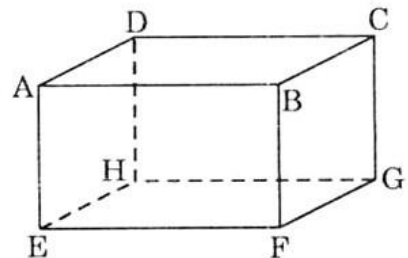
- Những đường thẳng nào song song với mặt phẳng (ABKI) ?
- Những đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (DCC'D') ?
- Mặt phẳng (A'D'C'B') có vuông góc với mặt phẳng (DCC'D') hay không ?

Giải

- Các đường thẳng A'B', B'C', C'D', A'D', CD, DI', HI', HC song song với mp (ABKI).
- A'D', B'C', AI, BK, DI' và HC là các đường thẳng vuông góc với mp (DCC'D').
- mp (A'D'C'B') $\perp$ mp (DCC'D') vì mp (A'D'C'B') chứa đường thẳng A'D' vuông góc với hai đường thẳng giao nhau thuộc mp (DCC'D') là DD' và C'D'.

- 17** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH.

- Kể tên các đường thẳng song song với mp (EFGH).
- Đường thẳng AB song song với những mặt phẳng nào ?
- Đường thẳng AD song song với những đường thẳng nào?



Giải

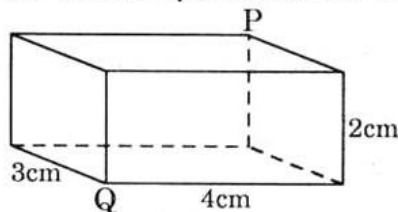
a) AB, BC, CD, AD .

b) $AB \parallel mp(EFGH)$ vì $AB \parallel EF$ và EF nằm trong $mp(EFGH)$.

$AB \parallel mp(DCGH)$ vì $AB \parallel DC$ và DC nằm trong $mp(DCGH)$.

c) $AD \parallel BC, AD \parallel EH, AD \parallel FG$.

- 18** **Đố.** Các kích thước của một hình hộp chữ nhật là 4cm, 3cm và 2cm. Một con kiến bò theo mặt của hình hộp đó từ Q đến P.



a) Hỏi con kiến bò theo đường nào là ngắn nhất ?

b) Độ dài ngắn nhất đó là bao nhiêu xentimét ?

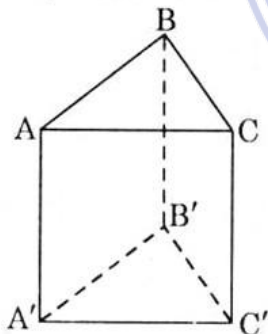
Bạn tự giải.

§4. Hình lăng trụ đứng

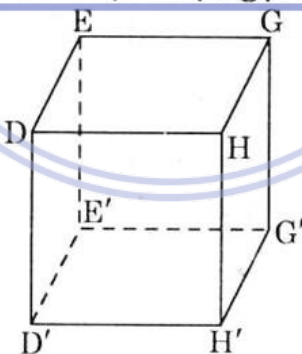
TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Khái niệm hình lăng trụ đứng

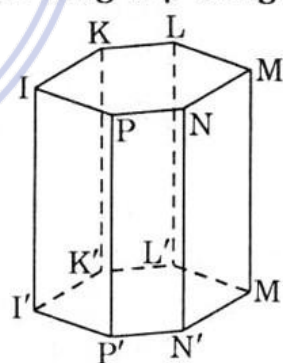
Hình không gian có hai mặt đáy là các đa giác (tam giác, tứ giác, ngũ giác, ...) bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song, các mặt bên là các hình chữ nhật được gọi là hình lăng trụ đứng.



h.a



h.b



h.c

- Trong hình *h.a*, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CAA'C'$ là các hình chữ nhật. Lăng trụ đứng có đáy là tam giác gọi là **lăng trụ đứng tam giác**. Độ dài cạnh hình chữ nhật nối từ đáy này đến đáy kia là **chiều cao** của lăng trụ đứng.
- Trong hình *h.b*, lăng trụ đứng có đáy $DEGH, D'E'G'H'$ là các hình bình hành được gọi là **hình hộp đứng**. Hình hộp chữ nhật, hình lập phương cũng là lăng trụ đứng.

2. Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng tích của chu vi đáy với chiều cao của nó.

Kí hiệu $2p$ là chu vi đáy, h là chiều cao, S_{xq} là diện tích xung quanh thì

$$S_{xp} = 2p.h.$$

3. Thể tích hình lăng trụ đứng

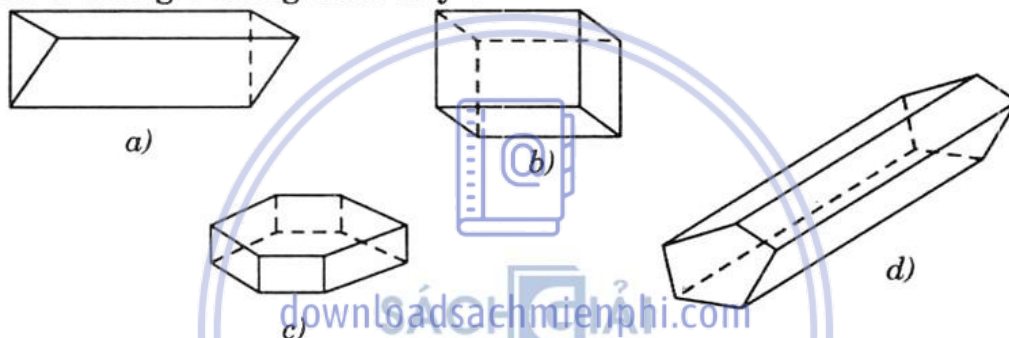
Thể tích hình lăng trụ đứng bằng tích của diện tích đáy với chiều cao của nó.

Kí hiệu, B là diện tích đáy, h là chiều cao, V là thể tích của lăng trụ đứng thì

$$V = B.h.$$

BÀI TẬP

- 19** Quan sát các lăng trụ đứng trong hình rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng dưới đây :



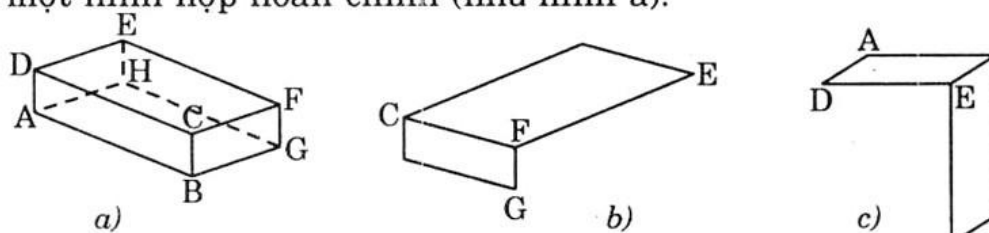
Hình	a)	b)	c)	d)
Số cạnh của một đáy	3			
Số mặt bên		4		
Số đỉnh			12	
Số cạnh bên				5

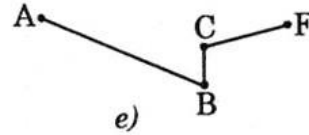
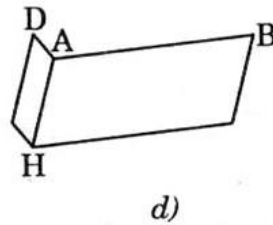
Giải

Các số cần điền vào bảng theo từng cột, theo thứ tự từ trên xuống dưới như sau :

- + Cột a) : 3; 6; 3.
- + Cột b) : 4; 8; 4.
- + Cột c) : 6; 6; 6.
- + Cột d) : 5; 5; 10.

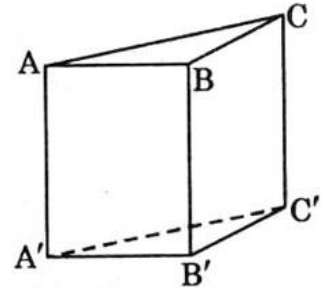
- 20** Vẽ lại các hình sau vào vở rồi thêm các cạnh vào các hình b, c, d, e để có một hình hộp hoàn chỉnh (như hình a).





Bạn tự giải.

- 21** $ABC.A'B'C'$ là một lăng trụ đứng tam giác (hình bên).



- a) Những cặp mặt nào song song với nhau ?
 b) Những cặp mặt nào vuông góc với nhau ?
 c) Sử dụng kí hiệu $//$ và $\perp$ để điền vào các ô trống ở bảng sau :

Cạnh \ Mặt	AA'	CC'	BB'	A'C'	B'C'	A'B'	AC	CB	AB
ACB		$\perp$				$//$			
A'C'B'									
ABB'A'									

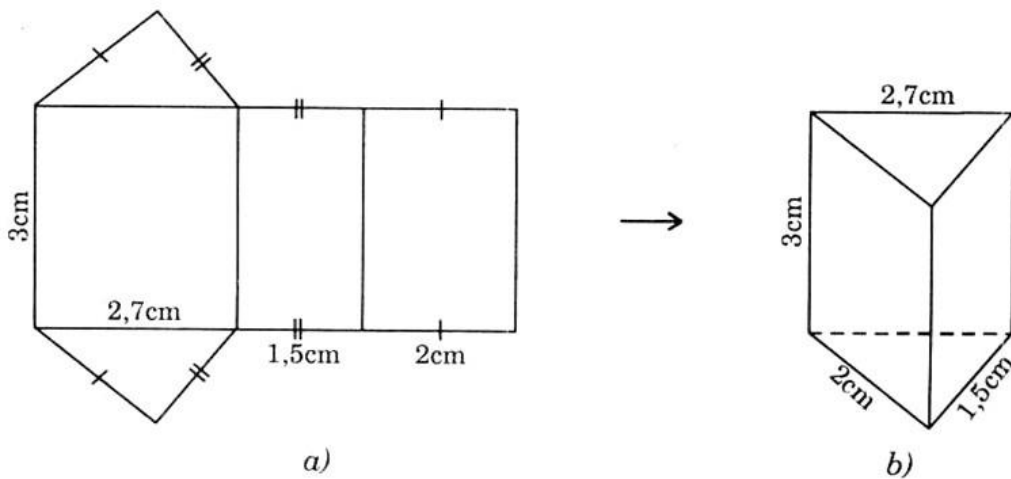
Giải

- a) mp (ABC) và mp (A'B'C').
 b) mp (ABC) và mp (ABB'A'); mp (ABC) và mp (BCC'B');
 mp (ABC) và mp (ACC'A').
 mp (A'B'C') và mp (ABB'A'); mp (A'B'C') và mp (BCC'B');
 mp (A'B'C') và mp (ACC'A').

- c) Ta có bảng sau :

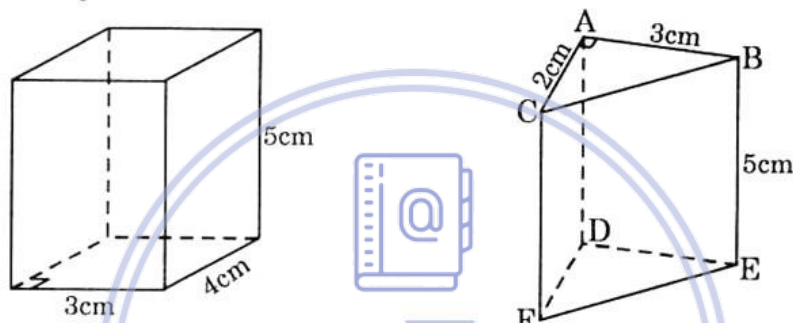
Cạnh \ Mặt	AA'	CC'	BB'	A'C'	B'C'	A'B'	AC	CB	AB
ACB	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$//$	$//$	$//$			
A'C'B'	$\perp$	$\perp$	$\perp$				$//$	$//$	$//$
ABB'A'		$//$							

- 22** Vẽ theo hình a) rồi cắt và gấp lại để thành hình b).



Bạn tự giải.

- 23** Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần các hình lăng trụ đứng sau đây :



- a) Hình hộp chữ nhật (lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật) có :

Diện tích xung quanh : $S_{xq} = 2(3 + 4) \cdot 5 = 70 \text{ cm}^2$

Diện tích toàn phần : $S_{tp} = 2 \times 3 \times 4 + S_{xq} = 94 \text{ cm}^2$.

- b) Lăng trụ đứng tam giác có :

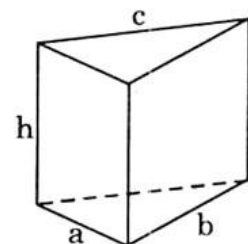
Cạnh huyền của tam giác đáy dài là: $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$.

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = (2 + 3 + \sqrt{13}) \cdot 5 = (25 + 5\sqrt{13}) \text{ cm}^2$.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2 \times \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 31 + 5\sqrt{13} \text{ cm}^2$.

- 24** Quan sát lăng trụ đứng đáy là tam giác rồi hoàn chỉnh bảng sau :

a (cm)	5	3	12	7
b (cm)	6	2	15	
c (cm)	7		13	6
h (cm)	10	5		
Chu vi đáy (cm)		9		21
$S_{xq} (\text{cm}^2)$			80	63



Giải

Các số phải điền vào các ô trống được tính như sau :

+ Ở cột 1 : Chu vi đáy : $5 + 6 + 7 = 18(\text{cm})$; $S_{xq} = 18 \times 10 = 180(\text{cm}^2)$

+ Cột 2 : $c = (9 - 3 - 2) = 4(\text{cm})$; $S_{xq} = 9 \times 5 = 45(\text{cm}^2)$

+ Cột 3 : Chu vi đáy : $12 + 15 + 13 = 40(\text{cm})$; $h = 80 : 40 = 2(\text{cm})$

+ Cột 4 : $b = 21 - (7 + 6) = 8(\text{cm})$; $h = 63 : 21 = 3(\text{cm})$

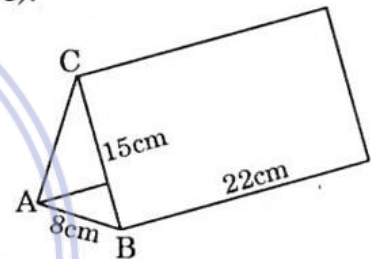
Kết quả ta có bảng sau :

a (cm)	5	3	12	7
b (cm)	6	2	15	8
c (cm)	7	4	13	6
h (cm)	10	5	2	3
Chu vi đáy (cm)	18	9	40	21
S_{xq} (cm^2)	180	45	80	63

- 25** Tấm lịch để bàn (xem lại hình của bài 21) có dạng một lăng trụ đứng, ACB là một tam giác cân (hình bên dưới).

a) Hãy vẽ thêm nét khuất, điền thêm chữ vào các đỉnh rồi cho biết AC song song với những cạnh nào ?

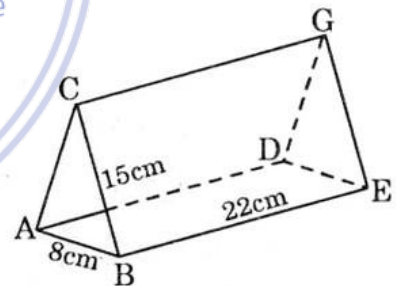
b) Tính diện tích miếng bìa dùng để làm một tấm lịch như trên

**Giải**

a) Xem hình bên.

b) Diện tích miếng bìa cần dùng bằng diện tích xung quanh lăng trụ đứng mà đáy là tam giác cân ABC (đỉnh C) và chiều cao BE.

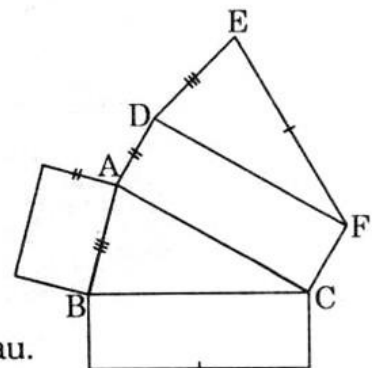
$$S = S_{xq} = (15 \times 2 + 8) \cdot 22 = 836 \text{ cm}^2.$$



- 26** a) Từ hình khai triển (hình bên), có thể gấp theo các cạnh để có được một lăng trụ đứng hay không ? (Các tứ giác trên hình đều là những hình chữ nhật).

b) Trong hình vừa gấp được, xét xem các phát biểu dưới đây, phát biểu nào đúng :

- Cạnh AD vuông góc với cạnh AB.
- EF và CF là hai cạnh vuông góc với nhau.
- Cạnh DE và cạnh BC vuông góc với nhau.
- Hai đáy (ABC) và (DEF) nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.
- Mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng (ACFD).

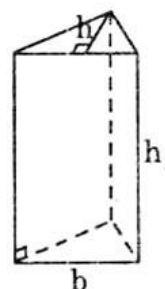


Giải

- a) Gấp theo các cạnh ta được một lăng trụ đứng có các đáy là ABC và DEF.
- b) Các phát biểu thứ nhất, thứ hai và thứ tư đúng, hai phát biểu còn lại sai.

- 27** Quan sát hình bên dưới rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau :

b	5	6	4	
h	2			4
h_1	8	5		10
Diện tích một đáy		12	6	
Thể tích			12	50

**Giải**

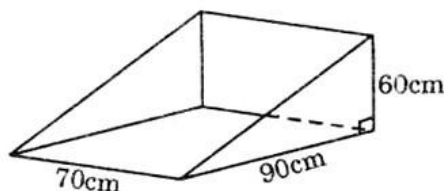
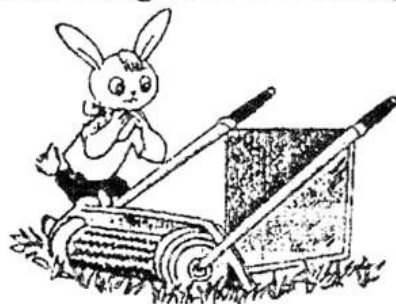
Các số cần điền vào các ô trống trong bảng theo từng cột như sau :

- + Cột 1 : Diện tích đáy : $\frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$; Thể tích : $5 \times 8 = 40$
- + Cột 2 : $h = 2 \times 12 : 6 = 4$; Thể tích : $12 \times 5 = 60$
- + Cột 3 : $h_1 = 12 : 6 = 2$; $h = 2 \times 6 : 4 = 3$
- + Cột 4 : Diện tích đáy : $50 : 10 = 5$; $b = 5 \times 2 : 4 = 2,5$

Kết quả ta được bảng sau :

b	5	6	4	2,5
h	2	4	3	4
h_1	8	5	2	10
Diện tích một đáy	5	12	6	5
Thể tích	40	60	12	50

- 28** Thùng đựng của một máy cắt cỏ có dạng lăng trụ đứng tam giác. Hãy tính dung tích của thùng.

**Giải**

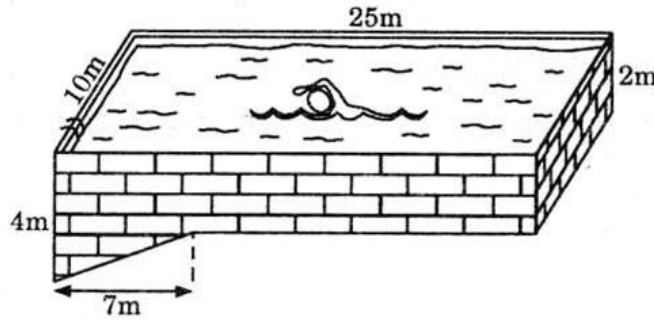
Diện tích đáy lăng trụ : $S = \frac{1}{2} \times 60 \times 90 = 2700 \text{ cm}^2$.

Dung tích thùng máy cắt cỏ :

$$V = S \times h = 2700 \times 70 = 189000 \text{ cm}^3 = 189 \text{ lít.}$$

- 29** Các kích thước của một bể bơi cho trên hình dưới đây (mặt nước có dạng hình chữ nhật).

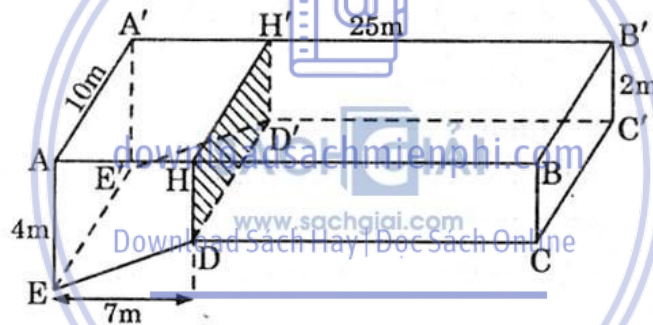
Hãy tính xem bể chứa được bao nhiêu m^3 nước khi nó đầy ắp nước.



Giải

Cách thứ nhất

Bể bơi có dạng lăng trụ đứng mà các mặt đáy là các hình ABCDE, A'B'C'D'E'. Để tính dung tích bể bơi ta chia thành hai lăng trụ đứng, lăng trụ thứ nhất có đáy là hình thang AEDH, và lăng trụ thứ hai có đáy là hình chữ nhật BCDH. Tổng thể tích của hai lăng trụ này là :

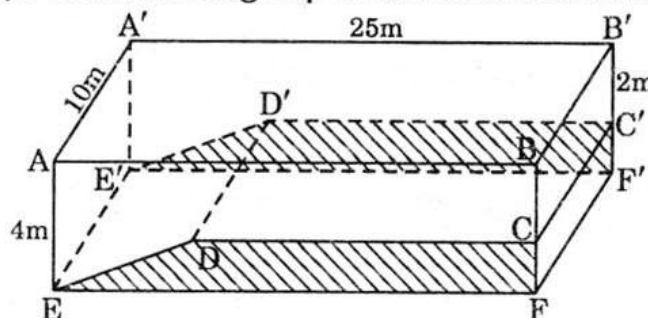


$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} (HD + AE) \times AH \times AA' + HD \cdot HB \cdot AA' \\
 &= \frac{1}{2} (2 + 7) \times 10 \times 10 + 2 \times 7 \times 10 = 570 \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

Vậy bể bơi chứa được 570 m^3 nước.

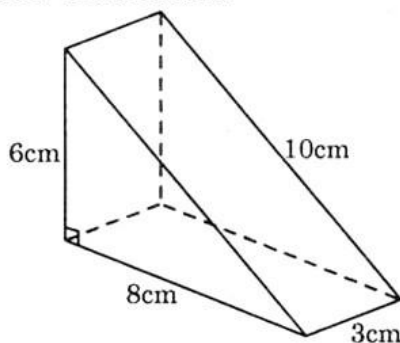
Cách thứ hai

Xem bể bơi như hình hộp chữ nhật ABFE.A'B'F'E' cắt bớt đi hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang CDEF. Hiệu thể tích của hình hộp chữ nhật và hình lăng trụ là thể tích của bể bơi.

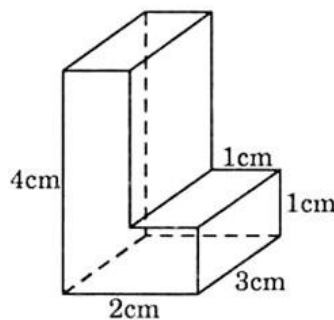


$$\begin{aligned}
 V &= AB \times AE \times AA' - \frac{1}{2}(CD + EF) \times CF \times AA' \\
 &= 25 \times 4 \times 10 - \frac{1}{2}(18 + 25) \times 2 \times 10 = 570 \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

- 30** Các hình a), b) (hình dưới) gồm một hoặc nhiều lăng trụ đứng. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của chúng theo các kích thước đã cho trên hình.



a)



b)

Giải

a) Hình lăng trụ đứng trong hình a) có :

– Đáy là tam giác vuông có độ dài cạnh huyền là :

$$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\text{cm}.$$

– Diện tích xung quanh là :

$$S_{xq} = (6 + 8 + 10) \cdot 3 = 72 \text{ cm}^2.$$

– Diện tích toàn phần là :

$$S_{tp} = S_{xq} + 6 \cdot 8 = 120 \text{ cm}^2.$$

– Thể tích là :

$$V = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times 3 = 72 \text{ cm}^3.$$

b) Hình lăng trụ trong hình b) có đáy dạng hình chữ L với chu vi :

$$2p = 4 + 1 + 3 + 1 + 1 + 2 = 12\text{cm}.$$

Diện tích xung quanh là: $S_{xq} = 12 \times 3 = 36 \text{ cm}^2.$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = (4 \times 1 + 1 \times 1) \times 2 + 36 = 46 \text{ cm}^2.$

Thể tích là : $V = 5 \times 3 = 15 \text{ cm}^3.$

- 31** Điền vào các ô trống ở bảng sau :

	Lăng trụ 1	Lăng trụ 2	Lăng trụ 3
Chiều cao của lăng trụ tam giác	5cm	7cm	
Chiều cao của tam giác đáy			5cm
Cạnh tương ứng với đường cao	3cm	5cm	
Diện tích đáy	6cm ²		15cm ²
Thể tích lăng trụ đứng		49cm ³	0,045l

Giải

Lăng trụ 1 : Chiều cao tam giác đáy : $6 \times 2 : 3 = 4\text{cm}$

Thể tích : $V = 6 \times 5 = 30\text{ cm}^3$,

Lăng trụ 2 : Diện tích đáy : $S = 49 : 7 = 7\text{ cm}^2$

Chiều cao tam giác đáy : $h_1 = 7 \times 2 : 5 = 2,8\text{cm}$.

Lăng trụ 3 : Ta có $0,045\text{l} = 45\text{ cm}^3$

Chiều cao của lăng trụ đứng : $45 : 15 = 3\text{cm}$.

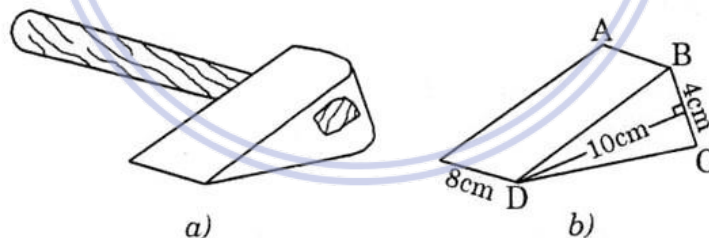
Cạnh tương ứng với đường cao của tam giác đáy :

$$15 \times 2 : 5 = 6\text{cm}.$$

Kết quả trong bảng sau :

	Lăng trụ 1	Lăng trụ 2	Lăng trụ 3
Chiều cao của lăng trụ tam giác	5cm	7cm	3cm
Chiều cao của tam giác đáy	4cm	2,8cm	5cm
Cạnh tương ứng với đường cao	3cm	5cm	6cm
Diện tích đáy	6cm^2	7cm^2	15cm^2
Thể tích lăng trụ đứng	30cm^3	49cm^3	$0,045\text{l}$

- 32** Hình b) biểu diễn một lưới rìu bằng sắt, nó có dạng một lăng trụ đứng, BDC là một tam giác cân.



- Hãy vẽ thêm nét khuất, điền thêm chữ vào các đỉnh rồi cho biết AB song song với những cạnh nào ?
- Tính thể tích lưới rìu.
- Tính khối lượng của lưới rìu, biết khối lượng riêng của sắt là $7,874\text{ kg/dm}^3$ (phần cán gỗ bên trong lưới rìu là không đáng kể).

Giải

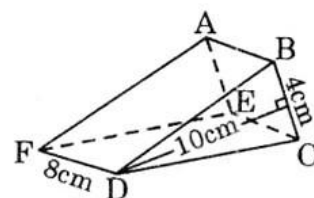
- Vẽ riêng phần lưới rìu có dạng hình lăng trụ BCDAEF như hình bên. Qua hình ta thấy $AB \parallel EC$ và $AB \parallel FD$.

b) Lưỡi rìu có thể tích :

$$V = \frac{1}{2} \times 4 \times 10 \times 8 = 160 \text{ cm}^3.$$

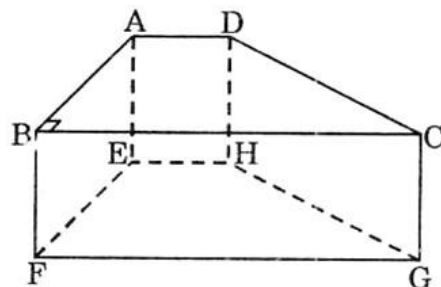
c) Khối lượng của lưỡi rìu :

$$7,874 \times 0,160 \approx 1,260 \text{ kg}.$$



33 Hình bên dưới là một lăng trụ đứng, đáy là hình thang vuông. Hãy kể tên :

- Các cạnh song song với cạnh AD.
- Các cạnh song song với cạnh AB.
- Các đường thẳng song song với mặt phẳng (EFGH).
- Các đường thẳng song song với mặt phẳng (DCGH).



Giải

- BC, FG, EH.
- EF.
- AB, BC, CD, AD.
- AE, BF.

34 Tính thể tích của hộp xà phòng và hộp sôcôla trên hình, biết :



- Diện tích đáy hộp xà phòng (h.a) là 28 cm^2 .
- Diện tích ABC ở hình b) là 12 cm^2 .

Giải

- $V = 28 \times 8 = 224 \text{ cm}^3.$
- $V = 12 \times 9 = 108 \text{ cm}^3.$

35 Đáy của một hình lăng trụ đứng là một tứ giác, các kích thước theo hình bên.

Biết chiều cao của lăng trụ là 10cm. Hãy tính thể tích của nó.

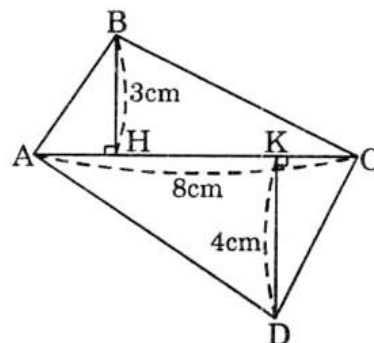
Giải

Diện tích đáy lăng trụ là :

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 28 \text{ cm}^2.$$

Thể tích lăng trụ là :

$$V = 28 \times 10 = 280 \text{ cm}^3.$$

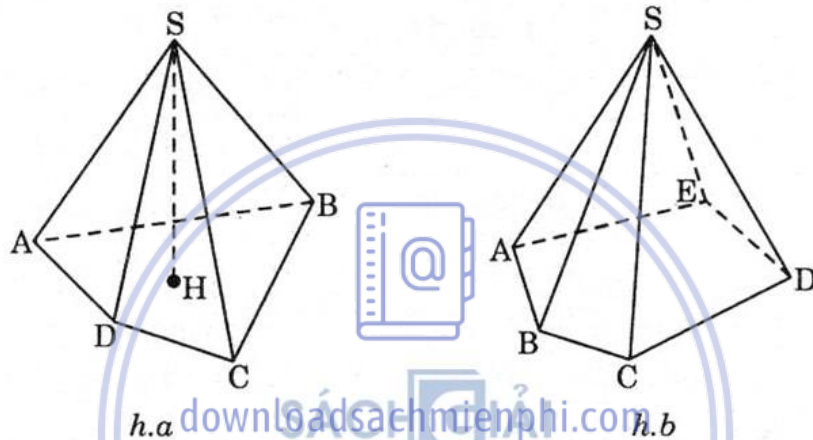


§5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Hình chóp

Hình chóp là hình không gian có mặt đáy là một đa giác (tam giác, tứ giác, ngũ giác, ...), các mặt bên là những tam giác có chung một đỉnh. Ta gọi đỉnh này là **đỉnh** của hình chóp. Đường thẳng đi qua đỉnh S vuông góc với mặt phẳng đáy tại điểm H thì đoạn thẳng SH là **đường cao** của hình chóp. Trong hình h.a là hình chóp có đáy là tứ giác $ABCD$, các mặt bên là các tam giác SAB , SBC , SCD , SDA có chung đỉnh S . Đỉnh hình chóp là S .



Đáy hình chóp này là tứ giác nên ta gọi là **hình chóp tứ giác**.

Hình chóp có đáy là tam giác gọi **hình chóp tam giác**.

2. Hình chóp đều

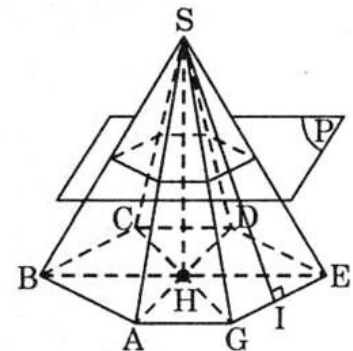
Hình chóp đều là hình chóp có mặt đáy là một đa giác đều, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau có đáy là cạnh của mặt đáy. Chiều cao của mỗi mặt bên của hình chóp đều được gọi là **trung đoạn** của hình chóp đó.

Chân đường cao H của hình chóp đều là tâm của đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy.

3. Hình chóp cụt đều

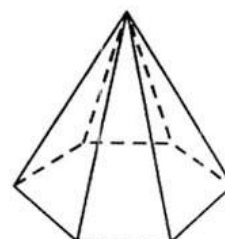
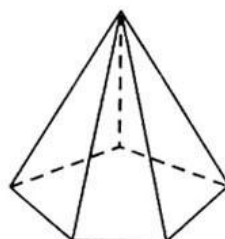
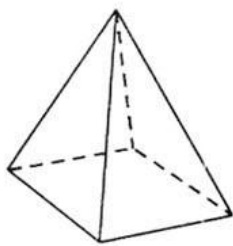
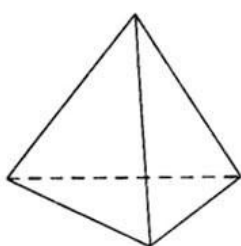
Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng (P) song song với đáy. Phần hình chóp đều nằm giữa P và mặt đáy là **hình chóp cụt đều**.

Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân.



BÀI TẬP

- 36** Quan sát hình vẽ và điền cụm từ và số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau, biết rằng các hình đã cho là những hình chóp đều.



	Chóp tam giác đều	Chóp tứ giác đều	Chóp ngũ giác đều	Chóp lục giác đều
Đáy	Tam giác đều			
Mặt bên		Tam giác cân		
Số cạnh đáy			5	
Số cạnh			10	
Số mặt		5		

Giải

	Chóp tam giác đều	Chóp tứ giác đều	Chóp ngũ giác đều	Chóp lục giác đều
Đáy	Tam giác đều	Hình vuông	Ngũ giác đều	Lục giác đều
Mặt bên	Tam giác cân	Tam giác cân	Tam giác cân	Tam giác cân
Số cạnh đáy	3	4	5	6
Số cạnh	6	8	10	12
Số mặt	4	5	6	7

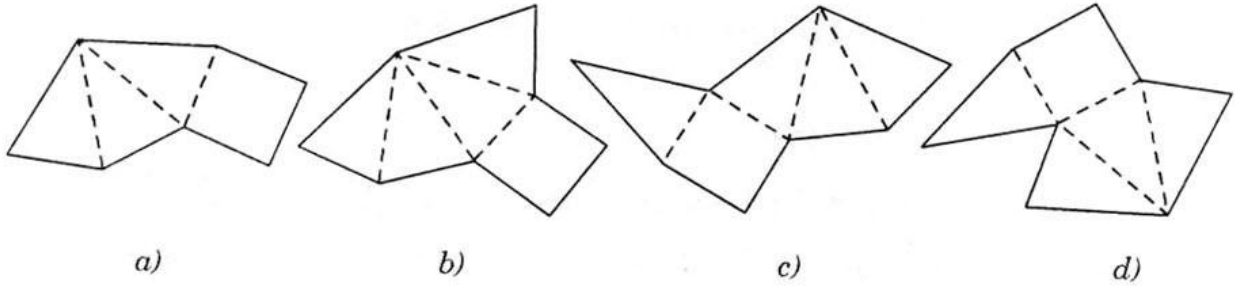
- 37** Hãy xét sự đúng, sai của các phát biểu sau :

- a) Hình chóp đều có đáy là hình thoi và chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy.
 b) Hình chóp đều có đáy là hình chữ nhật và chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy.

Giải

- a) Hình thoi không phải là một đa giác đều nên hình chóp có mặt đáy là một hình thoi không phải là hình chóp đều. Vậy phát biểu này sai.
 b) Phát biểu b) sai. Lí do tương tự như câu a) vì hình chữ nhật không phải là đa giác đều.

- 38** Trong các tấm bìa ở hình vẽ sau, em gấp lại tấm bìa nào thì có được một hình chóp đều ?



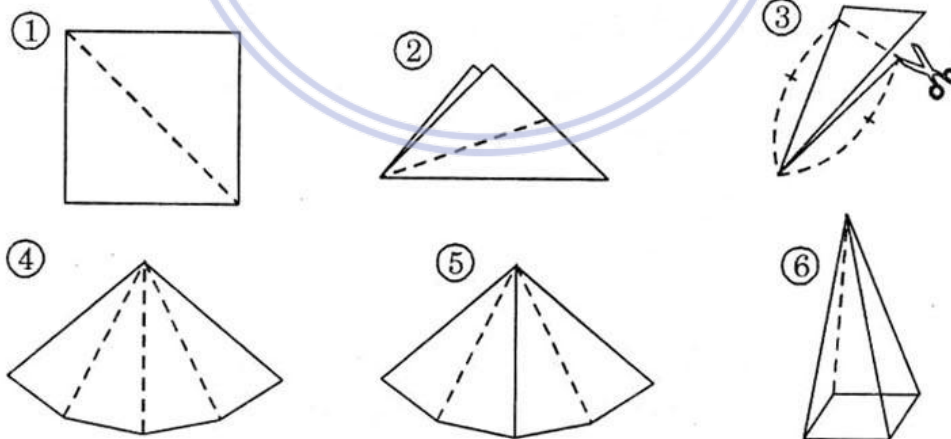
Giải

Để xem tấm bìa nào gấp lại thì có được hình chóp đều ta kiểm tra các điều kiện sau đây :

- + Số tam giác có bằng số cạnh của đa giác không ?
- + Các tam giác có phải là những tam giác cân bằng nhau không ?
- + Đa giác có phải là đa giác đều không ?
- + Cạnh của đa giác có bằng đáy của tam giác cân không ?

Ta thấy các tấm bìa b), c), d) thỏa mãn các điều kiện kể trên. Vậy chúng có thể gấp lại thành hình chóp tứ giác đều, còn tấm bìa a) thì không.

- 39** Thực hành. Từ tờ giấy cắt ra một hình vuông rồi thực hiện các thao tác theo thứ tự từ 1 đến 6 để có thể ghép được các mặt bên của một hình chóp tứ giác đều.



Bạn tự làm.

*§6. Diện tích xung quanh hình chóp đều**§7. Thể tích của hình chóp đều***TÓM TẮT KIẾN THỨC****1. Công thức tính diện tích xung quanh hình chóp đều**

Diện tích xung quanh hình chóp đều bằng nửa tích chu vi đáy với trung đoạn.

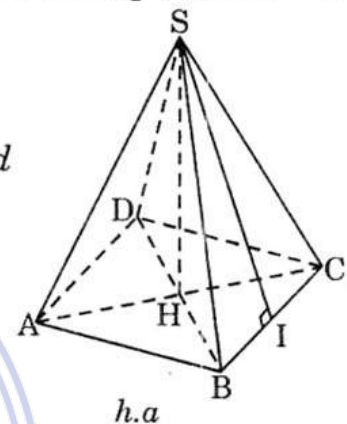
Trong hình h.a là hình chóp tứ giác đều. Đáy là hình vuông ABCD có $AB = BC = CD = DA = a$. Một trung đoạn là đường cao $SI = d$ của tam giác cân mặt bên SBC.

Diện tích xung quanh của hình chóp đều là :

$$S_{xq} = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).SI = 2a.d$$

Tổng quát : Chu vi đáy chóp đều là $2p$, trung đoạn của hình chóp đều là d . Diện tích xung quanh của hình chóp đều :

$$S_{xq} = p.d$$

**2. Công thức tính diện tích xung quanh hình chóp cụt đều**

Chu vi đáy lớn là $2p$, chu vi đáy nhỏ $2p'$, chiều cao của hình thang cân mặt bên là d thì diện tích xung quanh hình chóp cụt đều là :

$$S_{xq} = (p + p').d$$

3. Công thức tính thể tích của hình chóp đều

Gọi S là diện tích của mặt đáy, h là chiều cao của hình chóp. V là thể tích của hình chóp. Ta có công thức :

$$V = \frac{1}{3}S.h.$$

BÀI TẬP

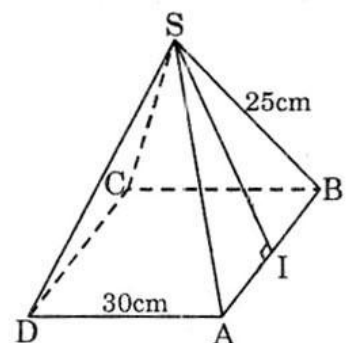
- 40** Một hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên bằng 25cm. Đáy là hình vuông ABCD cạnh 30cm.

Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Giải

Gọi SI là một trung đoạn của chóp đều, ta có :

$$SI^2 + IB^2 = SB^2$$



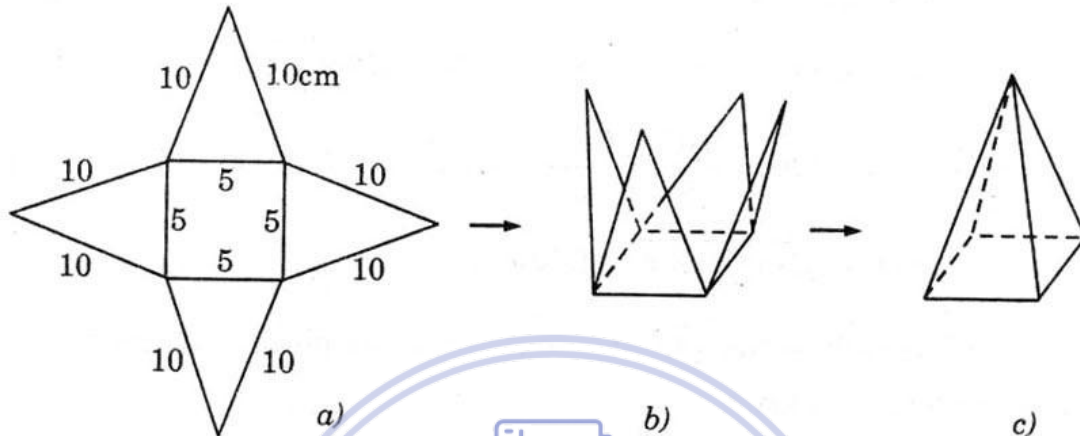
$$SI^2 = SB^2 - IB^2 = SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 25^2 - 15^2$$

$$\Rightarrow SI = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\text{cm}$$

Diện tích toàn phần của chóp đều

$$S_{tp} = 2.30.20 + 30^2 = 2100 \text{ cm}^2.$$

41 Vẽ, cắt và gấp mảnh bìa như đã chỉ ra ở hình dưới đây :



- Trong hình trên, có bao nhiêu tam giác bằng nhau ?
- Sử dụng định lí Pi-ta-go để tính chiều cao của mỗi tam giác ?
- Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp đều này là bao nhiêu ?

Giải

- Bốn tam giác bằng nhau.
- Mỗi tam giác trong hình là một tam giác cân nên trung tuyến của nó đồng thời là đường cao. Chẳng hạn tam giác cân SAB có $SA = SB = 10\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$. Đường cao SH thì $AH = HB = 2,5\text{cm}$. Theo định lí Pi-ta-go :

$$SA^2 = SH^2 + AH^2$$

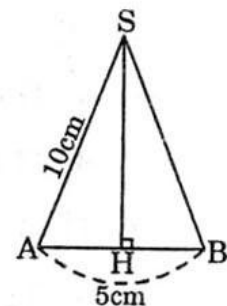
$$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 6,25} \approx 9,68\text{cm}.$$

- Diện tích xung quanh của hình chóp :

$$S_{xq} \approx 2 \times 5 \times 9,68 = 96,8 \text{ cm}^2$$

Diện tích toàn phần của hình chóp đều :

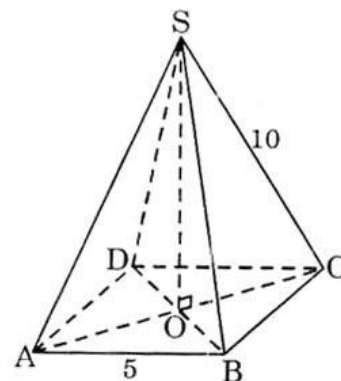
$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} \approx 96,8 + 25 = 121,6 \text{ cm}^2.$$



- 42** Tính độ dài đường cao của hình chóp tứ giác đều với các kích thước cho ở hình bên.

Giải

Chân đường cao của hình chóp là giao điểm O của hai đường chéo của hình vuông ABCD. Tam giác SOC vuông tại O, theo định lí Pi-ta-go ta có :

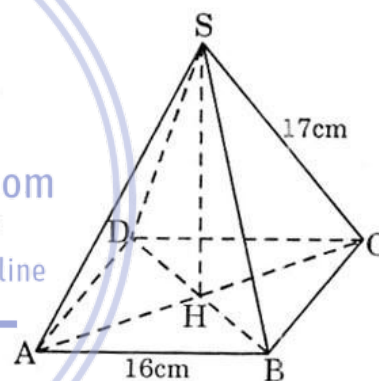
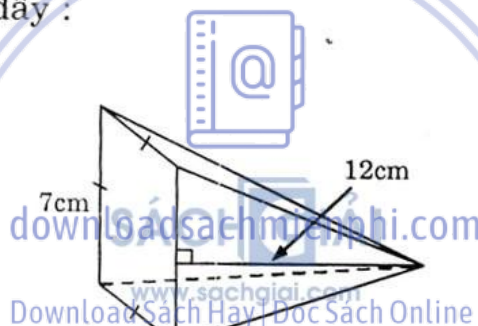
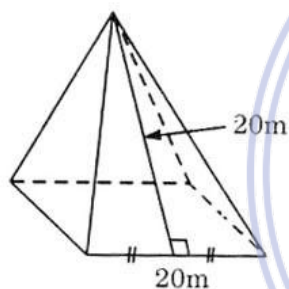


$$SO^2 + OC^2 = SC^2 \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2}$$

Thay $SC = 10$, $OC = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2,5\sqrt{2}$ ta được độ dài đường cao :

$$SO = \sqrt{100 - 12,5} \approx 9,35\text{cm}.$$

- 43** Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của các hình chóp tứ giác đều sau đây :



Giải

a) Hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy 20m, trung đoạn 20m có :

+ Diện tích xung quanh : $S_{xq} = 2 \times 20 \times 20 = 800 \text{ m}^2$

+ Diện tích toàn phần : $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = 800 + 400 = 1200 \text{ m}^2$

b) Hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy 7cm, trung đoạn 12cm có :

+ Diện tích xung quanh : $S_{xq} = 2 \times 7 \times 12 = 168 \text{ cm}^2$.

+ Diện tích toàn phần : $S_{tp} = 7^2 + 168 = 217 \text{ cm}^2$.

c) Hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy 16cm, cạnh bên 17cm có :

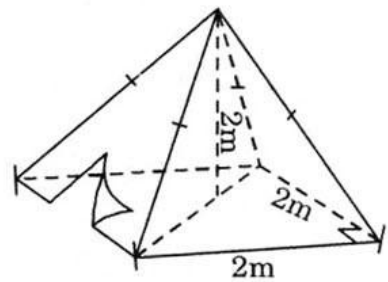
+ Trung đoạn : $d = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15\text{cm}.$

+ Diện tích xung quanh : $S_{xq} = 2 \times 16 \times 15 = 480 \text{ cm}^2$

+ Diện tích toàn phần : $S_{tp} = 16^2 + 480 = 736 \text{ cm}^2$.

- 44** Hình bên là một cái lều ở một trại hè của học sinh kèm theo các kích thước.

- a) Thể tích không khí bên trong lều là bao nhiêu ?
b) Xác định số vải bạt cần thiết để dựng lều (không tính đến đường viền, nếp gấp, ... biết $\sqrt{5} \approx 2,24$).



Giải

Lều trại có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy 2m, chiều cao 2m. Thể tích hình chóp là thể tích khối không khí trong lều bằng :

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 \approx 2,67 \text{ m}^3.$$

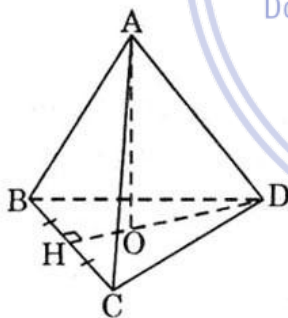
Trung đoạn của hình chóp có độ dài bằng độ dài cạnh huyền của tam giác vuông có một cạnh bằng chiều cao hình chóp, một cạnh bằng nửa cạnh đáy hình chóp :

$$d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ m}.$$

Số vải bạt cần thiết để lợp lều có diện tích bằng diện tích xung quanh hình chóp :

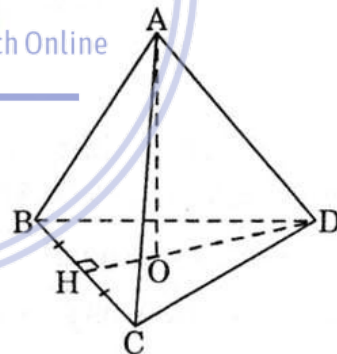
$$S = 2 \times 2 \times \sqrt{5} \approx 8,96 \text{ m}^2.$$

- 45** Tính thể tích của mỗi hình chóp đều dưới đây :



Đường cao AO = 12cm

BC = 10cm ($\sqrt{75} \approx 8,66$)



Đường cao AO = 16,2cm

BC = 8cm ($\sqrt{48} \approx 6,93$)

Giải

- a) Hình chóp tam giác đều với cạnh đáy BC = 10cm, đường cao AO = 12cm có :

+ Đường cao của tam giác đáy DH = $\sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8,66 \text{ cm}$

+ Diện tích đáy : $S = \frac{1}{2} \cdot BC \times DH \approx 5 \times 8,66 = 43,30 \text{ cm}^2$

Thể tích : $V = \frac{1}{3} S \times AO \approx \frac{1}{3} \times 43,30 \times 12 = 173,20 \text{ cm}^3.$

b) Hình chóp tam giác đều với cạnh đáy $BC = 8\text{cm}$, đường cao $AO = 16,2\text{cm}$ có :

+ Đường cao của tam giác đáy $DH = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6,93\text{cm}$.

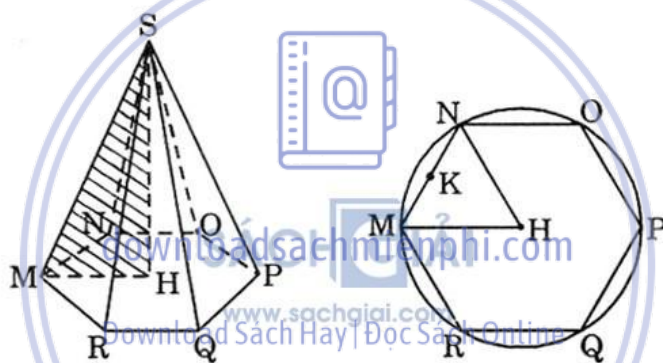
+ Diện tích đáy : $S = \frac{1}{2}BC.DH \approx 4 \times 6,93 = 27,72 \text{ cm}^2$

+ Thể tích : $V = \frac{1}{3}S \times AO \approx \frac{1}{3}.27,72.16,2 \approx 149,69 \text{ cm}^3$.

46 S.MNOPQR là một hình chóp lục giác đều (hình bên dưới). Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy $HM = 12\text{cm}$, chiều cao $SH = 35\text{cm}$. Hãy tính :

a) Diện tích đáy và thể tích của hình chóp (biết $\sqrt{108} \approx 10,39$).

b) Độ dài cạnh bên SM và diện tích toàn phần của hình chóp (biết $\sqrt{1333} \approx 36,51$).



Giải

a) Từ các tính chất của lục giác đều, trong hình vẽ đã cho các tam giác HMN, HNO, HOP, HPQ, HQR, HRM là 6 tam giác đều với đường cao bằng $HK = \sqrt{HM^2 - MK^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10,39\text{cm}$. Vậy:

+ Diện tích đáy hình chóp là :

$$S_{\text{đáy}} \approx 6 \times 6 \times 10,39 = 374,04 \text{ cm}^2.$$

+ Thể tích hình chóp là :

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}} \times SH \approx \frac{1}{3} \times 374,04 \times 35 \approx 4363,8 \text{ cm}^3.$$

b) Tam giác SHM là tam giác vuông tại H. Theo định lí Pi-ta-go, độ dài cạnh bên :

$$SM = \sqrt{MH^2 + SH^2} = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37\text{cm}$$

Gọi K là trung điểm của cạnh lục giác đều MN, trung đoạn của hình chóp đều bằng :

$$SK = \sqrt{SM^2 - MK^2} = \sqrt{1369 - 36} = \sqrt{1333} \approx 36,51\text{cm}$$

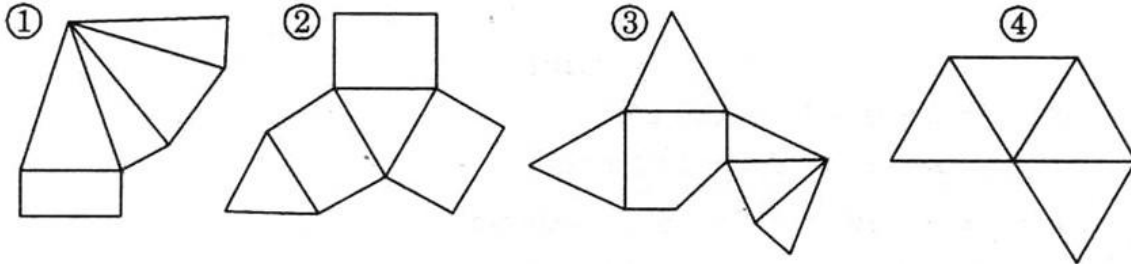
Diện tích xung quanh của chóp đều :

$$S_{xq} = 3.MN.SK = 3.12.\sqrt{1333} \approx 1314,36 \text{ cm}^2.$$

Diện tích toàn phần của chóp đều :

$$S_{tp} = S_{\text{đáy}} + S_{xq} \approx 374,04 + 1314,36 \approx 1688,4 \text{ cm}^2.$$

- 47** Trong các miếng bìa ở hình vẽ sau, miếng nào khi gấp và dán lại thì được một hình chóp đều ?



Giải

Muốn biết miếng bìa nào gấp dán lại được một hình chóp đều ta cần xem các tam giác trong hình có phải là những tam giác cân bằng nhau hay không. Ta thấy chỉ có miếng bìa số 4 sau khi gấp, dán lại cho ta hình chóp đều.

- 48** Tính diện tích toàn phần của :

- a) Hình chóp tứ giác đều, biết cạnh đáy $a = 5\text{cm}$, cạnh bên $b = 5\text{cm}$, $\sqrt{18,75} \approx 4,33$
 b) Hình chóp lục giác đều, biết cạnh đáy $a = 6\text{cm}$, cạnh bên $b = 5\text{cm}$, $\sqrt{3} \approx 1,73$.

Giải

- a) Trung đoạn của hình chóp :

$$d = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{18,75} \approx 4,33\text{cm}$$

Diện tích xung quanh

$$S_{xq} \approx 2 \times 5 \times 4,33 = 43,3 \text{ cm}^2$$

Diện tích đáy : $S_{\text{đáy}} = 5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$.

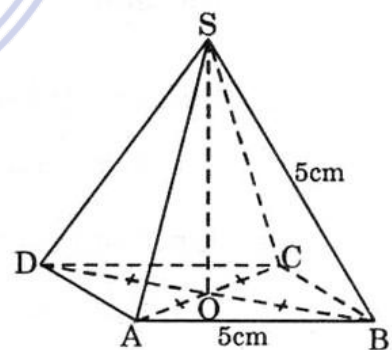
Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} \approx 43,3 + 25 = 68,3 \text{ cm}^2$.

- b) Tính tương tự như trên ta được : trung đoạn $d = 4\text{cm}$,

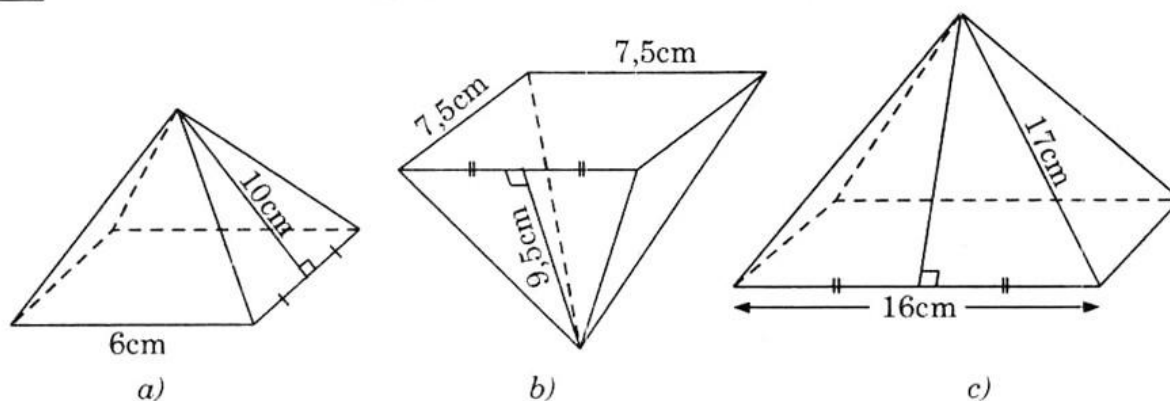
diện tích xung quanh : $S_{xq} = 3 \times 6 \times 4 = 72 \text{ cm}^2$,

diện tích đáy : $S_{\text{đáy}} = 6 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 93,42 \text{ cm}^2$.

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều cạnh đáy $a = 6\text{cm}$, cạnh bên 5cm là : $S_{tp} \approx 72 + 93,42 = 165,42 \text{ cm}^2$.



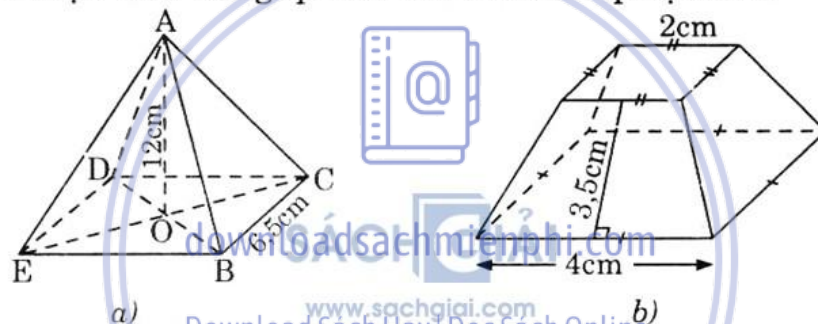
- 49** Tính diện tích xung quanh của các hình chóp tứ giác đều sau đây :



Giải

- a) $S_{xq} = 2 \times 6 \times 10 = 120 \text{ cm}^2$.
 b) $S_{xq} = 2 \times 7,5 \times 9,5 = 142,5 \text{ cm}^2$.
 c) $S_{xq} = 2 \times 16 \times \sqrt{17^2 - 8^2} = 480 \text{ cm}^2$.

- 50** a) Tính thể tích của hình chóp đều.
 b) Tính diện tích xung quanh của hình chóp cắt đều.



(*Hướng dẫn* : Diện tích cần tính bằng tổng diện tích các mặt xung quanh. Các mặt xung quanh là những hình thang cân với cùng chiều cao, các cạnh đáy tương ứng bằng nhau, các cạnh bên bằng nhau).

Giải

- a) Thể tích hình chóp đều :

$$V = \frac{1}{3} (BC)^2 \cdot AO = \frac{1}{3} (6,5)^2 \cdot 12 = 169 \text{ cm}^3$$

 b) Diện tích xung quanh hình chóp cắt đều :

$$S_{xq} = 4 \times \left(\frac{2+4}{2} \right) \times 3,5 = 42 \text{ cm}^2$$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

- 51** Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của lăng trụ đứng có chiều cao h và đáy lần lượt là :
- a) Hình vuông cạnh a .
 b) Tam giác đều cạnh a .
 c) Lục giác đều cạnh a .

d) Hình thang cân, đáy lớn là $2a$, các cạnh còn lại bằng a .

e) Hình thoi có hai đường chéo là $6a$ và $8a$.

Giải

Kết quả tính được cho trong bảng sau :

Đáy	Chu vi đáy	S_{xq}	S_{tp}	V
Hình vuông	$4a$	$4ah$	$4ah + 2a^2$	a^2h
Tam giác đều	$3a$	$3ah$	$3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a^2h\sqrt{3}}{4}$
Lục giác đều	$6a$	$6ah$	$6ah + 3\sqrt{3}a^2$	$\frac{3\sqrt{3}a^2h}{2}$
Thang cân	$5a$	$5ah$	$5ah + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2h$
Hình thoi	$20a$	$20ah$	$20ah + 48a^2$	$24a^2h$

- 52** Tính diện tích toàn phần của thanh gỗ như ở hình bên (mặt trước, mặt sau của thanh gỗ là những hình thang cân, bốn mặt còn lại đều là những hình chữ nhật, cho biết $\sqrt{10} \approx 3,16$).



Giải

Trước hết ta tính diện tích hình thang cân.

Dễ thấy chiều cao của hình thang là :

$$\begin{aligned} BH &= \sqrt{BC^2 - HC^2} \\ &= \sqrt{3,50^2 - 1,50^2} = \sqrt{10} \text{ cm} \approx 3,16 \text{ cm}. \end{aligned}$$

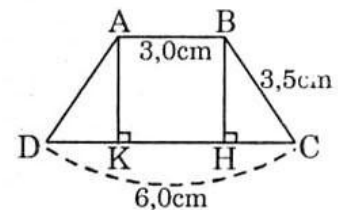
+ Diện tích hình thang cân là :

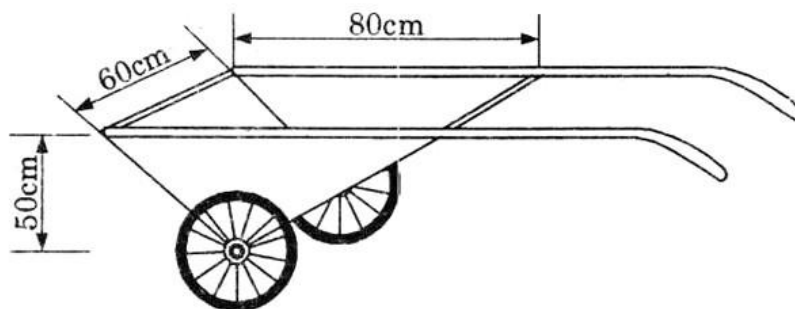
$$S_1 = \frac{1}{2} (3,00 + 6,00) \cdot \sqrt{10} \approx 14,22 \text{ cm}^2.$$

+ Diện tích toàn phần thanh gỗ (lăng trụ đứng, đáy là hình thang, chiều cao 11,5cm) :

$$S_{tp} = 2S_1 + S_{xq} \approx 2 \times 14,22 + (3 + 2 \times 3,5 + 6) \cdot 11,5 = 212,44 \text{ cm}^2.$$

- 53** Thùng chứa của xe ở hình dưới có dạng lăng trụ đứng tam giác, các kích thước cho trên hình. Hỏi dung tích của thùng chứa là bao nhiêu ?



**Giải**

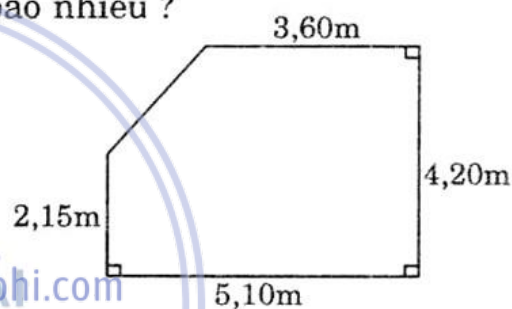
Trong hình, thùng chứa của xe là một lăng trụ đứng có đáy là tam giác. Thể tích của lăng trụ là dung tích của thùng chứa của xe bằng :

$$V = \frac{1}{2} \times 80 \times 50 \times 60 = 120.000 \text{ cm}^3 = 120 \text{ lít.}$$

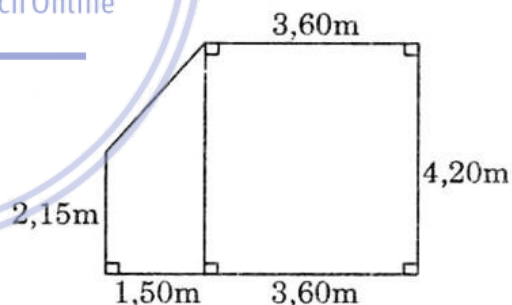
- 54** Người ta muốn đổ một tấm bê tông dày 3cm, bề mặt của tấm bê tông có các kích thước như ở hình bên.

a) Số hỗn hợp vôi vữa cần phải có là bao nhiêu ?

b) Cần phải có bao nhiêu chuyến xe để chở số hỗn hợp vôi vữa cần thiết đến chỗ đổ bê tông nếu mỗi xe chứa được $0,06 \text{ (m}^3\text{)}$? (Không tính số vôi vữa dư thừa hoặc rơi vãi).

**Giải**

a) Tấm bê tông có dạng một lăng trụ đứng với chiều cao 3cm (= 0,03m) và đáy là hình đã cho. Để tính diện tích đáy ta chia hình đã cho thành một hình chữ nhật và một hình thang như hình bên. Thể tích lăng trụ (hay lượng hỗn hợp vôi vữa cần có) là :



$$V = \left[\frac{2,15 + 4,20}{2} \times 1,50 + 3,60 \times 4,20 \right] \times 0,03 \approx 0,596 \text{ m}^3.$$

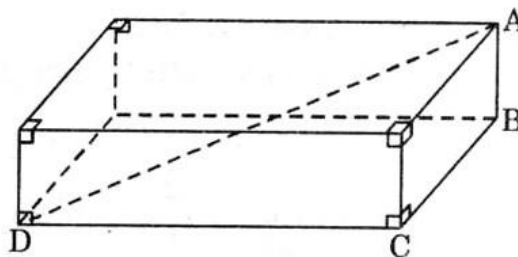
b) Số chuyến xe cần thiết để vận chuyển lượng hỗn hợp vôi vữa trên là :

$$n = 0,596 : 0,06 = 10 \text{ chuyến (làm tròn đến hàng đơn vị).}$$

Ghi chú : Có thể tính thể tích lăng trụ bằng cách lấy thể tích hình hộp chữ nhật có mặt đáy với kích thước 4,20 và 5,10, trừ đi thể tích hình lăng trụ có đáy là tam giác vuông với các cạnh góc vuông là 1,50m và $4,20 - 2,15 = 2,05\text{m}$. Cả hai lăng trụ có cùng chiều cao 0,03m.

- 55** A, B, C, D là các đỉnh của một hình hộp chữ nhật. Hãy quan sát hình vẽ rồi điền vào các ô còn trống ở bảng sau : (AB ... là độ dài một cạnh).

AB	BC	CD	AD
1	2	2	
2	3		7
2		9	11
	12	20	25



Giải

a) Ta có : $AD^2 = AB^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$

Thay $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 2$ ta được : $AD = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.

b) Thay $AB = 2$, $BC = 3$, $AD = 7$ ta được : $CD = \sqrt{7^2 - 2^2 - 3^2} = 6$.

c) Thay $AB = 2$, $CD = 9$, $AD = 11$ ta có : $BC = \sqrt{11^2 - 9^2 - 2^2} = 6$.

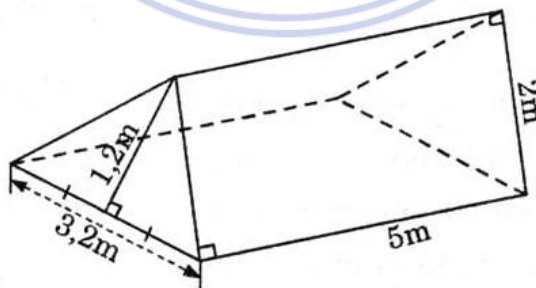
d) Thay $BC = 12$, $CD = 20$, $AD = 25$ ta được :

$$AB = \sqrt{25^2 - 20^2 - 12^2} = 9.$$

Điền vào các ô trống trong bảng ta được bảng sau :

AB	BC	CD	AD
1	2	2	3
2	3	6	7
2	6	9	11
9	12	20	25

- 56** Một cái lều ở trại hè có dạng lăng trụ đứng tam giác (với các kích thước trên hình dưới).



- a) Tính thể tích khoảng không ở bên trong lều.
b) Số vải bạt cần phải có để dựng lều đó là bao nhiêu ? (Không tính các mép và nếp gấp của lều).

Giải

- a) Thể tích khoảng không bên trong lều :

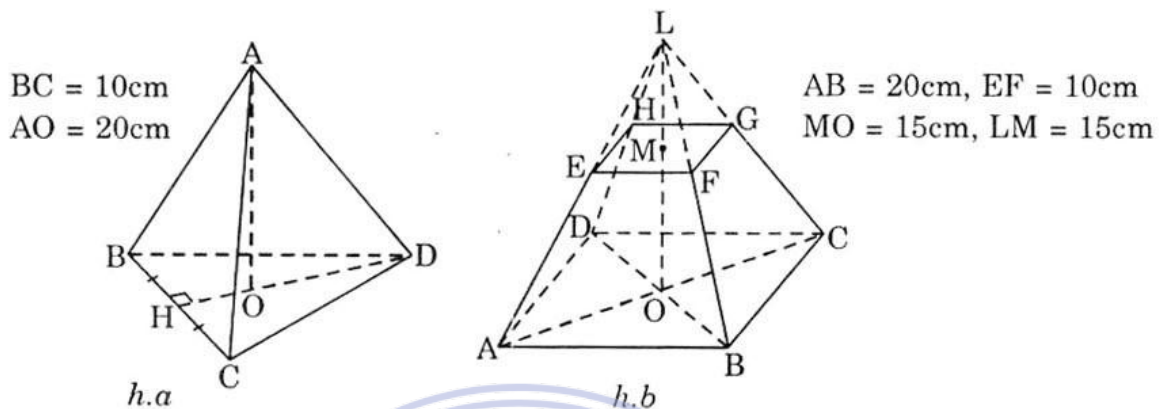
$$V = \frac{1}{2} \times 3,2 \times 1,2 \times 5 = 9,6 \text{ m}^3.$$

b) Số vải bạt cần thiết để dựng lều (hai mái và hai đầu hồi)

$$S = 2 \times 5 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 3,2 \times 1,2 = 23,84 \text{ m}^2.$$

57 Tính thể tích của hình chóp đều, hình chóp cắt đều sau đây (h.a và h.b). ($\sqrt{3} \approx 1,73$).

Hướng dẫn : Hình chóp L.EFGH cũng là hình chóp đều.



Giải

a) Trên hình h.a là hình chóp tam giác đều cạnh đáy 10cm.

Đường cao tam giác đáy là :

$$DH = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \approx 8,65 \text{ cm}.$$

Thể tích hình chóp là :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} BC \times DH \times AO \approx \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} 10 \cdot 8,65 \times 20 \approx 288,33 \text{ cm}^3.$$

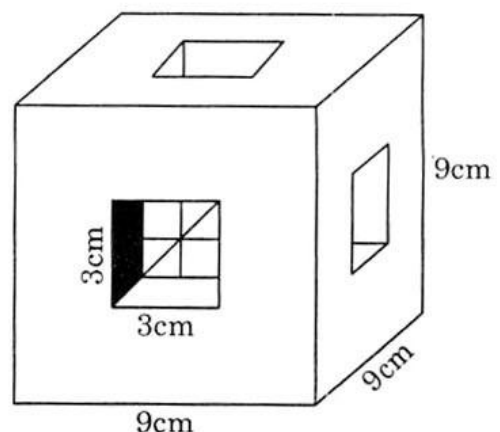
b) Thể tích hình chóp cắt đều cần tính bằng hiệu thể tích của hình chóp đều đáy ABCD, chiều cao LO với thể tích hình chóp đều đáy EFGH và đường cao LM :

$$V_{\text{chóp cắt}} = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 30 - \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 15 = 3500 \text{ cm}^3.$$

58 Một khối gỗ hình lập phương cạnh 9cm. Người ta đục ba "lỗ vuông" xuyên thủng khối gỗ như hình bên.

a) Tìm thể tích của khối gỗ còn lại.

b) Tìm tổng diện tích của tất cả các mặt (ngoài lẫn trong) của khối gỗ.



Giải

a) Nếu chia khối lập phương cạnh 9cm thành những khối lập phương nhỏ cạnh 3cm thì thể tích phần gỗ (còn lại) là thể tích

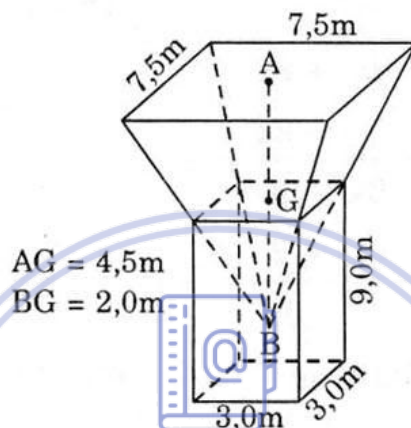
khối lớn trừ đi các khối nhỏ bị đục bỏ. Vậy thể tích khối gỗ (còn lại) là :

$$V = 9 \times 9 \times 9 - 7 \times 3 \times 3 \times 3 = 540 \text{ cm}^3.$$

b) Diện tích phía ngoài là diện tích của 6 hình vuông lớn trừ đi diện tích của 6 hình vuông nhỏ. Diện tích phía trong là diện tích xung quanh của 6 hình lập phương nhỏ. Vậy tổng diện tích của khối gỗ là :

$$S = 6.(9 \times 9 - 3 \times 3) + 6.(3 \times 3 \times 4) = 648 \text{ cm}^2.$$

59 Tính thể tích của hình cho ở hình dưới với các kích thước kèm theo.



Giải

Thể tích cần tính bằng tổng của thể tích hình chóp cụt và hình lăng trụ đứng.

– Thể tích hình chóp cụt: $V_1 = \frac{1}{3} [7,5^2 \times 6,5 - 3^2 \times 2] = 115,875 \text{ m}^3.$

– Thể tích lăng trụ đứng: $V_2 = 3 \times 3 \times 9 = 81 \text{ m}^3.$

Thể tích cần tính: $V = V_1 + V_2 = 115,875 + 81 = 196,875 \text{ m}^3.$

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

A- PHẦN ĐẠI SỐ

1 Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $a^2 - b^2 - 4a + 4$

b) $x^2 + 2x - 3$

c) $4x^2y^2 - (x^2 + y^2)^2$

d) $2a^3 - 54b^3.$

Giải

a) $a^2 - b^2 - 4a + 4 = (a^2 - 4a + 4) - b^2 = (a - 2)^2 - b^2$
 $= (a + b - 2)(a - b - 2).$

b) $x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 2^2 = (x + 3)(x - 1).$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4x^2y^2 - (x^2 + y^2)^2 &= (2xy)^2 - (x^2 + y^2)^2 \\ &= (2xy + x^2 + y^2)(2xy - x^2 - y^2) = -(x + y)^2 \cdot (x - y)^2. \end{aligned}$$

$$\text{d) } 2a^3 - 54b^3 = 2[a^3 - (3b)^3] = 2(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2).$$

2 a) Thực hiện phép chia : $(2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3) : (2x^2 - 1)$

b) Chứng tỏ rằng thương tìm được trong phép chia trên luôn luôn dương với mọi giá trị của x.

Giải

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{array}{r} 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3 \\ - 2x^4 \qquad \qquad - x^2 \\ \hline - 4x^3 + 6x^2 + 2x - 3 \\ - - 4x^3 \qquad \qquad + 2x \\ \hline \qquad \qquad 6x^2 - 3 \\ - \qquad \qquad 6x^2 - 3 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x^2 - 1 \\ \hline x^2 - 2x + 3 \end{array} \end{array}$$

Vậy phép chia đã cho là phép chia hết. Thương trong phép chia là :

$$x^2 - 2x + 3.$$

b) Ta có thể viết : $x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2.$

Vì $(x - 1)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x nên $(x - 1)^2 + 2 > 0$ với mọi giá trị của x. Vậy thương trong phép chia đã cho luôn luôn dương.

3 Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số lẻ bất kì thì chia hết cho 8.

Giải

Hai số lẻ có thể viết dưới dạng : $2k + 1$ và $2m + 1$ với $k, m \in \mathbb{Z}$.

Hiệu bình phương hai số lẻ :

$$\begin{aligned} H &= (2k + 1)^2 - (2m + 1)^2 = (2k + 1 + 2m + 1)(2k + 1 - 2m - 1) \\ &= 2(k + m + 1) \times 2(k - m) = 4(k - m)(k + m + 1) \end{aligned}$$

Nếu k và m là các số chẵn, hoặc cùng là các số lẻ thì $k - m$ chia hết cho 2, do đó $H = 4(k - m)(k + m + 1)$ chia hết cho 8.

Nếu k và m, một số là số chẵn, một số là số lẻ thì $k + m + 1$ chia hết cho 2. Khi đó $H = 4(m - n)(m + n + 1)$ chia hết cho 8.

4 Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau tại $x = -\frac{1}{3}$:

$$\left[\frac{x+3}{(x-3)^2} + \frac{6}{x^2-9} - \frac{x-3}{(x+3)^2} \right] \left[1 : \left(\frac{24x^2}{x^4-81} - \frac{12}{x^2+9} \right) \right]$$

Giải

Ta rút gọn từng biểu thức trong các dấu ngoặc :

$$A = \frac{x+3}{(x-3)^2} + \frac{6}{x^2-9} - \frac{x-3}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)^3 + 6(x^2-9) - (x-3)^3}{(x^2-9)^2}$$

$$= \frac{24x^2}{(x^2-9)^2}$$

$$B = \left[1 : \left(\frac{24x^2}{x^4-81} - \frac{12}{x^2+9} \right) \right] = \left[1 : \left(\frac{24x^2 - 12(x^2-9)}{x^4-81} \right) \right]$$

$$= \frac{x^4-81}{12(x^2+9)} = \frac{x^2-9}{12}$$

Biểu thức đã cho rút gọn được là :

$$A.B = \frac{24x^2}{(x^2-9)^2} \cdot \frac{x^2-9}{12} = \frac{2x^2}{x^2-9}.$$

Thay $x = -\frac{1}{3}$ ta được giá trị biểu thức tại $x = -\frac{1}{3}$ là :

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 9} = -\frac{1}{40}.$$

5 Chứng minh rằng : $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$

Giải

Quy đồng mẫu thức thì đẳng thức đã cho có dạng :

$$\frac{a^2(b+c)(c+a) + b^2(a+b)(c+a) + c^2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= \frac{b^2(b+c)(c+a) + c^2(a+b)(c+a) + a^2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)$$

Bài toán trở về chứng minh các tử của hai phân thức bằng nhau.

Khai triển tử thức ở vế trái rồi rút gọn ta được :

$$a^2(ab+bc+ca+c^2) + b^2(bc+ca+ab+a^2) + c^2(ca+ab+bc+b^2)$$

$$= a^2c^2 + b^2a^2 + c^2b^2 + (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) \quad (2)$$

Khai triển tử thức ở vế phải rồi rút gọn ta được :

$$b^2(ab+bc+ca+c^2) + c^2(ab+bc+ca+a^2) + a^2(ab+bc+ca+b^2)$$

$$= b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + (ab+bc+ca)(b^2+c^2+a^2) \quad (3)$$

So sánh (2) và (3) ta có thể kết luận các phân thức ở vế trái và vế phải của đẳng thức (1) bằng nhau. Điều đó có nghĩa là đẳng thức đã cho ban đầu là đúng.

- 6** Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức M có giá trị là một số nguyên : $M = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3}$.

Giải

Thực hiện phép chia

$$\begin{array}{r|l} 10x^2 - 7x - 5 & 2x - 3 \\ \underline{10x^2 - 15x} & 5x + 4 \\ 8x - 5 & \\ \underline{8x - 12} & \\ 7 & \end{array}$$

Như vậy $10x^2 - 7x - 5 = (2x - 3)(5x + 4) + 7$. Do đó phân thức M có thể viết thành :

$$M = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x - 3}$$

Mỗi giá trị nguyên của x thì $5x + 4$ có giá trị là số nguyên. Vậy để M có giá trị nguyên ta cho x các giá trị nguyên sao cho $\frac{7}{2x - 3}$ có giá trị là số nguyên. Điều này có được nếu x lấy giá trị nguyên sao cho $2x - 3$ nhận một trong các giá trị $-1, 1, -7, 7$.

$$2x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 1 \quad 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$2x - 3 = -7 \Leftrightarrow x = -2 \quad 2x - 3 = 7 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy các giá trị nguyên cần tìm của x là : $-2, 1, 2, 5$.

- 7** Giải các phương trình :

$$\text{a) } \frac{4x+3}{5} - \frac{6x-2}{7} = \frac{5x+4}{3} + 3 \quad \text{b) } \frac{3(2x-1)}{4} - \frac{3x+1}{10} + 1 = \frac{2(3x+2)}{5}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{3} + \frac{3(2x-1)}{4} - \frac{5x-3}{6} = x + \frac{5}{12}.$$

Giải

$$\text{a) } \Leftrightarrow 21(4x+3) - 15(6x-2) = 35(5x+4) + 3 \times 105$$

$$\Leftrightarrow -6x + 93 = 175x + 455 \Leftrightarrow x = -2.$$

b) Quy đồng rồi khử mẫu thức ta được :

$$15(2x-1) - 2(3x+1) + 20 = 8(3x+2)$$

$$\Leftrightarrow 24x + 3 = 24x + 16 \Leftrightarrow 0x = 13.$$

Phương trình vô nghiệm.

$$\text{c) } \Leftrightarrow 4(x+2) + 9(2x-1) - 2(5x-3) = 12x + 5$$

$$\Leftrightarrow 12x + 5 = 12x + 5 \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Phương trình vô số nghiệm.

8 Giải các phương trình :

a) $|2x - 3| = 4$

b) $|3x - 1| - x = 2.$

Giảia) Nếu $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ phương trình trở thành

$$2x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ (nhận, vì thỏa mãn điều kiện } x \geq \frac{3}{2})$$

Nếu $x < \frac{3}{2}$ ta có : $-2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (nhận).

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right\}.$

b) Với $x \geq \frac{1}{3}$ ta có : $3x - 1 - x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (nhận)

Với $x < \frac{1}{3}$ ta có : $-3x + 1 - x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ (nhận)

Tập nghiệm : $S = \left\{-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right\}.$

9 Giải phương trình : $\frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} = \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92}.$ **Giải**

Phương trình đã cho có thể được viết thành :

$$\left(\frac{x+2}{98} + 1\right) + \left(\frac{x+4}{96} + 1\right) = \left(\frac{x+6}{94} + 1\right) + \left(\frac{x+8}{92} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+100}{98} + \frac{x+100}{96} = \frac{x+100}{94} + \frac{x+100}{92}$$

$$\Leftrightarrow (x+100)\left(\frac{1}{98} + \frac{1}{96} - \frac{1}{94} - \frac{1}{92}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -100.$$

10 Giải các phương trình :

a) $\frac{1}{x+1} - \frac{5}{x-2} = \frac{15}{(x+1)(2-x)}$

b) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{5x-2}{4-x^2}.$

Giảia) ĐKXĐ : $x \neq -1, x \neq 2.$

Quy đồng mẫu thức và khử mẫu thức chung ta có :

$$2 - x + 5(x+1) = 15 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại, vì vi phạm ĐKXĐ)}$$

Phương trình đã cho vô nghiệm.

b) ĐKXĐ : $x \neq \pm 2.$

Quy đồng rồi khử mẫu thức chung ta có :

$$(x-1)(2-x) + x(2+x) = 5x-2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 + 2x + x^2 = 5x - 2$$

$$\Leftrightarrow 5x - 2 = 5x - 2 \Leftrightarrow 0x = 0 \text{ vô số nghiệm}$$

Mọi số thực khác ± 2 đều là nghiệm của phương trình đã cho.

11 Giải các phương trình :

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $\frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-4} = 3\frac{1}{5}$.

Giải

a) $\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) - (x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ hoặc } 3x-1 = 0$

Tập nghiệm $S = \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$.

b) ĐKXD : $x \neq 2, x \neq 4$.

Quy đồng rồi khử mẫu thức chung ta được :

$$5(x-3)(x-4) + 5(x-2)(x-2) = 16(x-2)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 55x + 80 = 16x^2 - 96x + 128$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 41x + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 9x - 32x + 48 = 6x\left(x - \frac{3}{2}\right) - 32\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)(6x - 32) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = 0 \text{ hoặc } 6x - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, x = \frac{16}{3}$$

Tập nghiệm $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{16}{3}\right\}$.

12 Một người đi xe máy từ A đến B, vận tốc 25km/h. Lúc về người đó đi với vận tốc 30km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

Giải

Gọi x (km) là độ dài quãng đường AB. Điều kiện $x > 0$.

Thời gian lúc đi là : $\frac{x}{25}$ giờ, lúc về là $\frac{x}{30}$ giờ.

Ta có phương trình : $\frac{x}{25} - \frac{x}{30} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 50 \text{ (nhận)}$

Quãng đường AB dài 50km.

13 Một xí nghiệp dự định sản xuất 1500 sản phẩm trong 30 ngày. Nhưng nhờ tổ chức lao động hợp lí nên thực tế đã sản xuất mỗi ngày vượt 15 sản phẩm. Do đó xí nghiệp đã sản xuất không những vượt mức dự định 255 sản phẩm mà còn hoàn thành trước thời hạn. Hỏi thực tế xí nghiệp đã rút ngắn được bao nhiêu ngày ?

Giải

Gọi x là số ngày sản xuất được rút ngắn so với kế hoạch.

Số ngày sản xuất đã thực hiện : $30 - x$. Điều kiện : x nguyên dương và $x < 30$.

Số sản phẩm thực sản xuất mỗi ngày : $\frac{1500}{30} + 15 = 65$.

Số sản phẩm đã sản xuất được $1500 + 255 = 1755$ sản phẩm.

Ta có phương trình : $(30 - x) \times 65 = 1755 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận)

Vậy, trên thực tế xí nghiệp đã rút ngắn được 3 ngày.

14 Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left((x - 2) + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A biết $|x| = \frac{1}{2}$.

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{2(x + 2)}{x^2 - 4} + \frac{x - 2}{x^2 - 4} \right) : \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2} + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right) \\ &= \frac{-6}{x^2 - 4} \times \frac{x + 2}{6} = \frac{1}{2 - x} \end{aligned}$$

b) Nếu $x = -\frac{1}{2}$ thì $A = \frac{2}{5}$

Nếu $x = \frac{1}{2}$ thì $A = \frac{2}{3}$.

c) ĐKXD của biểu thức A là $x \neq 2$ và $x \neq -2$

Muốn tìm giá trị của x để $A < 0$, ta tìm các nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2 - x} < 0$ khác ± 2

Ta có : $\frac{1}{2 - x} < 0 \Leftrightarrow 2 - x < 0 \Leftrightarrow x > 2$

Kết luận : Để $A < 0$ thì x phải lấy các giá trị $x > 2$.

15 Giải bất phương trình : $\frac{x - 1}{x - 3} > 1$.

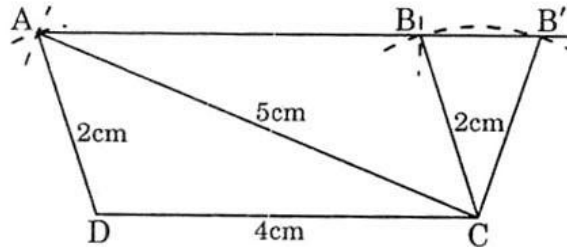
Giải

$$\begin{aligned} \frac{x - 1}{x - 3} > 1 &\Leftrightarrow \frac{x - 3 + 2}{x - 3} > 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x - 3} > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x - 3} > 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3. \end{aligned}$$

B- PHẦN HÌNH HỌC

- 1** Dựng hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), biết ba cạnh : $AD = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$ và đường chéo $AC = 5\text{cm}$.

Giải



Ta dựng đoạn thẳng $CD = 4\text{cm}$.

- Dựng hai đường tròn ($C, 5\text{cm}$) và ($D, 2\text{cm}$) cắt nhau tại A.
- Dựng đường tròn ($C, 2\text{cm}$) và đường tròn ($A, 4\text{cm}$) cắt nhau tại B.
- + Đường thẳng AB kéo dài cắt đường tròn ($C, 2\text{cm}$) tại điểm B' (ngoài điểm B đã kể ở trên).

Các tứ giác ABCD và AB'CD là những hình thang thỏa mãn đề bài.

Chứng minh : Vì $B \in (A, 4\text{cm})$ nên $AB = 4\text{cm}$.

$\triangle ABC = \triangle DCA$ ($AB = CD = 4\text{cm}$, $AD = BC = 2\text{cm}$, AC chung) do đó $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ là cặp góc so le trong ta có : $AB \parallel CD$.

Tứ giác ABCD có $AB \parallel CD$, $AD = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$ là hình thang thỏa mãn yêu cầu, AB'CD cũng là hình thang thỏa mãn yêu cầu vì $AB' \parallel CD$, $AD = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, $CB' = 2\text{cm}$.

- 2** Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo cắt nhau ở O và tam giác ABO là tam giác đều. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng OA, OD và BC. Chứng minh rằng tam giác EFG là tam giác đều.

Giải

Các tam giác OAB và OCD là các tam giác đều, các đường trung tuyến BE, CF đồng thời là các đường cao : $BE \perp AO$; $CF \perp OD$. Các tam giác vuông EBC, FBC có các trung tuyến ứng với cạnh huyền BC bằng nửa cạnh huyền BC.

$$EG = \frac{1}{2}BC \quad (1); \quad FG = \frac{1}{2}BC \quad (2)$$

Trong tam giác OAD, đoạn thẳng EF là đường trung bình nên

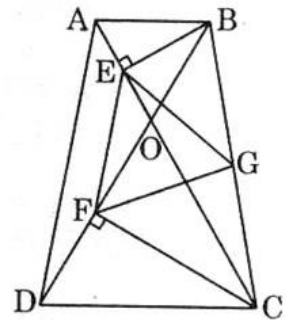
$$EF = \frac{1}{2} AD$$

$$\text{Vì } AD = BC, \text{ do đó } EF = \frac{1}{2} BC \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có :

$$EG = FG = EF = \frac{1}{2} BC.$$

Vậy tam giác EFG là tam giác đều.



3

Tam giác ABC có các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Đường vuông góc với AB tại B và đường vuông góc với AC tại C cắt nhau ở K. Tam giác ABC có điều kiện gì thì tứ giác BHCK là :

a) Hình thoi ?

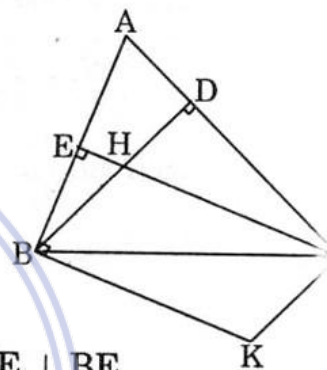
b) Hình chữ nhật ?

Giải

a) Tứ giác BHCK là hình bình hành (CE // BK vì cùng vuông góc với AB, BD // CK) BHCK là hình thoi thì BH = HC, suy ra $\triangle BHE = \triangle CHD$, do đó HE = HD, suy ra BD = CE. Suy ra tam giác ABC phải là tam giác cân.

b) BHCK là hình chữ nhật thì $BH \perp CE$ mà $CE \perp BE$.

Vậy BD trùng với BA hay tam giác ABC vuông tại A và H trùng với A.



4

Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi E là giao điểm của AN và DM, K là giao điểm của BN và CM. Hình bình hành ABCD phải có điều kiện gì thì tứ giác MENF là :

a) Hình thoi ?

b) Hình chữ nhật ?

c) Hình vuông

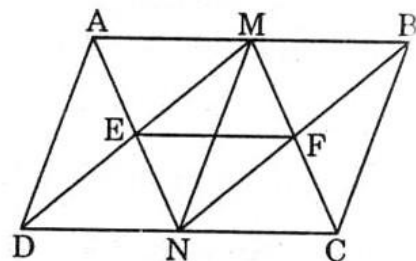
Giải

a) Do AB // CD và AB = CD suy ra AM // DN và AM = DN.

AMND là hình bình hành có MN // AD. Các đường chéo AN, DM cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Do đó E là trung điểm của DM.

Tương tự, ta có F là trung điểm của CM. Suy ra EF // AB.

Nếu MENF là hình thoi thì các đường chéo EF $\perp$ MN. Suy ra AB $\perp$ AD hay ABCD là hình chữ nhật.



- b) Nếu MENF là hình chữ nhật thì $MN = EF = \frac{1}{2}CD$, suy ra $CD = 2MN = 2AD$. Vậy khi một cạnh của hình bình hành ABCD gấp đôi cạnh kề nó thì MENF là hình chữ nhật.
- c) Từ hai câu a) và b) ta suy ra rằng MENF là hình vuông khi ABCD là hình chữ nhật có một cạnh gấp đôi cạnh kề nó.

- 5] Trong tam giác ABC, các trung tuyến AA' và BB' cắt nhau ở G. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng diện tích tam giác ABG bằng S.

Giải

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C, G trên đường thẳng AB. Ta có $\triangle GKC' \sim \triangle CHC'$, do đó :

$$\frac{GK}{CH} = \frac{GC'}{CC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow CH = 3GK$$

Diện tích tam giác ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} AB \times 3GK$$

$$= 3 \times \left(\frac{1}{2} AB \times GK \right) = 3S$$

Vậy $S_{ABC} = 3S_{ABG} = 3S$.

- 6] Cho tam giác ABC và đường trung tuyến BM. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm D sao cho $\frac{BD}{DM} = \frac{1}{2}$. Tia AD cắt BC ở K. Tìm tỉ số diện tích của tam giác ABK và tam giác ABC.

Giải

Qua M kẻ đường thẳng song song với AK, cắt BC tại I. Áp dụng định lí Ta-let trong tam giác BMI, ta được :

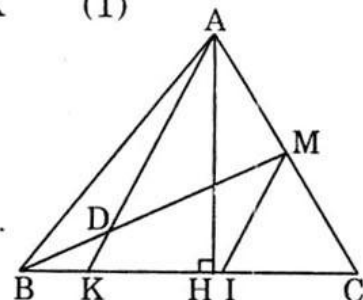
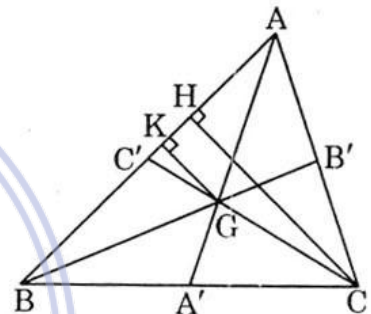
$$\frac{BK}{KI} = \frac{BD}{DM} = \frac{1}{2} \Rightarrow KI = 2BK \quad (1)$$

Trong tam giác AKC có MI là đường trung bình, do đó :

$$KI = IC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $BC = 5BK$

Các tam giác ABC và AKB có chung đường cao AH kẻ từ A, do đó tỉ số diện tích :



$$\frac{S_{ABK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BK \times AH}{\frac{1}{2}BC \times AH} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{5}.$$

- 7** Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Tia phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt BC ở K. Qua trung điểm M của BC kẻ một tia song song với KA cắt đường thẳng AB ở D, cắt AC ở E. Chứng minh $BD = CE$.

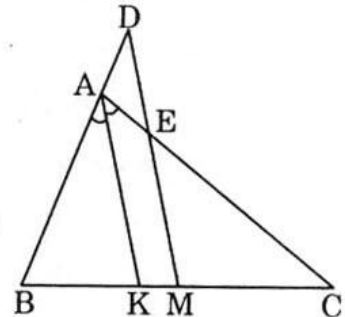
Giải

Do $AK \parallel DM$, áp dụng định lí Ta-let trong tam giác BDM ta có :

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BM}{KM} \quad (1)$$

Áp dụng định lí Ta-let trong tam giác CAK ta có :

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CM}{KM} \quad (2)$$



Mặt khác, ta có $\widehat{ADE} = \widehat{BAK}$ (đồng vị); $\widehat{DEA} = \widehat{CAK}$ (so le trong).

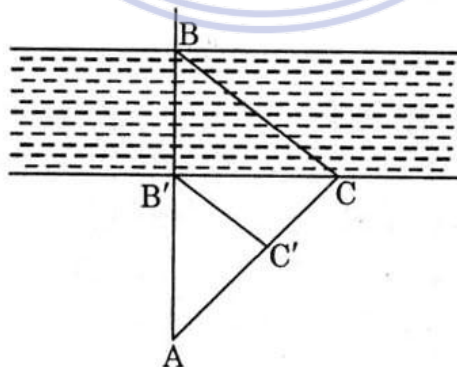
Vì AK là đường phân giác của góc $\widehat{A}$ nên $\widehat{BAK} = \widehat{CAK}$, do đó $\widehat{ADE} = \widehat{DEA}$ nên tam giác ADE cân đỉnh A, suy ra $AD = AE$. Hơn nữa $BM = CM$ nên đẳng thức (1) có thể được viết thành :

$$\frac{BD}{AE} = \frac{CM}{KM} \quad (3)$$

Số sánh (2) và (3) ta được $BD = CE$ (đpcm).

- 8** Trên hình cho ta thấy có thể xác định chiều rộng BB' của khúc sông bằng cách xét hai tam giác đồng dạng ABC và $AB'C'$.

Hãy tính BB' nếu $AC = 100\text{m}$, $AC' = 32\text{m}$, $AB' = 34\text{m}$.



Giải

Trên hình ta thấy $B'C' \parallel BC$. Theo định lí Ta-let ta có :

$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} \Rightarrow BB' = \frac{AB' \times C'C}{AC'}$$

Thay $AB' = 34\text{m}$, $C'C = AC - AC' = 100 - 32 = 68\text{m}$, ta tính được chiều rộng khúc sông :

$$BB' = \frac{34 \times 68}{32} = 72,25\text{m}.$$

- 9** Cho tam giác ABC có $AB < AC$, D là một điểm nằm giữa A và C . Chứng minh rằng : $\widehat{ABD} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow AB^2 = AC \cdot AD$.

Giải

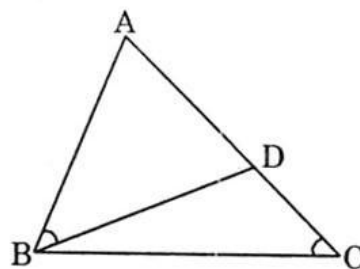
- a) $(\Rightarrow)$ Cho $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$. Chứng minh $AB^2 = AC \cdot AD$

Vì các tam giác ABD và ACB có

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC}, \widehat{ABD} = \widehat{ACB} \text{ nên}$$

$\triangle ABD \sim \triangle ACB$, do đó

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}, \text{ suy ra } AB^2 = AC \cdot AD$$



- b) $(\Leftarrow)$ Nếu $AB^2 = AC \cdot AD$ thì $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$. Hai tam giác ABD và ACB có hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và góc tạo bởi các cặp cạnh đó là góc $\widehat{A}$ chung. Vậy $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ cho nên các góc tương ứng $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

Vậy : $\widehat{ABD} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow AB^2 = AC \cdot AD$.

- 10** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 12\text{cm}$, $AD = 16\text{cm}$, $AA' = 25\text{cm}$.

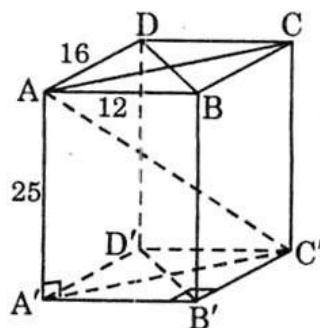
- a) Chứng minh các tứ giác $ACC'A'$, $BDD'B'$ là các hình chữ nhật.
b) Chứng minh : $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$.
c) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật.

Giải

- a) Vì $ABB'A'$, $BCC'B'$ là hai hình chữ nhật nên ta có $AA' = CC'$. Lại có $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là hai hình chữ nhật bằng nhau nên hai đường chéo $AC = A'C'$. Bởi vậy $ACC'A'$ là hình bình hành.

Hơn nữa $AA' \perp A'B'$, $AA' \perp A'D'$ nên $AA' \perp mp(A'B'C'D')$, do đó $AA' \perp A'C'$. Do đó $ACC'A'$ là hình chữ nhật.

Chứng minh tương tự ta thấy $BDD'B'$ là hình chữ nhật.



b) Tam giác AA'C' vuông tại A'. Theo định lí Pi-ta-go :

$$AC'^2 = A'C'^2 + AA'^2 \quad (1)$$

Tam giác A'B'C' vuông tại B' nên $A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$.

Thay vào (1) ta có :

$$AC'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 + AA'^2 \quad (2)$$

Vì $A'B' = AB$, $B'C' = A'D' = AD$ nên thay thế vào (2) ta được :

$$AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2.$$

c) Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật :

$$S_{tp} = 2(AB + AD).AA' + 2AB.AD = 1784 \text{ cm}^2$$

Thể tích hình hộp chữ nhật :

$$V = AB \times AD \times AA' = 4800 \text{ cm}^3.$$

11 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy $AB = 20\text{cm}$, cạnh bên $SA = 24\text{cm}$.

a) Tính chiều cao SO rồi tính thể tích hình chóp.

b) Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Giải

Tam giác SOA vuông tại O. Theo định lí Pi-ta-go :

$$SA^2 = AO^2 + SO^2$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{2}}.$$

Thay $SA = 24$, $AB = 20$ ta được chiều cao

$$SO = \sqrt{24^2 - \frac{20^2}{2}} \approx 19,40\text{cm}.$$

Thể tích hình chóp :

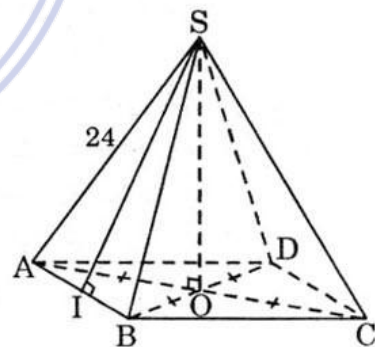
$$V = \frac{1}{3}.AB^2.SO \approx \frac{1}{3}.400 \times 19,40 \approx 2586,67 \text{ cm}^3.$$

Trung đoạn của hình chóp :

$$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{24^2 - 10^2} \approx 21,82\text{cm}.$$

Diện tích toàn phần của hình chóp

$$S_{tp} = AB^2 + 2AB.SI \approx 400 + 40 \times 21,82 = 1272,8 \text{ cm}^2.$$



MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

§1. Mở đầu về phương trình	3
§2. Phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải	5
§3. Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$	5
§4. Phương trình tích	12
§5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức	16
§6, §7. Giải bài toán bằng cách lập phương trình	22
Ôn tập chương III	30

Chương IV

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng	35
§2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân	36
§3. Bất phương trình một ẩn	39
§4. Bất phương trình bậc nhất một ẩn	42
§5. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối	48
Ôn tập chương IV	50

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§1. Định lý Ta-let trong tam giác	54
§2. Định lý đảo và hệ quả của định lý Ta-let	56
§3. Tính chất đường phân giác của một tam giác	63
§4. Khái niệm tam giác đồng dạng	67
§5. Các trường hợp tam giác đồng dạng	70
§6. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông	79
Ôn tập chương III	84

Chương IV

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG – HÌNH CHÓP ĐỀU

§1, §2. Hình hộp chữ nhật. Đường thẳng, mặt phẳng song song	90
§3. Thể tích của hình hộp chữ nhật Đường thẳng, mặt phẳng vuông góc	94
§4. Hình lăng trụ đứng	99
§5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều	109
§6. Diện tích xung quanh hình chóp đều	112
§7. Thể tích của hình chóp đều	112
Ôn tập chương IV	118
Ôn tập cuối năm	123