

TRẦN THỊ VÂN ANH



HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP TỪ CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP **10** *môn* **TOÁN** CỦA CÁC SỞ GD&ĐT

✓ Dành cho HS lớp 9 ôn tập và luyện thi vào lớp 10 công lập trên toàn quốc.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN THỊ VÂN ANH

MỚI

**HƯỚNG DẪN GIẢI
CÁC DẠNG BÀI TẬP
TỪ CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO LỚP 10
môn TOÁN
CỦA CÁC SỞ GD&ĐT**

Dành cho HS lớp 9 ôn tập và luyện thi vào lớp 10
công lập trên toàn quốc.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 93714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập **PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập nội dung

THU HIÊN-NGỌC LÂM

Sửa bài

LÊ HOÀ

Chế bản

CÔNG TI ANPHA

Trình bày bìa

SƠN KỶ

Đối tác liên kết xuất bản

CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

**HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP TỪ CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP
10 CỦA CÁC SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO MÔN TOÁN**

Mã số: 1L-319ĐH2009

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ty TNHH In Song Nguyên

Số xuất bản: 1072-2009/CXB/12-203/ĐHQGHN, ngày 23/11/2009

Quyết định xuất bản số: 319LK-TN/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.

LỜI NÓI ĐẦU

Để đáp ứng nhu cầu học tập của học sinh, tài liệu tham khảo cho giáo viên, tác giả đã mạnh dạn viết quyển sách:

"Hướng dẫn giải các dạng bài tập từ các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 của các Sở giáo dục và Đào tạo môn Toán"

Trong quyển sách này, tác giả đã phân chia thành các chuyên đề cơ bản sau, bao gồm:

Chuyên đề 1: Các phép toán về căn thức.

Chuyên đề 2: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số.

Chuyên đề 3: Phương trình bậc hai và hệ thức Viet.

Chuyên đề 4: Phương trình qui về phương trình bậc nhất, bậc hai.

Chuyên đề 5: Hàm số bậc nhất – Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Chuyên đề 6: Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.

Chuyên đề 7: Các bài toán Hình học phẳng.

Chuyên đề 8: Các bài toán Hình học không gian.

Chuyên đề 9: Các bài toán bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Trong mỗi phần, sách được cấu trúc gồm 4 nội dung chính như sau:

1. Phương pháp chung.

2. Các ví dụ minh họa.

3. Bài tập vận dụng

4. Hướng dẫn và đáp số.

Với mỗi dạng bài tập cơ bản đều có phương pháp giải cụ thể và ví dụ minh họa. Ngoài ra, các bài tập đều có hướng dẫn giải chi tiết, dễ hiểu. Nhiều ví dụ có lời nhận xét để giúp học sinh tránh các sai lầm cơ bản. Các bài tập được lựa chọn từ dễ đến khó, có những bài tác giả đã đưa ra nhiều phương pháp khác nhau để bạn đọc tham khảo. Mặc dù đã hết sức cố gắng, song lời giải các bài toán trong quyển sách này có khi chưa phải là phương án giải hay nhất và cũng có thể còn thiếu sót. Tuy vậy, tác giả hy vọng rằng quyển sách này sẽ giúp ích cho các bạn trong quá trình học tập và giảng dạy, đặc biệt là quá trình tự học. Chúc các em học sinh và các thầy cô giáo quan tâm đến quyển sách này thành công trên mọi lĩnh vực. Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các em học sinh và các thầy cô giáo.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

- **Trung tâm sách giáo dục Anpha**

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

- **Công ti sách - thiết bị giáo dục ANPHA**

50 Nguyễn Văn Săng, Quận Tân Phú, TP.HCM

ĐT: 08.62676463, 38547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin trân trọng cảm ơn!

MỤC LỤC

1. Các phép biến đổi về căn thức	5
2. Phương trình bậc hai	35
3. Hệ phương trình.....	74
4. Phương trình quy về phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai	98
5. Các bài toán về hàm số bậc nhất và hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	130
6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.....	179
7. Các bài toán hình học trong mặt phẳng	202
8. Các bài toán hình học không gian	253
9. Các bài toán bất đẳng thức – Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất.....	281
10. Một số đề thi tự luyện	309

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

ABC

1. Các phép biến đổi về căn thức

Một số kiến thức cơ bản

1. Hằng đẳng thức đáng nhớ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

2. Một số phép biến đổi căn thức bậc hai

$$a. \sqrt{A^2} = |A|;$$

$$b. \sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} (A \geq 0; B \geq 0);$$

$$c. \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} (A \geq 0; B > 0)$$

$$d. \sqrt{A^2B} = |A| \sqrt{B} (B \geq 0);$$

$$e. \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} (A \geq 0; B > 0);$$

$$ff. \frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{A - B}.$$

$$gg. \frac{1}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{A - B}$$

$$hh. (\sqrt{A} - \sqrt{B})(A + \sqrt{AB} + B) = A - B$$

$$kk. (\sqrt{A} + \sqrt{B})(A - \sqrt{AB} + B) = A + B.$$

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức

Phương pháp:

Bước 1: Trục căn thức ở mẫu thức (nếu có).

Bước 2: Quy đồng mẫu thức (nếu có).

Bước 3: Đưa một biểu thức ra ngoài dấu căn

Bước 4: Rút gọn biểu thức.

Bước 5: Tính số trị (nếu còn tham số)

Dạng 2: Rút gọn biểu thức**Phương pháp:***Bước 1: Tìm điều kiện xác định của biểu thức**Bước 2: Trục căn thức ở mẫu thức (nếu có).**Bước 3: Quy đồng mẫu thức (nếu có).**Bước 4: Đưa một biểu thức ra ngoài dấu căn**Bước 5: Rút gọn biểu thức***Dạng 3: Chứng minh đẳng thức****Phương pháp:***Bước 1: Tìm điều kiện xác định của biểu thức**Bước 2: Biến đổi về trái về vế phải hoặc vế phải về vế trái. Cũng có khi chúng ta phải biến đổi cả hai vế cùng về biểu thức trung gian.***Dạng 4: Các bài toán tổng hợp****Các ví dụ minh họa****Dạng 1: Tính giá trị biểu thức***Ví dụ 1: Không sử dụng máy tính bỏ túi, tính giá trị của biểu thức:*

$$A = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$



$$B = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6-3\sqrt{3}}$$

*Tuyển sinh lớp 10 TP Hà Nội 2007-2008***Giải**

$$A = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6-3\sqrt{3}} = (3 + \sqrt{3})\sqrt{12-6\sqrt{3}} \\ = (3 + \sqrt{3})\sqrt{(3-\sqrt{3})^2} = (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 6.$$

$$\text{Ví dụ 2: Cho } x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}}$$

Tính giá trị biểu thức: $A = (x^3 - 2x + 2)^{2008}$ *Thi học sinh giỏi lớp 9 - TP Vinh Nghệ An - 2008***Giải**

$$\text{Ta có } \sqrt{\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Thế vào biểu thức ta có

$$A = (x^3 - 2x + 2)^{2008} = [(\sqrt{2})^3 - 2\sqrt{2} + 2]^{2008} = 2^{2008}.$$

Vậy $A = 2^{2008}$.

Ví dụ 3: Không sử dụng máy tính bỏ túi, tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(2\sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2}).$$

Đề TS lớp 10 chuyên TP HCM 2006-2007

Giải

$$A = \sqrt{16 + 4\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} (\sqrt{10} - \sqrt{2}) = \sqrt{16 + 4(\sqrt{5} - 1)} (\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

$$\sqrt{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} (\sqrt{10} - \sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} (\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 8.$$

Ví dụ 4: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$P = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{75}.$$

Đề TS lớp 10 THPT Trà Vinh 2009-2010

Giải

$$P = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{75}$$

$$= 2\sqrt{4 \cdot 3} - 3\sqrt{16 \cdot 3} + 4\sqrt{25 \cdot 3} = 4\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

Ví dụ 5: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$B = \frac{4 - \sqrt{7}}{\sqrt{4 + \sqrt{7}}} + \frac{4 + \sqrt{7}}{\sqrt{4 - \sqrt{7}}}.$$

Đề TS lớp 10 Thừa Thiên Huế 2006-2007

Giải

$$B = \frac{4 - \sqrt{7}}{\sqrt{4 + \sqrt{7}}} + \frac{4 + \sqrt{7}}{\sqrt{4 - \sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{(4 - \sqrt{7})^2}}{\sqrt{(4 + \sqrt{7})^2}} + \frac{\sqrt{(4 + \sqrt{7})^2}}{\sqrt{(4 - \sqrt{7})^2}} = \frac{|4 - \sqrt{7}| + |4 + \sqrt{7}|}{3}$$

$$B = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} + \frac{4 + \sqrt{7}}{3} = \frac{8}{3} \quad (\text{vì } 16 > 7 \Rightarrow 4 > \sqrt{7}).$$

Ví dụ 6: Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{6}{3 + \sqrt{3}}.$$

Đề TS lớp 10 THPT TP Huế 2007-2008

Giải

$$A = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{6}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)}{\sqrt{3}} + \frac{6(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}$$

$$A = \sqrt{3} - 2 + \frac{6(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} = \sqrt{3} - 2 + 3 + \sqrt{3} = 1$$

Ví dụ 7: Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}.$$

Đề TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM 2002 - 2003

Giải

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3 + 3^2}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - |2\sqrt{5} - 3|} \\
&= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - (2\sqrt{5} - 3)} \quad (\text{Vì } 2\sqrt{5} > 3 \Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 > 3^2 \Leftrightarrow 20 > 9) \\
&= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot 1 + 1^2}} \\
&= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - |\sqrt{5} - 1|} = \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)} = 1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 8: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau

$$A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Giải

$$\text{Ta có } \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2(2+\sqrt{3})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \text{ nên}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} - \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)} - \frac{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Ngoài ra bạn đọc có thể sử dụng phương pháp trục căn thức ở mẫu số, sau đó qui đồng mẫu số ta cũng có kết quả như trên.

Ví dụ 9: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}$$

TS lớp 10 chuyên toán Lê Hồng Phong TPHCM, 2003 – 2004

Giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \frac{1}{-(\sqrt{3}-\sqrt{2})} (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = -1 \text{ (vì } \sqrt{3} > \sqrt{2} \text{)}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

Giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } A^3 &= (\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})^3 \\
 &= 20+14\sqrt{2} + 3A\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + 20-14\sqrt{2} = 40+6A \\
 &\Leftrightarrow A^3 - 6A - 40 = 0 \Leftrightarrow A^3 - 4A^2 + 4A^2 - 16A + 10A - 40 = 0 \\
 &\Leftrightarrow A^2(A-4) + 4A(A-4) + 10(A-4) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (A-4)(A^2+4A+10) = 0
 \end{aligned}$$

Do $A^2 + 4A + 10 = (A+2)^2 + 6 > 0$, nên $A = 4$.

Ví dụ 11: Thu gọn biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{45+27\sqrt{2}} + \sqrt{45-27\sqrt{2}}}{\sqrt{5+3\sqrt{2}} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2}}}$$

Đề TS 10 chuyên TPHCM 2009 – 2010**Giải**

$$\text{Ta có: } \sqrt{45+27\sqrt{2}} + \sqrt{45-27\sqrt{2}} = 3(\sqrt{5+3\sqrt{2}} + \sqrt{5-3\sqrt{2}})$$

$$\begin{aligned}
 \text{Do đó: } A &= \frac{3(\sqrt{5+3\sqrt{2}} + \sqrt{5-3\sqrt{2}})}{\sqrt{5+3\sqrt{2}} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{3(\sqrt{5+3\sqrt{2}} + \sqrt{5-3\sqrt{2}})^2}{6\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}})^2}{2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{10+2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{6+2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 12: Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức:

$$B = \sqrt{(1-\sqrt{2008})^2} \cdot \sqrt{2009+2\sqrt{2008}}$$

Đề TS lớp 10 THPT TP Huế 2008 -2009

Giải

$$\text{Biến đổi: } \sqrt{(1 - \sqrt{2008})^2} = |1 - \sqrt{2008}| = \sqrt{2008} - 1$$

$$\sqrt{2009 + 2\sqrt{2008}} = \sqrt{(\sqrt{2008} + 1)^2} = |\sqrt{2008} + 1| = \sqrt{2008} + 1$$

$$B = (\sqrt{2008} - 1)(\sqrt{2008} + 1) = 2007$$

Ví dụ 13: Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}$$

Giải

$$A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}$$

Qui đồng mẫu số ta có:

$$A(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}) = 20 \Leftrightarrow A(3 + \sqrt{5}) - 20 = -A\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}$$

$$\text{Bình phương hai vế ta có } (3 + \sqrt{5})A^2 - 10(3 + \sqrt{5})A + 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 10A + 75 - 25\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow A_{1,2} = 5 \pm 5\sqrt{5 - 2};$$

$$\text{Ta có: } 3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}} > 4 \text{ nên } A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}} < 5, \text{ do đó}$$

$$A = 5 - 5\sqrt{5 - 2}.$$

Ví dụ 14: Tính giá trị của biểu thức P khi $a = -1 - 2\sqrt{2}$

$$P = \frac{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} - 2}{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{-2 - a}$$

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2004-2005

Giải

$$P = \frac{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} - 2}{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{-2 - a}$$

$$\text{Vì } a = -1 - 2\sqrt{2} < -2 \text{ nên: } \sqrt{a^2 - 4} = \sqrt{(a - 2)(a + 2)} = \sqrt{2 - a} \cdot \sqrt{-2 - a}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= \frac{(a + 1)\sqrt{2 - a}(- (a + 1)\sqrt{2 - a} + (a - 1)\sqrt{-2 - a})}{(a - 1)\sqrt{-2 - a}(- (a - 1)\sqrt{-2 - a} + (a + 1)\sqrt{2 - a})} \sqrt{-2 - a} \\ &= \frac{(a + 1)\sqrt{2 - a}}{1 - a} \end{aligned}$$

$$\text{Với } a = -1 - 2\sqrt{2}, \text{ ta được: } \sqrt{2 - a} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{-2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{2 + 2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Dạng 2: Rút gọn biểu thức.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}$ ($x > 0, x \neq 1$)

Đề TS lớp 10 THPT TP Huế 2007-2008

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \\ & \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 2\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)^2} \\ B &= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)^2} = -\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \quad (\text{vì } x > 0 \text{ và } x \neq 1) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3}{3x - 1} \sqrt{4x^2(9x^2 - 6x + 1)}$ với $0 < x < \frac{1}{3}$

Đề TS lớp 10 tỉnh Thừa Thiên Huế 2006-2007

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{3x - 1} \sqrt{4x^2(9x^2 - 6x + 1)} = \frac{6|x| \sqrt{(3x - 1)^2}}{3x - 1} = \frac{6x|3x - 1|}{3x - 1} \\ &= \frac{-6x(3x - 1)}{3x - 1} = -6x \quad (\text{vì } 0 < x < \frac{1}{3} \text{ nên } x > 0 \text{ và } 3x - 1 < 0). \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{1}{a^2 - \sqrt{a}} : \frac{\sqrt{a} + 1}{a\sqrt{a} + a + \sqrt{a}}$

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Đề TS 10 trường Quốc học Huế 1996 – 1997

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^2 - \sqrt{a}} : \frac{\sqrt{a} + 1}{a\sqrt{a} + a + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} : \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}(a + \sqrt{a} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)(a + \sqrt{a} + 1)} : \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}(a + \sqrt{a} + 1)} \end{aligned}$$

$$\text{Biểu thức } A \text{ có nghĩa } \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 0 \\ \sqrt{a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Với điều kiện $a > 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)(a + \sqrt{a} + 1)} : \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}(a + \sqrt{a} + 1)} \\ A &= \frac{\sqrt{a}(a + \sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)(a + \sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{1}{a - 1} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức: $A = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$ ($x > 0; x \neq 1$)

Đề TS lớp 10 THPT TP Huế 2008 -2009
Giải

$$A_1 = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2x}{x-1} = 2\sqrt{x} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right) \left(1 - \frac{2}{a+1} \right)^2$ với $a > 0, a \neq 1$.

Đề TS lớp 10 chuyên TP HCM 2006-2007

Giải

$$B = \frac{a - 2\sqrt{a} + 1 + a + 2\sqrt{a} + 1}{a-1} \cdot \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 = \frac{2(a+1)}{a-1} \cdot \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 = \frac{2(a-1)}{a+1}$$

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

Đề TS 10 trường Quốc học Huế 1996 – 1997

Giải

$$P = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow P = |x+1| - |x-1| = \begin{cases} -x-1 - (-x+1) & \text{khi } x < -1 \\ x+1 - (-x+1) & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 - (x-1) & \text{khi } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -2 & \text{khi } x < -1 \\ 2x & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Ví dụ 7: a. Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1}$ ($x > 0; x \neq 1$)

b. Tìm x khi $B = -3$.

Đề thi thử lớp 10 THPT Quảng Nam -2009-2010

Giải

a. Ta có: $\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2};$$

$$B = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} = -\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \quad (\text{vì } x > 0 \text{ và } x \neq 1) (*)$$

b. Đặt $\sqrt{x} = t$, khi đó (*) trở thành: $-\frac{t+1}{t} = -3 \Leftrightarrow 3t = t+1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Khi $t = \frac{1}{2}$ thì $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 8: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$

Rút gọn A, rồi tính giá trị của A khi $x = \sqrt{3} + 2$

Đề TS lớp 10 Quốc học Huế 1998 – 1999
Giải

Vì $x^2 + x\sqrt{3} + 3 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 2\frac{1}{4} > 0$ nên ta có:

Biểu thức A có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \sqrt{3} \end{cases}$.

Với điều kiện $x \neq 0$ và $x \neq \sqrt{3}$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \cdot \frac{x^2 + 3 + x\sqrt{3}}{x\sqrt{3}} \\ &= \frac{x\sqrt{3} - 3 + 3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \cdot \frac{x^2 + 3 + x\sqrt{3}}{x\sqrt{3}} \\ &= \frac{x\sqrt{3}(x^2 + x\sqrt{3} + 3)}{x\sqrt{3}(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} = \frac{1}{x - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Khi $x = \sqrt{3} + 2$ thì $A = \frac{1}{x - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 9: Rút gọn biểu thức sau: $P = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}} \quad (x \geq 2)$

Giải

Điều kiện $x \geq 2$, ta có $P = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}}$

$$= \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} \right]}{\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2} \left[\left| \sqrt{x-1} + 1 \right| + \left| \sqrt{x-1} - 1 \right| \right]}{\sqrt{(\sqrt{2x-1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1} - 1)^2}} = \frac{\sqrt{2} \left[\left| \sqrt{x-1} + 1 \right| + \left| \sqrt{x-1} - 1 \right| \right]}{\left| \sqrt{2x-1} + 1 \right| - \left| \sqrt{2x-1} - 1 \right|} \\
&= \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 \right]}{\sqrt{2x-1} + 1 - (\sqrt{2x-1} - 1)} \quad (\text{vì } x \geq 2 \text{ nên } \sqrt{x-1} \geq 1 \text{ và } \sqrt{2x-1} \geq 1) \\
&= \sqrt{2}\sqrt{x-1}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 10: Cho biểu thức $P = \left(\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab} + b} + \frac{2b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right)$

Tìm điều kiện đối với a và b để P có nghĩa rồi rút gọn biểu thức P.

TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2009-2010

Giải

Điều kiện để biểu thức P có nghĩa: $a > 0, b > 0$.

$$\begin{aligned}
P &= \left[\frac{(\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3}{a + \sqrt{ab} + b} + \frac{2b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \left[\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)}{a + \sqrt{ab} + b} + \frac{2b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \\
&\Rightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \frac{2b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \right) = \left(\frac{a + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \right) = \frac{a + b}{\sqrt{ab}} (*)
\end{aligned}$$

Ví dụ 11: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a - b} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}$.

(với $a > 0, b > 0$ và $a \neq b$).

Đề TS 10 Trường Quốc Học Huế 1996 – 1997

Giải

Với $a > 0, b > 0$ và $a \neq b$, ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a - b} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \\
&= \frac{3\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} \\
&= \frac{3\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} \\
&= \frac{3\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{3\sqrt{a}(a - \sqrt{ab} + b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} \\
&\Rightarrow A = \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{3\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{3(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 3.
\end{aligned}$$

Ví dụ 12: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x^2 y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y} \right)$

Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 - Hải Phòng 2004 – 2005

Giải

Với điều kiện $x \neq 0, y \neq 0; x \neq y$ ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x^2 y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y} \left(\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y} \right) = \frac{|xy|}{xy} + \frac{|x-y|}{x-y} \left(\frac{|x|}{x} - \frac{|y|}{y} \right)$$

Xét hai khả năng $xy > 0$ và $xy < 0$ ta đều dẫn đến kết quả $P = 1$.

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức

Ví dụ 1: Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}} = 1$$

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2008-2009

Giải

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}} &= \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{12 - 4\sqrt{3} + 1}} \\ &= \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3} - |2\sqrt{3} - 1|} \\ &= \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{3} - |\sqrt{3} - 1|} = 1 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Chứng minh đẳng thức: $\left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{27} - 3} - \frac{\sqrt{150}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4}{3}$

Đề TS lớp 10 Thừa Thiên Huế 2006-2007

Giải

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{27} - 3} &= \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{3})}{3\sqrt{3} - 3} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)}{3(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \frac{\sqrt{150}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \\ \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{27} - 3} - \frac{\sqrt{150}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} &= \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{5\sqrt{6}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Dạng 4: Các bài toán tổng hợp

Ví dụ 1: Cho biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$

- Tìm điều kiện của x để P có nghĩa.
- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm giá trị của x khi $P = \frac{1}{3}$.
- Tìm giá trị lớn nhất của P

Đề TS 10 Quốc Học Huế 2000 – 2001

Giải

Ta có: $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$

$$P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 3\sqrt{x} - \sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$

$$= \frac{15\sqrt{x} - 11}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) - (\sqrt{x} + 3)} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$

$$= \frac{15\sqrt{x} - 11 - (3\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) - (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{15\sqrt{x} - 11 - 3x - 9\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 6 - 2x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{-5x + 7\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{-5x + 5\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{-5\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) + 2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(2 - 5\sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}$$

a. Biểu thức P có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 3 \neq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

b. Với điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$ ta có: $P = \frac{(\sqrt{x} - 1)(2 - 5\sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$

c. $P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0; x \neq 1 \\ 6 - 15\sqrt{x} = \sqrt{x} + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0; x \neq 1 \\ -16\sqrt{x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0; x \neq 1 \\ \sqrt{x} = \frac{3}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0; x \neq 1 \\ x = \frac{9}{256} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{256}$$

d. Ta có $P = \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = -5 + \frac{17}{\sqrt{x} + 3}$

$$\text{Do } \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{17}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{17}{3} \Rightarrow P = -5 + \frac{17}{\sqrt{x} + 3} \leq -5 + \frac{17}{3} = \frac{2}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{2}{3}$ khi $x = 0$.

Ví dụ 2: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1-x} + \frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1-\sqrt{x}}$

- Tìm điều kiện xác định của P.
- Rút gọn P
- Tìm x để $P > 0$.

Đề TS lớp 10 chuyên Hà Nam 2009-2010

Giải

$$a. P \text{ xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1-\sqrt{x} \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$b. \text{ Rút gọn: } P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1-x} + \frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{x-4\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{-\sqrt{x}+4}{1-\sqrt{x}} = \frac{4}{1-\sqrt{x}}$$

$$c. P > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{1-\sqrt{x}} > 0 \\ x \neq 1; x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1.$$

Ví dụ 3: Cho biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{9x-3}}{x + \sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

- Rút gọn biểu thức P.
- Tính giá trị của P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

Đề TS lớp 10 Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2007-2008

Giải

- Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:

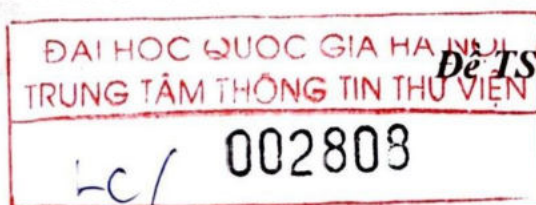
$$P = \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

- Đáp số $P = 1 + \sqrt{2}$.

Ví dụ 4: Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$

- Rút gọn biểu thức P.
- Tìm x để $P < \frac{1}{2}$.



Đề TS lớp 10 TP Hà nội 2007-2008

Giải

- a. Điều kiện để P xác định của biểu thức P là $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

b. $P < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-2 < \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9.$

Đôi chiếu với điều kiện xác định của P có kết quả cần tìm là $\begin{cases} 0 < x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}.$

Ví dụ 5: Cho biểu thức: $P = \frac{3x-2\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

- a. Tìm x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P.
b. Không dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị của P khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2008-2009**Giải**

$$P = \frac{3x-2\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{3x-2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

Điều kiện có nghĩa: $x \geq 0; x \neq 1$

$$P = \frac{3x-2\sqrt{x}-4-(x-1)-(x-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

b. Ta có: $x = 4 + 2\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}+1$

Khi đó: $P = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Ví dụ 6: Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2007})(y + \sqrt{y^2 + 2007}) = 2007$. Tính $S = x + y$

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2007-2008**Giải**

Ta có: $(x + \sqrt{x^2 + 2007})(-x + \sqrt{x^2 + 2007}) = 2007 \quad (a)$

$(y + \sqrt{y^2 + 2007})(-y + \sqrt{y^2 + 2007}) = 2007 \quad (b)$

Nhân theo vế của (a) và (b) và kết hợp với giả thiết ta được:

$$2007(-x + \sqrt{x^2 + 2007})(-y + \sqrt{y^2 + 2007}) = 2007^2$$

$$\Rightarrow (-x + \sqrt{x^2 + 2007})(-y + \sqrt{y^2 + 2007}) = 2007$$

$$\Rightarrow xy - x\sqrt{y^2 + 2007} - y\sqrt{x^2 + 2007} + \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007 \quad (c)$$

Giả thiết

$$\Rightarrow xy + x\sqrt{y^2 + 2007} + y\sqrt{x^2 + 2007} + \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007 \quad (d)$$

Cộng theo vế (c) và (d) ta được: $xy + \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007 - xy$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 + 2007(x^2 + y^2) + 2007^2 = 2007^2 - 2 \cdot 2007xy + x^2 y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = -2xy \Rightarrow (x + y)^2 = 0 \Rightarrow S^2 = 0 \Rightarrow S = 0.$$

Ví dụ 7: Cho biểu thức $A = \frac{9x^2 - 4}{4x^2 - 1 + (2x + 1)(x - 1)}$

- Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.
- Rút gọn biểu thức A.
- Tìm x để $A > 0$.
- Tìm các giá trị nguyên của x sao cho A là một số nguyên.

Đề TS 10 Quốc Học Huế 1999 – 2000

Giải

$$A = \frac{9x^2 - 4}{4x^2 - 1 + (2x + 1)(x - 1)} = \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{(2x - 1)(2x + 1) + (2x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{(2x + 1)[(2x - 1) + (x - 1)]} = \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{(2x + 1)(3x - 2)}$$

$$a. \text{ Biểu thức A có nghĩa } \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \neq 0 \\ 3x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq -1 \\ 3x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$b. \text{ Với điều kiện } x \neq -\frac{1}{2} \text{ và } x \neq \frac{2}{3} \text{ ta có: } A = \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{(2x + 1)(3x - 2)} = \frac{3x + 2}{2x + 1}$$

$$c. \quad A > 0 \Leftrightarrow \frac{3x + 2}{2x + 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 < 0 \\ 2x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{3} \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy khi $x > -\frac{1}{2}$ và $x \neq \frac{2}{3}$ hoặc $x < -\frac{2}{3}$ thì biểu thức A dương.

d. Ta có $A = \frac{3x+2}{2x+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2x+1)} = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{2x+1} \right)$. Biểu thức A nhận giá trị nguyên ($x \in \mathbb{Z}$) khi biểu thức $3 + \frac{1}{2x+1}$ nhận giá trị nguyên chẵn tức là $\frac{1}{2x+1}$ nhận giá trị nguyên lẻ. Hay nói một cách khác, $2x+1 = \pm 1$. Suy ra $x = 0$ hoặc $x = -1$. Do đó khi $x = 0$ hoặc $x = -1$ thì biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Ví dụ 8: Xét biểu thức $y = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + 1 - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

- Rút gọn y. Tìm x để $y = 2$.
- Giả sử $x > 1$. Chứng minh rằng: $y - |y| = 0$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của y.

Đề TS 10 nâng khiếu Hàn Thuyên, Bắc Ninh 2002 – 2003

Giải

a. Điều kiện: $x > 0$:

$$y = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} + 1 - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$$

$$= x + \sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x} - 1 = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1).$$

b. Với $x > 1$ thì $\sqrt{x} - 1 > 0 \Rightarrow y = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) > 0 \Rightarrow |y| = y$ hay $y - |y| = 0$.

c. $y = x - \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $-\frac{1}{4}$ khi $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0$ hay $x = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 9: Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \text{ với } x > 0; x \neq 1$$

- Rút gọn A.
- Chứng minh $0 < A < 2$.

Đề TS lớp 10 ĐHSPT Hải Phòng 2003 – 2004

Giải

a. $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x > 0; x \neq 1$

$$= \left[\frac{x+2 + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b. Vì $x + \sqrt{x} + 1 > 1$ nên $\frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} < 2$ và $x > 0$ nên $\frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} > 0$

Vậy $0 < A < 2$.

Ví dụ 10: Chứng tỏ rằng: $\sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}$ là số tự nhiên.

Thi học sinh giỏi lớp 9 – Bảng A Nghệ An 2009

Giải

Đặt $X = \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} \Rightarrow X^3 = 15 - 3X$

$\Rightarrow X^3 + 3X - 15 = 0 \Rightarrow (X - 2)(X^2 + 2X + 7) = 0$

Do: $X^2 + 2X + 7 > 0 \Rightarrow X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2$

Nên $\sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = 2$ hay $\sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}$ là số tự nhiên.

Ví dụ 11: Cho biểu thức: $A = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$

a. Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

b. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{9}{4}$.

c. Tìm tất cả các giá trị của x để $A < 1$.

Đề TS lớp 10 Nghệ An 2009 – 2010

Giải

a. Điều kiện xác định của biểu thức A là $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$A = \frac{x\sqrt{x} + 1 - (x - 1)(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = \frac{x\sqrt{x} + 1 - x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x - 1}{x - 1} = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

b. Khi $x = \frac{9}{4}$, ta có: $A = 3$.

c. Trong điều kiện xác định thì $A < 1$ trở thành

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} < 1 (*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow x < 1.$$

Kết hợp với điều kiện ta có kết quả là: $0 \leq x < 1$.

Ví dụ 12: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a + 4\sqrt{a - 4}} + \sqrt{a - 4\sqrt{a - 4}}}{\sqrt{1 - \frac{8}{a} + \frac{16}{a^2}}}$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm các giá trị nguyên lớn hơn 8 ($a \in \mathbb{Z}$, $a > 8$) để A có giá trị nguyên.

Đề TS lớp 10 Quốc học Huế 2002 – 2003

Giải

a. Ta có $A = \frac{\sqrt{a+4}\sqrt{a-4} + \sqrt{a-4}\sqrt{a-4}}{\sqrt{1-\frac{8}{a}+\frac{16}{a^2}}}$

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{a-4})^2 + 4\sqrt{a-4} + 2^2} + \sqrt{(\sqrt{a-4})^2 - 4\sqrt{a-4} + 2^2}}{\sqrt{\frac{a^2 - 8a + 16}{a^2}}}$$

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{a-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-4}-2)^2}}{\sqrt{\frac{(a-4)^2}{a^2}}} = \frac{|\sqrt{a-4}+2| + |\sqrt{a-4}-2|}{\frac{|a-4|}{|a|}}$$

Biểu thức A có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} a-4 \geq 0 \\ a-4 \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 4 \\ a \neq 4 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 4$

Nếu $4 < a \leq 8$ thì $A = \frac{\sqrt{a-4}+2-\sqrt{a-4}+2}{\frac{a-4}{a}} = \frac{4a}{a-4}$.

Nếu $a > 8$ thì $A = \frac{\sqrt{a-4}+2+\sqrt{a-4}-2}{\frac{a-4}{a}} = \frac{2a\sqrt{a-4}}{a-4}$.

b. Đặt $m = \sqrt{a-4}$. Suy ra $m^2 = a-4 \Rightarrow a = m^2 + 4$.
Do $a > 8$ nên $m > 2$.

Lúc đó $A = \frac{2a\sqrt{a-4}}{a-4} = \frac{2(m^2+4).m}{m^2} = \frac{2(m^2+4)}{m} = 2m + \frac{8}{m}$.

Biểu thức A nhận giá trị nguyên ($a \in \mathbb{Z}$ và $a > 8$) khi $m > 2$ và là ước của 8.

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a-4} = 4 \\ \sqrt{a-4} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ a = 68 \end{cases}$$

Ví dụ 13: Cho biểu thức: $A = \sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4}$.

a. Rút gọn A.

b. Tìm giá trị của x khi A đạt giá trị nhỏ nhất.

Đề TS lớp 10A Chu Văn An – Hà Nội 1991 – 1992

Giải

a. A có nghĩa $\Leftrightarrow x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

Ta có: $A = \sqrt{(x-4)+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{(x-4)-4}\sqrt{x-4} + 4$
 $= \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} = \sqrt{x-4} + 2 + |\sqrt{x-4}-2|$

* Nếu $0 < \sqrt{x-4} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x-4 \leq 2^2 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8$

Ta có $A = \sqrt{x-4} + 2 + 2 - \sqrt{x-4} = 4$.

* Nếu $\sqrt{x-4} > 2 \Leftrightarrow x-4 > 4 \Leftrightarrow x > 8$

Khi đó $A = \sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2 = 2\sqrt{x-4}$.

b. Khi $x > 8$ thì $A = 2\sqrt{x-4} > 2\sqrt{8-4} = 4$. Khi $4 \leq x \leq 8$ thì $A = 4$.

Do đó với $4 \leq x \leq 8$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất là 4.

Ví dụ 14: Cho $A = \frac{1}{2(1+\sqrt{a+2})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a+2})}$; $B = A + \frac{a^2-2a}{1+a^3}$

a. Tìm a để A, B có nghĩa.

b. Rút gọn A, B .

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của B .

Đề TS lớp 10A THPT Hoàn Kiếm – Hà Nội 1992 – 1993

Giải

a. Để A, B có nghĩa: $\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 \geq 0 \\ 1-\sqrt{a+2} \neq 0 \\ 1+a^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ \sqrt{a+2} \neq -1 \\ a^3 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a \neq -1 \end{cases}$

b. $A = \frac{(1-\sqrt{a+2}) + (1+\sqrt{a+2})}{2(1-a-2)} = \frac{1}{a+1}$

$B = \frac{1}{a+1} + \frac{a^2-2a}{(a+1)(a^2-a+1)} = \frac{1}{(a+1)(a^2-a+1)} = \frac{1}{a^2-a+1}$

c. Ta có $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$

Do đó $\frac{1}{a^2-a+1} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{a^2-a+1} \geq -\frac{4}{3}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Giá trị nhỏ nhất của B là $-\frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 15: Cho biểu thức: $A = \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{1}{1-\sqrt{a}}$

a. Rút gọn A .

b. Tìm các giá trị lớn nhất của A .

Đề TS lớp 10 THPT Hải Phòng 1995 – 1996

Giải

$$a. A \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a^3 \neq 0 \\ a \geq 0 \\ 1-\sqrt{a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 \neq 1 \\ a \geq 0 \\ \sqrt{a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{1-\sqrt{a}}{1-a} - \frac{1+\sqrt{a}}{1-a} = \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{2}{1-a}$$

$$A = \frac{2a^2+4-2(1+a+a^2)}{(1-a)(1+a+a^2)} = \frac{2a^2+4-2-2a-2a^2}{(1-a)(1+a+a^2)} = \frac{2}{(1+a+a^2)}$$

$$b. \text{ Vì } a \geq 0 \text{ nên } 1+a+a^2 \geq 1. \text{ Do đó } A = \frac{2}{1+a+a^2} \leq 2.$$

Dấu “=” xảy ra tương đương với $a = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $2 \Leftrightarrow a = 0$.

Ví dụ 16: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$

a. Rút gọn A .

b. Với giá trị nào của x thì A đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Đề TS lớp 10 THPT Hà Nội 1996 – 1997

Giải

$$\begin{aligned} a. A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \frac{x-1-2\sqrt{x} \cdot 2}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} (\sqrt{x}+1) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \quad (\text{điều kiện } x \geq 0, x \neq 1) \end{aligned}$$

$$b. A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-1-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Mà } \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1} \leq 2.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A \geq -1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy A có giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

Ví dụ 17: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$

a. Rút gọn A .

b. Tìm giá trị của a để $A > \frac{1}{6}$.

Đề TS lớp 10 THPT Hà Nội 1995 – 1996

Giải

a. Điều kiện $a > 0, a \neq 1, a \neq 4$. (*)

$$A = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} \right) : \frac{(a-1) - (a-4)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{a-1-a+4} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)}{(a-1-a+4)} = \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}$$

b. $A > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow 2\sqrt{a}-4 > \sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} > 4 \Leftrightarrow a > 16$

Vậy $a > 16$ thỏa mãn điều kiện (*).

Bài tập vận dụng

1. Cho $(x + \sqrt{x^2 + 5})(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5$.

Tính giá trị biểu thức $E = x + y$.

2. Cho biểu thức: $M = \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} - \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

a. Tìm điều kiện đối với x để biểu thức M xác định.

b. Rút gọn biểu thức M .

c. Tìm những giá trị x nguyên ($x > 2$) để M có giá trị nguyên.

3. Tính giá trị của: $P = \frac{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} - 2}{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{-2-a}$ khi $a = -1 - 2\sqrt{2}$

4. Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến:

a. $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right)$, với $a > 0, a \neq 1$.

b. $\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$ ($x > 0, y > 0, x \neq y$)

5. Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1}$ ($x > 0, x \neq 1$)

6. Xét biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

a. Rút gọn A .

b. Tìm các giá trị của x để $A < 1$.

c. Tìm các giá trị nguyên của x sao cho A cũng là số nguyên.

7. Cho biểu thức: $P = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - 1 \right)$

a. Rút gọn P .

b. Tìm các giá trị nguyên của x để P nguyên.

c. Tìm các giá trị của x để $P = \sqrt{x}$.

8. Cho: $A = (x - x^2 - 1) : \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3}$ với $x \neq 0$.

a. Rút gọn A.

b. Tìm x để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

9. Cho $S = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.

Hãy tính giá trị của S biết rằng $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = a$.

10. Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4}}{\sqrt{1-\frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}}}$. Rút gọn rồi tìm các

giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

11. Chứng minh rằng: $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$.

12. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1} \right)$

a. Rút gọn P

b. Tìm x nguyên để P có giá trị nguyên.

13. Cho biểu thức: $B = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right]$
 $C = \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$

a. Tìm điều kiện để $A = B : C$ xác định.

b. Rút gọn A

c. Cho $xy = 6$. Xác định x, y để A có giá trị nhỏ nhất.

14. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$.

a. Rút gọn P

b. Tìm giá trị x để $P = -1$.

c. Tìm m để với mọi $x > 9$ ta có $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$.

15. Cho biểu thức: $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$.

a. Chứng minh rằng $P > 0$ với $\forall x > 0; x \neq 1$

b. Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

c. Tìm giá trị x thỏa mãn: $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

16. So sánh các số sau: $A = 2\sqrt{1} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \dots + 2\sqrt{19}$

và $B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{4} + 2\sqrt{6} + \dots + 2\sqrt{18} + \sqrt{20}$

17. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$.

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

c. Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

18. Cho biểu thức $P = \frac{8\sqrt{x} - x - 31}{x - 8\sqrt{x} + 15} - \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 1}{5 - \sqrt{x}}$ ∴

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tính giá trị của x để $P < 1$.

c. Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Hướng dẫn và đáp số

1. Ta có: $(x + \sqrt{x^2 + 5})(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 5})(\sqrt{x^2 + 5} - x)(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5(\sqrt{x^2 + 5} - x)$$

$$\Leftrightarrow 5(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5(\sqrt{x^2 + 5} - x) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{y^2 + 5} \quad (1)$$

Mặt khác: $(x + \sqrt{x^2 + 5})(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 5})(\sqrt{y^2 + 5} - y)(y + \sqrt{y^2 + 5}) = 5(\sqrt{y^2 + 5} - y)$$

$$\Leftrightarrow 5(x + \sqrt{x^2 + 5}) = 5(\sqrt{y^2 + 5} - y) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 5} \quad (2).$$

Cộng (1) và (2) về theo về ta có: $E = x + y = 0$.

2. a. M có nghĩa khi:
$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 2\sqrt{x-1} > 0 \\ x - 2\sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2\sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 > 4(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$b. M = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{|\sqrt{x-1}-1|}$$

$$\text{Nếu } \sqrt{x-1}-1 > 0, \text{ hay } x > 2 \text{ thì: } M = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{2}{2-x}$$

Nếu $\sqrt{x-1}-1 < 0$, hay $1 \leq x < 2$ thì:

$$M = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}.$$

$$\text{Vậy: } M = \begin{cases} \frac{2}{2-x} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} & \text{khi } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

c. Với $x > 2$ ta có $M = \frac{2}{2-x}$. Muốn M nguyên khi $x > 2$, $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2$ chia

hết $2-x \Rightarrow 2-x = \pm 1; 2-x = \pm 2$.

* $2-x=1 \Leftrightarrow x=1$ (loại);

* $2-x=-1 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow M=-2$

* $2-x=2 \Leftrightarrow x=0$ (loại)

* $2-x=-2 \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow M=-1$

Vậy, với $x=3; x=4$ biểu thức M có giá trị nguyên.

3. $P = \frac{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} - 2}{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{-2-a}$. Vì $a = -1 - 2\sqrt{2} < -2$ nên:

$$\sqrt{a^2 - 4} = \sqrt{(a-2)(a+2)} = \sqrt{2-a} \cdot \sqrt{-2-a}.$$

Do đó:

$$P = \frac{(a+1)\sqrt{2-a}(- (a+1)\sqrt{2-a} + (a-1)\sqrt{-2-a})}{(a-1)\sqrt{-2-a}(- (a-1)\sqrt{-2-a} + (a+1)\sqrt{2-a})} \cdot \sqrt{-2-a} = \frac{(a+1)\sqrt{2-a}}{1-a}$$

Với $a = -1 - 2\sqrt{2}$, ta được: $\sqrt{2-a} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}$

Do đó: $P = \frac{-2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2+2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

4.a.
$$\left[\frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} \right] \cdot \left(\frac{a+1}{a} \right)$$

$$= \left[\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2(1-a)} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} \right] \cdot \frac{a+1}{a}$$

$$= \left[\frac{1}{1-a} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} \right] \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{1+a-a^2-1}{(1-a)(1+a)} \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{a(1-a)}{(1-a)a} = 1.$$

b. Mẫu số chung là: $2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, do đó ta có

$$\frac{4\sqrt{xy} + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \cdot 2\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 1.$$

5. Ta có: $\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

$$\bullet \frac{\sqrt{x}-1}{x+2\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$\bullet B = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} = -\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \text{ (vì } x > 0 \text{ và } x \neq 1)$$

6.a. Điều kiện: $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{(x-9) - (2x+\sqrt{x}-4\sqrt{x}-2)}{x-5\sqrt{x}+6} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-2+x-3\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{x-5\sqrt{x}+6} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

b. $A < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$.

Kết hợp điều kiện ta có: $\begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$

c. Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$. Đặt $a = \frac{4}{\sqrt{x}-3}$.

Ta có: $a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{a} + 3 \in \mathbb{Q} \quad (1)$

Đặt $\frac{4}{a} + 3 = \frac{p}{q} \quad (2) \quad \text{với} \quad \begin{cases} p, q \in \mathbb{Z} \\ (p, q) = 1, q > 0 \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\sqrt{x} = \frac{p}{q} \Rightarrow x = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow xq^2 = p^2 \Rightarrow p^2 : q^2 \Rightarrow p : q, m \quad (p; q) = 1$$

$$\Rightarrow q = 1 \Rightarrow \frac{p}{q} = p \Rightarrow \sqrt{x} = p \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z}. \text{ Do vậy } A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3$$

là ước của 4 $\Leftrightarrow \sqrt{x}-3$ nhận các giá trị là $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$\Leftrightarrow x$ nhận các giá trị là 1, 4, 16, 25, 49.

7.a. Điều kiện: $x > 0$ và $x \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(3x+3\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \\ &= \frac{(2x+3\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}. \end{aligned}$$

ABC

b. $P = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$. Để $\frac{2}{\sqrt{x}-1} \in \mathbb{Z}$ trước hết phải chứng minh $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$.

Sau đó P nhận giá trị nguyên khi $(\sqrt{x}-1)$ là ước số của 2, nghĩa là $(\sqrt{x}-1)$ nhận các giá trị $\pm 1, \pm 2$.

Giải ra ta được $x = 4; 9$ (thỏa mãn điều kiện).

c. $P = \sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0. \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

8. a. Ta có: $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + 2(x + \frac{1}{x})^2 - 3 = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 4 - 3$

$$= (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 1 = (x^2 + \frac{1}{x^2} + 1)^2.$$

Do $x \neq 0$ nên $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 > 0$.

Vì thế: $A = (x - x^2 - 1) : \sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1)^2}$

$$= -\frac{x^2(x^2 - x + 1)}{x^4 + x^2 + 1} = -\frac{x^2(x^2 - x + 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)} = -\frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

(Vì $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$).

b. Vì $x \neq 0$ nên $A = \frac{1}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} > 0$.

Vậy A nhỏ nhất khi $|A|$ lớn nhất hay $(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2, \text{ khi đó } A = -\frac{4}{3}.$$

9. $a = xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$

$$a^2 = x^2y^2 + (1+x^2)(1+y^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$= x^2y^2 + 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\Rightarrow a^2 - 1 = x^2 + y^2 + 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$S^2 = [x\sqrt{(1+y^2)} + y\sqrt{(1+x^2)}]^2 = x^2(1+y^2) + y^2(1+x^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$S^2 = x^2 + y^2 + 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = a^2 - 1 \Rightarrow S = \pm\sqrt{a^2 - 1}.$$

10. $A = \frac{\sqrt{(\sqrt{x}-4+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x}-4-2)^2}}{\sqrt{(1-\frac{4}{x})^2}}$

• Nếu $4 < x \leq 8$ thì $A = \frac{4x}{x-4}$. Nếu $x > 8$ thì $A = \frac{2x}{\sqrt{x}-4}$.

Bây giờ ta đi tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $A \in \mathbb{Z}$.

• Xét $A = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$: $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số của 16, nhưng $4 \leq x \leq 8$ nên $x = 5; 6; 8$.

• Xét $A = \frac{2x}{\sqrt{x}-4}$: $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-4$ phải là số nguyên $\Leftrightarrow x-4 = m^2 \Leftrightarrow m^2 + 4 = x$.

Vậy $A = \frac{2(m^2 + 4)}{m} = 2m + \frac{8}{m}$, từ đó $m = 4; 8$ (vì $x > 9$ nên $m > 2$). Vì thế $x = 20; 68$.

11. Chúng ta đưa bài toán cần chứng minh về bài toán sau

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})} = 1$$

Ta có $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$; $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1$.

(Do $\sqrt{3} > 1$). Từ đó ta có: $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} + 1} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{(3 + \sqrt{3})}{6}$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3} + 1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{(3 - \sqrt{3})}{6}$$

Từ đó suy ra: $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})} = \frac{(3 + \sqrt{3})}{6} + \frac{(3 - \sqrt{3})}{6} = 1$.

12. Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1$

a. Rút gọn $P = \frac{2x(x-1)}{x(x-1)} : \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{x-1} \Leftrightarrow P = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

b. $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$. Để P nguyên thì:

$$\sqrt{x}-1=1 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4; \sqrt{x}-1=-1 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$$

$$\sqrt{x}-1=2 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9; \sqrt{x}-1=-2 \Rightarrow \sqrt{x}=-1 \text{ (loại)}$$

Vậy với $x = \{0; 4; 9\}$ thì P có giá trị nguyên

13. a. Điều kiện để biểu thức A xác định là điều kiện các biểu thức B, C cùng xác định hay A xác định khi và chỉ khi $x > 0; y > 0$.

b. Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{xy}}{xy}$.

$$\text{Suy ra } B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$= \frac{2\sqrt{xy}}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{xy} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy}$$

$$C = \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(x+y) + \sqrt{y}(x+y)}{\sqrt{xy}(x+y)} = \frac{(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}(x+y)} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} : \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}.$$

c. Vì $xy = 16 \Rightarrow \sqrt{xy} = 4 \Rightarrow \sqrt{x}\sqrt{y} = 4$.

Hai số dương $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ có tích $\sqrt{x}\sqrt{y} = 4$ không đổi nên tổng $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

có giá trị nhỏ nhất khi $\sqrt{x} = \sqrt{y} = 2 \Rightarrow A = \frac{2+2}{4} = 1$.

14. a. Điều kiện để P có nghĩa: $x > 0, x \neq 4, x \neq 1$.

$$\text{Ta có } P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right]$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} + \frac{8x}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}} - \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}} \right]$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{x} + 2)4\sqrt{x}}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} \right] : \left[\frac{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} \right] = \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} \quad (x \neq 9)$$

b. Tìm giá trị x để $P = -1$.

$$P = \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} = -1 \Leftrightarrow 4x = 3 - \sqrt{x} \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(4\sqrt{x} - 3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{16} \quad (\text{Do } x > 0).$$

c. Tìm m để với mọi $x > 9$ ta có $m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1$.

$$\text{Ta có } m(\sqrt{x} - 3)P > x + 1 \Leftrightarrow m(\sqrt{x} - 3) \frac{4x}{\sqrt{x} - 3} > x + 1$$

$$\Leftrightarrow m \cdot 4x > x + 1 \Leftrightarrow x(4m - 1) > 1. \text{ Vì } x > 9 > 0 \text{ nên } 4m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{4}.$$

Suy ra $x > \frac{1}{4m-1}$. Do đó $\frac{1}{4m-1} \leq 9 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{18}$.

Vậy giá trị m để với mọi $x > 9$ ta có $m(\sqrt{x}-3)P > x+1$ là $m \geq \frac{5}{18}$.

15. a. Điều kiện để P có nghĩa: $x > 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right] = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{x-1+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} > 0, \text{ với } \forall x > 0; x \neq 1. \end{aligned}$$

b. Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

$$\text{Ta có } x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}-1.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{3}-1+1)^2}{\sqrt{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{3}-1} = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

c. Tìm giá trị x thỏa mãn: $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x}-3-\sqrt{x-4}$.

Điều kiện $x \geq 4$.

$$P\sqrt{x} = 6\sqrt{x}-3-\sqrt{x-4} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\sqrt{x} = 6\sqrt{x}-3-\sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1-6\sqrt{x}+3+\sqrt{x-4}=0 \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+4+\sqrt{x-4}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} = 0. \text{ Vì } (\sqrt{x}-2)^2 \geq 0; \sqrt{x-4} \geq 0, \text{ với mọi } x \geq 4,$$

$$\text{nên ta có phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-2)^2 = 0 \\ \sqrt{x-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

16. Ta có $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \sqrt{4}-\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3} > \sqrt{4}+\sqrt{2}$, tương

tự $2\sqrt{5} > \sqrt{6}+\sqrt{4}$; $2\sqrt{7} > \sqrt{8}+\sqrt{6}$...; $2\sqrt{19} > \sqrt{20}+\sqrt{18}$. Cộng từng

về các bất đẳng thức cùng chiều trên ta có:

$$2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\dots+2\sqrt{19} > 2\sqrt{4}+2\sqrt{6}+\dots+2\sqrt{18}+\sqrt{20}$$

$$\Rightarrow A-2\sqrt{1} > B-\sqrt{2} \Leftrightarrow A-B > 2\sqrt{1}-\sqrt{2} > 0 \Rightarrow A > B.$$

17. Điều kiện P có nghĩa là: $\forall x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{a. } P &= \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x}+x)} \right] \\
&= \frac{(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} : \left[(2\sqrt{x}-1) \frac{1-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}-x}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right] \\
&= \frac{(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \cdot \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)}{(2\sqrt{x}-1)} = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

b. Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

Ta có $x = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$, do đó

$$P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1 - (2 - \sqrt{3}) + 7 - 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 3.$$

c. Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

$$P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}} \sqrt{x} - 1 = 1 \Rightarrow P \geq 1. \text{ Đẳng thức xảy}$$

ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$, không thỏa mãn.

Vậy $P > 1$. Do đó giá trị lớn nhất của a để $P > a$ là $a = 1$.

18. a. Điều kiện P có nghĩa $x \neq 9; x \neq 25; x \geq 0$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{8\sqrt{x}-x-31}{x-8\sqrt{x}+15} - \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-1}{5-\sqrt{x}} = \frac{8\sqrt{x}-x-31}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-5)} - \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5} \\
&= \frac{8\sqrt{x}-x-31 - (\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5) + (3\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-5)} \\
&= \frac{8\sqrt{x}-x-31-x+25+3x-10\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-5)} = \frac{x-2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-5)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-5)}
\end{aligned}$$

b. Tính giá trị của x để $P < 1$. Điều kiện P có nghĩa $x \neq 9; x \neq 25; x \geq 0$.

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} < 1 \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{x}-5} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow x < 25.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta có } P < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 9 \\ 0 \leq x < 25 \end{cases}.$$

c. $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} = 1 + \frac{6}{\sqrt{x}-5}$ ($x \neq 9; x \neq 25; x \geq 0$). P có giá trị nguyên khi và

chỉ khi $\sqrt{x}-5$ là ước của 6 hay

$$\sqrt{x}-5 = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6 \Rightarrow x = \{4; 16; 36; 49; 64; 121\}.$$

2. Phương trình bậc hai

Hệ thức Viet

Một số kiến thức cơ bản

1. Các phép biến đổi phương trình mà không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là các phép biến đổi tương đương. Chẳng hạn các phép biến đổi sau đây:

$$a) f(x) = g(x) + h(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = h(x).$$

$$b) f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + c = g(x) + c.$$

$$c) f(x) = g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^{2k+1} = [g(x)]^{2k+1}; k \in \mathbb{N}.$$

$$d) f(x) = g(x) \text{ (với } f(x) \geq 0; g(x) \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]^{2k} = [g(x)]^{2k}; k \in \mathbb{N}$$

Sau này trong từng loại phương trình, ta sẽ đề cập thêm nhiều phép biến đổi tương đương khác.

2. Các phép biến đổi phương trình mà làm mở rộng thêm tập nghiệm gọi là các phép biến đổi hệ quả.

Chẳng hạn: $x = \sqrt{2x+3} \Rightarrow x^2 = 2x+3$. Khi sử dụng các phép biến đổi hệ quả phải chú ý đặt thêm điều kiện để phép biến đổi trở thành tương đương hoặc phải kiểm tra các nghiệm của phương trình hệ quả để phát hiện ra các nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu (nghiệm ngoại lai).

3. Phương trình bậc hai

Định nghĩa:

Phương trình bậc hai là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Công thức nghiệm: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{ Nếu } \Delta = b^2 - 4ac = 0 \text{ thì phương trình có hai}$$

nghiệm trùng nhau hay phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.

Hệ thức Viet: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Nếu phương trình có nghiệm x_1, x_2 thì $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Ta có thể sử dụng định lý Viét để tính các biểu thức của x_1, x_2 theo a, b, c

$$+ S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

$$+ S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

$$+ S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{3abc - b^3}{a^3}.$$

$$+ |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}.$$

Ứng dụng của hệ thức Viét

1. Nhẩm nghiệm: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

$$\text{Nếu } a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$\text{Nếu } a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}.$$

2. Tìm hai số khi biết tổng và tích

Cho hai số x, y . Biết rằng $x + y = S, x \cdot y = P$ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + SX + P = 0$.

3. Phân tích thành nhân tử: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

4. Xác định dấu các nghiệm số

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Giả sử phương trình có nghiệm x_1, x_2 thì $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó, nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0$ thì phương trình có hai nghiệm dương. Nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm âm.

Chú ý: Ở đây, cần nhấn mạnh với bạn đọc, giả thiết của hệ thức Viét là $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. Nhiều học sinh khi sử dụng hệ thức Viét mà quên kiểm tra giả thiết. Trong nhiều bài toán, việc lãng quên đó sẽ dẫn đến những kết quả sai lạc.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Giải phương trình bậc hai

Phương pháp: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{ Nếu } \Delta = b^2 - 4ac = 0 \text{ thì phương trình có hai nghiệm}$$

trùng nhau hay phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.

Dạng 2: Tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm

Phương pháp: Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm là

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \text{ hoặc } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0.$$

Trong trường hợp cần chứng minh có ít nhất một trong hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0$; $a'x^2 + b'x + c' = 0$ có nghiệm người ta thường làm theo một trong hai cách sau

Cách 1: Chứng minh $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$.

Cách 2: Chứng minh $\Delta_1 \cdot \Delta_2 \leq 0$.

Dạng 3: Tìm hai số khi biết tổng và tích

Phương pháp:

Bước 1: Cho hai số x, y . Biết rằng $x + y = S$, $x \cdot y = P$ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + SX + P = 0$.

Bước 2: Giải phương trình $X^2 + SX + P = 0$.

Bước 3: Kết luận.

Dạng 4: Biểu thức đối xứng của hai nghiệm

Phương pháp:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Bước 2: Tính $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, theo m .

Bước 3: Biểu diễn hệ thức đề bài theo S, P , với chú ý rằng

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P; x_1^3 + x_2^3 = S(S^2 - 3P);$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}; \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}.$$

Dạng 5: Hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số m

Phương pháp:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Bước 2: Tính $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, theo m .

Bước 3: Khử m để lập hệ thức giữa S và P , từ đó ta suy ra hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số m .

Dạng 6: Điều kiện để hai nghiệm liên hệ với nhau bởi một hệ thức cho trước

Phương pháp

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Bước 2: Tính $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, theo m .

Bước 3: Giải phương trình với ẩn số m , so sánh điều kiện.

Bước 4: Kết luận

Dạng 7: Xác định dấu các nghiệm số

Phương pháp

Bước 1: Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

Bước 2: Nếu $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

Khi đó, nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0$ thì phương trình có hai nghiệm dương.

Nếu $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0$ thì phương trình có hai nghiệm âm.

Bước 3: Kết luận

Dạng 8: Phương trình chứa tham số $ax^2 + bx + c = 0$

Phương pháp

Bước 1: Xét $a = 0$, khi đó phương trình trở thành $0x^2 + bx + c = 0$, lúc này ta đưa về bài toán giải và biện luận phương trình dạng bậc nhất

Bước 2: Xét $a \neq 0$: trong trường hợp này, phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai. Khi đó: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì

phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Nếu

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ thì phương trình có hai nghiệm trùng nhau hay phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.

Bước 3: Kết luận

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Giải phương trình bậc hai

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $x^2 + 2\sqrt{5}x + 4 = 0$

b. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

Tuyển sinh lớp 10 TP Hà nội 2007-2008

Giải

a. Ta có $\Delta' = 1$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x_1 = 5 - 1 = 4$ và $x_2 = 5 + 1 = 6$.

b. Đặt $t = x^2 \geq 0$, ta được phương trình trở thành $t^2 - 29t + 100 = 0 \Leftrightarrow t = 25$ hay $t = 4$. Khi $t = 25 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

$$t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = \pm 5$; $x = \pm 2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x - 2} = 2$.

Tuyển sinh lớp 10 Hà Nam 2009–2010

Giải

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x - 2} = 2 \text{ (điều kiện: } x \neq 2; x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - x + 1 = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0; \Delta = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 2$ (loại); $x_2 = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Dạng 2: Tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm

Ví dụ 1: Xác định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1}$.

Thi học sinh giỏi lớp 9 – TP Vinh, Nghệ An 2008

Giải:

+ Điều kiện $x \neq m$ và $x \neq 1$ (*). Ta có phương trình đã cho $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1}$. $\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = (x+1)(x-m) \Leftrightarrow mx = 2 - m$ (2)

Nếu $m \neq 0$ thì (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{2-m}{m}$.

+ Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì (2) phải có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện (*), tức là: $m \neq 0$, $\frac{2-m}{m} \neq m$ và $\frac{2-m}{m} \neq 1$.

+ Từ đó suy ra $m \neq 0$, $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2: Cho a, b, c, d , là các số thực và $a^2 + b^2 < 1$. Chứng minh rằng: phương trình $(a^2 + b^2 - 1)x^2 - 2(ac + bd - 1)x + c^2 + d^2 - 1 = 0$ luôn có nghiệm.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hải Dương, 2004 – 2005

Giải:

Phương trình $(a^2 + b^2 - 1)x^2 - 2(ac + bd - 1)x + c^2 + d^2 - 1 = 0$ luôn có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (ac + bd - 1)^2 - (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (ac + bd - 1)^2 \geq (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1) \text{ (*)}.$$

Do $a^2 + b^2 < 1$ nên: nếu $c^2 + d^2 \geq 1$ thì (*) hiển nhiên đúng. Nếu $c^2 + d^2 < 1$, đặt $u = 1 - a^2 - b^2$ và $v = 1 - c^2 - d^2$ ($0 < u \leq 1$ và $0 < v \leq 1$).

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (1 - ac - bd)^2 \geq (1 - a^2 - b^2)(1 - c^2 - d^2) \Leftrightarrow (2 - 2ac - 2bd)^2 \geq 4uv$$

$$\Leftrightarrow ((a^2 + b^2 + u) + (c^2 + d^2 + v) - 2ac - 2bd)^2 \geq 4uv$$

$$(\text{do } a^2 + b^2 + u = c^2 + d^2 + v = 1) \Leftrightarrow ((a - c)^2 + (b - d)^2 + u + v)^2 \geq 4uv.$$

Là bất đẳng thức đúng vì $((a - c)^2 + (b - d)^2 + u + v)^2 \geq (u + v)^2 \geq 4uv$ với mọi a, b, c, d và với mọi u, v dương. Vậy (*) là bất đẳng thức đúng, phương trình (*) luôn có nghiệm.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu $a + b \geq 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm: $x^2 + 2ax + b = 0$; $x^2 + 2bx + a = 0$.

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM 2003 – 2004

Giải

$$\Delta'_1 = a^2 - b; \Delta'_2 = b^2 - a \Rightarrow \Delta'_1 + \Delta'_2 = a^2 - b + b^2 - a$$

$$= (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (a + b - 2)$$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a + b - 2) \geq 0$$

Vì $(a - 1)^2 \geq 0$; $(b - 1)^2 \geq 0$; $a + b - 2 \geq 0$ (gt). Do đó trong hai số $\Delta'_1; \Delta'_2$ có ít nhất một số không âm. Vậy ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm

Ví dụ 4: Cho 3 số phân biệt m, n, p . chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1}{x - m} + \frac{1}{x - n} + \frac{1}{x - p} = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt.}$$

Tuyển sinh lớp 10 chuyên Lê quý Đôn Bình Định 2009–2010

Giải

Phương trình $\frac{1}{x - m} + \frac{1}{x - n} + \frac{1}{x - p} = 0$ (1). Điều kiện xác định của

phương trình: $x \neq m, n, p$. Biến đổi phương trình tương đương:

$$(1) \Leftrightarrow (x - n)(x - p) + (x - m)(x - p) + (x - m)(x - n) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x(m + n + p) + mn + np + mp = 0$$

$$\Delta' = (m + n + p)^2 - 3(mn + np + mp) = m^2 + n^2 + p^2 - mn - np - mp$$

$$= \frac{1}{2}[(m - n)^2 + (n - p)^2 + (m - p)^2] > 0 \text{ (vì } m \neq n \neq p). \text{ Vậy phương trình}$$

(1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 5: Cho phương trình: $x^2 + px + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt a_1, a_2

và phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt b_1, b_2 . Chứng

minh: $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = q^2 - p^2$

Đề TS lớp 10 Trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004–2005

Giải:

Theo định lý Viet ta có: $a_1 + a_2 = -p$, $a_1 a_2 = 1$, $b_1 + b_2 = -q$, $b_1 b_2 = 1$

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_2)$$

$$= [a_1 a_2 - (a_1 + a_2)b_1 + b_1^2] [a_1 a_2 + (a_1 + a_2)b_2 + b_2^2]$$

$$= (1 + pb_1 + b_1^2)(1 - pb_2 + b_2^2) = (pb_1 - qb_1)(-qb_2 - pb_2)$$

$$= (p - q)b_1(-p - q)b_2 = q^2 - p^2$$

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình: $(x^2 + mx + 1)^2 + m(x^2 + mx + 1) + 1 - x = 0$ có nghiệm

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2004–2005**Giải:**

$$(x^2 + mx + 1)^2 + m(x^2 + mx + 1) + 1 - x = 0 \quad (1)$$

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow (x^2 + mx + 1)^2 - x^2 + m(x^2 + mx + 1) + 1 - x + x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + mx + 1 - x)(x^2 + mx + 1 + x + m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m-1)x + 1 = 0 & (2) \\ x^2 + (m+1)x + m+2 = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) hoặc (3) có nghiệm. Khi và chỉ khi: $\begin{cases} \Delta_1 = (m-1)^2 - 4 \geq 0 \\ \Delta_2 = (m+1)^2 - 4(m+2) \geq 0 \end{cases} \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 \geq 4 \\ (m-1)^2 \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow (m-1)^2 \geq 8 \Leftrightarrow |m-1| \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -1 \text{ hay } m \geq 3$$

Cách 2: Đặt: $y = x^2 + mx + 1$. Ta có:

$$(1) \text{ trở thành: } \begin{cases} y^2 + my + 1 - x = 0 \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + m(x-y) + (x-y) = 0 \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+m+1) = 0 & (2) \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 \end{cases} (*) \text{ hoặc } \begin{cases} x + y + m + 1 = 0 \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 \end{cases} (**)$$

Giải (*): (*) có nghiệm $\Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$ (4). Giải (**): (**) có nghiệm $\Leftrightarrow x^2 + (m+1)x + m+2 = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(m+2) \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 \geq 8 \Leftrightarrow m \leq 1 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{hoặc } m \geq 1 + 2\sqrt{2} \quad (5).$$

Từ (4) và (5) được: (1) có nghiệm khi và chỉ khi: $m \leq -1$ hay $m \geq 3$.

Ví dụ 7: Cho hai phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1), $a \neq 0$

$$mx^2 + nx + p = 0 \quad (2), m \neq 0.$$

Chứng minh rằng nếu ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm thì phương trình sau luôn luôn có nghiệm:

$$(an - mb)x^2 + 2(ap - mc)x + bp - nc = 0 \quad (3).$$

Đề TS lớp 10 chuyên toán Lê Hồng Phong, TPHCM 2003 – 2004

Giải:

Xét các phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1); $mx^2 + nx + p = 0$ (2) ($a, m \neq 0$)

Và (3). Do giả thiết bài toán ít nhất một trong hai phương trình (1) hoặc (2) vô nghiệm, giả sử (1) vô nghiệm như vậy $b^2 - 4ac < 0$.

Đặt $A = an - mb$, $B = ap - mc$, $C = bp - cn$, ta có:

$$cA - bB - aC = acn - bmc - abp + bmc + abp - anc = 0 \quad (*)$$

$$(3) \text{ trở thành } Ax^2 + 2Bx + C = 0 \quad (4)$$

1. Nếu $A = 0$ từ (*) có $aC - bB = 0 \Leftrightarrow C = \frac{b}{a}B$

(4) trở thành $2Bx + C = 0 \Leftrightarrow 2Bx + \frac{b}{a}B = 0$; $B = 0$ với x tùy ý $\Rightarrow$ (3) có

ng nghiệm; $B \neq 0$ ta có $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow$ (3) có nghiệm.

2. Nếu $A \neq 0$. Ta có $\Delta' = B^2 - AC$

* $AC \leq 0 \Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm

* $AC > 0$ do $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow b^2 < 4ac \Rightarrow b^2 AC < 4ac AC$

Từ (*) có $bB = cA + aC$

$$b^2 B = (cA + aC)^2 \geq 4ac AC > b^2 AC$$

$$\text{Suy ra } b^2 (B^2 - AC) > 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 > 0 \\ B^2 - AC > 0 \end{cases}$$

Như vậy $\Delta' > 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm

Trường hợp phương trình (2) vô nghiệm, chứng minh tương tự như các bước giải trên cũng được (3) có nghiệm.

Kết luận: Với giả thiết bài toán thì phương trình (3) luôn luôn có nghiệm.

Ví dụ 8: Cho hai phương trình: $x^2 - (2m + n)x - 3m = 0$

$x^2 - (m + 3n)x - 6 = 0$. Tìm m và n để hai phương trình tương đương.

Đề TS lớp 10 Lê Khiết – Quảng Ngãi 2001 – 2002

Giải:

Xét hai phương trình: $x^2 - (2m + n)x - 3m = 0$ (1)

$$x^2 - (m + 3n)x - 6 = 0 \quad (2)$$

Ta có: $\Delta_1 = (2m + n)^2 + 12m$; $\Delta_2 = (m + 3n)^2 + 24 > 0$ với mọi $m; n$
 $\Rightarrow$ phương trình (2) luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt. Do đó để hai phương trình tương đương thì (1) cũng phải có hai nghiệm phân biệt.

Áp dụng định lí Viet ta có: $\begin{cases} S_1 = 2m + n \\ P_1 = -3m \end{cases}$ và $\begin{cases} S_2 = m + 3n \\ P_2 = 6 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (2) \text{ nên } P_1 = P_2 \text{ v } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3m = 6 \\ 2m + n = m + 3n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = -1 \end{cases}$$

Ví dụ 9: Xét phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ (1); $cx^2 + bx + a = 0$ (2).
 Tìm hệ thức giữa a, b, c là điều kiện cần và đủ để hai phương trình trên có một nghiệm chung duy nhất.

Đề TS lớp 10 THPT Hà Nội 1995 – 1996

Giải:

Giả sử x_0 là nghiệm chung duy nhất

$$ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \text{ và } cx_0^2 + bx_0 + a = 0$$

$$\text{Do đó: } (ax_0^2 + bx_0 + c) - (cx_0^2 + bx_0 + a) = 0 \Leftrightarrow x_0^2(a - c) + (c - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - c)(x_0^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ x_0^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ x_0 = \pm 1 \end{cases}$$

Với $a \neq c$ thì $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$ do đó $|b| = |a + c|$. Với $a = c$ thì hai phương

trình đồng nhất và có nghiệm kép, tức là: $b^2 = 4ac = 4a^2$ nên $|b| = 2a = |a + c|$

Đảo lại, với $|b| = |a + c|$ thì hai phương trình có nghiệm chung duy nhất.

Vậy điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho có nghiệm chung duy nhất là $|b| = |a + c|$.

Dạng 3: Tìm hai số khi biết tổng và tích

Ví dụ: Cho a, b là hai số thực thỏa $5a + b = 22$. Biết phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Tìm hai nghiệm đó.

Giải

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của phương trình ($0 < x_1 \leq x_2$)

Để phương trình có hai nghiệm $\Delta = a^2 - 4b > 0$. Áp dụng hệ thức Viet, ta có $a = -x_1 - x_2$ và $b = x_1x_2$ nên theo giả thiết

$$5(-x_1 - x_2) + x_1x_2 = 22 \Leftrightarrow x_1(x_2 - 5) - 5(x_2 - 5) = 47$$

$\Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47$ (*). Do phương trình có hai nghiệm là hai số nguyên dương nên: $-4 \leq x_1 - 5 \leq x_2 - 5$ nên (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases}$$

Khi đó: $a = -58$ và $b = 312$ thỏa mãn $5a + b = 22$.

Vậy hai nghiệm cần tìm là $x_1 = 6; x_2 = 52$.

Dạng 4: Biểu thức đối xứng của hai nghiệm

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm? Khi đó hãy tính theo m tổng các lập phương hai nghiệm của phương trình.

Đề TS lớp 10 THPT TP Huế 2008 – 2009

Giải:

$x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì:

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

Khi đó, phương trình (1) có 2 nghiệm x_1 và x_2 , ta có:

$$S = x_1 + x_2 = 2(m+1); P = x_1 x_2 = m^2 + 2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right]$$

$$\text{Suy ra: } x_1^3 + x_2^3 = 2(m+1) \left[4(m+1)^2 - 3(m^2 + 2) \right] = 2(m+1)(m^2 + 8m - 2)$$

Ví dụ 2: Không cần giải, chứng tỏ rằng phương trình $(\sqrt{3} + 1)x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$ có hai nghiệm phân biệt và tính tổng các bình phương nghiệm đó.

Đề TS lớp 10 THPT TP Huế 2009 – 2010

Giải:

Phương trình $(1 + \sqrt{3})x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$ có các hệ số: $a = 1 + \sqrt{3}$, $b = -2$, $c = -\sqrt{3}$, ta có $ac < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1

và x_2 . Theo định lý Viet, ta có: $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2} = -\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + 3 - \sqrt{3} = 7 - 3\sqrt{3}$$

Ví dụ 3: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$

Tìm giá trị lớn nhất của: $|x_1 + x_2 + 3x_1 x_2|$

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2004–2005

Giải:

a. $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1).

Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2(m^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} \quad (2)$$

Khi đó, theo định lý Viet: $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = \frac{m^2 - 1}{2}$

$$\text{Tính được: } A = |x_1 + x_2 + 3x_1 x_2| = \left| -m + 3 \frac{m^2 - 1}{2} \right| = \frac{1}{2} |3m^2 - 2m - 3|$$

$$2\Delta = \left| 3\left(m - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{10}{3} \right|, \text{ mà } -\sqrt{2} - \frac{1}{3} \leq m - \frac{1}{3} \leq \sqrt{2} - \frac{1}{3} \text{ nên}$$

$$0 \leq \left(m - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow -\frac{10}{3} \leq 3\left(m - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{10}{3} \leq 3\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}$$

$$\text{Do đó: } \Delta \leq \frac{1}{2} \left[3\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{10}{3} \right] = \frac{1}{2} (3 + 2\sqrt{2}). \text{ Dấu “=” xảy ra khi}$$

$$m = -\sqrt{2}. \text{ Vậy } |x_1 + x_2 + 3x_1x_2| \text{ có giá trị lớn nhất } \frac{1}{2} (3 + 2\sqrt{2}).$$

Ví dụ 4: Cho phương trình bậc hai: $2x^2 - (m+3)x + m = 0$ (1).

- Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
- Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = \frac{5}{2} x_1 x_2$.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |x_1 - x_2|$.

Tuyển sinh lớp 10 Nghệ An 2009 – 2010

Giải:

- Khi $m = 2$, phương trình trở thành: $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$. Phương trình có hai nghiệm là:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = 2.$$

- Ta có: $\Delta = (m+3)^2 - 8m = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} x_1 x_2, \text{ trở thành } \frac{m+3}{2} = \frac{5m}{4} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

$$\text{c. Ta có: } x_1 = \frac{m+3 - \sqrt{(m-1)^2 + 8}}{4}; \quad x_2 = \frac{m+3 + \sqrt{(m-1)^2 + 8}}{4}$$

$$P = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{(m-1)^2 + 8}}{2} \geq \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}, \text{ dấu “=” khi } m = 1.$$

Vậy $\min P = \sqrt{2}$, khi $m = 1$.

Ví dụ 5: Cho phương trình bậc hai:

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0 \quad (1) \quad (m \neq -1)$$

- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của $m \neq -1$
- Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1), tìm m để $x_1 x_2 > 0$ và $x_1 = 2x_2$.

Đề TS lớp 10 Quốc học Huế 2002 – 2003

Giải:

a. Ta có $\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m+1)(m-3)$

$$= m^2 - 2m + 1 - (m^2 - 3m + m - 3) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 2m + 3 = 4 > 0.$$

Vậy phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của $m \neq -1$.

- b. Do phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của $m \neq -1$ nên theo định lý Viet, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \text{ và } x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 2x_2$ khi:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \\ 2x_2 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2(m-1)}{3(m+1)} \\ x_2^2 = \frac{m-3}{2(m+1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{4(m-1)^2}{9(m+1)^2} = \frac{m-3}{2(m+1)}$$

$$\Rightarrow 8(m^2 - 2m + 1) = 9(m^2 - 3m + m - 3) \Rightarrow m^2 - 2m - 35 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 7 \\ m_2 = -5 \end{cases}$$

Khi $m = 7$ ta có: $x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1} = \frac{1}{2} > 0$.

Khi $m = -5$ ta có: $x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1} = 2 > 0$. Do đó khi $m = 7$ hoặc $m = -5$ thì phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 > 0$ và $x_1 = 2x_2$.

Ví dụ 6: Số đo hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông là nghiệm của phương trình bậc hai $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$. Hãy xác định giá trị của m để số đo đường cao ứng với cạnh huyền tam giác là $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 – Hải Phòng 2004 – 2005

Giải:

Số đo hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông là nghiệm của phương trình bậc hai $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$ nên hai nghiệm của phương trình này phải dương, do vậy ta có: $m \neq 2$; $\Delta \geq 0$; $P = x_1 + x_2 > 0$; $S = x_1 \cdot x_2 > 0$. Suy ra $m < 0$ hoặc $m > 2$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$, từ

đó $m = 4$ thỏa mãn.

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$ (x là ẩn số).

- Tìm m để phương trình có nghiệm.
- Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17)$.

Đề TS lớp 10 chuyên thành phố HCM 2009 – 2010

Giải:

Cho phương trình $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$ (1) (x là ẩn số).

- Tìm m để phương trình có nghiệm. Ta có: $\Delta' = 16 - 4m^2$.
Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.
- Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = 5m^2 - 16$.

Do đó $A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17)$

$$= 5(x_1^2 + x_2^2) + 6x_1 x_2 - 17(x_1 + x_2)$$

$$= 5[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 6x_1 x_2 - 17(x_1 + x_2)$$

$$= 5(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 17(x_1 + x_2)$$

$$= 20m^2 - 4(5m^2 - 16) - 17.2m = -34m + 64.$$

Vì $-2 \leq m \leq 2$ nên $-4 \leq A \leq 132$. Khi $m = 2$ thì $A = -4$ và khi $m = -2$ thì $A = 132$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -4 và giá trị lớn nhất của A là 132 .

Ví dụ 8: Cho phương trình (ẩn x): $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$.

- Giải phương trình đã cho khi $m = 1$.
- Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Tuyển sinh lớp 10 TP Hà nội 2009 – 2010

Giải:

- Khi $m = 1$, phương trình trở thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -3$ (vì $a + b + c = 0$)
- $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$. Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 - 2 = 2m - 1$

Với điều kiện $m > \frac{1}{2}$, ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(m^2 + 2) = 10$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)^2 - m^2 - 2 = 5 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hay } m = -5 \text{ (loại)}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Dạng 5: Hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

- Chứng minh rằng, với mọi giá trị của m phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập đối với m .

Đề TS 10 Quốc học Huế 1996 – 1997

Giải:

- Ta có $\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m-3) = m^2 - 2m + 1 - m + 3$

$$\Delta' = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0. \text{ Do đó, phương trình}$$

$x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với $\forall m$.

- Phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên theo định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x_1 x_2 + 3 \\ x_1 + x_2 = 2(x_1 x_2 + 3 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow 2x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 4 = 0$$

Hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập đối với m là $2x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 4 = 0$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc m .

Giải

Trước hết, ta phải tìm điều kiện để phương trình có nghiệm. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 \geq 0 \Leftrightarrow (m-4)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m-4| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình, áp dụng hệ thức Viet

$$S = x_1 + x_2 = m \quad (1); P = x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \quad (2)$$

Cách 1: Thế m từ hệ thức (1) vào hệ thức (2) ta có $x_1 \cdot x_2 = 2(x_1 + x_2) - 3 = 0$.

Cách 2: Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \quad (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta có $x_1 \cdot x_2 = 2(x_1 + x_2) - 3 = 0$.

Ví dụ 3: Cho phương trình $mx^2 - (2m+3)x + m - 4 = 0$.

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc m .

Giải

a. Phương trình: $mx^2 - (2m + 3)x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 < > \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (2m + 3)^2 - 4m(m - 4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > \frac{-9}{28} \end{cases}$$

b. Với điều kiện phương trình có nghiệm ở trên, áp dụng hệ thức Viet:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{2m + 3}{m} = 2 + \frac{3}{m} \quad (1); P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 4}{m} = 1 - \frac{4}{m} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (1) với 4 và nhân hai vế của (2) với 3 ta được

$$\begin{cases} 4(x_1 + x_2) = 8 + \frac{12}{m} \\ 3x_1 \cdot x_2 = 3 - \frac{12}{m} \end{cases} \text{ Cộng vế theo vế ta có } 4(x_1 + x_2) + 3x_1 \cdot x_2 = 11.$$

Dạng 6: Điều kiện để hai nghiệm liên hệ với nhau bởi một hệ thức cho trước

Ví dụ 1: Cho phương trình: $x^2 - mx - m - 1 = 0$ (m là tham số)

a. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{m^2 + 2m}{x_1^2 + x_2^2 + 2}$

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

TS lớp 10 chuyên toán Quốc học Huế 2009–2010

Giải

a. $x^2 - mx - m = 1$ (*); $\Delta = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $\Delta > 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

b. Ta có: $x_1 + x_2 = m; x_1 x_2 = -m - 1$

$$S = \frac{m^2 + 2m}{x_1^2 + x_2^2 + 2} = \frac{m^2 + 2m}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2} = \frac{m^2 + 2m}{m^2 + 2m + 4}$$

$$S = 1 - \frac{4}{(m + 1)^2 + 3} \geq 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}; \text{ giá trị nhỏ nhất của } S \text{ là: } -\frac{1}{3}, \text{ khi } m = -1$$

Ví dụ 2: Cho phương trình: $2x^2 - (6m - 3)x - 3m + 1 = 0$ (x là ẩn số)

a. Định m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt đều âm.

b. Gọi $x_1 + x_2$ là hai nghiệm của phương trình trên.

Định m để $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP HCM 2007–2008

Giải

$$a. \Delta = (6m - 3)^2 - 8(-3m + 1) = (6m - 1)^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6m - 3 \pm 6m - 1}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3m - 1 \text{ và } x_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Để hai nghiệm phân biệt đều âm thì } \begin{cases} 3m - 1 < 0 \\ 3m - 1 \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$b. \text{Ta có } \Delta = x_1^2 + x_2^2 = 3(m - 1)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}; \Delta \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } \frac{1}{4} \text{ khi } m = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3: Cho phương trình (m là tham số) $2x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0$ (1)

a. Chứng minh rằng (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 - 1 > 0$.

Tuyển sinh lớp 10 chuyên Phan Bội Châu Nghệ An – 2007–2008

Giải:

a. $\Delta' = (2m)^2 - 2(2m^2 - 1) = 2 > 0, \forall m$, nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Theo định lí Viet có $x_1 + x_2 = 2m$. Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên có $2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1 = 0$.

Lại có

$$Q = (2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1) + 4m(x_1 + x_2) = 4m(x_1 + x_2) = 4m \cdot 2m = 8m^2.$$

Ta có $Q > 0 \Leftrightarrow 8m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Vậy với $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 4: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ với m là tham số

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

c. Với điều kiện của câu b hãy tìm m để biểu thức $A = x_1x_2 - x_1 - x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đề TS lớp 10 chuyên THPTCM 2007–2008

Giải:

$$\text{Cho phương trình } x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0 \quad (1)$$

a. Khi $m = 1$ thì (1) trở thành: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b. (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

c. Khi $m > 1$ ta có: $S = x_1 + x_2 = 2m$ và $P = x_1 x_2 = m^2 - m + 1$

$$\text{Do đó: } A = P - S = m^2 - m + 1 - 2m = m^2 - 3m + 1 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $m > 1$).

Vậy khi $m = \frac{3}{2}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{5}{4}$.

Ví dụ 5: Cho phương trình: $x^2 + (3 - m)x + 2(m - 5) = 0$ (1), m là tham số.

a. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình (1) luôn có nghiệm $x_1 = 2$.

b. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$.

Tuyển sinh lớp 10 THPT Nam Định 2009–2010

Giải:

a. Thay $x = 2$ vào phương trình (1) ta được: $4 + 2(3 - m) + 2(m - 5) = 0$.

Dễ thấy thức trên luôn đúng với mọi m, suy ra điều phải chứng minh.

b. Phương trình (1) là phương trình bậc hai. Theo chứng minh trên, phương trình luôn có nghiệm, trong đó $x_1 = 2$. Từ định lý Viet suy ra nghiệm còn lại của phương trình là $x_2 = m - 5$. Vậy phương trình (1) có nghiệm $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m - 5 = 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 6 + 2\sqrt{2}$.

Ví dụ 6: Cho phương trình bậc hai: $x^2 + 4x + m + 1 = 0$ (1). Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{10}{3}$.

Đề thi thử lớp 10 THPT tỉnh Quảng Nam 2009–2010

Giải:

$\Delta' = 3 - m$. Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{10}{3} \quad (**)$$

$$\text{Thay } (*) \text{ vào } (**) \text{ ta được: } \frac{16 - 2(m + 1)}{m + 1} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{16}{m + 1} - 2 = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 48 = 16m + 16 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m < 3 \text{)}.$$

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^4 + 2mx + 4 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32$$

TS lớp 10 THPT chuyên – ĐHKHTN Hà Nội 2003 – 2004

Giải:

$$x^4 + 2mx + 4 = 0 \quad (1).$$

Đặt: $x^2 = t$ ta được phương trình: $t^2 + 2mt + 4 = 0$ (2) Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương:

$$t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ t_1 + t_2 = -2m > 0 \\ t_1 t_2 = 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \Leftrightarrow m < -2 \\ m < 0 \end{cases}$$

Khi đó (1) có 4 nghiệm là: $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$

$$\text{Và: } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(t_1^2 + t_2^2) = 2(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = 8m^2 - 16$$

$$\text{Do đó: } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32 \Leftrightarrow 8m^2 - 16 = 32 \Leftrightarrow m^2 = 6 \Leftrightarrow m = -\sqrt{6} \quad (\text{vì } m < -2). \text{ Vậy: } m = -\sqrt{6}$$

Ví dụ 8: Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0$

a. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 2 và tính nghiệm kia.

c. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{4}.$$

Đề TS lớp 10 Trường Quốc học Huế 1996 – 1997

Giải:

a. Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khi và chỉ khi: } \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ [-(m-1)]^2 - (m+1)(m-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m^2 - 2m + 1 - m^2 + 2m - m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 3 \end{cases}$$

Vậy khi $m < 3$ và $m \neq -1$ thì phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

b. Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0$ có một nghiệm bằng 2

$$\Leftrightarrow (m+1)2^2 - 2(m-1)2 + m-2 = 0 \Leftrightarrow 4m + 4 - 4m + 4 + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6. \text{ Vậy khi } m = -6 \text{ thì phương trình}$$

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0 \text{ có một nghiệm bằng 2. Khi } m = -6$$

phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên theo định lý Viet ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} = \frac{2(-6-1)}{-6+1} = \frac{14}{5}. \text{ Mà } x_1 = 2 \text{ cho nên } x_2 = \frac{14}{5} - 2 = \frac{4}{5}.$$

Vậy nghiệm còn lại của phương trình trên là $x_2 = \frac{4}{5}$.

c. Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1}$ và $x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1}$ phương trình

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{2(m-1)}{m+1} : \frac{m-2}{m+1} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{2(m-1)}{m-2} = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 3 \\ m \neq 2 \\ 8m-8 = 7m-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 3 \\ m \neq 2 \\ m = -6 \end{cases} \Leftrightarrow m = -6.$$

Do đó khi $m = -6$ thì phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{4}$.

Ví dụ 9: Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m-3 = 0$ (ẩn số là x)

a. Định m để phương trình có nghiệm

b. Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM 2001 – 2002 Ban A,B

Giải:

a) * Với $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ phương trình trở thành:

$$-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

* Với $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m-3) = m^2 + 4m + 4 - m^2 + 3m - m + 3 = 6m + 7$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m + 7 \geq 0 \Leftrightarrow 6m \geq -7 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{6}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{6}.$$

b) Điều kiện: $m \geq -\frac{7}{6}; m \neq -1$.

$$\text{Theo hệ thức Viet, ta có: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ P = x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}.$$

Do đó $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$

$$\Leftrightarrow 16x_1 x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 18 \Leftrightarrow 16x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 1 = 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(m-3)}{m+1} + \frac{8(m+2)}{m+1} - 17 = 0 \Leftrightarrow 16(m-3) + 8(m+2) - 17(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16m - 48 + 8m + 16 - 17m - 17 = 0 \Leftrightarrow 7m - 49 = 0 \Leftrightarrow 7m = 49 \Leftrightarrow m = 7$$

$$m = 7 \text{ thỏa điều kiện } m \neq -1; m \geq -\frac{7}{6}.$$

Vậy $m = 7$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:
 $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18.$

Ví dụ 10: Cho phương trình $(m + 1)x^2 + 2(1 - m)x + m - 2 = 0$ (1).

- Xác định m để (1) có nghiệm.
- Xác định m để (1) có một nghiệm bằng 2 và tính nghiệm kia.
- Xác định m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện
 $3(x_1 + x_2) = 5x_1x_2$

Đề TS lớp 10 Quốc học Huế 2000 – 2001
Giải:

Cho phương trình $(m + 1)x^2 + 2(1 - m)x + m - 2 = 0$ (1)

- a. Khi $m = -1$ phương trình (1) trở thành

$$(-1 + 1)x^2 + 2(1 + 1)x - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra khi } m = -1$$

phương trình (1) có nghiệm. Khi $m \neq -1$ phương trình (1) có nghiệm khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (1 - m)^2 - (m + 1)(m - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2m + m^2 - m^2 + 2m - m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -m \geq -3 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vậy khi $m \leq 3$ thì phương trình (1) có nghiệm.

- b. Phương trình (1) có một nghiệm bằng 2 khi và chỉ khi

$$(m + 1)x^2 + 2(1 - m)x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)2^2 + 2(1 - m)2 + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + 4 + 4 - 4m + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -6.$$

Khi $m = -6$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nên theo định lí

$$\text{Viết ta có } x_1 + x_2 = \frac{2(m - 1)}{m + 1} = \frac{2(-6 - 1)}{-6 + 1} = \frac{14}{5}.$$

Mà $x_1 = 2$ nên ta tính được $x_2 = \frac{14}{5} - 2 = \frac{4}{5}$. Vậy khi $m = -6$ thì phương trình (1) có một nghiệm bằng 2 và nghiệm còn lại bằng $\frac{4}{5}$.

- c. Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm là $m \neq -1, m \leq 3$.

Khi phương trình có nghiệm, theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2(m - 1)}{m + 1}$

và $x_1x_2 = \frac{m - 2}{m + 1}$. Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện

$$3(x_1 + x_2) = 5x_1x_2 \text{ khi } \begin{cases} m \neq -1; m \leq 3 \\ 3(x_1 + x_2) = 5x_1x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1; m \leq 3 \\ 3 \cdot \frac{2(m - 1)}{m + 1} = \frac{5(m - 2)}{m + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \leq 3 \\ 6m - 6 = 5m - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \leq 3 \\ m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$$

Do đó khi $m = -4$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $3(x_1 + x_2) = 5x_1x_2$.

Ví dụ 11: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 4 = 0$ (có ẩn số là x)

a. Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất $y = x_1^2 + x_2^2$.

Đề TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM 2002 – 2003

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a. } \Delta' &= (m-1)^2 - (2m-4) = m^2 - 2m + 1 - 2m + 4 \\ &= m^2 - 4m + 4 + 1 = (m-2)^2 + 1 > 0 \forall m. \end{aligned}$$

Suy ra: Phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

$$\text{b. Theo hệ thức Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) = 2m-2 \\ x_1x_2 = 2m-4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2m-2)^2 - 2(2m-4) \\ &= 4m^2 - 12m + 12 = (2m)^2 - 2 \cdot 2m \cdot 3 + 3^2 + 3 = (2m-3)^2 + 3 \geq 3. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 2m-3=0 \Leftrightarrow 2m=3 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 12: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$ (1) (m là tham số).

a. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b. Cho biểu thức $P = 6x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ (x_1, x_2 là nghiệm của (1)). Tìm m để P đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính giá trị ấy.

Đề TS lớp 10 Quốc học Huế 2001 – 2002

Giải:

a. Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow [-(m+1)]^2 - (2m+10) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 2m - 10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 9 \Leftrightarrow |m| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi $m \geq 3$ hoặc $m \leq -3$.

$$\text{b. Áp dụng định lí Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m+10 \end{cases}$$

$$\text{Cho nên } P = 6x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2$$

$$= 4(m+1)^2 + 4(2m+10) = 4m^2 + 8m + 4 + 8m + 40$$

ABC

$$P = 4m^2 + 16m + 44 = 4(m + 2)^2 + 28$$

Khi $m \leq -3$ thì $m + 2 \leq -1 \Rightarrow (m + 2)^2 \geq 1 \Rightarrow P \geq 32$

Khi $m \geq 3$ thì $m + 2 \geq 5 \Rightarrow (m + 2)^2 \geq 25 \Rightarrow P \geq 128$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 32 khi $m = -3$.

Ví dụ 13: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ với m là tham số và x là ẩn số.

- Giải phương trình khi $m = 1$
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Với điều kiện của câu b hãy tìm m để biểu thức $A = x_1x_2 - x_1 - x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tuyển sinh lớp 10 TP Hà Nội 2007–2008

Giải.

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1)

- Khi $m = 1$ thì phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

- (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

- (1) khi $m > 1$ ta có: $S = x_1 + x_2 = 2m$ và $P = x_1x_2 = m^2 - m + 1$.

$$\text{Do đó: } A = P - S = m^2 - m + 1 - 2m = m^2 - 3m + 1 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa điều kiện $m > 1$).

Vậy khi $m = \frac{3}{2}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{5}{4}$.

Ví dụ 14: Cho phương trình: $x - \sqrt{6x} - 3 + 2m = 0$

- Tìm m để $x = \sqrt{7 - \sqrt{48}}$ là nghiệm của phương trình.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x = x_1; x = x_2$ thỏa mãn:

$$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{24}}{3}.$$

Tuyển sinh lớp 10 Hà Nam 2009–2010

Giải

- Đề $x = \sqrt{7 - \sqrt{48}} = 2 - \sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} - \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} - 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} - 3 + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

- Đặt $\sqrt{x} = t (t \geq 0)$ thì phương trình có dạng: $t^2 - \sqrt{6}t - 3 + 2m = 0$ (2)

Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 6 + 12 - 8m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$

Theo hệ thức Viet thì $\begin{cases} t_1 + t_2 = \sqrt{6} \\ t_1 \cdot t_2 = -3 + 2m \end{cases}$ để phương trình (1) có hai nghiệm

$$\text{thì } \begin{cases} t_1 + t_2 \geq 0 \\ t_1 \cdot t_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 + 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Để } \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{24}}{3} \text{ thì } \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 + t_2} = \frac{\sqrt{24}}{3} \Leftrightarrow \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{\sqrt{24}}{3} \Leftrightarrow \frac{6 + 6 - 4m}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{24}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 36 - 12m = 12 \Leftrightarrow -12m = -24 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 15: Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx - \frac{1}{m^2} = 0$.

Tính giá trị nhỏ nhất của $(x_1^4 + x_2^4)$ và nêu rõ khi đó m lấy giá trị nào?

Đề TS lớp 10A THPT Hoàn Kiếm – Hà Nội 1992 – 1993

Giải

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{m^2} \end{cases}$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2(x_1 x_2)^2$$

$$= \left(m^2 + \frac{2}{m^2} \right)^2 - \frac{2}{m^4} = m^4 + 4 + \frac{4}{m^2} - \frac{2}{m^4}$$

$$= 4 + m^4 + \frac{2}{m^4} \geq 4 + 2\sqrt{m^4 \cdot \frac{2}{m^4}} = 4 + 2\sqrt{2} \text{ (Áp dụng bất đẳng thức Cô-si}$$

cho hai số dương).

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow m^4 = \frac{2}{m^4} \Leftrightarrow m^8 = 2 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt[8]{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1^4 + x_2^4$ là $4 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \pm \sqrt[8]{2}$.

Ví dụ 16: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2004x + 1 = 0$ và x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2005x + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)$.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hải Dương 2004 – 2005

Giải

Theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = -2004$; $x_3 + x_4 = -2005$; $x_1 x_2 = x_3 x_4 = 1$,

mặt khác: $(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)$

$$= (x_1 x_2 + (x_1 + x_2)x_3 + x_3^2)(x_1 x_2 - (x_1 + x_2)x_4 + x_4^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - 2004x_3 + x_3^2)(1 + 2004x_4 + x_4^2) \\
 &= (x_3^2 + 2005x_3 + 1 - 4009x_3)(x_4^2 + 2005x_4 + 1 - x_4) \\
 &= (-4009x_3)(-x_4) = 4009x_3x_4 = 4009 \quad (\text{do } x_3, x_4 \text{ là nghiệm của phương trình } x^2 + 2005x + 1 = 0).
 \end{aligned}$$

Dạng 7: Xác định dấu các nghiệm số

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$ (có ẩn số là x).

- Định m để phương trình có nghiệm.
- Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM 2000 – 2001 Ban A, B

Giải:

a) $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 5) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 4m - 5 = 6m - 4$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 6m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$

- b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 6m - 4 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ m^2 - 4m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m > 4 \\ m+1 > 0 \\ (m-2)^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}$$

Ví dụ 2: Cho phương trình $2x^2 - 6x + m = 0$

- Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm dương.
- Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3.$$

Đề TS lớp 10 Quốc học Huế 1998 – 1999

Giải:

- a. Điều kiện để cho phương trình $2x^2 - 6x + m = 0$ có nghiệm là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (-3)^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow 9 - m \geq 0 \Leftrightarrow -m \geq -9 \Leftrightarrow m \leq \frac{9}{2}$. Khi phương trình trên có hai nghiệm x_1 và x_2 theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 3$ và $x_1 x_2 = \frac{m}{2}$. Phương trình $2x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm dương khi

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{9}{2} \\ 3 > 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{9}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{9}{2}. \text{ Do đó khi } 0 < m \leq \frac{9}{2}$$

thì phương trình $2x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm dương.

b. Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3$ khi

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1 \cdot x_2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ \frac{(3)^2 - m}{\frac{m}{2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{9}{2} \\ m \neq 0 \\ 18 - 2m = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{9}{2} \\ m \neq 0 \\ m = \frac{18}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{18}{5}.$$

Do đó khi $m = \frac{18}{5}$ thì phương trình $2x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm

x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3$.

Ví dụ 3: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có hai nghiệm dương phân biệt.

Tuyển sinh lớp 10 chuyên toán Quốc học Huế 2009–2010

Giải

Theo giả thiết, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt, nên:

$$a \neq 0, \Delta_1 = b^2 - 4ac > 0, P_1 = x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0, S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0.$$

Xét phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ (2). Từ trên ta có: $c \neq 0$ và $\Delta_2 = b^2 - 4ca = \Delta_1 > 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$x_3, x_4. P_2 = x_3x_4 = \frac{a}{c} > 0 \left(\text{do } \frac{c}{a} > 0 \right); S_2 = x_3 + x_4 = -\frac{b}{c}.$$

Nhưng $-\frac{b}{c} = \frac{-b}{a} \cdot \frac{a}{c}$, mà $\frac{-b}{a} > 0$ và $\frac{a}{c} > 0$, do đó: $S_2 > 0$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 4: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$ (có ẩn số là x)

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.

b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để có $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Đề TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM 2003 – 2004

ABC

Giải:

a. Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 9 > 0 \\ 2m < 0 \\ -6m - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 \neq 0 \\ m < 0 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

b. Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$

Theo hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2m \\ P = x_1 x_2 = -6m - 9 \end{cases}$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13$

$$\Leftrightarrow (2m)^2 - 2(-6m - 9) = 13 \Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 18 = 13$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 5 = 0; \Delta' = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16; \sqrt{\Delta'} = 4 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}; m_2 = -\frac{5}{2}$$

Vậy $m_1 = -\frac{1}{2}$ hay $m_2 = -\frac{5}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Ví dụ 5: Cho phương trình: $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2)$.

Giải

Từ phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ (1). Đặt: $t = x^2$, ta có: $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$ (2) ($t \geq 0$). $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0$ với mọi m . Vậy để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (2) luôn có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 .

Tức là: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}, m \neq 1$ (3). Với điều kiện (3), phương

trình (2) có 2 nghiệm dương $0 < t_1 < t_2$ hay phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi: $x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}$. Theo giả thiết:

$$x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2) \Leftrightarrow 2\sqrt{t_2} = 6\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$
 (4)

Theo định lí Viet, ta có: $t_1 + t_2 = 2m$ và $t_1 t_2 = 2m - 1$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $10t_1 = 2m$ và $9t_1^2 = 2m - 1$

$> 9m^2 - 50m + 25 > 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{5}{9}; m_2 = 5$. Cả hai giá trị đều thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy để phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán thì điều kiện cần và đủ là: $m = \frac{5}{9}$ và $m = 5$.

Ví dụ 6: Cho phương trình: $x^2 + \sqrt{2}mx - m^2 + m - 1 = 0$ (1).

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị m .

Xác định dấu các nghiệm số của phương trình.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a. Ta có hệ số $a = 1 > 0$, $c = -m^2 + m - 1 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$, từ đó suy ra $ac < 0$, nên phương trình đã cho có nghiệm và hai nghiệm của phương trình trái dấu nhau.

b. Do phương trình đã cho luôn có nghiệm nên áp dụng hệ thức Vi et ta có

$$S = x_1 + x_2 = -\sqrt{2}m; P = x_1 \cdot x_2 = -m^2 + m - 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 2m^2 + 2m^2 - 2m + 2$$

$$= 4m^2 - 2m + 2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$ là $\frac{7}{4}$ khi $m = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$ (có ẩn số là x).

a. Định m để phương trình có nghiệm.

b. Định m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Giải

$$a. \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 5) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 4m - 5 = 6m - 4$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 6m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$$

b. Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 6m - 4 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ m^2 - 4m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m > 4 \\ m+1 > 0 \\ (m-2)^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 8: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$ (có ẩn số là x)

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.

b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để có $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Giải

a. Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 9 > 0 \\ 2m < 0 \\ -6m - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 > 0 \\ m < 0 \\ -6m > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < 0 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

b. Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 \geq 0; \forall m \in \mathbb{R}$

Theo hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2m \\ P = x_1 x_2 = -6m - 9 \end{cases}$$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow (2m)^2 - 2(-6m - 9) = 13$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 5 = 0; \Delta' = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}; m_2 = -\frac{5}{2}.$$

Vậy $m_1 = -\frac{1}{2}$ hay $m_2 = -\frac{5}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Ví dụ 9: Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m+1 = 0$ (x là ẩn).

a. Giải phương trình khi $m = -\frac{3}{2}$,

b. Tìm các giá trị của phương trình có hai nghiệm trái dấu.

c. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Tìm giá trị của m để: $x_1(1 - 2x_2) + x_2(1 - 2x_1) = m^2$.

ĐỀ TS lớp 10 THPT Hà Nội 1995 – 1996

Giải

a. $m = -\frac{3}{2}$: phương trình trở thành: $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0; \Delta = 1 + 2 = 3 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

b. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

c. Điều kiện $m < -1$, theo hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1 x_2 = m+1 \end{cases}$$

Do đó: $x_1(1 - 2x_2) + x_2(1 - 2x_1) = m^2$

$$\Leftrightarrow x_1 - 2x_1 x_2 + x_2 - 2x_1 x_2 = m^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) - 4(x_1 x_2) = m^2$$

$$\Leftrightarrow 2(m+2) - 4(m+1) = m^2 \Leftrightarrow 2m + 4 - 4m - 4 = m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m(m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$$

Dạng 8: Phương trình chứa tham số

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$(x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0 \quad (*)$$

Giải

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x) = (x^2 + mx + m^2 - 3) = 0$, có hai nghiệm phân biệt khác 2. Điều này

tương đương với $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases}$ tức là: $\begin{cases} -3m^2 + 12 > 0 \\ m^2 + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Vậy giá trị m để phương trình $*$ có ba nghiệm phân biệt là: $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Chú ý: Dừng nghĩ rằng phương trình $(*)$ có nghiệm $x = 2$, thì chỉ cần đặt điều kiện phương trình $f(x) = (x^2 + mx + m^2 - 3) = 0$ có hai nghiệm là đủ.

Ví dụ 2: Cho phương trình $(x+1)^4 - (m-1)(x+1)^2 - m^2 + m - 1 = 0$ (1)

a. Giải phương trình với $m = -1$.

b. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị tham số của m .

c. Tìm các giá trị của m để $|x_1| + |x_2| = 2$.

Đề thi vào lớp 10 trường Hà Nội – Amsterdam 1998–1999

Giải

a. Đặt $(x+1)^2 = t, \quad t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành

$$\Leftrightarrow t^2 - (m-1)t - m^2 + m - 1 = 0 \quad (2).$$

Với $m = -1$, ta có: (1)

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - (-1)^2 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ x+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

b. Trong phương trình (2) có $a = 1, c = -(m^2 - m + 1) < 0$ nên (2) có 2 nghiệm trái dấu $t_1 < 0 < t_2$. Vì vậy phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt. $x_2 = \sqrt{t_2} - 1; \quad x_1 = -\sqrt{t_2} - 1$

$$|x_1| + |x_2| = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{t_2} - 1| + |-\sqrt{t_2} - 1| = 2 \Leftrightarrow 2 \geq |1 - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_2} + 1| = 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$(1 - \sqrt{t_2})(1 + \sqrt{t_2}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{t_2} \geq 0 \Leftrightarrow t_2 \leq 1.$$

t_2 là nghiệm dương của phương trình (2) nên:

$$t_2 = (m-1) + \sqrt{(m-1)^2 - 4(-m^2 + m - 1)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 6m + 5} \leq 1 - (m - 1) = 2 - m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 6m + 5 \leq (2 - m)^2 \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 2m + 1 \leq 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m$ (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Giải:

Đây là phương trình dạng: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = l_1$ với $a + b = c + d$.

Ta có: $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) = m$

$$\Leftrightarrow [(x - 1)(x + 5)][(x + 1)(x + 3)] = m \Leftrightarrow [x^2 + 4x - 5][x^2 + 4x + 3] = m$$

Đặt $X = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$, ta có phương trình tương đương $(X - 9)(X - 1) = m \Leftrightarrow X^2 - 10X + (9 - m) = 0$ (2). Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt: } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + m > 0 \\ 9 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9.$$

Vậy với $-16 < m < 9$, thì phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4: Tìm a để phương trình $3|x| + 2ax = 3a - 1$ có nghiệm duy nhất.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ 2003–2004

Giải:

Từ phương trình đã cho $3|x| + 2ax = 3a - 1$ (1), ta có

+ Nếu $x \geq 0$ thì phương trình (1) $\Leftrightarrow 3x + 2ax = 3a - 1$

$\Leftrightarrow x(2a + 3) = 3a - 1$ (2). Với $a = -\frac{3}{2}$, ta có phương trình (2) vô nghiệm

Với $a \neq -\frac{3}{2}$, nghiệm của phương trình (2) là: $\frac{3a - 1}{2a + 3}$ và sẽ là nghiệm

của phương trình (1) nếu $\frac{3a - 1}{2a + 3} \geq 0$.

+ Nếu $x \leq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow -3x + 2ax = 3a - 1 \Leftrightarrow x(2a - 3) = 3a - 1$.

Với $a = -\frac{3}{2}$, ta có phương trình (2) vô nghiệm

Với $a \neq -\frac{3}{2}$, ta có nghiệm của phương trình (2) là $x_2 = \frac{3a - 1}{2a - 3}$ và x_2 sẽ là

nghiệm của phương trình (1) nếu $\frac{3a - 1}{2a - 3} \leq 0$

+ (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x_1, x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3a-1}{2a+3} \cdot \frac{3a-1}{2a-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3a-1)^2}{4a^2-9} \geq 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ hoặc } a > \frac{3}{2}$$

hoặc $a < -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 5: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq 1$ với mọi $x \in \{-1; 1\}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = 4a^2 + 3b^2$.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ 2003–2004

Giải:

Từ điều kiện $|f(x)| \leq 1$, với mọi $x \in \{-1; 1\}$, ta có $|f(0) - f(1)| \leq 2$
 $\Rightarrow (a+b)^2 \leq 4; |f(0) - f(-1)| \leq 2 \Rightarrow (a-b)^2 \leq 4$.

Mặt khác $4a^2 + 3b^2 = 2(a+b)^2 + 2(a-b)^2 - b^2 \leq 16$

Vậy $4a^2 + 3b^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16, khi và chỉ khi: $(a; b; c)$ nhận giá trị là $(2; 0; -1)$ hoặc $(-2; 0; 1)$.

Ví dụ 6: Cho hai số a và b khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng phương trình ẩn x sau luôn có nghiệm $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$

Đề thi TS lớp 10 tỉnh Bắc Giang 2003–2004

Giải:

Ta có phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$(x^2 + ax + b) = 0$ (1); $(x^2 + bx + a) = 0$ (2). Xét phương trình (1) ta có $\Delta_1 = a^2 - 4b$. Xét phương trình (2) ta có: $\Delta_2 = b^2 - 4a$, từ đó suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 - 4b + b^2 - 4a = a^2 + b^2 - 4(a+b)$. Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow 2(a+b) = ab$, nên $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a+b) = (a-b)^2 \geq 0$. Do đó có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm. Do đó phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$ luôn luôn có nghiệm.

Ví dụ 7: Tìm m để phương trình: $x^4 - x^2 + 2mx - m^2 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Giải:

Ta viết phương trình dưới dạng: $x^4 - (x^2 - 2mx + m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - (x-m)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - m)(x^2 - x + m) = 0$$

ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - m = 0 & (1) \\ x^2 - x + m = 0 & (2) \end{cases}. \text{ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khi và}$$

chỉ khi (1) và (2) đồng thời mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt nhưng chúng không có nghiệm chung. Trước hết (1) và (2) đồng thời có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ 1 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4}$

Nhưng nếu (1) và (2) có nghiệm chung x_0 thì: $\begin{cases} x_0^2 + x_0 - m = 0 \\ x_0^2 - x_0 + m = 0 \end{cases}$

Cộng từng vế: $2x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Do đó: $m = 0$.

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Ví dụ 8: Giả sử m là một tham số để phương trình:

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = m$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 đều khác không. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ theo m .

Giải:

Phương trình $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = m$ (1)

(1) $\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = m$. Đặt $y = x^2 - 5x + 4$ thì phương trình đã cho trở thành: $y^2 + 2y - m = 0$ (2). Ta có: $\Delta' = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$. Phương trình (1) có 4 nghiệm nên phương trình (2) có hai nghiệm y_1, y_2 với $y_1 + y_2 = -2$; $y_1 y_2 = -m$ ($m > -1$). Bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 có vai trò như nhau trong phương trình nên ta có thể coi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2 - 5x + 4 = y_1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 - y_1 = 0$ và x_3, x_4 là nghiệm phương trình: $x^2 - 5x + 4 - y_2 = 0$.

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5; x_1 x_2 = 4 - y_1 \\ x_3 + x_4 = 5; x_3 x_4 = 4 - y_2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Nên } P &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3 x_4} = \frac{5}{4 - y_1} + \frac{5}{4 - y_2} \\ &= \frac{5[8 - (y_1 + y_2)]}{16 - 4(y_1 + y_2) + y_1 y_2} = \frac{50}{24 - m}. \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Cho phương trình: $2x^2 + 2(2m-6)x - 6m + 52 = 0$ (với m là tham số). Tìm giá trị của m là số nguyên để phương trình có nghiệm hữu tỷ.

Tuyển sinh lớp 10 Hà nam 2009-2010

Giải

$2x^2 + 2(2m - 6)x - 6m + 52 = 0$ có nghiệm hữu tỉ với m nguyên

$\Leftrightarrow x^2 + (2m - 6)x - 3m + 26 = 0$ có nghiệm hữu tỷ với m nguyên

$$\Leftrightarrow \Delta = (2m - 6)^2 + 12m - 104 = k^2 (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 36 + 12m - 104 = k^2$$

$$4m^2 - 12m + 9 - k^2 = 77 \Leftrightarrow (2m - 3 - k)(2m - 3 + k) = 77$$

$$1) \begin{cases} 2m - 2 - k = 1 \\ 2m - 3 + k = 77 \end{cases} \Leftrightarrow m = 21 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$2) \begin{cases} 2m - 2 - k = -1 \\ 2m - 3 + k = -77 \end{cases} \Leftrightarrow m = -18 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$3) \begin{cases} 2m - 2 - k = 11 \\ 2m - 3 + k = 7 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$4) \begin{cases} 2m - 2 - k = -11 \\ 2m - 3 + k = -7 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn đề bài: $m_1 = 21 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -37$;

$m_2 = -18 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 40$; $m_3 = 6 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -8$; $m_4 = -3 \Rightarrow x_1 = 5; x_2 = 7$

Ví dụ 10: Tìm a để phương trình $3|x| + 2ax = 3a - 1$ có nghiệm duy nhất.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ 2003 – 2004**Giải**

$$3|x| + 2ax = 3a - 1. \quad (1)$$

$$+ \text{ Nếu } x \geq 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow 3x + 2ax = 3a - 1 \Leftrightarrow x(2a + 3) = 3a - 1 \quad (2)$$

Với $a = -\frac{3}{2}$, ta có (2) vô nghiệm.

Với $a \neq -\frac{3}{2}$, nghiệm của (2) là $x_1 = \frac{3a - 1}{2a + 3}$ và x_1 sẽ là nghiệm của (1) nếu

$$\frac{3a - 1}{2a + 3} \geq 0.$$

$$+ \text{ Nếu } x \leq 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow -3x + 2ax = 3a - 1 \Leftrightarrow x(2a - 3) = 3a - 1. \quad (3).$$

Với $a = \frac{3}{2}$, ta có (3) vô nghiệm;

Với $a \neq \frac{3}{2}$, nghiệm của (3) là $x_2 = \frac{3a - 1}{2a - 3}$ và x_2 sẽ là nghiệm của (1)

nếu $\frac{3a - 1}{2a - 3} \leq 0$. Như vậy, (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3a - 1}{2a + 3} \cdot \frac{3a - 1}{2a - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3a - 1)^2}{4a^2 - 9} \geq 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

hoặc $a > \frac{3}{2}$ hoặc $a < -\frac{3}{2}$.

Bài tập vận dụng

- Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2) ($c \neq 0$).
Biết rằng phương trình (1) có 2 nghiệm dương x_1, x_2 . Chứng minh rằng phương trình (2) cũng có 2 nghiệm dương; gọi 2 nghiệm đó là x_3, x_4 .
Chứng minh rằng: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $(a^2 + b^2)$ sao cho phương trình:
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm.
- Cho phương trình $2x^2 - 3mx - 2 = 0$.
 - Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
 - Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của m để $S = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.
 - Tính $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$ theo m .
- Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ với m là tham số.
 - Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m \neq 1$.
 - Xác định giá trị của m để phương trình có tích 2 nghiệm bằng 5. Từ đó tính tổng 2 nghiệm của phương trình.
 - Tìm một hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không phụ thuộc m .
 - Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức:
 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0$.
- Tìm giá trị của k để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:
 $(x-3)[x^2 + (k-1)x + k^2] = 0$ (1)
- Tìm giá trị của k để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt và cùng âm: $(x-1)(x^2 + kx + k-1) = 0$ (1)
- Cho phương trình $x^2 - 6mx + 4 = 0$. Tìm giá trị của m , biết rằng phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{7}{2}$.
- Cho phương trình: $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ (m là tham số).
 - Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm và tính các nghiệm của phương trình theo m .
 - Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm sao cho một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.

9. Cho phương trình: $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (*)
- a. Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm âm.
- b. Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^3 - x_2^3| = 50$.
10. Chứng minh rằng phương trình: $x^4 - 2(m^2 + 2)x^2 + m^4 + 3 = 0$ luôn có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 với mọi giá trị của m. Tìm giá trị m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11$.
11. Cho phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$.
- a. Tìm m để phương trình có nghiệm.
- b. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.
12. Biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 - m(x + 2) + 8 = 0$ (1) theo m.

Hướng dẫn và đáp số.

1. Phương trình (1) có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ -\frac{b}{a} > 0; \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

Ta có: $\Delta_{(1)} = b^2 - 4ac = \Delta_{(2)} > 0$ do đó phương trình (2) cũng có 2 nghiệm.

Giả sử $x_1 > 0$ là nghiệm của (1). Thế thì: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ (3)

Chia 2 vế của (3) cho x_1^2 , ta có: $\frac{ax_1^2}{x_1^2} + \frac{bx_1}{x_1^2} + \frac{c}{x_1^2} = 0$, tức là

$a + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + c\left(\frac{c}{x_1^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1}$ là nghiệm của (2). Tương tự $\frac{1}{x_2}$ cũng là nghiệm của (2), mà x_3, x_4 là nghiệm của (2). Không mất tổng quát, giả sử: $x_3 = \frac{1}{x_1}, x_4 = \frac{1}{x_2}$.

Suy ra: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \geq 4$

(do $x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2$ với $x_1 > 0$ và $x_2 + \frac{1}{x_2} \geq 2$ với $x_2 > 0$).

2. Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ (1), do đó $x \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình

(1) cho x^2 ta có: $(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, với $|t| \geq 2$. Do đó $(1) \Leftrightarrow t^2 + at + b - 2 = 0$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki có: $(a^2 + b^2)(t^2 + 1) \geq (at + b)^2 = (2 - t^2)^2$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(2 - t^2)^2}{t^2 + 1}.$$

Đặt $t^2 = u$, $u \geq 4 \Rightarrow \frac{(2 - t^2)^2}{t^2 + 1} = \frac{(2 - u)^2}{u + 1} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(2 - u)^2}{u + 1}$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{(2 - u)^2}{u + 1} \geq \frac{4}{5}$ với $u \geq 4$ (*)

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow 5(2 - u)^2 \geq 4(u + 1) \Leftrightarrow (u - 4)(5u - 4) \geq 0$ (do $u \geq 4$)

Dấu “=” xảy ra khi:

$$\begin{cases} u = 4 \\ a = bt \\ at + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 4 \\ bt = a \\ at + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$ thì phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm

$x = 1$.

Với $\begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$ thì phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm

$x = -1$.

Vậy $(a^2 + b^2)$ nhỏ nhất bằng $\frac{4}{5}$.

3. a. $ac = 2(-2) = 4 < 0$, phương trình luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m . Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{3m}{2}$; $x_1 x_2 = -1$

b. $S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{3m}{2}\right)^2 - 2(-1) = \frac{9m^2}{4} + 2 \geq 2$

Vậy $\min S = 2$ khi $m = 0$.

c.
$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^3}$$

$$= \frac{\left(\frac{3m}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{3m}{2}}{-1} = \frac{-9m(3m^2 + 4)}{8}.$$

4.a. Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình bậc hai: $m \neq 1$.

$$\Delta' = m^2 - (m-1)(m+1) = 1 > 0.$$

Vậy phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m \neq 1$.

$$b. x_1 x_2 = \frac{m+1}{m-1} = 5 \Rightarrow m = \frac{3}{2}; \quad x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 6$$

$$c. \text{Áp dụng định lý Viet ta có: } x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \quad (1); \quad x_1 x_2 = \frac{m+1}{m-1} \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} - 1 + 1 = \frac{2m - (m-1)}{m-1} + 1 = \frac{m+1}{m-1} + 1 = x_1 x_2 + 1$$

Vậy hệ thức phải tìm là: $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 0$.

$$d. \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0 \quad (x_1 \neq 0, x_2 \neq 0) \Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2) = -5x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = -5x_1 x_2 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 = -x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{4m^2}{(m-1)^2} = -\frac{m+1}{m-1} \Leftrightarrow 9m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{3}$$

5. Tìm giá trị của k để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$(x-3)[x^2 + (k-1)x + k^2] = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + (k-1)x + k^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt và cả 2 nghiệm đó đều khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ 3^2 + 3(k-1) + k^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)^2 - 4k^2 > 0 \\ k^2 + 3k + 6 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2 + 2k - 1 > 0 \\ k^2 + 3k + 6 \neq 0 \text{ (hiển nhiên)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{1}{3} \\ k < -1 \end{cases}$$

Vậy giá trị của k để phương trình có 3 nghiệm phân biệt: $k > \frac{1}{3}$ hoặc $k < -1$.

$$6. (x-1)(x^2 + kx + k-1) = 0 \quad (1') \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + kx + (k-1) = 0 \end{cases} \quad (2')$$

Phương trình (1') có 2 nghiệm phân biệt và cùng âm $\Leftrightarrow$ phương trình (2') có 2 nghiệm phân biệt và cùng âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{\Delta_{(2)}}}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-2)^2 > 0 \\ x_2 = -1 < 0 \\ x_1 = 1-k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k \neq 2 \end{cases}$$

7. Ta có: $\Delta' = 9m^2 - 4$. Để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 cần và đủ là:

$$\Delta' = 9m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq \frac{4}{9} \Leftrightarrow |m| \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow m \leq -\frac{2}{3} \text{ hay } m \geq \frac{2}{3}.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{36m^2 - 8}{16} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow m = \pm \frac{4}{3}. \text{ Cả hai giá trị này của } m \text{ đều thỏa}$$

mãn điều kiện $|m| \geq \frac{2}{3}$. Vậy các giá trị của m cần tìm là: $m = \pm \frac{4}{3}$.

8. a. Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $1 = 0$, nên phương trình vô nghiệm. Nếu $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm khi:

$$\Delta' = m^2 - m = m(m - 1) \geq 0. \text{ Suy ra } m < 0 \text{ hoặc } m \geq 1 (*).$$

Khi đó các nghiệm của phương trình là: $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - m}}{m}$;

b. Với điều kiện (*), phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Theo hệ thức Viet:

$$x_1 + x_2 = 2 \text{ và } x_1 x_2 = \frac{1}{m}. \text{ Theo giả thiết, ta có: } x_1 = 2x_2 \text{ (hoặc } x_2 = 2x_1),$$

$$\text{suy ra: } x_1 = \frac{4}{3}; x_2 = \frac{2}{3} \text{ (hoặc } x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{4}{3}).$$

$$\text{Suy ra: } x_1 x_2 = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{8}{9} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{9}{8} > 1, \text{ thỏa mãn điều kiện } (*).$$

Vậy với $m = \frac{9}{8}$ thì phương trình có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia.

9. a. Để phương trình có hai nghiệm âm thì:

$$\begin{cases} \Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + m - 6) \geq 0 \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 6 > 0 \\ x_1 + x_2 = 2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 > 0 \\ (m - 2)(m + 3) > 0 \Leftrightarrow m < -3 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b. Giải phương trình: $|(m - 2)^3 - (m + 3)^3| = 50$

$$\Leftrightarrow |5(3m^2 + 3m + 7)| = 50 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

10. $x^4 - 2(m^2 + 2)x^2 + m^4 + 3 = 0$ (1).

Đặt: $t = x^2$, ta có: $t^2 - 2(m^2 + 2)t + m^4 + 3 = 0$ (2) ($t \geq 0$).

Ta chứng tỏ (2) luôn có hai nghiệm: $0 < t_1 < t_2$.

$$\Delta' = (m^2 + 2)^2 - (m^4 + 3) = 4m^2 + 1 > 0, \text{ với mọi } m.$$

Vậy (2) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 : $t_1 \cdot t_2 = m^4 + 3 > 0$ với mọi m .

$t_1 + t_2 = 2(m^2 + 2) > 0$ với mọi m .

Do đó phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}, +\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, +\sqrt{t_2}$.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

$$= (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_2})^2 + (-\sqrt{t_1}) \cdot (\sqrt{t_1}) \cdot (-\sqrt{t_2}) \cdot (\sqrt{t_2})$$

$$= 2(t_1 + t_2) + t_1 \cdot t_2.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 4(m^2 + 2) + m^4 + 3 = m^4 + 4m^2 + 11$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 + 11 = 11$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy giá trị m sao cho: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11$ là $m = 0$.

11. a. Xét $(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$, thử trực tiếp ta thấy phương trình chỉ có nghiệm khi $m = 2$. Xét $(m^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ 4m + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -2 \end{cases}.$$

Tóm lại phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m > -2$.

- b. Phương trình chỉ có thể có nghiệm duy nhất trong các trường hợp sau

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2(m - 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ 4(m + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m = -2 \end{cases}. \text{ Trường hợp này}$$

không xảy ra. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = 2$.

12. Ta biến đổi phương trình đã cho về dạng phương trình tích:

$$x^3 - m(x + 2) + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 8) - m(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - m(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4 - m) = 0.$$

Số nghiệm của phương trình (1) phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình: $(x^2 - 2x + 4 - m) = 0$ (2) khác -2 , do đó phụ thuộc vào $\Delta' = m - 3$ và $f(-2) = 12 - m$. Xảy ra các trường hợp như sau:

Trường hợp 1: $\Delta' = m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$, phương trình (2) vô nghiệm, nên phương trình đã cho có một nghiệm $x = -2$.

Trường hợp 2: $\Delta' = m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$, phương trình (2) có nghiệm kép $x = 1$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2, x = 1$.

Trường hợp 3: $\Delta' = m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$; $f(-2) = 12 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 12$.

Do đó, nếu $\begin{cases} m \neq 12 \\ m > 3 \end{cases}$ thì phương trình (2) có hai nghiệm, nên phương

trình đã cho có ba nghiệm.

Nếu $m = 12$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm.

3. Hệ phương trình

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số

Phương pháp giải:

Cách 1: Sử dụng phương pháp cộng đại số.

Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

* Nhân các vế của hai phương trình với số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

* Sử dụng quy tắc cộng đại số để thực hiện phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn số).

* Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Cách 2: Sử dụng phương pháp thế. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương.

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

+ Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

+ Giải hệ phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho. Nghiệm của hệ phương trình là cặp số (x, y) vừa tìm được.

Cách 3: Sử dụng phương pháp đồ thị.

Cách 4: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Dạng 2: Hệ phương trình đối xứng loại 1: Nếu ta thay đổi vai trò của x, y thì từng phương trình vẫn không thay đổi.

Phương pháp giải: Đưa về hệ phương trình theo 2 biến mới là:
$$\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$$

với điều kiện $S^2 \geq 4P$

Dạng 3: Hệ phương trình đối xứng loại 2: Nếu ta thay đổi vai trò của x, y thì phương trình này chuyển thành phương trình kia.

Phương pháp giải: Trừ 2 phương trình với nhau để nhận được phương trình mới có dạng tích số

Chú ý hệ phương trình đối xứng loại 2 nếu có nghiệm thì có nghiệm (x_0, x_0) (tức là $x = y$). Nếu hệ phương trình có nghiệm (x, y) thì hệ phương trình cũng có nghiệm (y, x) .

Dạng 4: Hệ phương trình không mẫu mực

Dạng 5: Hệ phương trình có chứa tham số : Chuyển bài toán tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình trở thành bài toán tìm điều kiện có nghiệm của phương trình (bằng phương pháp thế)

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (a) \\ 3x + 4y = -1 & (b) \end{cases}$$

Giải

Cách 1: Sử dụng phương pháp thế

Từ phương trình (a) $\Rightarrow y = 1 - 2x$ (c). Thế phương trình (c) vào phương trình (b) ta được: $3x + 4(1 - 2x) = -1 \Leftrightarrow -5x = -5 \Leftrightarrow x = 1$.

Thế $x = 1$ vào phương trình (c) ta được $y = -1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$ và $y = -1$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp cộng đại số

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 4 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3 \cdot 1 + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x = 1; y = -1)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 9x - y = 7 \end{cases}$$

Tuyển sinh lớp 10 TP Hà Nội 2007-2008

Giải

$$\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 9x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6(9x - 7) = 17 \\ y = 9x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 59x = 59 \\ y = 9x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x+y} = 7 \\ \frac{x}{x+y} = 12 \end{cases}$$

Tuyển sinh lớp 10 Hà Nam 2009-2010

Giải

Đặt $\frac{1}{x+y} = t$ ta có $\begin{cases} x + t = 7 \\ x \cdot t = 12 \end{cases}$ nên x, t là hai nghiệm của phương trình:

$X^2 - 7X + 12 = 0$ giải phương trình ta có $X_1 = 3; X_2 = 4$ nên

$$1. \text{ Nếu } \begin{cases} x=3 \\ t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{x+y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x+y=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{11}{4} \end{cases}$$

$$2. \text{ Nếu } \begin{cases} x=4 \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{1}{x+y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x+y=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-\frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\begin{cases} x_1=3; \\ y_1=-\frac{11}{4} \end{cases}; \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=-\frac{11}{3} \end{cases}$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 7x+2y=17 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

Tuyển sinh lớp 10 THPT Trà vinh 2009-20010

Giải

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 7x+2y=17 \quad (1) \\ 3x+2y=5 \quad (2) \end{cases}$

Trừ từng vế của phương trình (1) cho phương trình (2), ta được:

$$4x=12 \Leftrightarrow x=3. \text{ Thế } x=3 \text{ vào phương trình (2): } \Leftrightarrow y=-2$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(3; -2)$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1+x^3y^3-19x^3=0 \\ y+xy^2+6x^2=0 \end{cases}$

TS lớp 10 chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2007-2008

Giải

Nhân phương trình thứ nhất của hệ với 6, nhân phương trình thứ hai của hệ với $19x$ rồi cộng lại được $6(xy)^3+19(xy)^2+19xy+6=0$

$\Leftrightarrow (xy+1)(2xy+3)(3xy+2)=0$. Với $xy=-1$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ được $x=0$ (không thỏa mãn). Với $xy=-\frac{2}{3}$, tìm được

$$(x; y) = \left(\frac{1}{3}; -2\right). \text{ Với } xy = -\frac{3}{2}, \text{ tìm được } (x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 3\right).$$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{3}{2x-y} - \frac{6}{x+y} = -1 \\ \frac{1}{2x-y} - \frac{1}{x+y} = 0 \end{cases} \quad (I)$

Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2004-2005

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} x - 2y \neq 0 \\ x + y \neq 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{2x - y} \\ v = \frac{1}{x + y} \end{cases}$ thì:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 6v = -1 \\ u - v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - 2xy = 0 \\ x + y - x^2y^2 = \sqrt{(xy - 1)^2 + 1} \end{cases}$

Tuyển sinh lớp 10 THPT Nam Định 2009-2010**Giải:**

Với mọi x, y ta có $(xy - 1)^2 + 1 \geq 1$ (*) nên hệ phương trình đã cho xác định với mọi x, y . Từ phương trình đầu của hệ ta có $x + y = 2xy$, thay vào phương trình thứ hai của hệ phương trình ta được:

$$2xy - x^2y^2 = \sqrt{(xy - 1)^2 + 1} \quad (**).$$

Nếu hệ có nghiệm thì từ (*), (**) suy ra

$2xy - x^2y^2 \geq 1 \Rightarrow (xy - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow xy = 1$. Thay $xy = 1$ vào hệ phương trình đã cho ta có: $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$. Giải hệ phương trình trên được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm $x = y = 1$.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình; $\begin{cases} |xy| - 2 = 4 - y^2 & (1) \\ xy = 1 + x^2 & (2) \end{cases}$

TS lớp 10 Lê Khiết – Quảng Ngãi 2001 – 2002**Giải:**

$$\begin{cases} |xy| - 2 = 4 - y^2 & (1) \\ xy = 1 + x^2 & (2) \end{cases}. \text{ Từ (1)} \Rightarrow 4 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq y^2 \quad (3)$$

Từ (2) $\Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0$.

Để phương trình bậc hai ẩn x có nghiệm thì: $\Delta = y^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 4 \quad (4)$.

Từ (3) và (4) suy ra: $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

Thế vào (1) ta có: $x = \pm 1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (1; 2); (-1; -2)$

Dạng 2: Hệ phương trình đối xứng loại 1**Ví dụ 1:** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} xy = -64 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM 2003 – 2004**Giải:**a. Đặt $u = x + y$; $v = xy$, ta có: $x^2y + xy^2 = xy(x + y) = v.u$ Do đó $\begin{cases} u + v = 11 \\ v.u = 30 \end{cases}$; ta có u, v là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 11X + 30 = 0; \Delta = 11^2 - 4.1.30 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$$

$$\text{Nên } X_1 = \frac{11+1}{2} = 6; X_2 = \frac{11-1}{2} = 5. \text{ Do đó } \begin{cases} u = 6 \\ v = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases}$$

* Xét $\begin{cases} u = 6 \\ v = 5 \end{cases}$. Ta có $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$; do đó x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 6t + 5 = 0. \text{ Vì } a + b + c = 1 + (-6) + 5 = 0 \text{ nên } t_1 = 1; t_2 = \frac{c}{a} = 5$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

* Xét $\begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases}$. Ta có $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$; do đó x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 5t + 6 = 0; \Delta = 5^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$$

$$\text{Nên } h_1 = \frac{5+1}{2} = 3; h_2 = \frac{5-1}{2} = 2. \text{ Do đó } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

$$b. \text{ Điều kiện } x, y \neq 0: \begin{cases} xy = -64 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{64} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{64} \\ \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Do đó $\frac{1}{x}$ và $-\frac{1}{y}$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{64} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{64} = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 = \frac{1}{8}.$$

Ta có
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -8 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy = 2 + 3\sqrt{2} & (1) \\ y^2 + x^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

TS 10 chuyên toán Lê Hồng Phong TPHCM 2003 – 2004

Giải:

Ta có $y^2 + x^2 + 2(x + y + xy) = 6 + 2(2 + 3\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + 2(x + y) = 6 + 4 + 6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) + 1 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x + y + 1)^2 = (3 + \sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 3 + \sqrt{2} \\ x + y + 1 = -3 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 + \sqrt{2} & (3) \\ x + y = -4 - \sqrt{2} \end{cases}$

Từ (1) và (3) có $xy = 2\sqrt{2}$; $\begin{cases} xy = 2\sqrt{2} \\ x + y = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$ nên x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - (2 + \sqrt{2})X + 2\sqrt{2} = 0$ (*). Giải phương trình (*) được:

$X_1 = 2; X_2 = \sqrt{2}$. $\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ Từ (1) và (4) ta có $xy = 6 + 4\sqrt{2}$.

Ta có $(x - y)^2 = y^2 + x^2 - 2xy = 6 - 12 - 8\sqrt{2} = -6 - 8\sqrt{2} < 0$ (loại)

Nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 12 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 \end{cases}$$

TS lớp 10 năng khiếu Hàn Thuyên Bắc Ninh 2002 – 2003

Giải:

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 12 & (1) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} = 36 & (3) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) + (4) về theo vế, ta được: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 64 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

Từ (1) $\Rightarrow \sqrt{xy} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 12 \Rightarrow \sqrt{xy} = 3$ (6). Từ (5) và (6) ta có

$\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 4X + 3 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ và $\sqrt{y} = 3 \Rightarrow y = 9$ hoặc $x = 9$ và $y = 1$.

Dạng 3: Hệ phương trình đối xứng loại 2

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 9 \end{cases}$$

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM 2000 – 2001 Ban A, B

Giải:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ (3 + y)^3 - y^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 27 + 27y + 9y^2 + y^3 - y^3 = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ y^2 + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ y = -1 \text{ hay } y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = -1 \\ x = 1; y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình có hai nghiệm là $(x = 2; y = -1)$ và $(x = 1; y = -2)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y = 8 \\ y^2 - 2x = 8 \end{cases}$$

Giải

Trừ vế theo vế, ta có $(x^2 + 2y) - (y^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y + 2) = 0$

* Nếu $x + y = 0$, thay $y = -x$ vào phương trình đầu thì:

$$x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Giải ra: $x = 4; x = -2$. Trường hợp này hệ phương trình có hai nghiệm:

$$(x; y) = (4; -4); (x; y) = (-2; 2)$$

* Nếu $x - y + 2 = 0$, thay $y = x + 2$ vào phương trình đầu thì:

$$x^2 + 2(x + 2) = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0.$$

$$\text{Giải ra: } x = -1 - \sqrt{5}; x = -1 + \sqrt{5}$$

Trường hợp này hệ phương trình có hai nghiệm:

$$(x; y) = (-1 - \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}); (x; y) = (-1 + \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \quad (1) \\ y^3 + 1 = 2x \quad (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Từ hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases} \text{ suy ra } x^3 - y^3 = 2(y - x)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 2) = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

$$\text{Thay vào phương trình (1) ta được } x^3 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là:

$$(x = 1; y = 1), \left(x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right).$$

Dạng 4: Hệ phương trình có chứa tham số

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = m \end{cases} \quad (A)$$

- Giải hệ phương trình khi $m = 24$
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2007-2008

Giải

a. Khi $m = 24$ thì (A) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = 24 \end{cases} \quad (B)$

Đặt $u = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$ và $v = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \geq -1$

Ta được (B) $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 8 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u = 8 \\ v = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 4 \\ (y+1)^2 = 9 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (x+1)^2 = 9 \\ (y+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 - 1 \\ y = \pm 3 - 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \pm 3 - 1 \\ y = \pm 2 - 1 \end{cases}$

Vậy khi $m = 24$ thì (A) có các nghiệm (x, y) là:

$(1; 2), (1; -4), (-3; 2), (-3; -4), (2; 1), (2; -3), (-4; 1), (-4; -3)$

- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm

Đặt $u = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ và $v = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \geq 0$

Ta có hệ phương trình (A) trở thành:
$$\begin{cases} u + v = 13 \\ (u-1)(v-1) = m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv - (u+v) + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv = m + 12 \end{cases} \Rightarrow u, v \text{ lần lượt là các nghiệm}$

của phương trình $X^2 - 13X + m + 12 = 0 \quad (C)$. Do đó: hệ phương trình (A) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (C) có 2 nghiệm $X_1, X_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 121 - 4m \geq 0 \\ m + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{121}{4} \\ m \geq -12 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq \frac{121}{4}$

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x| + y = -1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases} \quad (I)$$

- Giải hệ phương trình khi $m = \frac{17}{9}$

- Tìm m để hệ có nghiệm.

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2004-2005

Giải

a. Với $m = \frac{17}{9}$ khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = -1 \\ (|x| + y)^2 - 2|x|y = \frac{17}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = -1 & (1) \\ |x|y = -\frac{4}{9} & (2) \end{cases} \quad (II)$$

Nên $|x|$ và y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 + t - \frac{4}{9} = 0$ (3)

(3) có hai nghiệm: $\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ y_1 = -\frac{4}{3} \end{cases}; \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{3} \\ y_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$

b. Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = -1 \\ (|x| + y)^2 - 2|x|y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = -1 \\ |x|y = \frac{1-m}{2} \end{cases} \quad (III)$

Nên $|x| \geq 0$ và y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 + t + \frac{1-m}{2} = 0$ (3)

Nên (I) có nghiệm khi và chỉ khi (3) có nghiệm không âm.

Trường hợp 1: (3) có nghiệm $t = 0$ khi đó $m = 1$ và (3) có 2 nghiệm 0, -1 (thỏa mãn)

Trường hợp 2: (3) có 1 nghiệm âm và 1 nghiệm dương (vì $S = -1 < 0$).

Khi đó: $P = \frac{1-m}{2} < 0 \Leftrightarrow m > 1$. Vậy $m \geq 1$.

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 2 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình khi $a = 2$.

b. Tìm a sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Giải

a) Khi $a = 2$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

b) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $\frac{1}{a} \neq \frac{a}{1} \Leftrightarrow a \neq \pm 1$.

Ví dụ 4 : Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - my = -3 \\ mx + 3y = 4 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình khi $m = 1$.
- Với giá trị nguyên nào của m thì hệ phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0 < 0$ và $y_0 > 0$

Giải

a. Khi $m = 1$, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{11}{7} \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x - my = 3 \quad (1) \\ mx + 3y = 4 \quad (2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế ta có: $x = \frac{4m-9}{m^2+6}; y = \frac{3m+8}{m^2+6}$.

Vì $m^2 + 6 > 0$ với mọi m nên $x < 0$ khi $4m - 9 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$; $y > 0$ khi

$$3m + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{8}{3}$$

Kết hợp hai điều kiện trên ta có các số nguyên m thỏa mãn đề bài là: $-2; -1; 0; 1; 2$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm $x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 15x - 3y = 3 \end{cases} \quad (*)$$

Giải:

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = m \\ 17x = m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ 3y = m - \frac{2(m+3)}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ y = \frac{5m-2}{17} \end{cases}$

Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+3}{17} > 0 \\ \frac{5m-2}{17} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ 5m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m < \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < \frac{2}{5}.$$

Các giá trị trên của m làm hệ phương trình đã cho có nghiệm $x > 0, y < 0$.

Ví dụ 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (a+1)x - y = 3 \\ ax + y = a \end{cases} \quad (*)$

a. Giải hệ phương trình với $a = -\sqrt{2}$.

b. Xác định giá trị của a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $x + y > 0$.

Giải:

a. Với $a = -\sqrt{2}$, ta được hệ phương trình: $\begin{cases} (-\sqrt{2} + 1)x - y = 3 \\ -\sqrt{2}x + y = a \end{cases}$

Giải ra ta được nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}}; \frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 - 2\sqrt{2}} \right)$.

b. Cộng hai vế của hệ phương trình, ta được: $(2a + 1)x = a + 3 \quad (1)$

Hệ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 2a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{1}{2}$.

Xét $a \neq -\frac{1}{2}$, ta có (1) có nghiệm $x = \frac{a + 3}{2a + 1}$.

Từ đó $y = a - ax = a - a \cdot \frac{a + 3}{2a + 1} = \frac{a^2 - 2a}{2a + 1}$

Vậy nếu $a \neq -\frac{1}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất: $x = \frac{a + 3}{2a + 1}; y = \frac{a^2 - 2a}{2a + 1}$.

$S = x + y = \frac{a^2 - a + 3}{2a + 1} = \frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}{2a + 1} > 0 \Leftrightarrow 2a + 1 > 0$ hay $a > -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 7: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + my = -3 \quad (1) \\ (1 - m)x + y = 0 \quad (2) \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm $(x < 0; y < 0)$.

Đề TS lớp 10 THPT Hải Phòng 1995 – 1996

Giải:

a. Với $m = 2$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y = -3 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\frac{3}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{3}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ hệ phương trình có nghiệm là $\left(x = -\frac{3}{4}; y = -\frac{3}{4}\right)$

$$\text{b. } \begin{cases} mx + my = -3 \\ (1-m)x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + my = -3 \\ y = -(1-m)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - m(1-m)x = -3 \\ y = (1-m)x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m - m + m^2)x = -3 \\ y = -(1-m)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x = -3 \\ y = -(1-m)x \end{cases}$$

Do đó $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1-m < 0 \Leftrightarrow m > 1$. Vậy $m > 1$ là giá trị cần tìm.

Dạng 5: Hệ phương trình không mẫu mực

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 12 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 \end{cases}$

Đề TS lớp 10 Hàn Thuyên Bắc Ninh 2002 – 2003

Giải

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 12 \quad (1) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} = 36 \quad (3) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 \quad (4) \end{cases}$$

Lấy (3) + (4) về theo vế, ta được: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 64 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

Từ (1) $\Rightarrow \sqrt{xy} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 12 \Rightarrow \sqrt{xy} = 3$

Từ (5) và (6) ta có $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 4X + 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ và } \sqrt{y} = 3 \Rightarrow y = 9$$

$$\text{Hoặc } \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \text{ và } \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = 1$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x+1| + \sqrt{y} = 5 \\ (x^2 + 2x + 1)y = 36 \end{cases}$

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2008-2009

Giải

$$\text{Điều kiện: } y \geq 0 : (x^2 + 2x + 1)y = 36 \Leftrightarrow |x+1|\sqrt{y} = 6$$

$$\text{Đặt } u = |x+1|, v = \sqrt{y} \text{ (} u \geq 0, v \geq 0 \text{)}, \text{ ta có hệ } \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases}$$

Giải ra: $u = 2, v = 3$ hoặc $u = 3, v = 2$.

Trường hợp $u = 2, v = 3$ có: $(x = 1; y = 9)$ hoặc $(x = -3; y = 9)$

Trường hợp $u = 3, v = 2$ có: $(x = 2; y = 4)$ hoặc $(x = -4; y = 4)$

Hệ đã cho có 4 nghiệm $(1; 9), (-3; 9), (2; 4), (-4; 4)$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ (2 + \sqrt{2})x - y = 1 \end{cases}$

Tuyển sinh lớp 10 chuyên Hà Nam 2009-2010

ABC

Giải

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ (2 + \sqrt{2})x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3 + 2\sqrt{2})x = \sqrt{2} + 1 \\ (1 + \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ (1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) + y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3xy = 2(x + y) \\ 5yz = 6(y + z) \\ 4zx = 3(z + x) \end{cases}$$

TS lớp 10 chuyên Lam sơn Thanh hóa 2007-2008

Giải

Nếu $x = 0$ thì $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x \neq 0$ thì khi đó $y, z \neq 0$, hệ phương trình đã cho tương đương

với:
$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{6} \\ \frac{z+x}{zx} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \quad (1) \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} \quad (2) \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \quad (3) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \quad (4)$$

Lấy phương trình (4) trừ lần lượt các phương trình (1), (2), (3) ta có $\frac{1}{x} = 1, \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y; z)$ là $(0; 0; 0)$ và $(1; 2; 3)$.

Ví dụ 5 : Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

TS lớp 10 THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội 2003 – 2004

Giải:

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Cách 1: $(1) \Leftrightarrow y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x+1 \pm \sqrt{(x+1)^2 - 4(-2x^2 + 5x - 2)}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y=2x-1, \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \\ y=-x+2. \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{5} \\ y=-\frac{13}{5} \\ x=y=1 \end{cases}$$

Cách 2: (1) $\Leftrightarrow y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 - (x+1)y + (x-2)(1-2x) = 0 \Leftrightarrow (y+x-2)(y-2x+1) = 0$$

Vậy hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} y+x-2=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=-1 \\ x=-\frac{4}{5}, y=-\frac{13}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x+1=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 4 \\ x+y=7 \end{cases}$

Đề TS lớp 10 chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2007-2008

Giải

Đặt $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{y}$ ($u \geq 0, v \geq 0$)

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} u+v=4 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ u.v=4. \end{cases}$

Suy ra $u = 2; v = 2$, từ đó $x = 3$ và $y = 4$. Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 4)$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{-2} \\ 4x+3y-2z=-1 \end{cases}$

Đề TS lớp 10 trường Quốc học Huế 1997 – 1998

Giải

Cách 1:

$$\begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{-2} \\ 4x+3y-2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3z \\ y=5z \\ 4x+3y-2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3z \\ y=5z \\ -12z+15z-2z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3z \\ y=5z \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3(-1) \\ y=5(-1) \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \\ z=-1 \end{cases}$$

ABC

Hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{cases}$.

Cách 2: Đặt $\frac{x}{6} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{-2} = t \Rightarrow x = 6t; y = -10t; z = -2t$. Thế vào phương trình $4x + 3y - 2z = -1$, ta có $t = \frac{1}{2}$, từ đó suy ra nghiệm của hệ

phương trình $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{cases}$.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x + y)^2 - 3(x + y) + 2 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$

Đề TS lớp 10 Quốc học Huế 1999 – 2000

Giải

Ta có $\begin{cases} (x + y)^2 - 3(x + y) + 2 = 0 \quad (1) \\ x - y - 5 = 0 \quad (2) \end{cases} (*)$

Đặt $x + y = a$ phương trình (1) trở thành: $a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}$

Từ đó hệ phương trình (*) tương đương với hệ phương trình

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ y = x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 7 \\ y = x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{7}{2} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 9: Các số a và b thỏa điều kiện: $\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 19 \\ b^3 - 3a^2b = 98 \end{cases}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Tuyển sinh lớp 10 trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội 1998

Giải

Ta có: $\begin{cases} (a^3 - 3ab^2)^2 = 19^2 \quad (1) \\ (b^3 - 3a^2b)^2 = 98^2 \quad (2) \end{cases}$

Cộng (1) và (2) ta nhận được: $a^6 + b^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 = 19^2 + 98^2$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^3 = 19^2 + 98^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt[3]{19^2 + 98^2}$$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7(1) \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21(2) \end{cases}$$

Tuyển sinh lớp 10 trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội 1998

Giải

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 21 \Leftrightarrow (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = 21$$

$$\text{Từ đó và (1)} \Rightarrow (x^2 - xy + y^2) = 3 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (3)} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}. \text{ Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho có 4}$$

$$\text{nghiem: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ví dụ 11: Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2004-2005

Giải

$$\text{Ta có: } x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

$$\Leftrightarrow 3 = 27 - 3(x + y)(y + z)(z + x) \Leftrightarrow 1 = 9 - (x + y)(y + z)(z + x)$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 8 \Leftrightarrow (3 - z)(3 - y)(3 - x) = 8$$

Suy ra $3 - z, 3 - y, 3 - x$ là các ước số của 8. Mà các ước số của 8 là $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Như vậy $3 - z, 3 - y, 3 - x$ nhận một trong các giá trị

$$\text{đã nêu, suy ra } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = -5 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^3 - y^3 = 35 \end{cases}$$

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2008 -2009

Giải

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^3 - y^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ 7(x - y) = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 5 \quad (1) \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải (2) ta được: $x_1 = 2; x_2 = 3$. Thay vào (1) $y_1 = -3; y_2 = -2$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $(2; -3)$ và $(3; -2)$

ABC

Ví dụ 13: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 & (1) \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2002 – 2003
Giải

+ Xét $x = 0$ thì $y = 0$, hệ phương trình có một nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

+ Xét $x \neq 0$, nhân hai vế của (2) với x rồi trừ cho (1) ta có:

$$x^3y + 2y - x^2 = 0 \Rightarrow y(x^3 + 2) = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \quad (\text{vì } x^3 + 2 \neq 0)$$

Thay vào (1) ta có: $x \left(\frac{x^2}{x^3 + 2} \right)^2 - 2 \left(\frac{x^2}{x^3 + 2} \right) + 3x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{(x^3 + 2)^2} - \frac{2}{x^3 + 2} + 3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2(x^3 + 2) + 3(x^3 + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^3 - 4 + 3x^6 + 12x^3 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^6 + 11x^3 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 1)(3x^3 + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 0 \\ 3x^3 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt[3]{-\frac{8}{3}} \end{cases}$$

+ $x = -1$, ta có: $y = 1$

+ $x = \sqrt[3]{-\frac{8}{3}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{3}}$ ta có $y = \frac{\left(\frac{-2}{\sqrt[3]{3}}\right)^2}{\left(\frac{-2}{\sqrt[3]{3}}\right)^3 + 2} = \frac{6}{\sqrt[3]{9}}$

Ví dụ 14: Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 - z^2 = 31 \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 \end{cases}$$

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2009 – 2010
Giải:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 - z^2 = 31 & (1) \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 & (2) \end{cases} (*)$$

Giả sử rằng tồn tại các số nguyên x, y, z

thỏa mãn (*). Nhân hai vế của (1) với 8 rồi cộng vào (2) ta được:

$$9x^2 - 23xy + 24y^2 = 348 \Leftrightarrow 5(2x^2 - 5xy + 5y^2) = (x - y)^2 + 348 \quad (3)$$

Ta có: * $5(2x^2 - 5xy + 5y^2)$ chia hết cho 5;

* $(x - y)^2$ chia cho 5 hoặc dư 0, hoặc dư 1 hoặc dư 4;

* 348 chia 5 dư 3.

Suy ra: * Vế trái của (3) chia hết cho 5 (4).

* Vế phải của (3) chia hết cho 5 có dư hoặc là 3, hoặc là 4 hoặc là 2 (5). Từ (4) và (5) suy ra mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ phương trình (*).

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ xyz = -24 \\ xy - 2x - 3y = -6 \\ y > 2 \end{cases}$$

Thi học sinh giỏi lớp 9 – Bảng A Nghệ An 2009

Giải:

Từ phương trình $xy - 2x - 3y = -6 \Rightarrow (x - 3)(y - 2) = 0$

Do $y > 2 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Thay $x = 3$ vào các phương trình đầu và phương trình thứ 2 của hệ ta được:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 20 \\ yz = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y + z)^2 = 4 \\ yz = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = \pm 2 \\ yz = -8 \end{cases}$$

Với $y + z = -2$ mà $yz = -8 \Rightarrow y = 2$ hoặc $y = -4$ (loại)

Với $y + z = 2$ mà $yz = -8 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$ do đó $x = 3$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x, y, z) = (3, 4, -2)$

Ví dụ 16: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x + y) = 23 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$$

Đề TS lớp 10 Toán – Đại học Vinh 2009-2010 (vòng 1)

Giải:

Đặt $u = x + y, v = xy$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2 + 2u - 2v = 23 \\ u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2u - 2(11 - u) = 23 \\ v = 11 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 4u - 45 = 0 \\ v = 11 - u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -9 \\ v = 20 \end{cases}. \text{ Giải từng hệ phương trình ta được.}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} u = -9 \\ v = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}$.

ABC

Ví dụ 17: Tìm x, y dương thỏa mãn:
$$\begin{cases} x + 9y - 4xy \leq 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Thi học sinh giỏi lớp 9 TP Vinh, Nghệ An - 2009

Giải:

$$\begin{cases} x + 9y - 4xy \leq 0 & (1) \\ x + y - 4 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{Từ phương trình (2) ta có: } y = 4 - x$$

+ Thế vào phương trình (1) và biến đổi ta được: $(x - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $x = 3, y = 1$.

Ví dụ 18: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 & (1) \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

TS 10 chuyên toán Lê Hồng Phong, TPHCM 2002 – 2003

Giải:

* Xét $x = 0$ thì $y = 0$, hệ phương trình có một nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

* Xét $x \neq 0$, nhân hai vế của (2) với x rồi trừ cho (1) ta có:

$$x^3y + 2y - x^2 = 0 \Rightarrow y(x^3 + 2) = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \quad (\text{vì } x^3 + 2 \neq 0)$$

Thay vào (1) ta có: $x \left(\frac{x^2}{x^3 + 2} \right)^2 - 2 \left(\frac{x^2}{x^3 + 2} \right) + 3x^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{(x^3 + 2)^2} - \frac{2}{x^3 + 2} + 3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2(x^3 + 2) + 3(x^3 + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^3 - 4 + 3x^6 + 12x^3 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^6 + 11x^3 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 1)(3x^3 + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 0 \\ 3x^3 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -1 \\ x^3 = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt[3]{-\frac{8}{3}} \end{cases}$$

* $x = -1$, ta có $y = \frac{(-1)^2}{(-1)^3 + 2} = 1$

* $x = \sqrt[3]{-\frac{8}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$, ta có: $y = -\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$

Nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \\ y = -\frac{6}{\sqrt[3]{9}} \end{cases}$

Ví dụ 19: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^5 + y^5 = 11. \end{cases}$$

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Hải Dương 2004 – 2005

Giải:

Vi $x = y = 1$, ta có:

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^5 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^5) - (x^2y^3 + x^3y^2) \\ &= (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x^2y^2(x - y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2) - x^2y^2 \\ &= ((x + y)^2 - 3xy)((x + y)^2 - 2xy) - x^2y^2 = 5(xy)^2 - 5xy + 1 = 11. \end{aligned}$$

Do đó

$$x^5 + y^5 = 11 \Leftrightarrow 5(xy)^2 - 5xy - 10 = 0 \Leftrightarrow (xy)^2 - xy - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -1 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ hay

x, y là nghiệm của hai phương trình $t^2 - t - 1 = 0$ và $t^2 - t + 2 = 0$.

Phương trình $t^2 - t + 2 = 0$ vô nghiệm; phương trình $t^2 - t - 1 = 0$ có hai nghiệm là $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Ví dụ 20: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$.

Đề TS lớp 10 chuyên thành phố HCM 2009 – 2010

Giải:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - y) + 1 - y = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(1 - y) = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \text{ hay} \\ &\begin{cases} y = 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \vee y = -2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \vee x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có 3 nghiệm là $(-1; 1), (-1; -2), (2; 1)$

Bài tập vận dụng

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} z^2 + 1 = 2\sqrt{xy} \\ z^2 - 1 = 2yz\sqrt{1 - 4xy} \end{cases}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x - 2y} + x + 2y = 5 \\ \frac{x + 2y}{x - 2y} = 6 \end{cases}$

3. Chứng minh rằng nếu $|a| > 2$, thì hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x^5 - 2y = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \\ z^2 + x^2 + zx = 28 \end{cases}$$

5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ x + yz + z = 3 \\ z + zx + x = 7 \end{cases}$$

6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2 \end{cases}$$

7. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = m \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình khi $m = 24$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm

8. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 \end{cases}$$

9. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3xy = 2(x+y) \\ 5yz = 6(y+z) \\ 4zx = 3(z+x) \end{cases}$$

10. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Hướng dẫn và đáp số

1. Từ phương trình đầu, ta suy ra $xy \geq \frac{1}{4}$. Từ phương trình thứ hai, ta suy ra

$$xy \leq \frac{1}{4}. \text{ Vậy } xy = \frac{1}{4}. \text{ Từ đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} xy = \frac{1}{4} \\ z^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow z = 0 \\ z^2 - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} xy = \frac{1}{4} \\ z = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

và tìm được các nghiệm là $(x; y; z) = (1; \frac{1}{4}; 0)$

2. Đặt $u = \frac{1}{x-2y}$; $v = x+2y$, điều kiện $x \neq 2y$

$$\rightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u.v=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$$

Tương ứng với các giá trị u, v tìm được, ta có: $\begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=\frac{5}{8} \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\frac{7}{6} \\ y=\frac{5}{12} \end{cases}$

3. Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $|x| \leq 1$ và $|y| \leq 1$. Suy ra

$$|x^5 - 2y| \leq |x^2| + |y^2| - (|y^2| - 2|y| + 1) + 1 = 2 - (|y| - 1)^2 \leq 2.$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện $a > 2$ nên hệ vô nghiệm.

4. Để thỏa mãn hệ phương trình, x, y, z phải phân biệt nhau từng đôi một. Nhân các vế của ba phương trình lần lượt cho $x-y, y-z, z-x$ rồi cộng

lại ta được:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 37(x-y) \\ y^3 - z^3 = 19(y-z) \\ z^3 - x^3 = 28(z-x) \end{cases}$$

Từ hệ trên ta có $x-2y+z=0 \Rightarrow z=2y-x$, thay vào các phương trình

thứ hai, thứ ba của hệ thì được:
$$\begin{cases} 7y^2 + x^2 - 5xy = 19 \\ 4y^2 + x^2 - 2xy = 28 \end{cases}$$

Đặt $y = tx$ ta có
$$\begin{cases} x^2(7t^2 - 5t + 1) = 19 \\ x^2(4t^2 - 2t + 1) = 28 \end{cases}$$

Suy ra $\frac{7t^2 - 5t + 1}{19} = \frac{4t^2 - 2t + 1}{28} \Leftrightarrow 40t^2 - 34t + 3 = 0$, từ đó $t = \frac{3}{4}$ hay $t = \frac{1}{10}$.

* Thay $t = \frac{3}{4}$, ta tính được $x = 4$ hay $x = -4$, các giá trị nghiệm tương ứng là $(x; y; z) = (4; 3; 2)$ và $(x; y; z) = (-4; -3; -2)$.

* Thay $t = \frac{1}{10}$, ta tìm được các nghiệm: $(x; y; z) = \left(\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$ và $(x; y; z) = \left(-\frac{10}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

ABC

5. Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 4 \quad (*) \\ (z+1)(x+1) = 8 \end{cases}$$

Nhân ba phương trình lại ta được $[(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = 64$

1) $(x+1)(y+1)(z+1) = 8$. Kết hợp với (*) suy ra nghiệm:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

2) $(x+1)(y+1)(z+1) = -8$. Kết hợp với (*) suy ra nghiệm
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = -5 \end{cases}$$

6. Đặt $X = \frac{1}{x}$; $Y = \frac{1}{y}$ ($x > 0$; $y > 0$).

Ta có: $\sqrt{X} + \sqrt{2-Y} = \sqrt{Y} + \sqrt{2-X}$. Nhận thấy:

* Nếu $X > Y$ thì $\sqrt{X} + \sqrt{2-Y} > \sqrt{Y} + \sqrt{2-X}$.

* Nếu $X < Y$ thì $\sqrt{X} + \sqrt{2-Y} < \sqrt{Y} + \sqrt{2-X}$.

Vậy phải có $X = Y$.

Với $X = Y$, ta có: $\sqrt{X} + \sqrt{2-X} = 2 \Leftrightarrow X + (2-X) + 2\sqrt{X(2-X)} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{X(2-X)} = 1 \Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow X = Y = 1$$

Từ đó $x = y = 1$.

7. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = m \end{cases} \quad (A)$$

a. Khi $m = 24$ thì (A) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = 24 \end{cases} \quad (B)$

Đặt $u = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$ và $v = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \geq -1$

$$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 8 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u = 8 \\ v = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 4 \\ (y+1)^2 = 9 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (x+1)^2 = 9 \\ (y+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 - 1 \\ y = \pm 3 - 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \pm 3 - 1 \\ y = \pm 2 - 1 \end{cases}$$

Vậy khi $m = 24$ thì (A) có các nghiệm (x, y) là:

$(1; 2), (1; -4), (-3; 2), (-3; -4), (2; 1), (2; -3), (-4; 1), (-4; -3)$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm

$$\text{Đặt } u = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0 \text{ và } v = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \geq 0$$

Ta được (A) trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 13 \\ (u-1)(v-1) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv - (u+v) + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv = m + 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow u, v$ lần lượt là các nghiệm của phương trình $X^2 - 13X + m + 12 = 0$ (C). Do đó: (A) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (C) có 2 nghiệm $X_1, X_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 121 - 4m \geq 0 \\ m + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{121}{4} \\ m \geq -12 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq \frac{121}{4}$$

8. Giải hệ:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 & (1) \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 21 \Leftrightarrow (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = 21$$

Từ đó và (1) $\Rightarrow (x^2 - xy + y^2) = 3$. (3). Từ (1) và (3) $\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$

Từ đó suy ra hệ đã cho có 4 nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

9. Nếu $x = 0$ thì $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x \neq 0$ thì khi đó $y, z \neq 0$, hệ phương trình đã cho tương đương

$$\text{với: } \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{6} \\ \frac{z+x}{zx} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{1}{x} = 1, \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y; z)$ là $(0; 0; 0)$ và $(1; 2; 3)$.

10. Đặt $u = \sqrt{x+1}; v = \sqrt{y}$ ($u \geq 0, v \geq 0$). Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 + v^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ u \cdot v = 4 \end{cases}$$

Suy ra $u = 2; v = 2$, từ đó $x = 3; y = 4$. Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 4)$.

ABC

4. Phương trình qui về phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai

Phương pháp chung

1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu số

Cách giải :

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Qui đồng mẫu số, biến đổi đưa về phương trình bậc hai .

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm .

2. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Cách giải :

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Khử dấu giá trị tuyệt đối, biến đổi đưa về phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai .

Bước 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai trên.

Bước 4 : So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

3. Phương trình bậc cao

Để giải các phương trình bậc cao, thông thường người ta sẽ sử dụng một trong các phương pháp sau

1. Phương pháp đưa về dạng tích.

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ.

2-1. Phương trình trùng phương : $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Cách giải:

Bước 1: Đặt $x^2 = t \geq 0$.

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai .

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4 : So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

2-2. Phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ với $a+d = b+c$.

Cách giải:

Bước 1: Đặt $t = x^2 + (a+d)x + k = x^2 + (b+c)x + k$ với $k = \frac{1}{2}(ad+bc)$

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai .

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4 : So sánh với điều kiện hoặc thử lại và kết luận nghiệm.

2-3. Phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ với $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$; $e \neq 0$.

Cách giải: Bước 1: Đặt $t = x + \frac{d}{bx} \Rightarrow t^2 = \left(x + \frac{d}{bx}\right)^2 = x^2 + 2\frac{d}{b} + \left(\frac{d}{bx}\right)^2$

$$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{d}{bx}\right)^2 = t^2 - 2\frac{d}{b}$$

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện hoặc thử lại và kết luận nghiệm.

2-4. Phương trình bậc 4 dạng: $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

Cách giải: Đặt $y = x + \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow x+a = y + \frac{a-b}{2}; x+b = y - \frac{a-b}{2}$

Đưa phương trình trên về phương trình trùng phương ẩn y đã biết cách giải.

4. Phương trình chứa căn thức

Cách giải:

1. Phương pháp thứ nhất:

Sử dụng phép biến đổi tương đương để đưa về các dạng cơ bản của phương trình đại số. Dùng phép biến đổi tương đương hay phép khử căn thức đối với phương trình chứa căn thức:

$$Ta\ có\ \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$$

2. Phương pháp thứ hai: Biến đổi đưa về phương trình tích.

Để giải một phương trình nói chung, phương trình chứa căn thức nói riêng, người ta thường sử dụng phương pháp đưa về phương trình tích với dạng như sau: $f(x).g(x).h(x) = 0$. Trong đó các phương trình $f(x) = 0$; $g(x) = 0$; $h(x) = 0$, là những phương trình đơn giản, đã biết phương pháp giải như phương trình bậc nhất, phương trình bậc 2... Nghiệm của phương trình cần giải là tập nghiệm của các phương trình:

$$f(x) = 0, g(x) = 0, \dots, h(x) = 0$$

3. Phương pháp thứ ba: Phương pháp đặt ẩn số phụ:

Trong quá trình giải phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, chúng ta cần phải sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ. Người ta dùng ẩn số phụ đó thay thế cho một biểu thức chứa ẩn nào đó nhằm mục đích hạ bậc của phương trình, đưa phương trình đã cho về những phương trình dạng đã biết. Giải phương trình với ẩn phụ, sau đó tìm nghiệm của phương trình.

4. Phương pháp thứ tư: Phương pháp sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức: Để giải phương trình nói chung và phương trình chứa căn thức nói riêng, người ta còn sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức, các tính chất bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối, bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Bunhiacôpski. Trong phương pháp này chủ yếu đưa về 2 dạng sau:

Dạng 1: Đưa phương trình về dạng: $f(x) = g(x)$ mà $f(x) \geq a$

(a là hằng số), $g(x) = a$. Nghiệm của phương trình là nghiệm của hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$$

Dạng 2: Đưa phương trình cần giải về dạng $h(x) = a$ (a là hằng số) mà ta luôn có $h(x) \geq a$. Hoặc $h(x) \leq a$, thì nghiệm của phương trình là giá trị của biến x làm cho dấu đẳng thức xảy ra.

Áp dụng tính chất: $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$. Ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Các ví dụ minh họa downloaadsachmienphi.com

Dạng 1. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ở đây cần lưu ý các phép biến đổi cơ bản:

$$1) |a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = \pm b \end{cases} \quad 2) |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $|x^2 + |2x + 1| - 1| = 2 - x^2$

Đề TS lớp 10 trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004–2005

Giải:

$$a) |x^2 + |2x + 1| - 1| = 2 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x + 1| = 3 - 2x^2 \\ x^2 + |2x + 1| - 1 = 2 - x^2 \\ x^2 + |2x + 1| - 1 = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x + 1| = 3 - 2x^2 \\ x^2 \leq 2 \\ |2x + 1| = -1 \end{cases} \quad (\text{VN})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x^2 \geq 0 \\ x^2 \leq 2 \\ \begin{cases} 2x + 1 = 3 - 2x^2 \\ 2x + 1 = 2x^2 - 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq \frac{3}{2} \\ \begin{cases} 2x^2 + 2x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm và tính các nghiệm ấy theo m .

$$x + |x^2 - 2x + m| = 0.$$

Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2002 – 2003

Giải

$$x + |x^2 - 2x + m| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = -x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 - 2x + m = -x \\ x^2 - 2x + m = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 3x + m = 0 \quad (2) \end{cases}$$

+ Xét $m > 0$: nếu (1), (2) có nghiệm thì các nghiệm đều dương ($S > 0$, $P > 0$) không thỏa mãn $x \leq 0$.

+ Xét $m = 0$: (1) có nghiệm 0 và 1, (2) có nghiệm 0 và 3, nhận $x = 0$.

+ Xét $m < 0$: phương trình đã cho có bốn nghiệm, hai nghiệm dương, hai nghiệm âm (do $P < 0$) thỏa điều kiện $x \leq 0$.

Hai nghiệm âm là: $x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$; $x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2}$.

Tóm lại, $m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = 0; x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}; x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2}$$

Ví dụ 3: Cho phương trình: $|x^2 - 2x + m| = x - 1$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

b. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $X = x - 1$ thì phương trình đã cho trở thành: $|X^2 + m - 1| = X$ (*)

Với $m = 0$ ta có: $\begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 - 1 = \pm X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 \pm X - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow X = \frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2}$

Vì $x = X + 1$ nên suy ra: $\begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có bốn nghiệm phân biệt.

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 + m - 1 = \pm X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0 \\ X^2 \pm X + m - 1 = 0 \end{cases}$ (*) có bốn nghiệm

phân biệt khi và chỉ khi phương trình $X^2 - X + m - 1 = 0$ có hai nghiệm

không âm phân biệt và phương trình $X^2 + X + m - 1 = 0$ có hai nghiệm không âm phân biệt. Nhưng phương trình $X^2 + X + m - 1 = 0$ không thể có hai nghiệm không âm (các bạn tự giải thích). Vậy, phương trình đã cho không thể có bốn nghiệm phân biệt.

Chú ý: Phép giải câu b của ví dụ trên sẽ rất phức tạp nếu các bạn sử dụng phương pháp chia khoảng.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2x - m|x - 1| + m^2 = 0$ (1) có nghiệm.

Giải:

Đặt $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ta có $x^2 - 2x = X^2 - 1$ nên phương trình (1) trở thành: $X^2 - mX + m^2 - 1 = 0$ (2). Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có ít nhất một nghiệm $X \geq 0$.

Trường hợp 1: (2) có nghiệm $X = 0 \Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Trường hợp 2: (2) có nghiệm

$$X_1 < 0 < X_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Trường hợp 3: (2) có nghiệm $X_1, X_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 4 \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Kết hợp các kết quả, ta có: $-1 \leq m \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý: Ở thí dụ trên có thể dùng phương pháp chia khoảng nhưng phép giải sẽ dài hơn.

Ví dụ 5: Giải phương trình $|x^2 + x - 2| + |x - 3| = x^2 + 1$

Giải

Đặt $x^2 + x - 2 = a, 3 - x = b$ khi đó $a + b = x^2 + 1$ và theo tính chất đã biết, ta đưa phương trình đã cho về hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình đã cho có nghiệm: } x \leq -2 \text{ hoặc } 1 \leq x \leq 3.$$

Dạng 2: Phương trình bậc cao

a. Phương pháp đưa về dạng tích

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$.

Giải:

Viết phương trình dưới dạng: $x^4 - (2x - 3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 2x - 3][x^2 - 2x + 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Chú ý: Để sử dụng được phương pháp này, các bạn cần luyện lại phương pháp phân tích đa thức thành tích của các thừa số. Nhiều trường hợp đòi hỏi các bạn phải biết cách thêm, bớt các số hạng cần thiết để đạt được mục đích.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^4 - 4x = 1$.

Giải:

Đưa phương trình về dạng: $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 4x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow [x^2 + 1 + \sqrt{2}(x + 1)][x^2 + 1 - \sqrt{2}(x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + \sqrt{2}(x + 1) = 0 & (1) \\ x^2 + 1 - \sqrt{2}(x + 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có $\Delta = -4\sqrt{2} - 2 < 0$ nên vô nghiệm.

Phương trình (2) có $\Delta = 4\sqrt{2} - 2 > 0$ nên có hai nghiệm: $x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$.

Đó là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0$.

Giải:

$$x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 4x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x)^2 - 4(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x)^2 - 4(x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 6x - 2(x + 1)][x^2 + 6x + 2(x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 2)(x^2 + 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 0 \\ x^2 + 8x + 2 = 0 \end{cases}, \text{ từ đó ta có phương}$$

trình có các nghiệm sau $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$; $x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{14}$

Chú ý: Khi xét số nghiệm (khác nhau) của phương trình tích các bạn cần lưu ý đến những nghiệm giống nhau của các thừa số.

Ví dụ 4: Giải phương trình $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

Giải:

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}} \Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) = \sqrt{9x^2+16} \end{cases} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$(2) \Rightarrow 4(2x+4) + 16(2-x) + 16\sqrt{8-2x^2} = 9x^2 + 16$$

$$\Rightarrow 16\sqrt{8-2x^2} - 8x = 9x^2 - 32$$

$$\Rightarrow 8(2\sqrt{8-2x^2} - x) = 9x^2 - 32 \Rightarrow \frac{8(32-9x^2)}{2\sqrt{8-2x^2} + x} = 9x^2 - 32$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 32 = 0 \\ 2\sqrt{8-2x^2} + x = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ 2\sqrt{8-2x^2} = -8 - x \text{ (VN do } -2 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}. \text{ Thử lại ta được } x = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x = \frac{2}{3}; x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^2 + \frac{2x}{x-1} = 8$

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM 2001 – 2002 Ban A,B

Giải:

Điều kiện: $x \neq 1$. Ta có: $x^2 + \frac{2x}{x-1} = 8 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x = 8x - 8$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) + x(x-2) - 4(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left[\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{17}{4}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x = \frac{\pm\sqrt{17}-1}{2} \end{cases}$$

Phương trình có ba nghiệm: $x = 2; x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}; x = \frac{-\sqrt{17}-1}{2}$

Ví dụ 6: Giải phương trình $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1) = 4$.

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM 2002 – 2003

Giải:

$$(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1) = 4.$$

$$\Leftrightarrow [(4x+1)(3x+2)][(12x-1)(x+1)] = 4$$

$$\Leftrightarrow (12x^2 + 8x + 3x + 2)(12x^2 + 12x - x - 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow (12x^2 + 11x + 2)(12x^2 + 12x - x - 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2 + 11x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(12x^2 + 11x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2 + 11x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(12x^2 + 11x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2 + 11x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + 11x - 2 = 0 & (1) \\ 12x^2 + 11x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $\Delta = 121 + 96 = 217 \Rightarrow x_1 = \frac{-11 + \sqrt{217}}{24}; x_2 = \frac{-11 - \sqrt{217}}{24}$

Giải (2): $\Delta = 121 - 144 = -23 < 0$ phương trình vô nghiệm.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{217}}{24}$.

b. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = 9$

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2006–2007

Giải

$$(x - 1)(x + 5)(x + 1)(x + 3) = 9 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = 9$$

Đặt $t = x^2 + 4x$, phương trình trở thành $(t - 5)(t + 3) = 9$ hay $t^2 - 2t - 24 = 0$. Giải ra: $t = 6, t = -4$.

Với $t = 6 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 6$, giải ra: $x = -2 \pm \sqrt{10}$

Với $t = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x = -4$, giải ra: $x = -2$

Ví dụ 2: Giải phương trình $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$

Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2002 – 2003

Giải

Điều kiện $x \neq 0$. Đặt $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$ ta có $y^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} - \frac{8}{3}$

$$\text{Do đó } 3y^2 + 8 = \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2}.$$

Ta có phương trình: $3y^2 + 8 = 10y \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 8 = 0$

$$\Delta' = 25 - 24 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{5+1}{3} = 2; y_2 = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}.$$

* Với $y = 2$, ta có: $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x - 12 = 0$

$$\Delta' = 9 + 12 = 21, \sqrt{\Delta'} = \sqrt{21} \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{21}; x_2 = 3 - \sqrt{21}$$

* Với $y = \frac{4}{3}$, ta có $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 12 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$$\Delta' = 4 + 12 = 16; \sqrt{\Delta'} = 4 \Rightarrow x_3 = 2 + 4 = 6; x_4 = 2 - 4 = -2$$

Phương trình có bốn nghiệm là: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{21}; x_3 = 6; x_4 = -2$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(4x + 3)^2(2x + 1)(x + 1) = 810$

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2009–2010

Giải

Biến đổi phương trình đã cho thành:

$$[8(2x^2 + 3x) + 9](2x^2 + 3x + 1) = 810 \quad (1).$$

Đặt $t = 2x^2 + 3x$. (1) trở thành:

$$(8t + 9)(t + 1) = 810 \Leftrightarrow 8t^2 + 17t - 801 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = -\frac{89}{8} \end{cases}$$

+ Với $t = 9$ ta có phương trình: $2x^2 + 3x - 9 = 0$ (*). (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -3 \end{cases}$

+ Với $t = -\frac{89}{8}$ ta có phương trình: $2x^2 + 3x + \frac{89}{8} = 0$ (**), vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{3}{2}; x = -3$

Ví dụ 4: Cho phương trình: $x^4 - (3m + 14)x^2 + (4m + 12)(2 - m) = 0$ (có ẩn số là x)

a. Định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

b. Định m sao cho tích số của 4 nghiệm trên đạt giá trị lớn nhất.

Đề TS lớp 10 trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004–2005

Giải:

$$x^4 - (3m + 14)x^2 + (4m + 12)(2 - m) = 0 \quad (*)$$

a. Đặt $t = x^2$. Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow t^2 - (3m + 14)t + (4m + 12)(2 - m) = 0 \quad (**) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4m + 12 \\ t = 2 - m \end{cases}$$

$$(*) \text{ có 4 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 12 > 0 \\ 2 - m > 0 \\ 4m + 12 \neq 2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

b. Ta có 4 nghiệm của (*) là $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$ với t_1, t_2 là nghiệm của (**)

$$x_1x_2x_3x_4 = t_1t_2 = (4m + 12)(2 - m) = -4m^2 - 4m + 24 = -(2m + 1)^2 + 25 \leq 25 \quad \forall m.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của $x_1x_2x_3x_4$ là 25.

Khi $m = -\frac{1}{2}$ thỏa điều kiện ở câu a.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\frac{4x}{x^2 - 8x + 7} + \frac{5x}{x^2 - 10x + 7} = -1$.

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM 2001 – 2002 Ban A,B

Giải:

* Xét $x = 0$: $x = 0$ không là nghiệm của phương trình vì $0 \neq -1$

* Xét $x \neq 0$, phương trình trở thành: $\frac{4}{x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{5}{x - 10 + \frac{7}{x}} = -1$

Đặt $y = x - 10 + \frac{7}{x}$, ta có phương trình:

$$\frac{4}{y + 2} + \frac{5}{y} = -1 \Leftrightarrow 4y + 5y + 10 = -y^2 - 2y$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 11y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ hay } y = -10 \text{ (vì } a - b + c = 0)$$

* $y = -1$, ta có: $x - 10 + \frac{7}{x} = -1 \Leftrightarrow x - 9 + \frac{7}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 7 = 0$

$$\Delta = 81 - 28 = 53 \Rightarrow x_1 = \frac{9 + \sqrt{53}}{2}, x_2 = \frac{9 - \sqrt{53}}{2}$$

* $y = -10$, ta có: $x - 10 + \frac{7}{x} = -10 \Leftrightarrow x + \frac{7}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $\frac{9 + \sqrt{53}}{2}, \frac{9 - \sqrt{53}}{2}$

Ví dụ 6: Cho phương trình: $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$. Tìm giá trị m để phương trình có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2)$

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2008–2009
Giải:

$$x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = x^2$, ta có: $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$ (2) ($t \geq 0$); $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0$ với mọi m . Vậy đề (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) luôn có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 .

Tương đương với: $\Delta' > 0$, $P = 2m - 1 > 0$, $S = 2m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$, $m \neq 1$ (3)

Với điều kiện (3), phương trình (2) có hai nghiệm dương $0 < t_1 < t_2$ và phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}.$$

Theo giả thiết:

$$x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2) \Leftrightarrow 2\sqrt{t_2} = 6\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 \quad (4)$$

Theo định lý Viet ta có: $t_1 + t_2 = 2m$ và $t_1 t_2 = 2m - 1$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $10t_1 = 2m$ và $9t_1^2 = 2m - 1$

$$\Rightarrow 9m^2 - 50m + 25 = 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{5}{9}, m_2 = 5.$$

Cả hai giá trị đều thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy để phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán thì điều kiện cần và đủ là: $m = \frac{5}{9}$ và $m = 5$.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $(x^2 - 3x)^2 - 6(x^2 - 3x) - 7 = 0$

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP HCM 2007-2008

Giải:

Đặt $t = x^2 - 3x$, ta có phương trình: $t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 7 \end{cases}$

Với $t = -1$, $x^2 - 3x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Với $t = 7 \Rightarrow x^2 - 3x = 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}.$

Ví dụ 8: Cho phương trình: $x^4 + 2mx^2 + 4 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32$$

Đề TS lớp 10 ĐHQG Hà nội

Giải:

$$x^4 + 2mx^2 + 4 = 0 \quad (1).$$

Đặt $x^2 = t$ ta được phương trình: $t^2 + 2mt + 4 = 0 \quad (2).$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2

$$\text{nghiệm dương } t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ t_1 + t_2 = -2m > 0 \\ t_1 t_2 = 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Khi đó (1) có 4 nghiệm dương là $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$

$$\text{Và } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(t_1^2 + t_2^2) = 2(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = 8m^2 - 16$$

$$\text{Do đó: } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32 \Leftrightarrow 8m^2 - 16 = 32 \Leftrightarrow m^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow m = -\sqrt{6} \quad (\text{do } m < -2). \text{ Vậy: } m = -\sqrt{6}.$$

Ví dụ 9: Giải phương trình: $x^4 + (x+1)^4 = 184$.

Giải:

Đặt: $t = x + 1$, phương trình đã cho trở thành:

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 184 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 91 = 0.$$

Đặt $z = t^2$ (với $z \geq 0$).

Với điều kiện trên phương trình trở thành: $z^2 + 6z - 91 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 \\ z = -13 \end{cases}$

Với $z = 7 \Rightarrow t = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x = -1 \pm\sqrt{7}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = -1 \pm\sqrt{7}$

Ví dụ 10: Giải phương trình: $\frac{x^3}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$

TS lớp 10 chuyên toán Lê Hồng Phong TPHCM 2002 – 2003

Giải:

Điều kiện $x \neq 0$. Đặt $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$

Ta có: $y^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} - \frac{8}{3}$. Do đó $3y^2 + 8 = \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2}$

Ta có phương trình: $3y^2 + 8 = 10y \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 8 = 0$

$\Delta' = 25 - 24 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{5+1}{3} = 2; y_2 = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}$

* Với $y = 2$, ta có $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x - 12 = 0$

$\Delta' = 9 + 12 = 21; \sqrt{\Delta'} = \sqrt{21} \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{21}; x_2 = 3 - \sqrt{21}$

* Với $y = \frac{4}{3}$, ta có $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 12 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Delta' = 4 + 12 = 16; \sqrt{\Delta'} = 4 \Rightarrow x_3 = 2 + 4 = 6; x_4 = 2 - 4 = -2$

Phương trình có bốn nghiệm là:

$x_1 = 3 + \sqrt{21}; x_2 = 3 - \sqrt{21}; x_3 = 2 + 4 = 6; x_4 = 2 - 4 = -2$

Ví dụ 11: Cho phương trình $\frac{mx^2 - 1}{x} + \frac{5x}{mx^2 - x - 1} = \frac{119}{18}$

a. Giải phương trình khi $m = 3$.

b. Với giá trị nào của m để phương trình không có nghiệm?

Đề TS lớp 10A Chu Văn An – Hà Nội 1991 – 1992

Giải:

a. $m = 3$, phương trình trở thành: $\frac{3x^2 - 1}{x} + \frac{5x}{3x^2 - x - 1} = \frac{119}{18}$ (1)

Điều kiện để phương trình có nghĩa: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 3x^2 - x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \end{cases}$

ABC

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{3x^2 - 1}{x} - 1 \right) + \frac{5x}{3x^2 - x - 1} = \frac{119}{18} - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - x - 1}{x} + \frac{5x}{3x^2 - x - 1} = \frac{101}{18}.$$

Đặt $\begin{cases} \frac{3x^2 - x - 1}{x} = X \\ \frac{5x}{3x^2 - x - 1} = Y \end{cases}$, ta có $\begin{cases} X \cdot Y = 5 \\ X + Y = \frac{101}{18} \end{cases}$. Do đó X, Y là nghiệm của

phương trình $Z^2 - \frac{101}{18}Z + 5 = 0$ suy ra $z_1 = \frac{9}{2}; z_2 = \frac{10}{9}$

* $\frac{3x^2 - x - 1}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 3x^2 - 5,5x - 1 = 0$. Ta có $x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{6}$

* $\frac{3x^2 - x - 1}{x} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow 27x^2 - 19x - 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{1333}}{54}$.

Vậy phương trình có nghiệm $S = \left\{ 2; -\frac{1}{6}; \frac{19 + \sqrt{1333}}{54}; \frac{19 - \sqrt{1333}}{54} \right\}$

b. Điều kiện: $x \neq 0, mx^2 - x - 1 \neq 0$

Từ câu a. ta có: $\frac{mx^2 - x - 1}{x}$ và $\frac{5x}{mx^2 - x - 1}$ là nghiệm của phương trình:

$Z^2 - \frac{101}{18}Z + 5 = 0$. Ta có $Z_1 = \frac{9}{2}, Z_2 = \frac{10}{9}$

* $\frac{mx^2 - x - 1}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow mx^2 - 5,5x - 1 = 0$.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow \Delta = 30,25 + 4m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{30,25}{4}$

* $\frac{mx^2 - x - 1}{x} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow 9mx^2 - 19x - 9 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 361 + 324m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{361}{324} = -\frac{121}{16}$.

Dạng 3. Phương trình chứa căn thức

Ví dụ 1: Giải các phương trình: $\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 5$

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM 2002 – 2003

Giải:

$$\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} + 4 + \sqrt{x-1} - 6\sqrt{x-1} + 9 = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+2 + |\sqrt{x-1}-3| = 5$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-3| = 3 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 3 \leq 0 \text{ (vì } |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 3^2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 10.$$

Nghiệm của phương trình đã cho là $1 \leq x \leq 10$

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP HCM 2007–2008

Giải:

$$\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1 \text{ (Điều kiện: } 0 \leq x \leq 1).$$

Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn phương trình nên ta chia hai vế cho $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{\frac{x+x^2}{x}} + \sqrt{\frac{x-x^2}{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Xét vế phải: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$ và dấu “=” xảy ra khi $x=1$.

$$\text{Ta có: } \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{2} \leq (\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 2$$

Suy ra vế trái: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2$ và dấu “=” xảy ra khi $x=0$.

Vậy hai vế không bằng nhau. Phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{8+\sqrt{x-3}} + \sqrt{5-\sqrt{x-3}} = 5$

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP HCM 2007–2008

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Giải:

$$\text{Đặt } u = \sqrt{8+\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow u \geq 0, u^2 = 8+\sqrt{x-3}$$

$$\text{Đặt } v = \sqrt{5-\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow v \geq 0, v^2 = 5-\sqrt{x-3}$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \\ u=3 \\ v=2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình là $x=4$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{3x-9}} = 2\sqrt{x-3}$

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2006–2007

Giải:

Điều kiện: $x \geq 3$

$$\sqrt{x-2\sqrt{3x-9}} = 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-3}-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-3}-\sqrt{3}| = 2\sqrt{x-3} \text{ (*)}$$

$$\text{Nếu } \sqrt{x-3}-\sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow x-3 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 6$$

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{x-3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = -\sqrt{3} < 0$: phương trình vô nghiệm.

Nếu $\sqrt{x-3} - \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} < \sqrt{3} \Leftrightarrow x-3 < 3 \Leftrightarrow x < 6$

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{3} - \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$

Ta có $3 < 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} < 4 < 6$. Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{10}{3}$.

Ví dụ 5: $\sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5} = 2\sqrt{2}$

TS lớp 10 chuyên toán Lê Hồng Phong TPHCM 2002 – 2003

Giải:

Điều kiện $x \geq \frac{5}{2}$. Ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5} = 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2}(\sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x-5}) = 2\sqrt{2}\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x+4} + 6\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x-4} - 2\sqrt{2x-5} = 2.2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x-5} + 6\sqrt{2x-5} + 9 + \sqrt{2x-5} - 2\sqrt{2x-5} + 1 = 4 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(\sqrt{2x-5} + 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5} - 1)^2} = 4 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x-5} + 3 + |\sqrt{2x-5} - 1| = 4 \Leftrightarrow |\sqrt{2x-5} - 1| = 1 - \sqrt{2x-5} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x-5} - 1 \leq 0 \text{ (vì } |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x-5} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x-5 \leq 1 \Leftrightarrow 5 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Nghiệm của phương trình là: $\frac{5}{2} \leq x \leq 3$

Ví dụ 6: Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$

Tuyển sinh lớp 10 trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội 1998

Giải:

Điều kiện: $x^2 \leq 2$. Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được phương trình tương đương.

$$2 - x^2 + x^2 + 8 + 2\sqrt{(2-x^2)(x^2+8)} = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^4 - 6x^2 + 16} = 3 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -7 \end{cases}$$

Loại nghiệm $x^2 = -7$. Nghiệm của phương trình là $x = \pm 1$.

Ví dụ 7: Giải bất phương trình: $\sqrt{4x-3} + 4\sqrt{x-1} > \sqrt{9x+16} - 30\sqrt{x-1} + 2$

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2004–2005

Giải:

$$\sqrt{4x-3} + 4\sqrt{x-1} > \sqrt{9x+16} - 30\sqrt{x-1} + 2 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x-1} \geq 0$ (1) trở thành: $|2t+1| > |3t-5| + 2 \quad (2)$

$$0 \leq t \leq \frac{5}{3} \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{5}{3} \\ 2t+1 > (5-3t)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{5}{3} \\ t > \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{5} < t \leq \frac{5}{3}$$

$$t > \frac{5}{3} : (2) \Leftrightarrow \begin{cases} t > \frac{5}{3} \\ 2t+1 > (3t-5)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \frac{5}{3} \\ t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < t < 4$$

Kết hợp các trường hợp ta được: $\frac{6}{5} < t < 4$. Do đó: $\frac{61}{25} < x < 17$

Ví dụ 8: Giải phương trình $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

Đề TS lớp 10 trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004–2005

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}} \Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) = \sqrt{9x^2+16} \end{cases} \quad (-2 \leq x \leq 2) \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow 4(2x+4) + 16(2-x) + 16\sqrt{8-2x^2} = 9x^2 + 16$$

$$\Rightarrow 16\sqrt{8-2x^2} - 8x = 9x^2 - 32 \Rightarrow 8(2\sqrt{8-2x^2} - x) = 9x^2 - 32$$

$$\Rightarrow \frac{8(32-9x^2)}{2\sqrt{8-2x^2} + x} = 9x^2 - 32 \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 32 = 0 \\ 2\sqrt{8-2x^2} + x = -8 \end{cases}$$

$$(VN \text{ do } -2 \leq x \leq 2) \Rightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}. \text{ Thử lại ta được } x = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x = \frac{2}{3}; x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng có duy nhất bộ số thực $(x; y; z)$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{x-2008} + \sqrt{y-2009} + \sqrt{z-2010} + 3012 = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

TS lớp 10 chuyên toán Quốc học Huế 2009–2010

ABC

Giải

$$\sqrt{x-2008} + \sqrt{y-2009} + \sqrt{z-2010} + 3012 = \frac{1}{2}(x+y+z) \quad (*)$$

điều kiện: $x \geq 2008, y \geq 2009, z \geq 2010$. (*) tương đương:

$$(x-2008) - 2\sqrt{x-2008} + 1 + (y-2009) - 2\sqrt{y-2009} + 1 + (z-2010) - 2\sqrt{z-2010} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2008} - 1)^2 + (\sqrt{y-2009} - 1)^2 + (\sqrt{z-2010} - 1)^2 = 0 \quad (***)$$

$$(**) \text{ chỉ xảy ra trong trường hợp: } \begin{cases} x-2008=1 \\ y-2009=1 \\ z-2010=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2009 \\ y=2010 \\ z=2011 \end{cases}$$

Ví dụ 10: Giải phương trình $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$.

Đề TS lớp 10 Quốc học Huế 1999 – 2000**Giải:**

$$\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0; 2x-7 > 0 \\ \left(\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}}\right)^2 = x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0; 2x-7 \geq 0 \\ \frac{(x-2)^2}{2x-7} = x-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ x^2 - 11x + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ x_1 = 8 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8$$

Vậy phương trình trên có một nghiệm là $x = 8$.

Ví dụ 11: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$

Tuyển sinh lớp 10 TP Hà Nội 2009 – 2010**Giải**

$$\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}[2x(x^2 + 1) + x^2 + 1]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)} + \left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}(x^2 + 1)(2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{(2x-1)(2x+1)} + 2|2x+1| = \frac{1}{2}(x^2 + 1)(2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} = (x^2+1)(2x+1) \text{ (vì } (2x+1) \geq 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=0 \text{ hay } \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ hay } x=0$$

Ví dụ 12: Giải phương trình: $\frac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \sqrt{3x+1} - 1$ (1)

Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2004–2005

Giải:

Điều kiện: $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 = 3x+1 \end{cases} \Rightarrow t^2 + 9 = 3x + 10$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2+9}} = t-1 \Leftrightarrow (t-1)(t+1-\sqrt{t^2+9}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t+1-\sqrt{t^2+9}=0 \end{cases} \quad (2)$

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 \Leftrightarrow 3x+1=1 \Leftrightarrow x=0$

(3) $\Leftrightarrow \sqrt{t^2+9} = t+1 \Leftrightarrow t^2+9 = t^2+2t+1 \Leftrightarrow t=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 4 \Leftrightarrow 3x+1=16 \Leftrightarrow x=5$.

Vậy (1) có nghiệm: $x=0$; $x=5$.

Ví dụ 13: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{2-x}{x+4}} - 2\sqrt{\frac{x+4}{2-x}} + 1 = 0$.

TS lớp 10 chuyên toán Quốc học Huế 2009–2010

Giải

Điều kiện: $-4 < x < 2$. Đặt $t = \sqrt{\frac{2-x}{x+4}}$ ($t > 0$), ta có

$t - \frac{2}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0$

Chỉ chọn $t = 1$. Ta có: $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} = 1 \Leftrightarrow x = -1$. Nghiệm của phương trình là $x = -1$.

Ví dụ 14: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+5x+1} + 3 = 2\sqrt{x^2-x+1} + 9x$

Thi học sinh giỏi lớp 9 Bàng A Nghệ An –2009

Giải

Điều kiện: $x \leq -1$ hoặc $x \geq -\frac{1}{4}$.

ABC

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 5x + 1} = a, (a \geq 0) \\ 2\sqrt{x^2 - x + 1} = b, (b \geq 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 5x + 1 = a^2 \\ 4x^2 - 4x + 4 = b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = a - b \Rightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0.$$

$$\text{Do } b = \sqrt{4x^2 - 4x + 4} \Rightarrow b \geq \sqrt{3} \Rightarrow a + b - 1 > 0 \Rightarrow a - b = 0.$$

$$\text{Từ } a - b = 0 \Rightarrow 9x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Với $x = \frac{1}{3}$ thỏa mãn bài ra, nên nghiệm phương trình là $x = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 15: Giải phương trình $\sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}} + \sqrt{x - 2} + \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}} - \sqrt{x - 2} = \sqrt{2}$

Thi học sinh giỏi lớp 9 TP Vinh, Nghệ An 2009

Giải

Điều kiện: $x \geq 2$. $\sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}} + \sqrt{x - 2} + \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}} - \sqrt{x - 2} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x - 2} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x - 2} + 1)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 2} + 1 + |\sqrt{x - 2} - 1| = 2 \Leftrightarrow |1 - \sqrt{x - 2}| = 1 - \sqrt{x - 2} \quad (\text{áp dụng tính}$$

$$\text{chất } |A| = A \Leftrightarrow A \geq 0) \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x - 2 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 3$$

Phương trình có nghiệm: $2 \leq x \leq 3$.

Ví dụ 16: Tìm tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình sau:

$$5x - 2\sqrt{x}(2 + y) + y^2 + 1 = 0$$

Đề TS lớp 10 THPT Hà Nội 1994 – 1995

Giải

Điều kiện $x \geq 0$

$$5x - 2\sqrt{x}(2 + y) + y^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x - 4\sqrt{x} + 1) + (y^2 - 2y\sqrt{x} + x) = 0 \Leftrightarrow (2\sqrt{x} - 1)^2 + (y - \sqrt{x})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\sqrt{x} - 1) \geq 0 \\ (y - \sqrt{x})^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1 = 0 \\ y - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 1 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy cặp số $(x; y)$ phải tìm là $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 17: Giải phương trình: $\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} + \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{x}}} = \sqrt{2}$.

Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 – Hải Phòng 2004 – 2005

Giải

Với điều kiện $0 < x < 4$, quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu ta đưa phương trình về dạng: $\sqrt{(2 + \sqrt{x})^3} + \sqrt{(2 - \sqrt{x})^3} = 3\sqrt{2x}$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{x})^3 + (2 - \sqrt{x})^3 + 2\sqrt{(4 - x)^3} = 18x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4 - x)^3} = 3x - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 8 \geq 0 \\ (4 - x)^3 = (3x - 8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ x^3 - 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Ví dụ 18: Giải phương trình sau: $\sqrt{7 - x} + \sqrt{x + 1} = x^2 - 6x + 13$.

Thi học sinh giỏi HSG lớp 9, quận Cầu Giấy Hà Nội 2005 – 2006

Giải

$$\sqrt{7 - x} + \sqrt{x + 1} = x^2 - 6x + 13 \quad (1).$$

Tập xác định: $-1 \leq x \leq 7$.

Ta có: $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ với mọi a, b suy ra

$$(\sqrt{7 - x} + \sqrt{x + 1})^2 \leq 2(7 - x + x + 1) = 16 \Rightarrow \sqrt{7 - x} + \sqrt{x + 1} \leq 4$$

Mặt khác $x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4 \geq 4$. Vậy phương trình (1) tương đương với $\sqrt{7 - x} + \sqrt{x + 1} = x^2 - 6x + 13 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

Vì $3 \in [-1; 7]$ nên $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Dạng 4. Phương trình nghiệm nguyên

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên x, y của phương trình sau: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

Download Sách Học Tập Online

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2007–2008

Giải:

Tìm nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \quad (1)$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5) \quad (2) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5} \quad (\text{vì } x = 5$$

không là nghiệm của (2)) $\Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{3}{x - 5}$

Vì x, y nguyên $x - 5 \in \{-1; 1; 3; -3\}$ hay $x \in \{4; 6; 8; 2\}$

Khi $x = 2$ thì $y = 0$ (thỏa mãn); Khi $x = 4$ thì $y = 0$ (thỏa mãn)

Khi $x = 6$ thì $y = 8$ (thỏa mãn); Khi $x = 8$ thì $y = 8$ (thỏa mãn)

Vậy các nghiệm nguyên $(x; y)$ của (1) là: $(2; 0), (4; 0), (6; 8), (8; 8)$.

Ví dụ 2: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Đề TS lớp 10 chuyên TP HCM 2006–2007

Giải:

Cách 1: Vai trò của x và y như nhau nên ta có thể giả sử: $x \geq y$.

ABC

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$; $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \Rightarrow y > 2$. Do đó $y = 3$ hay $y = 4$.

Với $y = 3$ thì $x = 6$. Do tính đối xứng ta cũng có: $x = 3$ thì $y = 6$.

Với $y = 4$ thì $x = 4$.

Cách 2: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x+y) = xy \Leftrightarrow 2x - xy + 2y = 0$

$$\Leftrightarrow x(2-y) - 2(2-y) = -4$$

$$\Leftrightarrow (2-x)(2-y) = 4 = 1.4 = 4.1 = (-1)(-4) = (-4)(-1) = 2.2 = (-2)(-2).$$

Vì $x, y > 0$ nên $2-x < 2$, $2-y < 2$.

Do đó ta có các trường hợp:

* $2-x=1$ và $2-y=4 \Leftrightarrow x=1$ và $y=-2$ (loại).

* $2-x=-1$ và $2-y=-4 \Leftrightarrow x=3$ và $y=6$ (nhận).

* $2-x=-4$ và $2-y=-1 \Leftrightarrow x=6$ và $y=3$ (nhận).

* $2-x=-2$ và $2-y=-2 \Leftrightarrow x=4$ và $y=4$ (nhận).

Ví dụ 3: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Đề TS lớp 10 chuyên ĐHKHTN Hà Nội 2003 – 2004

Cách 1: Ta tìm nghiệm thỏa mãn $|x| \leq |y|$

Khi đó $xy \leq |xy| \leq y^2$ và $x^2y^2 = x^2xy + y^2 \leq 3y^2$ (1)

Dễ thấy, nếu phương trình có nghiệm với $x = 0$ thì $y = 0$ và ngược lại

Với $y \neq 0$ thì từ (1) $\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$. Với $x = 1$ thay vào phương trình đã cho ta được $y = -1$, còn. Với $x = -1$ ta được $y = 1$.

Do vai trò của x, y trong phương trình đã cho đối xứng nên trường hợp $|x| \geq |y|$ ta cũng chỉ thu được ba nghiệm trên. Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm nguyên là $x = 0, y = 0$; $x = 1, y = -1$; $x = -1, y = 1$

Cách 2: Ta chứng minh phương trình không có nghiệm với: $x = 2$

Thật vậy, với $|x| \geq 2$ và $|y| \geq 2$ ta có:
$$\begin{cases} x^2y^2 \geq 4x^2 \\ x^2y^2 \geq 4y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2y^2 \geq 2(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 + 2|xy| > 2x^2 + y^2 + xy$$

Trường hợp $x = \pm 2$ hoặc $y = \pm 2$ phương trình không có nghiệm nguyên.

Thử với các trường hợp $x = 0, x = 1$ và $x = -1$ ta được ba nghiệm: $x = 0, y = 0$; $x = 1, y = -1$; $x = -1, y = 1$

Ví dụ 4: Tìm tất cả các số nguyên x, y sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{147}$

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2004–2005

Giải:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{147} \quad (1); (1) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7\sqrt{3}.$$

Chứng minh: x, y biểu diễn dưới dạng $x = k\sqrt{3}, y = m\sqrt{3}$.

Ta có:

$$\sqrt{x} = 7\sqrt{3} - \sqrt{y} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 147 \\ x = 147 + y - 14\sqrt{3y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 147 \\ \sqrt{3y} = \frac{y + 147 - x}{14} \end{cases} \quad (2)$$

Vế phải của (2) là số hữu tỷ, nên $\sqrt{3y}$ là số hữu tỷ nên $3y = a^2, a \in \mathbb{N}$

Do đó: $a = 3m$ hay $y = 3m^2$ nên $\sqrt{y} = m\sqrt{3}, m \in \mathbb{N}$.

Tương tự: $\sqrt{y} = n\sqrt{3}, n \in \mathbb{N}$. Thay vào (1) ta được $m + n = 7$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Phương trình này có 8 nghiệm, nên (1) có 8 nghiệm:

$(x = 0; y = 147), (x = 3; y = 108), (x = 12; y = 75), (x = 27; y = 48),$
 $(x = 48; y = 27), (x = 75; y = 12), (x = 108; y = 3), (x = 147; y = 0)$.

Ví dụ 5: Tìm x, y thỏa mãn $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 0$

Đề TS lớp 10 trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004–2005

Giải:

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 4(x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x + y = 0, x + 1 = 0, y - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, y = 1$$

Ví dụ 6: Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 3\sqrt{xy}$. Tính $\frac{x}{y}$.

downloaadsachmienphi.com

Đề TS lớp 10 chuyên TP HCM 2006–2007

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Giải:

Ta có: $x + y = 3\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + 1 = 3\sqrt{\frac{x}{y}} \quad (1)$. Đặt $u = \frac{x}{y}$ ta có $u > 0$ và

$$(1) \Leftrightarrow u^2 - 3u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2$$

Ví dụ 7: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Giải:

Cách 1: Ta tìm nghiệm thỏa mãn $|x| \leq |y|$

Khi đó $xy \leq |xy| \leq y^2$ và $x^2y^2 = x^2xy + y^2 \leq 3y^2 \quad (1)$

Dễ thấy, nếu phương trình có nghiệm với $x = 0$ thì $y = 0$ và ngược lại

Với $y \neq 0$ thì từ (1) $\Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$. Với $x = 1$ thay vào phương trình đã cho ta được $y = -1$. Với $x = -1$ ta được

ABC

Do vai trò của x, y trong phương trình đã cho đối xứng nên trường hợp $|x| \geq |y|$ ta cũng chỉ thu được ba nghiệm trên. Vậy phương trình có ba nghiệm nguyên là: $(x = 0; y = 0)$, $(x = 1; y = -1)$, $(x = -1; y = 1)$

Cách 2: Ta chứng minh phương trình không có nghiệm với $|x| \geq 2, |y| \geq 2$. Thật vậy, với $|x| \geq 2$ và $|y| \geq 2$ ta có:

$$\begin{cases} x^2 y^2 \geq 4x^2 \\ x^2 y^2 \geq 4y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 y^2 \geq 2(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 \\ \geq x^2 + y^2 + 2|xy| > x^2 + y^2 + xy$$

Trường hợp $x = \pm 2$ hoặc $y = \pm 2$ phương trình không có nghiệm nguyên. Thử với các trường hợp $x = 0, x = 1$ và $x = -1$ ta được ba nghiệm: $(x = 0; y = 0)$, $(x = 1; y = -1)$, $(x = -1; y = 1)$

Ví dụ 8: Tìm các số nguyên a, b, c sao cho: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$. (I)
Thi học sinh giỏi lớp 9 TP Vinh Nghệ An 2008

Giải:

Vì hai số nguyên bất kì sai kém nhau ít nhất một đơn vị, thành thử

$$(I) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 4 \leq ab + 3b + 2c$$

$$\text{Hay } \left(a^2 - ab + \frac{b^2}{4} \right) + \left(\frac{3b^2}{4} - 3b + 3 \right) + (c^2 - 2c + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{b}{2} - 1 \right)^2 + (c - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 9: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Thi học sinh giỏi lớp 9 TP Vinh Nghệ An 2008

Giải:

Vì x, y, z nguyên dương và vai trò như nhau nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$.

Bình phương hai vế của phương trình đã cho:

$$x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz} \Rightarrow (x - y - z)^2 + 4\sqrt{3}(x - y - z) = 4yz - 12 (*)$$

Vì $\sqrt{3}$ là số vô tỉ nên từ (*) suy ra $x - y - z = 0 \Leftrightarrow 4yz - 12 = 0$ hay $yz = 3$ hay $y = 3, z = 1$ và $x = 4$. Phương trình có nghiệm là: $(4; 3; 1)$ và $(4; 1; 3)$.

Ví dụ 10: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 - 13(x - y) = 0$

Đề TS lớp 10 Toán đại học Vinh 2009–2010 (vòng 2)

Giải:

Tìm các số nguyên dương thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 - 13(x - y) = 0$

Phương trình $\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-y)^2 - 2.13(x-y) + 13^2 = 169$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (13-x+y)^2 = 169$. Vì x, y là các số nguyên dương nên dễ thấy: $0 < x+y < 13, 0 < 13-x+y < 13, 169 = 12^2 + 5^2$

Bằng cách giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=12 \\ 13-x+y=5 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (10, 2)$

Và $\begin{cases} x+y=5 \\ 13-x+y=12 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3, 2)$

Vậy $(x=3, y=2); (x=10, y=2)$ là 2 nghiệm nguyên dương của phương trình.

Ví dụ 11: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy - 2x - 3y + 1 = 0$. (*)

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ 2003 – 2004

Giải:

Vì $x=3$ không là nghiệm của phương trình đã cho nên

$$(*) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x-3} = 2 + \frac{5}{x-3}.$$

Vì y là số nguyên nên $5:(x-3)$, suy ra $x-3$ nhận các giá trị $\pm 1; \pm 5$. Từ đó ta xác định được hai nghiệm nguyên dương $(x; y)$ của phương trình đã cho là $(4; 7)$ và $(8; 3)$.

Bài tập vận dụng

- Giải phương trình: $\sqrt{2x} + \sqrt{x+1} + 1 + \sqrt{2x-\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + 1$
- Giải phương trình: $(\sqrt[3]{3x+1})^2 + (\sqrt[3]{3x-1})^2 + \sqrt[3]{9x^2-1} = 1$
- Giải phương trình: $-x^2 + 2 = \sqrt{2-x}$
- Giải phương trình: $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} = 1$
- Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+7} = 7$
- Giải phương trình: $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3$
- Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.
- Giải phương trình: $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$
- Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-8x+12} = 3 - \sqrt[4]{3x^2-12x+13}$
- Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-6x+11} + \sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt[4]{x^2-4x+5} = 3 + \sqrt{2} \quad (1)$$
- Giải phương trình: $x^2 - 3x + \frac{7}{2} = \sqrt{(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)}$.
- Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = m$$

13. Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$2x^2 - |x| + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

14. Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0$

15. Giải phương trình: $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$.

16. Giải phương trình: $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4$.

17. Giải phương trình: $(x^2 - 1)(x+3)(x+5) = 9$.

18. Giải phương trình: $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\sqrt{x}} = \frac{2+\sqrt{x}}{2x}$.

19. Giải phương trình: $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$.

20. Giải phương trình: $x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30$.

21. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+10x+21} = 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+7} - 6$ (1)

22. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{x^2-3x+2} = -\sqrt{x^2-x}$ (1)

23. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$ (2)

24. Giải phương trình: $3(2+\sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$

25. Giải phương trình: $\sqrt{2x-2} + 2\sqrt{(2x-3)} + \sqrt{2x+13} + 8\sqrt{2x-3} = 7$

26. Giải phương trình: $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2}$.

27. Giải phương trình: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = 3$

28. Giải phương trình: $x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$ (1)

29. Giải phương trình: $\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2} = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$

30. Giải phương trình: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ (1).

Hướng dẫn và đáp số

1. Đặt $\sqrt{2x+\sqrt{x+1}}+1 = u$; $\sqrt{2x+\sqrt{x+1}} = v$

$$\begin{aligned} \text{Xét } u^2 - v^2 &= (\sqrt{2x+\sqrt{x+1}}+1)^2 - (\sqrt{2x+\sqrt{x+1}})^2 \\ &= 2x+\sqrt{x+1}+1-2x+\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x+1}+1. \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta có hệ phương trình: } \begin{cases} u+v=2\sqrt{x+1}+1 \\ u^2-v^2=2\sqrt{x+1}+1; u \geq 0; v \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình trên ta có: } \begin{cases} u=\sqrt{x+1}+1 \\ v=\sqrt{x+1} \end{cases}.$$

Suy ra : $\sqrt{2x} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = 3$.

Nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

2. Đặt $\sqrt[3]{3x+1} = u$; $\sqrt[3]{3x-1} = v$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = 1 \\ u^3 - v^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u^2 + v^2 + uv) = 2 \\ u^2 + v^2 + uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ u^2 + v^2 + uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=-1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta có: $\begin{cases} \sqrt[3]{3x+1} = 1 \\ \sqrt[3]{3x-1} = -1 \end{cases}$. Suy ra $x = 0$.

3. Điều kiện: $x \leq 2$. Đặt $\sqrt{2-x} = y, y \geq 0 \Rightarrow x = 2 - y^2$ và ta có hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} -x^2 + 2 = y \\ -y^2 + 2 = x \end{cases} \Rightarrow (y-x)(y+x-1) = 0$$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là $x = 1, x = -2$.

4. Điều kiện: $x \leq \frac{1}{2}$. Đặt $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x} = u; \sqrt[3]{\frac{1}{2}-x} = v, v \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+v=1; v \geq 0 \\ u^3+v^3=1 \end{cases} \Rightarrow (1-v)^3 = 1-v^3$$

Hay $v(v-1)(v-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 1 \\ v_3 = 3 \end{cases}$

Giải ra ta có nghiệm của phương trình là: $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = -\frac{17}{2}$

5. Điều kiện : $x \geq -7$. Đặt $t = \sqrt{x+7} \geq 0 \Leftrightarrow t^2 = x+7 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + t = 7 \\ t^2 = x+7 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 = -(x+t) \Leftrightarrow (x+t)(x-t+1) = 0$$

$$x+t=0 \Rightarrow x^2 - x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \text{ (loại vì } t \geq 0) \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$x-t+1=0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -3 \text{ (loại vì } t \geq 0) \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1-\sqrt{29}}{2}, x = 2$.

6. Đặt $u = \sqrt[3]{2-x}; v = \sqrt[3]{7+x}$ ta có hệ phương trình:

ABC

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3 \\ (u+v)(u^2 + v^2 - uv) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ (u+v)^2 - 3uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases}$$

Do đó, u và v là các nghiệm của phương trình: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$.

Từ đó dễ dàng có 2 nghiệm của phương trình là $x = 1$ hoặc $x = -6$.

7. Đặt $y = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x$.

Do đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y & (1) \\ y^3 + 1 = 2x & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế của (1) cho (2) ta có:

$$x^3 - y^3 = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$$

Do $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2 > 0, \forall x, y$.

Suy ra: $x - y = 0$ hay $x = y$.

Thay vào (1), ta có: $x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^3 - x - (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) - (x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

8. Ta có: $3x^2 + 6x + 7 = 3(x+1)^2 + 4$

$$5x^2 + 10x + 14 = 5(x+1)^2 + 9; 4 - 2x - x^2 = 5 - (x+1)^2$$

Do đó: $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} \geq 2; 4 - 2x - x^2 \leq 5; \sqrt{5x^2 + 10x + 14} \geq 13$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $(x+1)^2 = 0$, hay $x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -1$.

9. Ta có: $2x^2 - 8x + 12 = 2(x-2)^2 + 4$

$$3x^2 - 12x + 13 = 3(x-2)^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 8x + 12} \geq 2$$

$$\sqrt[4]{3x^2 - 12x + 13} \geq 1.$$

Do đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 2$.

10. $\sqrt{x^2 - 6x + 11} + \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt[4]{x^2 - 4x + 5} = 3 + \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 2} + \sqrt{(x-3)^2 + 4} + \sqrt[4]{(x-2)^2 + 1} = 3 + \sqrt{2}$$

Mà $\sqrt{(x-3)^2 + 2} + \sqrt{(x-3)^2 + 4} + \sqrt[4]{(x-2)^2 + 1} \geq 3 + \sqrt{2}$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho vô nghiệm

11. Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$). Dấu bằng xảy ra khi

và chỉ khi $a = b$. Ta có: $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$.

Ta có: $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$.

$$\text{Nên } \frac{x^2 - 2x + 2 + x^2 - 4x + 5}{2} \geq \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 4x + 5)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = \frac{3}{2}$.

$$12. (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = m \Leftrightarrow (x-1)(x-4)(x-2)(x-3) = m \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = m \quad (*). \text{ Đặt } t = x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$(*) \Leftrightarrow \left(t - \frac{9}{4}\right)\left(t - \frac{1}{4}\right) = m \Leftrightarrow t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{9}{16} - m = 0 \quad (2)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Phương trình (2) có nghiệm trái dấu} \\ \text{Phương trình (2) có nghiệm không âm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{9}{16} \\ -1 \leq m \Leftrightarrow m \geq -1. \\ m \leq \frac{9}{16} \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -1$.

$$13. \text{ Đặt } |x| = t, \text{ với } t \geq 0. \text{ Ta có: } 2x^2 - |x| + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t + m^2 - 1 = 0 \quad (2).$$

Nếu phương trình (2) có nghiệm $t > 0$ thì phương trình (1) không có nghiệm duy nhất, do đó loại. Vậy phương trình (1) muốn có nghiệm duy nhất thì phương trình (2) phải có nghiệm $t = 0$.

$$\text{Với } t = 0 \text{ thì phương trình (2) có dạng: } 2 \cdot 0^2 - 0 + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

$$\text{Nếu } m = \pm 1 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow 2t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} > 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình (2) lại có nghiệm $t = \frac{1}{2} > 0$ (vô lý)

Vậy không tồn tại giá trị m nào để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

$$14. x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 4x^3 + 4x^2) - 4x^2 + 8x - 5 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) - 5 = 0. \text{ Đặt } x^2 - 2x = t. \text{ Phương trình đã cho trở thành: } t^2 - 4t - 5 = 0. \text{ Giải phương trình này ta có } t_1 = -1; t_2 = 5.$$

Khi $t_1 = -1$, ta có $x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi $t_2 = 5$, ta có $x^2 - 2x = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$, $x = 1$.

15. Đây là phương trình dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$)

Ta thấy: $x = 0$ không phải là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 ta có phương trình tương đương:

$$2x^2 - 5x + 6 - 5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Đặt $X = x + \frac{1}{x}$ (điều kiện: $|X| \geq 2$). Ta có phương trình tương đương:

$$2(X^2 - 2) - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do $|X| \geq 2$ nên chỉ lấy giá trị $X = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Chú ý: Phương trình trên cũng có thể đưa về dạng tích.

16. Ta có

$$(x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4 \Leftrightarrow (x^2 + 12x + 32)(x^2 + 12x + 35) = 4$$

Đặt $x^2 + 12x + 32 = t \Rightarrow x^2 + 12x + 35 = t + 3$. Do đó phương trình đã cho trở thành $t(t+3) = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1; t_2 = -4$

Khi $t = 1$ ta có $x^2 + 12x + 32 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 31 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{5}$

Khi $t = -4$ ta có $x^2 + 12x + 32 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = -6$

Vậy phương trình có các nghiệm sau $x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{5}$, $x = -6$.

17. Viết lại phương trình đã cho ta có :

$$(x-1)(x+5)(x+1)(x+3) = 9 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = 9$$

Đặt: $t = x^2 + 4x$, phương trình trở thành: $(t-5)(t+3) = 9$ hay $t^2 - 2t - 24 = 0$.

Giải phương trình này ta có: $t = 6$; $t = -4$

Với $t = 6 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 6$, giải ra : $x = -2 \pm \sqrt{10}$

Với $t = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x = -4$, giải ra : $x = -2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -2$; $x = -2 \pm \sqrt{10}$.

18. Ta có $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\sqrt{x}} = \frac{2+\sqrt{x}}{2x}$

$$\Leftrightarrow 2x(1+\sqrt{x}) + 4(1+x)x = (1+x)(1+\sqrt{x})(2+\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2x\sqrt{x} + 4x + 4x^2 = (x+1)(2+3\sqrt{x}+x)$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4x^2 + 2x\sqrt{x} = 2x + 2 + 3x\sqrt{x} + x^2 + 3\sqrt{x} + x$$

$\Leftrightarrow 3x + 3x^2 - x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2 = 0$. Đặt $\sqrt{x} = y \geq 0$, phương trình đã cho trở thành $3y^4 - y^3 + 3y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(3y^3 + 2y^2 + 5y + 2) = 0$
Do $y \geq 0 \Rightarrow 3y^3 + 2y^2 + 5y + 2 > 0$, suy ra $y = 1$, nên phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

19. Ta có : $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2x - x^2 = (x-2)^2 \\ x \geq 2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

20. Điều kiện: $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$

$$x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 6\sqrt{x+5} + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) + (x + 5 - 6\sqrt{x+5} + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (\sqrt{x+5} - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 0 \\ (\sqrt{x+5} - 3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ \sqrt{x+5} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \sqrt{x+5} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

21. Điều kiện: $x \geq -3$ (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+7)} - 3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+7} = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+3} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} - 3 = 0 \\ \sqrt{x+3} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 = 1; x_2 = 2$.

22. Ta có $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3); x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2); x^2 - x = x(x-1)$.

Điều kiện: $x \geq 3$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = -\sqrt{x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

23. Tập xác định : $\begin{cases} 2x^2 + 8x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq -1 \\ x \leq -1, x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3, x = -1, x \geq 1$.

Riêng giá trị $x = -1$: thỏa mãn (2) $\Rightarrow x = -1$ là một nghiệm. Với $x \leq -3$: Không thỏa mãn (2) vì vế phải âm.

Với $x \geq 1$: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2x+6)} + \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2\sqrt{(x+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}, \text{ bình phương 2 vế}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+6)(x-1)} = x-1 = \sqrt{(x-1)(x-1)}$$

ABC

$$\begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ 2\sqrt{2x+6}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x=-\frac{25}{7} \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

Kết luận: phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 1$

24. Điều kiện $x \geq 2$. Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2(3-x) = \sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow 2(3-x)(\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}) = 8(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} = 4(1) \end{cases}$$

Giải phương trình (1) ta nhận được nghiệm $x = \frac{11 - \sqrt{15}}{2}$.

25. Đặt $y = \sqrt{2x-3}$. Điều kiện $y \geq 0 \Rightarrow x = \frac{y^2+3}{2}$ nên phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt{y^2+2y+1} + \sqrt{y^2+8y+16} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y+4)^2} = 7 \Leftrightarrow |y+1| + |y+4| = 7.$$

Do $y \geq 0$ hay $2x-3=1$. Suy ra $x=2$. Thử lại ta có nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$.

26. Đặt $y = \sqrt[3]{x^2+5x-2} \Rightarrow x^2+5x = y^3+2$. Nên phương trình đã cho là:

$$y^3 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(y^2 - 2y + 2) = 0. \text{ Ta có } y^2 - 2y + 2 = 0 \text{ có } \Delta < 0 \text{ nên phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy $y = -2$ hay $x^2 + 5x = (-2)^3 + 2 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0$.

Suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = -2, x_2 = -3$.

27. Điều kiện $\begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x \leq 6$

$$\text{Đặt } X = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} \text{ thì } \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{X^2-9}{2}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$X - \frac{X^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow 2X - X^2 + 9 = 6 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = 3 \end{cases}$$

$$* X = -1 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = -1 \text{ vô nghiệm}$$

$$* X = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -3 \end{cases}$$

28. Phương trình được xác định khi và chỉ khi: $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2$ (2)

$$\text{Đặt } x + \sqrt{4-x^2} = t \Rightarrow x\sqrt{4-x^2} = \frac{t^2-4}{2}.$$

$$\text{Thay vào (1): } t = 2 + 3 \cdot \frac{t^2-4}{2} \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2, t_2 = -\frac{4}{3}$$

Với $t_1 = 2: x + \sqrt{4 - x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = 2 - x$

$\Leftrightarrow 4 - x^2 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$ (thỏa mãn (2))

Với $t_2 = -\frac{4}{3}: x + \sqrt{4 - x^2} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = -x - \frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\frac{4}{3} \\ 4 - x^2 = x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\frac{4}{3} \\ 9x^2 + 12x - 10 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Giải (4) ta được $x_3 = \frac{-6 - \sqrt{126}}{9}, x_4 = \frac{-6 + \sqrt{126}}{9}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{-6 - \sqrt{126}}{9}, x_4 = \frac{-6 + \sqrt{126}}{9}$.

29. Ta có: Từ phương trình: $\sqrt{5x^3 + 3x^2 + 3x - 2} = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$

Mà $5x^3 + 3x^2 + 3x - 2 = (x^2 + x + 1)(5x - 2)$.

$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Nên $5x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 5x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{5}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số: $a = x^2 + x + 1, b = 5x - 2$.

Ta có: $\sqrt{(x^2 + x + 1)(5x - 2)} \leq \frac{(x^2 + x + 1)(5x - 2)}{2} = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ Hay $x^2 + x + 1 = 5x - 2 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3$

Nghiệm của phương trình là: $x_1 = 1; x_2 = 3$.

30. Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$

$\Rightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |3-\sqrt{x-1}| = 1$. Áp dụng tính chất: $|a| + |b| \geq |a+b|$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

Ta có: $|\sqrt{x-1}-2| + |3-\sqrt{x-1}| \geq |\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}| = 1$

Dấu bằng xảy ra $(\sqrt{x-1}-2)(3-\sqrt{x-1}) \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x-1} = y, y \geq 0$

$\Rightarrow (y-2)(3-y) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$

$\Rightarrow 4 \leq x-1 \leq 9 \Rightarrow 5 \leq x \leq 10$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $5 \leq x \leq 10$.

5. Các bài toán về hàm số bậc nhất và hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Một số kiến thức cơ bản

I. Hàm số bậc nhất

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.
- Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và có tính chất:
Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$; Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.
- Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng:

Cắt trục tung tại điểm $B(0; b)$; Cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

(a gọi là hệ số góc, b gọi là tung độ góc).

- Các đường thẳng có cùng hệ số góc a thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau. (Nếu gọi α là góc hợp bởi giữa đường thẳng và tia Ox thì $a = \tan \alpha$)

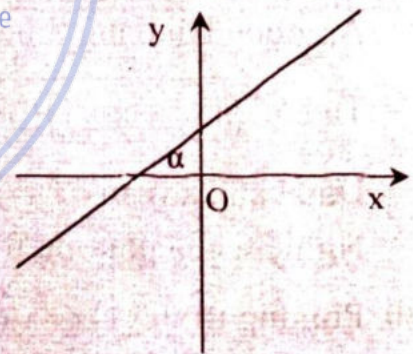
Chú ý: Nếu đường thẳng $(D): y = ax + b$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $(D'): y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) thì:

(D) cắt $(D') \Leftrightarrow a \neq a'$

$(D) \parallel (D') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

$(D) \equiv (D') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

$(D) \perp (D') \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$



II. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có tính chất:

Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$

Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một parabol với đỉnh là gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Xác định hàm số bậc nhất (phương trình của đường thẳng)

Phương pháp giải: Dựa vào các điểm sau:

Nếu điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$ thì $ax_0 + b = y_0$

Các kết quả đã nêu trong phần lý thuyết.

Dạng 2: Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.

Phương pháp giải: Dựa vào các điều kiện sau:

Đồ thị hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và qua điểm $A(1; a)$

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng qua $B(0; b)$ và qua $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

Chú ý: Có thể thay điểm $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ với một điểm C khác bằng cách cho x lời một giá trị nguyên nào đó rồi xác định y .

Dạng 3: Xác định hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải: Dựa vào điểm sau: Nếu điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$ thì $ax_0^2 = y_0$.

Dạng 4: Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Phương pháp giải: Thực hiện các bước sau:

Lập bảng giá trị

Vẽ đồ thị.

Dạng 5: Tìm giao điểm của hai đồ thị

Phương pháp giải: Thực hiện các bước sau:

Lập phương trình hoành độ giao điểm

Giải phương trình, từ đó tìm được tọa độ các giao điểm

Chú ý:

Có thể xác định tọa độ các giao điểm dựa vào đồ thị

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép.

Tương giao của đường thẳng và Parabol

Phương pháp giải: Cho đường thẳng có phương trình $y = ax + b$ ($a \neq 0$), và Parabol có phương trình $y = Ax^2$. Xét phương trình hoành độ giao điểm $Ax^2 = ax + b$ (1), ta có số giao điểm của hai đồ thị phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình này.

- Đường thẳng cắt Parabol khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm.
- Đường thẳng không cắt Parabol khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm

c. Đường thẳng tiếp xúc với Parabol khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép.

Dạng 6: Tìm điểm cố định mà Parabol luôn đi qua với mọi tham số m

Dạng 7: Các bài toán liên quan khác

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Xác định hàm số bậc nhất (phương trình của đường thẳng)

Ví dụ 1: Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = (m - 2)x + 3m + 1 (m \neq 2)$

a. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = x - 5$.

b. Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1; -2)$.

TS 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn tỉnh Bình Định 2006 – 2007

Giải

Xét đường thẳng (d): $y = (m - 2)x + 3m + 1 (m \neq 2)$

a. Gọi (d'): $y = x - 5$.

$$\text{Ta có } (d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 1 \\ 3m + 1 \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

b. Đường thẳng (d) đi qua $M(1; -2)$ nên: $-2 = m - 2 + 3m + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = ax + b$. Hãy xác định a và b trong các trường hợp sau:

a. Đồ thị song song với đường thẳng $y = 3x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. downloadsachmienphi.com Download Sách Hay | Đọc Sách Online

b. Đồ thị song song với đường thẳng $y = -4x$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -1

c. Đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = -5x + 1$ và đi qua $A(5; 2)$.

d. Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; -7)$

Giải:

a. Vì đồ thị song song với đường thẳng $y = 3x$ nên $a = 3$.

Mặt khác, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $b = 2$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = 3x + 2$.

b. Vì đồ thị song song với đường thẳng $y = -4x$ nên $a = -4$

Mặt khác, đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -1 nên

$$a(-1) + b = 0 \Rightarrow -4(-1) + b = 0 \Rightarrow b = 4$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -4x + 4$

c. Vì đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = -5x + 1$ nên $a(-5) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$.

Mặt khác, đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(5; 2)$ nên $\frac{1}{5} \cdot 5 + b = 2 \Rightarrow b = 1$.

Vậy hàm số cần tìm là: $y = \frac{1}{5}x + 1$

- d. Do $A(1; 2); B(-2; -7)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$ nên ta có:
 $a + b = 2$ và $-2a + b = -7$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a + b = -7 \end{cases}$ ta được $a = 3$ và $b = -1$

Vậy hàm số cần tìm là: $y = 3x - 1$.

Ví dụ 3: Tìm các giá trị của m để hàm số $y = (2m + 1)x + 3$ nghịch biến và đồ thị của nó đi qua điểm $(1; 2)$.

TS lớp 10 THPT chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi 2005 – 2006
Giải

Hàm số $y = (2m + 1)x + 3$ nghịch biến và đồ thị của nó đi qua điểm $(1; 2)$

khi: $\begin{cases} 2m + 1 < 0 \\ 2 = (2m + 1) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Ví dụ 4: Cho hàm số: $y = (2m - 3)x + n - 4$ (d) $\left(m \neq \frac{3}{2}\right)$.

Tìm các giá trị của m và n để đường thẳng (d):

a. Đi qua hai điểm $A(1; 2), B(3; 4)$.

b. Cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = 3\sqrt{2} - 1$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1 + \sqrt{2}$.

TS lớp 10 THPT Thái Bình 2005 – 2006

Giải

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Xét hàm số (d): $y = (2m - 3)x + n - 4$ $\left(m \neq \frac{3}{2}\right)$

a. Đồ thị (d) đi qua 2 điểm $A(1; 2)$ và $B(3; 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 + n - 4 = 2 \\ 3(2m - 3) + n - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = 9 \\ 6m + n = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 8 \\ n = 9 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 5 \end{cases}$$

Vậy $(m; n) = (2; 5)$ là giá trị cần tìm.

b. Đồ thị (d) cắt trục tung tại điểm $(0; 3\sqrt{2} - 1)$

$$\Leftrightarrow n - 4 = 3\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow n = 3 + 3\sqrt{2}.$$

Đồ thị (d) cắt trục hoành tại điểm

$$(1 + \sqrt{2}; 0) \Leftrightarrow (2m - 3)(1 + \sqrt{2}) + n - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \sqrt{2})m - 3 - 3\sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{2} - 4 = 0 \text{ (do } n = 3 + 3\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} = 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2$$

Vậy $(m; n) = (2\sqrt{2} - 2; 3 + 3\sqrt{2})$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = (m + 3)x - n$. Tìm điều kiện của m và n để:

- Hàm số đồng biến.
- Hàm số nghịch biến.
- Đồ thị của hàm số đã cho song song với đường thẳng $y = x + 2$

Giải:

- Hàm số đã cho đồng biến $\Leftrightarrow m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -3$
- Hàm số đã cho nghịch biến $\Leftrightarrow m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -3$
- Đồ thị của hàm số đã cho song song với đường thẳng $y = x + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 = 1 \\ n \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n \neq -2 \end{cases}$$

Ví dụ 6: Trong các mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: y = -\frac{2k}{k-1}x + \frac{2}{k-1} (k \neq 1)$.

- Với giá trị nào của k Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$? Khi đó hãy tính góc tạo bởi giữa d với tia Ox.
- Tìm k để khoảng cách từ gốc tọa độ đến Đường thẳng (d) lớn nhất.

Giải:

- Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$

$$\Leftrightarrow -\frac{2k}{k-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow k = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$$

Khi đó góc nhọn α tạo bởi giữa d và tia Ox có $\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

- Gọi h là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .

Nếu $k = 0$ thì $d: y = -2$ nên $h = 2$.

Nếu $k \neq 0, k \neq 1$ ta gọi A và B lần lượt là giao điểm của Đường thẳng (d) với trục Ox và Oy thì $A\left(\frac{1}{k}; 0\right)$ và $B\left(0; \frac{2}{k-1}\right)$.

Suy ra: $OA = \left|\frac{1}{k}\right|, OB = \left|\frac{2}{k-1}\right|$. Vì tam giác OAB vuông tại O nên:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow OH = \frac{2}{\sqrt{5k^2 - 2k + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5\left(k - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}} \leq \sqrt{5}.$$

$$OH = \sqrt{5} \text{ khi } k = \frac{1}{5}.$$

Với $k = \frac{1}{5}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến Đường thẳng (d) lớn nhất.

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $A(-2; 2)$ và đường thẳng $(D_1): y = -2(x + 1)$.

- Giải thích vì sao A nằm trên (D_1) .
- Tìm a trong hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P) qua A .
- Viết phương trình của đường thẳng (D_2) qua A và vuông góc với đường thẳng (D_1) .
- Gọi A, B là giao điểm của (P) và (D_2) ; C là giao điểm của (D_1) với trục tung. Tìm tọa độ B, C ; tính diện tích của tam giác ABC .

TS 10 THPT thành phố Hồ Chí Minh 1992 – 1993

Giải:

- Thay $x = -2$ vào phương trình (D_1) ta có: $y = -2(-2 + 1) = 2$.

Vậy $A \in (D_1)$ vì tọa độ của A là nghiệm đúng phương trình (D_1) .

- $A \in (P) \Leftrightarrow 2 = a(-2)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

- Phương trình đường thẳng (D_2) có dạng $y = ax + b$.

$$((D_2) \perp (D_1) \Leftrightarrow a(-2) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}; (D_2): y = \frac{1}{2}x + m.$$

$$A \in (D_2) \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2}(-2) + m \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy phương trình đường thẳng (D_2) là $y = \frac{1}{2}x + 3$.

- Tọa độ của B : Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với (D_2) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0; \Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2 \end{cases}$$

Với $x = 3$ thì $y = \frac{1}{2}(3) + 3 = \frac{9}{2}$. Vậy $B\left(3; \frac{9}{2}\right)$. C là giao điểm của (D_1) với

trục tung, do đó: $x = 0 \Rightarrow y = -2(x + 1) = -2$. Vậy $C(0; -2)$

Vẽ $AH \perp CD$, ta có: $AH = 2$; vẽ $BK \perp CD$ ta có $BK = 3$.

$x = 0$ thì $y = \frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3$. Vậy $D(0; 3)$.

$CD = CO + OD = |-2| + 3 = 5$ (trong đó D là giao điểm của (D_2) với trục tung).

$$\text{Ta có } S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}CD \cdot AH + \frac{1}{2}CD \cdot BK = \frac{1}{2}CD(AH + BK)$$

$$S_{AC} = \frac{1}{2} \cdot 5(2 + 3) = 12,5 \text{ (đvdt)}.$$

Ví dụ 8: Xác định các hệ số a, b của hàm số $y = ax + b$ (d) trong các trường hợp:

- Đồ thị của (d) là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ và đi qua điểm $A(2; -2)$.
- Đồ thị của (d) là đường thẳng cắt parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm có hoành độ các giao điểm là -1 và 3 .

TS lớp 10 Quốc học Huế 1999 – 2000

Giải

- Đồ thị của (d) là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ và đi qua điểm $A(2; -2)$ nên $(a; b)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a = -3 \\ -2 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ -2 = (-3) \cdot 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow y = -x + 4$$

- Đồ thị của (d) là đường thẳng cắt parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm có hoành độ các giao điểm là -1 và 3 , nên tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ là $\left(x_1 = -1; y_1 = \frac{1}{2}\right)$ và $\left(x_2 = 3; y_2 = \frac{9}{2}\right)$.

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = a(-1) + b \\ \frac{9}{2} = a \cdot 3 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 1 \\ 6a + 2b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 8 \\ 2b = 9 - 6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow y = x + \frac{3}{2}$$

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng có phương trình

$$(d_1): y = \frac{1}{2}x + 4; \quad (d_2): y = 2; \quad (d_3): y = (k+1)x + k$$

Tìm k để cho ba đường thẳng đã cho đồng quy.

TS lớp 10 Quốc học Huế 2002 – 2003

Giải

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ

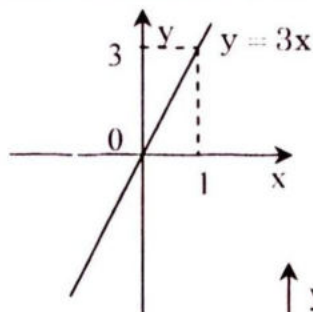
$$\text{phương trình: } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \frac{1}{2}x + 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x + 8 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Ba đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ đồng quy khi và chỉ khi đường thẳng (d_3) đi qua điểm $(-4; 2)$

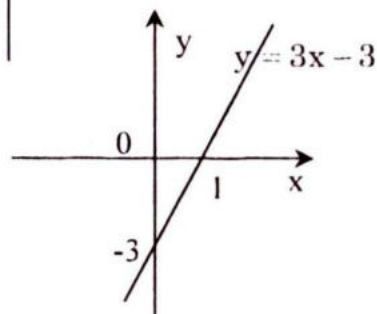
$$\Leftrightarrow 2 = (k+1)(-4) + k \Leftrightarrow -4k - 4 + k = 2 \Leftrightarrow -3k = 6 \Leftrightarrow k = -2.$$

Dạng 2: Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.**Ví dụ 1:** Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x$.**Giải:**

Đồ thị hàm số $y = 3x$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $(1; 3)$

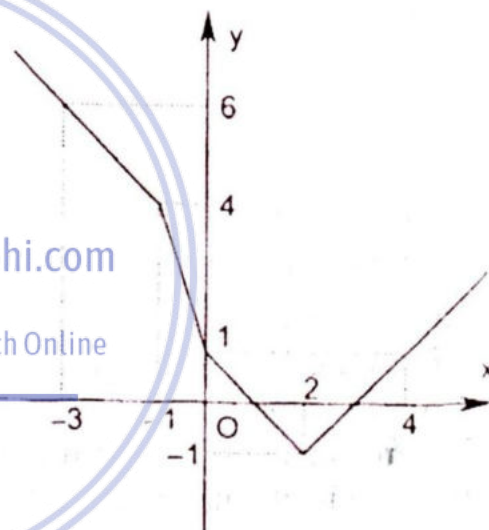
**Ví dụ 2:** Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x - 3$ **Giải:**

Đồ thị hàm số $y = 3x - 3$ là đường thẳng đi qua điểm $(0; -3)$ và $(1; 0)$.

**Ví dụ 3:** Vẽ đồ thị hàm số $y = |x| - |x + 1| + |x - 2|$ **TS lớp 10 Quốc học Huế 1998 – 1999****Giải**Vẽ đồ thị hàm số $y = |x| - |x + 1| + |x - 2|$

$$y = \begin{cases} -x + x + 1 + 2 - x, & (x < -1) \\ -x - x - 1 + 2 - x, & (-1 \leq x < 0) \\ x - x - 1 + 2 - x, & (0 \leq x < 2) \\ x - x - 1 + x - 2, & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -x + 3, & (x < -1) \\ -3x + 1, & (-1 \leq x < 0) \\ -x + 1, & (0 \leq x < 2) \\ x - 3, & (x \geq 2) \end{cases}$$



Lập bảng:

x	-3	-1	0	2	4
$y = x - x + 1 + x - 2 $	6	4	1	-1	1

Dạng 3: Xác định hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)**Ví dụ 1:** Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P).

- Tìm a, b biết rằng (D) đi qua A(-1; 3) và B(2; 0).
- Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm. Viết phương trình (P).

TS lớp 10 Quốc Học 2003 – 2004.**Giải**

- a. Vì (D) đi qua A(-1; 3) và B(2; 0) nên $\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là:

$kx^2 = -x + 2 \Leftrightarrow kx^2 + x - 2 = 0 (k \neq 0)$. Đường thẳng (D) tiếp xúc với parabol (P) khi và chỉ khi: Phương trình $kx^2 + x - 2 = 0 (k \neq 0)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ, đơn vị trên hai trục bằng nhau.

- Xác định a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm A(1; 1). Vẽ đồ thị (P) của hàm số vừa tìm được. hàm số này đồng biến, nghịch biến trên khoảng nào?
- Gọi (D) là đường thẳng đi qua A và cắt trục Ox tại điểm M có hoành độ là m ($m \neq 1$). Viết phương trình của đường thẳng (D).
- Tìm giá trị của m để (D) chỉ có chung với (P) một điểm.

TS lớp 10 THPT thành phố Hồ Chí Minh 1990 – 1991

Giải

a. Vì đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm A(1; 1) nên $1 = a.1^2 \Leftrightarrow a = 1$.

* TXĐ : R

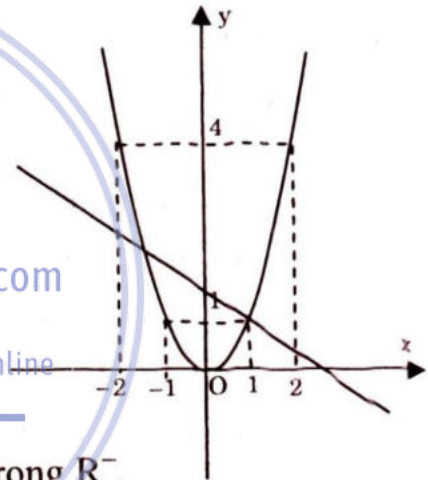
* Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

* Vẽ (Hình bên):

* Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = x^2$ là một đường parabol có đỉnh là (0; 0), trục tung làm trục đối xứng, nằm phía trên trục hoành.

Hàm số này đồng biến trong R^+ , nghịch biến trong R^- .



b. Phương trình của đường thẳng (D) qua A(1; 1) và M(m; 0) có dạng:
 $y = ax + b$

$$\begin{cases} A(1; 1) \in (D) \\ M(m; 0) \in (D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a.1 + b \\ 0 = a.m + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1 - m) = 1 \\ b = -am \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{1 - m} \\ b = \frac{m}{m - 1} \end{cases}$$

Vậy phương trình của (D) là:

$$y = \frac{1}{1 - m}x + \frac{m}{m - 1} (m \neq 1)$$

Để (D) và (P) chỉ có chung nhau một điểm thì phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) có nghiệm kép.

$$x^2 = \frac{1}{1 - m}x + \frac{m}{m - 1} \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{1 - m}x - \frac{m}{m - 1} = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{(1-m)^2} - \frac{4m}{1-m} = 0 \Leftrightarrow 1 - 4m(1-m) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4m + 4m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2m)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow -2m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 3: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hàm số $y = (m+2)x^2$ (P)

1. Tìm m để đồ thị hàm số (P) đi qua điểm:

a. $A(-1; 3)$; b. $B(\sqrt{2}; -1)$; c. $C\left(\frac{1}{2}; 5\right)$.

2. Thay $m = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị (P) với đồ thị hàm số $y = x + 1$.

TS lớp 10 THPT tỉnh Hải Dương 2004 – 2005
Giải

(P): $y = (m+2)x^2$

1. a. $A(-1; 3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = (m+2)(-1)^2 \Leftrightarrow m+2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$

b. $B(\sqrt{2}; -1) \in (P) \Leftrightarrow -1 = (m+2)(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow m+2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$.

c. $C\left(\frac{1}{2}; 5\right) \in (P) \Leftrightarrow 5 = (m+2)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow m+2 = 20 \Leftrightarrow m = 18$.

2. Tại $m = 0$, tọa độ giao điểm của (d): $y = x + 1$ và (P): $y = 2x^2$ là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 2x^2 - x - 1 = 0 (\Delta = 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3}{4} = 1 \\ y = x + 1 = 2 \end{cases}$$

Hoặc $\begin{cases} x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \\ y = x + 1 = \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy (P) cắt (d) tại 2 điểm có tọa độ: $(1; 2)$ và $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Dạng 4: Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Ví dụ 1: Trong cùng hệ trục tọa độ, gọi (P) và (D) lần lượt là đồ thị của $y = -\frac{x^2}{4}$ và $y = x + 1$.

a. Vẽ (P) và (D).

b. Dùng đồ thị để giải phương trình $x^2 + 4x + 4 = 0$ và kiểm tra lại bằng phép toán.

c. Viết phương trình đường thẳng (d) song song với (D) cắt (P) tại điểm có tung độ là -4 .

TS lớp 10 THPT thành phố Hồ Chí Minh năm học 1991 – 1992

Giải

a. Vẽ (P):

* TXĐ: R.

* Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4

* Vẽ:

* Nhận xét: Đồ thị của $y = -\frac{x^2}{4}$ là một parabol có đỉnh là O(0; 0) nhận Oy là trục đối xứng và nằm dưới trục hoành.

Vẽ (D):

* TXĐ = R.

* Đồ thị $y = x + 1$ là một đường thẳng đi qua hai điểm A(0; 1) và B(-1; 0).

b. Dùng đồ thị để giải phương trình:

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = 4x + 4 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} = x + 1$$

Đồ thị của $y = -\frac{x^2}{4}$ là parabol (P) và đồ thị $y = x + 1$ là đường thẳng (D)

đã vẽ trong câu 1. Ta thấy (P) và (D) tiếp xúc nhau tại điểm C(-2; -1).
Vậy phương trình đã cho có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -2$.

Kiểm tra lại bằng phép toán:

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

c. Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b$.(d) // (D) $\Rightarrow a = 1$. Vậy: $y = x + b$ (d).

Gọi M là điểm thuộc (P) và có tung độ bằng -4.

Do đó: $-4 = -\frac{x_M^2}{4} \Rightarrow x_M = \pm 4$. Vậy $M_1(-4; -4), M_2(4; -4)$.

 $M_1 \in (d) \Leftrightarrow -4 = -4 + b \Leftrightarrow b = 0$. Vậy $y = x$. $M_2 \in (d) \Leftrightarrow -4 = 4 + b \Leftrightarrow b = -8$. Vậy $y = x - 8$.Phương trình đường thẳng (d) là $y = x$ hoặc $y = x - 8$.**Ví dụ 2:** Trong hệ trục tọa độ vuông góc gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$.

a. Vẽ (P).

b. Gọi A, B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2. Viết phương trình của đường thẳng AB.

c. Viết phương trình của đường thẳng (D) song với đường thẳng AB và tiếp xúc với đồ thị của hàm số (P).

TS lớp 10 THPT thành phố Hồ Chí Minh, 1994 – 1995

Giải

Vẽ (P): $y = x^2$:

* TXĐ = R.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

* Vẽ: (hình dưới)

Nhận xét: (P) là parabol có đỉnh O là điểm thấp nhất, nhận trục tung y'y là trục đối xứng và nằm phải trên trục hoành.

Tung độ của A: $y = (-1)^2 = 1$.

Tung độ của B: $y = 2^2 = 4$.

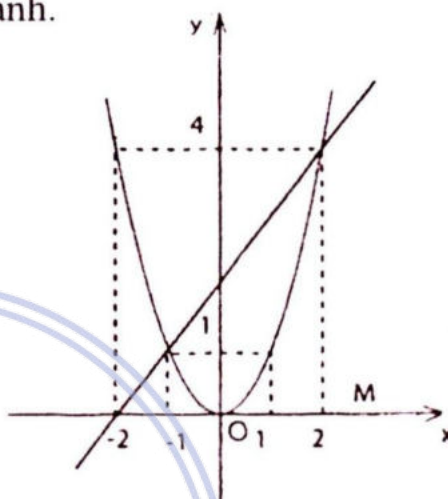
Vậy A(-1; 1), B(2; 4).

Phương trình đường thẳng AB có dạng

$y = ax + b$

$$\begin{cases} A(-1; 1) \in AB \\ B(2; 4) \in AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a(-1) + b \\ 4 = a \cdot 2 + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$



Phương trình của đường thẳng AB là $y = x + 2$. Phương trình của (D) có dạng: $y = ax + b$. Vì (D) // AB suy ra $a = 1$. (D): $y = x + b$. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P):

$x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 - x - b = 0(*)$; $\Delta = 1 + 4b$. (D) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$.

Vậy phương trình của (D) là $y = x - \frac{1}{4}$.

Ví dụ 3: a. Vẽ đồ thị (P) hàm số $y = 2x^2$.

b. Trên đồ thị (P) lấy điểm A có hoành độ $x = 1$ và điểm B có hoành độ $x = 2$. Xác định các giá trị của m, n để đường thẳng $y = xm + n$ tiếp xúc với (P) và song song với AB.

TS lớp 10 THPT thành phố Hải Phòng 1995 – 1996

Giải

a. TXĐ = R. Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị (P) như hình vẽ bên

b. $A(x_A = 1; y_A) \in (P) \Rightarrow y_A = 2 \cdot 1^2 = 2$. Vậy A(1; 2)

$B(x_B = 2; y_B) \in (P) \Rightarrow y_B = 2 \cdot 2^2 = 8$. Vậy B(2; 8)

A, B có hoành độ khác nhau, tung độ khác nhau nên phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$

$$\begin{cases} A \in AB \\ B \in AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a + b \\ 8 = 2a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ 6 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -4 \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng AB có dạng:

$$y = 6x - 4; (d) y = mx + n, (d) // AB$$

$$\Rightarrow m = 6 \text{ nên } (d) y = 6x + n.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$2x^2 = 6x + n \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - n = 0 (*); \Delta' = 9 + 2n.$$

(d) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0$

$$\Leftrightarrow 9 + 2n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{9}{2} \Rightarrow y = 6x - \frac{9}{2}$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ (P).

a. Vẽ đồ thị hàm số (P).

b. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó hãy tìm hai điểm A và B.

TS lớp 10 THPT tỉnh Nam Hà 1996 – 1996

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Giải

a. TXĐ = R. Bảng giá trị.

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

Vẽ đồ thị (hình bên)

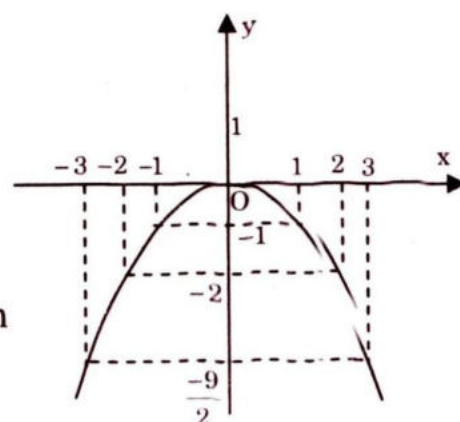
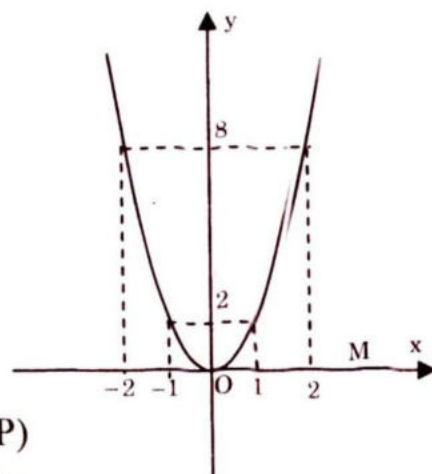
Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ là đường parabol có đỉnh $O(0; 0)$ nằm phía dưới trục hoành nhận trục tung làm trục đối xứng.

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng $y = 2x + m$ là:

$$-\frac{1}{2}x^2 = 2x + m \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x + m = 0 (*)$$

$$\Delta' = 1 - \frac{1}{2}m$$

Đường thẳng $y = 2x + m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt



$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - \frac{1}{2}m > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m < 1 \Leftrightarrow m < 2.$$

(*) có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}m}}{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{4 - 2m}; \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}m}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{4 - 2m}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{4 - 2m} \text{ thì } y_1 = 2x_1 + m = 4 + 2\sqrt{4 - 2m} + m$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{4 - 2m} \text{ thì } y_2 = 2x_2 + m = 4 - 2\sqrt{4 - 2m} + m$$

$$\text{Vậy: } A(2 + \sqrt{4 - 2m}; 4 + 2\sqrt{4 - 2m} + m); B(2 - \sqrt{4 - 2m}; 4 - 2\sqrt{4 - 2m} + m)$$

Ví dụ 5: Vẽ đồ thị hàm số $y = -0,5x^2$. Trên đồ thị hàm số y lấy hai điểm A và B có hoành độ lần lượt là -1 và 2 . Hãy viết phương trình đường thẳng AB.

TS lớp 10 THPT tỉnh Thái Bình, 1994 – 1995

Giải

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -0,5x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

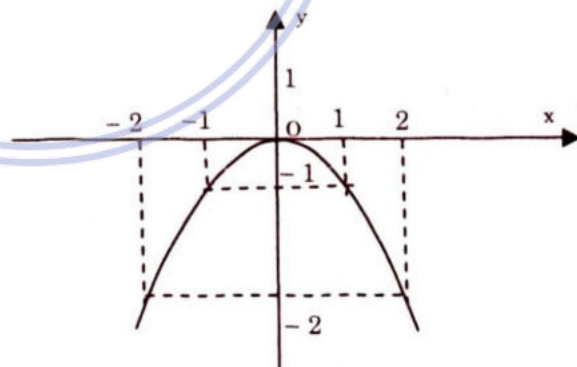
Với $x = -1$ thì $y = -0,5x^2 = -\frac{1}{2}$ nên $A(-1; -\frac{1}{2})$

Với $x = 2$ thì $y = -0,5x^2 = -2$ nên $B(2; -2)$

A, B có hoành độ khác nhau, tung độ khác nhau, phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$

$$\begin{cases} A \in AB \\ B \in AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = -a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -\frac{3}{2} \\ -a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$



Vậy phương trình đường thẳng AB phải tìm là $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Dạng 5: Tìm giao điểm của hai đồ thị

Ví dụ 1: Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d): $y = \frac{3}{2}x + 2m$ cắt parabol

(P): $y = -\frac{3}{4}x^2$ tại hai điểm phân biệt?

TS lớp 10 THPT chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2006 – 2007

Giải

Phương trình hoành độ điểm chung của (d) và (P):

$$-\frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{2}x + 2m \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 8m = 0 \quad (1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{8}.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = -x|x|$ (P)

- Chứng minh hàm số $f(x)$ nghịch biến với $x \in \mathbb{R}$.
- Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị (P) với đường thẳng $y = -2x$.
- Biện luận số giao điểm của đồ thị (P) với đường thẳng $y = ax$ (d) theo a.
- Vẽ đồ thị (P).

TS lớp 10 THPT thành phố Hải Phòng 1996 – 1997

Giải

$$y = f(x) = -x|x| = \begin{cases} -x^2 & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

- Mà hàm số $y = -x^2$ nghịch biến với mọi $x \geq 0$. Và hàm số $y = x^2$ nghịch biến với mọi $x < 0$.

Do vậy hàm số $y = f(x) = -x|x|$ nghịch biến với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -2x$ và (P)

$$-x|x| = -2x \Leftrightarrow 2x - x|x| = 0 \Leftrightarrow x(2 - |x|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 - |x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$x_1 = 0 \text{ thì } y_1 = -2x_1 = 0; x_2 = 2 \text{ thì } y_2 = -2x_2 = -4$$

$$x_3 = -2 \text{ thì } y_3 = -2x_3 = 4. \text{ Vậy đồ thị (P) cắt } y = -2x \text{ tại ba điểm:}$$

$$O(0; 0); M(2; -4); N(-2; 4).$$

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $y = ax$ (d) là:

$$-x|x| = ax \Leftrightarrow ax + x|x| = 0 (*) \Leftrightarrow x(a + |x|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x| = -a \end{cases}$$

* Nếu $a < 0$ thì $|x| = -a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$. Phương trình (*) có ba nghiệm phân

biệt $\Leftrightarrow$ (d) và (P) có ba điểm phân biệt.

* Nếu $a = 0$ thì $|x| = -a \Leftrightarrow x = 0$. phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (d) và (P) có một điểm chung.

* Nếu $a > 0$ thì $|x| = -a \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Phương trình (*) có một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (d) và (P) có một điểm chung.

d. -- TXĐ = R.

– Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x x $	4	1	0	-1	-4

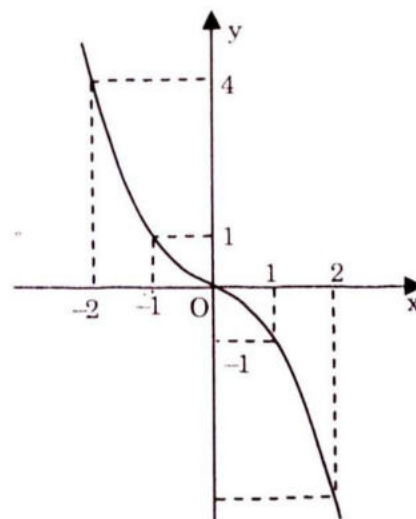
– Vẽ (hình bên).

Nhận xét:

Đồ thị (P) là đồ thị của hàm số

$y = -x^2$ khi $x \geq 0$; là đồ thị của hàm số

$y = x^2$ khi $x < 0$.



Ví dụ 3: Trong cùng một hệ trục tọa độ cho parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng (D): $y = kx + b$.

1. Tìm k và b biết rằng (D) qua hai điểm A(1; 0) và B(0; -1)

2. Tìm a biết rằng (P) tiếp xúc với (D) vừa tìm được ở câu 1.

3. Vẽ (D) và (P) vừa tìm được ở câu 1 và 2.

4. Gọi (d) là đường thẳng qua điểm $C\left(\frac{3}{2}; -1\right)$ và có hệ số góc là m.

a. Viết phương trình của (d).

b. Chứng tỏ rằng qua điểm C có hai đường thẳng (d) tiếp xúc (P) (ở câu 2) và vuông góc nhau.

TS lớp 10 THPT TP Hồ Chí Minh, 1996 – 1997
Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Giải

$$1. \begin{cases} A \in (D) \\ B \in (D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k + b \\ -1 = 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P)

$$\Leftrightarrow ax^2 = x - 1 \Leftrightarrow ax^2 - x + 1 = 0; \Delta = 1 - 4a.$$

$$(D) \text{ tiếp xúc } (P) \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

$$3. (D): y = x - 1; (P): y = \frac{1}{4}x^2$$

* TXĐ = R.

Bảng giá trị

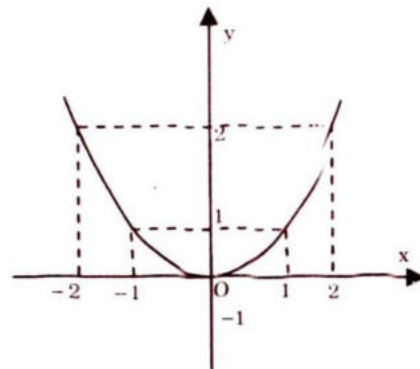
x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4

* Vẽ đồ thị:

Nhận xét:

+ Đồ thị hàm số $y = x - 1$ là đường thẳng (D) đi qua $(0; -1)$ và $(1; 0)$

+ Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ là một đường cong parabol nhận O là đỉnh, trục tung là trục đối xứng, nằm phía trên trục hoành.



4. Phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = mx + n$ (vì theo đầu bài hệ số góc là m).

$$C(d) \Leftrightarrow -1 = \frac{3}{2}m + n \Leftrightarrow n = -1 - \frac{3}{2}m. \text{ Phương trình đường thẳng (d) là}$$

$$y = mx - 1 - \frac{3}{2}m. \text{ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)}$$

$$\frac{1}{4}x^2 = mx - 1 - \frac{3}{2}m \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - mx + \frac{3}{2}m + 1 = 0; \Delta = m^2 - \frac{3}{2}m - 1$$

(d) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - \frac{3}{2}m - 1 = 0$. Phương trình ẩn m trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (vì $a = 1 > 0$; $c = -1 < 0$, a và c trái dấu).

Theo hệ thức vi-et có $m_1, m_2 = -1$.

Do vậy, qua C có hai đường thẳng (d) tiếp xúc (P) và vuông góc với nhau.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = 2x^2 - 6x - m + 1$ (*) với m là tham số.

a. Khi $m = 9$ tìm x để $y = 0$.

b. Tìm m để đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị (*) tại hai điểm phân biệt và tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng với giao điểm đó.

TS lớp 10 THPT (chuyên ban) tỉnh Hà Tây, 1994– 1995
Giải

a. Khi $m = 9$ thì $y = 2x^2 - 6x - 8$

Với $y = 0$ có phương trình $2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x_1 = -1; x_2 = 4 \text{ (vì } a - b + c = 0 \text{)}$$

b. (d). $y = x + 1$;

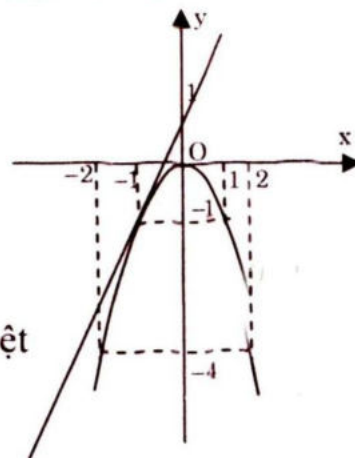
(P): $y = 2x^2 - 6x - m + 1$, phương trình hoành độ giao điểm (d) và

$$(P): 2x^2 - 6x - m + 1 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - m = 0$$

(d) cắt (P) $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = 49 + 9m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{49}{9} = -6\frac{1}{9}$$



$m = 0$ thì đồ thị hàm số cắt nhau tại $A(0; 1)$ và $B\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$

Khi đó, tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I\left(\frac{7}{4}; \frac{11}{4}\right)$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) và $y = 2x + m$ có đồ thị (D) trên cùng một hệ trục tọa độ.

a. Vẽ đồ thị (P) .

b. Định m để (D) và (P) có điểm chung duy nhất. Vẽ (D) với m vừa tìm được.

TS lớp 10 THPT TP Hồ Chí Minh, 1997 – 1998

Giải

a. TXĐ = $\mathbb{R}$ Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

b. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) :

$$-x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x + m = 0 (*); \Delta' = 1 - m$$

(D) và (P) có điểm chung duy nhất

$$\Leftrightarrow (*) \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

$(D): y = 2x + 1$

Đường thẳng (D) đi qua hai điểm $(0; 1)$ và $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Ví dụ 6: Cho parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $(D): y = x + m$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (D) :

a. Cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b. Tiếp xúc với (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm.

TS lớp 10 THPT Thừa Thiên Huế 2001 – 2002

Giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là:

$x^2 - 3x + 2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 - m = 0$. Đường thẳng (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - 4x + 2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - (2 - m) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2 + m > 0 \Leftrightarrow m > -2$

Do đó, khi $m > -2$ thì đường thẳng (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b. Đường thẳng (D) tiếp xúc với parabol (P)

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 4x + 2 - m = 0$ có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - (2 - m) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Khi đó hoành độ của tiếp điểm là $x = 2$ và tung độ của tiếp điểm là $y = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$. Vậy khi $m = -2$ thì đường thẳng (D) tiếp xúc với parabol (P) tại điểm $(2; 0)$

- Ví dụ 7:** a. Tìm tọa độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{3}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{6}(x+21)$.
- b. Với giá trị nào của k để đường thẳng $y = k(x-1)$ tiếp xúc với parabol $y = \frac{1}{3}x^2$?

TS lớp 10 Quốc học Huế 1996 – 1997
Giải

- a. Tọa độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{3}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{6}(x+21)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = \frac{1}{6}(x+21) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{6}(x+21) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ 2x^2 - x - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x_1 = \frac{1-13}{4} = -3 \\ x_2 = \frac{1+13}{4} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 3 \\ x_2 = \frac{7}{2} \\ y_2 = \frac{49}{12} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{3}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{6}(x+21)$ là $(-3; 3)$ và $(\frac{7}{2}; \frac{49}{12})$.

- b. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = k(x-1)$ và parabol $y = \frac{1}{3}x^2$ là $\frac{1}{3}x^2 - k(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 3kx + 3k = 0$

Đường thẳng $y = k(x-1)$ tiếp xúc với parabol $y = \frac{1}{3}x^2$ khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 3kx + 3k = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (-3k)^2 - 4 \cdot 3k = 0 \Leftrightarrow 9k^2 - 12k = 0 \Leftrightarrow 3k(3k - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 3k - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = \frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Vậy khi } k = 0 \text{ hoặc } k = \frac{4}{3} \text{ thì đường thẳng}$$

$y = k(x-1)$ tiếp xúc với parabol $y = \frac{1}{3}x^2$.

Ví dụ 8: Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$. Tìm a và b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm (0; -1) và tiếp xúc với (P).

TS lớp 10 THPT thành phố Hải Phòng 1995 – 1996
Giải

Bảng giá trị:

x	...	-2	-1	0	1	2...
y	...	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2...

Đồ thị (P) như hình vẽ sau:

Vì $y = ax + b$ (d) đi qua (0; -1) nên

$b = -1$, ta có (d): $y = ax - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

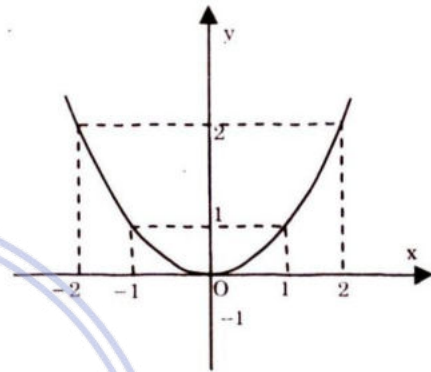
$$\frac{x^2}{2} = ax - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2 = 0 (*)$$

$\Delta' = a^2 - 2$; (d) tiếp xúc (P)

$\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

Vậy giá trị phải tìm là: $(a = \sqrt{2}; b = -1), (a = -\sqrt{2}; b = -1)$



Dạng 7: Tìm điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi tham số m

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $(d_m): 2mx + (3m - 1)y - 6 = 0$

- Tìm đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1; -3) và xác định hệ số góc của đường thẳng đó
- Tìm điểm cố định B của (d_m) với mọi m

Giải:

- Tìm đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1; -3) và xác định hệ số góc của đường thẳng đó.

Do A(-1; -3) $\in (d_m)$ thế tọa độ điểm A vào phương trình (d_m) ta có

$$2m(-1) + (3m - 1)(-3) - 6 = 0 \Leftrightarrow -11m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{11}$$

$$\text{Khi } m = -\frac{3}{11} \text{ đường thẳng (d): } 3x + 10y + 33 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{10}x - \frac{33}{10}$$

Hệ số góc của đường thẳng (d) là $k = -\frac{3}{10}$.

Vậy đường thẳng (d) cần tìm là: $y = -\frac{3}{10}x - \frac{33}{10}$ và hệ số góc $k = -\frac{3}{10}$.

b. Tìm điểm cố định B của (d_m) với mọi m

Giả sử $B(x;y)$ là điểm cố định của họ (d_m) với mọi m

$$\Leftrightarrow 2mx + (3m - 1)y - 6 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3y)m - 6 - y = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -6 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -6 \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà mọi đường thẳng (d_m) đi qua là : $B(9; -6)$.

Ví dụ 2 : Cho đường thẳng: $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ (m là tham số)

- Chứng minh rằng đường thẳng luôn luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .
- Tính giá trị của m để khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng là lớn nhất.

Giải:

a. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ (1) đi qua điểm cố định là: $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ với mọi m

$$\Leftrightarrow mx - 2x + my - y - 1 = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow (x + y)m - (2x + y + 1) = 0 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng (1) luôn đi qua điểm cố định $N(-1; 1)$.

b. Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung.

Ta có: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{1 - m}$. Do đó $OA = \frac{1}{|1 - m|}$. Gọi B là giao điểm của

đường thẳng (1) với trục hoành. Ta có: $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m - 2}$

$$\text{Do đó } OB = \frac{1}{|m - 2|}.$$

Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (1). Ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = (m - 1)^2 + (m - 2)^2 = 2m^2 - 6m + 5 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Suy ra $h^2 \leq 2$, $\max h = \sqrt{2}$ khi $m = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 3 : Xét các đường thẳng (d) có phương trình:

$$(2m + 3)x + (m + 5)y + (4m - 1) = 0 \quad (m \text{ là tham số})$$

- Vẽ đồ thị đường thẳng (d) , ứng với $m = -1$.
- Tìm điểm cố định mà mọi Đường thẳng (d) đều đi qua.

Giải:

- a. $x + 4y - 5 = 0$ (học sinh tự vẽ hình)
 b. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng; $(2m + 3)x + (m + 5)y + (4m - 1) = 0$ đi qua điểm cố định là:

$$\begin{aligned} 2mx + 3x + my + 5y + 4m - 1 &= 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow m(2x + y + 4) + 3x + 5y - 1 &= 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ 3x + 5y - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy đường thẳng trên luôn đi qua điểm cố định $A(-3; 2)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = mx + m - 1$. Chứng minh rằng với mọi m đồ thị hàm số trên luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

Xét điểm $A(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ. Ta có $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số: $y = mx + m - 1, \forall m \Leftrightarrow y_0 = mx_0 + m - 1, \forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)m - (y_0 + 1) = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -1). \text{ Vậy đồ thị hàm số } y = mx + m - 1 \text{ luôn đi qua một điểm cố định } A(-1; -1), \forall m.$$

Ví dụ 5: Cho các đường thẳng: $y = x - 2(d_1); y = 2x - 4(d_2); y = mx + (m + 2)(d_3)$

- a. Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d_3) luôn đi qua với mọi giá trị m .
 b. Tìm m để ba đường thẳng $(d_1); (d_2); (d_3)$ đồng quy.

Giải:

a. $(d_3): y = mx + (m + 2) \Leftrightarrow m(x + 1) + 2(-y) = 0$

Để hàm số luôn đi qua điểm cố định với mọi $m \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy $N(-1; 2)$ là điểm cố định mà (d_3) đi qua

- b. Gọi M là giao điểm (d_1) và (d_2) .

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $M(2; 0)$. Nếu (d_3) đi qua $M(2; 0)$ thì $M(2; 0)$ là nghiệm (d_3) .

Ta có: $0 = 2m + (m + 2) \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$

Vậy $m = -\frac{2}{3}$ thì $(d_1); (d_2); (d_3)$ đồng quy.

Dạng 8: Các bài toán liên quan khác

Ví dụ 1: Tìm trên đường thẳng $y = x + 1$ những điểm có tọa độ thỏa mãn đẳng thức: $y^2 - 3y\sqrt{x} + 2x = 0$.

TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2002 – 2003

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$. Tọa độ điểm $M(x; y)$ cần tìm là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = x + 1 \\ y^2 - 3y\sqrt{x} + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y^2 - 2y\sqrt{x} - y\sqrt{x} + 2x = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y(y - 2\sqrt{x}) - \sqrt{x}(y - 2\sqrt{x}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ (y - 2\sqrt{x})(y - \sqrt{x}) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 = 2\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 - 2\sqrt{x} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \\ \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Điểm $M(1; 2)$ là nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2: a. Vẽ parabol $y = 2x^2$. Tìm các giá trị x để $2x^2 - 3x + 5 > -x + 17$

b. Cho $f(x) = (m^2 - 8)x^3 - (4m^2 - 9m - 13)x^2 + 2(-3m + 8)x - m$.

Tìm $m < 0$ để $f(1) = 0$, tìm $g(x)$ để $f(x) = (x - 1) \cdot g(x)$ và tìm các nghiệm còn lại, nếu có, của phương trình $f(x) = 0$.

TS lớp 10 năng khiếu (ban C, D) ĐHQG TP HCM 2003 – 2004

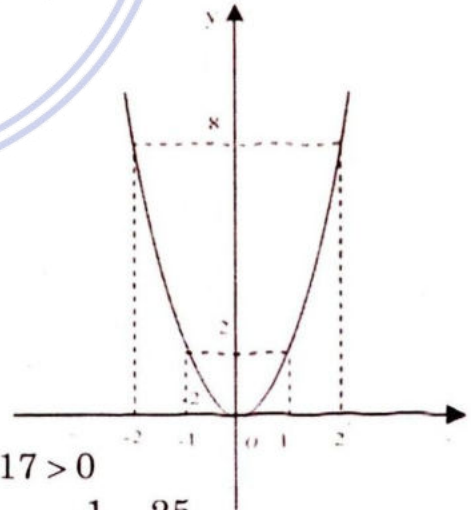
Giải

a. * TXĐ = R. Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

* Vẽ đồ thị (hình bên).

* Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = 2x^2$ là một đường parabol có đỉnh $O(0; 0)$, nằm phía trên trục hoành, trục tung là trục đối xứng.



$$2x^2 - 3x + 5 > -x + 17 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 5 + x - 17 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} > \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} > \frac{5}{2} \\ x - \frac{1}{2} < -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$b. f(1) = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 8) \cdot 1^3 - (4m^2 - 9m - 13) \cdot 1^3 + 2(-3m + 8) \cdot 1 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8 - 4m^2 + 9m + 13 - 6m + 16 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 21 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 21 = 0; \Delta' = 1 + 3 \cdot 21 = 64, \sqrt{64} = 8$$

$$m_1 = \frac{1+8}{3} = 3; m_2 = \frac{1-8}{3} = -\frac{7}{3}. \text{ Mà } m < 0 \text{ (giả thiết) nên chọn } m = -\frac{7}{3}.$$

$$\text{Lúc đó: } f(x) = -\frac{23}{9}x^3 - \frac{268}{9}x^2 + 30x + \frac{7}{3}$$

$$f(x) = -\frac{23}{9}x^3 + \frac{23}{9}x^2 - \frac{291}{9}x^2 + \frac{291}{9}x - \frac{21}{9}x + \frac{21}{9}$$

$$= -\frac{23}{9}x^2(x-1) - \frac{291}{9}x(x-1) - \frac{21}{9}(x-1)$$

$$= (x-1) \left(-\frac{23}{9}x^2 - \frac{291}{9}x - \frac{21}{9} \right) = (x-1)g(x)$$

$$\text{Vậy: } g(x) = -\frac{23}{9}x^2 - \frac{291}{9}x - \frac{21}{9}; g(x) = 0 \Leftrightarrow 23x^2 + 291x + 21 = 0$$

$$x_1 = \frac{-291 + \sqrt{82749}}{46}; x_2 = \frac{-291 - \sqrt{82749}}{46}. \text{ Phương trình } f(x) = 0 \text{ có ba}$$

$$\text{nghiệm là: } x_1 = \frac{-291 + \sqrt{82749}}{46}; x_2 = \frac{-291 - \sqrt{82749}}{46}; x_3 = 1.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2.

a. Viết phương trình đường thẳng AB.

b. Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ của điểm M thuộc cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

TS lớp 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn tỉnh Bình Định 2005 – 2006

Giải

a. Do $A \in (P)$ nên $y = 1$ nên $A(-1; 1)$

$B \in (P)$ nên $y = 4$ nên $B(2; 4)$

Phương trình AB có dạng: $y = ax + b$ (*)

Thay tọa độ của A, B vào (*) ta được:

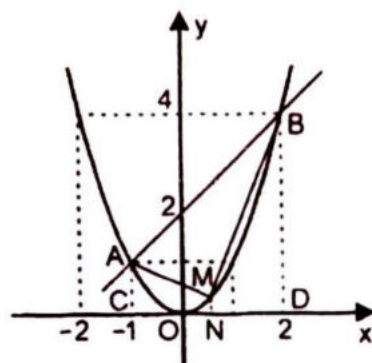
$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ b = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình (AB): $y = x + 2$.

b. Xét M là điểm bất kì thuộc P sao cho $M(m; m^2) (-1 \leq m \leq 2)$. Gọi C, D, N lần lượt là hình chiếu của A, B, M trên trục hoành.

Ta có: $NC = |m + 1| = m + 1$; $ND = |2 - m| = 2 - m$ và $CD = 3$

$$S_{AMB} = S_{BCD} = (S_{AMNC} + S_{BDNM})$$



ABC

$$= 3 \cdot \frac{(1+4)}{2} - \left[\frac{(m^2+1)(m+1)}{2} + \frac{(4+m^2)(2-m)}{2} \right]$$

$$= -\frac{3}{2}(m^2 - m) + 3 = -\frac{3}{2}\left(m^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) + \frac{27}{8} = -\frac{3}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8} \leq \frac{27}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \in [-1; 2]$.

Vậy $\max_{s_{\Delta MN}} = \frac{27}{8}$ tại $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

Ví dụ 4: Cho hàm số: $y = (2m - 3)x - 4$ (d) $\left(m \neq \frac{3}{2}\right)$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d') có phương trình $x - y + 2 = 0$ tại điểm $M(x; y)$ sao cho biểu thức $P = y^2 - 2x^2$ đạt giá trị lớn nhất.

TS lớp 10 THPT tỉnh Thái Bình 2005 – 2006

Giải

Với $n = 0$ ta có (d): $y = (2m - 3)x - 4$. Tọa độ của M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = (2m - 3)x - 4 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (2m - 3)x - 4 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = (2m - 3)x - 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m - 2)x = 3 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{m - 2} \quad (m \neq 2) \\ y = \frac{2m - 1}{m - 2} \end{cases}$$

Ta có:

$$P = y^2 - 2x^2 = \frac{4m^2 - 4m - 17}{(m - 2)^2} = \frac{8(m^2 - 4m + 4) - (4m^2 - 28m - 49)}{(m - 2)^2}$$

$$= 8 - \frac{(2m - 7)^2}{(m - 2)^2} \leq 8. \quad (\text{Do } m \neq 2 \text{ nên } (m - 2)^2 > 0 \text{ và } (2m - 9)^2 \geq 0).$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{7}{2}$ (thỏa mãn $m \neq 2$ và $m \neq \frac{3}{2}$).

Ví dụ 5: Trong hệ trục tọa độ Oxy hãy tìm đường thẳng $y = 2x + 1$ những điểm $M(x; y)$ thỏa mãn điều kiện: $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0$.

TS lớp 10 THPT chuyên tỉnh Thái Bình 2005 – 2006

Giải

Điểm $M(x; y)$ thỏa mãn 3 điều kiện:

$$x \geq 0 \quad (1); y = 2x + 1 \quad (2); y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0 \quad (3)$$

Do $x \geq 0$, ta có: $(3) \Leftrightarrow (y - 2\sqrt{x})(y - 3\sqrt{x}) \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}$ hay $y = 3\sqrt{x}$

* Nếu $y = 2\sqrt{x}$ thay vào (2) ta có $\Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ (phương trình vô nghiệm vì $2x - 2\sqrt{x} + 1 = 2\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$)

* Nếu $y = 3\sqrt{x}$ thay vào (2) ta có:

$$2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Với $x = 1$ thì $y = 3$ và $x = \frac{1}{4}$ thì $y = \frac{3}{2}$. Vậy $M_1(1; 3)$ và $M_2\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$ là các điểm cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy với $m = \frac{7}{2}$ thì P đạt giá trị lớn nhất là 8.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = (x^3 + 6x - 5)^{2006}$.

Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{17}}$

TS lớp 10 THPT chuyên Đại học Vinh, 2006 – 2007

Giải

Áp dụng hằng đẳng thức $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, ta có:

$$a = \sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{17}} \\ \Leftrightarrow a^3 = 3 + \sqrt{17} + 3 - \sqrt{17} + 3\sqrt[3]{(3 + \sqrt{17})(3 - \sqrt{17})} \cdot a \Leftrightarrow a^3 + 6a - 6 = 0.$$

$$\text{Suy ra } f(a) = (a^3 + 6a - 5)^{2006} = (a^3 + 6a - 6 + 1)^{2006} = 1^{2006} = 1.$$

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $2x - y - a^2 = 0$

và parabol (P): $y = ax^2$ (a tham số dương).

a. Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng khi đó A và B nằm bên phải trục tung.

b. Gọi x_A và x_B là hoành độ của A và B, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A + x_B}.$$

TS lớp 10 THPT Chu Văn An Hà Nội 2005 – 2006

Giải

a. Phương trình hoành độ điểm chung của (d) và (P): $ax^2 - 2x + a^2 = 0$ (1) ($a > 0$)

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = 1 - a^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1.$$

ABC

Lúc đó gọi x_A, x_B lần lượt là hoành độ của A, B (x_A, x_B là nghiệm của (1)). Theo Viét ta có: $x_A + x_B = \frac{2}{a} > 0$ và $x_A \cdot x_B = a > 0 \Rightarrow x_A > 0$ và $x_B > 0 \Rightarrow A, B$ nằm bên phải trục tung.

$$b. T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A \cdot x_B} = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \left(\frac{1}{a}\right)} = 2\sqrt{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = -3x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x - 5$.

- Vẽ đồ thị (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.
- Xác định tọa độ giao điểm A và B của đồ thị (P) và đường thẳng (d).
- Tìm tọa độ điểm M trên cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

TS lớp 10 THPT Lương Văn Chánh tỉnh Phú Yên 2005 – 2006

Giải

- a. Vẽ (P): $y = -3x^2$, có TXĐ = R.

Bảng giá trị:

x	$-\frac{5}{3}$	-1	0	1	$\frac{5}{3}$
y	$-\frac{25}{3}$	-3	0	-3	$-\frac{25}{3}$

Vẽ (d): $y = 2x - 5$, có TXĐ = R

Bảng giá trị:

x	0	$\frac{5}{2}$
y	-5	0

- b. Tọa độ điểm chung của (P) và (d) là nghiệm

$$\text{của hệ phương trình } \begin{cases} y = -3x^2 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

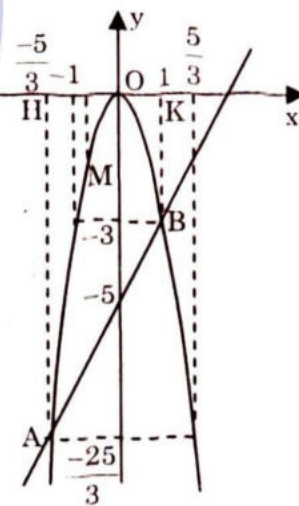
$\Rightarrow$ Phương trình hoành độ điểm chung của (P) và (d): $-3x^2 = 2x - 5$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0$ (có dạng $a + b + c = 0$)

$$\Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Với $x_1 = 1$ thì $y_1 = -3$

$$x_2 = -\frac{5}{3} \text{ thì } y_2 = -3\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{25}{3}$$



Vậy (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm $A(1; -3)$ và $B\left(-\frac{5}{3}; -\frac{25}{3}\right)$

c. Lấy $M(x_0; -3x_0^2) \in (P)$, vẽ $MI \perp xx'$, $AH \perp xx'$, $BK \perp xx'$ với $x_0 \in \left[-\frac{5}{3}; 1\right]$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{AMB} &= S_{AHKB} - S_{AHIM} - S_{BKIM} \\ &= \left(\frac{25}{3} + 3\right) \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{25}{3} + 3x_0^2\right) \cdot \left|x_0 + \frac{5}{3}\right| - \frac{1}{2} (3x_0^2 + 3) |1 - x_0|. \end{aligned}$$

$$\text{Do } x_0 \in \left[-\frac{5}{3}; 1\right] \Rightarrow x_0 + \frac{5}{3} \geq 0 \text{ và } 1 - x_0 \geq 0$$

$$\text{Vậy } S_{AMB} = \frac{136}{9} - \frac{1}{2} \left(\frac{25}{3} + 3x_0^2\right) \left(x_0 + \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{2} (3x_0^2 + 3) (1 - x_0)$$

$$\begin{aligned} S_{AMB} &= \frac{136}{9} - \frac{1}{2} \left(\frac{25}{3} x_0 + 3x_0^3 + \frac{125}{9} + 5x_0^2 + 3x_0^2 + 3 - 3x_0^3 - 3x_0\right) \\ &= \frac{20}{3} - \frac{1}{2} \left(8x_0^2 + \frac{16}{3} x_0\right) - \frac{20}{3} - 4 \left(x_0^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} x_0 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) \\ &= -4 \left(x_0 + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{64}{9} \leq \frac{64}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \text{Max}_{S_{AMB}} = \frac{64}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{3} \\ y_0 = -3x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{3} \\ y_0 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Ví dụ 9: Tìm tọa độ giao điểm A và B của đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ và $y = x^2$. Gọi D và C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác ABCD.

TS lớp 10 THPT Hà Nội 2006 – 2007

Giải

Tọa độ điểm chung của hai đồ thị (d): $y = 2x + 3$ và (P): $y = x^2$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$. Phương trình hoành độ giao điểm chung

của (d) và (P): $x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ (có dạng $a - b + c = 0$)
 $\Leftrightarrow x_1 = -1$ và $x_2 = 3$.

Với $x_1 = -1$ thì $y_1 = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$; $x_2 = 3$ thì $y_2 = 9 \Rightarrow B(3; 9)$

Vậy (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(3; 9)$

Do D và C lần lượt là hình chiếu của A và B trên trục hoành nên $D(-1; 0)$ và $C(3; 0)$. Ta tính được: $AB = 10$, $BC = 6$ và $DC = 4$.

ABC

Tứ giác ABCD là hình thang vuông ($\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$) nên

$$S_{ABCS} = \frac{(AD + BC)}{2} DC = \frac{1}{2}(9 + 1) \cdot 4 = 20 \text{ (đvdt)}.$$

Ví dụ 10: a. Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.

b. Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 3x + 4$ và $y = -\frac{x^2}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị bằng phép tính.

TS lớp 10 THPT thành phố Hồ Chí Minh 2006 - 2007

Giải

a. Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b$.

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên $a = 3$, $a \neq 1$.

Vậy (d): $y = 3x + b$. (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4, do đó:

$$4 = 3 \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 4 \text{ (b = 4 \neq 1 : nhận)}.$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y = 3x + 4$.

b. * TXĐ của hai hàm số : R.

* Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{x^2}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-2

x	-1	0
$y = 3x + 4$	1	4

* Vẽ: Hình bên.

Phương trình hoành độ giao điểm của

$$y = 3x + 4 \text{ và } y = -\frac{x^2}{2} \text{ là:}$$

$$3x + 4 = -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 6x + 8 = -x^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$$

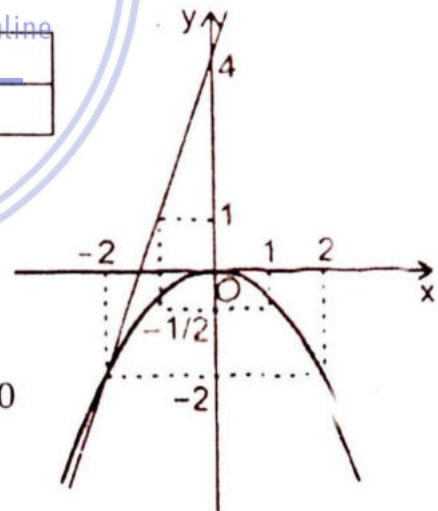
$$\Delta' = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = \frac{-3 + 1}{1} = -2; x_2 = \frac{-3 - 1}{1} = -4.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x_1 = -2; x_2 = -4$.

$$x_1 = -2 \text{ thì } y_1 = -\frac{x_1^2}{2} = -2; x_2 = -4 \text{ thì } y_2 = -\frac{x_2^2}{2} = -8.$$

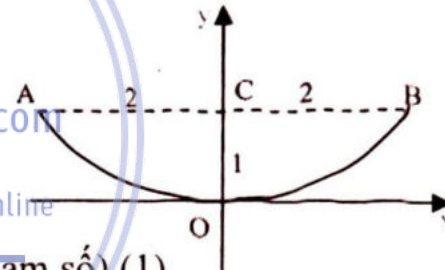
Giao điểm của hai đồ thị là A(-2; -2) và B(-4; -8).



Bài tập vận dụng

1. Cho đường thẳng: $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ (m là tham số)
 - a. Chứng minh rằng đường thẳng luôn luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .
 - b. Tính giá trị của m để khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng là lớn nhất.
2. Trong các mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: y = -\frac{2k}{k-1}x + \frac{2}{k-1}$ ($k \neq 1$).
 - a. Với giá trị nào của k đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$? Khi đó hãy tính góc tạo bởi giữa d với tia Ox .
 - b. Tìm k để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d lớn nhất.
3. Cho hàm số $y = mx + m - 1$. Chứng minh rằng với mọi m đồ thị hàm số trên luôn đi qua một điểm cố định.
4. Cho hàm số $y = (2m - 1)x$ với $m \neq \frac{1}{2}$
 - a. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến? nghịch biến?
 - b. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
 - c. Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m vừa tìm được ở câu b.
 - d. Đồ thị vừa vẽ có quan hệ như thế nào với các đường thẳng sau:
 $3x + y = 1$ (1); $3y - x - 12 = 0$ (2)
- 5.a. Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$, điểm $A(0, 1)$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = -1$. Gọi m là một điểm bất kỳ thuộc parabol. Chứng minh rằng MA bằng khoảng cách MH từ điểm M đến đường thẳng (d) .
 b. Cho điểm $A(0; a)$, gọi (d) là đường thẳng có phương trình $y = -a$. Chứng minh rằng quỹ tích của điểm $M(x; y)$ sao cho khoảng cách MH từ M tới (d) bằng MA là một parabol.
6. a. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$
 b. Gọi C là một điểm tùy ý nằm trên parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$. Gọi K là trung điểm của OC . Khi điểm C di chuyển trên parabol đó thì điểm K di chuyển trên đường nào?
7. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$.
 - a. Xác định tọa độ các giao điểm A, B của parabol và đường thẳng đã cho.
 - b. Xác định tọa độ điểm C thuộc cung AB của parabol đó sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

ABC

8. Cho parabol $y = x^2$. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$, các tiếp tuyến kẻ từ M với parabol vuông góc với nhau.
9. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P).
- Tìm a, b biết rằng (D) đi qua A(-1;3) và B(2;0).
 - Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P).
10. Cho parabol (P) có đỉnh ở gốc tọa độ O và đi qua điểm $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$.
- Viết phương trình của parabol (P).
 - Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $x + 2y = 1$ và đi qua điểm B(0;m). Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $3x_1 + 5x_2 = 5$.
11. Cho hai đường thẳng có phương trình: $mx - (n + 1)y - 1 = 0$ (d) và $nx + 2my + 2 = 0$ (d'). Xác định các giá trị của m và n sao cho (d) và (d') cắt nhau tại điểm P(-1;3).
12. Thiết diện đi qua trục của một chiếc gương có dạng parabol (hình). Hãy xác định phương trình của parabol đó, biết rằng độ sâu OC = 1cm và đường kính AB = 4cm.
- 
13. Cho đường thẳng $(m + 2)x - my = -1$ (m là tham số) (1)
- Tìm điểm cố định mà đường thẳng (1) luôn đi qua.
 - Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (1) là lớn nhất.
14. Trong hệ trục tọa độ Oxy, lấy các điểm A và B sao cho A(1; 1), B(9; 1). Viết phương trình của đường thẳng (d) vuông góc với AB và chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau.
15. a. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.
- Có bao nhiêu điểm nằm trên cạnh hoặc nằm trong tam giác tạo bởi ba đường thẳng $x = 6$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ và có hoành độ và tung độ là các số nguyên?
15. Cho hai đồ thị (P): $y = mx^2$ và (d): $y = 2x - 5$. Tìm m để (P) và (d) tiếp xúc nhau.

- 17.a Vẽ đồ thị Parabol (P) của hàm số $y = -x^2$ và đường thẳng (D): $y = x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.
 b. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.
 Đồ thị của Parabol(P) và đường thẳng (D) được vẽ như sau:
18. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).
- Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của hàm số đã cho cắt đường thẳng (d): $y = -2x + 3$ tại điểm A có tung độ bằng -1 .
 - Vẽ đồ thị (P) của hàm số ứng với giá trị a vừa tìm được trong câu a) và vẽ đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Tìm giao điểm thứ hai B của (P) và (d).
19. Trong cùng một hệ trục tọa độ, cho (P) và (D) lần lượt là đồ thị của $y = x^2$ và $y = -x + 2$.
- Gọi (D') là đường thẳng song song với (D) và (D') đi qua điểm $M(0; m)$ (m là tham số). Viết phương trình của (D').
 - Với giá trị nào của m :
 - + (D') cắt (P) tại 2 điểm khác nhau?
 - + (D') và (P) không có điểm chung?
 - + (D') tiếp xúc với (P)?
20. Cho hai đường thẳng có phương trình: $mx - (n + 1)y - 1 = 0$ (d) và $nx + 2my + 2 = 0$ (d'). Xác định các giá trị của m và n sao cho (d) và (d') cắt nhau tại điểm $P(-1; 3)$.
21. Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $x + 2y = 1$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): 2x - 3y = 4$ và $(d_2): 3x + y = 5$.
22. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P).
- Tìm a, b biết rằng (D) đi qua $A(-1; 3)$ và $B(2; 0)$.
 - Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P).
23. Cho parabol (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (D): $y = mx - 2m - 1$
- Vẽ (P).
 - Tìm m để (D) tiếp xúc với (P).
 - Chứng tỏ rằng (D) luôn đi qua một điểm cố định A thuộc (P).
24. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (D): $y = mx - m + 1$.
- Chứng minh rằng đường thẳng (D) và parabol (P) luôn có điểm chung với mọi giá trị của m .
 - Với giá trị nào của m thì (D) và parabol (P) tiếp xúc với nhau?
 - Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị của hai hàm số tìm được ở câu b

25. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(d): y = \frac{3}{2}x + 2m$ cắt Parabol

$$(P): y = -\frac{3}{4}x^2 \text{ tại hai điểm phân biệt?}$$

26. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 4 điểm $A(-3;4)$, $B(-2;1)$, $C(1;2)$, $D(0;5)$.

- Cho biết đơn vị đo trên các trục tọa độ là cm, tính độ dài các cạnh và các đường chéo của tứ giác ABCD. Tứ giác ABCD là hình gì?
- Dựa vào hình vẽ, cho biết tọa độ giao điểm của 2 đường chéo của tứ giác ABCD.

27. Cho hàm số $y = (2m - 1)x$ với $m \neq \frac{1}{2}$

- Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến? nghịch biến?
- Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
- Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m vừa tìm được ở câu b.
- Đồ thị vừa vẽ có quan hệ như thế nào với các đường thẳng sau:

$$3x + y = 1 \quad (1);$$

$$3y - x - 12 = 0 \quad (2)$$

28. a. Xác định các hệ số a, b, c của hàm số $y = ax^2 + bx + c$, biết đồ thị (P) của hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; -5)$, cắt trục Ox tại điểm $(-1; 0)$ và đi qua điểm $(1; -6)$.

b. Với giá trị nào của x thì hàm số vừa xác định có giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó của hàm số.

c. Xác định sự biến thiên của hàm số đã tìm được ở câu a) khi $x < \frac{3}{4}$ và khi $x > \frac{3}{4}$.

29. Cho parabol (P) có đỉnh ở gốc tọa độ O và đi qua điểm $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$

- Viết phương trình của parabol (P).
- Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $x + 2y = 1$ và đi qua điểm $B(0; m)$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $3x_1 + 5x_2 = 5$.

30. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

- Vẽ đồ thị của hàm số trên.
- Với giá trị nào của x thì $y \geq 4$.

31. Cho hàm số $y = x^2 + bx + c$

- Xác định các hệ số b và c biết đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(1; 2)$ và $B(2; 1)$
- Với $b; c$ vừa tìm được, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- Chứng minh rằng đường thẳng $y = 2x - 4$ tiếp xúc với đồ thị của hàm số trên.

32. Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (D) có phương trình $y = 2x + m^2 + 1$

- Chứng minh rằng với mọi m , đường thẳng (D) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
- Kí hiệu $x_A; x_B$ lần lượt là hoành độ của điểm A và điểm B. Hãy xác định giá trị của tham số m sao cho $x_A^2 + x_B^2 = 10$.

33. Cho đường thẳng (D): $5x - 7y = 3$

- Một parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ, trục đối xứng Oy và tiếp xúc với (D). Tìm tọa độ tiếp điểm.
- Chứng minh rằng trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 6; x = 18; y = 7; y = 23$ có duy nhất 1 điểm thuộc (D) mà tọa độ của điểm đó là cặp số nguyên.

34. Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d) có hệ số góc m đi qua điểm $M(-1; -2)$.

- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt.
- Xác định m để A, B nằm về hai phía của trục tung.

35. Cho các điểm $A(-2; 0); B(0; 4); C(1; 1); D(-3; 2)$

- Chứng minh 3 điểm A, B, D thẳng hàng; 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tính diện tích tam giác ABC.

36. Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(5; 2)$ và $B(3; -4)$

- Viết phương trình đường thẳng AB.
- Xác định điểm M trên trục hoành để tam giác MAB cân tại M.

37. Cho hàm số $y = -x^2$.

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2$, suy ra đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 2$.
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(1; -2)$, hệ số góc k . Xác định k để (d) cắt (P) tại hai điểm B, C nhận A làm trung điểm.

ABC

38. Cho parabol (P) có phương trình: $y = \frac{x^2}{4} - 2x$

a. Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4}$.

b. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) với $3x - 4y - 24 = 0$.

c. Lập phương trình tiếp tuyến của parabol (P) tại $A(8;0)$.

39. a. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{khi } -3 \leq x \leq 0 \\ -x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b. Tìm m để đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x + 4$ cắt trục Ox tại hai điểm A, B phân biệt và trục Oy tại điểm C sao cho $S_{ABC} = 1997$.

40. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$, có đồ thị là (P). Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm M và N nằm trên Parabol (P) lần lượt có hoành độ là -2 và 1.

Hướng dẫn và đáp số

1.a. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m-2)x + (m-1)y = 1$ (1) đi qua điểm cố định là: $(m-2)x + (m-1)y = 1$ với mọi m

$$\Leftrightarrow mx - 2x + my - y - 1 = 0 \quad \text{với mọi m}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)m - (2x+y+1) = 0 \quad \text{với mọi m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy các đường thẳng (1) luôn đi qua điểm cố định $N(-1;1)$.

b. Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung.

Ta có: $x=0 \Rightarrow y = \frac{1}{1-m}$. Do đó $OA = \frac{1}{|1-m|}$. Gọi B là giao điểm của

đường thẳng (1) với trục hoành. Ta có: $y=0 \Rightarrow x = \frac{1}{m-2}$.

Do đó $OB = \frac{1}{|m-2|}$. Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (1).

Ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = (m-1)^2 + (m-2)^2 = 2m^2 - 6m + 5 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Suy ra $h^2 \leq 2$, $\max h = \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m = \frac{3}{2}$.

2. a. Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$

$$\Leftrightarrow -\frac{2k}{k-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow k = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$$

Khi đó góc nhọn α tạo bởi giữa d và tia Ox có $\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

b. Gọi h là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d.

Nếu $k = 0$ thì d: $y = -2$ nên $h = 2$

Nếu $k \neq 0, k \neq 1$ ta gọi A và B lần lượt là giao điểm của đường thẳng d với trục Ox và Oy thì $A\left(\frac{1}{k}; 0\right)$ và $B\left(0; \frac{2}{k-1}\right)$.

$$\text{Suy ra: } OA = \left|\frac{1}{k}\right|, OB = \left|\frac{2}{k-1}\right|$$

Vì tam giác OAB vuông tại O nên: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

$$\Rightarrow OH = \frac{2}{\sqrt{5k^2 - 2k + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5\left(k - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}} \leq \sqrt{5}$$

$$OH = \sqrt{5} \text{ khi } k = \frac{1}{5}.$$

Với $k = \frac{1}{5}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d lớn nhất.

3. Xét điểm $A(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ. Ta có $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số: $y = mx + m - 1, \forall m \Leftrightarrow y_0 = mx_0 + m - 1, \forall m$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)m - (y_0 + 1) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -1).$$

Vậy đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định $A(-1; -1), \forall m$.

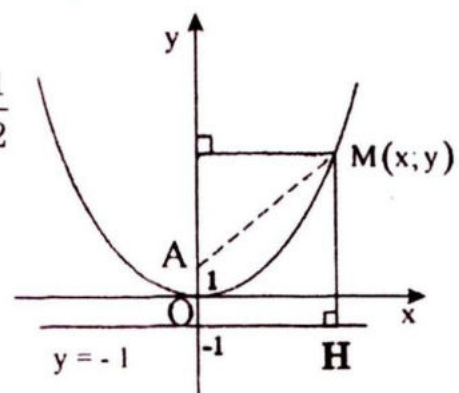
4. a. Hàm số đồng biến nếu $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

ngược biến nếu $2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

$$\text{b. Ta có: } \frac{3}{2} = (2m - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m = -1.$$

c. Học sinh tự làm.

d. Song song với đường thẳng (1). Vuông góc với đường thẳng (2).



5. a. Ta luôn có: $MH = y + 1$ (1)

Để tính MA , ta kẻ $MI \perp Oy$.

Ta có $MI = |x|$, $AI = |y - 1|$ nên

$$\begin{aligned} MA^2 &= MI^2 + AI^2 = x^2 + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Do $y = \frac{1}{4}x^2$ nên thay x^2 bởi $4y$ ta được:

$$MA^2 = 4y + y^2 - 2y + 1 = (y + 1)^2$$

Do đó $MA = |y + 1| = y + 1$ (do $y \geq 0$) (2).

Từ (1) và (2) ta có: $MA = MH$.

- b. (hình ứng với $a > 0$) theo công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $M(x; y)$ và $A(0; a)$ ta có: $MA^2 = (x - 0)^2 + (y - a)^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2$.

Ta lại có:

$MH = |y + a|$ nên

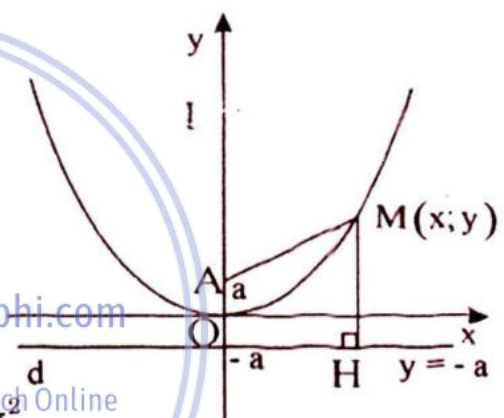
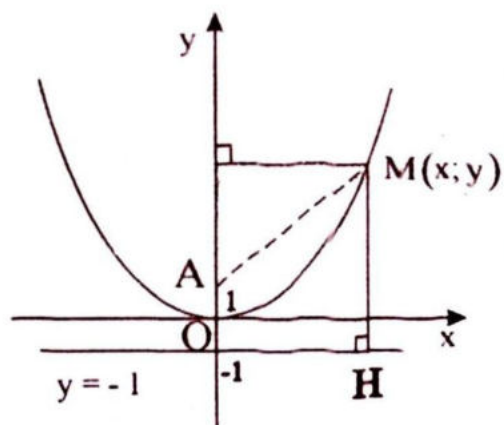
$$MH^2 = (y + a)^2 = y^2 + 2ay + a^2;$$

$$MA^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4ay \Leftrightarrow y = \frac{1}{4a}x^2$$

Do đó, quỹ tích của M là parabol $y = \frac{1}{4a}x^2$.



Chú ý: Tổng quát, cho một điểm A và đường thẳng (d) không đi qua A . quỹ tích các điểm M sao cho khoảng cách MA bằng khoảng cách từ M đến (d) là một parabol.

6. a. Xem hình

b. Gọi tọa độ của điểm C là $(m; n)$. Điểm

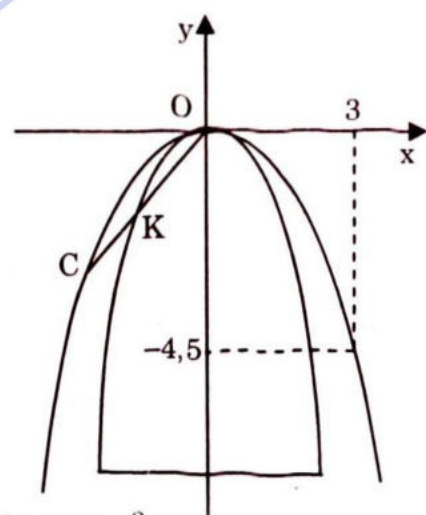
C thuộc parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$ nên $n = -\frac{1}{2}m^2$

(1). Gọi tọa độ của điểm K là $(x; y)$, ta cần biểu thị y theo x . K là trung điểm của OC

nên $x = \frac{m}{2}$; $y = \frac{n}{2}$, suy ra $m = 2x$, $n = 2y$.

Thay vào (1) ta được: $2y = -\frac{1}{2}(2x)^2 = -2x^2$

Do đó $y = -x^2$. Điểm K di chuyển trên parabol $y = -x^2$.



7. a. Hoành độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$

là nghiệm của phương trình: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$. (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 3$. Với $x = -2$ thì $y = 2$, với $x = 3$ thì $y = 4\frac{1}{2}$. Giao điểm của parabol với đường thẳng là

$A(-2; 2)$ và $B(3; 4\frac{1}{2})$.

b. Ta cần tìm điểm C thuộc cung AB và cách xa AB nhất. Ta xác định Đường thẳng (d) song song với AB và tiếp xúc với parabol, tiếp điểm là điểm C cần tìm.

Đường thẳng (d) song song với AB có dạng: $y = \frac{1}{2}x + n$.

Điều kiện để d tiếp xúc với parabol là phương trình sau có nghiệm kép:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + n = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 2n = 0$$

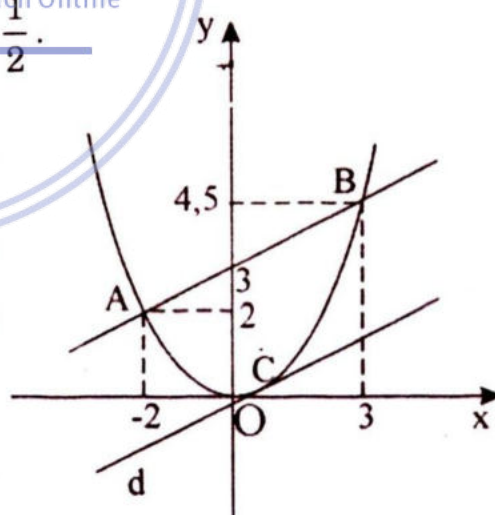
Phương trình (2) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 8n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{8}$.

Với $n = -\frac{1}{8}$ thì nghiệm kép của (2) là $x = -\frac{1}{2}$.

Khi đó: $y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$. Tọa độ

tiếp điểm C của đường thẳng (d) với parabol là $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$. Mọi điểm C' khác C

thuộc cung AB của parabol đều có khoảng cách AB nhỏ hơn khoảng cách từ C đến AB.



Vậy ABC có diện tích lớn nhất khi điểm C có tọa độ $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$

8. (Hình) trước hết lập phương trình đường thẳng $y = mx + n$ đi qua

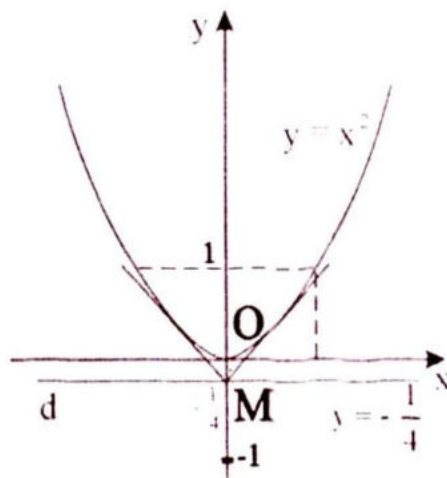
$$M\left(x_0; -\frac{1}{4}\right) \text{ được } y = mx - \left(mx_0 + \frac{1}{4}\right)$$

Giải điều kiện phương trình

$$x^2 = mx - (mx_0 + \frac{1}{4}) \text{ có nghiệm kép,}$$

$$\text{được } m^2 - 4mx_0 - 1 = 0$$

Hai nghiệm m_1, m_2 của phương trình này có tích $m_1 m_2 = -1$ (theo hệ thức Viet) chứng tỏ rằng hai tiếp tuyến của parabol kẻ từ M vuông góc với nhau.



9. a. $A(-1; 3) \in (D) \Leftrightarrow 3 = -a + b$

$$B(2; 0) \in (D) \Leftrightarrow 0 = 2a + b.$$

Ta có hệ phương trình có ẩn a, b :
$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + a \\ 3a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng (D) là: $y = -x + 2$.

- b. Ta biết rằng (D) tiếp xúc với (P) khi phương trình hoành độ giao điểm của chúng có nghiệm kép. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P): $kx^2 = -x + 2 \Leftrightarrow kx^2 + x - 2 = 0$ (1)

(1) có nghiệm kép khi $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 1 + 8k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$

Vậy, phương trình của (P) là: $y = -\frac{1}{8}x^2$

- 10.a. Phương trình của parabol (P) có dạng: $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

(P) đi qua điểm $A(1; -\frac{1}{4})$, nên: $a = -\frac{1}{4}$.

Vậy phương trình của parabol (P) là: $y = -\frac{1}{4}x^2$.

- b.+ Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,

nên d có dạng: $y = -\frac{1}{2}x + b$ ($b \neq \frac{1}{2}$).

+ $B(0; m) \in d : m = 0 + b = b$ Suy ra phương trình đường thẳng (d) là:

$$y = -\frac{1}{2}x + m \quad (m \neq \frac{1}{2}).$$

+ Phương trình cho hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$-\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4m = 0$$

+ Để (d) cắt (P) tại 2 điểm thì điều kiện cần và đủ là:

$$\Delta' = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4} \quad (*).$$

+ Với điều kiện (*), (d) cắt (P) tại 2 điểm có hoành độ x_1 và x_2 . Theo giả thiết, ta có: $3x_1 + 5x_2 = 5 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 2x_2 = 5$

+ Áp dụng định lý Viet, ta có: $6 + 2x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$

+ Thay nghiệm x_2 vào phương trình: $\frac{1}{4} + 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{16}$.

+ Đối chiếu điều kiện (*), ta có: $m = -\frac{5}{16}$.

11. Parabol $y = ax^2$ đi qua $B(2; 1)$ nên $1 = a \cdot 2^2$, do đó $a = \frac{1}{4}$. Phương trình

của parabol là $y = \frac{1}{4}x^2$.

12. (hình) Học sinh tự giải

13. a. Gọi $N(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (1) luôn đi qua, suy ra phương trình $(m+2)x_0 - my_0 = -1$ luôn có nghiệm m tùy ý

$$\Leftrightarrow m(x_0 - y_0) + 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 - y_0) = 0 \\ 2x_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà đường thẳng (1) luôn đi qua $N\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

b. Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (1). Gọi $A; B$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng (1) với các trục tọa độ. Kẻ OH vuông góc với đường thẳng (1). Ta tính được tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; \frac{1}{m}\right); B\left(\frac{-1}{m+2}; 0\right)$. Áp

dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{m+2}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = m^2 + (m+2)^2$$

$$\Leftrightarrow OH^2 = \frac{1}{2m^2 + 4m + 4} = \frac{1}{2(m^2 + 2m + 1) + 2} = \frac{1}{2(m+1)^2 + 2}$$

nhất khi và chỉ khi biểu thức $2(m+1)^2 + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó

$m = -1$. Vậy giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (1) là lớn nhất là $m = -1$ và $OH = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ABC

14. (hình) Gọi H là giao điểm của AB và Oy, ta có:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB.OH = 4.$$

Gọi giao điểm của (d) với AB, OB, Ox theo thứ tự là C, D, K. Đặt $OK = a$ với $0 < a < 9$, ta có $CB = HB - HC = 9 - a$.

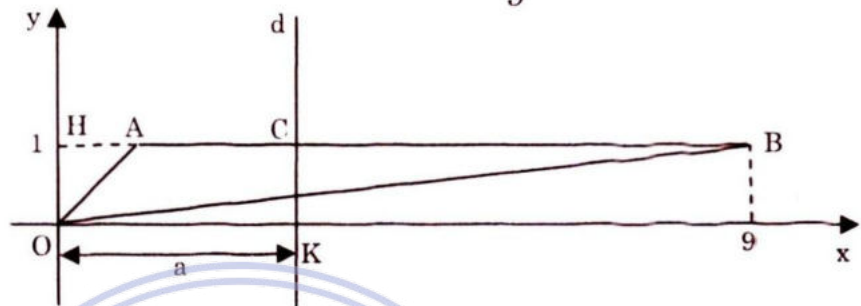
Đường thẳng OB có phương trình $y = \frac{1}{9}x$. Điểm D có hoành độ $OK = a$

và nằm trên đường thẳng OB nên có tung độ $KD = \frac{a}{9}$.

Do đó:

$$DC = KC - KD$$

$$= 1 - \frac{a}{9} \\ = \frac{9-a}{9}.$$



$$S_{BCD} = \frac{1}{2} CB.CD = \frac{1}{2}(9-a) \cdot \frac{9-a}{9} = \frac{(9-a)^2}{18}$$

Do $S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{OAB}$ nên $\frac{(9-a)^2}{18} = 2$. Ta tìm được $a = 15$ (loại) và $a = 3$.

Đường thẳng phải tìm có phương trình $x = 3$.

15. a. Hình vẽ bên

b. Đường thẳng $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ (d) cắt

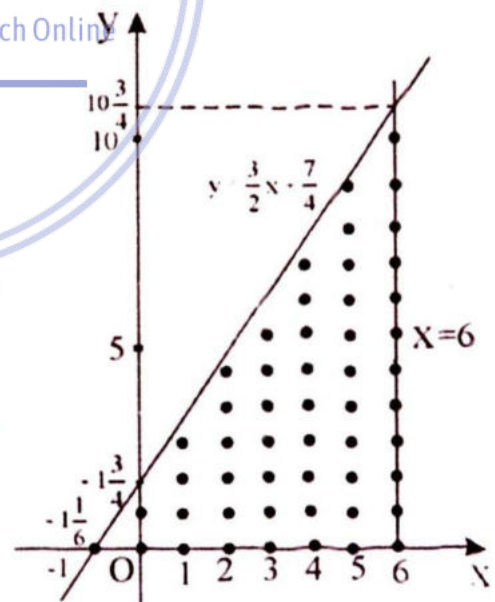
đường thẳng $y = 0$ (trục hoành) tại điểm có hoành độ $x = -1\frac{1}{6}$. đường thẳng (d)

cắt đường thẳng $x = 6$ tại điểm có tung độ $y = 10\frac{3}{4}$. Xét hàm số $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

Lần lượt cho x nhận các giá trị $-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$, ta được các giá trị tương ứng là:

$$\frac{1}{4}; 1\frac{3}{4}; 3\frac{1}{4}; 6\frac{1}{4}; 7\frac{3}{4}; 9\frac{1}{4}; 10\frac{3}{4}.$$

Do đó số điểm có tọa độ nguyên phải tìm trên các đường thẳng $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6$ lần lượt là 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11. Tổng số điểm phải đếm là: $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 = 48$.



16. Phương trình hoành độ giao điểm: $mx^2 = 2x - 5 \Leftrightarrow mx^2 - 2x + 5 = 0$ (1);
(P) và (d) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 5m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}$

Vậy $m = \frac{1}{5}$ là giá trị cần tìm.

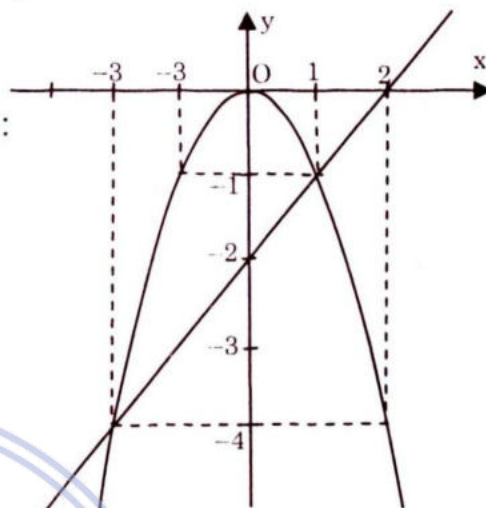
- 17.a) * Bảng giá trị đặc biệt của hàm số $y = -x^2$:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

* Bảng giá trị đặc biệt của hàm số $y = x - 2$:

x	0	2
$y = x - 2$	-2	0

Đồ thị của Parabol(P) và đường thẳng (D) được vẽ như sau:



- b) Phương trình hoành độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (D) là:

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } x = -2 \text{ (a + b + c = 0)}$$

Khi $x = 1$ thì $y = -1$; Khi $x = -2$ thì $y = -4$.

Vậy Parabol (P) cắt đường thẳng (D) tại hai điểm là $(1; -1)$ và $(-2; -4)$.

18. a. + Điểm A ở trên (d) và có tung độ bằng -1 nên: $-1 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = 2$.
Do đó: $A(2; -1)$.

+ A là giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^2$ với d, nên A thuộc (P), suy

$$\text{ra: } -1 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}.$$

- b. + Vẽ parabol (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$. Vẽ đường thẳng (d)

+ Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$$-\frac{1}{4}x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

+ Giải phương trình ta được nghiệm thứ hai là: $x_2 = 6 \Rightarrow y_2 = -9$

Vậy giao điểm thứ hai của (P) và (d) là $B(6; -9)$.

19. a. (D') có dạng $y = ax + b$.

+ Vì $(D') \parallel (D) \Rightarrow a = -1$

+ $M(0; m) \in (D') \Leftrightarrow m = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = m$. Vậy phương trình của (D') là: $y = -x + m$.

- b. Số giao điểm của (D') và (P) chính là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D').

Với (P): $y = x^2$ và (D'): $y = -x + m$, ta có phương trình hoành độ giao điểm của (D') và (P) là: $x^2 = -x + m \Leftrightarrow x^2 + x - m = 0$. (1).

* $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$. Vậy, với $m > -\frac{1}{4}$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, suy ra (D') và (P) cắt nhau tại hai điểm khác nhau.

* $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + 4m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$. Vậy, với $m < -\frac{1}{4}$ phương trình (1) vô nghiệm, suy ra (D') và (P) không có điểm chung.

* $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$. Vậy, với $m = -\frac{1}{4}$ phương trình (1) có nghiệm kép, suy ra (D') và (P) tiếp xúc nhau.

20. Đường thẳng (d) và (d') cắt nhau tại $P(-1;3)$ khi và chỉ khi hệ phương

trình:
$$\begin{cases} mx - (n+1)y - 1 = 0 \\ nx + 2my + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất } (-1;3)$$

Kết quả: $m = -\frac{10}{19}$; $n = -\frac{22}{19}$.

21. + Đường thẳng $x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, nên có hệ số góc $a = -\frac{1}{2}$

+ Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $x + 2y = 1$, nên

(d): $y = -\frac{1}{2}x + b$ $\left(b \neq \frac{1}{2} \right)$

+ Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \text{Giải hệ phương trình ta có } M\left(\frac{19}{11}; -\frac{2}{11}\right)$$

+ Đường thẳng (d) đi qua M nên: $-\frac{2}{11} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{19}{11} + b \Leftrightarrow b = \frac{15}{22} \neq \frac{1}{2}$

+ Vậy phương trình của đường thẳng (d): $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{22} \Leftrightarrow 11x + 22y = 15$

22. a. $A(-1;3) \in (D) \Leftrightarrow 3 = -a + b$; $B(2;0) \in (D) \Leftrightarrow 0 = 2a + b$

Ta có hệ phương trình có ẩn a, b:
$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + a \\ 3a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

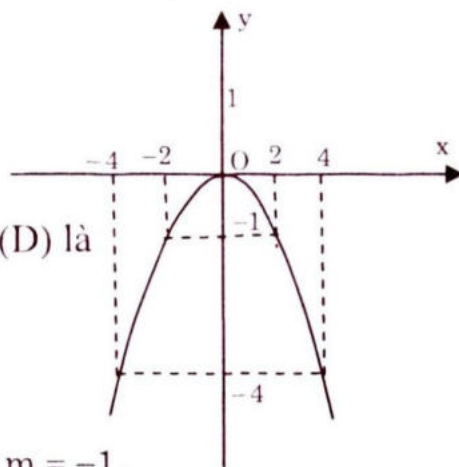
Vậy phương trình của đường thẳng (D) là: $y = -x + 2$.

b. Ta biết rằng (D) tiếp xúc với (P) khi phương trình hoành độ giao điểm của chúng có nghiệm kép. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P): $kx^2 = -x + 2 \Leftrightarrow kx^2 + x - 2 = 0$ (1)

(1) có nghiệm kép khi
$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 1 + 8k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}.$$

Vậy, phương trình của (P) là: $y = -\frac{1}{8}x^2$.

23. a. Vẽ (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ (Hình)



b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là

$$-\frac{x^2}{4} = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0$$

$$\Delta' = 4m^2 + 8m + 4 = (2m + 2)^2.$$

(D) tiếp xúc với (P) khi $\Delta' = (2m + 2)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$.

c. Giả sử $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc (D), ta có: $y_0 = mx_0 - 2m - 1$ với

$$\text{mọi } m \Leftrightarrow m(x_0 - 2) - 1 - y_0 = 0 \text{ với mọi } m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ -1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

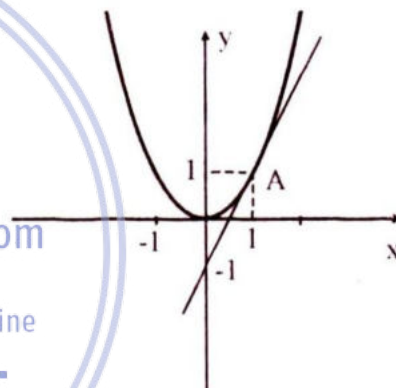
Vậy (D) luôn đi qua điểm cố định $A(2; -1)$ thuộc (P): $y = -\frac{x^2}{4}$

24. a. Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và (D) là:

$$x^2 = mx - m + 1(1) \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0$$

$$\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \geq 0 \text{ với mọi giá}$$

trị của $m \Rightarrow$ phương trình (1) luôn luôn có nghiệm hay (D) và (P) luôn luôn có điểm chung với mọi giá trị của m .



b. (D) tiếp xúc với (P) khi (1) có nghiệm kép

$$\text{hay } \Delta = (m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Lúc đó phương trình của đường thẳng (D) là: $y = 2x - 1$

c. Vẽ đồ thị: Trên đồ thị ta thấy (P) và (D) tiếp xúc nhau tại điểm A (1; 1)

25. Tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2m \\ y = -\frac{3}{4}x^2 \end{cases}. \text{ Suy ra phương trình hoành độ giao điểm:}$$

$$\frac{3}{2}x + 2m = -\frac{3}{4}x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 8m = 0 \quad (1)$$

Điều kiện để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt là (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{nghĩa là: } \Delta' = 9 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{8}.$$

ABC

26. a. + Tứ giác ABCD có: Các cạnh bằng nhau vì cùng bằng cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 3cm và 1cm. Do đó độ dài mỗi cạnh của tứ giác là: $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ (cm). Các đường chéo bằng nhau vì cùng bằng cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 2cm và 4cm. Do đó độ dài mỗi đường chéo của tứ giác là: $AC = BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (cm). Tứ giác ABCD có 4 cạnh bằng nhau và hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

b. + Từ hình vẽ suy ra giao điểm của 2 đường chéo là: $I(-1; 3)$.

27. a. Hàm số đồng biến nếu $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$
nghịch biến nếu $2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

b. Ta có: $\frac{3}{2} = (2m - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m = -1$.

c. Học sinh tự làm.

d. Song song với đường thẳng (1). Vuông góc với đường thẳng (2).

28. a. + (P) cắt Oy tại $(0; -5)$, nên $c = -5$.

+ (P) cắt Ox tại $(-1; 0)$, nên $0 = a - b - 5 \Leftrightarrow a - b = 5$ (1)

+ (P) đi qua điểm $(1; -6)$, nên $-6 = a + b - 5 \Leftrightarrow a + b = -1$ (2)

+ Giải hệ (1) và (2) ta có: $a = 2; b = -3$.

Hàm số cần xác định là: $y = 2x^2 - 3x - 5$ (P).

b. + Ta có: $y = 2x^2 - 3x - 5 = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$y = 2x^2 - 3x - 5 \geq -\frac{49}{8}, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là

$y_{\min} = -\frac{49}{8}$ khi và chỉ khi: $x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

c. $\forall x_1, x_2: x_1 < x_2 < \frac{3}{4} \Rightarrow x_1 - \frac{3}{4} < x_2 - \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 > \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2$

$$\Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} > \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow 2\left[\left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] > 2\left[\left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 - 3x_1 - 5 > 2x_2^2 - 3x_2 - 5$$

$\Rightarrow y_1 > y_2$. Vậy: hàm số nghịch biến khi $x < \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned}
 \text{d. } \forall x_1, x_2 : \frac{3}{4} < x_1 < x_2 &\Rightarrow 0 < x_1 - \frac{3}{4} < x_2 - \frac{3}{4} \Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 < \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 \\
 &\Rightarrow \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} < \left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} \\
 &\Rightarrow 2 \left[\left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} \right] < 2 \left[\left(x_2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} \right] \\
 &\Rightarrow 2x_1^2 - 3x_1 - 5 < 2x_2^2 - 3x_2 - 5 \Rightarrow y_1 < y_2 \\
 &\text{Vậy hàm số đồng biến khi } x > \frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

29.a. Phương trình của parabol (P) có dạng: $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

(P) đi qua điểm $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$, nên: $a = -\frac{1}{4}$.

Vậy phương trình của parabol (P) là: $y = -\frac{1}{4}x^2$.

b.+ Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,
nên phương trình của d có dạng:

$$y = -\frac{1}{2}x + b \quad \left(b \neq \frac{1}{2}\right), B(0; m) \in (d): m = 0 + b = b$$

Suy ra phương trình đường thẳng (d) là: $y = -\frac{1}{2}x + m \quad \left(m \neq \frac{1}{2}\right)$.

+ Phương trình cho hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là: $-\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4m = 0$

+ Để Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại 2 điểm thì điều kiện cần và đủ là: $\Delta' = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$ (*).

+ Với điều kiện (*), đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại 2 điểm có hoành độ x_1 và x_2 . Theo giả thiết, ta có: $3x_1 + 5x_2 = 5 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 2x_2 = 5$

+ Áp dụng định lý Viet, ta có: $6 + x_2 = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

+ Thay nghiệm x_2 vào phương trình: $\frac{1}{4} + 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{16}$.

+ Đối chiếu điều kiện (*), ta có: $m = -\frac{5}{16}$.

ABC

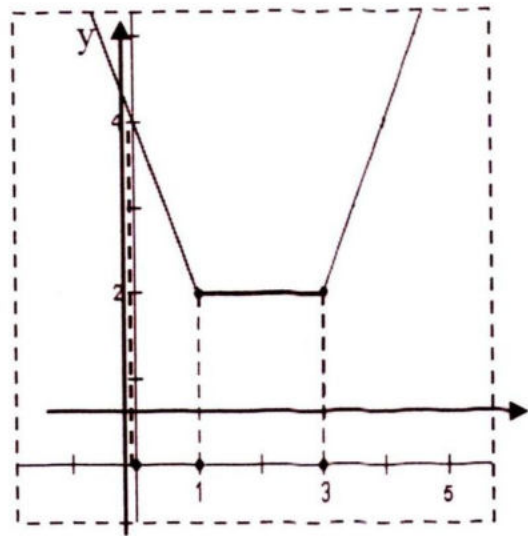
30. a. $y = |x - 1| + |x - 3|$

$$\Leftrightarrow y = \begin{cases} -2x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$$

b. Ta có: $y \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4 \geq 4 \\ 2x - 4 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$

31. a. Đồ thị hàm số $y = x^2 + bx + c$ đi qua các điểm $A(1; 2)$ và $B(2; 1)$ nên

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ 2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$



b. $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$ với mọi x . Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là 1 khi $x = 2$.

c. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x - 4$ và đồ thị hàm số trên là: $x^2 - 4x + 5 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$

Phương trình có nghiệm kép $x = 3$

Vậy hai đồ thị tiếp xúc nhau tại $M(3; 2)$.

32. a. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là:

$$x^2 = 2x + m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = 1 + m^2 + 1 = m^2 + 2 > 0 \text{ với mọi giá trị của } m$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ Với mọi m , (D) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

b. x_A, x_B chính là nghiệm của (1) nên áp dụng định lý Viet, ta có:

$$S = x_A + x_B = 2; P = x_A \cdot x_B = -m^2 - 1$$

$$x_A^2 + x_B^2 = (x_A + x_B)^2 - 2x_A \cdot x_B = 4 + 2m^2 + 2 = 10 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

33. a. Parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ, trục đối xứng Oy nên có phương

trình là: $y = ax^2$ ($a \neq 0$). (D) có phương trình: $y = \frac{5x - 3}{7}$

(P) tiếp xúc với (D) khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm của chúng có nghiệm kép.

$$ax^2 = \frac{5x - 3}{7} \Leftrightarrow 7ax^2 - 5x + 3 = 0; \Delta = 25 - 84a = 0 \Rightarrow a = \frac{25}{84}$$

Tọa độ của tiếp điểm $M\left(\frac{6}{5}; \frac{3}{7}\right)$.

b. Áp dụng công thức nghiệm tổng quát của phương trình bậc nhất hai ẩn ta

có công thức nghiệm của $5x - 7y = 3$ là: $\begin{cases} x = 2 - 7t \\ y = 1 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Mà } 6 \leq x \leq 18 \Leftrightarrow -\frac{4}{7} \geq t \geq -\frac{16}{7} \quad (1); 7 \leq x \leq 23 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} \geq t \geq -\frac{22}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } -\frac{16}{7} \leq t \leq -\frac{6}{5} \Rightarrow t = -2 \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Khi đó $x = 16$; $y = 11$. Vậy trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 6$; $x = 18$; $y = 7$; $y = 23$ có duy nhất 1 điểm thuộc (D) mà tọa độ của điểm đó là cặp số nguyên là điểm A(16; 11)

34.a. Đường thẳng (d) có hệ số góc m và đi qua điểm M(-1; -2) nên phương trình đường thẳng (d) là: $y = mx + m - 2$.

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = mx + m - 2 \Leftrightarrow x^2 + mx + m - 2 = 0 \quad (*)$$

Vì phương trình (*) có $\Delta = m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4 > 0, \forall m$ nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt, do đó (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.

b. A và B nằm về hai phía của trục tung $\Leftrightarrow$ phương trình: $x^2 + mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

35.a. Đường thẳng đi qua 2 điểm A và B có dạng $y = ax + b$

Điểm A(-2; 0) và B(0; 4) thuộc đường thẳng AB nên $\Rightarrow b = 4; a = 2$

Vậy đường thẳng AB là $y = 2x + 4$. Điểm C(1; 1) có tọa độ không thỏa mãn $y = 2x + 4$ nên C không thuộc đường thẳng AB $\Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng. Điểm D(-3; 2) có tọa độ thỏa mãn $y = 2x + 4$ nên điểm D thuộc đường thẳng AB $\Rightarrow A, B, D$ thẳng hàng.

b. Ta có: $AB^2 = (-2 - 0)^2 + (0 - 4)^2 = 20$; $AC^2 = 10$; $BC^2 = 10$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại C.}$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5 \text{ (đvdt)}$$

36.a. A và B có hoành độ và tung độ đều khác nhau nên phương trình đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$

$$A(5; 2) \in AB \Rightarrow 5a + b = 2; B(3; -4) \in AB \Rightarrow 3a + b = -4$$

Giải hệ ta có $a = 3$; $b = -13$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = 13x - 13$.

b. Giả sử $M(x, 0) \in xx'$ ta có:

$$MA = \sqrt{(x - 5)^2 + (0 - 2)^2}; MB = \sqrt{(x - 3)^2 + (0 + 4)^2}$$

$$\Delta MAB \text{ cân} \Rightarrow MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(x - 5)^2 + 4} = \sqrt{(x - 3)^2 + 16}$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + 4 = (x - 3)^2 + 16 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Kết luận: điểm cần tìm: } M(1; 0)$$

37.a. Học sinh tự giải.

- b. Ta có phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2 + kx - k - 2 = 0$, phương trình này có $\Delta = (k + 2)^2 + 4 > 0$ nên để cắt (P) tại hai điểm B, C nhận A làm trung điểm, ta cần có: $1 = -\frac{1}{2}k \Leftrightarrow k = -2$.

38.a. Học sinh tự giải.

- b. Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x^2}{4} - 2x = \frac{3}{4}x - 6$, suy ra $(x = 8; y = 0)$ hoặc $(x = 3; y = -\frac{15}{4})$.

- c. Phương trình đường thẳng qua $A(8; 0)$ có dạng: $y = kx - 8k$.

Để đường thẳng trên là tiếp tuyến của (P) tại A, phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x^2}{4} - 2x = kx - 8k \Leftrightarrow x^2 - 2(4 + 2k)x + 32k = 0$ phải có nghiệm kép, tức là $\Delta' = 0 \Rightarrow k = 2$. Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 2x - 16$.

39.a. Học sinh tự giải.

- b. Để đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 2(m + 1)x + 4$ cắt trục Ox tại hai điểm A, B phân biệt với hoành độ tương ứng là x_1, x_2 , phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 4 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m \leq -3$ hay $m \geq 1$. Ngoài ra, đồ thị cắt trục Oy tại điểm $C(0; 4)$. Khi đó:

$$S_{ABC} = 1997 \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = \frac{1997}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = \frac{1997^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(m + 1)^2 - 16 = \frac{1997^2}{4} \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{\frac{1997^2 + 64}{16}}.$$

- 40.** Tìm được $M(-2; -2); N(1; -\frac{1}{2})$. Phương trình đường thẳng có

$$\text{dạng } y = ax + b, \text{ đường thẳng đi qua M và N nên } \begin{cases} -2a + b = -2 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Tìm được } a = \frac{1}{2}; b = -1.$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là } y = \frac{1}{2}x - 1.$$

6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình

Phương pháp chung

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình ta tiến hành các bước như sau

1. Lập phương trình (hay hệ phương trình)

- Chọn ẩn số và xác định điều kiện của ẩn số: Ẩn số thường là đại lượng chưa biết trong bài toán, việc chọn một ẩn số hay hai ẩn số tùy thuộc vào số đại lượng chưa biết của bài toán.
- Biểu diễn mối tương quan giữa đại lượng đã biết và đại lượng chưa biết.
- Lập phương trình (hay hệ phương trình).

2. Giải phương trình (hay hệ phương trình)

3. Nhận định kết quả và trả lời.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Các bài toán về chuyển động

Phương pháp giải:

Dựa vào quan hệ của ba đại lượng S : quãng đường, t : thời gian,

v : vận tốc của chuyển động đều trong công thức $S = v.t$

Dựa vào nguyên lý cộng vận tốc: ví dụ khi giải bài toán thuyền trên sông ta có: $v_1 = v_0 + v_3$; $v_2 = v_0 - v_3$ trong đó v_1 là vận tốc của thuyền khi xuôi dòng, v_2 là vận tốc của thuyền khi ngược dòng; v_0 là vận tốc riêng của thuyền; v_3 là vận tốc dòng chảy.

Chú ý: để thuyền ngược dòng được thì phải có $v_0 > v_3$

Dạng 2: Các bài toán về năng suất lao động

Phương pháp giải:

Dựa vào quan hệ của ba đại lượng: N : năng suất lao động (khối lượng công việc hoàn thành trong một đơn vị thời gian), t : thời gian để hoàn thành một công việc, s : lượng công việc đã làm, công thức biểu diễn mối

quan hệ là: $N = \frac{s}{t}$.

Dạng 3: Các bài toán về làm chung- làm riêng, vòi nước chảy chung- chảy riêng...

Phương pháp giải: Dựa vào các kết quả sau:

Nếu x giờ (hoặc ngày) làm xong một công việc thì mỗi giờ (hoặc ngày) làm được $\frac{1}{x}$ công việc đó.

Nếu trong 1 giờ: đối tượng A làm được $\frac{1}{x}$ công việc; đối tượng B làm được $\frac{1}{y}$ công việc thì lượng công việc mà cả hai làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc.

Nếu mỗi giờ làm được $\frac{1}{x}$ công việc thì trong a giờ làm được $\frac{a}{x}$ công việc.

Dạng 4: Các bài toán sắp xếp, chia đều sản phẩm (hàng hóa...)

Phương pháp giải:

Như dạng 2, chẳng hạn với ba đại lượng; N: số lượng hàng hóa phân phối cho mỗi xe; t: số xe chở hàng; s: tổng số lượng hàng hóa trong kho thì công thức biểu diễn mối quan hệ là $N = \frac{s}{t}$

Dạng 5: Các bài toán có nội dung liên quan đến cấu tạo thập phân của số.

Phương pháp giải:

Dựa vào mối liên hệ giữa các hàng trong một số.

Chú ý: $\overline{ab} = 10a + b$; $\overline{abc} = 100a + 10b + c$

Dạng 6: Các bài toán có nội dung liên quan đến tỉ số %.

Phương pháp giải: Chú ý các kết quả sau:

$m\%$ của A nghĩa là: $\frac{m}{100} \cdot A$

Số A bằng $m\%$ số B nghĩa là $\frac{A}{B} = \frac{m}{100}$ hay $A = \frac{m}{100} \cdot B$.

Số A sau khi tăng lên $m\%$ thì được số mới có giá trị là: $A + \frac{m}{100} \cdot A$

Dạng 7: Các bài toán có nội dung hình học

Phương pháp giải:

Chú ý đến các hệ thức lượng trong tam giác, các công thức tính chu vi, diện tích,... của các hình.

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Các bài toán về chuyển động

Ví dụ 1: Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 60km. Một xuồng máy đi xuôi dòng từ bến A đến bến B, nghỉ 30 phút tại bến B rồi quay trở lại đi ngược dòng 25km để đến bến C. Thời gian kể từ lúc đi đến lúc quay trở lại đến bến C hết tất cả là 8 giờ. Tính vận tốc xuồng máy khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc nước chảy là 1km/h.

Đề thi thử lớp 10 THPT Tỉnh Quảng Nam -2009-2010

Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc của xuồng khi nước yên lặng. Điều kiện: $x > 1$.

Thời gian xuồng máy đi từ A đến B: $\frac{60}{x+1}$ (h), thời gian xuồng ngược

dòng từ B về C: $\frac{25}{x-1}$ (h). Theo giả thiết ta có phương trình:

$$\frac{60}{x+1} + \frac{25}{x-1} + \frac{1}{2} = 8. \text{ Hay } 3x^2 - 34x + 11 = 0. \text{ Giải phương trình trên ta}$$

được các nghiệm: $x_1 = 11$; $x_2 = \frac{1}{3}$. Vì $x > 1$ nên $x = 11$. Vậy vận tốc của

xuồng khi nước đứng yên là 11km/h.

Ví dụ 2: Trong một cuộc đua xe mô tô, ba tay đua đã khởi hành cùng một lúc. Mỗi giờ, người thứ hai chạy chậm hơn người thứ nhất 15km và nhanh hơn người thứ ba 3km nên người thứ hai đến đích chậm hơn người thứ nhất 12 phút và sớm hơn người thứ ba 3 phút. Tính vận tốc của ba tay đua mô tô trên.

Giải:

• Gọi x (km/h) là vận tốc người thứ hai, y (km) là chiều dài quãng đường đua. Điều kiện: $x \geq 3$, $y > 0$

• Ta có: $x + 15$ (km/h) là vận tốc mô tô thứ nhất; $x - 3$ (km/h) là vận tốc mô tô người thứ ba. 12 phút = $\frac{1}{5}$ giờ, 3 phút = $\frac{1}{20}$ giờ

• Theo đề bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20} \end{cases}$$
 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y(x+15) - 5yx = (x+15)x \\ 20xy - 20(x-3)y = x(x-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5xy + 75y - 5xy = x^2 + 15x \\ 20xy - 20xy + 60y = x^2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75y = x^2 + 15x & (1) \\ 60y = x^2 - 3x & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 15x}{75} \\ 4(x^2 + 15x) = 5(x^2 - 3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 15x}{75} \\ x^2 - 75x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75 \\ y = 90 \end{cases}$$

• Vậy: vận tốc mô tô thứ nhất là: 90 km/h; vận tốc mô tô thứ hai là: 75 km/h; vận tốc mô tô thứ ba là: 72 km/h.

ABC

Ví dụ 3: Một xe lửa đi từ Huế ra Hà Nội. Sau đó 1 giờ 40 phút, một xe lửa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga cách Hà Nội 300-km. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường sắt Huế- Hà Nội dài 645 km.

Đề TS lớp 10 Tỉnh Thừa Thiên Huế 2006-2007

Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe lửa thứ nhất đi từ Huế đến Hà Nội. Khi đó, $x > 0$ và vận tốc của xe lửa thứ hai đi từ Hà Nội là: $x + 5$ (km/h)

Theo giả thiết, ta có phương trình: $\frac{300}{x+5} + \frac{5}{3} = \frac{345}{x}$

$$\Leftrightarrow 900x + 5x(x+5) = 1035(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 22x - 1035 = 0.$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = -23$ (loại vì $x > 0$) và $x_2 = 45 > 0$.

Vậy tốc độ xe lửa thứ nhất là 45 km/h và vận tốc xe lửa thứ hai là 50 km/h.

Ví dụ 4: Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 60 km. Một xuồng máy đi xuôi dòng từ bến A đến bến B, nghỉ 30 phút tại bến B rồi quay trở lại đi ngược dòng 25km để đến bến C. Thời gian kể từ lúc đi đến lúc quay trở lại đến bến C hết tất cả là 8 giờ. Tính vận tốc xuồng máy khi nước yên lặng, biết vận tốc nước chảy là 1 km/h.

Đề TS lớp 10 THPT Huế 2007-2008

Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc của xuồng khi nước yên lặng. Điều kiện $x > 1$.

Thời gian xuồng máy đi từ A đến B là: $\frac{60}{x+1}$ (h), thời gian xuồng ngược

dòng từ B về C là $\frac{25}{x-1}$ (h). Theo giả thiết ta có phương trình:

$$\frac{60}{x+1} + \frac{25}{x-1} + \frac{1}{2} = 8. \text{ Hay } 3x^2 - 34x + 11 = 0.$$

Giải phương trình trên, ta được các nghiệm: $x_1 = 11$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

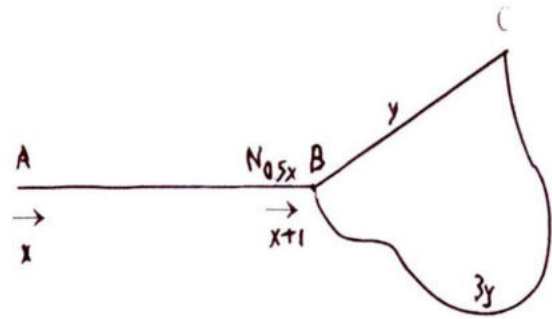
Vì $x > 1$ nên $x = 11$.

Vậy vận tốc của xuồng khi nước yên lặng là 11 km/h.

Ví dụ 5: Lúc 7 giờ, An khởi hành từ A để đến gặp Bích tại B lúc 9 giờ 30 phút. Nhưng đến 9 giờ, An được biết Bích bắt đầu đi từ B để đến C (không nằm trên quãng đường AB) với vận tốc bằng 3,25 lần vận tốc của An. Ngay lúc đó An tăng thêm vận tốc 1km/h và khi tới B, An đã đi theo đường tắt đến C chỉ dài bằng $\frac{1}{3}$ quãng đường mà Bích đi từ B đến C, do đó An và Bích đến C cùng một lúc. Nếu Bích cũng đi theo đường tắt như An thì Bích đến B trước An là 2 giờ. Tính vận tốc lúc đầu của An.

Giải:

Gọi vận tốc lúc đầu của An là x (km/h) thì vận tốc của Bích là $3,25x$ (km/h). Gọi chiều dài quãng đường tắt BC là y (km) thì quãng đường Bích đã đi từ B đến C là $3y$ (km). Gọi N là vị trí mà An bắt đầu tăng vận tốc (hình).



Quãng đường NB mà An dự định đi trong $\frac{1}{2}$ giờ là $0,5x$ (km). An đi từ N đến C (theo đường tắt) được $0,5x + y$ (km) với vận tốc $x + 1$ (km/h) hết $\frac{0,5x + y}{x + 1}$ (giờ). Trong thời gian đó, Bích đi $3y$ (km) với vận tốc $3,25x$

(km/h). Ta có phương trình: $\frac{0,5x + y}{x + 1} = \frac{3y}{3,25x}$ (1). Nếu Bích đi đường tắt

từ B đến C thì chỉ hết $\frac{y}{3,25x}$ (giờ), ít hơn so với đi theo đường vòng 2

giờ, ta có phương trình: $\frac{3y}{3,25x} - \frac{y}{3,25x} = 2$ (2).

Từ (2) suy ra $\frac{2y}{3,25x} = 2$ nên $y = 3,25x$.

Thay vào (1) được $\frac{0,5x + 3,25x}{x + 1} = 3$ nên $x = 4$.

Vận tốc của An lúc đầu là 4 km/h.

Ví dụ 6: Một ca nô xuôi từ A đến B với vận tốc 30km/h, sau đó lại ngược từ B về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 5km/h và vận tốc riêng của ca nô lúc xuôi và lúc ngược bằng nhau.

ĐTS 10 THPT Hà Nội năm 1994 – 1995

Giải:

Gọi khoảng cách AB là x (km) (điều kiện $x > 0$). Thời gian ca nô xuôi dòng là $\frac{x}{30}$ giờ, thời gian ca nô ngược dòng là $\frac{x}{20}$ (giờ). Theo đầu bài ta

có phương trình: $\frac{x}{20} - \frac{x}{30} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x - 2x = 80 \Leftrightarrow x = 80$, thỏa mãn điều

kiện bài toán. Thử lại: $\frac{x}{20} - \frac{x}{30} = \frac{80}{20} - \frac{80}{30} = 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ (đúng).

Vậy khoảng cách AB là 80 km.

ABC

Ví dụ 7: Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120km với vận tốc dự định trước. Sau khi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB người đó tăng vận tốc lên 10km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

DTS 10 THPT Hà Nội năm 1996 – 1997

Giải:

Gọi vận tốc dự định đó là x (km/h) (điều kiện $x > 0$)

Thời gian dự định đi từ A đến B là $\frac{120}{x}$ (giờ)

Một phần ba quãng đường AB là $120 \cdot \frac{1}{3} = 40$ km, Thời gian đi quãng

đường này với vận tốc dự định là $\frac{40}{x}$ (giờ). Hai phần ba quãng đường đi

với vận tốc $(x + 10)$ km/h là $120 \cdot \frac{2}{3} = 80$ km.

Thời gian đi quãng đường này là $\frac{80}{x + 10}$ (giờ). Theo đầu bài ta có phương

trình: $\frac{120}{x} - \frac{2}{5} = \frac{40}{x} + \frac{80}{x + 10} \Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0$

Giải phương trình ta được $x_1 = 40$; $x_2 = -50$ (loại); $x = 40$ ($x > 0$) thỏa mãn điều kiện bài toán. Thời gian xe lăn bánh trên đường là:

$\frac{120}{x} - \frac{2}{5} = \frac{120}{40} - \frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{3}{5}$ (giờ) hay 2h36 phút.

Ví dụ 8: Đường sông từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ 10km. Nếu đi từ A đến B bằng ca nô thì mất 3 giờ 20 phút, còn đi bằng ô tô thì chỉ mất 2 giờ. Tính vận tốc của ca nô, biết rằng mỗi giờ ô tô đi nhanh hơn ca nô 17km.

Giải:

Đổi đơn vị: $3\text{h}20' = \frac{10}{3}$ h. Gọi x (km/h) là vận tốc của ca nô (điều kiện

$x > 0$). Ta có: Vận tốc của ô tô là: $x + 17$ (km/h). Quãng đường ca nô đã đi: $\frac{10}{3}$ (km). Quãng đường ô tô đã đi: $2(x + 17)$ (km)

Vì đường bộ dài hơn đường sông 10km nên ta có phương trình:

$2(x + 17) - \frac{10}{3}x = 10 \Leftrightarrow 2x + 34 - \frac{10}{3}x = 10 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = -24 \Leftrightarrow x = 18$

(thỏa điều kiện $x > 0$ nên nhận). Vậy vận tốc của ca nô là 18 km/h.

Ví dụ 9: Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một khoảng thời gian nhất định với vận tốc định trước. Nếu ô tô đi với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến chậm 2h. Nếu đi với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1h. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

Giải:

Gọi x (km) là chiều dài quãng đường AB (điều kiện $x > 0$), ta có:

- Nếu ô tô đi với vận tốc 35 km/h thì thời gian phải đi là: $\frac{x}{35}$ (h)

Nên thời gian dự định đi lúc đầu là: $\frac{x}{35} - 2$ (h)

- Nếu ô tô đi với vận tốc 50 km/h thì thời gian phải đi là: $\frac{x}{50}$ (h)

Nên thời gian dự định đi lúc đầu là: $\frac{x}{50} + 1$ (h). Do đó ta có phương

$$\text{trình: } \frac{x}{35} - 2 = \frac{x}{50} + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{35} - \frac{x}{50} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{350}x = 3 \Leftrightarrow x = 350$$

(thỏa mãn điều kiện $x > 0$ nên nhận)

Vậy: - Quãng đường AB dài 350 (km)

- Thời gian dự định là: $\frac{350}{35} - 2 = 8$ (giờ)

Ví dụ 10: Hai địa điểm A và B cách nhau 30km. Cùng lúc, một người đi xe máy khởi hành từ A, một người đi xe đạp khởi hành từ B. Nếu đi ngược chiều thì sau 40 phút họ gặp nhau. Nếu đi cùng chiều theo hướng từ A đến B thì sau 2 giờ họ gặp nhau tại địa điểm C (B ở giữa A và C). Tính vận tốc mỗi xe.

Giải:

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Đổi đơn vị: $40' = \frac{2}{3}$ (h). Gọi x (km/h) là vận tốc xe máy; y (km/h) là vận tốc xe đạp. (điều kiện $x > y > 0$). Ta có:

- Khi đi ngược chiều: quãng đường xe máy đã đi: $\frac{2}{3}x$

Quãng đường xe đạp đã đi: $\frac{2}{3}y$, suy ra quãng đường AB là: $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y$

- Khi đi cùng chiều: quãng đường xe máy đã đi $2x$,

Quãng đường xe đạp đã đi $2y$, suy ra quãng đường AB là: $2x - 2y$

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 30 \\ 2x - 2y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 60 \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

điều kiện $x > y > 0$ nên nhận)

Vậy vận tốc xe gắn máy là 30 km/h; vận tốc xe đạp là 15 km/h.

Ví dụ 11: Hai tỉnh A và B cách nhau 120km. Lúc 6 giờ 45 phút một xe máy đi từ A đến B; 15 phút sau đó, một ô tô cũng khởi hành từ A để đi đến B. Vì vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 10 km/h, nên xe máy đến B muộn hơn ô tô tới 45 phút. Hỏi ô tô đến B lúc mấy giờ?

Giải:

Gọi x (km/h) là vận tốc xe ô tô (điều kiện $x > 10$). Ta có:

Vận tốc xe máy là: $x - 10$ (km/h). Thời gian ô tô đã đi: $\frac{120}{x}$ (h)

Thời gian xe máy đã đi: $\frac{120}{x - 10}$ (h). Vì ô tô đi sau xe máy 15 phút nhưng

lại đến trước 45 phút, do đó thời gian ô tô đã đi ít hơn thời gian xe máy đã đi là 1 giờ, vì vậy ta có phương trình:

$$\frac{120}{x - 10} - \frac{120}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 1200 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 40$ (thỏa mãn điều kiện $x > 10$ nên nhận)

$x_2 = -30$ (không thỏa mãn điều kiện nên loại). Vậy vận tốc của ô tô là 40km/h, suy ra thời gian để ô tô đi hết đoạn đường AB là $\frac{120}{40} = 3$ (h). Vì ô tô khởi hành lúc 7 giờ nên ô tô đến B lúc 10 giờ.

Ví dụ 12: Hai bến sông A và B cách nhau 80km. Một ca nô xuôi dòng từ A đến B, rồi ngược dòng từ B về A mất 8 giờ 20 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô (vận tốc này là không đổi), biết vận tốc của dòng nước trong cả hai trường hợp ca nô xuôi dòng và ngược dòng đều bằng 4km/h.

Giải:

Đổi đơn vị: $8\text{h}20' = \frac{25}{3}$ h. Gọi x (km/h) là vận tốc riêng của ca nô (điều

kiện $x > 4$). Ta có: Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là: $x - 4$ (km/h)

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là: $x + 4$ (km/h)

Thời gian ca nô xuôi dòng từ A đến B là: $\frac{80}{x + 4}$ (h)

Thời gian ca nô ngược dòng từ B về A là: $\frac{80}{x - 4}$ (h). Vì cả đi lẫn về mất

$\frac{25}{3}$ h nên ta có phương trình: $\frac{80}{x + 4} + \frac{80}{x - 4} = \frac{25}{3} \Leftrightarrow 5x^2 - 96x - 80 = 0$

Giải phương trình trên ta được:

$x_1 = 20$ (thỏa mãn điều kiện $x > 4$ nên nhận)

$x_2 = -\frac{4}{5}$ (không thỏa mãn điều kiện $x > 4$ nên không nhận)

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 20km/h.

Ví dụ 13: Một người đi xe máy khởi hành từ Hoài Ân đi Quy Nhơn. Sau đó 75 phút, một ô tô khởi hành từ Quy Nhơn đi Hoài Ân với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 20km/giờ. Hai xe gặp nhau tại Phù Cát. Tính vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng Quy Nhơn cách Hoài Ân 100km và Quy Nhơn cách Phù Cát 30 km.

Tuyển sinh lớp 10 THPT Bình Định , 2009-2010

Giải:

Quãng đường từ Hoài Ân đi Phù Cát dài: $100 - 30 = 70$ (km)

Gọi x (km/h) là vận tốc xe máy. Điều kiện: $x > 0$. Vận tốc ô tô là $x + 20$ (km/h). Thời gian xe máy đi đến Phù Cát: $\frac{70}{x}$ (h). Thời gian ô tô đi đến

Phù Cát: $\frac{30}{x + 20}$ (h). Vì xe máy đi trước ô tô 75 phút $= \frac{5}{4}$ (h) nên ta có

phương trình: $\frac{70}{x} - \frac{30}{x + 20} = \frac{5}{4}$. Giải phương trình trên ta được $x_1 = -60$

(loại); $x_2 = 40$ (thích hợp). Vậy vận tốc của xe máy là 40 (km/h), vận tốc của ô tô là $40 + 20 = 60$ (km/h)

Dạng 2: Các bài toán về năng suất lao động

Ví dụ 1: Hai máy ủi cùng làm việc trong vòng 12 giờ thì san lấp được $\frac{1}{10}$

khu đất. Nếu máy ủi thứ nhất làm một mình trong 42 giờ rồi nghỉ và sau đó máy ủi thứ hai làm một mình trong 22 giờ thì cả hai máy ủi san lấp được 25% khu đất đó. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi máy ủi san lấp xong khu đất đã cho trong bao lâu?

TS lớp 10 THPT-TP Huế 2009 – 2010

Giải:

Gọi x (giờ) và y (giờ) lần lượt là thời gian làm một mình của máy ủi thứ nhất và máy ủi thứ hai để san lấp toàn bộ khu đất ($x > 0$; $y > 0$)

Nếu làm một mình thì trong một giờ máy ủi thứ nhất san lấp được $\frac{1}{x}$ khu đất, và máy ủi thứ hai san lấp được $\frac{1}{y}$ khu đất

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10} \\ \frac{42}{x} + \frac{22}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$ và $v = \frac{1}{y}$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} 12u + 12v = \frac{1}{10} \\ 42u + 22v = \frac{1}{4} \end{cases}$$

ABC

Giải hệ phương trình này, tìm được $u = \frac{1}{300}$; $v = \frac{1}{200}$, suy ra $(x; y) = (300; 200)$.

Vậy, để san lấp toàn bộ khu đất thì: Máy thứ nhất làm một mình trong 300 giờ, máy thứ hai làm một mình trong 200 giờ

Ví dụ 2: Một đội thợ mỏ theo kế hoạch phải khai thác một lượng than. Họ dự định mỗi ngày khai thác 50 tấn. Nhưng trên thực tế đội đã tăng năng suất nên mỗi ngày khai thác được 57 tấn. Do đó không những họ đã hoàn thành trước thời gian dự định 1 ngày mà còn vượt chỉ tiêu 13 tấn. Tính số than mà đội phải khai thác theo kế hoạch.

Giải:

Gọi x (tấn) là số than mà đội phải khai thác theo kế hoạch (điều kiện $x > 0$). Ta có:

Thời gian đội dự định khai thác lúc đầu là: $\frac{x}{50}$ (ngày)

Thời gian thực tế đội đã khai thác là: $\frac{x+13}{57}$ (ngày). (do khai thác vượt chỉ tiêu 13 tấn). Vì thời gian khai thác theo thực tế ít hơn thời gian khai thác theo kế hoạch là một ngày nên ta có phương trình: $\frac{x}{50} - \frac{x+13}{57} = 1$

$$\Leftrightarrow 7x - 650 = 2850 \Leftrightarrow x = 500 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 0 \text{ nên nhận)}$$

Vậy theo kế hoạch đội phải khai thác 500 tấn than.

Ví dụ 3: Một tổ công nhân theo kế hoạch phải làm 120 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện năng suất của tổ đã vượt năng suất dự định là 10 sản phẩm. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự kiến 1 ngày. Tính xem thực tế mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

Giải:

Gọi x là số sản phẩm của tổ đã làm trong mỗi ngày theo thực tế. (điều kiện $x > 10$). Số sản phẩm tổ phải làm mỗi ngày theo kế hoạch là

$x - 10$. Thời gian tổ đã làm theo thực tế là: $\frac{120}{x}$ (ngày)

Thời gian tổ dự định phải làm là: $\frac{120}{x-10}$ (ngày). Vì thời gian theo thực tế ít hơn thời gian theo kế hoạch là 1 ngày.

Nên ta có phương trình: $\frac{120}{x-10} - \frac{120}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 1200 = 0$.

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 40$ (thỏa mãn điều kiện $x > 10$ nên nhận)

$x_2 = -30$ (không thỏa mãn điều kiện $x > 10$ nên loại)

Vậy trong thực tế tổ đã làm được 40 sản phẩm trong mỗi ngày.

Dạng 3: Các bài toán về làm chung- làm riêng, vòi nước chảy chung- chảy riêng...

Ví dụ 1: Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì đầy sau 16 giờ. Nếu vòi I chảy trong 3 giờ và vòi II chảy trong 6 giờ thì được thể tích nước bằng 25% bể. Tính thời gian cần thiết để riêng mỗi vòi chảy đầy bể.

Giải:

Gọi x (giờ) và y (giờ) là thời gian để riêng vòi I và vòi II chảy đầy bể ($x > 0$; $y > 0$). Mỗi giờ vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Theo giả thiết thứ nhất, ta có phương trình: $\frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1$. Theo giả thiết

thứ hai, ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{25}{100} \Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$. Vậy ta có hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16u + 16v = 1 \\ 3u + 6v = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{với } u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}). \text{ Giải}$$

hệ phương trình trên, ta được $(u, v) = \left(\frac{1}{24}; \frac{1}{48}\right)$.

Suy ra: $(x; y) = (24; 48)$ thỏa điều kiện bài toán. Vậy nếu chảy riêng, thì vòi I chảy đầy bể trong 24 giờ và vòi II chảy đầy bể trong 48 giờ.

Ví dụ 2: Hai người thợ nếu cùng làm một công việc thì sau 16 giờ làm xong việc ấy. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì được 25% công việc ấy. Hỏi nếu làm riêng một người thì mất bao lâu mới hoàn thành công việc này?

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian để người thứ nhất làm riêng xong công việc, y (giờ) là thời gian để người thứ hai làm riêng xong công việc (điều kiện $x > 16$; $y > 16$)

- Trong 1 giờ: người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc; người thứ hai làm

được $\frac{1}{y}$ công việc. Hai người làm chung được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc. Vậy ta

có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1). Trong 3 giờ, người thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ công việc;

trong 6 giờ người thứ hai làm được $\frac{6}{y}$ công việc, theo đề bài tổng hai

phần việc trên là 25% công việc.

Nên ta có: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 25\%$ hay $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$ (2). Từ (1) và (2) ta có hệ

phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$
. Giải hệ phương trình trên ta được:
$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện nên nhận)

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất làm xong công việc trong 24 giờ; người thứ hai làm xong công việc trong 48 giờ.

Ví dụ 3: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 18 giờ bể đầy. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất sẽ chảy đầy bể chậm hơn vòi thứ hai 27 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi phải mất bao lâu mới chảy đầy bể?

Giải:

Gọi x (giờ) là thời gian để vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể.

(điều kiện $x > 27$). Ta có: Mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể)

Thời gian để vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là $x - 27$ (giờ). Mỗi giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x - 27}$ (bể). Vì hai vòi cùng chảy thì sau 18 giờ bể

đầy, nên ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 27} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow x^2 - 63x + 486 = 0$

Giải phương trình trên ta được:

$x_1 = 54$ (thỏa mãn điều kiện $x > 27$ nên nhận)

$x_2 = 9$ (không thỏa mãn điều kiện $x > 27$ nên loại)

Vậy thời gian để vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là 54 giờ, thời gian để vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là 27 giờ.

Ví dụ 4: Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ nhất may trong 3 ngày, tổ thứ hai may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng trong một ngày tổ thứ nhất may được nhiều hơn tổ thứ hai là 10 chiếc áo. Hỏi mỗi tổ trong một ngày may được bao nhiêu chiếc áo?

Tuyển sinh lớp 10 TP Hà nội, 2009 – 2010

Giải:

Gọi x, y lần lượt là số áo tổ thứ 1 và tổ thứ 2 may được trong 1 ngày
 $\Rightarrow x = y + 10$, điều kiện bài toán cho ta hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y + 10 \\ 3x + 5y = 1310 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 10 \\ 3(y + 10) + 5y = 1310 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 10 \\ 8y = 1280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 170 \\ y = 160 \end{cases}$$

Vậy tổ 1 may được 170 cái áo, tổ 2 may được 160 cái áo.

Dạng 4: Các bài toán sắp xếp, chia đều sản phẩm (hàng hóa...)

Ví dụ 1: Một đội xe dự định chở một số lượng hàng, với dự tính mỗi xe chở 5 tấn. Nhưng đến khi thực hiện đội được tăng cường thêm 2 xe, vì vậy lúc này mỗi xe chỉ phải chở 4 tấn và tổng số hàng chở được nhiều hơn kế hoạch ban đầu là 1 tấn. Tính số xe tham gia chở hàng.

Giải:

Gọi x là số xe tham gia chở hàng sau khi được tăng cường.

(điều kiện $x \in \mathbb{N}$, $x > 2$). Ta có: Số tấn hàng đội xe đã chở là $4x$.

Số xe dự định lúc đầu là: $x - 2$. Số tấn hàng dự định chở lúc đầu là $5(x - 2)$. Vì số hàng chở được theo thực tế nhiều hơn kế hoạch ban đầu 1 tấn nên ta có phương trình: $4x - 5(x - 2) = 1 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa điều kiện nên nhận). Vậy số xe chở hàng theo thực tế là 9 xe.

Ví dụ 2: Một hội trường có 300 ghế ngồi, chúng được xếp thành từng dãy đều nhau. Nếu mỗi dãy thêm 2 ghế và bớt 3 dãy thì hội trường sẽ giảm 11 ghế. Tính số dãy ghế trong hội trường lúc đầu.

Giải:

Gọi x là số dãy ghế trong hội trường lúc đầu (điều kiện $x \in \mathbb{N}$, $x > 3$)

Số ghế ở mỗi dãy lúc đầu là: $\frac{300}{x}$. Số dãy ghế trong hội trường lúc sau

là: $x - 3$. Số ghế ở mỗi dãy lúc sau là: $\frac{300 - 11}{x - 3} = \frac{289}{x - 3}$

Vì lúc sau mỗi dãy ghế có thêm 2 ghế so với lúc ban đầu, nên ta có phương trình: $\frac{289}{x - 3} - \frac{300}{x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 900 = 0$

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 20$ (thỏa mãn điều kiện $x > 3$ nên nhận); $x_2 = -\frac{45}{2}$ (không thỏa mãn điều kiện $x > 3$ nên loại)

Vậy lúc đầu phòng họp có 20 dãy ghế.

Ví dụ 3: Nhà Lan có mảnh vườn trồng cây cải bắp. Vườn được đánh thành nhiều luống, mỗi luống trồng cùng một số cây cải bắp. Lan tính rằng: nếu tăng thêm 8 luống rau, nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì toàn vườn sẽ giảm đi 54 cây. Nếu giảm đi 4 luống nhưng trồng thêm mỗi luống 2 cây thì toàn vườn tăng thêm 32 cây. Hỏi vườn nhà Lan có bao nhiêu cây cải bắp?

Giải:

Gọi x là số luống rau trong vườn nhà Lan; y là số cây cải bắp trên 1 luống (điều kiện $x > 4$; $x > 3$, $x, y \in \mathbb{N}$).

Ta có:

Số cây cải bắp trong vườn nhà Lan là: xy .

ABC

Khi tăng 8 luống, mỗi luống giảm 3 cây thì số cây giảm đi 54, nên ta có phương trình:

$$(x + 8)(y - 3) + 54 = xy \quad (1).$$

Khi giảm 4 luống, mỗi luống tăng 2 cây thì số cây tăng lên 32, nên ta có phương trình $(x - 4)(y + 2) - 32 = xy$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x + 8)(y - 3) + 54 = xy \\ (x - 4)(y + 2) - 32 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 8y = -30 \\ 2x - 4y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 15 \end{cases}$$

Vậy vườn nhà Lan có $50.15 = 750$ cây bắp cải.

Dạng 5: Các bài toán có nội dung liên quan đến cấu tạo thập phân của số.

Ví dụ 1: Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng: số đó là số chẵn, chia hết cho 11 và tổng các chữ số của số đó cũng chia hết cho 11.

Thi học sinh giỏi lớp 9 – Bảng A, Nghệ An -2009:

Giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}; a, b, c \leq 9, a \neq 0$) (1)

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} 100a + 10b + c : 11 \\ a + b + c : 11 \end{cases}$ (2)

Từ (2), (3) $\Rightarrow 101a + 11b + 2c : 11 \Rightarrow 2(a + c) : 11$

Mà $1 \leq a + c \leq 18$ và $(2; 11) = 1 \Rightarrow a + c = 11$ (5). Từ (3), (5) $\Rightarrow b = 0$.

Do c chẵn và $a + c = 11 \Rightarrow (a; c) = (9; 2), (7; 4), (5; 6), (3; 8)$

Ví dụ 2: Tìm một số có hai chữ số, biết tổng hai chữ số là 10. Số đó lớn hơn tích hai chữ số của nó là 12.

Giải:

Gọi chữ số hàng chục của số cần tìm là x (điều kiện $x \in \mathbb{N}; 0 < x \leq 9$)

Chữ số hàng đơn vị là $10 - x$. Số cần tìm là

$\overline{x(10-x)} = 10x + (10 - x) = 9x + 10$. Tích hai chữ số của nó là $x(10 - x)$.

Vì số cần tìm lớn hơn tích hai chữ số của nó là 12, nên ta có phương trình: $9x + 10 - 12 = x(10 - x) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ phương trình này có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 2$. Nghiệm $x_1 = -1$ loại

Vậy chữ số hàng chục của số cần tìm là 2, chữ số hàng đơn vị là 8.

Do đó số cần tìm là 28.

Cách khác: Gọi số cần tìm là $\overline{xy}$ ($x, y \in \mathbb{N}; 0 \leq x, y \leq 9, x \neq 0$)

Ta có: $\overline{xy} = 10x + y$. Vì số cần tìm có tổng hai chữ số bằng 10 và lớn hơn tích hai chữ số của nó là 12, nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + y = xy + 12 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (1) suy ra: $y = 10 - x$ thay vào (2) ta được:

$$10x + 10 - x = x(10 - x) + 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Nghiệm $x = -1$ loại.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 10 - 2 = 8$. Do đó số cần tìm là 28.

Ví dụ 3: Tìm số $\overline{abc}$ thỏa mãn: $\overline{abc} = (a + b)^2 4c$

Tuyển sinh lớp 10 Hà Nam 2009-2010

Giải:

Tìm số $\overline{abc}$ thỏa mãn $\overline{abc} = (a + b)^2 4c$. Vì $\overline{abc} = (a + b)^2 4c$ nên $\overline{abc}$ chia hết cho 4. Suy ra c là chữ số chẵn. Mặt khác $\overline{abc} = (a + b)^2 4c$ và c là số chẵn $\neq 0$ nên $4(a + b)^2$ có chữ số tận cùng là 6 $\Rightarrow (a + b)^2$ có tận cùng là 4, 9 (1). Do $\overline{abc} < 1000$; $c > 2$. Suy ra $(a + b)^2 \leq \frac{1000}{8} = 125 \Rightarrow a + b \leq 11$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a + b = 8; 7; 3; 2$

- 1) $a + b = 8$ suy ra $\overline{abc} = 256c$ nên $\overline{abc} = 512$ không thỏa mãn.
- 2) $a + b = 7$ suy ra $\overline{abc} = 196c$; Nếu $c = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 392$ không thỏa mãn;
Nếu $c = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 784$ không thỏa mãn
Nếu $c = 5 \Rightarrow \overline{abc} > 1000$ không thỏa mãn
- 3) $a + b = 3$ suy ra $\overline{abc} = 36c$. Nếu $c = 2 \Rightarrow \overline{abc} < 100$ không thỏa mãn; Nếu $c = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 144$ không thỏa mãn; Nếu $c = 6 \Rightarrow \overline{abc} = 216$ thỏa mãn.
Nếu $c = 8 \Rightarrow \overline{abc} = 288$ không thỏa mãn
- 4) $a + b = 2$ suy ra $\overline{abc} = 16c$. Nếu $c = 8 \Rightarrow \overline{abc} = 128$ không thỏa mãn
Nếu $c = 6 \Rightarrow \overline{abc} < 100$ không thỏa mãn. Vậy số cần tìm là 216.

Ví dụ 4: Cho một số có hai chữ số. Biết rằng số đó gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu chia số đó cho chữ số hàng chục của nó thì được thương là 11, dư là 2. Tìm số đã cho.

Giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{xy}$ ($x, y \in \mathbb{N}; 0 \leq x, y \leq 9, x \neq 0$).

Ta có: $\overline{xy} = 10x + y$. Vì số đã cho gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó nên: $\overline{xy} = 7y \Leftrightarrow 10x + y = 7y \Leftrightarrow 5x = 3y$ (1). Vì $\overline{xy} : x = 11$ (dư 2) nên: $\overline{xy} = 11x + 2 \Leftrightarrow 10x + y = 11x + 2 \Leftrightarrow -x + y = 2$ (2). Từ (1) và (2), ta

$$\text{có hệ } \begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số cần tìm là 35.

Dạng 6: Các bài toán có nội dung liên quan đến tỉ số %.

Ví dụ 1: Anh Nam gửi vào ngân hàng một số tiền là A đồng với lãi suất không đổi là $r\%$ cho mỗi tháng. Số tiền lãi của tháng đầu được gộp vào với vốn để tính lãi tháng thứ hai. Số tiền lãi của tháng thứ hai được gộp với số tiền có được ở đầu tháng thứ hai để tính lãi tháng thứ ba và cứ tiếp tục cách tính như thế cho các tháng tiếp theo. Hãy nêu ra cách lập công thức để tính số tiền anh Nam có được vào cuối tháng thứ n , với n là một số nguyên dương tùy ý.

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên tin Quốc học Huế 2009-2010

Giải:

Cuối tháng thứ 1, số tiền anh Nam có: $A + A \cdot \frac{r}{100} = A \left(1 + \frac{r}{100} \right)$ (đồng).

Cuối tháng thứ 2, số tiền anh Nam có:

$$A \left(1 + \frac{r}{100} \right) + A \left(1 + \frac{r}{100} \right) \frac{r}{100} = A \left(1 + \frac{r}{100} \right)^2 \text{ (đồng)}$$

+ Tương tự cho các tháng tiếp theo..., từ đó suy ra:

+ Cuối tháng thứ n , số tiền anh Nam có: $A \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$ (đồng)

Ví dụ 2: Tìm hai số tự nhiên, biết 5% của số thứ nhất cộng với 4% của số thứ hai thì được tổng là 45 và nếu lấy 4% của số thứ nhất cộng với 5% của số thứ hai thì được tổng là 44.

Giải:

Gọi số thứ nhất là x ; số thứ hai là y . Vì tổng của 5% số thứ nhất và 4% số thứ hai là 45 nên ta có phương trình: $\frac{5x}{100} + \frac{4y}{100} = 46$ (1)

Tổng của 4% số thứ nhất và 5% số thứ hai là 44 nên ta có phương trình: $\frac{4x}{100} + \frac{5y}{100} = 44$ (2).

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{5x}{100} + \frac{4y}{100} = 46 \\ \frac{4x}{100} + \frac{5y}{100} = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 600 \\ y = 400 \end{cases}$$

(thỏa mãn)

Vậy số thứ nhất là 600; số thứ hai là 400.

Ví dụ 3: Có hai loại quặng sắt, quặng loại I và loại II, tổng khối lượng là 10 tấn. Khối sắt nguyên chất trong quặng loại I là 0,8 tấn; trong quặng loại II là 0,6 tấn. Biết tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại I hơn tỉ lệ sắt trong quặng loại II là 10%. Tính khối lượng mỗi loại quặng.

Giải:

Gọi x (tấn) là khối lượng quặng loại I (điều kiện $0 < x < 10$). Ta có:
 Khối lượng quặng sắt loại II là: $10 - x$ (tấn)

Tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại I là: $\frac{0,8}{x}$

Tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại II là $\frac{0,6}{10 - x}$

Vì tỉ lệ sắt trong quặng loại I hơn tỉ lệ sắt trong quặng loại II là 10% nên ta có phương trình:

$$\frac{0,8}{x} - \frac{0,6}{10 - x} = \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{8}{x} - \frac{6}{10 - x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 24x + 80 = 0.$$

Phương trình trên có 2 nghiệm: $x_1 = 4$ (thỏa mãn điều kiện nên nhận)

$x_2 = 20$ (không thỏa mãn điều kiện nên loại)

Vậy khối lượng quặng sắt loại I là 4 tấn, loại II là 6 tấn.

Dạng 7: Các bài toán có nội dung hình học

Ví dụ 1: Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 675 m^2 và có chu vi bằng 120 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Tuyển sinh lớp 10 TP Hà nội 2007-2008

Giải:

Gọi chiều dài là x (m) và chiều rộng là y (m) ($x > y > 0$)

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} 2(x + y) = 120 \\ xy = 675 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 60 - x \\ x(60 - x) = 675 (*) \end{cases}$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x^2 - 60x + 675 = 0 \Leftrightarrow x = 45$ hay $x = 15$

Khi $x = 5$ thì $y = 15$ (nhận). Khi $x = 15$ thì $y = 45$ (loại)

Vậy chiều dài là 45m, chiều rộng là 15m.

Ví dụ 2: Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3cm thì diện tích sẽ tăng thêm 36 cm^2 còn nếu giảm một cạnh 2cm và cạnh kia giảm 4cm thì diện tích giảm đi 26 cm^2 .

Giải:

Gọi x (cm); y (cm) là độ dài hai cạnh góc vuông. (điều kiện $x > 2$; $y > 4$).

Ta có: Diện tích của tam giác là: $\frac{1}{2}xy$

Khi tăng mỗi cạnh lên 3cm thì diện tích tăng thêm 36 cm^2 nên ta có phương trình: $\frac{1}{2}(x + 3)(y + 3) - \frac{1}{2}xy = 36$ (1)

Khi giảm cạnh thứ nhất 2cm, cạnh thứ hai 4cm thì diện tích giảm đi 26 cm^2 nên ta có phương trình: $\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x - 2)(y - 4) = 26$ (2)

ABC

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+3)(y+3) - \frac{1}{2}xy = 36 \\ \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x-2)(y-4) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=21 \\ 2x+y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=12 \end{cases}$$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông là 9(cm) và 12(cm).

Ví dụ 3: Một hình chữ nhật có chu vi là 160cm và có diện tích 1500m^2 . Tính các kích thước của nó.

Giải:

Nửa chu vi hình chữ nhật là: $\frac{160}{2} = 80(\text{m})$. Gọi $x(\text{m})$ là một kích thước của hình chữ nhật. (điều kiện $0 < x < 80$).

Kích thước còn lại là $80 - x(\text{m})$.

Diện tích hình chữ nhật là: $x(80 - x)(\text{m}^2)$

Theo bài ra, ta có phương trình: $x(80 - x) = 1500$

$$\Leftrightarrow x^2 - 80x + 1500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = 50 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện nên nhận)}$$

Vậy nếu kích thước thứ nhất là 30m, thì kích thước thứ hai là 50m. Còn nếu kích thước thứ nhất là 50m thì kích thước kia là 30m.

Tóm lại hai kích thước của hình chữ nhật là 30m và 50m.

Chú ý: ta có thể giải bài toán trên bằng cách gọi hai kích thước là x ; y . Khi

$$\text{đó ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x + y = 80 \\ xy = 1500 \end{cases}$$

Dùng định lý Viét đảo ta tìm được hai số x và y .

Ví dụ 4: Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi bằng 114cm. Người ta cắt bỏ bốn hình vuông có cạnh là 5cm ở bốn góc rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật (không có nắp). Tính các kích thước của tấm tôn đã cho. Biết rằng thể tích hình hộp bằng 150cm^3 .

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên tin Quốc học Huế 2009-2010

Giải:

Nửa chu vi tấm tôn: $\frac{114}{2} = 57(\text{cm})$. Gọi kích thước thứ nhất của tấm tôn

là $x(\text{cm})$, điều kiện: $10 < x < 57$. Ta có kích thước thứ hai là $57 - x(\text{cm})$.

Sau khi gấp thành hình hộp chữ nhật, ba kích thước của nó là:

$$x - 10(\text{cm}); 47 - x(\text{cm}); 5(\text{cm}).$$

Thể tích hình hộp chữ nhật: $(x - 10).(47 - x).5(\text{cm}^3)$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$(x - 10)(47 - x).5 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 57x + 770 = 0$$

Giải phương trình: $x_1 = 35; x_2 = 22$ (thỏa mãn điều kiện bài toán)

Vậy các kích thước tấm tôn đã cho là: 35(cm); 22(cm)

Ví dụ 5: Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360m^2 . Nếu tăng chiều rộng 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích mảnh đất không đổi.

Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

Tuyển sinh lớp 10 THPT Tỉnh Trà vinh 2009-20010

Giải:

Gọi $x(\text{m})$ là chiều rộng của mảnh đất ($x > 0$) thì chiều dài là $\frac{360}{x}(\text{cm})$.

Tăng chiều rộng 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích mảnh đất không đổi.

Theo đề ta có:

$$(x + 3)\left(\frac{360}{x} - 4\right) = 360 \Leftrightarrow 360 - 4x + \frac{1080}{x} - 12 = 360$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 - 12x + 1080 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 270 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm là $x_1 = 15, x_2 = -18$

Ta có $x_2 = -18 < 0$, không thỏa mãn điều kiện của ẩn số. Vậy chiều rộng của mảnh đất là 15(m). Và chiều dài của mảnh đất là $\frac{360}{15} = 24(\text{m})$.

Ví dụ 6: Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích 900m^2 và chu vi 122 m. Tìm chiều dài và chiều rộng khu vườn.

Đề TS lớp 10 THPT TP Huế 2008 -2009

Giải:

Gọi $x(\text{m}), y(\text{m})$ là hai kích thước của hình chữ nhật ($x > 0, y > 0$)

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} 2(x + y) = 122 \\ xy = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 61 \\ xy = 900 \end{cases}$$

Do đó x và y là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - 61X + 900 = 0$

Giải phương trình ta được hai nghiệm $X_1 = 25, X_2 = 36$

Các giá trị 25 và 36 là thích hợp.

Ví dụ 7: Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 675m^2 và chu vi bằng 120m. Tìm chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2007-2008

Giải:

Gọi chiều dài là $x(m)$ và chiều rộng là $y(m)$ ($x > y > 0$)

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} 2(x + y) = 120 \\ xy = 675 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 60 - x \\ x(60 - x) = 675 \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow x^2 - 60x + 675 = 0 \Leftrightarrow x = 45 \text{ hay } x = 15$$

Khi $x = 45$ thì $y = 15$ (nhận); Khi $x = 15$ thì $y = 45$ (loại)

Vậy chiều dài là $45(m)$ và chiều rộng là $15(m)$.

Ví dụ 8: Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài $45m$. Tính diện tích thửa ruộng, biết rằng nếu chiều dài giảm 2 lần và chiều rộng tăng 3 lần thì chu vi thửa ruộng không thay đổi.

Tuyển sinh lớp 10 Nghệ An 2009 – 2010**Giải:**

Gọi chiều rộng, chiều dài của thửa ruộng tương ứng là x, y .

Điều kiện $x > 0, y > 0$, đơn vị của x, y là mét. Vì chiều rộng ngắn hơn chiều dài $45m$ nên $y - x = 45$ (1). Chiều dài giảm 2 lần, chiều rộng tăng

3 lần ta được hình chữ nhật có hai cạnh là $\frac{y}{2}$ và $3x$.

$$\text{Theo giả thiết chu vi không thay đổi nên: } 2(x + y) = 2\left(3x + \frac{y}{2}\right) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} y - x = 45 \\ 2(x + y) = 2\left(3x + \frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình này ta có: } \begin{cases} x = 15(m) \\ y = 60(m) \end{cases}, \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy diện tích của thửa ruộng là $S = xy = 900(cm^2)$

Dạng 8: Các bài toán khác

Ví dụ 1: Hai bác nông dân đem trứng ra chợ bán với tổng số trứng của hai người là 100 quả. Số trứng của hai người không bằng nhau, nhưng hai người bán được một số tiền bằng nhau. Một người nói với người kia: “Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của anh thì tôi bán được 90000 đồng”. Người kia nói: “Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của chị thì tôi bán được 40000 đồng thôi”. Hỏi mỗi người có bao nhiêu trứng và giá bán mỗi quả trứng của mỗi người là bao nhiêu?

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2008 -2009

Giải:

Gọi số trứng của người thứ nhất là x ($0 < x < 100$, $x \in \mathbb{N}^*$ và $x \neq 50$) thì số trứng của người thứ hai là $100 - x$. Gọi a (đồng) và b (đồng) lần lượt là giá bán mỗi quả trứng của người thứ nhất và người thứ hai. Theo giả thiết: $(100 - x)a = 90000 \Leftrightarrow a = \frac{90000}{100 - x}$ và $xb = 40000 \Leftrightarrow b = \frac{40000}{x}$.

Số tiền bán trứng của hai người bằng nhau nên:

$$xa = (100 - x)b \Leftrightarrow \frac{90000x}{100 - x} = \frac{40000(100 - x)}{x} \Leftrightarrow x^2 + 160x - 800 = 0.$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 40$; $x_2 = -200$. Chỉ có $x = 40$ thích hợp. Số trứng của người thứ nhất là 40 (quả) và số trứng của người thứ hai là 60 (quả). Giá bán mỗi quả trứng của người thứ nhất là 1500 đồng và của người thứ hai là 1000 đồng.

Ví dụ 2: Một cánh đồng cỏ dày như nhau, mọc cao đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng và trong suốt thời gian bò ăn cỏ trên cánh đồng ấy. Biết rằng 75 con bò ăn hết cỏ trên 60a đồng cỏ trong 12 ngày, 81 con bò ăn hết cỏ trên 72a đồng cỏ trong 15 ngày. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên 96a đồng cỏ trong 18 ngày? ($1a = 100m^2$)

Giải:

Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{60 + 12.60y}{75.12} = \frac{72 + 15.72y}{81.15} \\ \frac{72 + 15.72y}{81.15} = \frac{96 + 18.96y}{18x} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $y = \frac{1}{12}$, $x = 100$.

Vậy số bò ăn hết 96 a đồng cỏ trong 18 ngày là 100 con.

Ví dụ 3: Một tấm bìa dạng tam giác vuông có độ dài ba cạnh là các số nguyên. Chứng minh rằng có thể cắt tấm bìa thành sáu phần có diện tích bằng nhau và diện tích mỗi phần là số nguyên.

Giải:

Gọi a , b , c là độ dài 3 cạnh tam giác vuông ABC, c là cạnh huyền.

Ta có: $a^2 + b^2 = c^2$; $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{ab}{2}$

Trước hết ta chứng minh ab chia hết cho 12.

+ Chứng minh $ab:3$

Nếu cả a và b đồng thời không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ chia 3 dư 2.

Suy ra số chính phương c^2 chia 3 dư 2, vô lý.

ABC

+ Chứng minh $ab \vdots 4$: Nếu a, b chẵn thì $ab \vdots 4$

- Nếu trong hai số a, b có số lẻ, chẵn hạn a lẻ.

Lúc đó c lẻ. Vì nếu c chẵn thì $c^2 \vdots 4$, trong lúc $a^2 + b^2$ không thể chia hết cho 4. Đặt $a = 2k + 1, c = 2h + 1, k, h \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$b^2 = (2h + 1)^2 - (2k + 1)^2 = 4(h - k)(h + k + 1) = 4(h - k)(h - k + 1) + 8k(h - k) \vdots 4$$

Suy ra $b \vdots 4$. Nếu chia cạnh AB (chẳng hạn) thành 6 phần bằng nhau, nối các điểm chia với C thì tam giác ABC được chia thành 6 tam giác, mỗi tam giác này có diện tích bằng $\frac{ab}{12}$ là một số nguyên.

Ví dụ 4: Xác định hình vuông có độ dài cạnh là số nguyên và diện tích cũng là số nguyên gồm 4 chữ số, trong đó các chữ số hàng đơn vị hàng chục và hàng trăm giống nhau.

Thi học sinh giỏi tỉnh Thừa Thiên Huế Lớp 9, 2004–2005

Giải:

Theo giả thiết diện tích hình vuông có dạng $S = \overline{abbb} = k^2$ ($k > 0, k \in \mathbb{Z}$)

$1000 \leq k^2 \leq 9999 \Leftrightarrow 33 \leq k \leq 99$, nên k chỉ gồm có 2 chữ số:
 $k = \overline{xy} = 10x + y$; $k^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$ ($3 \leq x \leq 9; 0 \leq y \leq 9$)

Nếu y lẻ: $y = 1; 3; 5; 7; 9 \Rightarrow y^2 = 1; 9; 25; 49; 81 \Rightarrow b = 1; 5; 9$.

Khi đó $2xy$ có chữ số tận cùng là số chẵn, nên chữ số hàng chục của k^2 phải là số chẵn khác 1, 5, 9, do đó S không thể là $\overline{abbb}$.

Nếu y chẵn: $y = 0; 2; 4; 6; 8 \Rightarrow y^2 = 0; 4; 16; 36; 64 \Rightarrow b = 0; 4; 6$.

Với $y = 0$; k^2 chỉ có thể là 1600; 2500; 3600; 4900; 6400; 8100 không thỏa điều kiện bài toán.

Với $y = 2$; $k^2 = 100x^2 + 40x + 4$. khi đó x chỉ có thể là 6 thì chữ số hàng chục của k^2 mới là 4, suy ra $k^2 = 3600 + 244 = 3844 \neq \overline{abbb}$

Với $y = 4; 6$: $y^2 = 16; 36$, khi đó $20xy$ có chữ số hàng chục là số chẵn, nên chữ số hàng chục của k^2 phải là số lẻ, do đó không thể bằng 4 hoặc 6, nghĩa là $k^2 \neq \overline{abbb}$. Với $y = 8$; $y^2 = 64$; $k^2 = 100x^2 + 160x + 64$, khi đó x chỉ có thể là 3 hoặc 8 thì chữ số hàng chục của k^2 mới bằng 4 suy ra $k^2 = 38^2 = 1444$ hoặc $k^2 = 88^2 = 7744$ (không thỏa điều kiện bài toán).

Vậy, bài toán có một lời giải duy nhất : hình vuông cần xác định có cạnh $k = 38$ và diện tích $S = 1444$

Ví dụ 5: A, B, C là một nhóm ba người thân thuộc. Cha của A thuộc nhóm đó, cũng vậy con gái của B và người song sinh của C cũng ở trong nhóm đó. Biết rằng C và người song sinh của C là hai người khác giới tính và C không phải là con của B. Hỏi trong ba người A, B, C ai là người khác giới tính với hai người kia?

Kỳ thi học sinh giỏi tỉnh Thừa Thiên Huế, Lớp 9 -2004–2005

Giải:

Theo giả thiết, cha của A có thể là B hoặc C:

+ Nếu B là cha của A thì C không thể song sinh với A, vì nếu như thế thì C là con của B, trái giả thiết, do đó C và B là song sinh và khác giới tính (gt), nên C là phái nữ. Mặt khác, con gái của B không thể là C nên phải là A, do đó A phải là phái nữ. Vậy B khác giới tính với hai người còn lại là A và C

+ Nếu C là cha của A thì C chỉ có thể là song sinh với B, theo giả thiết B phải là nữ. Mặt khác, con gái của B không thể là C(gt) nên phải là A, suy ra C và B là vợ chồng chứ không phải song sinh, dẫn đến mâu thuẫn

Vậy chỉ có duy nhất trường hợp B là cha của A và B khác giới tính với hai người còn lại là A và C(cùng là phái nữ)

Ví dụ 6: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 8m, diện tích bằng 240m^2 . Tính chu vi khu vườn đó.

Giải:

Gọi x (m) là chiều rộng khu vườn ($x > 0$). Suy ra chiều dài khi vườn là:

$x + 8$ (m). Lập phương trình: $x(x + 8) = 240 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 240 = 0$ (*)

Giải (*) tìm được 2 nghiệm: $x_1 = 12, x_2 = -20$

Đối chiếu điều kiện, ta có chiều rộng khu vườn là: 12 (m)

Suy ra chu vi khu vườn là: $2(x + x + 8) = 64$ (m).

Ví dụ 7: Đội bóng bàn của trường A thi đấu với đội bóng bàn của trường B, mỗi đấu thủ của trường này thi đấu với mọi đấu thủ của trường kia 1 trận. Biết rằng tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số cầu thủ của cả hai đội và số cầu thủ của trường B là số lẻ. Tìm số cầu thủ của mỗi đội.

TS lớp 10 THPT Chuyên Lam sơn Thanh hóa-2007-2008

Giải:

Gọi x và y theo thứ tự là số cầu thủ của đội A và đội B ($x, y \in \mathbb{N}^*, y$ lẻ).

Số trận đấu là: $xy = 4(x + y) \Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 16$

Suy ra $x - 4$ và $y - 4$ là các ước số của 16.

Do y lẻ nên $y - 4 = 1$, hay $y = 5$.

Từ đó tìm được $x = 20$.

Vậy số cầu thủ của đội A là 20 và số cầu thủ của đội B là 5.

ABC

7. Các bài toán hình học trong mặt phẳng

Một số kiến thức cơ bản

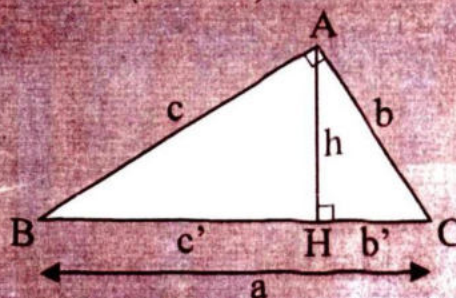
I. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (hình vẽ).

Ta có:

- 1) $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$.
- 2) $b^2 + c^2 = a^2$ (định lý Py-ta-go).
- 3) $h^2 = b'c'$.
- 4) $ah = bc$.
- 5) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.



2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn

Các tỷ số lượng giác của góc nhọn α (hình vẽ) được định nghĩa như sau:

$\sin \alpha = \text{cạnh đối} / \text{cạnh huyền};$

$\cos \alpha = \text{cạnh kề} / \text{cạnh huyền};$

$\tan \alpha = \text{cạnh đối} / \text{cạnh kề};$

$\cot \alpha = \text{cạnh kề} / \text{cạnh đối};$

Với hai góc α và β phụ nhau, ta có:

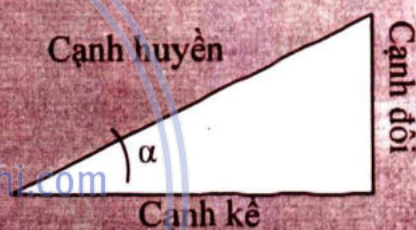
$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta, \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

Với một số góc đặc biệt, ta có:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1; \quad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$



3. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề; mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.

II. Đường tròn

1. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn.

Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R. Tùy theo $OM = R$, $OM < R$, $OM > R$ mà ta có điểm M nằm trên, nằm bên trong, nằm bên ngoài đường tròn. Qua ba điểm không thẳng hàng, bao giờ cũng vẽ được một và chỉ một đường tròn.

Đường tròn có một tâm đối xứng, đó là tâm của đường tròn. Đường tròn có vô số trục đối xứng, đó là bất kì đường kính nào của nó.

2. Đường kính và dây của đường tròn. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Quan hệ về độ dài giữa đường kính và dây được thể hiện ở định lý: Trong một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây được thể hiện ở các định lý:

- * Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- * Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Để so sánh độ dài hai dây của một đường tròn dựa vào các định lý:

Trong một đường tròn

- a. Hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.
- b. Trong hai dây không bằng nhau, dây lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Căn cứ vào số điểm chung 0, 1, 2 của đường thẳng và đường tròn mà ta định nghĩa các vị trí: đường thẳng và đường tròn không giao nhau, tiếp xúc nhau, cắt nhau. Ứng với các vị trí trên, khoảng cách d từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính R của đường tròn có các liên hệ: $d < R$; $d = R$; $d > R$. Ta có các định lý:

1. Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
2. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

4. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến. Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

5. Đường tròn nội tiếp tam giác

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

6. Đường tròn bàng tiếp tam giác

Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác. Tâm của mỗi đường tròn bàng tiếp tam giác là giao điểm hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác hoặc giao điểm của tia phân giác của góc trong và một trong hai đường phân giác của góc ngoài không kề với nó.

7. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Căn cứ vào số điểm chung 0, 1, 2 của hai đường tròn mà ta định nghĩa các vị trí: hai đường tròn không giao nhau, tiếp xúc nhau, cắt nhau.

Do tính đối xứng của đường tròn, nếu hai đường tròn cắt nhau thì giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Các bài toán tính toán hình học

Dạng 2: Các bài toán chứng minh đẳng thức hình học

Dạng 3: Chứng minh tứ giác nội tiếp

Dạng 4: Bài tập tổng hợp

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Các bài toán tính toán hình học

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có R là bán kính đường tròn ngoại tiếp thỏa hệ thức: $R(b + c) = a\sqrt{bc}$

Hãy tính các góc của tam giác ABC.

Giải

$BC = a$ là dây cung của đường tròn bán kính R, do đó $2R \geq a$. Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai

số dương ta có: $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$.

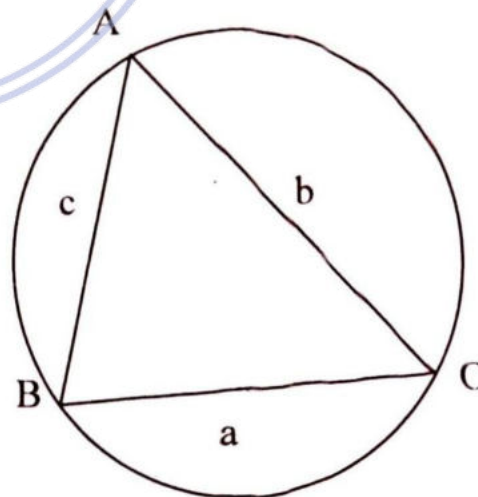
Do đó

$$2R \cdot \frac{b+c}{2} \geq a \cdot \sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow R(b+c) \geq a\sqrt{bc}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \\ b = c \end{cases}; \begin{cases} \widehat{BAC} = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại A}$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ, \widehat{A} = 90^\circ.$$



Ví dụ 2: Cho hình thang ABCD có hai đường chéo AC và BD cùng bằng đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD. Cho biết $\widehat{MBC} = \widehat{CAB}$. Tính các góc của hình thang ABCD.

TS lớp 10 chuyên toán Lê Hồng Phong, TPHCM, 2003 – 2004

Giải

Hình thang ABCD ($AB \parallel DC$) có: $AC = BD$ (gt) nên là hình thang cân
 $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ABC}$. Mà $\widehat{CAB} = \widehat{MBC}$ (giả thiết)

Do đó $\widehat{BAD} - \widehat{CAB} = \widehat{ABC} - \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{ABM}$ (1)

Gọi N là trung điểm cạnh AD $\Rightarrow MN$ là đường trung bình $\triangle ADC$

$\Rightarrow MN \parallel CA \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DNM}$ (2)

Từ (1) và (2) có $\widehat{ABM} = \widehat{DNM} \Rightarrow$ Tứ giác ANMB nội tiếp được.

Mặt khác $\triangle BAD$ cân tại B ($AB = BD$) có BN là trung tuyến. $\Rightarrow BN$ là đường cao của tam giác BAD $\Rightarrow \widehat{ANB} = 90^\circ$

$\Rightarrow AB$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp

$\triangle MAB \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$.

Mà $MA = MB$ (tính chất đối xứng trục). Do đó $\triangle AMB$ vuông cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 45^\circ$; $\triangle ABC$ cân tại A ($AB = AC$)

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{MBA} + \widehat{MBC} = 45^\circ + \widehat{MBC}$.

Ta có:

$\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$; $\widehat{MBC} + 45^\circ + \widehat{MBC} + 45^\circ + \widehat{MBC} = 180^\circ$

$3\widehat{MBC} = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow \widehat{MBC} = 30^\circ$.

Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{MAB} + \widehat{MBC} = 75^\circ$

Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

Ví dụ 3: Cho một nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Từ B, ta vẽ một cát tuyến cắt nửa đường tròn tại C và cắt tiếp tuyến Ax của một nửa đường tròn tại P.

a. Chứng minh tích BC. BP không đổi.

b. Trong trường hợp $BP = 2AP$, hãy tính diện tích của hình được giới hạn bởi PA, PC và cung AC.

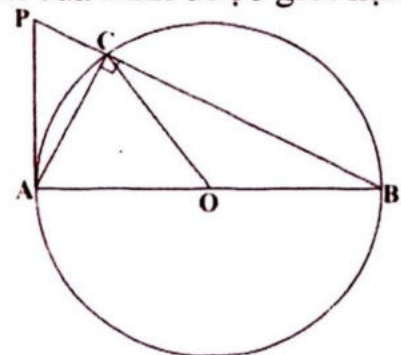
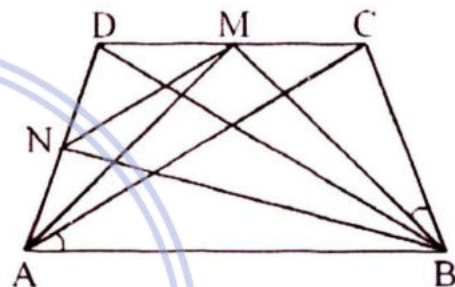
Giải

a. Trong tam giác vuông BAP có:

$BP \cdot BC = AB^2 = 4R^2$ (không đổi)

b. Nếu $BP = 2AP$ thì $\widehat{ABP} = 30^\circ$

$BP = \frac{2AP}{3} = \frac{4R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AP = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$



Diện tích tam giác ABP là: $S_{ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot AP = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. Diện tích tam giác

ABC là: $S_{ABC} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. Diện tích hình quạt AOC là: $s_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2}{6}$

Diện tích tam giác đều AOC là: $S_{AOC} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Diện tích hình viên phân

AOC là: $S_{VP} = S_{\text{quạt}} - S_{AOC} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$

Gọi S là diện tích của hình được giới hạn bởi PA, PC và cung AC ta có:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABP} - S_{ABC} - S_{VP} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} \\ &= \frac{5R^2\sqrt{3} - 2\pi R^2}{12} \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Cho hình thang vuông ABCD với đường cao AB. Biết rằng AD = 6cm, BC = 8cm và đường chéo BD vuông góc với cạnh bên DC.

Tính độ dài AB, CD và AC.

Tuyển sinh lớp 10 THPT Tỉnh Trà vinh 2009-20010

Giải

Kẻ $AD \perp BC$ ($H \in BC$), ta được tứ giác ABHD là hình chữ nhật.

$\Rightarrow BH = AB = 6 \text{ cm}$; $DH = AB$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác

vuông BCD: $BD^2 = BC \cdot BH = 8 \cdot 6 = 48$

$\Rightarrow BD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$. Áp dụng định lý Pitago trong hai tam giác vuông ABD, BCD.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow AB^2 = BD^2 - AD^2 = 48 - 6^2 = 12$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}; BC^2 = BD^2 + CD^2$$

$\Rightarrow CD^2 = BC^2 - BD^2 = 8^2 - 48 = 16 \Rightarrow CD = 4 \text{ (cm)}$. Tiếp tục áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC:

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 = 12 + 8^2 = 76 \Rightarrow AC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \text{ (cm)}$$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có R là bán kính đường tròn ngoại tiếp thỏa hệ thức: $R(b + c) = a\sqrt{bc}$. Hãy định dạng tam giác ABC.

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM, 2003 - 2004

Giải

$BC = a$ là dây cung của đường tròn bán kính R , do đó $2R \geq a$.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có: $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$.

$$\text{Do đó } 2R \cdot \frac{b+c}{2} \geq a \cdot \sqrt{bc} \Leftrightarrow R \cdot (b+c) \geq a\sqrt{bc}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \\ b = c \end{cases}; \begin{cases} \widehat{BAC} = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại } A$$

$$\text{Vậy } \Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \Leftrightarrow R(b+c) = a\sqrt{bc}$$

Ví dụ 6: Cho tam giác vuông DEH có độ dài hai cạnh góc vuông là $DE = 5\text{cm}$ và $EH = 12\text{cm}$

- a. Tính độ dài bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác vuông DEH
- b. Trong tam giác vuông DEH có hai đường tròn có cùng bán kính r , tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc với các cạnh tam giác vuông DEH như hình dưới. Tính độ dài của r .

TS lớp 10 chuyên toán Quốc học 2005 – 2006

Giải

- a. $DH = 13$; $dt(DEH) = 30$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có:
 $dt(DEH) = dt(IDE) + dt(IEH) + dt(IDH)$. Gọi R là bán kính của đường

$$\text{tròn nội tiếp. Ta có: } 30 = \frac{1}{2}R \cdot 5 + \frac{1}{2}R \cdot 12 + \frac{1}{2}R \cdot 13 \Leftrightarrow R = 2\text{cm}$$

- b. Gọi J là tâm đường tròn có tiếp xúc với cạnh DH
 Khoảng cách từ J đến các cạnh DH, HE, DE lần lượt là: r_1, r_2 , và $3r$
 $dt(DEH) = dt(JDH) + dt(JHE) + dt(JED)$

$$\Leftrightarrow 30 = \frac{1}{2}r \cdot 13 + \frac{1}{2}r \cdot 12 + \frac{1}{2}3r \cdot 5 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2} = 1,5(\text{cm})$$

Ví dụ 7: Một chiếc cầu được thiết kế như hình vẽ dưới đây có độ dài đoạn $PQ = 32\text{m}$, chiều cao $MH = 4\text{m}$. Biết rằng $\widehat{PMQ}$ là cung của một đường tròn. Hãy tính độ dài cung $\widehat{PMQ}$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất). **TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2008 -2009**

Giải

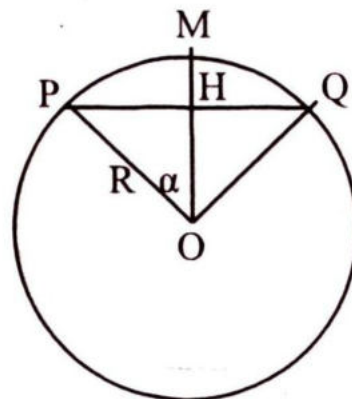
Gọi R là bán kính đường tròn chứa cung PMQ .

$$\text{Ta có: } OP^2 = OH^2 + PH^2 \Leftrightarrow R^2 = (R - 4)^2 + 16^2$$

$$\Leftrightarrow 8R = 16 + 16^2 \Leftrightarrow R = 34 (\text{m})$$

$$\sin \alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17} \Rightarrow \alpha \approx 28,07 (\text{độ})$$

$$\text{Suy ra } \widehat{POQ} = 2\alpha \approx 56,14 (\text{độ})$$



$$\text{Độ dài cung } \widehat{PMQ} \text{ là: } l = \frac{\pi \cdot R \cdot 2\alpha}{180} \approx 33,3 \text{ (m)}$$

Ví dụ 8: Cho tứ giác ABCD có O là giao điểm hai đường chéo và diện tích tam giác AOB bằng 4, diện tích tam giác COD bằng 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác ABCD.

HSG lớp 9 TP HCM 2007-2008

Giải:

$$\text{Đặt } S_{BOC} = x, S_{AOD} = y; \text{ Ta có } \frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD} = \frac{S_{BOC}}{S_{COD}}. \text{ Suy ra: } \frac{4}{y} = \frac{x}{9}.$$

$$\Rightarrow xy = 36. \text{ Ta lại có } S_{ABCD} = 4 + 9 + x + y \geq 13 + 2\sqrt{xy} = 13 + 2 \cdot 6 = 25$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 6$.

Vậy diện tích tứ giác ABCD đạt giá trị nhỏ nhất là 25.

Ví dụ 9: Để đo chiều cao của một ngọn tháp mà ta không thể đi đến gần ngọn tháp đó được, người ta đóng 2 cọc tiêu AA' và BB' cao 1,5m tại 2 vị trí cách nhau 10m sao cho AA', BB' và tim của tháp được giống thẳng hàng nhờ giác kế. Dùng giác kế đặt tại A và B, người ta đọc được các góc nhìn từ A và từ B đến đỉnh D của tháp là 18° và $19^\circ 30'$ (hình vẽ). Tính khoảng cách từ BB' đến tim của ngọn tháp và chiều cao của ngọn tháp.

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2006-2007

Giải:

Gọi x là khoảng cách từ BB' đến tim ngọn tháp ($x > 0$).

$$\text{Ta có: } \frac{CD}{B'C} = \tan 19^\circ 30' \Leftrightarrow CD = x \tan 19^\circ 30';$$

$$\frac{CD}{AC} = \tan 18^\circ \Leftrightarrow CD = (10 + x) \tan 18^\circ.$$

Do đó ta có phương trình:

$$x \tan 19^\circ 30' = (x + 10) \tan 18^\circ \Leftrightarrow x(\tan 19^\circ 30' - \tan 18^\circ) = 10 \tan 18^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 \tan 18^\circ}{\tan 19^\circ 30' - \tan 18^\circ} \approx 111,3 \text{ m}$$

$$\text{Suy ra: } CD = x \tan 19^\circ 30' \approx 39,4 \text{ m}$$

Vậy chiều cao của ngọn tháp là: $h \approx 39,4 + 1,5 = 40,9 \text{ m}$

Ví dụ 10: Cho tam giác ABC có đường phân giác AD với D thuộc đoạn BC sao cho $BD = a$, $CD = b$ ($a > b$). Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại E. Tính AE theo a và b.

Đề TS lớp 10 Trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004-2005

Giải:

Ta có $\widehat{EAD} = \widehat{EAC} + \widehat{CAD} = \widehat{ABC} + \widehat{DAB} = \widehat{ADE}$

Suy ra tam giác EAD cân tại E

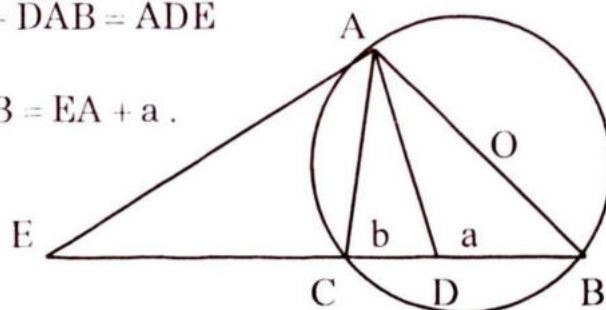
$\Rightarrow EA = ED \Rightarrow EC = EA - b$ và $EB = EA + a$.

Mặt khác ta có $EA^2 = EC \cdot EB$ (do

hai tam giác EAC và EBA đồng dạng). Ta có phương trình:

$$EA^2 = (EA - b)(EA + a)$$

$$\text{Suy ra } EA = \frac{ab}{a + b}.$$



Ví dụ 11: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O;R). Vẽ tam giác đều ACD (D và B ở hai nửa mặt phẳng khác nhau có chung bờ AC). Gọi E là giao điểm của BD với đường tròn (O), gọi M là giao điểm của BD với đường cao AH của tam giác ABC.

a. Chứng minh MADB là một tứ giác nội tiếp.

b. Tính ED theo R.

Đề TS lớp 10 Trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004-2005

Giải:

a) Dễ dàng chứng minh được

$$\widehat{ABM} = \widehat{ACM} \text{ mà } \widehat{ABM} = \widehat{ADM}$$

(tam giác ABD cân tại A)

Suy ra $\widehat{ACM} = \widehat{ADM}$. Nên

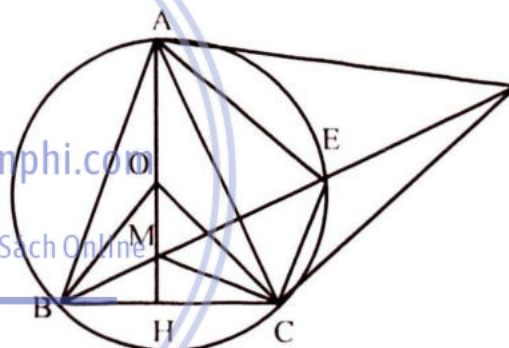
MADC là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{EDC} = \widehat{OAC} = \widehat{OAB}$

$$\widehat{DCE} = 60^\circ - \widehat{ECA} = 60^\circ - \widehat{ABE}$$

$$= \widehat{BMH} - \widehat{ABM} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$$

Suy ra tam giác OAB bằng tam giác EDC. Nên $ED = OA = R$.



Dạng 2: Các bài toán chứng minh đẳng thức hình học

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và có $AB < AC$. Lấy điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A của đường tròn (O). Vẽ MH vuông góc BC, MK vuông góc CA, MI vuông góc AB

(H thuộc BC, K thuộc AC, I thuộc AB). Chứng minh: $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI}$

TS lớp 10 chuyên toán Lê Hồng Phong, TPHCM, 2002 – 2003

Giải

Gọi D là điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{DMC} = \widehat{BMA}$

Xét $\triangle MBA$ và $\triangle MDC$ có: $\widehat{BMA} = \widehat{DMC}$, $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM). Do đó $\triangle MBA \sim \triangle MDC$

MI, MH lần lượt là đường cao ứng với cạnh AB, DC của các tam giác MBA, MDC.

Ta có: $\frac{AB}{MI} = \frac{DC}{MH}$.

Mặt khác $\widehat{BMD} = \widehat{BMA} + \widehat{AMD}$

$\widehat{AMC} = \widehat{DMC} + \widehat{AMD}$

và $\widehat{BMA} = \widehat{DMC} \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AMC}$

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MAC$ có:

$\widehat{BMD} = \widehat{AMC}$, $\widehat{MBD} = \widehat{MAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC). Do đó $\triangle MBD \sim \triangle MAC$. MH, MK lần lượt là đường cao ứng với cạnh BD, AC của các tam giác MBD, MAC. Ta có: $\frac{BD}{MH} = \frac{AC}{MK}$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI} = \frac{BD + DC}{MH} = \frac{BC}{MH}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Giả sử các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A của tam giác ABC lần lượt cắt đường thẳng BC tại D, E và có $AD = AE$. Chứng minh: $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

TS lớp 10 chuyên toán Lê Hồng Phong, TPHCM, 2002 – 2003
Giải

AD cắt BC tại F. Vẽ đường kính AG của đường tròn (ABC).

Ta có $\widehat{ABG} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

sđ $\widehat{GB} + \text{sđ } \widehat{FC} + \text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{BF} = \text{sđ } \widehat{ACG} = 180^\circ$ (1).

$\widehat{BAF} = \widehat{FAC}$ (AD là phân giác)

$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{BF} = \text{sđ } \widehat{FC}$ (2).

AD, AE là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\widehat{BAC}$ và $\widehat{CAx}$ nên $\widehat{DAE} = 90^\circ$.

$\triangle DAE$ vuông có $AD = AE$ (gt) nên là tam giác vuông cân

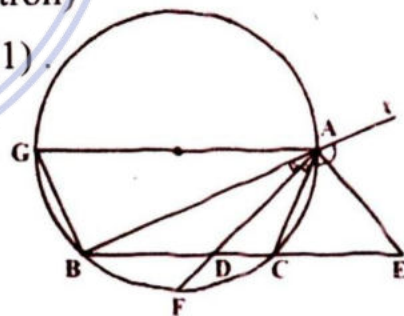
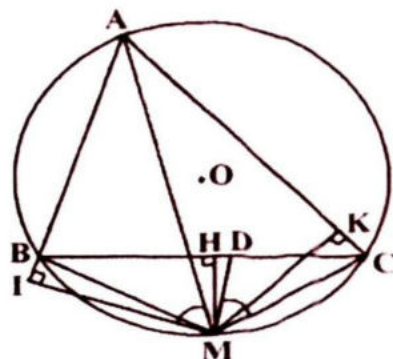
$\Rightarrow \widehat{ADE} = 45^\circ$; $\text{sđ } \widehat{ADE} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BF}}{2}$

$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{BF} = 90^\circ$ (3).

Từ (1), (2) và (3) có $\widehat{GB} = \widehat{AC} \Rightarrow GB = AC$

$\triangle BAG$ vuông tại B nên: $AB^2 + BG^2 + AG^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = (2R)^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 4R^2$



Ví dụ 3: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O;R) vẽ hai tiếp tuyến MA; MB và cát tuyến MCD. Gọi I là trung điểm CD. Gọi E; F; K lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với MO; MD; OI.

- Chứng minh: $R^2 = OE \cdot OM = OI \cdot OK$.
- Chứng minh M; A; B; O; I nằm trên một đường tròn.
- Khi cung CAD nhỏ hơn cung CBD, hãy chứng minh $\widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$

TS lớp 10 ĐHSPT Hải Phòng 2003 – 2004

Giải

- Ta có: $IC = ID \Rightarrow OI \perp CD; OM \perp AB$
 $\triangle OIM \sim \triangle OEK \Rightarrow OE \cdot OM = OI \cdot OK$ (1).

Trong tam giác vuông OAM có:

$$R^2 = OA^2 = OE \cdot OM \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$R^2 = OE \cdot OM = OI \cdot OK$$

- $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MIO} = 1v$
 $\Rightarrow M; A; B; I; O$ cùng nằm trên một đường tròn.

- Trong tam giác vuông MAO có: $MA^2 = ME \cdot MO$

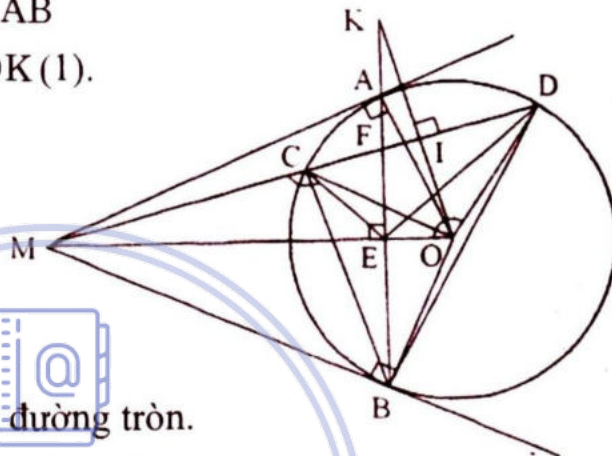
Trong đường tròn (O) ta chứng minh được: $MA^2 = MC \cdot MD$

$$\Rightarrow MC \cdot MD = ME \cdot MO \text{ hay } \frac{MC}{ME} = \frac{MO}{MD}$$

$$\Rightarrow \triangle MCE \sim \triangle MOD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MOD}$$

$$\Rightarrow \widehat{MCE} + \widehat{ECD} = \widehat{MOD} + \widehat{ECD} = 2v \Rightarrow OECD \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DOC} \text{ (cùng chắn cung CD)}. \text{ Mà } \widehat{DOC} = 2\widehat{DBC} \text{ (cùng chắn chung CD)}. \text{ Vậy } \widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$$



Ví dụ 4: Cho đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C là trung điểm của bán kính OB và (S) là đường tròn đường kính AC. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm tùy ý phân biệt M, N khác A và B. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của AM và AN với đường tròn (S).

- Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ.
- Vẽ tiếp tuyến ME của (S) với E là tiếp điểm.

Chứng minh: $ME^2 = MA \cdot MP$. Vẽ tiếp tuyến NF của (S) với F là

tiếp điểm. Chứng minh: $\frac{ME}{NF} = \frac{AM}{AN}$.

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2008-2009

ABC

Giải

- a. Ta có: $\widehat{CPA} = \widehat{BMA} = 90^\circ \Rightarrow CP \parallel BM$.

Do đó: $\frac{AP}{AM} = \frac{AC}{AB}$ (1)

Tương tự: $CQ \parallel BN$ và $\frac{AQ}{AN} = \frac{AC}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2): $\frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN}$.

Do đó: $PQ \parallel MN$.

- b. Hai tam giác MEP và MAE có: $\widehat{EMP} = \widehat{AME}$ và $\widehat{PEM} = \widehat{EAM}$.

Do đó chúng đồng dạng. Suy ra: $\frac{ME}{MA} = \frac{MP}{ME} \Rightarrow ME^2 = MA \cdot MP$

- c. Tương tự ta cũng có: $NF^2 = NQ \cdot NA$. Do đó: $\frac{ME^2}{NF^2} = \frac{MA \cdot MP}{NA \cdot NQ}$

Nhưng $\frac{MP}{NQ} = \frac{MA}{NA}$ (Do $PQ \parallel MN$)

Từ đó: $\frac{ME^2}{NF^2} = \frac{AM^2}{AN^2} \Rightarrow \frac{ME}{NF} = \frac{AM}{AN}$

Ví dụ 5: Cho đường tròn (O) có đường kính $BD = 2R$, dây AC của (O) vuông góc với BD tại H. Gọi P, Q, R, S theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AD, CD, CB.

- a. Chứng minh: $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$

- b. Chứng minh tứ giác PQRS là tứ giác nội tiếp

- c. Chứng minh: $PR + QS \leq AB + AD$

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2006-2007

Giải:

- a) $HA^2 + HB^2 = AB^2$, $HB^2 + HC^2 = BC^2$,

$HC^2 + HD^2 = CD^2$, $HD^2 + HA^2 = DA^2$

$2(HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2)$

$= AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2$

$= 4R^2 + 4R^2$

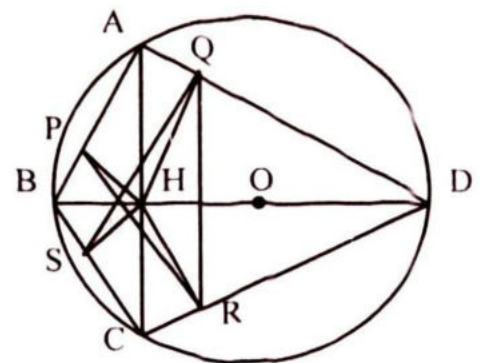
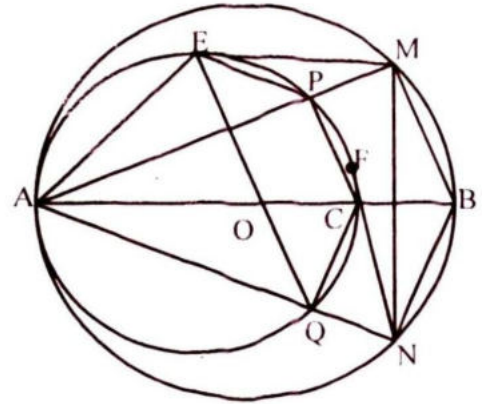
Vậy $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$

- b) Tứ giác HPBS nội tiếp: $\widehat{HPS} = \widehat{HBS} = \widehat{DBC}$

HPAQ là hình chữ nhật: $\widehat{HPQ} = \widehat{HAQ} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$

Do đó: $\widehat{SPQ} = \widehat{HPS} + \widehat{HPQ} = 2\widehat{DBC}$. Tương tự: $\widehat{SRQ} = 2\widehat{BDC}$.

Do $\widehat{BDC} + \widehat{DBC} = 90^\circ$ nên $\widehat{SPQ} + \widehat{SRQ} = 180^\circ$



c) Ta có $PR \leq HP + HR$. Gọi E là trung điểm AB, ta có: $HP \leq HE = \frac{1}{2}AB$.

Gọi F là trung điểm CD, $HR \leq HF = \frac{1}{2}CD$

Do đó: $PR \leq \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD$. Tương tự: $QS \leq \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$

Mà $AB = BC$; $AD = CD$. Do đó $PR + QS \leq AB + AD$

Ví dụ 6: Cho hai tam giác ABC và DEF có các góc đều nhọn và có: $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $AB = 3DE$. Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng ba lần bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM, 2000 – 2001 Ban A, B
Giải

Gọi (O; R), (I; r) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, DEF; $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

(vì $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DEF}$;

$\widehat{ACB}$, $\widehat{DFE}$ nhọn nên

$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$;

$\widehat{DEF} = \frac{1}{2}\widehat{DIE}$ (hệ quả góc nội tiếp)

Suy ra: $\widehat{AOB} = \widehat{DIE}$; $OA = OB (= R) \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O

$ID = IE (= r) \Rightarrow \triangle IDE$ cân tại I.

Do đó: $\triangle OAB \sim \triangle IDE \Rightarrow \frac{OA}{ID} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3DE}{DE} \Rightarrow R = 3r$

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F. Biết BF cắt CE tại H và cắt BC tại D. Chứng minh tứ giác BECH nội tiếp và AH vuông góc với BC.

a. Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

b. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và K là trung điểm của BC. Tính tỉ số $\frac{OK}{BC}$ khi BHOC nội tiếp.

c. Cho $HF = 3\text{cm}$, $HB = 4\text{cm}$, $CE = 8\text{cm}$ và $HC > HE$. Tính HC.

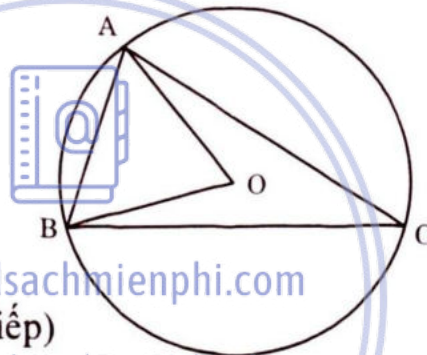
Tuyển sinh lớp 10 TP Hà nội 2007-2008

Giải

a. Ta có E, F lần lượt là giao điểm của AB, AC với đường tròn đường kính BC.

$\Rightarrow BECH$ nội tiếp đường tròn đường kính BC.

ABC



*Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BF, CE$ là hai đường cao của tam giác $ABC \Rightarrow H$ là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow AH$ vuông góc với BC

b. Xét tam giác AEC và tam giác AFB có : $\widehat{BAC}$ chung,

$$\widehat{BAC} = \widehat{AFB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AFB \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$$

c. Khi $BHOC$ nội tiếp ta có :

$$\widehat{BOC} = \widehat{BHC}, \widehat{BHC} = \widehat{EHF} \Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{BOC}, \widehat{EHF} + \widehat{EAF} = 180^\circ$$

(do tứ giác $AFEH$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{BOC} + \widehat{BAC} = 180^\circ, \widehat{EHF} = \widehat{BOC}$

$\Rightarrow 3\widehat{BOC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$. Ta có: K là trung điểm của BC , O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow OK$ vuông góc với BC mà tam giác OBC cân tại O ($OB = OC$)

$$\Rightarrow \widehat{KOC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^\circ \Rightarrow \frac{OK}{KC} = \cot \widehat{KOC} = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $BC = 2KC$ nên $\frac{OK}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

d. Xét $\triangle EHB$ và $\triangle FHC$ có :

$$\widehat{BHF} = \widehat{CFH} = 90^\circ, \widehat{EBH} = \widehat{FCH} \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow \triangle EHB \sim \triangle FHC$$

$$\Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HE \cdot HC = HB \cdot HF = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\Rightarrow HC(CE - HC) = 12 \Rightarrow HC^2 - 8 \cdot HC + 12 = 0 \Leftrightarrow HC = 2 \text{ hoặc } HC = 6$$

*Khi $HC = 2$ thì $HE = 6$ (không thỏa $HC > HE$)

*Khi $HC = 6$ thì $HE = 2$ (thỏa $HC > HE$). Vậy $HC = 6(\text{cm})$

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và có $AB < AC$. Lấy điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A của đường tròn (O) . Vẽ MH vuông góc BC , MK vuông góc CA , MI vuông góc AB

(H thuộc BC , K thuộc AC , I thuộc AB). Chứng minh $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI}$.

ĐTS 10 Lê Hồng Phong TP. HCM 2002 – 2003

Giải:

Gọi D là điểm trên cạnh BC sao cho

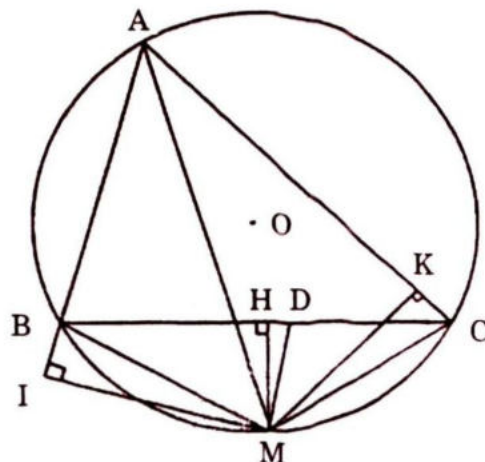
$$\widehat{DMC} = \widehat{BMA}$$

Xét $\triangle MBA$ và $\triangle MDC$ có:

$$\widehat{DMC} = \widehat{BMA};$$

$\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

Do đó $\triangle MBA \sim \triangle MDC$



ABC

MI, MH lần lượt là đường cao ứng với cạnh AB, DC của tam giác MBA,

MDC. Ta có: $\frac{AB}{MI} = \frac{DC}{MH}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{BMD} = \widehat{BMA} + \widehat{AMD}$; $\widehat{AMC} = \widehat{DMC} + \widehat{AMD}$

Và $\widehat{BMA} = \widehat{DMC} \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AMC}$. Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MAC$ có:

$\widehat{BMD} = \widehat{AMC}$; $\widehat{MBD} = \widehat{MAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC).

Do đó $\triangle MBD \sim \triangle MAC$. MH, MK lần lượt là hai đường cao ứng với cạnh BD, AC của các tam giác MBD, MAC. Ta có: $\frac{BD}{MH} = \frac{AC}{MK}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI} = \frac{BD + DC}{MH} = \frac{BC}{MH}$.

Ví dụ 9: Cho tam giác ABC. Giả sử các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A của tam giác ABC lần lượt cắt đường thẳng BC tại D, E và có $AD = AE$. Chứng minh $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

DTS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TP. HCM 2002 – 2003

Giải:

AD cắt cung BC tại F. Vẽ đường kính AG của đường tròn (ABC).

Ta có $\widehat{ABG} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\text{sd}\widehat{GB} + \text{sd}\widehat{FC} + \text{sd}\widehat{AC} + \text{sd}\widehat{BF} = \text{sd}\widehat{ACG} = 180^\circ$

$\widehat{BAF} = \widehat{FAC}$ (AD là phân giác)

$\Rightarrow \text{sd}\widehat{BF} = \text{sd}\widehat{FC}$

AD, AE là hai tia phân giác của hai

góc kề bù $\widehat{BAC}, \widehat{CAx}$ nên

$\widehat{DAE} = 90^\circ$.

$\triangle DAE$ vuông góc có $AD = AE$ (gt) nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow \widehat{ADE} = 45^\circ$

$\text{sd}\widehat{ADE} = \frac{\text{sd}\widehat{AC} + \text{sd}\widehat{BF}}{2} \Rightarrow \text{sd}\widehat{AC} + \text{sd}\widehat{BF} = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) có: $\widehat{GB} = \widehat{AC} \Rightarrow GB = AC$. $\triangle BAG$ vuông tại B nên

$AB^2 + BG^2 = AG^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = (2R)^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 4R^2$

Ví dụ 10: Cho tam giác nhọn ABC. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao và m_a, m_b, m_c lần lượt là đường trung tuyến của các cạnh BC, CA, AB; R và r lần lượt là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq \frac{R+r}{r}$.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ, 2003 – 2004

Giải:

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

Ta có $AA_1 = m_a \leq R + OA_1$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB = AC$).

$BB_1 = m_b \leq R + OB_1$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB = AC$);

$CC_1 = m_c \leq R + OC_1$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB = AC$).

$$\text{Suy ra } \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq R \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) + \left(\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} \right) \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } 2S = (a + b + c) \cdot r \Rightarrow \frac{2S}{r} = a + b + c = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 2S &= a \cdot OA_1 + b \cdot OB_1 + c \cdot OC_1 = \frac{2S}{h_a} \cdot OA_1 + \frac{2S}{h_b} \cdot OB_1 + \frac{2S}{h_c} \cdot OC_1 \\ &= 2S \left(\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} \right) \Rightarrow \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) và biến đổi ta được: $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq \frac{R + r}{r}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Ví dụ 11: Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có đường trung tuyến AM và đường phân giác trong AD (M, D thuộc BC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F.

Chứng minh $BE = CF$.

TS 10 chuyên thành phố HCM năm 2009 – 2010

Giải:

Ta có:

$$\Delta CFM \sim \Delta CDA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CF}{CM} = \frac{CD}{CA} \quad (1)$$

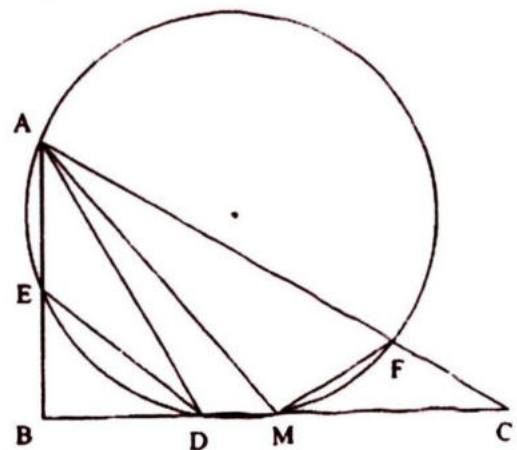
$$\Delta BED \sim \Delta BMA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BE}{BM} = \frac{BD}{BA} \quad (2)$$

AD là phân giác của góc A

$$\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{BD}{AB} \quad (3).$$

Do M là trung điểm của BC nên $BM = CM$.

Kết hợp với (1), (2) và (3) ta được: $CF = BE$.



Ví dụ 12: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA . Chứng minh BE vuông góc với AO và $OE.OA = R^2$.
3. Trên cung nhỏ BC của đường tròn $(O; R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn $(O; R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại điểm P, Q . Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC .
4. Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại các điểm M, N . Chứng minh $PM + QN \geq MN$.

Tuyển sinh lớp 10 TP Hà nội, 2009 – 2010

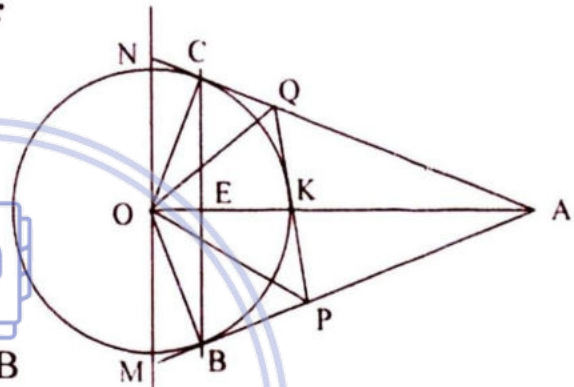
Giải:

$$1. \widehat{OCA} = \widehat{OBA} = 90^\circ \\ \Rightarrow \text{tứ giác } ABOC \text{ nội tiếp}$$

$$2. \Delta OCA \text{ có } \hat{C} = 90^\circ \\ \Rightarrow OC^2 = OE.OA \text{ (hệ thức lượng)} \\ \Rightarrow OA.OE = R^2$$

$$3. \text{Chu vi } \Delta APQ = AQ + PQ + AP \\ = AQ + QC + AP + PB \\ = 2AB \text{ (không đổi)}$$

$$4. ABOC \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{BOC} + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{POQ} + \hat{A} = 180^\circ \\ \text{Mà } 2\widehat{PMO} + \hat{A} = 180^\circ (\Delta AMN \text{ cân tại } A) \Rightarrow \widehat{PMO} = \widehat{POQ} \\ \widehat{PON} = \widehat{OPM} + \widehat{OMP} \Leftrightarrow \widehat{QON} + \widehat{QOP} = \widehat{OPM} + \widehat{OMP} \\ \text{Mà } \widehat{QOP} = \widehat{OMP} \Rightarrow \widehat{OPM} = \widehat{QON} \\ \Delta NOQ \sim \Delta MPO \Rightarrow PM.QN = OM.ON = OM^2 \\ PM + QN \geq 2\sqrt{PM.QN} = 2\sqrt{OM^2} = 2OM = MN \text{ (bất đẳng thức Côsi)}$$



Dạng 3: Chứng minh tứ giác nội tiếp

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ tiếp tuyến d với đường tròn (O) tại B . Gọi C và D là 2 điểm tùy ý trên tiếp tuyến d sao cho B nằm giữa C và D . Các tia AC và AD cắt (O) lần lượt tại E và F ($E, F \neq A$)

- a. Chứng minh: $CB^2 = CA.CE$
- b. Chứng minh: tứ giác $CEFD$ nội tiếp đường tròn (O')
- c. Chứng minh: các tích $AC.AE$ và $AD.AF$ cùng bằng một hằng số không đổi. Tiếp tuyến của (O') kẻ từ A tiếp xúc với (O') tại T . Khi C hoặc D di động trên d , thì điểm T chạy trên đường thẳng cố định nào?

TS lớp 10 THPT-TP Huế 2009 – 2010

ABC

Giải

- a. Hai tam giác CAB và CBE có: Góc C chung và $\widehat{CAB} = \widehat{EBC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến với một dây cùng chắn cung BE) nên chúng đồng dạng.

$$\text{Suy ra: } \frac{CA}{AB} = \frac{CB}{CE} \Leftrightarrow CB^2 = CA \cdot CE$$

- b. Ta có:

$\widehat{CAB} = \widehat{EFB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

$$\text{Mà } \widehat{CAB} + \widehat{BCA} = 90^\circ$$

(tam giác CBA vuông tại B)

$$\text{nên } \widehat{ECD} + \widehat{BFE} = 90^\circ.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{BFD} = \widehat{BFA} = 90^\circ$$

(tam giác ABF nội tiếp đường tròn)

$$\text{Nên: } \widehat{ECD} + \widehat{BFE} + \widehat{BFD} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ECD} + \widehat{DFE} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác CEFD nội tiếp đường tròn (O')

- c. Xét tam giác vuông ABC: $BE \cdot AC = AC \cdot AE = AB^2 = 4R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông). Tương tự, trong tam giác vuông ABD, ta có: $AD \cdot AF = AB^2 = 4R^2$. Vậy khi C hoặc D di động trên d ta luôn có:

$AC \cdot AE = AD \cdot AF = 4R^2$ (không đổi). Hai tam giác ATE và ACT đồng dạng (vì có góc A chung và $\widehat{ATE} = \widehat{TCA}$). Suy ra: $AT^2 = AC \cdot AE = 4R^2$ (không đổi). Do đó T chạy trên đường tròn tâm A bán kính $2R$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), có đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

- Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DBH và ECH.
- Gọi F là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DBH và ECH. Chứng minh HF đi qua trung điểm của DE.
- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm F.

Đề TS lớp 10 chuyên TP HCM 2006-2007

Giải

- a. Ta có: $DE \parallel BC$ nên: $\widehat{HDE} = \widehat{BHD}$ (so le trong).

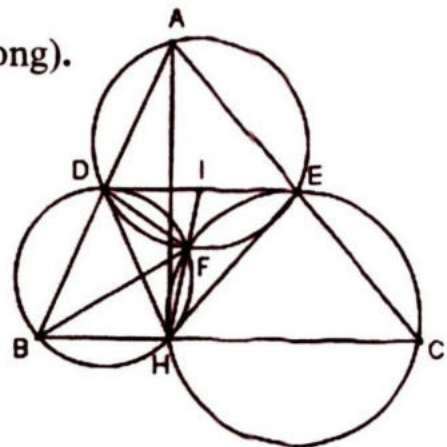
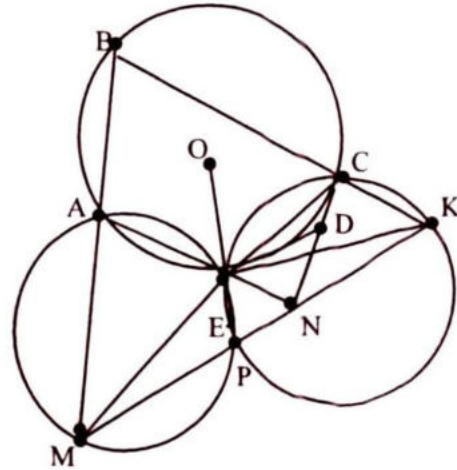
Tam giác vuông ABH có HD là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên: $DH = DB$.

$$\text{Suy ra: } \widehat{BHD} = \widehat{DBH}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{HDE} = \widehat{DBH}.$$

Vậy DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH tại D.

Tương tự DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác ECH tại E.



- b. HF cắt DE tại I. Ta có $\widehat{IDF} = \widehat{IHD}$; $\widehat{IFD} = \widehat{IDH} = \widehat{DBH}$. Do đó, hai tam giác IDF và IHD đồng dạng. Suy ra: $\frac{ID}{IH} = \frac{IF}{ID} \Rightarrow ID^2 = IF.IH$. Tương tự

ta có: $IE^2 = IF.IH$

Suy ra: $ID = IE$ hay HF qua trung điểm I của DE.

- c. Các tứ giác BDFH và CEFH nội tiếp nên:

$$\widehat{DFH} + \widehat{DBH} = 180^\circ; \widehat{EFH} + \widehat{ECH} = 180^\circ$$

Tam giác ABC có: $\widehat{BAC} + \widehat{DBH} + \widehat{ECH} = 180^\circ$

Ta lại có: $\widehat{DFH} + \widehat{EFH} + \widehat{DFE} = 360^\circ$.

Suy ra: $\widehat{BAC} + \widehat{DFE} = 180^\circ$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE qua F

Ví dụ 3: Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp đường tròn (O) sao cho tia BA và tia DE cắt nhau tại M, tia AE và tia CD cắt nhau tại N. Gọi K là giao điểm của BC và tiếp tuyến của (O) tại E. Gọi H là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và CEK.

- a. Chứng minh ba điểm M, P, K thẳng hàng.

- b. Chứng minh tứ giác APNC nội tiếp. Tính góc MPN.

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2004-2005

Giải:

- a. Do các tứ giác AEPM, ECKP, ABCE là các tứ giác nội tiếp nên:

$$\widehat{MPE} + \widehat{EPK} = \widehat{BAE} + \widehat{ECB} = 2v.$$

Vậy M, P, K thẳng hàng.

Do các tứ giác AEPM, ECPK, ECPK nội tiếp nên:

$$\widehat{APC} = \widehat{APE} + \widehat{EPC} = \widehat{AME} + \widehat{EKC}$$

$$\widehat{APC} = \frac{1}{2}(\text{sd } \widehat{BnC} + \text{sd } \widehat{CmD} - \text{sd } \widehat{APe})$$

$$+ \frac{1}{2}(\text{sd } \widehat{ApE} + \text{sd } \widehat{AqB} - \text{sd } \widehat{ErD} - \text{sd } \widehat{CmD})$$

$$\widehat{APC} = \frac{1}{2}(\text{sd } \widehat{AqB} + \text{sd } \widehat{BnC} - \text{sd } \widehat{ErD}) = \widehat{ANC}.$$

Vậy tứ giác APNC nội tiếp.

$$\widehat{MPA} + \widehat{APN} = \widehat{MEA} + (180^\circ - \widehat{ACN})$$

$$\widehat{MPA} + \widehat{APN} = \widehat{MEA} + \widehat{AED} = 180^\circ.$$

Vậy $\widehat{MPN} = 180^\circ$.

ABC

Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{C} < \widehat{A}$. Đường tròn tâm I nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại M, N, E; gọi K là giao điểm của BI và NE.

a. Chứng minh $\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2}$

b. Chứng minh năm điểm A, M, I, K, E cùng nằm trên một đường tròn.

c. Gọi T là giao điểm của BI và AC, chứng minh: $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.

d. Gọi Bt là tia của đường thẳng BC và chứa điểm C. Khi hai điểm A, B và Bt cố định; điểm C chuyển động trên tia Bt và thỏa mãn giả thiết, chứng minh rằng các đường thẳng NE luôn đi qua điểm cố định.

Tuyển sinh lớp 10 Hà Nam, 2009-2010

Giải

a. Trong $\triangle AIB$ có $\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{ABI} - \widehat{IAB}$

$$= 180^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2}$$

b. Vì $CE = CN$ (t/c tiếp tuyến) nên $\triangle CEN$ cân tại C

$$\Rightarrow 2\widehat{CEN} = 180^\circ - \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \widehat{CEN} = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2}$$

Nên tứ giác AIKE nội tiếp (1). Mặt khác $\widehat{IEA} = \widehat{IMA} = 90^\circ$ vì (I) tiếp xúc với AB và AC nên tứ giác AMIE nội tiếp (2). Từ (1) và (2) suy ra năm điểm A, M, I, K, E cùng nằm trên một đường tròn.

c. Vì năm điểm A, M, I, K, E cùng nằm trên một đường tròn.

$$\text{Nên } \widehat{TEK} = \widehat{TIA} \Rightarrow \triangle TEK \sim \triangle TIA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{TE}{TK} = \frac{TI}{TA} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự } \triangle BIM \sim \triangle BIA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{BI}{BA} \quad (4). \text{ Do AI là phân giác của}$$

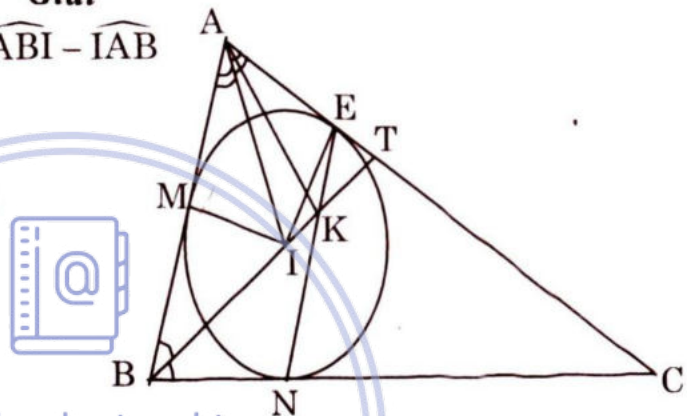
$$\text{góc } \widehat{BAT} \text{ nên } \frac{BI}{BA} = \frac{TI}{TA} \quad (5).$$

$$\text{Từ (3) (4) (5)} \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{TE}{TK} \text{ hay } KT \cdot BM = KB \cdot ET.$$

$$\text{Mà } BN = BM \text{ nên } KT \cdot BN = KB \cdot ET$$

d. Vì năm điểm A, M, I, K, E cùng nằm trên một đường tròn nên $\widehat{AKB} = 90^\circ$. Do A, B và tia Bt cố định $\Rightarrow$ tia BK cố định và AB;

$\widehat{ABt}$ không đổi mà $BK = AB \cdot \cos \frac{\widehat{ABt}}{2}$ nên K cố định. Nên các đường thẳng NE luôn đi qua điểm K cố định.



Ví dụ 5: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB cố định, đường kính CD di động (hai đường thẳng AB và CD không trùng nhau). Tiếp tuyến của (O) tại B cắt các đường thẳng AC và AD lần lượt tại E và F.

a. Chứng minh $BE \cdot BF = 4R^2$

b. Chứng minh CEFD là tứ giác nội tiếp.

Gọi I là trung điểm của EF và K là giao điểm của AI và CD. Chứng minh rằng khi CD di động thì K chạy trên một đường cố định.

Đề TS lớp 10 THPT TP Huế 2008 -2009

Giải

a. Ta có: Tam giác ACD vuông tại A (nội tiếp nửa đường tròn đường kính CD), nên tam giác EAF vuông tại A; AB vuông góc với EF (vì EF là tiếp tuyến tại B). Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông AEF:

$$AB^2 = BE \cdot BF \Leftrightarrow BE \cdot BF = 4R^2$$

b. Ta có: $\widehat{AFE} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{DB}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2}$ (góc ở đỉnh bên ngoài đường tròn). $\widehat{ACD} = \frac{\widehat{AD}}{2}$ (góc nội tiếp chắn $\widehat{AD}$)

Suy ra: $\widehat{AFE} = \widehat{ACD}$. Nên tứ giác CEFD nội tiếp.

c. Ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ACD}$ (chứng minh trên)

$AI = \frac{1}{2}EF$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông EAF),

nên tam giác AIF cân tại I. Suy ra: $\widehat{FAI} = \widehat{AFI} = \widehat{AFE}$

Mà $\widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{ADC} + \widehat{FAI} = \widehat{ADK} + \widehat{DAK} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{AKD} = \widehat{AKO} = 90^\circ$

Vậy khi CD di động thì K chạy trên đường tròn đường kính AO.

Ví dụ 6: Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp đường tròn (O) sao cho tia BA và tia DE cắt nhau tại M, tia AE và tia CD cắt nhau tại N. Gọi K là giao điểm của BC và tiếp tuyến của (O) tại E. Gọi H là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và CEK.

a. Chứng minh ba điểm M, P, K thẳng hàng.

b. Chứng minh tứ giác APNC nội tiếp. Tính góc MPN.

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2004-2005

Giải:

- a. Do các tứ giác AEPM, ECKP, ABCE là các tứ giác nội tiếp nên:

$$\widehat{MPE} + \widehat{EPK} = \widehat{BAE} + \widehat{ECB} = 2v.$$

Vậy M, P, K thẳng hàng.

- Do các tứ giác AEPM, ECPK, ECPK nội tiếp nên

$$\widehat{APC} = \widehat{APE} + \widehat{EPC} = \widehat{AME} + \widehat{EKC}$$

$$\widehat{APC} = \frac{1}{2}(\text{sd } \widehat{BnC} + \text{sd } \widehat{CmD} - \text{sd } \widehat{APE})$$

$$+ \frac{1}{2}(\text{sd } \widehat{ApE} + \text{sd } \widehat{AqB} - \text{sd } \widehat{ErD} - \text{sd } \widehat{CmD})$$

$$\widehat{APC} = \frac{1}{2}(\text{sd } \widehat{AqB} + \text{sd } \widehat{BnC} - \text{sd } \widehat{ErD}) = \widehat{ANC}.$$

Vậy tứ giác APNC nội tiếp. $\widehat{MPA} + \widehat{APN} = \widehat{MEA} + (180^\circ - \widehat{ACN})$

$$\widehat{MPA} + \widehat{APN} = \widehat{MEA} + \widehat{AED} = 180^\circ. \text{ Vậy } \widehat{MPN} = 180^\circ.$$

Ví dụ 7: Cho tứ giác ABCD có các cạnh đối diện AD cắt BC tại E và AB cắt CD tại F. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD nội tiếp được đường tròn là: $EA \cdot ED + FA \cdot FB = EF^2$.

Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 - Hải Phòng, 2004 – 2005

Giải:

- a. Điều kiện cần: Nếu tứ giác ABCD nội tiếp thì $\widehat{CBA} = \widehat{ADF}$ (cùng bù với $\widehat{ADC}$). Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, cắt EF tại điểm thứ hai M, ta có: $\widehat{CBA} = \widehat{AME}$ (cùng bù với $\widehat{EBA}$) suy ra $\widehat{ADF} = \widehat{AME} \Rightarrow$ tứ giác MADF nội tiếp.

$$\Rightarrow \triangle EMA \sim \triangle EDF \text{ và}$$

$$\triangle FAM \sim \triangle FEB$$

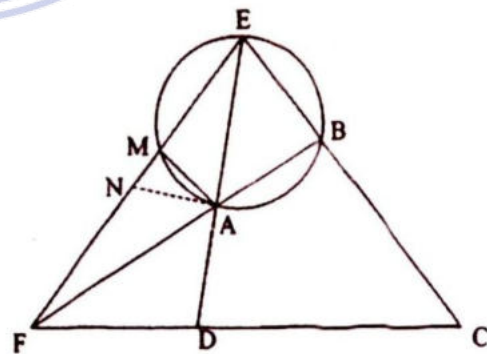
$$\Rightarrow EA \cdot ED = EM \cdot EF \text{ và}$$

$$FA \cdot FB = FM \cdot EF.$$

$$\Rightarrow EA \cdot ED + FA \cdot FB$$

$$= EM \cdot EF + FM \cdot EF$$

$$= (EM + FM) \cdot EF = EF^2.$$



- b. Điều kiện đủ: Nếu $EA \cdot ED + FA \cdot FB = EF^2$, vẽ các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE và DAF. Giả sử chúng cắt EF lần lượt tại M, N. Ta sẽ chứng minh M trùng với N. Ta có:
$$\begin{cases} EA \cdot ED = EN \cdot EF \\ FA \cdot FB = FM \cdot FE. \end{cases}$$

ABC

Suy ra $EA.ED + FA.FB = EF^2 = EN.EF + FM.FE = EF(EN + FM)$

$\Rightarrow EN + FM = EF \Rightarrow M \equiv N$.

Từ đó ta có: $\widehat{EMA} = \widehat{ABC}$ (cùng bù với $\widehat{ABE}$); $\widehat{EMA} = \widehat{ADF}$ (cùng bù với $\widehat{AMF}$) suy ra $\widehat{ADF} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ hay tứ giác ABCD nội tiếp.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC cân ở A, $AB = \frac{2}{3}BC$, đường cao AE. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC tại F.

a. Chứng minh rằng BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF.

b. Gọi M là giao điểm của BF với đường tròn (O). chứng minh rằng BMOC là tứ giác nội tiếp.

Thi học sinh giỏi Toán lớp 9 - Hải Phòng, 2004 – 2005

Giải:

Đặt $BC = 6a$. Vì $AB = \frac{2}{3}BC$ nên $BE = EC = CF = 3a$;

$AB = AC = 4a$; $AF = AC - CF = a$.

Dễ thấy OECF là tứ giác nội tiếp.

Để chứng tỏ BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó,

ta phải chứng minh

$BF^2 = BE.BC$.

Ta có: $BE.BC = 3a.6a = 18a^2$ (1)

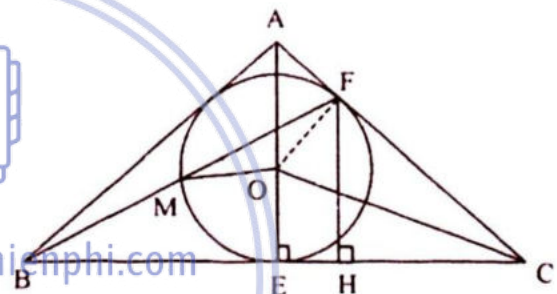
Kẻ FH vuông góc với BC, ta có: $FH \parallel AE$, suy ra

$\frac{CH}{CE} = \frac{CF}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow CH = \frac{3}{4}CE = \frac{9}{4}a \Rightarrow BH = BC - CH = 6a - \frac{9}{4}a = \frac{15}{4}a$. Vì

$BF^2 - BH^2 = FH^2 = CF^2 - CH^2$ suy ra:

$$BF^2 - \left(\frac{15}{4}a\right)^2 = (3a)^2 - \left(\frac{9}{4}a\right)^2 \Rightarrow BF^2 = 18a^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BF^2 = BE.BC$.



Dạng 4: Bài tập tổng hợp

Ví dụ 1: Cho tam giác vuông ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính AB. Kéo dài AC (về phía C) đoạn CD sao cho $CD = AC$.

a. Chứng minh tam giác ABD cân.

b. Đường thẳng vuông góc với AC tại A cắt đường tròn (O) tại E. Kéo dài AE (về phía E) đoạn EF sao cho $EF = AE$. Chứng minh rằng ba điểm D, B, F cùng nằm trên một đường thẳng.

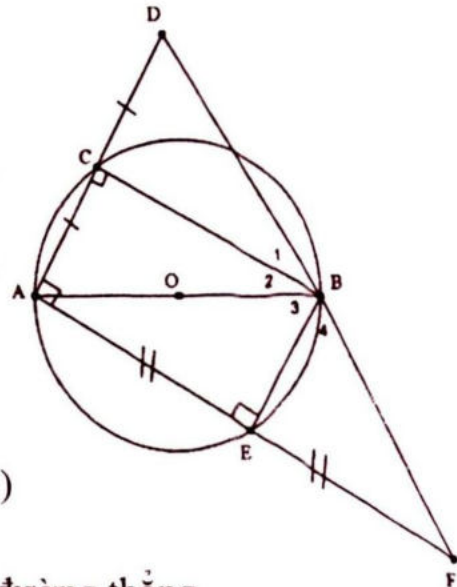
c. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm A, D, F tiếp xúc với đường tròn (O).

ABC

Tuyển sinh lớp 10 THPT Bình Định 2009-2010

Giải

- a. Xét $\triangle ABD$ có $BC \perp DA$ (do $\widehat{ACB} = 90^\circ$: Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)). Mặt khác: $CA = CD$ (gt). BC vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên ABD cân tại B.
- b. Ta có tứ giác ACBE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.



Do đó $\widehat{CBE} = 90^\circ$ hay $\widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 90^\circ$ (1)

$\triangle ABD$ cân tại B nên có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (2)

Tương tự ABF cân tại B nên có $\widehat{B}_3 = \widehat{B}_4$ (3)

Từ (1); (2); (3) ta có $\widehat{DBF} = 180^\circ$

Do đó ba điểm D, B, F cùng nằm trên một đường thẳng.

C Từ chứng minh trên ta có $BA = BD = BF$ do đó đường tròn qua ba điểm A, D, F nhận B làm tâm và AB làm bán kính.

Vì $OB = AB - OA > 0$ nên đường tròn đi qua 3 điểm A, D, F tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn O và trực tâm là H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC.

- a. Xác định vị trí của điểm M sao cho tứ giác BHCM là một hình bình hành.
- b. Với M lấy bất kì thuộc cung nhỏ BC; gọi N, E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Chứng minh N, H, E thẳng hàng.
- c. Xác định vị trí của M thuộc cung nhỏ BC để cho NE có độ dài nhỏ nhất.

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM, 2001 – 2002, ban A, B

Giải

- a. $BH \perp AC, CH \perp AB$ (H là trực tâm $\triangle ABC$). Tứ giác BHCM là hình bình hành $\Leftrightarrow BH \parallel MC$ và $CH \parallel MB \Leftrightarrow AC \perp MC$ và $AB \perp MB$.
 $\Leftrightarrow AM$ là đường kính của (O) $\Leftrightarrow M$ là điểm đối xứng của A qua O.
- b. $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ (tính chất đối xứng trục); $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB) Suy ra: $\widehat{ANB} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{AHB} + \widehat{ACB} = 180^\circ$
 Do đó: $\widehat{AHB} + \widehat{ANB} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác NAHB nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{NHB} = \widehat{NAB}$ mà $\widehat{NAB} = \widehat{BAM}$ (tính chất đối xứng)
 Suy ra: $\widehat{NHB} = \widehat{BAM}$. Chứng minh tương tự cũng có: $\widehat{CHE} = \widehat{MAC}$
 $\widehat{ABC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$.
 Do đó: $\widehat{NHE} = \widehat{NHB} + \widehat{CHE} + \widehat{CHC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC} + \widehat{BHC}$
 $= \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ \Leftrightarrow N, H, E$ thẳng hàng.

- c. $\widehat{NAE} = 2\widehat{BAC}$. Vẽ $AK \perp NE, K \in NE; AM = AN, AM = AE$ (tính chất đối xứng trục) $\Rightarrow AN = AE \Rightarrow \triangle ANE$ cân tại A, mà AK là đường cao $\Rightarrow AK$ là phân giác, trung tuyến $\Rightarrow \widehat{ANE} = 2\widehat{NAK}, NE = 2NK$.

Do đó: $\widehat{BAC} = \widehat{NAK}$; $\triangle KAN$ có $\widehat{K} = 90^\circ$ nên $NK = AN \cdot \sin \widehat{NAK}$.

Do đó: $NE = 2AM \cdot \sin \widehat{BAC}$; $AM \leq 2R; \sin \widehat{BAC}$ không đổi; NE lớn nhất $\Leftrightarrow AM$ lớn nhất $\Leftrightarrow AM$ là đường kính của (O) $\Leftrightarrow M$ là điểm đối xứng của A qua O. Vậy khi M là điểm đối xứng của A qua O thì NE lớn nhất.

Ví dụ 3: Cho đường tròn cố định tâm O, bán kính bằng 1. Tam giác ABC thay đổi và luôn ngoại tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM, 2001 – 2002, ban A, B

Giải

(O) tiếp xúc AB, AC lần lượt tại H, K

$$S_{AMN} = S_{OAM} + S_{OAN} = \frac{1}{2} OH \cdot AM + \frac{1}{2} OK \cdot AN = \frac{AM + AN}{2}$$

Vẽ $MI \perp AC, I \in AC$. Ta có $AM \geq MI$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có: $\frac{AM + AN}{2} \geq \sqrt{AM \cdot AN}$.

$$\text{Do đó: } S_{AMN} \geq \sqrt{AM \cdot AN} \geq \sqrt{MI \cdot AN}$$

$$\text{Ta có: } S_{AMN} \geq \sqrt{2S_{AMN}} \Leftrightarrow S_{AMN}^2 \geq 2S_{AMN} \Leftrightarrow S_{AMN} \geq 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow I \equiv A \Leftrightarrow MN \perp OA, \widehat{BAC} = 90^\circ$

Giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN là 2.

Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ vuông đỉnh A, đường cao AH, I là trung điểm của AH, K là trung điểm của HC. Đường tròn đường kính AH ký hiệu là (AH) cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N

- Chứng minh $\triangle ABC$ và $\triangle AMN$ đồng dạng.
- Chứng minh KN là tiếp tuyến của đường tròn (AH)
- Tìm trực tâm của tam giác ABK.

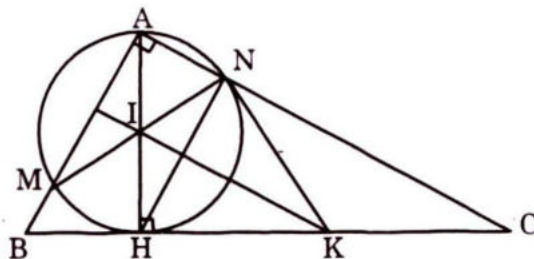
Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Hà Nam 2009-2010

Giải

- a. $AH \perp BC$ (gt);

$\widehat{HMA} = \widehat{HNA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Áp dụng hệ thức cạnh và đường cao trong tam giác vuông. Trong $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có $AH^2 = AM \cdot AB = AN \cdot AC$

Suy ra: $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ lại có góc A chung nên $\triangle ACB \sim \triangle AMN$ (c.g.c)



ABC

- b. I là trung điểm của AH nên I là tâm của đường tròn (AH) $\Rightarrow IM = IH$;
 ΔHNC vuông tại N có K là trung điểm của HC $\Rightarrow KH = KC = KN$
 Lại có KI chung nên $\Delta KNI = \Delta KHI$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{KHI}$ mà
 $\widehat{KHI} = 90^\circ$ nên $\widehat{KNI} = 90^\circ$ hay Kn là tiếp tuyến của đường tròn (AH).
- c. Trong tam giác AHC có KI là đường trung bình nên $KI \parallel AC$ mà
 $AC \perp AB \Rightarrow KI \perp AB$; mặt khác AHKB nên I là trực tâm của ΔKAB .

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ và nội tiếp trong đường tròn (O, R).

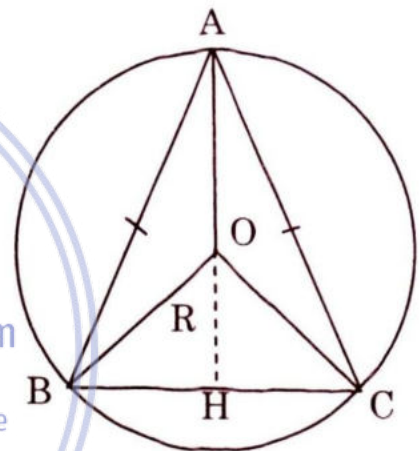
1. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ và tam giác BOC là tam giác vuông cân.
2. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Tuyển sinh lớp 10 THPT Tỉnh Trà vinh , 2009-2010
Giải

1. Do ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) nên $OA = OB = OC$

Xét ΔOAB và ΔOAC ta có: OA chung,
 $AB = AC$ (do ΔABC cân), $OB = OC$
 (bán kính). Vậy $\Delta OAB = \Delta OAC$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{CAO}$. Lại có AO nằm giữa
 AB và AC nên AO là tia phân giác của
 $\widehat{BAC}$;

Ta có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} = 45^\circ \text{ (gt)} \\ \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sd}\widehat{BC} = 90^\circ$.



(Vì $\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BC}$). Mà $\widehat{BOC}$ là góc ở tâm chắn cung $\widehat{BC}$ nên $\widehat{BOC} = 90^\circ$ (1). Do $OB = OC$ (bán kính) nên ΔBOC cân tại O (2). Từ (1) và (2) suy ra ΔBOC là tam giác vuông cân.

2. Tính diện tích tam giác ABC theo R

Ta có: ΔBOC vuông tại O nên $BC^2 = OB^2 + OC^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ (định lý Pitago) $\Rightarrow BC = R\sqrt{2} \Rightarrow BH = R\frac{\sqrt{2}}{2}$; AH là đường cao ứng với cạnh đáy BC $\Rightarrow AH \perp BC$ hay $OH \perp HB$. Tam giác vuông OHB có $\widehat{OBH} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

$$\Rightarrow OH = BH = R\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Do đó } AH = AO + OH = R + R\frac{\sqrt{2}}{2} = R\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot R\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} R^2 (1 + \sqrt{2}) \text{ (đvdt)}$$

ABC
 243

Ví dụ 6: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó và điểm D ở ngoài đường thẳng AB sao cho $AB.AC = AD^2$. Chứng minh rằng AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2008 -2009

Giải

- a. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

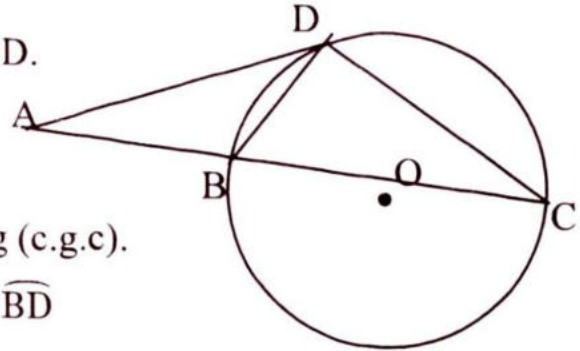
Ta có:

$$AB.AC = AD^2 \Leftrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$$

Hai tam giác ABD và ADC đồng dạng (c.g.c).

$$\text{Suy ra } \widehat{ADB} = \widehat{ACD} \text{ hay } \widehat{ADB} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{BD}$$

Do đó AD là tiếp tuyến của (O).



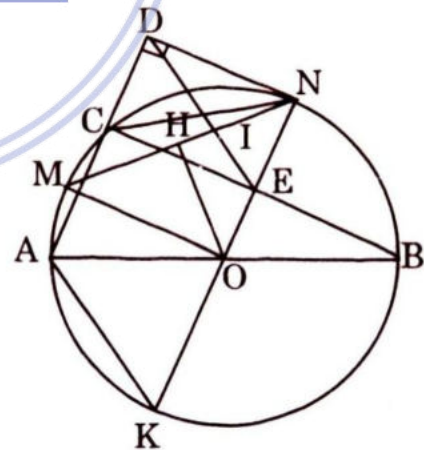
Ví dụ 7: Cho đường tròn (O, R) có đường kính AB và một điểm C bất kì thuộc đường tròn khác A và B. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cung nhỏ AC và CB.

- Kẻ ND vuông góc với AC (D thuộc AC). Chứng minh ND là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- Gọi E là trung điểm của đoạn BC. Đường thẳng OE cắt đường tròn (O) tại điểm K (khác điểm N). Chứng minh tứ giác ADEK là một hình bình hành.
- Chứng minh rằng khi C di chuyển trên đường tròn (O) thì MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM, 2000 – 2001 Ban A, B

Giải

- $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) N là trung điểm cung BC $\Rightarrow ON \perp BC$. Mà $AC \perp BC$. Suy ra $AC \parallel ON$; $DN \perp AC$ (gt). Do đó $DN \perp ON \Rightarrow ND$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- N là trung điểm cung BC, E là trung điểm dây BC (gt) $\Rightarrow O, N, E$ thẳng hàng.



Tứ giác CDNE có $\widehat{CDN} = \widehat{DNE} = \widehat{DCE} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Gọi I là giao điểm của DE và CN. Ta có $IE = IN \Rightarrow \triangle IEN$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IEN} = \widehat{INE}$

Hình thang ACND ($AC \parallel ON$) nội tiếp đường tròn (O) nên là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{IEN} = \widehat{AKN}$. Ta có $\widehat{AKN} = \widehat{IEN} (= \widehat{INE}) \Rightarrow AK \parallel DE$

Áp dụng $AC \parallel NK \Rightarrow$ Tứ giác ADEK là hình bình hành.

$$c. \text{ số đo } \widehat{MN} = \text{ số đo } \widehat{MC} + \text{ số đo } \widehat{CN} = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{AC} + \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{BC} = 90^\circ \Rightarrow MN \text{ là cạnh của hình vuông nội tiếp } (O; R) \Rightarrow OH = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ (là hình chiếu của } O \text{ trên } MN)$$

Do đó MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O bán kính $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 8: Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Đường tròn tâm O' bàng tiếp trong góc BAC của tam giác ABC tiếp xúc cạnh BC và phần kéo dài của các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm P, M, N.

1. Chứng minh rằng: $BP = CD$.
2. Trên đường thẳng MN ta lấy các điểm I và K sao cho $CK \parallel AB$, $BI \parallel AC$. Chứng minh rằng các tứ giác BICE và BKCF là các hình bình hành.
3. Gọi (S) là đường tròn đi qua 3 điểm I, K, P. Chứng minh (S) tiếp xúc với các đường thẳng BC, BI, CK.

Đề TS lớp 10 ĐHQG Hà nội

Giải

1. Gọi nửa chu vi tam giác ABC là p thì $AM = AN = p$. Theo tính chất của đường tròn nội tiếp dễ thấy rằng $CD = p - AB$.

Ngoài ra, $BP = BM = p - AB$. Vậy $BP = CD$

Chú ý: Có thể chứng minh như sau: Giả sử P thuộc đoạn BD. Khi đó:

$$FM = FB + BM = BD + BP = 2BP + PD, \text{ tương tự}$$

$$EN = EC + CN = CD + CP = 2CD + PD. \text{ Mà } FM = EN \text{ nên } BP = CD$$

Trường hợp D thuộc đoạn BP, chứng minh tương tự.

2. $\triangle BMI$ có $BM = AM = AN = BN = BI$

$\Rightarrow BI = BP = BP = CD = CE$. Do hai đoạn BI, CE song song, bằng nhau và ngược chiều nên BICE là hình bình hành. Tương tự; $\triangle CNK$ có $CN = AM = AN = BN = CK$ $\Rightarrow CK = CN = CP = BD = BF$. Do hai đoạn CK, BF song song, bằng nhau và ngược chiều nên BKCF là hình bình hành.

3. **Cách 1:** Kẻ đường phân giác góc PBI cắt PO' tại S thì: $\triangle BPS = \triangle BIS \Rightarrow \widehat{BIS} = \widehat{BPS} = 90^\circ$ và $SI = SP$ (1)

$$\text{Xét } \triangle BPS \text{ và } \triangle CDO, \text{ ta có: } \widehat{OCD} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{CBI} = \widehat{OBP}, BP = CD$$

$$\widehat{CDO} = \widehat{BPS} = 90^\circ \Rightarrow \triangle BPS = \triangle CDO \Rightarrow OD = SP$$

Từ đó suy ra: $\triangle CPS = \triangle BDO$ (chú ý: $CP = BD$)

$$\Rightarrow \widehat{PCS} = \widehat{DBO} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{BCK} \Rightarrow SK = SP \text{ và } \widehat{SKC} = \widehat{SPC} = 90^\circ \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra, đường tròn tâm S, bán kính SI đi qua I, K, P và tiếp xúc với BI, CK, BC tại I, K, P tương ứng.

Cách 2: Gọi H là trung điểm của BC và S là điểm đối xứng với O qua H. Để thấy, các cặp điểm sau đối xứng với nhau qua H: B và C; P và D; I và E; F và K. Do đó: $SI = SP = SK$ (vì chúng lần lượt bằng OE, $SK = OS$, $SP = OD$). $\widehat{BIS} = \widehat{CEO} = 90^\circ$, $\widehat{BPS} = \widehat{CDO} = 90^\circ$, $\widehat{CKS} = \widehat{BFO} = 90^\circ \Rightarrow$ đường tròn tâm S bán kính SP đi qua P, I, K và tiếp xúc với BC, BI, CK lần lượt tại P, I, K.

Ví dụ 9: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O ($AB < BC$). Vẽ đường tròn tâm I qua hai điểm A và C cắt đoạn AB, BC lần lượt tại M, N. Vẽ đường tròn tâm J qua ba điểm B, M, N cắt đường tròn tâm (O) tại điểm H (khác B).

- Chứng minh OB vuông góc với MN.
- Chứng minh IOBJ là hình bình hành.
- Chứng minh BH vuông góc với IH.

Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2004-2005

Giải:

- Dựng tiếp tuyến Bx tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác BAC thì $Bx \perp OB$. Ta chứng minh $Bx \parallel MN$.
Ta có: $\widehat{xBN} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn BC của đường tròn (O))

$\widehat{BAC} = \widehat{BNM}$ (do tứ giác AMNC nội tiếp). Suy ra: $\widehat{xBN} = \widehat{BNM}$.
Suy ra: $MN \parallel Bx$ (2 góc ở vị trí sole trong bằng nhau) (đpcm)

- Chứng minh tương tự như câu a, ta có: $BJ \perp AC$
Vì IJ là đường nối tâm của (I) và (J) nên $IJ \perp MN$

$$\text{Vì } \begin{cases} OB \perp MN \\ IJ \perp MN \end{cases} \Rightarrow OB \parallel IJ \quad (1).$$

Chứng minh tương tự ta có $OI \parallel BJ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra IOBJ là hình bình hành.

- Gọi F là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành IOBJ thì F là trung điểm BI và $F \in OJ$. Vì BH là dây chung và OJ là đường nối tâm của (O) và (J) nên OJ là trung trực của BH $\Rightarrow$ OJ cắt BH tại trung điểm E của BH $\Rightarrow EF \parallel BH$. Vì EF là đường trung bình của tam giác BHI nên $EF \parallel HI$. Suy ra $HI \perp BH$ (đpcm).

Ví dụ 10: Cho hình bình hành ABCD. Qua một điểm S ở trong hình bình hành ABCD kẻ đường thẳng song song với AB lần lượt cắt AD, BC tại M, P và cũng qua S. Kẻ đường thẳng song song với AD lần lượt cắt AB, CD tại N, Q. Chứng minh ba đường thẳng AS, BQ, DP đồng quy.

Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2004-2005

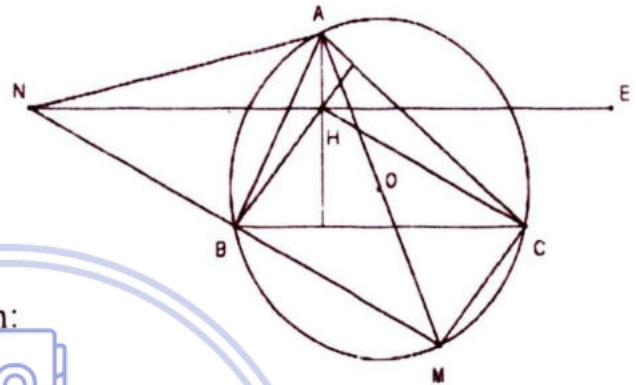
Ví dụ 12: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm là H.

- Xác định vị trí của điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A sao cho tứ giác BHCM là một hình bình hành.
- Lấy M là điểm bất kỳ trên cung BC không chứa A. Gọi N và E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng.

Đề thi HSG lớp 9 TP HCM 2007-2008

Giải:

- Gọi M_0 là điểm đối xứng của A qua tâm O của đường tròn. Ta có $CM_0 \parallel BH$ vì cùng $\perp AC$. $BM_0 \parallel CH$ vì cùng $\perp AB$. Vậy tứ giác $BHCM_0$ là một hình bình hành. Điểm M_0 chính là vị trí của M mà ta cần xác định.



- Ta có N và M đối xứng qua AB nên:

$$\widehat{NHB} + \widehat{EHC} = \widehat{BAC};$$

H là trực tâm tam giác ABC nên: $\widehat{AHB} + \widehat{ACB} = 180^\circ$.

Suy ra: $\widehat{ANB} + \widehat{AHB} = 180^\circ$.

Tứ giác AHBN nội tiếp được cho ta: $\widehat{NHB} = \widehat{NAB}$. Mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ nên $\widehat{NHB} = \widehat{MAB}$ (1). Tương tự ta cũng có: $\widehat{EHC} = \widehat{MAC}$ (2). Cộng (1) và (2) ta có: $\widehat{NHB} + \widehat{EHC} = \widehat{BAC}$. Mà ta lại có: $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$ Nên: $\widehat{NHB} + \widehat{EHC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$. Vậy N, H, E thẳng hàng.

Ví dụ 13: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi C là điểm di động trên nửa đường tròn đó và At là tia tiếp tuyến của (O) ở trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa (O). Vẽ đường tròn tâm A, bán kính bằng BC cắt tia AC tại D. Tiếp tuyến tại D của đường tròn tâm A vừa vẽ cắt At tại E.

- Tính độ dài đoạn AE theo R
- Tìm quỹ tích điểm D.

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2006-2007

Giải:

- Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp nửa đường tròn)

$$\widehat{EDA} = 90^\circ \text{ (DE là tiếp tuyến của đường tròn (A))}$$

- Xét hai tam giác vuông ABC và EAD có: $AD = BC$ và $\widehat{ABC} = \widehat{EAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Nên $\triangle ABC = \triangle EAD$. Suy ra $AE = AB = 2R$. Do đó E cố định.

- Khi C di động trên nửa đường tròn (O), điểm D luôn nhìn đoạn AE cố định dưới một góc vuông, nên D nằm trên nửa đường tròn đường kính AE.

ABC

Đảo lại, lấy điểm D' bất kì trên nửa đường tròn đường kính AE , ta có $\widehat{EDA} = 90^\circ$, vẽ tia AD' cắt (O) tại C' . Hai tam giác vuông ABC' và EAD' có cặp cạnh huyền $AE = AB$ và $\widehat{ABC'} = \widehat{EAD'}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC). Nên chúng bằng nhau, suy ra $AD = BC$. Do đó DI là tiếp tuyến của đường tròn tâm A và bán kính bằng BC .

Vậy quỹ tích của D là nửa đường tròn đường kính AE . (Khi C trùng với B , thì D trùng với A ; Khi C trùng với A thì D trùng với E)

Ví dụ 14: Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F . Đường tròn tâm O' bàng tiếp trong góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC và phần kéo dài của các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm P, M, N .

1. Trên đường thẳng MN ta lấy các điểm I và K sao cho $CK \parallel AB, BI \parallel AC$. Chứng minh rằng tứ giác $BICE$ và $BKCF$ là các hình bình hành.
2. Gọi (S) là đường tròn đi qua 3 điểm I, K, P . chứng minh rằng (S) tiếp xúc với các đường thẳng BC, BI, CK

TS lớp 10 THPT chuyên – ĐHKHTN Hà Nội 2003 – 2004

Giải

Gọi nửa chu vi tam giác ABC là p thì $AM = AN = p$.

Theo tính chất đường tròn nội tiếp, dễ thấy rằng $CD = p - AB$.

Ngoài ra, $BP = BM = p - AB$. Vậy: $BP = CD$

Chú ý: Có thể chứng minh như sau: giả sử P thuộc đoạn BD . Khi đó:

$FM = FB + BM = BD + BP = 2BP + PD$, Tương tự:

$EN = EC + CN = CD + CP = 2CD + PD$. Mà $FM = EN$ nên $BP = CD$.

Trường hợp D thuộc đoạn BP , chứng minh tương tự.

$\triangle BMI$ có $\widehat{BMI} = \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \widehat{BIM} \Rightarrow BI = BM = BP = CD = CE$

Do hai đoạn BI, CE song song, bằng nhau và ngược chiều nên $BICE$ là hình bình hành. Tương tự: $\triangle CNK$ có $\widehat{CNK} = \widehat{AMN} = \widehat{CKN}$

$\Rightarrow CK = CN = CP = BD = BF$. Do hai đoạn CK, BF song song, bằng nhau và ngược chiều nên $BKCF$ là hình bình hành.

+Cách 1: Kẻ đường phân giác góc PBI cắt PO' tại S thì $\triangle BPS = \triangle BIS$

$\Rightarrow \widehat{BIS} = \widehat{BPS} = 90^\circ$ và $SI = SP$ (1)

Xét $\triangle BPS$ và $\triangle CDO$, ta có: $\widehat{OCD} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{CBI} = \widehat{OBP}$, $BP = CD$;

$\widehat{CDO} = \widehat{BPS} = 90^\circ \Rightarrow \triangle BPS = \triangle CDO \Rightarrow OD = SP$.

Từ đó, suy ra: $\triangle CPS = \triangle BDO$

(Chú ý: $CP = BD$) $\Rightarrow \widehat{PCS} = \widehat{DBO} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{BCK} \Rightarrow SK = SP$ và

$\widehat{SKC} = \widehat{SPC} = 90^\circ$ (2). Từ (1) và (2) suy ra, đường tròn tâm S , bán kính SI đi qua I, K, P và tiếp xúc với BI, CK và BC tại I, K, P tương ứng.

ABC
2022

+ **Cách 2:** Gọi H là trung điểm của BC và S là điểm đối xứng của O qua H. Dễ thấy, các cặp điểm sau đối xứng với nhau qua H: B và C; P và D; I và E; F và K.

Do đó: $SI = SP = SK$ (vì chúng lần lượt bằng OE, $SK = OS$, $SP = OD$)

$\widehat{BIS} = \widehat{CEO} = 90^\circ$, $\widehat{BPS} = \widehat{CDO} = 90^\circ$, $\widehat{KS} = \widehat{BFO} = 90^\circ \Rightarrow$ Đường tròn tâm S bán kính SP đi qua P, I, K và tiếp xúc với BC, BI, CK (lần lượt tại P, I, K)

Chú ý: Học sinh có thể lí luận như sau:

Gọi giao điểm của BI và CK là T thì ABTC là hình bình hành, và trung điểm H của BC là giao điểm của AT và BC. Qua phép đối xứng tâm H, tam giác ABC biến thành ΔTCB các điểm D, E, F biến thành P, I, K tương ứng $\Rightarrow$ đường tròn qua D, E, F biến thành đường tròn đi qua P, I, K. Do đường tròn đi qua D, E, F nội tiếp ΔTCB , tức tiếp xúc với BC, BI, CK tại P, I, K tương ứng.

Ví dụ 15: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi K là trung điểm cung $\widehat{AB}$, M là điểm lưu động trên cung nhỏ $\widehat{AK}$ (M khác điểm A và K). Lấy điểm N trên đoạn BM sao cho $BN = AM$.

- Chứng minh $\widehat{AMK} = \widehat{BNK}$
- Chứng minh tam giác MKN là tam giác vuông cân.
- Hai đường thẳng AM và OK cắt nhau tại D. Chứng minh MK là đường phân giác của góc $\widehat{DMN}$
- Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với BM tại N luôn luôn qua một điểm cố định.

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM, 2003 – 2004

Giải

- K là trung điểm của AB (gt) $\Rightarrow \widehat{KA} = \widehat{KB} \Rightarrow KA = KB$

Xét ΔMAK và ΔNBK có: $AM = BN$ (gt)

$\widehat{MAK} = \widehat{NBK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MK); $KA = KB$

Do đó $\Delta MAK = \Delta NBK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{BNK}$

- $KM = KN$, $\widehat{MKA} = \widehat{NKB}$ ($\Delta MAK = \Delta NBK$)

$\widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{MAK} + \widehat{AKN} = \widehat{NKB} + \widehat{AKN}$; $\widehat{MKN} = 90^\circ$

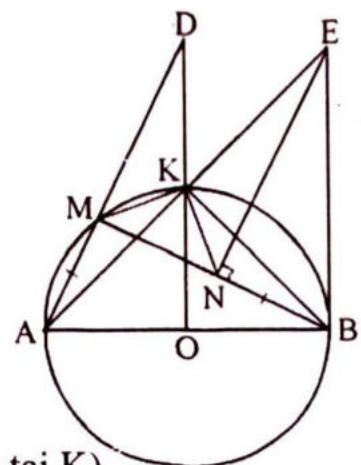
ΔMKN vuông tại K có $KM = KN$.

Do đó ΔMKN vuông cân tại K.

- $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{DMN} = 90^\circ$ mà $\widehat{KMN} = 45^\circ$ (ΔMKN vuông cân tại K)

Do đó $\widehat{DMK} = 90^\circ - \widehat{KMN} = 45^\circ$. Ta có: $\widehat{DMK} = \widehat{KMN}$ ($= 45^\circ$)



ABC

Vậy MK là đường phân giác của góc $\widehat{DMN}$.

- d. Đường thẳng vuông góc với BM tại N cắt AK tại E

Vì $\widehat{AKB} = 90^\circ$ nên $\widehat{EKB} = 90^\circ$. Ta có: $\widehat{EKB} = \widehat{ENB} (= 90^\circ) \Rightarrow$ Tứ giác KEBN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KEB} = \widehat{KNM} = 45^\circ$

Mà $\widehat{KAB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BK} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ $\triangle BAE$ có $\widehat{KAB} = \widehat{KEB} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle BAE$ vuông cân tại B. Mà A, B cố định, do đó E cố định.

Vậy đường thẳng vuông góc với BM tại N luôn đi qua một điểm cố định

Ví dụ 16: Cho đường tròn (O; R) tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên d lấy điểm H không trùng với A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B. (E nằm giữa B và H).

1. Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ và tam giác ABH đồng dạng tam giác EAH
2. Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh AHEK là tứ giác nội tiếp.
3. Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Đề TS lớp 10 TP Hà nội 2007-2008

Giải:

1. $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ vì cùng chắn cung AE.

Do đó tam giác ABH và EHA đồng dạng.

2. $\widehat{ECA} = \widehat{EAC} = \widehat{ABH}$ nên $\widehat{EAC} + \widehat{BAH} = 90^\circ$

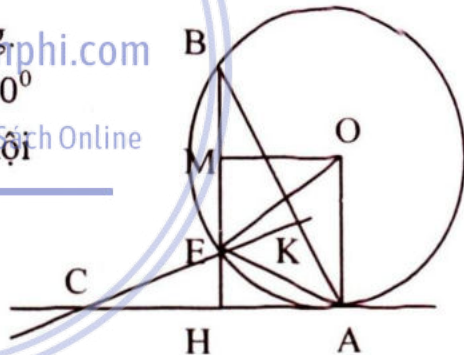
hay $\widehat{AKC} = 90^\circ$. Vậy tứ giác AHEK là nội tiếp đường tròn đường kính AE.

3. M là trung điểm EB thì OM vuông góc BE, $OM = AH$. Ta có:

$$AB = R\sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BOM} = 30^\circ \Leftrightarrow \triangle OBE \text{ đều cạnh } R.$$

$$\text{Vậy } AH = OM = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$



Ví dụ 17: Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Kẻ hai tia tiếp tuyến Ax và By của nửa đường tròn (Ax, By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là điểm tùy ý thuộc nửa đường tròn khác (khác A và B). Tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn cắt Ax tại D và cắt By tại E.

- a. Chứng minh rằng: $\triangle DOE$ là tam giác vuông.

- b. Chứng minh rằng: $AD \cdot BE = R^2$. Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho diện tích của tứ giác ADEB nhỏ nhất.

Đề TS lớp 10 THPTP Huế 2007-2008

ABC

$$\text{Suy ra } \widehat{ICK} = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \widehat{ABC} + 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{BAC} \right) = \frac{1}{2} \widehat{BCA}$$

Nên CI là tia phân giác của góc BCA.

Ví dụ 19: Cho tam giác ABC cân tại B nội tiếp trong đường tròn tâm O. Trên cung AC không chứa điểm B lấy 2 điểm M và K theo thứ tự A, K, M, C. Các đoạn thẳng AM và BK cắt nhau tại E, còn các đoạn thẳng KC và BM cắt nhau tại D. Chứng minh ED song song với AC.

Đề TS lớp 10 Trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004-2005

Giải:

Ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \widehat{BMA}$ nên EDMK là tứ giác nội tiếp được.

Suy ra: $\widehat{EDK} = \widehat{EMK}$ mà $\widehat{EMK} = \widehat{ACK}$. Nên $\widehat{EDK} = \widehat{ACK}$.

Suy ra: $ED \parallel AC$.

Ví dụ 20: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) ($AB < AC$). Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại N. Vẽ dây AM song song với BC. Đường thẳng MN cắt (O) tại M và P.

a. Cho biết $\frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{1}{16}$. Tính độ dài đoạn BC.

b. Chứng minh $\frac{BP}{AC} = \frac{CP}{AB}$.

c. Chứng minh BC, ON và AP đồng qui.

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2007-2008

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Giải:

a. Ta có: $NB = NC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OB = OC = R$
Do đó: ON là trung trực của BC. Gọi K là giao điểm của ON và BC thì K là trung điểm BC. Ta có: Tam giác OBN vuông tại B có BK là đường cao $\Rightarrow \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NB^2} = \frac{1}{BK^2}$. Kết hợp với giả thiết ta suy ra: $BK^2 = 16 \Rightarrow BK = 4 \Rightarrow BC = 8$

b. Ta có: $\triangle NBP$ đồng dạng $\triangle NMB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{PB}{MB} = \frac{NB}{NM}$ (1)

Tương tự $\triangle NCP$ đồng dạng $\triangle NMC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{PB}{MC} = \frac{NC}{NM}$ (2)

Mà $NC = NB$ (3). Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{PB}{MB} = \frac{PC}{MC}$ (4)

Mặt khác $AM \parallel BC \Rightarrow$ tứ giác AMCB là hình thang cân $\Rightarrow MC = AB$ và $MB = AC$ (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{PB}{AC} = \frac{PC}{AB}$ (đpcm)

c. Gọi Q là giao điểm của AP và BC. Ta chứng minh $BQ = QC$

$$\text{Xét tam giác BQP đồng dạng tam giác AQC} \Rightarrow \frac{BQ}{AQ} = \frac{PB}{AC} \quad (6)$$

$$\text{Tương tự tam giác CQP đồng dạng tam giác AQB} \Rightarrow \frac{CQ}{AQ} = \frac{PC}{AB} \quad (7)$$

$$\text{Kết hợp (6), (7) và kết quả câu b) ta suy ra } \frac{BQ}{AQ} = \frac{CQ}{AQ} \Rightarrow BQ = CQ$$

$\Rightarrow Q$ là trung điểm BC.

$\Rightarrow Q$ trùng K.

Vậy BC, ON và AP đồng qui tại K.

Ví dụ 21: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F. Biết BF cắt CE tại H và AH cắt BC tại D.

a. Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp và AH vuông góc với BC.

b. Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$

c. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và K là trung điểm

BC. Tính tỉ số $\frac{OK}{BC}$ khi tứ giác BHOC nội tiếp.

d. Cho $HF = 3$ cm, $HB = 4$ cm, $CE = 8$ cm và $HC > HE$. Tính HC.

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2007-2008

Giải:

a. Ta có E, F lần lượt là giao điểm của AB, AC với đường tròn đường kính BC. Suy ra tứ giác BEFC nội tiếp đường tròn đường kính BC.

* Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BF, CE$ là hai đường cao của tam giác ABC.

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC $\Rightarrow AH$ vuông góc với BC.

b. Xét $\triangle AEC$ và $\triangle AFB$ có: $\widehat{BAC}$ chung và $\widehat{AEC} = \widehat{AFB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle AEC \text{ đồng dạng } \triangle AFB \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$$

c. Khi BHOC nội tiếp ta có: $\widehat{BOC} = \widehat{BHC}$ mà $\widehat{BHC} = \widehat{EHF}$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{EHF} \text{ và } \widehat{BAC} + \widehat{EHF} = 180^\circ \text{ (do AEHF nội tiếp)}$$

$$\widehat{BAC} + \widehat{BOC} = 180^\circ \text{ mà } \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} \Rightarrow 3\widehat{BAC} = 180^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$ Ta có: K là trung điểm của BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC. $\Rightarrow OK$ vuông góc BC mà tam giác OBC

$$\text{cân tại O (OB = OC)} \Rightarrow \widehat{KOC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = 60^\circ.$$

$$\text{Vậy } \frac{OK}{KC} \cot \widehat{KOC} = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ mà } BC = 2KC \text{ nên } \frac{OK}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

ABC

- d. Xét $\triangle EHB$ và $\triangle FHC$ có: $\widehat{BEH} = \widehat{CFH} = 90^\circ$ và $\widehat{EHB} = \widehat{FHC}$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \triangle EHB$ đồng dạng với $\triangle FHC$.
 $\Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HE \cdot HC = HB \cdot HF = 4 \cdot 3 = 12$
 $\Rightarrow HC(CE - HC) = 12 \Rightarrow HC^2 - 8 \cdot HC + 12 = 0 \Leftrightarrow HC = 2$ hoặc $HC = 6$.
 Khi $HC = 2$ thì $HE = 6$ (không thỏa $HC > HE$)
 Khi $HC = 6$ thì $HE = 2$ (thỏa $HC > HE$). Vậy $HC = 6(\text{cm})$.

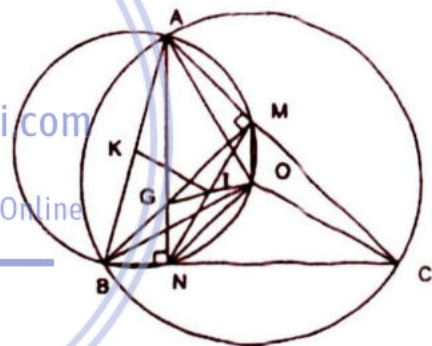
Ví dụ 22: Cho tam giác ABC không cân có ba góc nhọn và $\widehat{C} = 45^\circ$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Đường tròn K đường kính AB cắt các cạnh AC và BC tại M và N ($M \neq A; N \neq B$).

- Chứng minh O nằm trên đường tròn tâm K.
- Gọi G là giao điểm của AN và BM. Chứng minh tứ giác MONG là hình bình hành.
- Gọi I là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành MONG. Chứng minh $IK \parallel CO$.
- Chứng minh $AB = MN\sqrt{2}$.

Đề TS 10 Trường Quốc Học Huế 1996 – 1997

Giải:

- O nằm trên đường tròn tâm K.
 Góc nội tiếp ACB và góc ở tâm AOB cùng chắn cung AB nên ta có:
 $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$
 Vì vậy O ở trên đường tròn tâm K đường kính AB.



- Tứ giác MONG là hình bình hành.

Tam giác MBC có $\widehat{MCB} = 45^\circ$ (gt)

$\widehat{BMC} = 1v$ (M ở trên đường tròn đường kính AB). Suy ra tam giác MBC vuông cân tại M $\Rightarrow MB = MC$. Mặt khác $OB = OC$ (bán kính), cho nên MO là đường trung trực của cạnh BC. Hay nói một cách khác $OM \perp BC$. Ta lại có $AN \perp BC$ (N ở trên đường tròn đường kính AB)

Vì vậy $OM \parallel AN$. Tương tự $ON \parallel BM$. Do đó MONG là hình bình hành.

- ON và MO là hai đường cao của tam giác MNC cho nên O là trực tâm tam giác MNC. Suy ra $OC \perp MN$ (1). Ta lại có $IN = IM$ (MONG là hình bình hành). Suy ra $IK \perp MN$ (tính chất đối xứng của đường tròn) (2). Từ (1) và (2), ta kết luận $IK \parallel OC$.
- Tam giác MBC vuông cân tại M nên ta có $\widehat{MBN} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{MKN} = 2\widehat{MBN} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ (cùng chắn cung MN).

Tam giác MKN có $\widehat{MKN} = 90^\circ$ và $KN = KM$ cho nên nó vuông cân tại K. Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông cân MKN ta có:

ABC

$$MN^2 = KN^2 + KM^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = \frac{AB^2}{2}$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2.MN^2 \Rightarrow |AB| = |MN|\sqrt{2}. \text{ Do đó } AB = MN\sqrt{2}.$$

Ví dụ 23: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB cố định và CD là một đường kính thay đổi không trùng với AB . Tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại B cắt các đường thẳng AC và AD lần lượt tại E và F .

1. Chứng minh rằng: $BE.BF = 4R^2$.
2. Chứng minh tứ giác $CEFD$ nội tiếp được trong đường tròn.
3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CEFD$. Chứng minh rằng tâm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Tuyển sinh lớp 10 Nghệ An 2009 – 2010

Giải:

Vì CD là đường kính, nên tam giác AEF là tam giác vuông tại A .

Vì EF là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại B nên AB là đường cao của tam giác vuông AEF . Theo hệ thức trong tam giác vuông ta có:

$$BE.BF = AB^2. \text{ Vì } AB \text{ là đường kính nên } BE.BF = 4R^2.$$

$$2. \widehat{ADC} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{AC} = \frac{1}{2} (\text{sd}\widehat{ACB} - \text{sd}\widehat{CB})$$

$$\widehat{AEF} = \frac{1}{2} (\text{sd}\widehat{ADB} - \text{sd}\widehat{CB}) = \frac{1}{2} (\text{sd}\widehat{ACB} - \text{sd}\widehat{CB}).$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ADC} = \widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{CDF} + \widehat{CEF} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác $CEFD$ nội tiếp được trong đường tròn.

3. Gọi K là trung điểm của EF , từ K kẻ đường thẳng $Kt \perp EF$, từ O kẻ đường thẳng $Ox \perp CD$. Khi CD không trùng, không vuông góc với AB thì Kt cắt Ox tại I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CEFD$.

Vì AK là trung tuyến của tam giác vuông AEF nên $\widehat{KAF} = \widehat{AFE}$, kết hợp với $\widehat{ADC} = \widehat{AEF}$ và $\widehat{AFE} + \widehat{AEF} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp CD$.

Suy ra tứ giác $AKIO$ là hình bình hành, do đó $KI = AO = R$ không đổi và I khác phía với điểm O so với đường thẳng cố định EF . Suy ra I nằm trên đường thẳng d cố định ($d \parallel EF$, d cách EF một khoảng bằng R không đổi và d thuộc nửa mặt phẳng bờ EF không chứa điểm O .)

Trong trường hợp $CD \perp AB$ thì tâm I là giao điểm của đường thẳng AB và d . Vậy tâm I nằm trên một đường thẳng d cố định.

Ví dụ 24: Cho hai đường tròn ngoài nhau (O) và (O') . Kẻ hai tiếp tuyến chung ngoài AA' và tiếp tuyến chung trong BB' của hai đường tròn (A và B là tiếp điểm thuộc (O) ; A' và B' là tiếp điểm thuộc (O')). Gọi giao điểm của AA' và BB' là P ; giao điểm của AB và $A'B'$ là Q .

- a. Chứng minh $\widehat{OPO'} = 90^\circ$
- b. Chứng minh $PA.PA' = AO.A'O'$.
- c. Chứng minh O, Q, O' thẳng hàng.

Đề TS 10 Trường Quốc Học Huế 1996 – 1997

ABC

Giải:

- a. Chứng minh $\widehat{OPO'} = 90^\circ$.

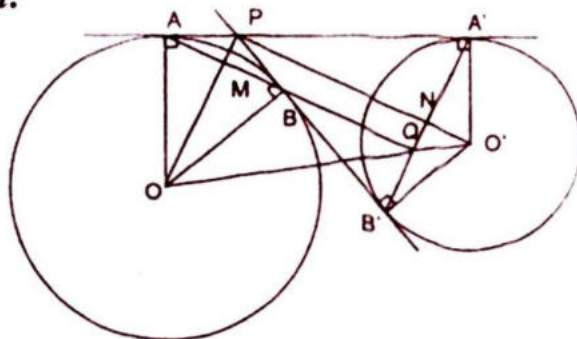
Theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$$\widehat{BPO'} = \frac{1}{2} \widehat{BPA'}; \widehat{OPB} = \frac{1}{2} \widehat{APB}$$

$$\Rightarrow \widehat{BPO'} + \widehat{OPB} = \frac{1}{2} (\widehat{BPA'} + \widehat{APB})$$

$$\Rightarrow \widehat{OPO'} = \frac{1}{2} \widehat{APA'} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ \text{ (vì } A, P, A' \text{ thẳng hàng).}$$

Do đó $\widehat{OPO'} = 90^\circ$



- b. $PA \cdot PA' = AO \cdot A'O'$ theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{OAP} = \widehat{PA'O'} = 1v$

Hai tam giác vuông OAP và $PA'O'$ có $\widehat{AOP} = \widehat{A'PO'}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

$$\text{Suy ra } \triangle AOP \sim \triangle A'PO' \Rightarrow \frac{OA}{PA'} = \frac{PA}{A'O'} \Rightarrow OA \cdot O'A' = PA \cdot PA'$$

- c. Chứng minh O, Q, O' thẳng hàng

Ta có $PA = PB$ (tính chất tiếp tuyến); $OA = OB$ (bán kính)

Suy ra PO là đường trung trực của đoạn thẳng AB , cho nên $\widehat{PMQ} = 90^\circ$

(M là giao điểm của PO và AB). Tương tự, $\widehat{PNQ} = 90^\circ$ (N là giao điểm

của $A'B'$ và $O'P$). Mặt khác, $\widehat{MPN} = 90^\circ$ (chứng minh trên). Do vậy tứ giác $MPNQ$ là hình chữ nhật. Hai tam giác vuông AMP và PNA' có $\widehat{MAP} = \widehat{NPA'}$ ($AO \parallel PO'$). Suy ra $\triangle AMP \sim \triangle PNA'$

$$\Rightarrow \frac{AM}{PN} = \frac{PM}{NA'} \Rightarrow PM \cdot PN = AM \cdot A'N. \text{ Mà } AM = BM \text{ (} PO \text{ là đường trung}$$

trực của đoạn thẳng AB). Cho nên $PM \cdot PN = MB \cdot A'N$. Hai tam giác OMB và $A'NO'$ có ba cặp cạnh song song với nhau nên chúng đồng

dạng, ta suy ra: $\frac{OM}{A'N} = \frac{MB}{O'N} \Rightarrow OM \cdot O'N = MB \cdot A'N$. Từ đó, suy ra

$$OM \cdot O'N = NQ \cdot MQ \Rightarrow \frac{OM}{NQ} = \frac{MQ}{O'N}. \text{ Thêm vào đó hai tam giác } OMQ \text{ và}$$

QNO' đều vuông. Vì vậy $\triangle OMQ \sim \triangle QNO' \Rightarrow \widehat{MQO} = \widehat{NO'Q}$.

Mà $\widehat{NQO'} + \widehat{NO'Q} = 90^\circ$.

Tức là $\widehat{OQO'} = \widehat{MQO} + \widehat{AQA'} + \widehat{NQO'} = \widehat{MQO} + 90^\circ + \widehat{NQO'} = 180^\circ$.

Do đó ba điểm O, Q và O' thẳng hàng.

- Ví dụ 25:** Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$), M là một điểm trên cạnh BC (M khác B và C). Tia AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại P.
- Chứng minh $MB \cdot PC = PB \cdot MC$.
 - Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP.
 - Gọi R_1, R_2 là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MBP, MPC. Tính tổng $R_1 + R_2$ khi tam giác ABC là tam giác đều cạnh a.

ĐTS 10 Quốc Học Huế 1998 – 1999

Giải:

- a. $MB \cdot PC = PB \cdot MC$: ta có $AB = AC$ (gt)

Suy ra $\widehat{AC} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{BPM} = \widehat{MPC}$

Từ đó ta có PM là phân giác của tam

giác BPC nên $\frac{PB}{PC} = \frac{MB}{MC}$.

Do đó $MB \cdot PC = PB \cdot MC$.

- b. AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPM và MPC. Tổng ba góc trong tam giác BO_1M bằng 180° nên $\widehat{BO_1M} + \widehat{O_1MB} + \widehat{MBO_1} = 180^\circ$. Mặt khác $\widehat{O_1MB} = \widehat{MBO_1}$ (ΔBO_1M cân tại O_1).

Suy ra $\frac{\widehat{BO_1M}}{2} + \widehat{MBO_1} = 90^\circ$ (1).

Thêm vào đó $\widehat{ABC} = \widehat{APB}$ ($\widehat{AB} = \widehat{AC}$) (2); $\widehat{APB} = \frac{\widehat{BO_1M}}{2}$ (cùng chắn cung BM) (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{ABC} + \widehat{MBO_1} = 90^\circ$ tức là $\widehat{ABO_1} = 90^\circ$

Ta lại có $B \in (O_1)$. Vì vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BPM.

- c. Tính tổng $R_1 + R_2$ khi tam giác ABC là tam giác đều cạnh a.

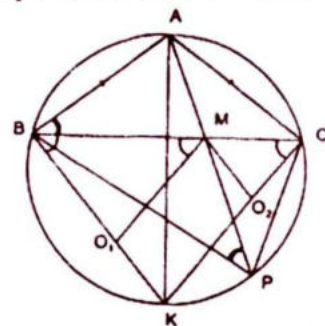
Gọi AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có $\widehat{ABK} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $O_1 \in BK$. Tương tự $O_2 \in CK$. Do AK là đường kính đi qua điểm chính giữa của cung BC nên AK là đường trung trực của đoạn thẳng BC suy ra: $BC = KC \Rightarrow \Delta BKC$ cân tại K $\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{KCB}$.

Mà $\widehat{KBC} = \widehat{BMO_1}$ (tam giác BO_1M cân tại O_1). Cho nên $\widehat{KCB} = \widehat{BMO_1} \Rightarrow O_1M \parallel KC$. Tương tự $O_2M \parallel KB$. Vì vậy tứ giác O_1MO_2K là hình bình hành. Suy ra $O_1M = O_2K$.

Ta có $R_1 + R_2 = O_1M + O_2C = KO_2 + O_2C = KC$. (4).

Tam giác ACK vuông tại C và có $\widehat{AKC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ cho nên



ABC

$$\cot \widehat{AKC} = \frac{KC}{AC} \Rightarrow KC = AC \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) ta có } R_1 + R_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 26: Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Từ một điểm M bất kì trên d và nằm miền ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến MP và MQ (P, Q là tiếp điểm).

- Chứng minh tứ giác OPMQ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Chứng minh rằng khi M di động trên d (M nằm miền ngoài đường tròn (O)). Thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn luôn đi qua hai điểm cố định.
- Xác định vị trí của điểm M để ΔMPQ đều.

ĐTS 10 Quốc Học Huế 1999 – 2000

Giải:

- Tứ giác OPMQ nội tiếp được trong một đường tròn.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{OPM} = \widehat{OQM} = 90^\circ$

Suy ra P và Q ở trên đường tròn đường kính OM.

Do đó tứ giác OPMQ nội tiếp trong đường tròn đường kính OM.

- Khi M di động trên d thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

Gọi I là trung điểm của dây AB ta có

$\widehat{OIM} = 90^\circ$ (tính chất đối xứng).

Suy ra I ở trên đường tròn đường kính OM. Mặt khác, tứ giác OPMQ ở trên đường tròn đường kính OM, cho nên năm điểm O, P, M, Q và I cùng ở trên một đường tròn.

Hay nói một cách khác, đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ luôn luôn đi qua hai điểm cố định O và I.

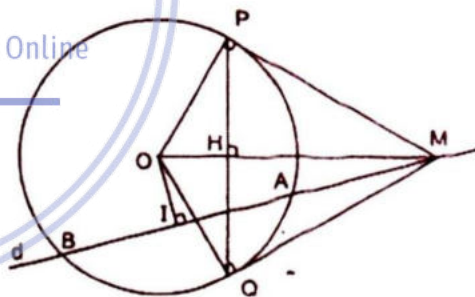
- Xác định vị trí của điểm M để ΔMPQ đều

Tam giác MPQ đều khi $\widehat{PMQ} = 60^\circ$ (vì $MP = MQ$). Mà $\widehat{OMP} = \frac{1}{2} \widehat{PMQ}$

(tính chất tiếp tuyến), nên tam giác MPQ đều khi $\widehat{OMP} = 30^\circ$

Tức là $\sin \widehat{OMP} = \sin 30^\circ \Leftrightarrow \frac{OP}{OM} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow OM = 2 \cdot OP = 2R$.

Suy ra $M \in (O; 2R)$. Mặt khác $M \in d$. Do đó, khi M là giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (O; 2R) thì tam giác MPQ là tam giác đều.



Bài tập vận dụng

- Cho tam giác đều ABC cạnh a với O là trung điểm BC. Một góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$ sao cho tia Ox cắt cạnh AB ở E, tia Oy cắt cạnh AC tại F. Chứng minh rằng:
 - $\triangle OBE \sim \triangle FCO$
 - EO và FO theo thứ tự là tia phân giác của góc $\widehat{BEF}$ và $\widehat{CFE}$.
 - đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi góc $\widehat{xOy}$ quay quanh O sao cho tia Ox và tia Oy cắt hai cạnh AB và AC của tam giác ABC.

ĐTS 10 Quốc Học Huế 2000 – 2001

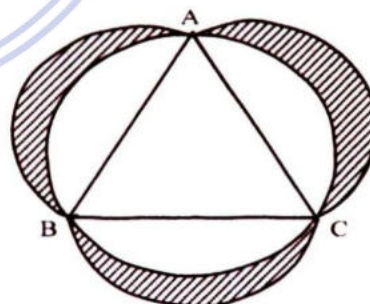
- Cho hai điểm A và B cố định trên đường tròn (O). C là điểm chính giữa cung AB, M là điểm chuyển động trên dây AB. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng:
 - $AC^2 = CM \cdot CD$.
 - Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM thuộc một đường thẳng cố định.
 - Gọi R_1 và R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADM và BDM. Chứng minh $R_1 + R_2$ là hằng số.

TS lớp 10 THPT Chuyên Lam sơn Thanh hóa-2007-2008

- Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Hạ đường cao BB', CC' của tam giác ABC cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AD của đường tròn (O).
 - Tứ giác BHCD là hình gì? Chứng tỏ HD đi qua trung điểm của cạnh BC.
 - Chứng minh OA vuông góc với B'C'.

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên tin Quốc học Thừa Thiên Huế 2009-2010

- Dựng bên ngoài tam giác đều ABC cạnh $a = 6$ (đơn vị độ dài) ba nửa đường tròn đường kính AB, BC, CA và dựng đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đó. Tính diện tích của phần gạch sọc trên hình vẽ. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



TS lớp 10 Chuyên tin Quốc học Thừa Thiên Huế 2009-2010

- Từ điểm P nằm ngoài đường tròn tâm O bán kính R, vẽ một cát tuyến không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A và B (A nằm giữa B và P).
 - Chứng minh $PA \cdot PB = PO^2 - R^2$
 - Gọi (d) là đường thẳng đi qua P và vuông góc với OP. Các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt (d) lần lượt tại C và D. Chứng minh $\widehat{COP} = \widehat{DOP}$.

ABC

ĐTS 10 Quốc Học Huế 2001 – 2002

6. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$) có đường cao BD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, BM và BD. Tia NI cắt cạnh AC tại K. Chứng minh rằng
- Các tứ giác ABMD, ABNK nội tiếp.
 - $BC^2 = \frac{4}{3} AC \cdot CK$.

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An - 2007-2008

7. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AC, N là điểm thuộc đoạn thẳng MC sao cho $MN = \frac{1}{2} NC$. Biết rằng $\widehat{MBN} = \widehat{CBN}$.

Chứng minh rằng $\widehat{ABN} = 90^\circ$.

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An - 2007-2008

8. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O có độ dài các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. E là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A sao cho cung EB bằng cung EC. Nối AE cắt cạnh BC tại D.
- Chứng minh: $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$
 - Tính độ dài đoạn AD theo a, b, c.

TS lớp 10 Chuyên Lê quý Đôn Bình định 2009-2010

9. Cho góc xOy có số đo bằng 60° . Đường tròn có tâm K nằm trong góc xOy tiếp xúc với tia Ox tại M và tiếp xúc với tia Oy tại N. Trên tia Ox lấy điểm P sao cho $OP = 3OM$. Tiếp tuyến của đường tròn (K) qua P cắt tia Oy tại Q khác O, đường thẳng PK cắt đường thẳng MN ở E, đường thẳng QK cắt đường thẳng MN ở F.
- Chứng minh tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.
 - Chứng minh tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.
 - Gọi D là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh tam giác DEF là một tam giác đều.

TS lớp 10 Chuyên toán Quốc học Huế 2009-2010

10. Người ta gọi “Hình vuông (V) ngoại tiếp tứ giác lồi ABCD” khi tứ giác ABCD nằm trong (V) và trên mỗi cạnh của (V) có chứa đúng một đỉnh của tứ giác ABCD. Giả sử tứ giác lồi ABCD có hai hình vuông ngoại tiếp khác nhau. Chứng minh rằng tứ giác này có vô số hình vuông ngoại tiếp nó.

TS lớp 10 Chuyên toán Quốc học Huế, 2009-2010

11. Trong một hình chữ nhật có diện tích bằng 5 chứa chín hình chữ nhật nhỏ, mỗi hình chữ nhật nhỏ có diện tích bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại hai hình chữ nhật nhỏ có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

TS lớp 10 Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An - 2007-2008

ABC

12. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AN và CK. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt đường tròn (O) tại điểm M ($M \neq B$). Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AC.

- Chứng minh EK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN.
- Chứng minh EM vuông góc với MB.

TS lớp 10 Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An - 2007-2008

13. Biết rằng một tứ giác lồi có tổng hai cạnh đối và một đường chéo không lớn hơn $2\sqrt{2S}$ (S là diện tích tứ giác). Tính độ dài đường chéo còn lại theo S.

Tuyển sinh lớp 10 Phan Bội Châu Nghệ An - 2007-2008

14. Cho đường tròn (O; R) và điểm A nằm ngoài (O; R). đường tròn đường kính AO cắt đường tròn (O; R) tại M và N. đường thẳng d qua A cắt (O; R) tại B và C (d không đi qua O; điểm B nằm giữa A và C). Gọi H là trung điểm của BC.

- Chứng minh: AM là tiếp tuyến của (O;R) và H thuộc đường tròn đường kính AO.
- Đường thẳng qua B vuông góc với OM cắt MN ở D. Chứng minh rằng:
 - $\widehat{AHN} = \widehat{BDN}$
 - Đường thẳng DH song song với đường thẳng MC.
 - $HB + HD > CD$.

Tuyển sinh lớp 10 THPT Nam Định, 2009-2010

15. Cho đường tròn (ε) bán kính R. A và B là hai điểm cố định trên đường tròn, ($AB < 2R$). Giả sử M là một điểm thay đổi trên cung lớn AB của đường tròn.

- Kẻ từ B đường thẳng vuông góc với AM, đường thẳng này cắt AM tại I và cắt đường tròn (ε) tại N. Gọi J là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên đường tròn thì mỗi điểm I, J đều nằm trên một đường tròn cố định.
- Xác định vị trí của điểm M để chu vi của $\triangle AMB$ là lớn nhất.

Tuyển sinh lớp 10 ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, 1998

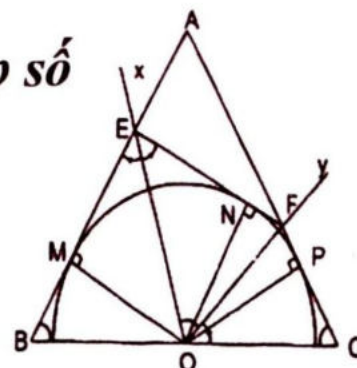
Hướng dẫn và đáp số

1. a. $\triangle OBE \sim \triangle FCO$

Ta có: $\widehat{COE} = \widehat{BEO} + \widehat{OBE} = \widehat{BEO} + 60^\circ$
(góc ngoài $\triangle BEO$)

$$\widehat{COE} = \widehat{EOF} + \widehat{FOC} = \widehat{FOC} + 60^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BEO} = \widehat{FOC}$$



Xét hai tam giác OBE và FCO ta có:

$\widehat{BEO} = \widehat{FOC}$ (chứng minh trên); $\widehat{EBO} = \widehat{FCO} = 60^\circ$ (tam giác ABC đều)
Do đó $\triangle BOE \sim \triangle FCO$.

- b. EO và FO theo thứ tự là tia phân giác của góc $\widehat{BEF}$ và $\widehat{CFE}$.

$$\text{Vì } \triangle OBE \sim \triangle FCO \Rightarrow \frac{OE}{FO} = \frac{OB}{FC} \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{FO}{FC} \Rightarrow \frac{OE}{OC} = \frac{FO}{FC}$$

Hai tam giác EOF và OCF có $\widehat{EOF} = \widehat{FCO} = 60^\circ$ và $\frac{OE}{OC} = \frac{FO}{FC}$ nên

chúng đồng dạng. Suy ra $\widehat{EFO} = \widehat{OFC}$. Hay nói một cách khác, FO là tia phân giác của $\widehat{EFC}$. Tương tự, EO là tia phân giác của $\widehat{BEF}$.

- c. Đường thẳng EF tiếp xúc với một đường tròn cố định. Dựng $OM \perp AB$, $ON \perp EF$ và $OP \perp AC$ ta có: $OM = ON$ (O ở trên tia phân giác của $\widehat{BEF}$).
 $ON = OP$ (O ở trên tia phân giác của $\widehat{EFC}$). Suy ra $OM = ON = OP$.
Đoạn thẳng OM cố định ($OM \perp AB$, $\triangle ABC$ và điểm O cố định). Cho nên N ở trên đường tròn cố định (O; OM). Ta lại có $ON \perp EF$.
Do đó EF luôn tiếp xúc với đường tròn cố định (O; OM).

2. 1. Ta có $\triangle ACM$ đồng dạng với $\triangle DCA$ (vì $\widehat{CAM} = \widehat{CDA}$ và $\widehat{ACD}$ chung).

$$\text{Suy ra } \frac{AD}{DC} = \frac{CM}{CA} \text{ hay } AC^2 = CM \cdot CD.$$

2. Vẽ đường kính CE. Vì $\widehat{CAM} = \widehat{CDA}$ nên AC là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADM$. Do $AC \perp AE$, nên tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADM$ nằm trên đường thẳng cố định AE.

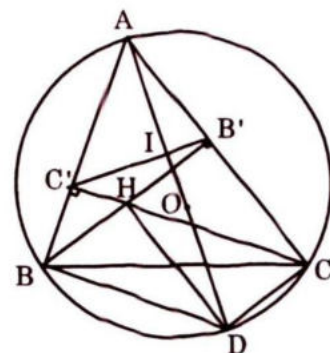
3. Tương tự phần 2, tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDM$ thuộc đường thẳng BE. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADM và BDM. Kẻ $O_1H \perp AB, O_2K \perp AB$. Khi đó, H và K lần lượt là trung điểm của AM và MB. Suy ra $R_1 = O_1A$ và $R_2 = O_2B$. Kẻ

$$O_1N \perp CE \text{ thì } O_1N = HI = AI - AH = \frac{1}{2}(AB - AM) = \frac{1}{2}BM = KB. \text{ Vậy}$$

$$\triangle ENO_1 = \triangle O_2KB \Rightarrow R_2 = O_2B = O_1E, \text{ suy ra } R_1 + R_2 = AE$$

3. 1. Ta có $BB' \perp AC$ và $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $DC \parallel BB'$ hay $DC \parallel BH$ (1)

Tương tự: $CC' \perp AB$ và $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $DB \parallel CC'$ hay $DB \parallel CH$ (2). Từ (1) và (2) ta có BHCD là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo HD và BC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, hay HD đi qua trung điểm của cạnh BC.



ABC

2. AO cắt B'C' tại I, ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp chắn cung AB).
 Tứ giác BCB'C' là tứ giác nội tiếp ($\widehat{BB'C} = \widehat{BC'C} = 90^\circ - \text{gt}$)
 Từ đó suy ra $\widehat{IDB} + \widehat{BC'I} = 180^\circ$. Do đó, tứ giác BC'ID là tứ giác nội tiếp. Ta có: $\widehat{C'ID} + \widehat{C'BD} = 180^\circ$ mà $\widehat{C'BD} = 90^\circ$ (cmt).
 Suy ra $\widehat{C'ID} = 90^\circ$, hay $AO \perp B'C'$ (đpcm).

4. Chiều cao của tam giác ABC là $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (đvdd).

Bán kính của (O) là $\frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (đvdd)

Diện tích của hình viên phân tạo ra bởi dây AB và cung nhỏ AB của (O) là:

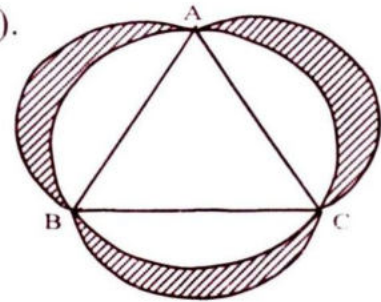
$$S_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi (2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} \right) = 4\pi - 3\sqrt{3} \text{ (đvdt)}$$

Diện tích của phần nửa hình tròn đường kính AB nằm ngoài (O) là:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 - S_1 = \frac{9}{2} \pi - (4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + 3\sqrt{3} \text{ (đvdt)}$$

Diện tích cần tìm là

$$3 \cdot S_2 = \frac{3\pi}{2} + 9\sqrt{3} \approx 20,3 \text{ (đvdt)}.$$



5. a. $PA \cdot PB = PO^2 - R^2$

Gọi E và F là giao điểm của đường thẳng PO với đường tròn (O) (E nằm giữa O và P).

Hai tam giác FAP và BEP có $\widehat{BPF}$ là góc chung.

$\widehat{AFP} = \widehat{EBP}$ (cùng chắn cung AE)

Cho nên $\triangle FAP \sim \triangle BEP$.

$$\text{Suy ra } \frac{PA}{PE} = \frac{PF}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PE \cdot PF = (PO - OE)(PO + OF).$$

$$\text{Vì vậy: } PA \cdot PB = (PO - R)(PO + R) = PO^2 - R^2$$

- b. Chứng minh $\widehat{COP} = \widehat{DOP}$

Tứ giác BOPD có $\widehat{OPD} = 90^\circ$ (gt); $\widehat{OBD} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến)

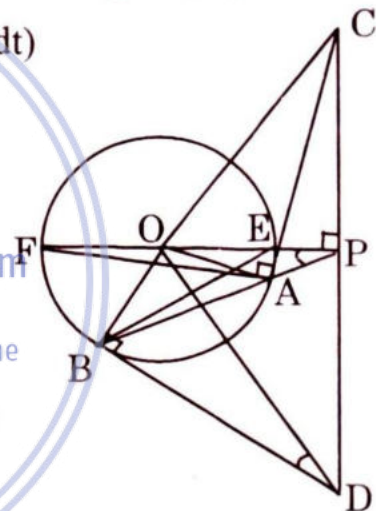
Cho nên B và P ở trên đường tròn đường kính OD. Suy ra $\widehat{ODB} = \widehat{OPB}$ (cùng chắn cung OB). Tương tự $\widehat{OCA} = \widehat{OPB}$.

Từ đó ta có $\widehat{ODB} = \widehat{OCA} \Rightarrow \widehat{BOD} = \widehat{AOC}$. Hai tam giác vuông OBD và OAC có $OA = OB$ (bán kính) và $\widehat{BOD} = \widehat{AOC}$ (chứng minh trên)

Cho nên $\triangle OBD = \triangle OAC$ (g.c.g) $\Rightarrow OD = OC \Rightarrow \triangle DOC$ cân tại O.

Mặt khác OP là đường cao của tam giác DOC ($OP \perp CD$).

Do đó, OP là phân giác của $\triangle DOC$ tức là $\widehat{COP} = \widehat{DOP}$.



ABC

6. Do tam giác ABC cân tại A nên AMBM. Lại có $BD \perp AD$, do đó tứ giác $AB \perp MD$ nội tiếp. Mặt khác, NI là đường trung bình của tam giác BMD nên $NI \parallel MD$. Do đó $\widehat{KNC} = \widehat{DMC}$. Hơn nữa $\widehat{DMC} = \widehat{KAB}$ (tính chất tứ giác nội tiếp ABMD). Suy ra $\widehat{KNC} = \widehat{KAB}$ (1)

Vậy tứ giác ABNK nội tiếp.

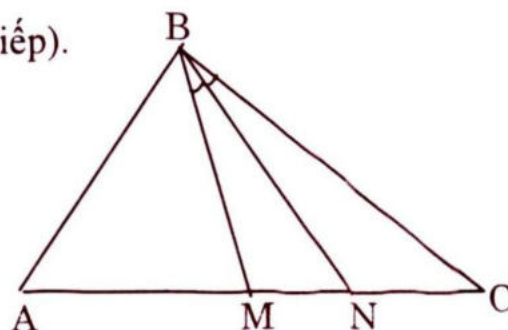
- b) Ta có $\widehat{NKC} = \widehat{ABC}$ (tứ giác ABNK nội tiếp).

Từ đây và từ (1) có $\triangle ABC \sim \triangle NKC$.

$$\text{Suy ra } \frac{BC}{CK} = \frac{AC}{NC}.$$

$$\text{Mặt khác, dễ thấy } NC = \frac{3}{4} BC,$$

$$\text{do đó } BC^2 = \frac{4}{3} BC \cdot NC = \frac{4}{3} AC \cdot CK.$$



7. Do BN là tia phân giác trong góc B của tam giác AMC nên $\frac{BM}{BC} = \frac{NM}{NC} = \frac{1}{2}$. Lại có $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{BM}{BC}$, suy ra BA là tia phân giác ngoài của tam giác BMC. Theo tính chất của hai đường phân giác trong và phân giác ngoài suy ra $BN \perp BA$ (đpcm).

8. a) Xét hai tam giác ABD và AEC, ta có: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AD là phân giác góc A); $\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ (g.g).

$$\text{Suy ra } \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AC$$

Mặt khác $\triangle ABD \sim \triangle CED$ (g.g)

$$\text{nên } \frac{BD}{DE} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = DA \cdot DE$$

Từ đó:

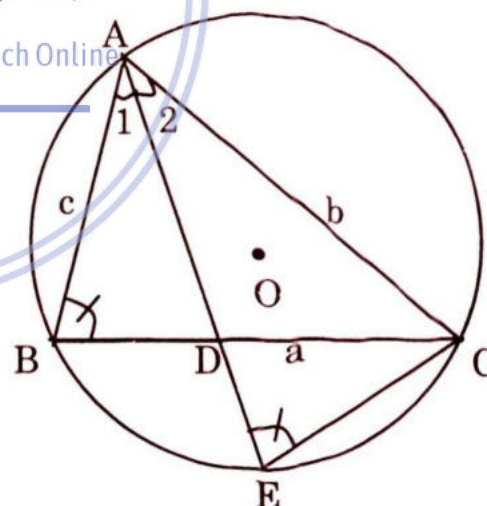
$$\begin{aligned} AB \cdot AC - BD \cdot DC &= AD \cdot AE - DA \cdot DE \\ &= AD(AE - DE) = AD^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$$

- b) Theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB + DC}{c + b} = \frac{BC}{c + b} = \frac{a}{c + b}$$

$$\text{Suy ra } \frac{DB}{c} \cdot \frac{DC}{b} = \frac{DB \cdot DC}{bc} = \left(\frac{a}{b + c} \right)^2 \Rightarrow DB \cdot DC = \left(\frac{a}{b + c} \right)^2 \cdot bc \quad (2)$$



ABC

$$\begin{aligned} \text{Thay (2) vào (1), ta có: } AD^2 &= bc - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \cdot bc \\ &= bc \left(1 - \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) = bc \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AD = \frac{\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}$$

9. a) Chứng minh tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.

+ PK là phân giác góc QPO

$$\Rightarrow \widehat{MPE} = \widehat{KPQ} (\alpha)$$

+ Tam giác OMN đều $\Rightarrow \widehat{EMP} = 120^\circ$

+ QK cũng là phân giác $\widehat{OQP}$

$$\widehat{QKP} = 180^\circ - (\widehat{KQP} + \widehat{KPQ})$$

$$\text{Mà } 2\widehat{KQP} + 2\widehat{KPQ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{QKP} = 120^\circ. \text{ Do đó: } \widehat{EMP} = \widehat{QKP} (\beta)$$

Từ (α) và (β) , ta có tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.

b) Chứng minh tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.

Do hai tam giác MPE và KPO đồng dạng nên: $\widehat{MEP} = \widehat{KQP}$.

Suy ra, tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.

c) Gọi D là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh tam giác DEF là một tam giác đều: Do hai tam giác MPE và KPQ đồng dạng nên: $\frac{PM}{PK} = \frac{PE}{PQ}$. Suy

ra: $\frac{PM}{PE} = \frac{PK}{PQ}$. Ngoài ra: $\widehat{MPK} = \widehat{EPQ}$. Do đó, hai tam giác MPK và EPQ

đồng dạng. Từ đó: $\widehat{PEQ} = \widehat{PMK} = 90^\circ$. Suy ra, D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác PQEF. Vì vậy, tam giác DEF cân tại D.

Ta có: $\widehat{FDP} = 2\widehat{FQD} = \widehat{OQP}$; $\widehat{EDQ} = 2\widehat{EPD} = \widehat{OPQ}$.

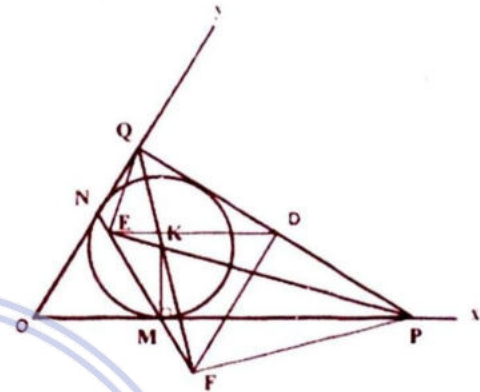
$\widehat{FDE} = 180^\circ - (\widehat{FDP} + \widehat{EDQ}) = \widehat{POQ} = 60^\circ$. Từ đó, tam giác DEF là tam giác đều.

10. Xét MNPQ là hình vuông ngoại tiếp tứ giác ABCD. Gọi A' là hình chiếu của A lên PQ, B' là hình chiếu của B lên MQ. Từ B kẻ đường vuông góc với AC cắt MQ tại E. Ta chứng tỏ: BE = AC.

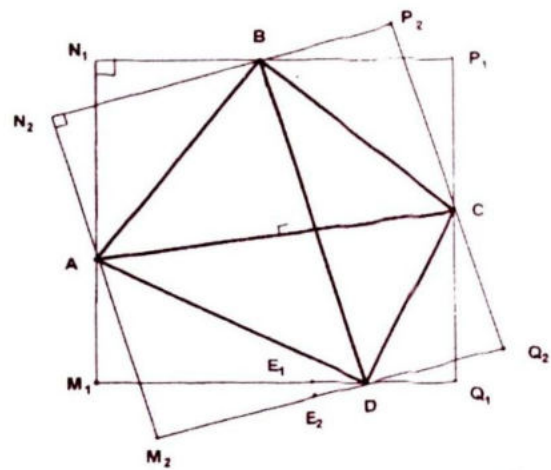
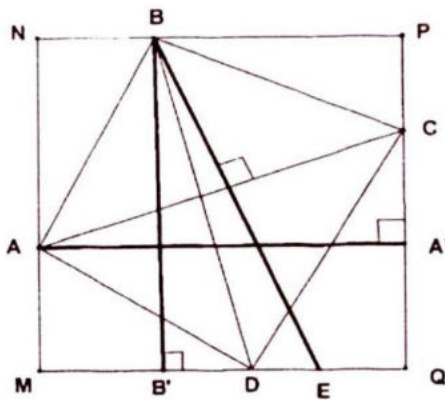
Nếu E trùng B' thì A' trùng C. Lúc đó: BE = BB' = AA' = AC.

Nếu E khác B' thì xét hai tam giác vuông BB'E và AA'C. Chúng có:

BB' = AA' và $\widehat{B'BE} = \widehat{A'AC}$ nên $\triangle BB'E = \triangle AA'C$. Suy ra: BE = AC.



ABC



Bây giờ, xét hai hình vuông $M_1N_1P_1Q_1$ và $M_2N_2P_2Q_2$ cùng ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Từ B kẻ đường vuông góc với AC cắt M_1Q_1 tại E_1 và cắt M_2Q_2 tại E_2 . Theo chứng minh trên:

$BE_1 = AC$ và $BE_2 = AC$. Suy ra E_1 và E_2 trùng nhau tại D . Vì vậy, tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD bằng nhau và vuông góc nhau. Cuối cùng, cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD bằng nhau và vuông góc nhau. Dựng đường thẳng (d) tùy ý sao cho tứ giác $ABCD$ và (d) chỉ có một điểm chung là A . Qua C dựng đường thẳng song song với (d). Qua B và D dựng các đường thẳng vuông góc với (d). Ta có hình chữ nhật $MNPQ$ ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Gọi A' là hình chiếu của A lên PQ , B' là hình chiếu của B lên MQ . Từ tính chất “hai đường chéo AC BD bằng nhau và vuông góc nhau”, suy ra $AA' = BB'$ (chứng minh như phần đầu). Do đó, hình chữ nhật $MNPQ$ là hình vuông. Vì vậy, có vô số hình vuông ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

11. Phản chứng. Giả sử bất kì hai hình chữ nhật nào trong chín hình chữ nhật nhỏ $H_1, H_2, \dots, H_9$ đều có diện tích phần chung nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

Khi đó diện tích phần H_2 không bị phủ bởi H_1 lớn hơn $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; diện tích phần H_3 không bị phủ bởi H_1 và H_2 lớn hơn $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$; ..., diện tích phần H_9 không bị phủ bởi $H_1, \dots, H_8$ lớn hơn $\frac{1}{9}$. như vậy diện tích

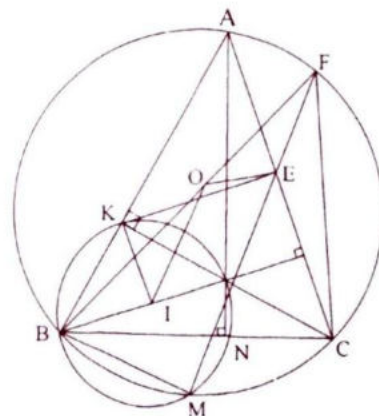
của hình chữ nhật lớn hơn $1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \dots + \frac{1}{9} = 5$ (vô lí).

12.a. Ta có tứ giác $BNHK$ nội tiếp đường tròn đường kính BH ($\widehat{BKH} = \widehat{BNH} = 90^\circ$). Gọi I là trung điểm của BH . Các tam giác KBH và KAC vuông nên $\widehat{IKH} = \widehat{IHK}$ và $\widehat{EKC} = \widehat{KCE}$. Lại có $\widehat{IHK} = \widehat{DHC}$ từ đó có $\widehat{EKC} + \widehat{HKI}$. Hay $EK \perp KI$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

ABC
208

- b. Kẻ đường kính BF của đường tròn (O).
 Dễ thấy tứ giác AHCF là hình bình hành nên E là trung điểm của HF.
 Theo tính chất đường trung bình ta có $OI \parallel EH$. Mặt khác $OI \perp BM$ (đường nối tâm hai đường tròn vuông góc với dây cung chung). Do đó $EH \perp BM$. Lại có $HM \perp BM$ (do BH là đường kính đường tròn (I)), suy ra E, H, M thẳng hàng và $EM \perp BM$.



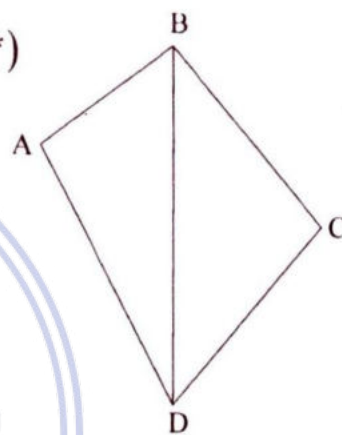
13. Giả sử tứ giác lồi ABCD thỏa mãn $x^3 = \frac{a}{b}$, $y^3 = \frac{b}{c}$, $z^3 = \frac{c}{a}$.

Ta thấy $2S \leq BD(AD + BC) \leq \left(\frac{AD + BC + BD}{2} \right)^2 (*)$

Vậy $AD + BC + BD \geq 2\sqrt{2S}$.

Từ đó $AD + BC + BD = 2\sqrt{2S}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các đẳng thức ở (*) xảy ra, tức là khi $AD \perp BD$, $BC \perp BD$ và $AD + BC = BD$. Dựng hình bình hành CADE ta có $\triangle BDE$ vuông cân tại B.

Do đó $AC = DE = BD\sqrt{2} = 2\sqrt{S}$.

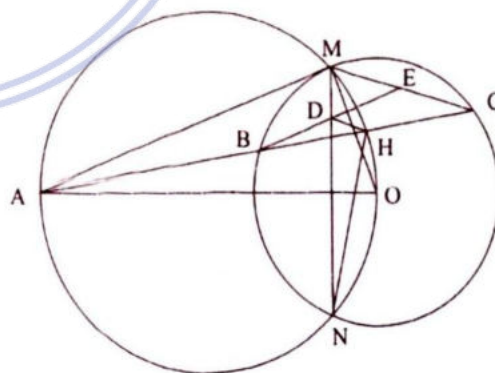


14. Xét đường tròn đường kính AO có $\widehat{AMO} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AM \perp OM$. Mà OM là bán kính của đường tròn (O; R), nên AM là tiếp tuyến của đường tròn (O; R). H là trung điểm của dây BC của (O; R) và BC không đi qua tâm O nên $OH \perp BC$.

$\Rightarrow \widehat{AHO} = 90^\circ$.

Vậy H thuộc đường tròn đường kính AO.



- a) Xét đường tròn đường kính AO có $\widehat{AHN} = \widehat{AMN}$ (1) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN). Theo giả thiết $BD \perp OM$ và $AM \perp OM$ suy ra $BD \parallel AM$ suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{BDN}$ (2) (hai góc đồng vị)
 Từ (1), (2) suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{BDN}$.

ABC

b) Theo chứng minh trên ta có $\widehat{BHN} = \widehat{BDN}$. Mặt khác, D và H cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ BN nên 4 điểm H, D, B, N cùng thuộc một đường tròn. Xét trên đường tròn này ta có $\widehat{BHD} = \widehat{BND}$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD). Xét trên đường tròn (O) có $\widehat{BND} = \widehat{MCD}$ (4) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM). Từ (3), (4) suy ra $\widehat{BHD} = \widehat{MCD}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị đối với hai đường thẳng DH và MC bị cắt bởi đường thẳng BC, suy ra $DH \parallel MC$.

c) Xét $\triangle DHC$ có $DH + HC > CD$ (bất đẳng thức trong tam giác)

Mà $HC = BC$ (Vì H là trung điểm của BC)

Suy ra $HB + HD > CD$ (đpcm)

15. Vì góc $\widehat{AIB} = 90^\circ$ nên khi M thay đổi (trên cung lớn AB) thì I nằm trên đường tròn cố định có đường kính AB; IJ là trung tuyến tam giác vuông MIN nên $IJ = \frac{1}{2}MN$. Do tổng 2 cung AB và MN là 180° , AB cố định nên MN có độ dài không đổi. Kéo dài JI cắt AB ở H ta có $\widehat{JIM} = \widehat{AIH} = \widehat{JMI}$ suy ra $\widehat{IAB} + \widehat{AIH} = 90^\circ$ hay $\widehat{IHA} = 90^\circ$. Đoạn JI vuông góc với AB và có độ dài không đổi. Kẻ hai đoạn AA' , BB' vuông góc với AB và có độ dài bằng JI (A' , B' , I nằm cùng phía đối với AB) A' , B' cố định. Do các tứ giác $AA'JI$ và $BB'JI$ là các hình bình hành nên $\widehat{A'JB'} = \widehat{AIB} = 90^\circ$. Vậy J nằm trên đường tròn cố định đường kính $A'B'$.

2) Kéo dài AM một đoạn $MN = MB$ khi đó: $AN = AM + MN = AM + MB$. Chu vi của $\triangle AMB$ bằng $AB + AN$. Do AB cố định nên chu vi $\triangle AMB$ lớn nhất khi AN lớn nhất.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của cung lớn AB và cung nhỏ AB, $MP \perp MQ$ và PQ là đường kính cố định của đường tròn. Vì MQ là phân giác góc $\widehat{AMB}$ nên MP là phân giác góc $\widehat{BMN}$. Do $\triangle BMN$ là tam giác cân nên MP đồng thời là trung trực của BM $\Rightarrow PA = PB = PN \Rightarrow N$ nằm trên đường tròn cố định tâm P bán kính PA. Khi đó AN là dây cung của đường tròn này, suy ra AN lớn nhất khi AN là đường kính của đường tròn tâm P. Vậy khi M trùng với trung điểm P của cung lớn AB thì chu vi của $\triangle AMB$ lớn nhất.

8. Các bài toán hình học không gian

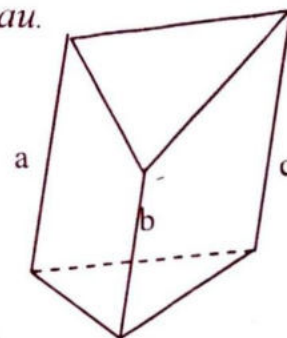
Một số kiến thức cơ bản

Hình lăng trụ

Định nghĩa : Hình lăng trụ là hình đa diện có 2 mặt song song gọi là đáy, và các cạnh không thuộc 2 đáy song song với nhau.

Tính chất : Trong hình lăng trụ:

- Các cạnh bên song song và bằng nhau
- Các mặt bên, mặt chéo là hình bình hành.
- Hai đáy có cạnh song song và bằng nhau.



*Lăng trụ đứng là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy

*Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Lăng trụ đều có các mặt bên là hình chữ nhật bằng nhau.

*Lăng trụ xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy.

* **Hình hộp** là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Hình hộp có các mặt đối diện là hình bình hành song song và bằng nhau.

Các đường chéo hình hộp cắt nhau tại trung điểm.

Hình hộp đứng có cạnh bên vuông góc với đáy.

Hình hộp xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy.

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Hình hộp chữ nhật có các mặt là hình chữ nhật.

Ba độ dài các cạnh xuất phát từ đỉnh gọi là kích thước của hình hộp chữ nhật a, b, c .

Các đường chéo hình hộp chữ nhật bằng nhau và có độ dài:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hình lập phương là hình hộp có 6 mặt là hình vuông.

Các cạnh của hình lập phương bằng nhau số đo a .

Các đường chéo hình lập phương có độ dài: $d = a\sqrt{3}$

Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần

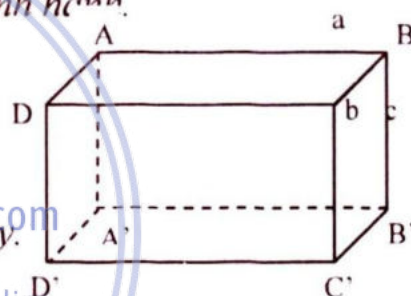
$S_{xq} = pl$ (p là chu vi thiết diện thẳng, l là độ dài cạnh bên)

Lăng trụ đứng: $S_{xq} = ph$. (p là chu vi đáy, h là chiều cao)

- Hình hộp chữ nhật: $S_{tp} = 2(ab + bc + ca)$

a, b, c là kích thước của hình hộp chữ nhật.

- **Thể tích của hình hộp chữ nhật:** $V = abc$ a, b, c là kích thước



Thể tích hình lập phương: $V = a^3$ a là cạnh

Thể tích lăng trụ: $V = B.h$ (B là diện tích đáy, h là chiều cao)

Hình chóp

Định nghĩa

Hình chóp là hình đa diện có 1 mặt là đa giác, các mặt khác là tam giác có chung đỉnh.

Chiều cao h là khoảng cách từ đỉnh tới đáy.

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Đỉnh của hình chóp đều có hình chiếu là tâm của đáy.

Hình chóp tam giác còn gọi là tứ diện hình tứ diện.

Hình tứ diện là hình chóp tam giác có đáy là mặt nào cũng được, đỉnh là điểm nào cũng được.

Hình tứ diện đều là tứ diện có các cạnh bằng nhau.

Diện tích xung quanh của hình chóp đều:

$$S_{xq} = \frac{1}{2} n a d \quad (n: \text{số cạnh đáy}; a: \text{độ dài cạnh đáy}; d: \text{độ dài trung đoạn})$$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + B$; B là diện tích đáy

Thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3} B h$

Hình chóp cắt

Hình chóp cắt là phần hình chóp nằm giữa đáy và thiết diện song song với đáy.

Hình chóp cắt từ hình chóp đều gọi là hình chóp cắt đều.

$A'B'C'D' \sim ABCD$

$$\frac{SH'}{SH} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + B + B'$$

Diện tích xung quanh của hình chóp cắt đều:

$$S_{xq} = \frac{1}{2} (na + na') \cdot d$$

n : số cạnh đáy; a, a' : cạnh đáy

d : độ dài trung đoạn, chiều cao của mặt bên

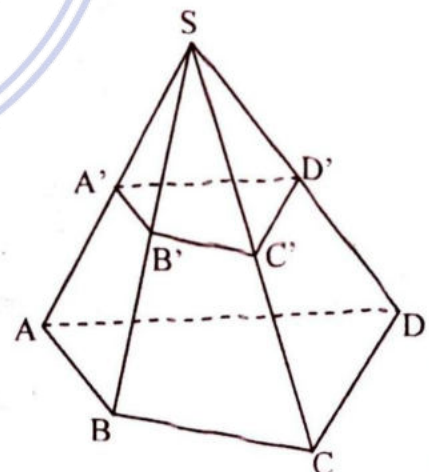
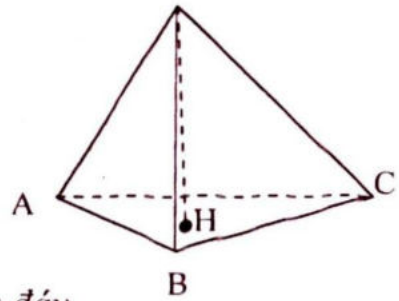
$$V = V_1 + V_2$$

V : thể tích hình chóp.

V_1 : thể tích chóp cắt

V_2 : thể tích hình chóp trên

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{SH}{SH'} \right)^3$$



$$V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'}) \quad (B, B' \text{ là diện tích đáy, } h \text{ là chiều cao})$$

Hình trụ Hình trụ là hình sinh ra bởi hình chữ nhật $O'OMM'$ quay xung quanh cạnh OO'

Cạnh OM sinh ra hình tròn đáy.

Cạnh MM' sinh ra mặt nón tròn xoay

MM' gọi là đường sinh OO' là trục của hình trụ.

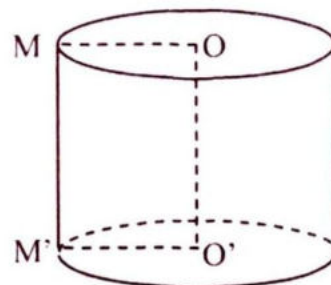
$h = OO'$ là chiều cao

$R = OM$ bán kính đáy

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rh$

R : bán kính đáy; h : chiều cao

$V = \pi R^2 h$ (R : bán kính đáy; h : chiều cao)



Hình nón là hình sinh ra bởi tam giác vuông OMS quay xung quanh cạnh góc vuông OS .

Cạnh OM sinh ra hình tròn đáy.

Cạnh SM sinh ra mặt nón tròn xoay.

SM gọi là đường sinh; SO là trục, đường cao.

$R = OM$ bán kính đáy

$h = SO$ chiều cao

Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$

R : bán kính đáy; l : độ dài đường sinh

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$

Thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

R : bán kính đáy; h : chiều cao

Hình nón cụt là phần hình nón giữa đáy và một thiết diện vuông góc với trục.

Hình nón cụt sinh bởi một hình thang vuông $OMM'O'$ quay quanh OO' .

$h = OO'$ chiều cao; $MM' = l$ là đường sinh

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R + R')l$

R, R' là bán kính đáy; l là đường sinh

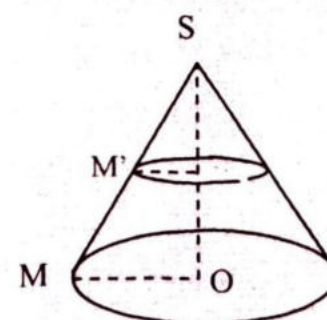
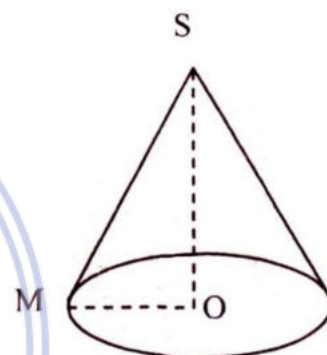
Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi(R + R')l + \pi R^2 + \pi R'^2$

Thể tích hình nón cụt: $V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + R'^2 + RR')h$

R, R' là bán kính đáy; h : chiều cao

Hình cầu: Hình cầu tâm O , bán kính R là tập hợp những điểm M trong không gian thỏa điều kiện $OM \leq R$

Mặt cầu tâm O bán kính R là tập hợp những điểm M trong không gian thỏa điều kiện $OM = R$



Thiết diện qua tâm là hình tròn lớn tâm O bán kính R .
 Thiết diện của hình cầu với một mặt phẳng là hình tròn có tâm H là hình chiếu của O trên mặt phẳng và bán kính:

$r_1 = \sqrt{R^2 - d^2}$, R là bán kính hình cầu
 d là khoảng cách từ tâm tới mặt phẳng.

$d = OH$

Tiếp diện của mặt cầu là mặt phẳng có 1 điểm chung với mặt cầu.

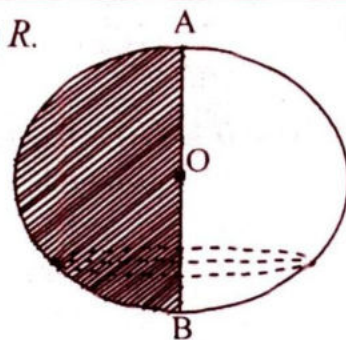
Điều kiện để mặt phẳng α tiếp xúc với mặt cầu là: $d(O, \alpha) = R$.

Tiếp tuyến của mặt cầu là đường thẳng có một điểm chung với mặt cầu.

Điều kiện để đường thẳng Δ là tiếp tuyến là $d(O, \Delta) = R$.

Diện tích hình cầu $S = 4\pi R^2$

Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Hình lăng trụ

Ví dụ: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' biết rằng hình hộp chữ nhật có thể tích 60 dm^3 , diện tích toàn phần 94 dm^2 và $AB + BC = 7 \text{ dm}$. Tính độ dài các cạnh AB, BC, AA'.

ĐTS 10 Quốc Học Huế 1998 – 1999

Giải:

Gọi $AB = x(\text{dm})$; $BC = y(\text{dm})$ và $AA' = z(\text{dm})$.

Điều kiện: $0 < x < 7$, $0 < y < 7$ và $z > 2$. Diện tích toàn phần của hình hộp $2(xy + yz + zx)(\text{dm}^2)$. Thể tích của hình hộp: $xyz(\text{dm}^3)$.

Theo đề ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} xyz = 60 \\ 2(xy + yz + zx) = 94 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ xy + yz + zx = 47 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ xyz + yz^2 + z^2x = 47z \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ 60 + z^2(x + y) - 47z = 0^* \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ 7z^2 - 47z + 60 = 0 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ z_1 = 5 \\ z_2 = \frac{12}{7} \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 12 \\ z_1 = 5 \quad (*) \\ x + y = 7 \\ xy = 35 \\ z_2 = \frac{12}{7} \quad (**) \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình (*). Do $x + y = 7$ và $xy = 60$ nên x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 7X + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 3 \\ X_2 = 4 \end{cases}$

Từ đó suy ra $(x_1 = 3; y_1 = 4)$ hoặc $(x_2 = 4; y_2 = 3)$

Vậy hệ phương trình (*) có hai nghiệm $(x_1 = 3; y_1 = 4; z_1 = 5)$ hoặc $(x_2 = 4; y_2 = 3; z_2 = 5)$. Giải hệ phương trình (**)

Do $x + y = 7$ và $xy = 35$ nên x, y là nghiệm của phương trình

$$Y^2 - SY + P = 0 \Leftrightarrow Y^2 - 7Y + 35 = 0 \text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

Suy ra hệ phương trình (**) vô nghiệm.

Do đó $AB = 3(\text{dm}); BC = 4(\text{dm}); AA' = 5(\text{dm})$.

Hoặc $AB = 4(\text{dm}); BC = 3(\text{dm}); AA' = 5(\text{dm})$.

Dạng 2: Hình chóp

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A. Lấy một điểm S trên đường thẳng d; nối SA, SB, SC. Gọi O là trung điểm của BC. Tính thể tích hình chóp S.ABC, cho biết $AB = a, SO = a\sqrt{2}$.

ĐTS 10 Quốc Học Huế 2000 – 2001
Giải:

AO là trung tuyến của tam giác vuông BAC nên $AO = \frac{BC}{2}$.

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

Từ đó ta có:

$$AO = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Áp dụng định lý vào tam giác vuông SAO ta có:

$$SO^2 = SA^2 + OA^2 \Rightarrow SA^2 = SO^2 - OA^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Thể tích của hình chóp S.ABC là: $V_{(SABC)} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một đường thẳng d vuông góc với mp(ABCD) tại O. Lấy một điểm S trên đường thẳng d, nối SA, SB, SC, SD. Biết $AB = a, SA = a\sqrt{5}$. Tính diện tích xung quanh của hình chóp S.ABCD.

ĐTS 10 Quốc Học Huế 2001 – 2002

ABC

Giải:

Diện tích xung quanh của hình chóp S.ABCD. Hình chóp SABCD có đáy là hình vuông và có chân đường cao trùng với tâm của hình vuông nên S.ABCD là hình chóp đều. Kẻ đường cao SE của tam giác SBC ta có E là trung điểm của BC vì tam giác SBC cân tại S cho nên $BE = \frac{a}{2}$. Áp dụng

định lý Pytago vào tam giác SBE ta có:

$$SB^2 = SE^2 + BE^2 \Rightarrow SE^2 = SB^2 - BE^2$$

$$SE^2 = \left(a\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{19a^2}{4} \Rightarrow SE = \frac{a\sqrt{19}}{2}$$

$$\text{Vậy: } S_{xq} = \frac{4.BC.SE}{2} = 2.a.\frac{a\sqrt{19}}{2} = a^2\sqrt{19}.$$

Dạng 3: Hình trụ

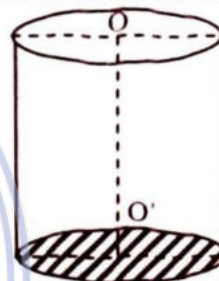
Ví dụ 1: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng 2a. Tính diện tích xung quanh; diện tích toàn phần và thể tích hình trụ.

Giải

$$a. S_{xq} = 2\pi.R.h = 2\pi.a.2a = 4\pi a^2$$

$$b. S_{tp} = S_{xq} + 2S_d \\ = 4\pi a^2 + 2\pi a^2 = 6\pi a^2$$

$$c. V = \pi R^2.h = \pi.a^2.2a = 2\pi a^3$$



Ví dụ 2: Hai hình chữ nhật ABD và EFGH có cạnh AB = 3cm, BC = 4cm, EF = 12cm, FG = 2cm. Cho hình chữ nhật thứ nhất quay quanh AB và hình chữ nhật thứ hai quay quanh EF. Chứng minh rằng hai hình trụ được tạo thành có diện tích toàn phần bằng nhau và thể tích bằng nhau.

Giải

$$a. S_{xq1} = 2\pi.4.3 = 24\pi(\text{cm}^2)$$

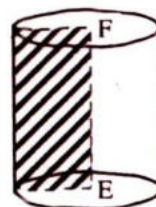
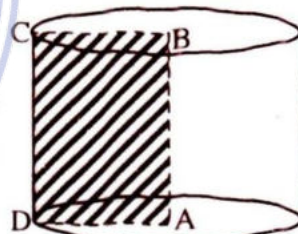
$$2S_{d1} = 2\pi.4^2 = 32\pi(\text{cm}^2); S_{tp1} = 56\pi(\text{cm}^2)$$

$$b. S_{xq2} = 2\pi.2.12 = 48\pi(\text{cm}^2); 2S_{d2} = 2\pi.2^2 = 8\pi(\text{cm}^2)$$

$$S_{tp2} = 56\pi(\text{cm}^2). \text{ Vậy } S_{tp1} = S_{tp2}.$$

$$V_1 = \pi.4^2.3 = 48\pi(\text{cm}^3); V_2 = \pi.2^2.12 = 48\pi(\text{cm}^3)$$

$$\text{Vậy } V_1 = V_2$$



Ví dụ 3: Mặt phẳng đi qua trục có hình trụ, phần mặt phẳng đó bị giới hạn bởi hình trụ là một hình chữ nhật có diện tích 72cm^2 . Tính bán kính đáy và đường cao hình trụ biết rằng đường kính đáy bằng một nửa đường cao.

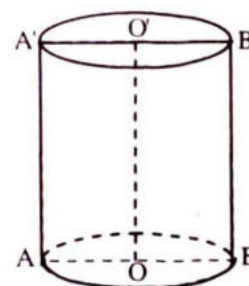
Giải

Hình chữ nhật giới hạn bởi hình trụ có một cạnh bằng $2R$ và một cạnh bằng h . Theo đề

$$\text{bài: } 2R = \frac{h}{2}$$

$$\text{Do đó } \frac{h^2}{2} = 72 = h^2 = 144 \Leftrightarrow h = 12(\text{cm}).$$

$$\text{Vậy } h = 12(\text{cm}); R = 3(\text{cm}).$$



Ví dụ 4: Một mặt phẳng đi qua trục OO' của một hình trụ, phần mặt phẳng đó bị giới hạn bởi hình trụ là một hình chữ nhật có diện tích là 72cm^2 . Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ, biết rằng đường kính đáy bằng một nửa đường cao.

Đề TS 10 Quốc Học Huế 1996 – 1997**Giải:**

Gọi d (cm) là độ dài đường kính đường tròn mặt đáy. h (cm) là độ dài đường cao hình trụ. Điều kiện: $d > 0, h > 0$. Theo đề bài ta có hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} d \cdot h = 72 \\ 2d = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \cdot 2d = 72 \\ 2d = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = 36 \\ 2d = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = 36 \\ 2d = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |d| = 6 \\ 2d = h \end{cases}$$

Nhưng $d > 0$ và $h > 0$ nên ta có $d = 6$ và $h = 12$.

Diện tích xung quanh (S_{xq}) và thể tích hình trụ (V) được tính như sau:

$$S_{xq} = \pi d \cdot h = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi (\text{cm}^2); V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 108\pi (\text{cm}^3)$$

Ví dụ 5: Một hình trụ có bán kính đáy là R , chiều cao $2R$. Một đoạn thẳng AB có 2 đầu thuộc hai đường tròn đáy, góc giữa AB và trục hình trụ bằng α

- Tính độ dài đoạn AB trong trường hợp $\alpha = 30^\circ$.
- Tìm giá trị của α để độ dài AB lớn nhất.

Giải

Gọi BB' là một đường sinh của hình trụ.

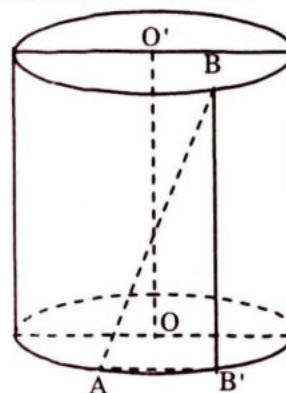
$$\text{Ta có: } OO' \parallel BB' \Rightarrow (\widehat{AB, OO'}) = (\widehat{AB, BB'}) = \widehat{ABB'} = \alpha$$

- Khi $\alpha = 30^\circ$: $\triangle B'AB$ là một nửa tam giác đều nên nếu $AB = x$ thì:

$$AB^2 = AB'^2 + B'B^2, AB = 2AB'$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + 4R^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 16R^2 \Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}.$$

$$\text{Vậy } AB = \frac{4R}{\sqrt{3}}.$$



- b. Do $AB^2 = AB'^2 + B'B^2 \Leftrightarrow AB^2 = AB'^2 + 4R^2$. Như vậy: AB lớn nhất $\Leftrightarrow AB'$ lớn nhất vì AB là một dây cung của đường tròn (O) nên lớn nhất khi $AB' = 2R$. Khi đó $\triangle B'AB$ vuông cân tại B' . Nghĩa là: $\alpha = 45^\circ$.

Ví dụ 6: Một hình trụ có bán kính đáy R , chiều cao h . Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường sinh bất kỳ của hình lăng trụ, phần của (P) giới hạn bởi hình trụ là một hình chữ nhật. Tìm (P) để diện tích hình chữ nhật lớn nhất.

Giải

Hình chữ nhật $ABB'A'$ có 2 cạnh là hai đường sinh và 2 cạnh còn lại là hai dây cung của hai đáy.

Diện tích hình chữ nhật này là:

$$S = AA' \cdot AB = h \cdot AB.$$

Do đó: S lớn nhất $\Leftrightarrow$ độ dài AB lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là một đường kính của đáy.

Vậy: (P) là mặt phẳng chứa một đường sinh và một đường kính của đáy.

Khi đó: giá trị lớn nhất của S sẽ là: $2Rh$.

Ví dụ 7: Một hình trụ có bán kính đáy R , chiều cao h . Tính:

- Thể tích hình lăng trụ tứ giác đều có đáy nội tiếp đáy hình trụ.
- Diện tích toàn phần hình lăng trụ tam giác đều có đáy ngoại tiếp đáy hình trụ.

Giải

- Hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có: Đáy là hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính R . Cạnh bên là đường sinh hình trụ và bằng h .

$$\text{Như vậy: } 2AB^2 = AC^2 = 4R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2}$$

Suy ra: thể tích hình lăng trụ:

$$V = Bh = (R\sqrt{2})^2 \cdot h = 2R^2h.$$

- Hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có:

- Đây là tam giác đều ngoại tiếp đường tròn bán kính R .
- Cạnh bên bằng đường sinh hình trụ và bằng h .

Như vậy: $CH = 3OH = 3R$.

$$AH^2 = AO^2 - OH^2 = R^2 - R^2 = 0 \Rightarrow AH = 0$$

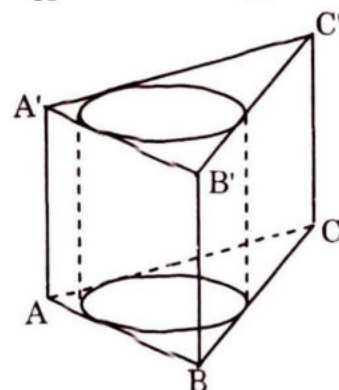
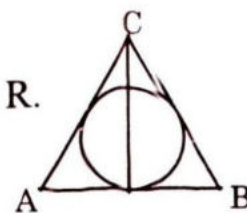
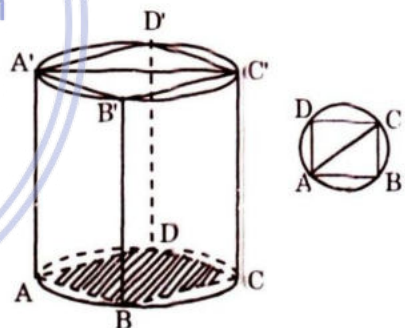
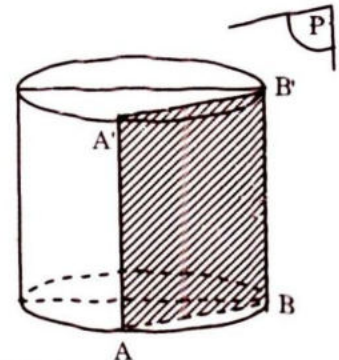
$$\Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2 = 0 + 9R^2 = 9R^2$$

$$\Rightarrow AC = 3R$$

Suy ra: diện tích toàn phần hình lăng trụ:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 3AB \cdot AA' + 2 \frac{AB \cdot CH}{2}$$

$$= 3 \cdot 3R \cdot h + 2 \cdot \frac{3R \cdot 3R}{2} = 9Rh + 9R^2 = 9R(h + R)$$



ABC

Ví dụ 8: Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn tâm O và O' bán kính R; chiều cao hình trụ là $R\sqrt{2}$. Gọi A, B là 2 điểm lần lượt thuộc các đường tròn (O) và (O') sao cho $OA \perp O'B$. Giả sử tứ diện OAO'B có các mặt đều là tam giác vuông. Tính thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện.

Giải

- a. Coi tứ diện OAO'B như là hình chóp có đỉnh A, đáy là tam giác OBO' thì thể tích tứ diện là:

$$V = \frac{1}{3} S_{(OBO')} \cdot AO = \frac{1}{3} \cdot \frac{BO' \cdot OO'}{2} \cdot AO$$

$$= \frac{1}{6} \cdot R \cdot R\sqrt{2} \cdot R = \frac{R^3 \sqrt{2}}{6}$$

* $\triangle OAO'$ vuông tại O:

$$O'A^2 = O'O^2 + OA^2 = 3R^2 \Rightarrow O'A = R\sqrt{3}$$

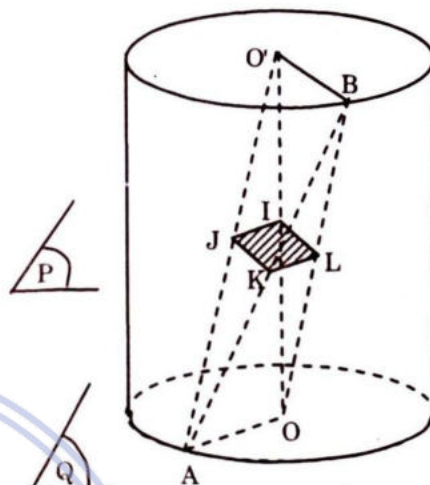
$\triangle O'BO$ vuông tại O':

$$OB^2 = OO'^2 + O'B^2 = 3R^2 \Rightarrow OB = R\sqrt{3}$$

Diện tích toàn phần hình tứ diện:

$$S_{tp} = S_{(OAO')} + S_{(OBA)} + S_{(O'BO)} + S_{(O'AB)}$$

$$= \frac{R^2 \sqrt{2}}{2} + \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{R^2 \sqrt{2}}{2} + \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} = R^2 (\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$



Ví dụ 1: Một cái phễu có hình trên dạng hình nón đỉnh S, bán kính đáy $R = 5\text{cm}$, chiều cao $h = 30\text{cm}$. Một hình trụ đặc bằng kim loại có bán kính đáy $r = 10\text{cm}$ đặt vừa khít trong hình nón có đầy nước (xem hình bên). Người ta nhấc nhẹ hình trụ ra khỏi phễu. Hãy tính thể tích và chiều cao của khối nước còn lại trong phễu.

TS lớp 10 THPT-T P Huế 2009 – 2010

Giải:

Thực hiện mặt cắt hình nón và hình trụ bởi mặt phẳng đi qua trục chung của chúng. Ta có $DE \parallel SH$ nên:

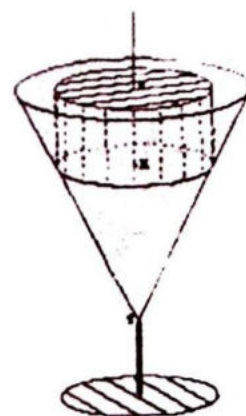
$$\frac{DE}{SH} = \frac{DB}{HB} \Rightarrow DE = \frac{h(R-r)}{R} = \frac{30.5}{15} = 10 \text{ (cm)}$$

Do đó: chiều cao của hình trụ là: $h' = DE = 10 \text{ (cm)}$

+ Nếu gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nước còn lại trong phễu khi nhấc khối trụ ra khỏi phễu, thể tích hình nón và thể tích khối trụ ta có:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 h - \pi r^2 h' = \frac{15^2 \cdot 30}{3} - 100\pi = 1250\pi$$

Khối nước còn lại trong phễu khi nhấc khối trụ ra khỏi phễu là một khối nón có bán kính đáy r_1 và chiều cao h_1 .



ABC

Ta có: $\frac{r_1}{R} = \frac{h_1}{h} \Rightarrow r_1 = \frac{Rh_1}{h} = \frac{h_1}{2}$. Suy ra: $V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = 125\pi \Leftrightarrow h_1^3 = 15000$.

Vậy: chiều cao của khối nước còn lại trong phễu là: $h_1 = \sqrt[3]{15000} = 10\sqrt[3]{15}$ (cm)

Ví dụ 2: Để làm một cái phễu hình nón không nắp bằng bìa cứng bán kính $r = 12$ cm, chiều cao $h = 16$ cm, người ta cắt từ một tấm bìa ra hình khai triển của mặt xung quanh của hình nón, sau đó cuộn lên. Trong hai tấm bìa hình chữ nhật: Tấm bìa A có chiều dài 44 cm, chiều rộng 25 cm, tấm bìa B có chiều dài 42 cm, chiều rộng 28 cm, có thể sử dụng tấm bìa nào để làm ra cái phễu hình nón nói trên mà không phải chắp nối? Giải thích.

Đề TS lớp 10 Tỉnh Thừa Thiên Huế 2006-2007

Giải:

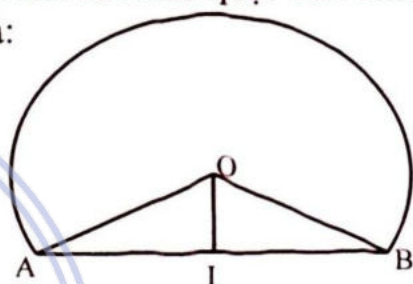
Đường sinh của hình nón có chiều dài: $l = \sqrt{r^2 + h^2} = 20$ (cm)

Hình khai triển của mặt xung quanh của hình nón là hình quạt của hình tròn bán kính l , số đo của cung của hình quạt là:

$$n^\circ = \frac{360r}{l} = \frac{360 \cdot 12}{20} = 216^\circ;$$

$$\widehat{AOI} = 72^\circ \Rightarrow \frac{OI}{OA} = \cos \widehat{AOI}$$

$$\Rightarrow OI = 20 \cos 72^\circ \approx 6,2 \text{ (cm)}.$$



Do đó, để cắt được hình quạt nói trên thì phải cần tấm bìa hình chữ nhật có kích thước tối thiểu: chiều dài 40 cm, rộng $(20 + 6,2) = 26,2$ cm. Vậy phải dùng tấm bìa B mới cắt được hình khai triển của mặt xung quanh của hình nón mà không bị chắp vá.

Ví dụ 3: Tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) quay chung quanh AB, tính bán kính đáy và đường cao hình nón được tạo thành, từ đó tính thể tích và diện tích xung quanh của nó, biết rằng $BC = a$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$

Giải

ΔABC là nửa tam giác đều, $BC = a \Leftrightarrow AC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

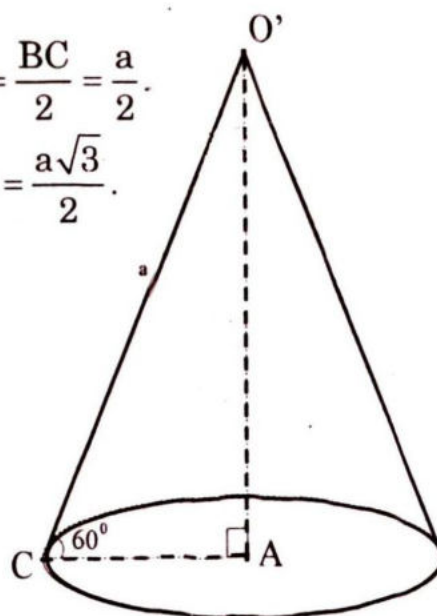
$$\text{Và } AB^2 = BC^2 - AC^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy bán kính đáy hình nón $R = \frac{a}{2}$.

$$\text{Chiều cao hình nón: } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó thể tích hình nón:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot \sqrt{3}}{24}$$



ABC

* Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi.R.l = \pi.\frac{a}{2}.a = \frac{\pi.a^2}{2}$.

Ví dụ 4: Cho hình nón biết diện tích xung quanh bằng $400\pi \text{ cm}^2$, độ dài đường sinh bằng 25cm.

- Tính bán kính đáy.
- Tính diện tích toàn phần và thể tích.

Giải

$$a. S_{xq} = \pi R.l \Leftrightarrow R = \frac{S_{xq}}{\pi l} = \frac{400\pi}{\pi.25} = 16(\text{cm})$$

- Diện tích toàn phần hình chóp:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 400\pi + \pi(16)^2 = 656\pi(\text{cm}^2)$$

Trong $\triangle OSA$: $h^2 = l^2 - R^2 = 25^2 - 16^2 = 369$.

$$\Rightarrow h = 3\sqrt{41}(\text{cm})$$

Thể tích hình nón:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.(16)^2.3\sqrt{41} = 256\pi\sqrt{41}(\text{cm}^3).$$

Ví dụ 5: Cho hình nón cắt với hai bán kính đáy lần lượt là 6cm và 10 cm, đường sinh bằng 16cm.

- Tính diện tích xung quanh.
- Tính đường cao và thể tích hình nón cắt.

Giải

$$a. S_{xq} = \pi(R+r)l = \pi(10+6)16 = 256\pi(\text{cm}^2)$$

- Kẻ đường cao $A'H$ của hình thang vuông $OAA'O'$,
 $AH = AO - A'O' = 10 - 6 = 4(\text{cm})$

Trong tam giác vuông HAA' :

$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = 256 - 16 = 240$$

$$\Rightarrow OO' = A'H = 4\sqrt{15}(\text{cm})$$

Vậy: chiều cao hình nón cắt: $h = OO' = 4\sqrt{15}(\text{cm})$

$$\text{Thể tích hình nón cắt: } V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{784\pi\sqrt{15}}{3}(\text{cm}^3)$$

Ví dụ 6: Một cái xô dạng hình nón cắt có bán kính hai đáy là 19cm và 9cm, độ dài đường sinh l là 26cm. Trong xô đã chứa sẵn lượng nước có chiều cao 18cm so với đáy dưới.

- Tính chiều cao của cái xô.
- Hỏi phải đổ thêm bao nhiêu lít nước để đầy xô?

ABC

Đề TS lớp 10 THPTTP Huế 2007-2008

Giải

- a. Cắt hình nón cụt bởi mặt phẳng qua trục OO' , ta được hình thang cân $AA'B'B'$. Từ A hạ AH vuông góc với $A'B'$ tại H, ta có:
 $A'H' = O'A' - OA = 10$ (cm)

$$\text{Suy ra: } OO' = AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ (cm)}$$

- b. Mặt nước với mặt phẳng cắt có đường thẳng chung là IJ, IJ cắt AH tại K.
 Theo giả thiết ta có: $HK = AH - AK = 24 - 18 = 6$ (cm)

Bán kính đáy trên của khối nước trong xô là:

$$r_1 = O_1I = O_1K + KI = 9 + KI. \text{ Do } KI \parallel A'H \Rightarrow \frac{KI}{HA'} = \frac{AK}{AH}$$

$$\Rightarrow KI = 7,5 \Rightarrow r_1 = 16,5 \text{ (cm)}$$

Thể tích khối nước cần đổ thêm để đầy xô

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h (r^2 + rr_1 + r_1^2) = \frac{1}{3} \cdot 6 \pi (19^2 + 19 \cdot 16,5 + 16,5^2)$$

$$V \approx 5948,6 \text{ cm}^3 = 5,9486 \text{ dm}^3 \approx 5,9 \text{ lít.}$$

Ví dụ 7: Một chi tiết máy có dạng như hình vẽ:

- a. Tính diện tích mặt ngoài của chi tiết. b. Tính thể tích.

Giải

- a. Diện tích xung quanh hình trụ có đường kính đáy 0,2m; chiều cao 1m là:
 $2\pi(0,1)1 = 0,2\pi \text{ (m}^2\text{)}$

Hình nón có đường kính đáy 0,2m; chiều cao 0,2m có:

- Độ dài đường sinh:

$$l = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} = \sqrt{0,05}$$

- Diện tích xung quanh:

$$\pi(0,1)\sqrt{0,05} = 0,1\pi\sqrt{0,05} \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích cần tìm sẽ là:

$$S = 0,2\pi + 0,1\pi\sqrt{0,05} = 0,2\pi(1 + \sqrt{0,05}) \text{ (m}^2\text{)}$$

- b. Thể tích hình trụ ở câu a: $\pi \cdot (0,1)^2 \cdot 1 = 0,01\pi \text{ (m}^3\text{)}$

$$\text{Thể tích cần tìm sẽ là: } V = 0,01\pi + \frac{0,004\pi}{3} = \frac{0,034\pi}{3} \text{ (m}^3\text{)}$$

Ví dụ 8: Tính thể tích một cái thùng được biểu diễn như hình vẽ

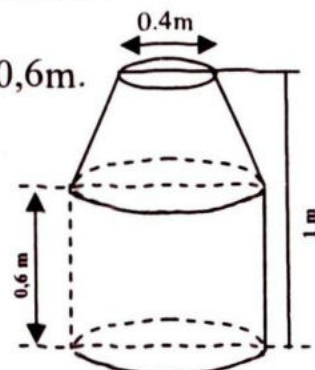
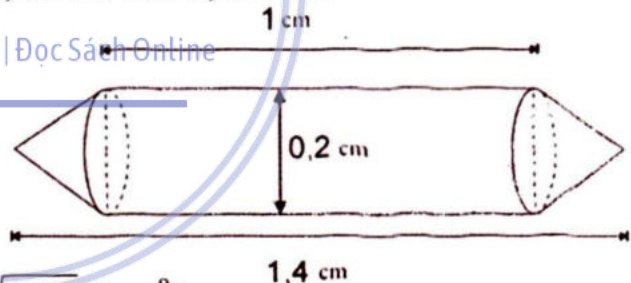
Giải

Thể tích hình trụ có đường kính đáy 0,6m; chiều cao 0,6m.

$$V_1 = \pi(0,3)^2 \cdot 0,6 = 0,054\pi \text{ (m}^3\text{)}$$

Thể tích hình nón cụt có các đường kính đáy 0,6m và 0,5m; chiều cao 0,4m.

$$V_2 = \frac{\pi(0,4)}{3} \cdot (0,09 + 0,04 + 0,06) = \frac{0,076\pi}{3} \text{ (m}^3\text{)}$$



Thể tích cái thùng là: $V = V_1 + V_2 = \frac{0,238\pi}{3} (\text{m}^3)$

Ví dụ 9: Tính diện tích toàn phần hình nón biết đường sinh có độ dài bằng l , phần mặt phẳng qua trục hình nón giới hạn bên trong hình nón là một miền tam giác đều.

Giải

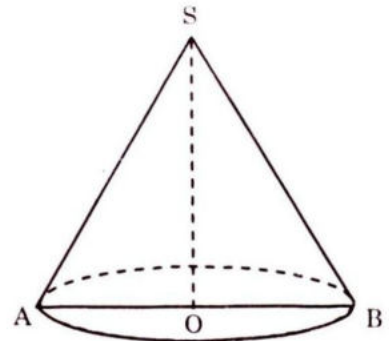
Theo đề bài, tam giác SAB là tam giác đều có cạnh bằng l .

Do đó: bán kính đáy hình nón:

$$R = OA = \frac{SA}{2} = \frac{l}{2}.$$

Diện tích toàn phần hình nón:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi Rl + \pi R^2 = \frac{\pi l^2}{2} + \frac{\pi l^2}{4} = \frac{3\pi l^2}{4}$$



Ví dụ 10: Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích các hình tròn xoay tạo ra bởi tam giác quay quanh cạnh huyền và các cạnh góc vuông. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}.$$



Giả sử ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH của tam giác. Ta có: Thể tích hình nón sinh ra khi ΔABC quay quanh trục AC:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi AB^2 \cdot AC$$

Thể tích hình nón sinh ra khi ΔABC quay quanh trục AB:

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi AC^2 \cdot AB.$$

Thể tích hình sinh ra khi ΔABC quay quanh trục BC gồm thể tích hai hình nón có bán kính đáy bằng AH; chiều cao là BH, CH.

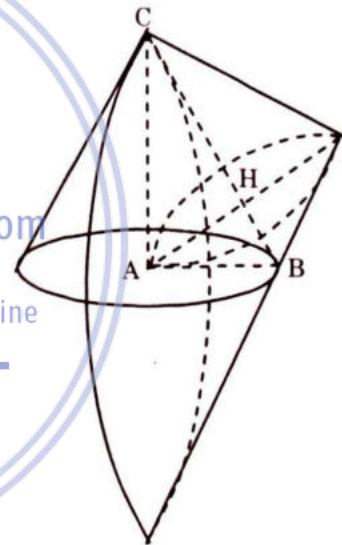
$$V = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot CH = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC.$$

Như vậy:

$$\frac{1}{V^2} = \frac{9}{\pi^2 AH^4 \cdot BC^2} = \frac{9}{\pi^2 AH^2 AH^2 \cdot BC^2} = \frac{9}{\pi^2 AH^2 AB^2 AC^2}$$

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{9}{\pi^2 \cdot AB^4 \cdot AC^2} + \frac{9}{\pi^2 AC^4 \cdot AB^2}$$

$$= \frac{9}{\pi^2 AB^2 AC^2} \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \right) = \frac{9}{\pi^2 AH^2 \cdot AB^2 \cdot AC^2}.$$



ABC

(Do các hệ thức trong tam giác vuông: $AH \cdot BC = AB \cdot AC$; $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$).

$$\text{Vậy: } \frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$$

Ví dụ 11: Trong một hình nón, tìm góc lớn nhất tạo bởi hai đường sinh của nó.

Giải

Xét $\triangle MAB$ nội tiếp đường tròn đường kính AB với AB là đường kính đáy hình nón.

Gọi I là trung điểm dây cung MA .

$\triangle IAO$ vuông tại $I \Rightarrow OA > OI$.

Lấy điểm J trên đoạn OA để $OI = OJ$.

Ta có: $\triangle OIS = \triangle OJS$

$$\Rightarrow \widehat{OSI} = \widehat{OSJ}$$

$$\Rightarrow \widehat{OSI} < \widehat{OSA}$$

$\Rightarrow \widehat{MSA} = \widehat{BSA}$ (các tam giác SAB, SAM cân tại S). Như vậy: góc lớn nhất tạo bởi hai đường sinh hình nón là $\widehat{ASB}$ trong đó AB là đường kính của đáy.

Ví dụ 12: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính R , chiều cao hình nón là $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. AB là một dây của đáy sao cho khoảng cách giữa

O và mặt phẳng (SAB) là $\frac{R\sqrt{3}}{4}$. Tính độ dài dây AB .

Giải

* gọi I là trung điểm của AB và OH là đường cao $\triangle OSI$.

$$\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$$

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp SI \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB).$$

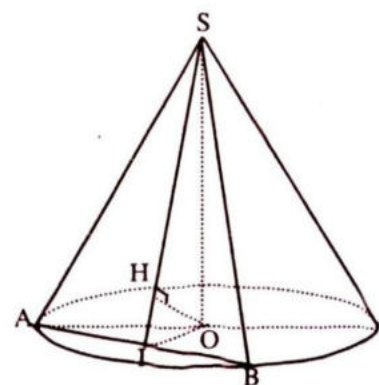
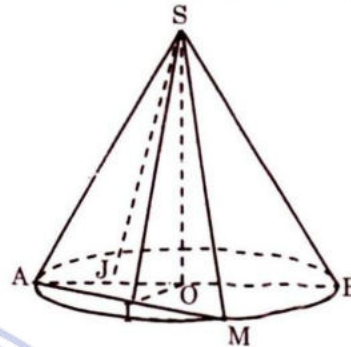
$$\text{Do đó: } OH = \frac{R\sqrt{3}}{4}$$

$$* \triangle OSI \text{ vuông tại } O: \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{16}{3R^2} - \frac{4}{3R^2} = \frac{4}{R^2} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}.$$

$$* \triangle IAO \text{ vuông tại } O: IA^2 = AO^2 - OI^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow IA = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Như vậy: $AB = R\sqrt{3}$.



Ví dụ 13: Tính thể tích hình nón biết hình chóp tam giác đều có cùng đỉnh với hình nón, đáy là tam giác đều nội tiếp đáy hình nón có thể tích là V.

Giải

Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy, chiều cao hình nón, a là cạnh đáy hình chóp tam giác đều ABC.

* Đường cao hình chóp đều cũng bằng h.

* Trong tam giác vuông HAB:

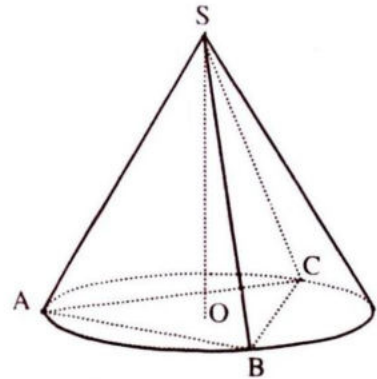
$$AH = \frac{3}{2}AO = \frac{3R}{2}; AB = 2BH$$

$$\text{Do đó: } a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9R^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = 3R^2.$$

Theo đề bài thể tích hình chóp là V nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{(ABC)} \cdot SO = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{a^2 h \sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Suy ra: thể tích hình nón là: } V_n = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{3} \cdot h = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{12V}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi V}{3\sqrt{3}}$$



Ví dụ 14: Cho hình nón đỉnh S bán kính đáy R, góc lớn nhất tạo bởi hai đường sinh là 60° ; xét hình chóp đều SABC với ABC là tam giác đều ngoại tiếp đáy hình nón.

a. Tính thể tích và diện tích toàn phần hình chóp.

b. $M_p(P)$ song song với $m_p(ABC)$ chia hình chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích hình tròn nằm trên (P) giới hạn bởi hình nón.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Giải

a. Ta có góc của 2 đường sinh hình nón lớn nhất khi mặt phẳng chứa 2 đường sinh đi qua trục: $\Leftrightarrow 2R = l; h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$; ΔABC đều ngoại tiếp

hình tròn đáy hình nón nên các tiếp điểm M, N, P lần lượt là trung điểm AB, BC, CA. ΔMOA vuông tại M, $MO = R$, $OA = 2MO = 2R$ nên

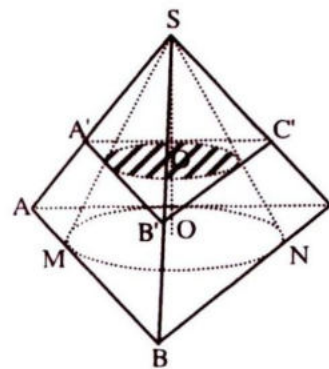
$$AM = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2R\sqrt{3}.$$

Do đó: thể tích hình chóp:

$$V = \frac{1}{3}S_{(ABC)} \cdot SO = \frac{1}{3} \frac{(2R\sqrt{3})^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot R\sqrt{3} = 3R^3$$

Diện tích toàn phần hình chóp:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + S_d = \frac{1}{2} \cdot 3AB \cdot SM + \frac{AB^2 \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2R\sqrt{3} \cdot 2R + \frac{(2R\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 9R^2 \sqrt{3} \end{aligned}$$



ABC

- b. Nếu (P) cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' thì: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$
theo tỉ số đồng dạng: $k = \frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO}$.

$$\text{Do đó: } \frac{V_{(SA'B'C')}}{V_{(SABC)}} = \frac{S_{(A'B'C')}}{S_{(ABC)}} \cdot \frac{SO'}{SO} = k^2 \cdot k = k^3.$$

$$\text{Như vậy: } \frac{1}{2} = k^3 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Gọi } r \text{ là bán kính hình tròn cần tìm, ta có: } \frac{r}{R} = k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow r = R\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Diện tích hình tròn phải tìm: } S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(R\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{\pi \cdot R^2 \sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ 15: Cho hình nón có đỉnh S, bán kính đáy là R và đường cao bằng h. Mặt phẳng (P) song song với đáy hình nón đi qua trung điểm đường cao chia hình nón làm hai phần. Tính thể tích mỗi phần đó.

Giải
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đáy hình nón và (SOA) là mặt phẳng chứa đường cao và một đường sinh:
O' là trung điểm SO.

$$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ (SOA) \cap (Q) = OA \Rightarrow OA \parallel O'A' \\ (SOA) \cap (P) = O'A' \end{cases}$$

$\Rightarrow O'A'$ là đường trung bình của ΔSOA .

Mặt phẳng (P) chia hình nón lớn thành 2 phần:

Một là hình nón nhỏ đỉnh S đáy là hình tròn có

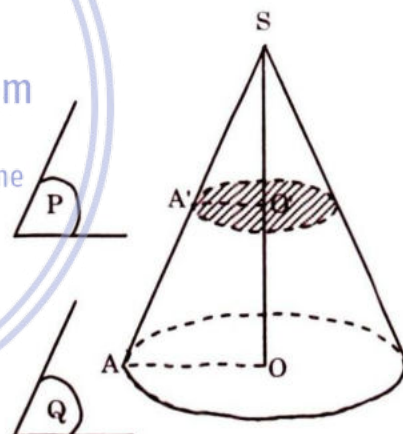
$$\text{bán kính } O'A' = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2};$$

$$\text{chiều cao } SO' = \frac{SO}{2} = \frac{h}{2}.$$

Một là hình chóp cụt có các bán kính đáy là R và $\frac{R}{2}$; chiều cao $\frac{h}{2}$. Do

$$\text{đó thể tích hình nón nhỏ: } V_1 = \frac{1}{3} \pi O'A'^2 \cdot SO' = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{\pi R^2 h}{24}.$$

$$\begin{aligned} \text{Thể tích hình nón cụt: } V_2 &= \frac{\pi \cdot OO'}{3} (OA^2 + O'A^2 + OA \cdot O'A') \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h}{2} \left(R^2 + \frac{R^2}{4} + R \cdot \frac{R}{2} \right) = \frac{7\pi R^2 h}{24}. \end{aligned}$$



Ví dụ 16: Cho hình nón cắt có bán kính đáy lớn gấp hai bán kính đáy nhỏ phần Mp (P) chứa hai đường sinh và đi qua trục hình nón cắt giới hạn bởi hình nón cắt là một hình thang cân có hai đường chéo vuông góc. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình nón cắt biết chiều cao là h.

Giải

Gọi AA', BB' là 2 đường sinh của hình nón cắt chứa trong (P). Tứ giác ABB'A' là hình thang cân có hai đường chéo cắt nhau và vuông góc tại I. Đặt AB = 2x. ΔIAB vuông cân tại I nên:

$$OI = \frac{AB}{2} = x; AI = x\sqrt{2}.$$

ΔIA'B' vuông cân tại I nên:

$$O'I = \frac{A'B'}{2} = \frac{x}{2}; A'I = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Theo đề bài:

$$x + \frac{x}{2} = h \Leftrightarrow x = \frac{2h}{3}; \Delta IAA' \text{ vuông tại I:}$$

$$AA'^2 = AI^2 + IA'^2 = \left(\frac{2h\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{h\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{10h^2}{9} \Rightarrow AA' = \frac{h\sqrt{10}}{3}.$$

Do đó thể tích hình nón cắt:

$$V = \frac{\pi OO'}{3} (OA^2 + OA'^2 + OA \cdot OA') = \frac{\pi}{3} h \left(\frac{4h^2}{9} + \frac{h^2}{9} + \frac{2h^2}{9} \right) = \frac{7\pi h^2}{27}.$$

Diện tích xung quanh hình nón cắt:

$$S_{xq} = \pi(OA + OA')AA' = \pi \left(\frac{2h}{3} + \frac{h}{3} \right) \cdot \frac{h\sqrt{10}}{3} = \frac{\pi h^2 \sqrt{10}}{3}.$$

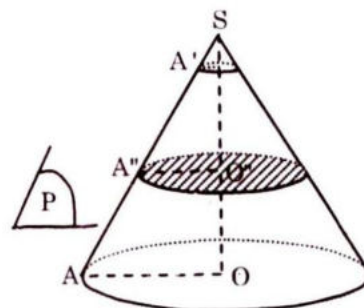
Ví dụ 17: Cho hình nón cắt có các bán kính là R và r (R > r). Một mặt phẳng song song với đáy hình nón cắt chia hình nón cắt ra hai phần có thể tích bằng nhau. Tính bán kính của hình tròn là phần của mặt phẳng (P) giới hạn bởi hình nón cắt.

Giải

Gọi x là bán kính đường tròn cần tìm. Xét hình nón đỉnh S sinh ra hình nón cắt. Lí luận như ở bài toán trên, ta có thể suy ra như sau: Nếu gọi V là thể tích hình nón đáy tâm O. V₁ là thể tích hình nón đáy tâm O'; V₂ là thể tích hình nón đáy tâm O''

$$\text{Thì: } \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3} \pi \cdot O'A'^2 \cdot SO'}{\frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO} = \frac{r^3}{R^3}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{V_2}{V} = \frac{x^3}{R^3}.$$



Do đó:

$$\frac{V - V_1}{V} = \frac{R^3 - r^3}{R^3} \Rightarrow V - V_1 = \frac{R^3 - r^3}{R^3} V; \frac{V - V_2}{V} = \frac{R^3 - r^3}{R^3}.$$

$$\Rightarrow V - V_2 = \frac{R^3 - r^3}{R^3} V.$$

Theo đề bài: $V - V_1 = 2(V - V_2) \Leftrightarrow \frac{R^3 - r^3}{R^3} \cdot V = 2 \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^3} \cdot V \Leftrightarrow r^3 = \frac{R^3 + r^3}{R^3}.$

Vậy: $x = \sqrt{\frac{R^3 + r^3}{2}}$

Dạng 5: Hình cầu

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC có cạnh AB = 10cm và đường cao AH. Tìm thể tích hai hình cầu tạo thành khi quay nửa hình tròn nội tiếp và nửa hình tròn ngoại tiếp tam giác một vòng quanh AH.

Giải

ΔHAB vuông tại H:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 100 - 25 = 75 \Leftrightarrow AH = 5\sqrt{3}(\text{cm}). \text{ Bán kính hình tròn}$$

ngoại tiếp tam giác: $R = OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$

Bán kính hình tròn nội tiếp tam giác: $r = OH = \frac{AH}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$

Do đó: thể tích hình cầu lớn tạo thành

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{10\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{4000\pi\sqrt{3}}{27}(\text{cm}^3).$$

Thể tích hình cầu nhỏ được tạo thành: $V_2 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{500\pi\sqrt{3}}{27}(\text{cm}^3)$

Ví dụ 2: Cho nửa hình tròn đường kính DE và tam giác ABC vuông tại A. Biết AB = 6cm, AC = 8cm và DB = CE = 1cm (hình)

Khi cho toàn bộ hình vẽ quay một vòng quanh DE thì nửa hình tròn tạo thành hình (S_1) và tam giác ABC tạo thành hình (S_2) . Hãy mô tả các hình (S_1) và (S_2) . Tính thể tích phần của hình (S_1) nằm bên ngoài hình (S_2) .

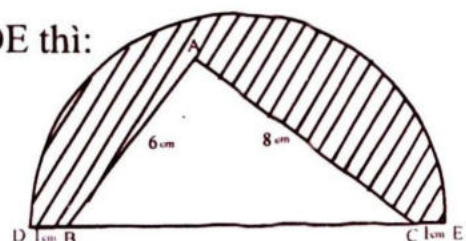
Đề TS lớp 10 THPT TP Huế 2008 -2009

Giải

+ Vẽ đường cao AH của tam giác ABC.

Khi quay toàn bộ hình vẽ một vòng quanh DE thì:

- Nửa hình tròn tạo thành một hình cầu đường kính DE = 2R.



ABC
270

- Hai tam giác vuông AHB và AHC tạo thành 2 hình nón có chung đáy là hình tròn tâm H, bán kính $r = HA$ và 2 đỉnh là B và C. Trong tam giác vuông ABC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10\text{cm}$,

$$BC \cdot AH = AB \cdot AC \Rightarrow r = AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 4,8\text{cm}.$$

Ta có: $DE = DB + BC + CE = 12\text{cm}$, suy ra bán kính hình cầu: $R = 6\text{cm}$.

+ Thể tích hình cầu đường kính DE:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi \cdot 6^3}{3} = 288\pi (\text{cm}^3) (\approx 16,283\text{cm}^3)$$

+ Tổng thể tích của hai hình nón:

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot HB + \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot HC = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot BC = 76,8\pi (\text{cm}^3) (\approx 251,274\text{cm}^3)$$

+ Vậy thể tích phần của hình (S1) nằm bên ngoài hình (S2) là:

$$V = V_1 - V_2 = 288\pi - 76,8\pi = 211,2\pi (\text{cm}^3) (\approx 663,504\text{cm}^3).$$

Ví dụ 3:

- Tính diện tích mặt ngoài và thể tích hòn bi thép có đường kính 1 cm.
- Tính diện tích da để làm một quả bóng đá có đường kính 20 cm (không kể số da dùng cho các chỗ ghép uốn).

Giải

- Diện tích mặt ngoài viên bi:

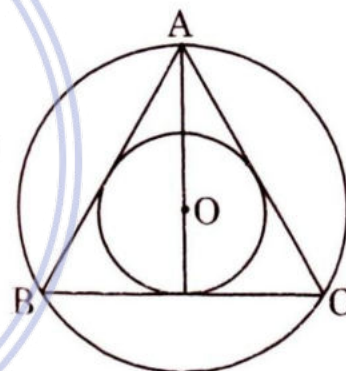
$$S = 4\pi R^2 = 4\pi (\text{cm}^2)$$

* Thể tích hòn bi thép:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi}{3} (\text{cm}^3).$$

- Diện tích da cần làm quả bóng không cần kể các chỗ ghén nối:

$$S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi (20)^2 = 1600\pi (\text{cm}^2).$$



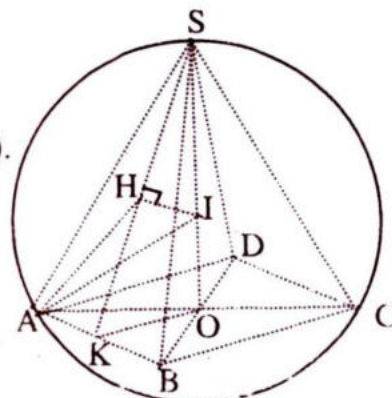
Ví dụ 4: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy là a, chiều cao

$$SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

- Tìm tâm và bán kính mặt cầu (S) qua các điểm S, A, B, C, D.
- Tính thể tích hình cầu ở ngoài hình chóp.

Giải

- Gọi I là tâm và R là bán kính mặt cầu (S).
O' là hình chiếu vuông góc của I trên (ABCD).
Do $IA = IB = IC = ID$ nên các tam giác vuông $O'IA, O'IB, O'IC, O'ID$ bằng nhau.
 $\Rightarrow O'A = O'B = O'C = O'D$
 $\Rightarrow O'$ là tâm của hình vuông ABCD.



ABC

$\Rightarrow O' \equiv O$. Như vậy: I thuộc đường thẳng SO. Ngoài ra: $IS = IA$ nên trong mặt phẳng (SOA) I chính là giao điểm của đường trung trực của đoạn SA và đường thẳng SO. Nếu J là trung điểm của đoạn SA thì: Trong $\triangle OSA$ vuông tại O, ta có: $SA^2 = SO^2 + OA^2 = \frac{6a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Ngoài ra: $SIJ \sim SAO$ nên: $\frac{SJ}{SO} = \frac{SI}{SA}$. Vậy, $R = \frac{2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{24\pi a^3 \sqrt{6}}{81}$$

b. Thể tích hình cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{8\pi\sqrt{6}}{27}a^3$

Thể tích hình chóp: $V_2 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Thể tích cần tìm: $V = V_1 - V_2 = \left(\frac{8\pi\sqrt{6}}{27} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)a^3 = \frac{\sqrt{6}(16\pi - 9)}{54}a^3$

Ví dụ 5: Cho mặt cầu đường kính $SS' = 2R$. Gọi H là điểm trên đoạn SS' sao cho $HS = 2HS'$. Mặt phẳng (P) qua H vuông góc SS' cắt mặt cầu theo một đường tròn (C). ABC là một tam giác đều nội tiếp với (C).

a. Chứng minh SABC là tứ diện đều. Tính thể tích V của tứ diện đó.

b. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S', đáy là hình tròn (C). Chứng minh các đường sinh $S'A, S'B, S'C$ đôi một vuông góc.

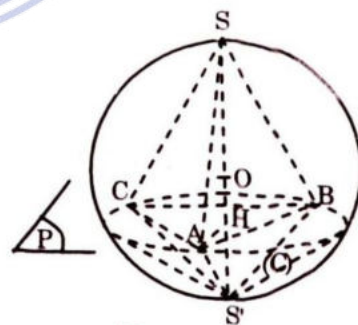
Giải

a. Để ý rằng A nhìn đường kính SS' của mặt cầu nên $\triangle ASS'$ vuông tại A. Ngoài ra: $SS' \perp (P) \Rightarrow SS' \perp AH$.

Trong $\triangle ASS'$: $HS = \frac{4R}{3}; HS' = \frac{2R}{3}$.

Và $SA^2 = SH \cdot SS' = \frac{4R}{3} \cdot 2R = \frac{8R^2}{3}$

$$\Rightarrow SA = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$



$\triangle ABC$ đều nội tiếp đường tròn đường kính $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$ thì nếu CK là đường

cao, ta có: $AK^2 = AH^2 - HK^2 = AH^2 - \frac{AH^2}{4} = \frac{8R^2}{9} - \frac{2R^2}{9} = \frac{6R^2}{9}$

Do đó: $AK = \frac{R\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AB = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

ABC

Như vậy có thể thấy được: $SA = SB = SC = AB = BC = CA = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

Suy ra: tứ diện SABC đều. Thể tích tứ diện này:

$$V = \frac{1}{3} S_{(ABC)} \cdot SH = \frac{1}{3} \left(\frac{2R\sqrt{6}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4R}{3} = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$$

b. Cũng trong $\Delta ASS'$: $S'A^2 = S'H \cdot S'C = \frac{2R}{3} \cdot 2R = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow S'A = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Do đó diện tích xung quanh hình nón đỉnh S'':

$$S_{xq} = \pi \cdot AH \cdot S'A = \pi \cdot \frac{2R\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi R^2\sqrt{6}}{9}$$

Trong tam giác S'AB với:

$$S'A = S'B = \frac{2R\sqrt{3}}{3}; AB = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{thì } AB^2 = \frac{24R^2}{9} = \frac{12R^2}{9} + \frac{12R^2}{9} = S'A^2 + S'B^2.$$

$\Delta S'AB$ vuông cân tại S'.

Tương tự: $\Delta S'BC$, $\Delta S'CA$ vuông cân tại S. Suy ra: các đường sinh S'A, S'B, S'C của hình nón đỉnh S' đôi một vuông góc nhau.

Ví dụ 6: Có 15 quả bi-a hình cầu đặt nằm trên mặt bàn, sao cho chúng được dồn khít trong một khung hình tam giác đều có chu vi bằng 858 mm. Tính bán kính của mỗi quả bi-a.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Giải

Gọi r là bán kính của mỗi quả bi-a. Cạnh của tam giác đều ABC bằng $858 : 3 = 286$ (mm).

Xét ΔOBH vuông tại H, ta có:

$$BH = OH \tan 60^\circ = r\sqrt{3}.$$

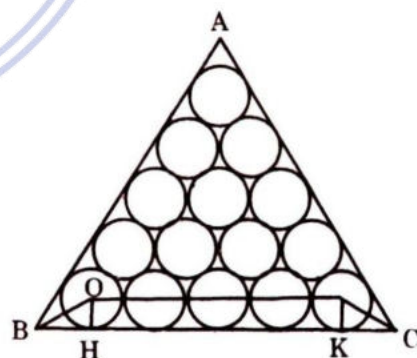
Ta có:

$$BC = BH + HK + KC.$$

$$= r\sqrt{3} + 8r + r\sqrt{3} = 2(4 + \sqrt{3})r.$$

Do đó:

$$r = \frac{286}{2(4 + \sqrt{3})} = \frac{143(4 - \sqrt{3})}{13} = 11(4 - \sqrt{3}) = 25 \text{ (mm)}$$



Ví dụ 7: Một thùng sắt đáy kín thùng lập phương. Biết rằng trong thùng chứa 9 khối có dạng hình cầu cùng bán kính, làm bằng chất liệu rất rắn.

Chứng minh rằng nếu cạnh của thùng hình lập phương là a thì đường kính của các khối cầu bên trong nó nhỏ hơn hoặc bằng $(2\sqrt{3} - 3)a$.

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2006-2007

ABC

Giải:

Gọi O là tâm hình lập phương (L) đang xét. Dựng hình lập phương (L_1) có cùng tâm O , có cạnh song song với cạnh của (L) và có độ dài cạnh là $a - 2r$, với r là bán kính của hình cầu. Chín tâm của 9 hình cầu đều nằm trong (L_1) (hoặc ở trên mặt). Chia (L_1) thành 8 hình lập phương con bởi ba mặt phẳng qua O và song song với mặt của (L_1).

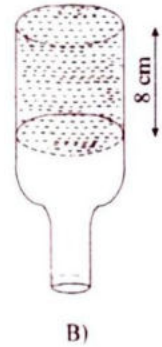
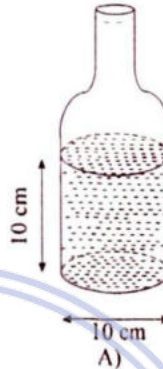
Phải có một hình lập phương con (L_2) trong chúng chứa ít nhất 2 tâm hình cầu. Đường chéo của hình lập phương con (L_2) là:

$$\frac{1}{2}(a - 2r)\sqrt{3}$$

Khoảng cách hai tâm hình cầu lớn hơn hoặc bằng $2r$.

$$\text{Vì vậy } \frac{1}{2}(a - 2r)\sqrt{3} \geq 2r$$

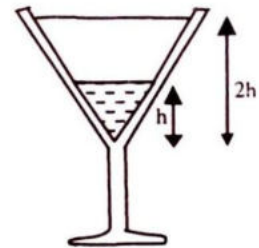
$$\text{hay } 2r \leq \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (2\sqrt{3} - 3)a$$

**Bài tập vận dụng**

- Một chai có phía dưới là hình trụ chứa một lượng nước có chiều cao 10cm như ở hình bên. Người ta lật ngược chai lại thì phần chia không chứa nước là một hình trụ có chiều cao 8cm. Tính thể tích của chai, biết rằng đường kính của đáy chai bằng 10.
- Có ba vật hình trụ bằng chì, bằng sắt, bằng nhôm có cùng khối lượng bằng 2kg và cùng có đường kính đáy bằng 10. Tính chiều cao của mỗi vật, biết rằng khối lượng riêng của chì là $11,3 \text{ kg/dm}^3$, khối lượng riêng của sắt là $7,8 \text{ kg/dm}^3$, khối lượng riêng của nhôm là $2,7 \text{ kg/dm}^3$.
- Một băng giấy dài được cuộn chặt lại 60 vòng làm thành một cuộn giấy hình trụ rỗng. Biết đường kính của đường tròn trong cùng bằng 2cm, đường kính của đường tròn ngoài cùng bằng 6cm. Tính chiều dài của băng giấy (làm tròn đến 0,1).
- Người ta cần cưa một thân cây hình trụ có đường kính đáy bằng d để được một khúc gỗ hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất. Tính các kích thước của khúc gỗ hình hộp chữ nhật.
- Chú kiến và giọt mật. Một chú kiến ở vị trí A trên mặt ngoài của một lọ thủy tinh hình trụ (không có nắp), nhìn thấy một giọt mật ở thẳng trước mặt tại vị trí B. Biết A cách miệng lọ 5cm, B cách miệng lọ 2cm và độ dài của đường tròn miệng lọ bằng 48cm. Tính độ dài ngắn nhất để chú kiến bò được tới chỗ giọt mật.
- Chứng minh rằng trong các hình trụ có cùng thể tích, hình trụ có đường cao bằng đường kính của đáy là hình có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

7. Cho tam giác OBC vuông tại O . Nếu quay tam giác đó quanh cạnh OB cố định thì được một hình nón có thể tích 800π , còn nếu quay tam giác đó quanh cạnh OC cố định thì được một hình nón có thể tích 1920π . Tính các độ dài OB, OC .

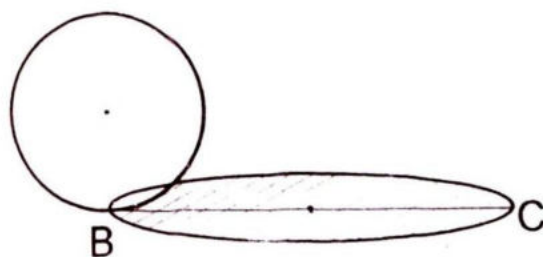
8. Ông An đã uống ở một cốc có dạng hình nón. Chiều cao phần rượu còn lại bằng nửa chiều cao rượu lúc đầu. Ông An đã uống bao nhiêu phần cốc rượu?



9. Một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O , đường kính AB , $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Qua trung điểm I của SO , kẻ đường thẳng song song với AB , cắt mặt xung quanh của hình nón ở C và D . Tính thể tích hình nón biết $CD = 6\text{cm}$.
10. Một hình nón có chiều cao h . Hai đường sinh vuông góc với nhau chia mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có tỉ số diện tích là $1 : 2$. Tính thể tích hình nón.
11. Tam giác ABC có $BC = a$, chiều cao tương ứng bằng h . Tính thể tích hình tạo thành khi quay tam giác một vòng quanh cạnh BC .
12. Hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$, các tia phân giác của các góc C và D gặp nhau tại trung điểm của AB . Biết $AB = 8\text{cm}$, diện tích hình thang bằng 40cm^2 . Tính diện tích mặt xung quanh của hình nón cụt do cạnh CD tạo thành khi quay hình thang một vòng quanh trục AB .
13. Tính số đo của cung AB của một hình quạt tâm O bán kính R để khi cuộn hình quạt lại, ta được một hình nón có thể tích lớn nhất. Hướng dẫn: gọi r là bán kính của đường tròn đáy của hình nón. Trước hết, hãy tính tỉ số $\frac{r}{R}$ để hình nón có thể tích lớn nhất.

14. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi S là điểm đối xứng của O qua A , d là đường thẳng qua S vuông góc (P) và T là điểm thuộc d sao cho $ST = 2R$.
- Tìm tâm I của mặt cầu (S) đi qua T và chứa (C) .
 - Tính độ dài đoạn OI và thể tích hình cầu
15. Một quả bóng hình cầu bán kính 13cm , nổi trên mặt hồ, đỉnh của quả bóng cao hơn mặt hồ 18cm . Tính độ dài của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng và mặt hồ.

16. Một quả bóng hình cầu đặt trên mặt đất có bóng của nó như hình vẽ. Trong đó độ dài lớn nhất của bóng là $BC = 1\text{m}$. Biết một cột cao 1m lúc đó có bóng dài 2m . Tính bán kính của quả bóng.



17. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$, đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho.
18. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông. Hình trụ T ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính diện tích toàn phần của T .
19. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 3a$, đáy ABC là tam giác vuông góc A với $AB = 3a$, $AC = 4a$. Hình trụ T nội tiếp $ABC.A'B'C'$ (T có hai đáy lần lượt là hai hình tròn nội tiếp tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$). Tính thể tích của khối trụ T .
20. Cho hình nón N có chiều cao bằng $2h\sqrt{3}$ và góc ở đỉnh bằng 60° . Tính diện tích xung quanh của hình nón N .

Hướng dẫn và đáp số

1. Thể tích chai bằng tổng các thể tích của khối nước hình trụ ở hình a và phần chia không chứa nước ở hình b.

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 + \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 25\pi(10 + 8) = 450\pi (\text{cm}^3)$$

2. Thể tích của các khối chì, sắt, nhôm theo thứ tự bằng:

$$V_1 = \frac{2}{11,3} (\text{dm}^3); V_2 = \frac{2}{7,8} (\text{dm}^3); V_3 = \frac{2}{2,7} (\text{dm}^3)$$

Chiều cao của các khối chì, sắt, nhôm theo thứ tự bằng:

$$h_1 = \frac{2}{11,3 \cdot \pi \cdot 0,5^2} = 0,23 \text{ dm} = 2,3 \text{ cm}$$

$$h_2 = \frac{2}{7,8 \cdot \pi \cdot 0,5^2} = 0,33 \text{ dm} = 3,3 \text{ cm}; h_3 = \frac{2}{2,7 \cdot \pi \cdot 0,5^2} = 0,94 \text{ dm} = 9,4 \text{ cm}.$$

3. Gọi l là chiều dài của băng giấy, chiều dài đó bằng tổng độ dài của 60 đường tròn có bán kính $r_1, r_2, \dots, r_{60}$, trong đó $r_1 = 1 \text{ cm}; r_{60} = 3 \text{ cm}$.

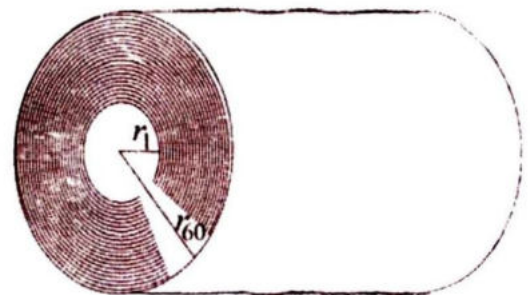
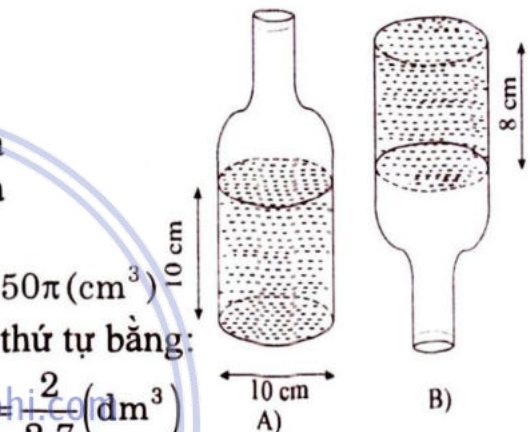
Ta có: $l = 2\pi(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{60})$

Gọi d là độ dày của tờ giấy thì $r_2 = r_1 + d, r_3 = r_2 + d, \dots, r_{60} = r_{59} + d$.

Do đó $r_1 + r_{60} = r_2 + r_{59} = r_3 + r_{58} = \dots = r_{30} + r_{31} = 4 \text{ cm}$

Vậy $l = 2\pi \cdot 30 \cdot 4 = 240\pi (\text{cm}) \approx 7,5 \text{ m}$.

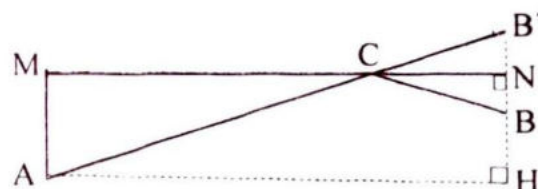
4. Hãy chứng minh rằng trong các hình chữ nhật nội tiếp của đường tròn cho trước, hình vuông có diện tích lớn nhất. Từ đó nếu đáy của khúc gỗ là một hình vuông có đường chéo bằng d thì khúc gỗ có thể tích lớn nhất.



ABC

5. Giả thiết rằng lọ thủy tinh làm “bằng bìa”, ta trải mặt xung quanh của lọ thành một hình chữ nhật có chiều dài bằng độ dài của đường tròn miệng lọ (48cm). Gọi AM, BN là các đường vuông góc kẻ từ A, B đến miệng lọ thì MN = 24cm.

Chủ kiến muốn tới B ở phía trong lọ phải vượt qua miệng lọ, tức là phải đi từ A tới MN, rồi tới B. Như vậy, chủ phải “giải” bài toán: “tìm điểm C trên MN sao cho AC + CB ngắn nhất”. Dễ dàng tính được



$$AC + CB = AC + CB' = AB' = 25\text{cm}.$$

6. Gọi S là diện tích toàn phần, r là bán kính của đáy, h là đường cao của hình trụ. Ta có: $S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi(rh + r^2)$. S nhỏ nhất khi và chỉ khi $rh + r^2$ nhỏ nhất. Gọi V là thể tích của hình trụ (V là hằng số), ta có

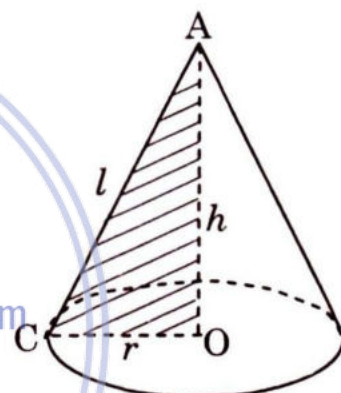
$$V = \pi r^2 h \text{ nên } rh + r^2 = \frac{V}{\pi r} + r^2 = \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r} + r^2$$

Theo bất đẳng thức côsi, ba số dương

$$\frac{V}{2\pi r}; \frac{V}{2\pi r}; r^2 \text{ có tích không đổi (bằng } \frac{V^2}{4\pi^2}) \text{ nên}$$

tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi ba số ấy bằng nhau, tức là:

$$\frac{V}{2\pi r} = t^2 \Leftrightarrow \frac{rh}{2} = r^2 \Leftrightarrow h = 2r.$$



7. Thể tích hình nón khi quay tam giác quanh OB:

$$\frac{1}{3} \pi OC^2 \cdot OB = 800\pi \quad (1)$$

Thể tích hình nón khi quay tam giác quanh OC:

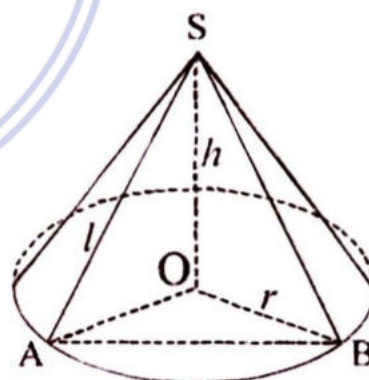
$$\frac{1}{3} \pi OB^2 \cdot OC = 1920\pi \quad (2).$$

Lấy (1) chia cho (2) được $\frac{OC}{OB} = \frac{5}{12}$,

Thay $OB = \frac{12}{5}OC$ vào (1) được $\frac{1}{3} \pi \cdot OC^2 \cdot \frac{1}{2} OC = 800\pi$.

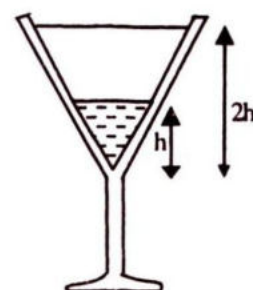
Suy ra $OC^3 = 1000$ nên $OC = 10$.

Do đó $OB = \frac{12}{5} \cdot 10 = 24$.



8. Đáp số: $\frac{7}{8}$.

9. Đáp số: $12\pi\sqrt{3}(\text{cm}^3)$.



ABC

- b. Kẻ IH vuông góc d tại điểm H. Đặt $OI = x$. Trong ΔOAI vuông tại O: $AI^2 = AO^2 + OI^2 = x^2 + R^2$

Trong hình thang vuông IOST và tam giác vuông HIT:

$$IT^2 = IH^2 + HT^2 = OS^2 + HT^2 = 4R^2 + (2R - x)^2 = x^2 - 4Rx + 8R^2$$

Nhưng IA, IT đều là bán kính mặt cầu (S) nên:

$$IA = IT \Leftrightarrow x^2 + R^2 = x^2 - 4Rx + 8R^2 \Leftrightarrow 4Rx = 7R^2 \Leftrightarrow x = \frac{7R}{4}$$

$$\text{Vậy } OI = \frac{7R}{4}.$$

$$\text{Theo trên: } AI^2 = x^2 + R^2 = \frac{49R^2}{16} + R^2 = \frac{65R^2}{16} \Rightarrow AI = \frac{R\sqrt{65}}{4}$$

$$\text{Thể tích hình cầu (S) là: } V = \frac{4}{3} \pi AI^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R\sqrt{65}}{4} \right)^3 = \frac{65\pi R^3 \sqrt{65}}{48}.$$

15. Gọi r là bán kính của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng và mặt hồ, ta tính được $r = 12$ cm. Đáp số 24π (cm).

16. Gọi R là bán kính của quả bóng, tia sáng tiếp xúc với đường tròn (O) tại E, A là giao điểm của BO và CE. Ta tính được: $AB = 0,5$ m; $AC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ m.

$\Delta AEO \sim \Delta ABC$ (g.g) nên $\frac{OA}{CA} = \frac{OE}{BC}$, từ đó tính được $R = \sqrt{5} - 2$ (m).

17. Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có:

- Hai đáy : hai đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác ABC và $A'B'C'$

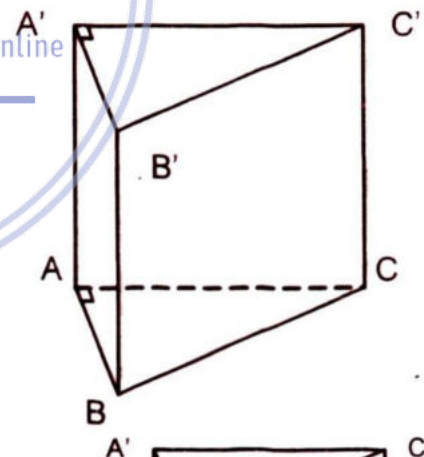
- Chiều cao: cạnh bên AA'

Vậy hình trụ nói trên có bán kính đáy là

$$R = \frac{BC}{2} = a\sqrt{3} \text{ và chiều cao } h = 2a$$

$\Rightarrow$ Thể tích của khối trụ là:

$$V = \pi R^2 h = \pi (a\sqrt{3})^2 \cdot 2a = 6\pi a^3$$



18. Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có:

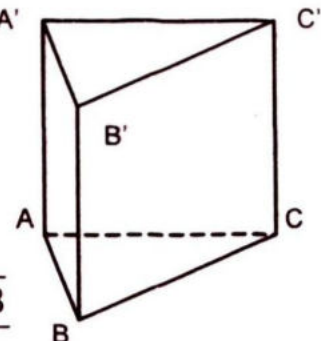
- Hai đáy là hai đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

- Chiều cao bằng cạnh bên.

Vậy hình trụ nói trên có:

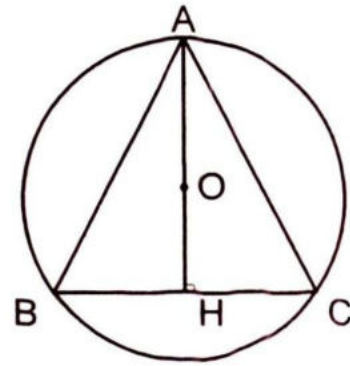
- Bán kính trụ đáy là $R = AO = \frac{2}{3} \cdot AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

- Chiều cao $h = AA' = a$ (Vì $AA'B'B$ là hình vuông có cạnh $AB = a$)



⇒ Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + 2S_{day} \\ &= 2\pi Rh + 2\pi R^2 \\ &= 2\pi \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a + 2\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= \frac{2\pi a^2}{3}(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$



19. Hình trụ T (nói ở đề bài) có: Bán kính r = bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chiều cao h = cạnh bên $AA' = 3a$

Tính r : Tam giác ABC vuông ở A

$$\begin{aligned} \Rightarrow BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ &= \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a \end{aligned}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 6a^2.$$

Nửa chu vi của tam giác ABC

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = 6a$$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = a$$

Thể tích khối trụ T là:

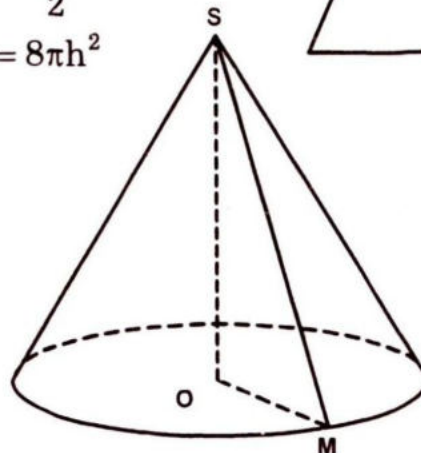
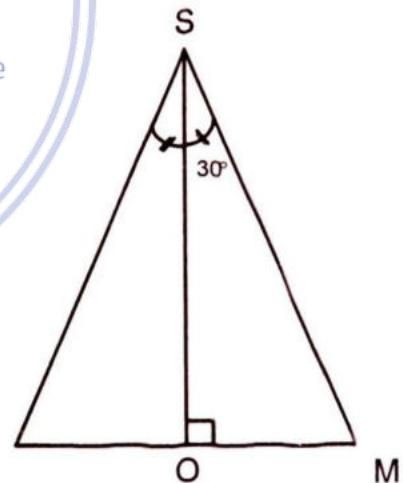
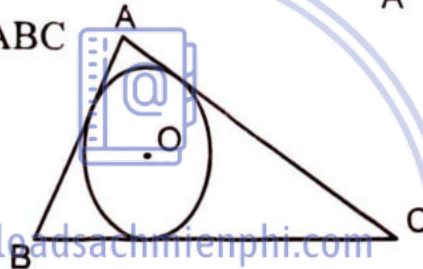
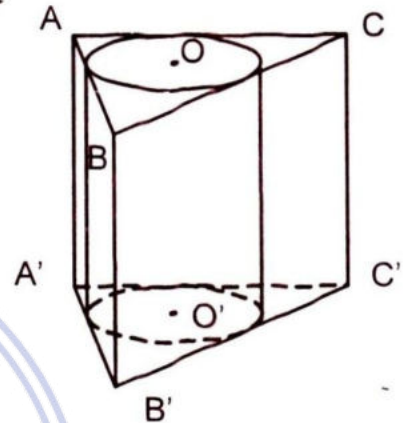
$$V = \pi r^2 h = \pi a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3$$

20. Hình nón N có chiều cao $SO = 2h\sqrt{3}$, bán

$$\text{kính đáy } OM = SO \cdot \tan 30^\circ = 2h\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2h$$

$$\text{và đường sinh } SM = \frac{SO}{\cos 30^\circ} = \frac{2h\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4h$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi \cdot OM \cdot SM = \pi \cdot 2h \cdot 4h = 8\pi h^2$$



Bài 1

9. Các bài toán bất đẳng thức – Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất.

Một số kiến thức cơ bản

1. Tính chất

Tính chất 1: $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$

Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c.$

Hệ quả: $a > b + c \Leftrightarrow a - c > b$ (chuyển về và đổi dấu)

Tính chất 3: $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

Chú ý: Không có quy tắc trừ hai vế của hai bất đẳng thức cùng chiều.

Tính chất 4: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc, & c > 0 \\ ac < bc, & c < 0 \end{cases}$

Tính chất 5: $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$

Chú ý: Không có quy tắc chia hai vế bất đẳng thức cùng chiều.

Tính chất 6: $a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Tính chất 7: $a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}.$

Tính chất 8: $a > b \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}.$

Hệ quả: * Nếu $a > 0$ và $b > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2.$

* Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2.$

2. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Từ định nghĩa ta có: $a \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$ Với $a > 0$

$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ hoặc $x > a.$ Với $a > 0$

$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

Định lý: (Bất đẳng thức Côsi) Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b.$

Hệ quả.

- Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.
- Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng đạt giá trị nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

Ý nghĩa hình học.

- a. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.
- b. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Các dạng bài tập cơ bản**Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức.****Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.****Các ví dụ minh họa****Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức****Ví dụ 1:** Với mỗi số k nguyên dương, đặt $S_k = (\sqrt{2} + 1)^k + (\sqrt{2} - 1)^k$

Chứng minh rằng: $S_{m+n} + S_{m-n} = S_m \cdot S_n$ với mọi m, n là số nguyên dương và $m > n$.

TS 10 THPT Bình Định, 2009-2010**Giải:**

Với mọi m, n là số nguyên dương và $m > n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } S_m \cdot S_n &= [(\sqrt{2} + 1)^m + (\sqrt{2} - 1)^m] \cdot [(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n] \\
 &= (\sqrt{2} + 1)^m (\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} + 1)^m (\sqrt{2} - 1)^n \\
 &\quad + (\sqrt{2} - 1)^m (\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^m (\sqrt{2} - 1)^n \\
 &= (\sqrt{2} + 1)^{m+n} + (\sqrt{2} - 1)^{m+n} + (\sqrt{2} + 1)^n (\sqrt{2} - 1)^n (\sqrt{2} + 1)^{m-n} \\
 &\quad + (\sqrt{2} - 1)^n (\sqrt{2} + 1)^n (\sqrt{2} - 1)^{m-n} \\
 &= (\sqrt{2} + 1)^{m+n} + (\sqrt{2} - 1)^{m+n} + 1 \cdot (\sqrt{2} + 1)^{m-n} + 1 \cdot (\sqrt{2} - 1)^{m-n} = S_{m+n} + S_{m-n}
 \end{aligned}$$

Vậy $S_{m+n} + S_{m-n} = S_m \cdot S_n$ với mọi m, n là số nguyên dương và $m > n$.

Ví dụ 2: Cho $a + b + c = 3$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$. (1)**TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2004-2005****Giải:**

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3 \Leftrightarrow 3(a^4 + b^4 + c^4) \geq 3(a^3 + b^3 + c^3) \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow 3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^3 - b^3) + (b - c)(b^3 - c^3) + (c - a)(c^3 - a^3) \geq 0 \quad (3)$$

Chúng ta được: $(x - y)(x^3 - y^3) = (x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$

$$= (x - y)^2 \left[\left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] \geq 0, \forall x, y \quad (*)$$

Từ (*) ta được (3) đúng nên (1) là đúng.

ABC

Ví dụ 3: a. Chứng minh: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$.

b. Chứng minh: $x^4 + y^4 \geq \frac{(x+y)^4}{8}$.

c. Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh $8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 5$

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM, 2002 – 2003

Giải:

a. **Cách 1:**
$$x^2 + y^2 = \frac{x^2 + y^2 + x^2 + y^2}{2} = \frac{(x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + y^2 - 2xy)}{2}$$
$$= \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2} \geq \frac{(x+y)^2}{2} \text{ vì } (x-y)^2 \geq 0$$

Cách 2:
$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$$
$$= 2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.$$

Do đó $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ là bất đẳng thức đúng.

b. Áp dụng câu a) ta có: $x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}$ (1)

Theo a) ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 \geq \left[\frac{(x+y)^2}{2} \right]^2$

Vậy $(x^2 + y^2)^2 \geq \frac{(x+y)^4}{4}$ (2). Từ (1) và (2) có: $x^4 + y^4 \geq \frac{(x+y)^4}{8}$

c. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \text{ mà } x + y = 1.$$

$$\text{Do đó: } 2\sqrt{xy} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \quad (3)$$

Theo câu b) có $x^4 + y^4 \geq \frac{(x+y)^4}{8}$ mà $x + y = 1$. Do đó: $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}$

Từ (3) và (4) ta có: $8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 8 \cdot \frac{1}{8} + 4 = 5.$

Ví dụ 4: Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Chứng minh: $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy} \geq 4$

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHGM, 2003 – 2004

ABC

Giải:

Bài toán phụ: Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Áp dụng

bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}$

Do đó:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Áp dụng bài toán phụ trên ta có:

$$\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy} \geq \frac{4}{x^2 + xy + y^2 + xy} = \frac{4}{(x+y)^2}.$$

$$\text{Mà } x, y > 0 \text{ và } x + y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x+y} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{(x+y)^2} \geq 1.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy} \geq 4.$$

Ví dụ 5: Cho 3 số dương $x; y; z$ thỏa mãn $x + y + z = 1$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{3}{xy + yz + zx} + \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} > 14$$

TS lớp 10 ĐHSPT Hải Phòng 2003 – 2004

Giải:

Từ $x + y + z = 1$ suy ra $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$

$$\frac{3}{xy + yz + zx} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) + 6(xy + yz + zx)}{xy + yz + zx} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + 6$$

$$\frac{2}{xy + yz + zx} = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2) + 4(xy + yz + zx)}{xy + yz + zx} = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{xy + yz + zx} + \frac{2}{xy + yz + zx} \\ & \geq 8 + 2\sqrt{\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} \cdot \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx}} = 8 + 2\sqrt{12} > 8 + 2\sqrt{9} = 14. \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Cho a, b, c , thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng $ab + bc + ca + a + b + c \leq 6$

TS lớp 10 Lê Khiết – Quảng Ngãi 2001 – 2002

Giải:

Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ac$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3 \quad (1)$$

Tương tự: $a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b; c^2 + 1 \geq 2c$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c) \Rightarrow a + b + c \leq 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $ab + bc + ca + a + b + c \leq 6$.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng: $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$ với mọi số nguyên dương m, n .

TS 10 Chuyên Lê quý Đôn Bình định, 2009-2010

Giải:

Trước hết, ta cần chứng minh $\left| \frac{1}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1).$

Vì $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{n^2} \quad (2). \text{ Đặt } t = \frac{1}{n} (0 < t \leq 1), \text{ ta có:}$$

$$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t^2 + t - \sqrt{2} \leq 0 (\forall t: 0 < t \leq 1) \quad (3). \text{ Biến đổi tương đương:}$$

$$(3) \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})t + (\sqrt{3} - \sqrt{2})t + t - \sqrt{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)t - \sqrt{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)t - (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)(t-1) + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0 \quad (\text{vì } 0 < t \leq 1 \text{ nên } t(t-1) \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} + 1 \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3} \leq 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$$

Bất đẳng thức đúng. Do đó bất đẳng thức (2) đúng.

$$\text{Vì } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \left| \frac{1}{n} - \sqrt{2} \right|, \forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ nên } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Nhận xét: Dấu “=” trong bất đẳng thức không xảy ra.

Ví dụ 8: Cho a, b, c, d là các số dương.

$$\text{Chứng minh: } 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Đề thi HSG lớp 9 TP HCM 2007-2008

Giải:

Với a, b, c, d là các số dương, ta có:

$$\frac{a}{a-b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}, \frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d}, \frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d}{d-a+b} > \frac{d}{a+b+c+d}.$$

ABC

Cộng bốn 4 bất đẳng thức trên ta được:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}.$$

Ta lại có: $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c},$

$$\frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c} \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} + \frac{c}{c+d+a} < 1. \text{ Và } \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d},$$

$$\frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b} \Rightarrow \frac{b}{b+c+d} + \frac{d}{d+a+b} < 1. \text{ Từ đó ta có dpcm.}$$

Ví dụ 9: Cho a, b là hai số thực không âm tùy ý.

Chứng tỏ rằng: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \sqrt{2(a+b)}.$ Khi nào có dấu đẳng thức?

TS lớp 10 chuyên toán Quốc học 2005 – 2006

Giải:

$$+ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \geq 0. \text{ Dấu đẳng thức } \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } b = 0$$

$$+ \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu đẳng thức } \Leftrightarrow a = b$$

Ví dụ 10: Với $a > 0, b > 0, c > 0$, hãy chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a. \frac{ab}{c} - \frac{bc}{a} \geq 2b$$

$$b. \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c$$

$$c. \frac{a^3+b^3}{2ab} + \frac{b^3+c^3}{2bc} + \frac{c^3+a^3}{2ca} \geq a+b+c$$

TS lớp 10 Lê Hồng Phong TPHCM, 2000 – 2001 Ban A, B

Giải:

a. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} \Leftrightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$$

b. Chứng minh tương tự câu a) ta có: $\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \geq 2a; \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c.$

$$\text{Do đó } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2b + 2a + 2c.$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq b+a+c.$$

c. $a, b > 0$. Ta có: $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow (a+b)[(a^2-ab+b^2)-ab] \geq 0 \Rightarrow (a^3+b^3-ab(a+b)) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^3+b^3 \geq a(a+b) \Rightarrow \frac{a^3+b^3}{2ab} \geq \frac{a+b}{2}$$

Chúng minh tương tự ta có: $\frac{b^3 + c^3}{2bc} \geq \frac{b+c}{2}; \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{c+a}{2}$

Do đó: $\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c$$

Ví dụ 11: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với mọi a, b, c

b. $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} (a > 0, b > 0, c > 0)$

c. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ với mọi a, b, c, d, e

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM, 2001 – 2002, ban A, B

Giải:

a. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0. \text{ Bất đẳng thức này đúng.}$$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ là bất đẳng thức đúng.

b. Áp dụng câu a) ta có:

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq a^4 b^4 + b^4 c^4 + c^4 a^4 = (a^2 b^2)^2 + (b^2 c^2)^2 + (c^2 a^2)^2$$

$$\geq (a^2 b^2)^2 (b^2 c^2) + (b^2 c^2)^2 (c^2 a^2) + (a^2 b^2)^2 (c^2 a^2)$$

$$= a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 b^2 c^2 (ab + bc + ca).$$

Do đó: $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{a^2 b^2 c^2 (ab + bc + ca)}{a^3 b^3 c^3} \Leftrightarrow \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

c. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4} + b^2 - ab \right) + \left(\frac{a^2}{4} + c^2 - ac \right) + \left(\frac{a^2}{4} + d^2 - ad \right) + \left(\frac{a^2}{4} + e^2 - ae \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e \right)^2 \geq 0 \text{ (BĐT đúng)}$$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ là BĐT đúng.

Ví dụ 12: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chúng minh rằng: $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

TS 10 Chuyên Lê quý Đôn Bình Định, 2009-2010

ABC

Giải:

Chúng minh $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$ (với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác). Ta có: $\frac{m}{n} < \frac{m+k}{n+k}$, (với $0 < m < n, \forall k > 0$) (1)

Thật vậy,

$$(1) \Leftrightarrow 0 < m(n+k) < n(m+k) \Leftrightarrow 0 < mk < nk \Leftrightarrow 0 < m < n \quad (0 < m, n, k).$$

Áp dụng: $0 < a < b+c \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$

$$0 < b < c+a \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}; 0 < c < a+b \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (2).$$

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ ($x, y, z > 0$)

Ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 9$

Thay $x = a+b, y = b+c, z = c+a$ vào (2):

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} > 1 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Ví dụ 13: Đặt $S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$

Chúng minh rằng $S_n < \frac{1}{2}$. Với n là số tự nhiên, $n \geq 3$.

TS 10 Chuyên Lê Quý Đôn Bình định, 2009-2010

Giải:

Ta có bất đẳng thức: $2n+1 > 2\sqrt{n(n+1)}$

$$\Leftrightarrow (2n+1)^2 > 4n(n+1) \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n : \text{bất đẳng thức đúng}$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} < \frac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1-n)\sqrt{n(n+1)}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] (1).$$

Cho n lần lượt lấy các giá trị từ 1 đến n , thay vào (1), rồi cộng về theo về các bất đẳng thức tương ứng, ta được:

$$S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{1}{2}$$

Ví dụ 14: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi nào?}$$

TS 10 Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An - 2007-2008

Giải:

Đặt A là vế trái bất đẳng thức cần chứng minh.

$$\text{Ta có } A = a - \frac{ab^2}{1+b^2} + b - \frac{bc^2}{1+c^2} + c - \frac{ca^2}{1+a^2}.$$

$$= 3 - \left(\frac{ab^2}{1+b^2} + \frac{bc^2}{1+c^2} + \frac{ca^2}{1+a^2} \right) \geq 3 - \left(\frac{ab^2}{2b} + \frac{bc^2}{2c} + \frac{ca^2}{2a} \right) \geq 3 - \frac{(a+b+c)^2}{6} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 15: Chứng minh rằng với mọi x ta luôn có:

$$(2x+1)\sqrt{x^2-x+1} > (2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$$

Tuyển sinh lớp 10 THPT Nam Định, 2009-2010

Giải:

Xét $(2x+1)\sqrt{x^2-x+1} > (2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$ (1). Khi thay x bởi $-x$ ta thấy (1) không thay đổi, nên chỉ cần chứng minh (1) đúng với mọi $x \geq 0$.

$$\text{Với mọi } x \text{ ta có } x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ và } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Vậy: nếu $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ thì (1) luôn đúng. Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì (1) tương đương

$$(2x+1)^2(x^2-x+1) > (2x-1)^2(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + x^2 + 3x + 1 > 4x^4 + x^2 - 3x + 1 \text{ (luôn đúng với } x > \frac{1}{2})$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

ABC

Ví dụ 16: Chứng minh với mọi số thực x, y, z, t ta luôn có bất đẳng thức sau: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y + z + t)$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2007-2008

Giải:

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y + z + t) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 \geq 4x(y + z + t)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4xz + 4z^2) + (x^2 - 4xt + 4t^2) + x^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (x - 2t)^2 + x^2 \geq 0 \quad (2)$. Ta có (2) luôn luôn đúng với mọi x, y, z, t . Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x - 2y = x - 2z = x - 2t = x = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$

Ví dụ 17: Chứng minh với mọi số thực a, b khác không ta luôn có bất đẳng thức sau: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2007-2008

Giải:

$$\text{Đặt } T = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \text{ Ta có: } |T| = \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow T^2 + 2 \geq 3T \Leftrightarrow (T - 1)(T - 2) \geq 0 \quad (*)$$

Nếu $T \geq 2$ thì $T - 1 > 0$ và $T - 2 \geq 0$ nên (*) đúng.

Nếu $T \leq -2$ thì $T - 1 < 0$ và $T - 2 < 0$ nên (*) đúng. Vậy với mọi số thực a, b khác không ta luôn có $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

Ví dụ 18: Cho các số $a, b, c \in [0; 1]$.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

Tuyển sinh lớp 10 ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, 1998

Giải:

$$\text{Do } a, b, c \in [0; 1] \Rightarrow (1 + a)(1 - b)(1 - c) \geq 0$$

$$\Rightarrow (1 - a - b - c) + ab + bc + ca - abc \geq 0$$

$$\Rightarrow a + b + c - ab - bc - ca \leq 1 - abc \leq 1.$$

Chú ý rằng do $a, b, c \in [0; 1]$ nên $b^2 \leq b, c^3 \leq c$.

$$\text{Vậy } a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq a + b + c - ab - bc - ca \leq 1$$

Ví dụ 19: Cho x, y là hai số thực khác 0.

$$\text{Chứng minh: } \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

TS lớp 10 Trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004-2005

Giải:

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow |t| = \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right|$ mà $\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2$ (do BĐT Côsi)

$$\Rightarrow |t| \geq 2 \Rightarrow t \leq -2 \text{ hay } t \geq 2. \text{ Khi đó: } t^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2.$$

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow t^2 + 2 \geq 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) \geq 0$ (2)

(2) là hiển nhiên đúng do $t \leq -2$ hay $t \geq 2$.

Ví dụ 20: Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng: Nếu

$x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ thì trong ba số x, y, z có duy nhất một số lớn hơn 1.

Thi học sinh giỏi lớp 9 – Bảng A, Nghệ An -2009

Giải:

Xét tích: $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1$

$$= x + y + z - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}. \text{ Mà } x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$\Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) > 0$. Nếu cả 3 thừa số $(x-1), (y-1), (z-1)$ đều dương $\Rightarrow xyz > 1$ (loại). Nếu cả 3 thừa số $(x-1), (y-1), (z-1)$ đều âm

$\Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) < 0$. Nếu 2 thừa số dương, 1 thừa số âm

$\Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) < 0$ (loại). Nên phải có 2 thừa số âm, 1 thừa số dương $\Rightarrow$ trong 3 số x, y, z có hai số bé hơn 1. Còn một số lớn hơn 1.

Vậy trong 3 số x, y, z luôn có duy nhất một số lớn hơn 1.

Ví dụ 21: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + 2y + 3z = 18$. Chứng

minh rằng: $\frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z} \geq \frac{51}{7}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

TS 10 Toán – Đại học Vinh năm 2009-2010 (vòng 2)

Giải:

$$\text{Đặt } P = \frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z}$$

$$\Rightarrow P + 3 = 24 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+3z} \right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương ta có:

$$P + 3 = 24 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+3z} \right) \geq \frac{72}{\sqrt[3]{(1+x)(1+2y)(1+3z)}}$$

$$\geq \frac{72}{\frac{1+x+1+2+1+3z}{3}} = \frac{72}{7} \Rightarrow P \geq \frac{51}{7}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x=1+2y=1+3z \\ x+2y+3z=18 \end{cases} \Leftrightarrow x=6; y=3, z=2.$$

Ví dụ 22: Cho $a, b, c > 0$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a - b + c$$

HSG lớp 9, quận Cầu Giấy Hà Nội, 2005 – 2006

Giải:

Vì a, b dương nên ta luôn có:

$$(a+b)(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 - b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5b^3 - a^3 \leq 6b^3 - a^2b - ab^2 \Leftrightarrow 5b^3 - a^3 \leq (ab + 3b^2)(2b - a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a \quad (1).$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq 2c - b \quad (2);$$

$$\frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq 2a - c \quad (3).$$

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức (1), (2), (3) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 23: Cho ba số thực: a, b, c .

$$\text{Chứng minh: } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$$

TS 10 chuyên thành phố HCM năm 2009 – 2010

Giải:

Cho ba số thực a, b, c . Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca + \frac{(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq \frac{(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq \frac{(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12(a-b)^2}{13} + \frac{2(b-c)^2}{3} + \frac{2007(c-a)^2}{2009} \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Ví dụ 24: Cho a, b là các số dương thỏa $\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} = 1$.

Chứng minh $ab^2 \leq \frac{1}{8}$.

TS 10 chuyên thành phố HCM năm 2009 – 2010

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} = 1 &\Leftrightarrow \frac{2b}{1+b} = 1 - \frac{a}{1+a} \Leftrightarrow \frac{2b}{1+b} = \frac{1}{1+a} \\ &\Leftrightarrow \frac{1+b}{2b} = 1+a \Leftrightarrow a = \frac{1-b}{2b}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } ab^2 = \frac{1-b}{2b} \cdot b^2 = \frac{(1-b)b}{2} = \frac{1}{2} \left[-\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right] \leq \frac{1}{8}. \text{ Vậy } ab^2 \leq \frac{1}{8}.$$

Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất

Ví dụ 1: Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy$.

TS lớp 10 chuyên Toán Lê Hồng Phong, TPHCM, 2000 – 2001

Giải:

$a, b > 0$ theo bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \quad (1) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (2). \text{ Và } \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \quad (3).$$

$$\text{Áp dụng (1); (2); (3) ta có: } A = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(4xy + \frac{1}{4xy} \right) + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{xy}$$

$$\geq \frac{4}{x^2 + y^2 + 2xy} + 2\sqrt{4xy \cdot \frac{1}{4xy}} + \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{(x+y)^2} = \frac{4}{(x+y)^2} + 2 + \frac{5}{(x+y)^2} \geq 11 \Rightarrow A \geq 11$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 11.

Ví dụ 2: Số thực x thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x^2 + (3-x)^2 \geq 5z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $p = x^4 + (3-x)^4 + 6x^2(3-x)^2$

TS lớp 10 THPT chuyên – ĐHKHTN Hà Nội 2003 – 2004

Giải:

Đặt $y = 3 - x$, bài toán đã cho trở thành: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức, $P = x^4 + y^4 + 6x^2y^2$, trong đó x, y là các số thực thay đổi và thỏa

$$\text{mãn hệ thức: } \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 \geq 5 \end{cases}$$

Từ các hệ thức trên ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 9 \\ x^2 + y^2 \geq 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2 + 2xy) \geq 5 + 4 \cdot 9 = 41 \Rightarrow 5(x^2 + y^2) + 4(2xy) \geq 41$$

Ta có: $16(x^2 + y^2)^2 + 25(2xy)^2 \geq 40(x^2 + y^2)(2xy)$.

Dấu = đặt được $\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = 5(2xy)$. Cộng hai vế bất đẳng thức thu được với $25(x^2 + y^2) + 16(2xy)^2$ ta thu được:

$$41[(x^2 + y^2) + (2xy)^2] \geq [5(x^2 + y^2) + 4(2xy)]^2 \geq 41 \Leftrightarrow (x^2 + y^2) + (2xy) \geq 41^2.$$

Dấu bằng đặt được $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 4(x^2 + y^2) = 5(2xy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 2 \\ x = 2, y = 1 \end{cases}$.

Vậy, P đạt giá trị bé nhất bằng 41, $\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$

Ví dụ 3: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$.

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Hà Nam, 2009-2010

Giải:

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) \cdot (x + y + z) \\ &= \left(\left(\frac{1}{\sqrt{16x}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{4y}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \right) \cdot \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \right) \\ &\geq \left(\frac{1}{\sqrt{16x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{4y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right)^2 = \frac{49}{16}. \end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = \frac{49}{16}$ khi đó $\frac{1}{\sqrt{16x}} : \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{4y}} : \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{z}} : \sqrt{z}$ và $x + y + z = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}.$$

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{3}{2 + \sqrt{2x - x^2 + 7}}$

TS lớp 10 Lê Hồng Phong, TPHCM, 2003 – 2004

Giải:

A có nghĩa $\Leftrightarrow 2x - x^2 + 7 \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) + 8 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq x - 1 \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} + 1 \leq x \leq 2\sqrt{2} + 1$$

Điều kiện $-2\sqrt{2} + 1 \leq x \leq 2\sqrt{2} + 1$ (*).

Ta có: $2x - x^2 + 7 = -(x-1)^2 + 8 \leq 8$.

Do đó: $\sqrt{2x - x^2 + 7} \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Nên $2 + \sqrt{2x - x^2 + 7} \leq 2 + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2} + 1)$

Ta có: $\frac{1}{2 + \sqrt{2x - x^2 + 7}} \geq \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. Vậy $A \geq \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa (*))

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow x = 1$

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} - 6\sqrt{x-2}$

TS 10 chuyên toán Lê Hồng Phong, TPHCM, 2003 – 2004

Giải:

Điều kiện: $x \geq 2$: $y = \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} - 6\sqrt{x-2}$

$= \sqrt{x-2} - 2\sqrt{x-2} + 1 + \sqrt{x-2} - 6\sqrt{x-2} + 9$

$= \sqrt{(\sqrt{x-2} - 1)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{x-2})^2} = |\sqrt{x-2} - 1| + |3 - \sqrt{x-2}|$.

Áp dụng $|A| \geq A$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A \geq 0$. Ta có: $y \geq \sqrt{x-2} - 1 + 3 - \sqrt{x-2} = 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} - 1 \geq 0 \\ 3 - \sqrt{x-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x-2} \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x-2 \leq 9$.

$\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 11$. Vậy giá trị nhỏ nhất của y là 2 $\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 11$

Ví dụ 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$

Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 2004-2005

Giải:

Ta có: $P = (2x - 3y + 8)^2 + (x - 4)^2 + 2 \geq 2$. Dấu “=” trong bất đẳng thức

trên xảy ra thì $\begin{cases} 2x - 3y + 8 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{16}{3} \\ x = 4 \end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất $P = 2$.

Ví dụ 7: Cho hai số thực không âm a và b. Chứng minh: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (BĐT

Côsi cho hai số thực không âm). Dấu đẳng thức xảy ra khi nào? Áp dụng chứng minh rằng: Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi hình vuông có diện tích lớn nhất.

Đề TS lớp 10 chuyên tin Quốc học Huế 2006-2007

Giải:

a. $a \geq 0, b \geq 0$ nên $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

ABC

$$\text{Do đó: } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. Gọi x và y là hai cạnh của hình chữ nhật ($x > 0$ và $y > 0$). Khi đó chu vi của hình chữ nhật là: $2p = 2(x+y) \Leftrightarrow x+y = p$ (p là hằng số theo giả thiết). Theo bất đẳng thức Côsi cho hai số dương x và y , ta có:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{p}{2} \Leftrightarrow xy \leq \frac{p^2}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$. Diện tích của hình chữ nhật $S = xy$ có giá trị lớn nhất là: $\frac{p^2}{4}$ khi $x = y$.

Ví dụ 8: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + \frac{1}{y} \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức } A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$



TS 10 Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An, 2007-2008

Giải:

downloaadsachmienphi.com

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương ta có: $1 \geq x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}}$, suy

ra $\frac{y}{x} \geq 4$. (1). Áp dụng (1) và bất đẳng thức Cô si cho hai số dương ta có

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{16x} + \frac{15y}{16x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{16x}} + \frac{15 \cdot 4}{16} = \frac{17}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{4}$, khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.

Ví dụ 9: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7}$

TS lớp 10 chuyên toán Lê Hồng Phong, TPHCM, 2002 – 2003

Giải:

Ta có: $x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$; do đó y xác định với mọi x

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7} \Leftrightarrow yx^2 - 5yx + 7y = x^2 \Leftrightarrow (y-1)x^2 - 5yx + 7y = 0$$

$$* \text{ Xét } y = 1, \text{ ta có: } -5x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$$

* Xét $y \neq 1$, ta có:

$$\Delta = 25y^2 - 28y(y-1) = 25y^2 - 28y^2 + 28y = -3y^2 + 28y = y(-3y + 28).$$

Để có x thì phải có $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0; -3y + 28 \geq 0 \\ y \leq 0; -3y + 28 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0; y \leq \frac{28}{3} \\ y \leq 0; y \geq \frac{28}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{28}{3}$$

$$y = 0 \text{ thì } x = \frac{5y}{2(y-1)} = 0; \quad y = \frac{28}{3} \text{ thì } x = \frac{5y}{2(y-1)} = \frac{14}{5}. \text{ Vậy: giá trị nhỏ}$$

nhất của y là 0 với $x = 0$. Giá trị lớn nhất của y là $\frac{28}{3}$ với $x = \frac{14}{5}$

Ví dụ 10: Cho các số x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Hãy tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = xy + yz + xz + \frac{1}{2} [x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2]$$

Tuyển sinh lớp 10 ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, 1998

Giải:

Trước hết, chú ý rằng với $\forall a, b$ và $c \in [0, 1]$ ta luôn có: $(a-b)^2(1-c) \geq 0$.

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab + c(a-b)^2$ (*). Áp dụng (*) với hai số x, y và $c = z^2 \in [0, 1]$, ta được $x^2 + y^2 \geq 2xy + z^2(x-y)^2$.

Tương tự $y^2 + z^2 \geq 2yz + x^2(y-z)^2$ và $z^2 + x^2 \geq 2zx + y^2(z-x)^2$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều lại với nhau ta nhận được:

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx + \frac{1}{2} [x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2]$$

$$\Rightarrow P \leq 1. \text{ Vậy } P_{\max} = 1, \text{ đạt được khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 11: Cho a, b là các số thực không âm thỏa mãn: $a^2 + b^2 = 1$

a. Chứng minh: $1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$

b. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{1+2a} + \sqrt{1+2b}$$

Thi học sinh giỏi lớp 9 – Bảng A, Nghệ An - 2009

Giải:

a. Với x, y là 2 số bất kì ta luôn có $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

Nên $a, b \geq 0$ và $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2 \Rightarrow a+b \leq \sqrt{2}$ (dấu “=” khi

$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Mặt khác $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 1 + 2ab \Rightarrow a+b \geq 1$

Vậy ta luôn có $1 \leq a+b \leq \sqrt{2}$

b. Xét $P^2 = 2 + 2(a + b) + 2\sqrt{1 + 2(a + b) + 4ab}$

$$\text{Do } a + b \leq \sqrt{2}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Nên } P^2 \leq 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2} \Rightarrow P^2 \leq 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} \\ \Rightarrow P^2 \leq 4 + 4\sqrt{2} \Rightarrow P \leq 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \text{ dấu "=" xảy ra khi } a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. Mặt khác ta cũng có $a + b \geq 1$ và $ab \geq 0$ nên $P^2 \geq 2 + 2 + 2\sqrt{1 + 2} \Rightarrow P^2 \geq 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow P \geq 1 + \sqrt{3}$, dấu "=" xảy ra khi $(a = 0, b = 1)$ hoặc $(a = 1, b = 0)$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1 + \sqrt{3}$.

Ví dụ 12: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $4a^2 + 3b^2$.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ, 2003 – 2004

Giải:

Từ điều kiện $|f(x)| \leq 1$, với mọi $x \in [-1; 1]$, ta có:

$$|f(0) - f(1)| \leq 2 \Rightarrow (a + b)^2 \leq 4; |f(0) - f(-1)| \leq 2 \Rightarrow (a - b)^2 \leq 4.$$

$$\text{Mặt khác } 4a^2 + 3b^2 = 2(a + b)^2 + 2(a - b)^2 - b^2 \leq 2(a + b)^2 + 2(a - b)^2 \leq 16$$

Vậy $4a^2 + 3b^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16 khi và chỉ khi $(a; b; c)$ nhận giá trị là $(2; 0; -1)$ hoặc $(-2; 0; 1)$.

Dạng 3: Một số bài toán khác

Ví dụ 1: Từ sáu chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số mà mỗi số gồm các chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó.

Đề TS 10 chuyên tin Quốc học Huế 2004-2005

Giải:

Số có 4 chữ số $x_i = \overline{a_i b_i c_i d_i}$, $a_i, b_i, c_i, d_i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, $a_i \neq 0$ và a_i, b_i, c_i, d_i đôi một khác nhau. Do đó ta có số các số đó là: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ (số).

Tìm tổng của 120 số trên:

$$S = (a_1 + \dots + a_{120}) \cdot 10^3 + (b_1 + \dots + b_{120}) \cdot 10^2 + (c_1 + \dots + c_{120}) \cdot 10 + (d_1 + \dots + d_{120}).$$

Vì số các số là bình đẳng trên từng hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn nên ta có: 120 số a_i gồm có $120 : 5 = 24$ số của mỗi loại 1, 2, 3, 4, 5 nên: $a_1 + a_2 + \dots + a_{120} = 24(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 300$; 120 số b_i (tương tự c_i, d_i) gồm có $120 : 5 = 24$ số của mỗi loại 0, 1, 2, 3, 4, 5 nên:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = 50(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 750$$

$$\text{Tương tự: } c_1 + c_2 + \dots + c_{3000} = 750, d_1 + d_2 + \dots + d_{3000} = 750.$$

$$\text{Tổng các số là: } S = 900 \cdot 10^3 + 750(10^2 + 10 + 1) = 983250$$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $2x + 9y = 2005$ (*)

TS lớp 10 chuyên toán Quốc học 2005 – 2006

Giải:

- **Cách 1:** Ta có: 2005 chia 9 được 55 và dư 7, nên:

$$2005 = 222 \cdot 9 + 7 = 9 \cdot 111 + 7 = 2 \cdot 503 + 9 \cdot 111$$

Suy ra: (503; 111) là một nghiệm.

$$2x + 9y = 2005 \Leftrightarrow 2x + 9y = 2 \cdot 503 + 9 \cdot 111 \Leftrightarrow 2(x - 503) = 9(111 - y)$$

Vì $(2; 9) = 1$ nên tồn tại số nguyên t để $x - 503 = 9t$ hay $x = 503 + 9t$

Nghiệm của phương trình: $x = 503 + 9t, y = 111 - 2t$; t là số nguyên tùy ý.

- **Cách 2:** $2x + 9y = 2005 \Leftrightarrow 2x = 2005 - 9y$. Mà 2005 lẻ, nên $9y$ phải là số lẻ, suy ra y là số lẻ: $y = 2t + 1$ ($t \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x = 2005 - 9(2t + 1)$)

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = 998 - 9t, y = 2t + 1$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho mỗi số $n + 26$ và $n - 11$ đều là lập phương của một số nguyên dương.

Tuyển sinh lớp 10, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, 1998

Giải:

Giả sử: $\begin{cases} n + 26 = a^3 & (1) \\ n - 11 = b^3 & (2) \end{cases}$ với a và b là những số nguyên dương. Lấy (1)

trừ đi (2) ta nhận được: $a^3 - b^3 = 37 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 37 = 1 \cdot 37.$

Chú ý rằng $a - b < a^2 + ab + b^2 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 37 \end{cases}$. Thay $a = b + 1$

vào phương trình thứ 2 ta được $b^2 + b - 12 = 0 \Rightarrow b_1 = 3, b_2 = -4$ (loại).

Với $b = 3 \Rightarrow n = 38$

Ví dụ 4: Đội bóng bàn của trường A thi đấu với đội bóng bàn của trường B, mỗi đấu thủ của trường này thi đấu với mọi đấu thủ của trường kia 1 trận. Biết rằng tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số cầu thủ của cả hai đội và số cầu thủ của trường B là số lẻ. Tìm số cầu thủ của mỗi đội.

Tuyển sinh lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa-2007-2008

Giải:

Gọi x và y theo thứ tự là số cầu thủ của đội A và đội B ($x, y \in \mathbb{N}^*, y$ lẻ).

Số trận đấu là: $xy = 4(x + y) \Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 16$. Suy ra $x - 4$ và $y - 4$ là các ước số của 16. Do y lẻ nên $y - 4 = 1$, hay $y = 5$. Từ đó tìm được $x = 20$. Vậy số cầu thủ của đội A là 20 và số cầu thủ của đội B là 5.

ABC

Ví dụ 5: Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$ thì tích abc là lập phương của một số nguyên.

TS 10 THPT Chuyên Lâm Sơn, Thanh Hóa-2007-2008
Giải:

$$\text{Đặt } x^3 = \frac{a}{b}, y^3 = \frac{b}{c}, z^3 = \frac{c}{a}.$$

Từ giả thiết suy ra

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

Nếu $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ thì

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow a = b = c$$

Do đó $abc = a^3$ là lập phương của một số nguyên.

Nếu $(x + y + z) = 0$ thì $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} = 0$. Nhân 2 vế lần lượt với $a\sqrt[3]{b^2c}$

và $b\sqrt[3]{ac^2}$ ta được $a\sqrt[3]{abc} + ab + \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 0$ và $b\sqrt[3]{abc} + bc + \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 0$.

Trừ vế theo vế hai hệ thức trên, ta được: $(a - b)\sqrt[3]{abc} = b(c - a)$. Nếu $a = b$ thì $a = b = c \Rightarrow x = y = z = 1$ (không thỏa mãn $x + y + z = 0$). Vậy $a \neq b$.

Do đó $abc = \left(\frac{b(c - a)}{a - b}\right)^3$ là lập phương số hữu tỷ. Nhưng do a, b, c là các số nguyên nên khi đó abc là lập phương của số nguyên

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

Đề thi HSG lớp 9 TP HCM 2007-2008

Giải:

Giả sử $n^2 + n + 1$ chia hết cho 9 thì ta có: $n^2 + n + 1 = k.9$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$n^2 + n + 1 - k.9 = 0 \quad (1); \Delta = 1 - 4(1 - k.9) = 36k - 3 = 3(12k - 1)$$

Ta thấy Δ chia hết cho 3 và không chia hết cho 9 nên không là số chính phương, do vậy phương trình (1) trên không thể có nghiệm nguyên. Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 (đpcm).

Ví dụ 7: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a; b)$ nghiệm đúng điều kiện:

$$(a - 1)^2(a^2 + 9) = 4b^2 + 20b + 25.$$

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên toán Quốc học Huế, 2009-2010

Giải:

Viết lại: $(a - 1)^2(a^2 + 9) = (2b + 5)^2$. Suy ra $a^2 + 9$ là số chính phương.

Do $|a|^2 < a^2 + 9 \leq (|a| + 3)^2$ nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

$$1/ \quad a^2 + 9 = (|a| + 3)^2 \quad 2/ \quad a^2 + 9 = (|a| + 2)^2 \quad 3/ \quad a^2 + 9 = (|a| + 1)^2$$

Trường hợp 1: $a^2 + 9 = (|a| + 3)^2 \Leftrightarrow a = 0$.

Lúc đó $9 = (2b + 5)^2 \Leftrightarrow b = -1$ hoặc $b = -4$

Trường hợp 2: $a^2 + 9 = (|a| + 2)^2 \Leftrightarrow 5 = 4|a|$. Không tồn tại số nguyên a .

Trường hợp 3: $a^2 + 9 = (|a| + 1)^2 \Leftrightarrow |a| = 4 \Leftrightarrow a = 4$ hoặc $a = -4$

Với $a = 4$, ta có: $9.25 = (2b + 5)^2 \Leftrightarrow b = 5$ hoặc $b = -10$.

Với $a = -4$, ta có: $25.25 = (2b + 5)^2 \Leftrightarrow b = 10$ hoặc $b = -15$.

Các cặp số nguyên thỏa bài toán:

$$(a; b) = (0; -1), (0; -4), (4; 5), (4; -10), (-4; 10), (-4; -15)$$

Ví dụ 8: Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa: $x = by + cz$, $y = ax + cz$, $z = ax + by$,

$$x + y + z \neq 0. \text{ Chứng minh } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

Đề TS lớp 10 Trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004-2005

Giải:

Cộng vế với vế các đẳng thức ta được: $x + y + z = 2(ax + by + cz)$

Do $x + y + z \neq 0$ nên $ax + by + cz \neq 0$. Cộng hai vế của các đẳng thức lần lượt cho ax, by, cz ta được:

$$(a+1)x = ax + by + cz; (b+1)y = ax + by + cz; (c+1)z = ax + by + cz$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} &= \frac{x}{ax+by+cz} + \frac{y}{ax+by+cz} + \frac{z}{ax+by+cz} \\ &= \frac{x+y+z}{ax+by+cz} = 2 \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Cho đa thức bậc bốn $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(x)$ chia hết cho 7 với mọi số nguyên x . Chứng minh các hệ số của $P(x)$ chia hết cho 7.

TS 10 Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An - 2007-2008

Giải:

Gọi đa thức đã cho là $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e (a \neq 0)$

Từ giả thiết ta có: $e = P(0) \div 7$; $P(2) - P(1) + P(-2) - P(-1) = 3a \div 7$, do đó

$a \div 7$; $P(2) - P(1) - P(-2) - P(-1) = 3b \div 7$, do đó $b \div 7$;

$c = P(1) + P(-1) - 2e - a \div 7$; $d = P(1) - P(-1) - b \div 7$, suy ra đpcm.

Ví dụ 10: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số (viết trong hệ thập phân) sao cho hai điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

a. Mỗi chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

b. Tổng $p+q$ lấy giá trị nhỏ nhất, trong đó p là tỉ số của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị còn q là tỉ số của chữ số hàng nghìn và chữ số hàng trăm.

Đề TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2008-2009

ABC

Giải:

Xét số tùy ý có 4 chữ số $\overline{abcd}$ mà $1 \leq a < b < c < d \leq 9$ (do a, b, c, d là số nguyên). Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $p + q = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$. Do b, c là số tự nhiên

nên: $c > b \Rightarrow c \geq b + 1$. Vì vậy $p + q \geq \frac{b+1}{9} + \frac{1}{b}$

$p + q \geq \frac{1}{9} + \frac{b}{9} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{9} + 2\sqrt{\frac{b}{9} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{7}{9}$; $p + q = \frac{7}{9}$ trong trường hợp

$c = b + 1, d = 9, a = 1, \frac{b}{9} = \frac{1}{b}$. Vậy số thỏa mãn các điều kiện của bài

toán là: 1349

Ví dụ 11: Một tấm bìa dạng tam giác vuông có độ dài ba cạnh là các số nguyên. Chứng minh rằng có thể cắt tấm bìa thành sáu phần có diện tích bằng nhau và diện tích mỗi phần là số nguyên.

TS lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2008-2009

Giải:

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác vuông ABC , c là cạnh huyền. Ta có $a^2 + b^2 = c^2$; $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, diện tích tam giác ABC là $S = \frac{ab}{2}$. Trước hết

ta chứng minh ab chia hết cho 12. Chứng minh ab chia hết cho 3:

Nếu cả a và b đồng thời không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ chia 3 dư 2.

Suy ra số chính phương c^2 chia 3 dư 2, vô lý. Chứng minh ab chia hết cho 4: Nếu a, b chẵn thì ab chia hết cho 4. Nếu trong hai số a, b có số lẻ, chẳng hạn a lẻ. Lúc đó c lẻ. Vì nếu c chẵn thì c^2 chia hết cho 4, trong lúc $a^2 + b^2$ không chia hết cho 4. Đặt $a = 2k + 1, c = 2h + 1, k, h \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } b^2 &= (2h + 1)^2 - (2k + 1)^2 = 4(h - k)(h + k + 1) \\ &= 4(h - k)(h - k + 1) + 8k(h - k) : 4 \end{aligned}$$

Suy ra $b : 4$

Nếu ta chia cạnh AB (chẳng hạn) thành 6 phần bằng nhau, nối các điểm chia với C thì tam giác ABC được chia thành 6 tam giác, mỗi tam giác này có diện tích bằng $\frac{ab}{12}$ là một số nguyên.

Ví dụ 12: Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $\frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b}$ cũng là số nguyên. Gọi d là ước số chung của a, b . Chứng minh $d \leq \sqrt{a+b}$.

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2007-2008

Giải:

Ta có: $\frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b} = 2 + \frac{a+b}{ab}$ là số nguyên dương.

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} \text{ nguyên dương.}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} \geq 1 \Rightarrow a+b \geq ab \text{ mà } a \geq d > 0 \text{ và } b \geq d > 0$$

$$\Rightarrow a+b \geq ab \geq d^2 \Rightarrow \sqrt{a+b} \geq d \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 13: Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa phương trình:

$$3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x - 6 = 0$$

TS lớp 10 chuyên Toán Lê Hồng Phong, TPHCM, 2000 – 2001

Giải:

Để thấy z^2 chia hết cho 3 $\Rightarrow z$ chia hết cho 3 $\Rightarrow z^2$ chia hết cho 9

* Xét $z^2 = 0$, ta có: $3x^2 + 6y^2 - 18x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x-3)^2 + 6y^2 = 33 \Leftrightarrow (x-3)^2 + 2y^2 = 11$$

$$2y^2 \leq 11 \Rightarrow y^2 \leq 2^2 \Rightarrow y^2 = 0^2; 1^2; 2^2; y^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 11 \text{ (vô lí)}$$

$$+ y^2 = 1^2 \Rightarrow (x-3)^2 = 3^2 \Rightarrow x-3 = \pm 3 \Rightarrow x = 6 \text{ hoặc } x = 3.$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}; \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$

$$+ y^2 = 2^2 \Rightarrow (x-3)^2 = 3 \text{ Vô lí}$$

* Xét $z^2 \geq 9$ ta có: $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$$

$$+ y^2 \geq 1 \text{ thì } 2z^2 + 3y^2z^2 \geq 2.9 + 3.1.9 > 33 \text{ (loại)}$$

$$+ y^2 = 0 \text{ thì } 3(x-3)^2 + 2z^2 = 33; z^2 = 9 \text{ thì } 3(x-3)^2 = 15 \text{ (loại)}$$

$$z^2 > 9 \Rightarrow z^2 \geq 6^2 = 36. \text{ Ta có: } 3(x-3)^2 + 2z^2 > 33 \text{ (loại)}$$

Nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}; \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$

Ví dụ 14: Chứng minh rằng không thể có các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $x^3 - y^3 = 1993$

Đề TS lớp 10 Trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004-2005

Giải:

$$x^3 - y^3 = 1993 \Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 1993$$

Do $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ nên $x-y, x^2 + xy + y^2$ là các ước dương của 1993

Do 1993 là số nguyên tố, nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1993 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-y=1993 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Các hệ phương trình trên không có nghiệm nguyên nên bài toán đã cho được chứng minh.

Ví dụ 15: Đặt $p = \sqrt{2}$; $q = \sqrt[3]{2}$. Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = p + q + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 1$

Đề TS lớp 10, TPHCM 2006-2007

Giải:

Cần chứng tỏ: $\frac{1}{p-q} - \frac{1}{q} = p + q + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 1$

Hay $1 = (p-q) \left(p + q + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{q} + 1 \right)$ (*)

Vế phải của (*): $p^2 + pq + \frac{p^2}{q} + q + \frac{p}{q} + p - qp - q^2 - p - \frac{q^2}{p} - 1 - q$

Do $p^2 = 2$; $q^3 = 2$; $\frac{p^2}{q} = \frac{2}{q}$; $\frac{p}{q} = \frac{q^2}{p}$ nên (*) đúng.

Chú ý: Có thể trực căn ở mẫu của $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$ để chứng tỏ đẳng thức.

Ví dụ 16: Chứng tỏ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

Với mọi số thực x, y, z . Suy ra với a, b, c là các số dương ta luôn có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2006-2007

Giải:

Khai triển vế phải: $(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ được vế trái.

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \right] \geq 0$

Đặt $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$, $x + y + z > 0$ vì a, b, c dương.

Từ đó $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$ hay $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Ví dụ 17: Tìm các số nguyên x, y thỏa phương trình $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Đề TS lớp 10 Trường chuyên Trần Đại Nghĩa 2004-2005

Giải:

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Rightarrow (2x + 2y)^2 = (2xy + 1)^2 - 1$$

$$\Rightarrow (2xy + 1 + 2x + 2y)(2xy + 1 - 2x - 2y) = 1$$

$$\Rightarrow 2xy + 1 + 2x + 2y = 2xy + 1 - 2x - 2y \Rightarrow x + y = 0$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có:

$$x = 0, y = 0 \text{ hoặc } x = 1, y = -1 \text{ hoặc } x = -1, y = 1$$

Dạng 4: Một số bài toán giải bất phương trình

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} \leq \sqrt{2x+7}$

Giải:Bất phương trình tương đương với: $\sqrt{7x+1} \leq \sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+1 \leq 5x-11+2 \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12+2x \leq 2 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6 \leq \sqrt{(2x+7)(3x-18)} \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x+36 \leq 6x^2-15x-126 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-27x-162 \geq 0 \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x \leq \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 9$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$.**Giải:**Bất phương trình $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$. Điều kiện: $x \geq -1$ * Nếu $\begin{cases} x-4 < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 4$, bất phương trình hiển nhiên thỏa mãn.* Nếu $x \geq 4$, để ý $\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{(1+x)-1} = \sqrt{1+x}-1$

Nên bất phương trình

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x}-1)^2 > x-4 \Leftrightarrow 2+x-2\sqrt{1+x} > x-4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} < 3 \Leftrightarrow 4 \leq x < 8$$

Tổng hợp kết quả ta được: $\begin{cases} -1 \leq x < 4 \\ 4 \leq x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 8$ **Ví dụ 3:** Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} \leq \sqrt{x^2+4x-5}$ **Giải:**

Bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \leq \sqrt{(x-1)(x+5)}$$

Điều kiện để bất phương trình xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -5 \end{cases}$ * Khi $x = 1$ bất phương trình nghiệm đúng.* Khi $x > 1$ bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{x+5} \Leftrightarrow 2x+5+2 \leq x+5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq -x \text{ (Bất phương trình vô nghiệm do } -x < 0)$$

* Khi $x \leq -5$ bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{-(x+2)} + \sqrt{-(x+3)} \leq \sqrt{-(x+5)} \Leftrightarrow -2x-5+2 \leq -x-5$$

ABC

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq x \text{ (Bất phương trình vô nghiệm)}$$

Vậy bất phương trình chỉ có một nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}$

Giải:

Điều kiện $x \geq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình: $\sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} > 10 - 2x$

Nếu $x > 5$ thì bất phương trình được thỏa mãn, vì vế trái dương, vế phải âm. Nếu $4 \leq x \leq 5$ thì hai vế của bất phương trình không âm. Bình phương hai vế ta có: $2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 66 < 0$

$$\Leftrightarrow 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34}.$$

Kết hợp với điều kiện $4 \leq x \leq 5$ ta có: $10 - \sqrt{34} < x \leq 5$.

Đáp số: $x > 10 - \sqrt{34}$

Ví dụ 5: Giải bất phương trình $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$.

Giải:

Bất phương trình $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$.

Điều kiện:
$$\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 2x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Khi đó bất phương trình đã cho tương ứng với

$$\sqrt{5x - 1} > \sqrt{2x - 4} + \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow 5x - 1 > 2x - 4 + x - 1 + 2\sqrt{(2x - 4)(x - 1)}$$

$$\Leftrightarrow x + 2 > \sqrt{(2x - 4)(x - 1)} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > 2x^2 - 6x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 10.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có: $2 \leq x < 10$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 6: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} \leq \sqrt{4x^2 - 18x + 18}.$$

Giải

Điều kiện căn thức có nghĩa:
$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ 4x^2 - 18x + 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -5 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Thấy ngay $x = 3$ thì bất phương trình thỏa mãn.

Với $x \geq 5$ thì viết bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{(x - 5)(x - 3)} + \sqrt{(x + 5)(x - 3)} \leq \sqrt{(x - 3)(4x - 6)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 5} + \sqrt{x + 5} \leq \sqrt{4x - 6} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - 25} \leq 4x - 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 25} \leq x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 25 \leq x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x \leq \frac{17}{3}.$$

Vậy $5 \leq x \leq \frac{17}{3}$ là nghiệm.

Với $x \leq -5$ thì viết bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{(5-x)(3-x)} + \sqrt{(3-x)(-5-x)} \leq \sqrt{(3-x)(4x-6)}$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2\sqrt{x^2 - 25} \leq 6 - 4x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 25} \leq -x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 \leq x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x \leq \frac{17}{3}.$$

Vậy $x \leq -5$ là nghiệm.

$$\text{Tóm lại: } x \in (-\infty; -5) \cup \{3\} \cup \left[5; \frac{17}{3}\right].$$

Ví dụ 7: Cho hai bất phương trình: $3mx - 2m > x + 1$ (1); $m - 2x < 0$ (2)

Tìm m để hai phương trình có cùng một tập hợp nghiệm.

DTS 10 THPT Hà Nội năm 1996 – 1997

Giải

$$(1) \Leftrightarrow 3mx - x > 1 + 2m \Leftrightarrow (3m - 1)x > 1 + 2m (*)$$

$$\text{- Xét } 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow 3m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}; (*) \Leftrightarrow 0x > 1 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{- Xét } 3m - 1 > 0 \Leftrightarrow 3m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}; (*) \Leftrightarrow x > \frac{1 + 2m}{3m - 1}$$

$$\text{- Xét } 3m - 1 < 0 \Leftrightarrow 3m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}; (*) \Leftrightarrow x < \frac{1 + 2m}{3m - 1}$$

$$\text{Mặt khác (2) } \Leftrightarrow 2x > m \Leftrightarrow x > \frac{m}{2}.$$

Hai bất phương trình có cùng một tập nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ \frac{1 + 2m}{3m - 1} = \frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ 2 + 4m = 3m^2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ 3m^2 - 5m - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ 3m^2 - 6m + m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ 3m(m - 2) + (m - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ (m - 2)(m + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Ví dụ 8: Giải bất phương trình: $2|x + 1| > x + 4$.

Giải:

$$\text{Ta có: } 2|x+1| > x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 > x+4 \\ 2x+2 < -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ví dụ 9: Giải bất phương trình: $|x-2| \leq 2x^2 - 9x + 9$.

Giải:

Bất phương trình có dạng: $|f(x)| \leq g(x)$.

Bởi vậy ta có:

$$|x-2| \leq 2x^2 - 9x + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq 2x^2 - 9x + 9 \\ x-2 \geq -2x^2 + 9x - 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 10x + 11 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5-\sqrt{3}}{2} \\ x \geq \frac{5+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4-\sqrt{2}}{2} \\ x \geq \frac{5+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4-\sqrt{2}}{2} \\ x \geq \frac{4+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là:

$$x \in \left(-\infty; \frac{4-\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}; +\infty \right).$$

Ví dụ 10. Giải bất phương trình: $|x-1| + |x-2| > 3+x$.

Giải:

$$\text{Ta có: } |x-1| + |x-2| > 3+x \Leftrightarrow |x-1| > 3+x-|x-2|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 3+x-|x-2| \\ x-1 < |x-2|-3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| > 4 \\ |x-2| > 2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 4 \\ x-2 < -4 \\ x-2 > 2x+2 \\ x-2 < -2x-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 4 \\ x-2 < -4 \\ x-2 > 2x+2 \\ x-2 < -2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x < -2 \\ x < -4 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x < 0 \end{cases}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

Một số đề thi tự luyện

Đề số 1

Bài 1: a. Tính giá trị của: $P = \frac{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} - 2}{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{-2 - a}$ khi

$$a = -1 - 2\sqrt{2}$$

b. Giải bất phương trình: $\sqrt{4x - 3} + 4\sqrt{x - 1} > \sqrt{9x + 16} - 30\sqrt{x - 1} + 2$

Bài 2: a. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của: $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2|$

b. Tìm m để phương trình: $(x^2 + mx + 1)^2 + m(x^2 + mx + 1) + 1 - x = 0$ có nghiệm

Bài 3: a. Tìm tất cả các số nguyên x, y sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{147}$

b. Cho $a + b + c = 3$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$.

Bài 4: Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp đường tròn (O) sao cho tia BA và tia DE cắt nhau tại M, tia AE và tia CD cắt nhau tại N. Gọi K là giao điểm của BC và tiếp tuyến của (O) tại E. Gọi H là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và CEK.

a. Chứng minh ba điểm M, P, K thẳng hàng.

b. Chứng minh tứ giác APNC nội tiếp.

c. Tính góc $\widehat{MPN}$.

Đề số 2

Bài 1: a. Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}} = 1$$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x + 1| + \sqrt{y} = 5 \\ (x^2 + 2x + 1)y = 36 \end{cases}$$

Bài 2: Cho phương trình: $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$. Tìm giá trị m để phương trình có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2)$

Bài 3: Cho đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C là trung điểm của bán kính OB và (S) là đường tròn đường kính AC. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm tùy ý phân biệt M, N khác A và B. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của AM và AN với đường tròn (S).

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ.

b. Vẽ tiếp tuyến ME của (S) với E là tiếp điểm.

Chứng minh: $ME^2 = MA \cdot MP$

c. Vẽ tiếp tuyến NF của (S) với F là tiếp điểm. Chứng minh: $\frac{ME}{NF} = \frac{AM}{AN}$.

Bài 4: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số (viết trong hệ thập phân) sao cho hai điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

- Mỗi chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.
- Tổng $p + q$ lấy giá trị nhỏ nhất, trong đó p là tỉ số của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị còn q là tỉ số của chữ số hàng nghìn và chữ số hàng trăm.

Bài 5: Một tấm bìa dạng tam giác vuông có độ dài ba cạnh là các số nguyên. Chứng minh rằng có thể cắt tấm bìa thành sáu phần có diện tích bằng nhau và diện tích mỗi phần là số nguyên.

Đề số 3

Bài 1: Cho phương trình: $x^4 + 2mx^2 + 4 = 0$

Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Bài 3: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Bài 4: Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F . Đường tròn tâm O' bàng tiếp trong góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC tiếp xúc cạnh BC và phần kéo dài của các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm P, M, N .

1. Chứng minh rằng: $BP = CD$.

2. Trên MN ta lấy các điểm I và K sao cho $CK \parallel AB, BI \parallel AC$. Chứng minh rằng các tứ giác $BICE$ và $BKCF$ là các hình bình hành.

3. Gọi (S) là đường tròn đi qua 3 điểm I, K, P . Chứng minh (S) tiếp xúc với các đường thẳng BC, BI, CK .

Bài 5: Số thực x thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x^2 + (3 - x)^2 \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$p = x^4 + (3 - x)^4 + 6x^2(3 - x)^2$$

Đề số 4

Bài 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{4x - 34}\sqrt{x - 1} > \sqrt{9x + 16 - 30\sqrt{x - 1}} + 2$

Bài 2: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} |x| + y = -1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình khi $m = \frac{17}{9}$

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Bài 3: Tìm m để phương trình: $(x^2 + mx + 1)^2 + m(x^2 + mx + 1) + 1 - x = 0$ có nghiệm.

Bài 4: Từ sáu chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số mà mỗi số gồm các chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó.

Bài 5: Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp đường tròn (O) sao cho tia BA và tia DE cắt nhau tại M, tia AE và tia CD cắt nhau tại N. Gọi K là giao điểm của BC và tiếp tuyến của (O) tại E. Gọi H là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và CEK.

a. Chứng minh ba điểm M, P, K thẳng hàng.

b. Chứng minh tứ giác APNC nội tiếp.

c. Tính góc $\widehat{MPN}$.

Đề số 5

Bài 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{3}{2x-y} - \frac{6}{x+y} = -1 \\ \frac{1}{2x-y} - \frac{1}{x+y} = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Bài 2: Cho $x > 0$ thỏa $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính $x^3 + \frac{1}{x^5}$.

Bài 3: Giải phương trình:
$$\frac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \sqrt{3x+1} - 1 \quad (1)$$

Bài 4: a. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$

b. Tìm các số nguyên x, y, z thỏa hệ
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O ($AB < BC$). Vẽ đường tròn tâm I qua hai điểm A và C cắt đoạn AB, BC lần lượt tại M, N. Vẽ đường tròn tâm J qua ba điểm B, M, N cắt đường tròn tâm O tại điểm H (khác B).

a. Chứng minh OB vuông góc với MN.

b. Chứng minh IOBJ là hình bình hành.

c. Chứng minh BH vuông góc với IH.

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD. Qua một điểm S ở trong hình bình hành ABCD kẻ đường thẳng song song với AB lần lượt cắt AD, BC tại M, P và cũng qua S. Kẻ đường thẳng song song với AD lần lượt cắt AB, CD tại N, Q. Chứng minh ba đường thẳng AS, BQ, DP đồng quy.

Đề số 6

Bài 1: Chứng minh đẳng thức: $\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{27}-3} - \frac{\sqrt{150}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4}{3}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức:

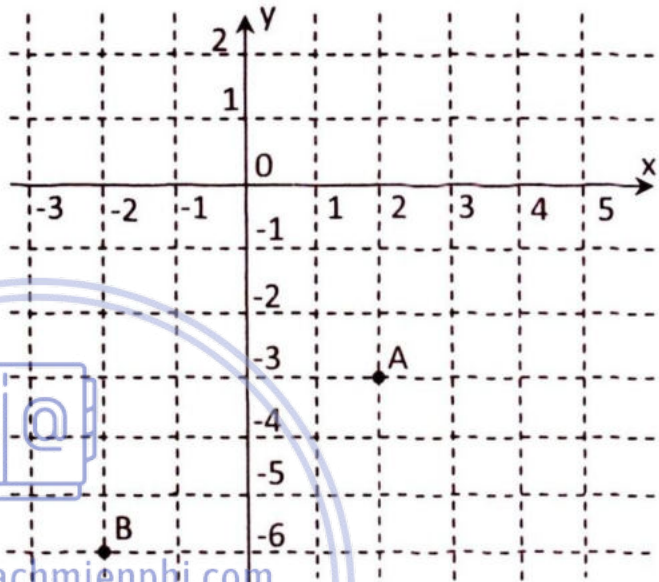
a. $A = \frac{3}{3x-1} \sqrt{4x^2(9x^2-6x+1)}$ với $0 < x < \frac{1}{3}$

b. $B = \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}} + \sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}}$

Bài 3: Trên mặt phẳng tọa độ (hình vẽ), có điểm A thuộc đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2$ và điểm B không thuộc (P).

a. Tìm hệ số a và vẽ (P).

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A và B. Xác định tọa độ giao điểm thứ hai của (P) và đường thẳng AB.



Bài 4: Một xe lửa đi từ Huế ra Hà

Nội. Sau đó 1 giờ 40 phút, một xe lửa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga cách Hà Nội 300 km. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường sắt Huế- Hà Nội dài 645 km.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính AD, tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

- Các tứ giác ABEH, DCEH nội tiếp được.
- E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.
- Năm điểm B, C, I, O, H ở trên một đường tròn.

Bài 6: Để làm một cái phễu hình nón không nắp bằng bìa cứng bán kính $r = 12$ cm, chiều cao $h = 16$ cm, người ta cắt từ một tấm bìa ra hình khai triển của mặt xung quanh của hình nón, sau đó cuộn lên. Trong hai tấm bìa hình chữ nhật: Tấm bìa A có chiều dài 44 cm, chiều rộng 25 cm, tấm bìa B có chiều dài 42 cm, chiều rộng 28 cm, có thể sử dụng tấm bìa nào để làm ra cái phễu hình nón nói trên mà không phải chắp nối? Giải thích.

Đề số 7

Bài 1: a. Biến đổi $x - 2\sqrt{3x - 9}$ về dạng A^2 với A là một biểu thức có chứa căn thức.

b. Giải phương trình: $\sqrt{x - 2\sqrt{3x - 9}} = 2\sqrt{x - 3}$

Bài 2: a. Cho hai số thực không âm a và b. Chứng minh: $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(BĐT Côsi cho hai số thực không âm) Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

b. Áp dụng chứng minh rằng: Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi hình vuông có diện tích lớn nhất.

Bài 3: Để đo chiều cao của một ngọn tháp mà ta không thể đi đến gần ngọn tháp đó được, người ta đóng 2 cọc tiêu AA' và BB' cao 1,5m tại 2 vị trí cách nhau 10m sao cho AA', BB' và tim của tháp được giống thẳng hàng nhờ giác kế. Dùng giác kế đặt tại A và B, người ta đọc được các góc nhìn từ A và từ B đến đỉnh D của tháp là 18° và $19^\circ 30'$. Tính khoảng cách từ BB' đến tim của ngọn tháp và chiều cao của ngọn tháp.

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Gọi C là điểm di động trên nửa đường tròn đó và At là tia tiếp tuyến của (O) ở trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa (O). Vẽ đường tròn tâm A, bán kính bằng BC cắt tia AC tại D. Tiếp tuyến tại D của đường tròn tâm A vừa vẽ cắt At tại E.

a. Tính độ dài đoạn AE theo R.

b. Tìm quỹ tích điểm D.

Bài 5: a. Trong lọ hoa có 22 cành hoa hồng. Hai người bạn cùng tham gia trò chơi như sau: Mỗi người được rút theo thứ tự một hoặc hai cành hoa mỗi lần (người thứ nhất rút xong đến người thứ hai, xong một lượt rồi quay lại người thứ nhất rút...). Người rút cuối cùng thì bị thua. Hãy trình bày cách chơi sao cho người thứ hai bao giờ cũng thắng cuộc. Người thứ hai thắng sau bao nhiêu lượt chơi?

b. Có bốn người bị tình nghi nhưng trong đó chỉ có một tên trộm, cả bốn người bị đưa về đồn cảnh sát và chúng đã khai như sau:

An : “Bình là tội phạm”.

Bình : “Danh là tội phạm”.

Châu : “Tôi không phải là tội phạm”

Danh : “Bình nói dối khi nói tôi là tội phạm”

Biết rằng trong 4 lời khai trên chỉ có một lời khai đúng. Hãy cho biết người nào khai thật và ai là tên trộm?

ABC

Đề số 8**Bài 1:** a. Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{6}{3 + \sqrt{3}}$$

b. Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 2\sqrt{x} + 1} \quad (x > 0, x \neq 1)$

Bài 2: Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm B(4; 0) và C(-1; 4)

- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm C và song song với đường thẳng $y = 2x - 3$. Xác định tọa độ điểm A của đường thẳng (d) với trục hoành Ox.
- Xác định các hệ số a và b biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua 2 điểm B và C. Tính góc tạo bởi đường thẳng BC và trục hoành Ox (làm tròn đến phút)
- Tính chu vi của tam giác ABC (đơn vị đo trên trục tọa độ là xentimét) (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 3: a. Tìm hai số u và v biết: $u + v = 1$, $uv = -42$ và $u > v$

- Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 60 km. Một xuồng máy đi xuôi dòng từ bến A đến bến B, nghỉ 30 phút tại bến B rồi quay trở lại đi ngược dòng 25 km để đến bến C. Thời gian kể từ lúc đi đến lúc quay trở lại đến bến C hết tất cả là 8 giờ. Tính vận tốc xuồng máy khi nước yên lặng, biết vận tốc nước chảy là 1 km/h.

Bài 4: Cho nửa đường tròn tâm O, có đường kính AB = 2R. Kẻ hai tia tiếp tuyến Ax và By của nửa đường tròn (Ax, By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là điểm tùy ý thuộc nửa đường tròn khác (khác A và B). Tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn cắt Ax tại D và cắt By tại E.

- Chứng minh rằng: $\triangle DOE$ là tam giác vuông.
- Chứng minh rằng: $AD \cdot BE = R^2$
- Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho diện tích của tứ giác ADEB nhỏ nhất.

Bài 5: Một cái xô dạng hình nón cụt có bán kính hai đáy là 19 cm và 9 cm, độ dài đường sinh l là 26 cm. Trong xô đã chứa sẵn lượng nước có chiều cao 18 cm so với đáy dưới. Tính chiều cao của cái xô. Hỏi phải đổ thêm bao nhiêu lít nước để đầy xô?**Đề số 9****Bài 1:** Cho biểu thức: $P = \frac{3x - 2\sqrt{x} - 4}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$

- Tìm x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P.
- Không dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị của P khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^3 - y^3 = 35 \end{cases}$$

Bài 3: Hai bác nông dân đem trứng ra chợ bán với tổng số trứng của hai người là 100 quả. Số trứng của hai người không bằng nhau, nhưng hai người bán được một số tiền bằng nhau. Một người nói với người kia: “Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của anh thì tôi bán được 90000 đồng”. Người kia nói: “Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của chị thì tôi bán được 40000 đồng thôi”. Hỏi mỗi người có bao nhiêu trứng và giá bán mỗi quả trứng của mỗi người là bao nhiêu?

Bài 4: a. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó và điểm D ở ngoài đường thẳng AB sao cho $AB.AC = AD^2$. Chứng minh rằng AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

b. Dựng một tam giác EFG, biết $FG = 6 \text{ cm}$, $\widehat{FEG} = 60^\circ$ và diện tích tam giác EFG bằng 12cm^2 .

c. Một chiếc cầu được thiết kế như hình vẽ dưới đây có độ dài đoạn $PQ = 32\text{m}$, chiều cao $MH = 4\text{m}$. Biết rằng $\widehat{PMQ}$ là cung của một đường tròn. Hãy tính độ dài cung $\widehat{PMQ}$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 5: Trong bảng sau (gồm nhiều dòng và nhiều cột), mỗi ô (được xác định vị trí bởi số thứ tự dòng và số thứ tự cột) chứa một giá trị số theo quy tắc sau:

	1	2	3	4	5	...
1	2008	2007	2006	2005	2004	...
2	2007	2005	2003	2001	1999	...
3	2006	2003	2000	1997	1994	...
4	2005	2001	1997	1993	1989	...
5	2004	1999	1994	1989	1984	...
...	...	...	...	...	...	...

Dòng 1 bắt đầu bởi một ô có giá trị 2008. Tiếp theo, ô trong cột k ($k \geq 2$) có giá trị bằng giá trị của ô trong cột kế trước (cột $k - 1$) trừ đi 1.

Dòng 2 bắt đầu bởi ô có giá trị 2007. Tiếp theo, ô trong cột k ($k \geq 2$) có giá trị bằng giá trị của ô trong cột kế trước (cột $k - 1$) trừ đi 2.

Dòng 3 bắt đầu bởi ô có giá trị 2006. Tiếp theo, ô trong cột k ($k \geq 2$) có giá trị bằng giá trị của ô trong cột kế trước (cột $k - 1$) trừ đi 3.

Cứ thế tiếp tục cho các dòng còn lại.

a. Tìm giá trị của số chứa trong ô ở dòng 10, cột 20.

b. Tìm các ô chứa số có giá trị 0 trong bảng. Giải thích cách tìm.

Đề số 10**Bài 1:** a. Tìm x biết: $3\sqrt{3x} - 5\sqrt{12x} + 7\sqrt{27x} = 28$ b. Rút gọn biểu thức: $A = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$

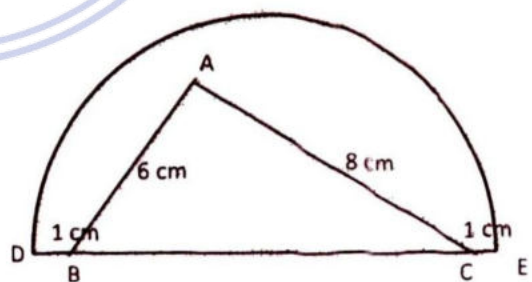
c. Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính giá trị biểu thức:

$$B = \sqrt{(1 - \sqrt{2008})^2} \cdot \sqrt{2009 + 2\sqrt{2008}}$$

Bài 2: a. Tìm giá trị của m để hai đường thẳng $y = (m^2 - 4)x + 2$ ($m \neq \pm 2$) và $y = 5x + m - 1$ song song với nhau.b. Cho parabol $y = ax^2$. Tìm hệ số a và tìm tọa độ các điểm thuộc parabol có tung độ $y = -9$.**Bài 3:** a. Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích 900 m^2 và chu vi 122 m. Tìm chiều dài và chiều rộng khu vườn.b. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm? Khi đó hãy tính theo m tổng các lập phương hai nghiệm của phương trình.**Bài 4:** Cho đường tròn (O; R), đường kính AB cố định, đường kính CD di động (hai đường thẳng AB và CD không trùng nhau). Tiếp tuyến của (O) tại B cắt các đường thẳng AC và AD lần lượt tại E và F.a. Chứng minh $BE \cdot BF = 4R^2$

b. Chứng minh CEFD là tứ giác nội tiếp.

c. Gọi I là trung điểm của EF và K là giao điểm của AI và CD. Chứng minh rằng khi CD di động thì K chạy trên một đường cố định.

Bài 5: Cho nửa đường tròn đường kính DE và tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$ và $DB = CE = 1 \text{ cm}$ (Hình). Khi đó toàn bộ hình vẽ quay một vòng quanh DE thì nửa hình tròn tạo thành hình (S_1) và tam giác ABC tạo thành hình (S_2) . Hãy mô tả các hình (S_1) và (S_2) . Tính thể tích phần của (S_1) nằm ngoài hình (S_2) .*(Phần lời giải, bạn đọc có thể tham khảo ở các phần trước)***ABC**