

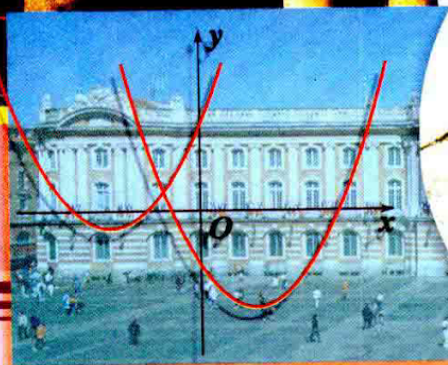
VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC – ĐÀM VĂN NHỊ

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TOÁN 9

TẬP MỘT

ĐẠI SỐ



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - ĐÀM VĂN NHÌ

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TOÁN 9

TẬP MỘT - ĐẠI SỐ

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN :

Đàm Văn Nhĩ : Các chuyên đề từ 1 đến 17 ;

Vũ Hữu Bình : Chuyên đề 18 ;

Phạm thị Bạch Ngọc : Các chuyên đề 19, 20.

Ảnh minh hoạ bìa một : Nhà toán học Pháp Francois Viète
(Vi-ét, 1540 - 10/12/1603)

Lời nói đầu

Bộ sách **Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở** gồm 8 cuốn, từ lớp 6 đến lớp 9, mỗi lớp 2 tập (tập một: Đại số, tập hai: Hình học), được biên soạn nhằm :

- Cung cấp cho các em học sinh một tài liệu có hệ thống và khá đầy đủ để học tập chuyên sâu về môn Toán ở cấp Trung học cơ sở.

- Tạo nguồn cho các lớp chuyên Toán ở Trung học phổ thông và giúp các em học sinh lớp 9 thi vào lớp 10 chuyên Toán.

- Giúp các cán bộ chỉ đạo môn Toán, các thầy cô giáo dạy Toán có thêm tài liệu để chỉ đạo và giảng dạy chuyên sâu về Toán tại các hoạt động chuyên đề, ngoại khóa, các câu lạc bộ Toán học nhằm bồi dưỡng cho học sinh về kiến thức, kỹ năng, tư duy và những phẩm chất tốt trong học tập, nghiên cứu và sáng tạo, góp phần vào việc đào tạo và bồi dưỡng nhân tài.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã và đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học, các trường Trung học cơ sở có uy tín, những chuyên gia Toán có kinh nghiệm ở Tạp chí Toán học & tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Cuốn sách **Tài liệu chuyên toán THCS Toán 9, tập một : Đại số** gồm 17 chuyên đề cơ bản và 3 chuyên đề nâng cao.

Ở mỗi chuyên đề cơ bản, cuốn sách không lặp lại các nội dung đã có trong Sách giáo khoa mà chỉ tóm tắt các kiến thức cơ bản, đồng thời bổ sung thêm một số kiến thức cần thiết. Do đó, khi giảng dạy các chuyên đề, các thầy cô giáo nên sử dụng kết hợp tài liệu này với Sách giáo khoa. Các ví dụ minh họa được chọn lọc nhằm giúp học sinh biết cách giải và trình bày một số dạng toán nâng cao thường gặp. Sau đó là các bài tập có hướng dẫn giải.

Các chuyên đề nâng cao nhằm giúp bạn đọc hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình, chúng được trình bày để học sinh có thể tiếp thu được.

Chúng tôi hi vọng cuốn sách này sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

Mặc dù các tác giả đã làm việc nhiệt tình, nghiêm túc và có trách nhiệm với bạn đọc, tuy nhiên, cuốn sách vẫn khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc. Các góp ý xin gửi về :

*Ban Toán - Tin, Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội,
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.*

Chủ biên
VŨ HỮU BÌNH

CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN

Chương I

CĂN THỨC

Chuyên đề 1. CĂN BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- 1) Với số $a \geq 0$, số b được gọi là *căn bậc hai* của số a nếu $b^2 = a$.
- 2) Số $a < 0$ không có căn bậc hai. Số $a = 0$ chỉ có một căn bậc hai là số 0. Số $a > 0$ có đúng hai căn bậc hai là số b và số $-b$ trong đó b được chọn là số dương, kí hiệu bởi $\sqrt{a}$, và được gọi là *căn bậc hai số học* của a .
- 3) Với biểu thức đại số A , biểu thức đại số B không âm được gọi là *căn bậc hai* của A , kí hiệu $B = \sqrt{A}$, nếu $B^2 = A$.

A được gọi là *biểu thức dưới dấu căn bậc hai*.

- 4) Điều kiện để A có căn bậc hai là $A \geq 0$.
- 5) Với biểu thức đại số A ta luôn có $\sqrt{A^2} = |A|$.
- 6) Với các biểu thức đại số A và B không âm ta luôn có
$$\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}; \sqrt{C^2 B} = |C| \sqrt{B}.$$
- 7) Với biểu thức đại số A, B thoả mãn $B \neq 0, AB \geq 0$ luôn có

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}; \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1.1. Rút gọn biểu thức $\sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2}$.

Giải.

Ta có $\sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2} = \sqrt{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(a-1)^2}$.

Hiển nhiên $7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$. Vậy $\sqrt{(7+4\sqrt{3})(a-1)^2} = (2+\sqrt{3}) \cdot |a-1|$.

Ví dụ 1.2. Rút gọn biểu thức $T = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ với $1 < a < 2$.

Giải.

Với $2 > a > 1$ và $T = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ ta có

$$T = \sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2} = \sqrt{a-1} + 1 + 1 - \sqrt{a-1} = 2.$$

Ví dụ 1.3. Đơn giản biểu thức $T = \left(\sqrt{8+2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8-2\sqrt{7}} \right) (\sqrt{63}+1)$.

Giải.

$$\begin{aligned} T &= \left(\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} + 2\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} \right) (\sqrt{3^2 \cdot 7}+1) = (\sqrt{7}+1+2(\sqrt{7}-1))(3\sqrt{7}+1) \\ &= (3\sqrt{7}-1)(3\sqrt{7}+1) = 62. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.4. Tính tổng $T = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Giải.

$$T = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} = 2-1=1.$$

Ví dụ 1.5. Chứng minh rằng $T = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}} = 6$.

Giải.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{7-2\sqrt{10}}(7+2\sqrt{10})(74-22\sqrt{10})}{\sqrt{125-4\sqrt{50}+5\sqrt{20}+\sqrt{8}}} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2(74-22\sqrt{10})}{5\sqrt{5}-20\sqrt{2}+10\sqrt{5}+2\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})(74-22\sqrt{10})}{15\sqrt{5}-18\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(74-22\sqrt{10})}{5\sqrt{5}-6\sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{5}-36\sqrt{2}}{5\sqrt{5}-6\sqrt{2}} = 6. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.6. Cho $a = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$.

Chứng minh rằng $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Giải.

$$\begin{aligned}a^2 &= 3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 2\sqrt{9 - (5 + 2\sqrt{3})} = 6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\&= 6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 6 + 2(\sqrt{3} - 1) = 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2.\end{aligned}$$

Do $a > 0$ nên $a = \sqrt{3} + 1$. Do đó $(a - 1)^2 = 3$ hay $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Ví dụ 1.7. Cho $a = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

Giải.

$$\begin{aligned}a^2 &= 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\&= 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } a = \sqrt{5} + 1.\end{aligned}$$

Do đó $(a - 1)^2 = 5$ hay $a^2 - 2a = 4$.

$$\text{Biểu diễn } T = \frac{(a^2 - 2a)^2 - 3(a^2 - 2a) + 4}{a^2 - 2a + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 4}{4 + 12} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 1.8. Cho $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1 + \sqrt{1-x}}{x-1}$ và $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Hãy tính giá trị $f(a)$.

Giải.

$$\text{Vì } f(x) = \frac{2 + \sqrt{4+4x}}{2x+2} + \frac{2 + \sqrt{4-4x}}{2x-2} \text{ nên}$$

$$f(a) = \frac{2 + \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+2} + \frac{2 + \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 + \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}}{\sqrt{3} + 2} + \frac{2 + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{3} - 2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} \\
 &= \frac{2 + 4\sqrt{3}}{3 - 4} = -2 - 4\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Vậy $f(a) = -2 - 4\sqrt{3}$.

Ví dụ 1.9. Giả thiết $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = a$. Chứng minh rằng

$$x\sqrt{\frac{(a + y^2)(a + z^2)}{a + x^2}} + y\sqrt{\frac{(a + z^2)(a + x^2)}{a + y^2}} + z\sqrt{\frac{(a + x^2)(a + y^2)}{a + z^2}} = 2a.$$

Giải.

Ta có $a + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x + y)(x + z)$.

Tương tự, ta có $a + y^2 = (y + x)(y + z)$; $a + z^2 = (z + x)(z + y)$. Từ đó ta có

$$x\sqrt{\frac{(a + y^2)(a + z^2)}{a + x^2}} = x\sqrt{\frac{(x + y)(y + z)(z + x)(z + y)}{(x + y)(x + z)}} = x(y + z).$$

$$\text{Tương tự } y\sqrt{\frac{(a + z^2)(a + x^2)}{a + y^2}} = y(z + x); z\sqrt{\frac{(a + x^2)(a + y^2)}{a + z^2}} = z(x + y).$$

Vậy VT = $x(y + z) + y(z + x) + z(x + y) = 2(xy + yz + zx) = 2a$.

BÀI TẬP

1.1. Hãy biểu diễn $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

1.2. Đơn giản biểu thức $T = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28} - 16\sqrt{3}$.

1.3. Chứng minh rằng $\sqrt{10 + 2\sqrt{24}} - \sqrt{10 - 2\sqrt{24}} = 4$.

1.4. Tính $T = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

$$1.5. \text{ Cho } \begin{cases} a = \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}} \\ b = \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}} \end{cases}$$

Hãy tính tích ab .

$$1.6. \text{ Chứng minh rằng } \frac{4}{\sqrt{5}-1} + \frac{3}{\sqrt{5}-2} + \frac{16}{\sqrt{5}-3} = -5.$$

$$1.7. \text{ Chứng minh } \left(\frac{2}{\sqrt{6}-1} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{\sqrt{6}-3} \right) \cdot \frac{5}{9\sqrt{6}+4} = \frac{1}{2}.$$

$$1.8. \text{ Cho } f(x) = \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{5}}} + \frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{5}}}. \text{ Tính } f(3).$$

$$1.9. \text{ Cho } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \text{ và } a = \frac{4}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}. \text{ Tính giá trị } f(a).$$

Chuyên đề 2. CĂN BẬC BA VÀ CĂN BẬC n

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- 1) Cho số a . Số b được gọi là *căn bậc ba* của số a nếu $b^3 = a$.
- 2) Với biểu thức đại số A , biểu thức đại số B được gọi là *căn bậc ba* của A kí hiệu $B = \sqrt[3]{A}$, nếu $B^3 = A$.

Chú ý rằng, nếu $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{B}$ thì $A = B$. Vậy căn bậc ba của A là duy nhất.

- 3) Với các biểu thức đại số A, B và $C \neq 0$ ta luôn có

$$\sqrt[3]{A^3} = A, \sqrt[3]{A^3 B} = A \sqrt[3]{B},$$

$$\sqrt[3]{A^3 B^3} = AB \text{ và } \sqrt[3]{\frac{A}{C}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{C}}.$$

- 4) Cho n là số nguyên dương lớn hơn 3. Với biểu thức đại số A không âm, biểu thức đại số B được gọi là *căn bậc n* của A , kí hiệu $B = \sqrt[n]{A}$ nếu $B^n = A$; A được gọi là *biểu thức dưới dấu căn bậc n* .
- 5) Khi n là số nguyên dương chẵn thì điều kiện để A có căn bậc n là $A \geq 0$ và $\sqrt[n]{A} \geq 0$.

6) Với biểu thức đại số $A \geq 0$ ta luôn có đồng nhất thức

$$\sqrt[3]{\sqrt{A}} = \sqrt[6]{A} = \sqrt{\sqrt[3]{A}}.$$

Chứng minh : Đặt $B = \sqrt[6]{A} \geq 0$. Khi đó

$$\sqrt[3]{\sqrt{A}} = \sqrt[3]{\sqrt{B^6}} = \sqrt[3]{B^3} = B \text{ và } \sqrt{\sqrt[3]{A}} = \sqrt{\sqrt[3]{B^6}} = \sqrt{B^2} = B.$$

Vậy $\sqrt[3]{\sqrt{A}} = \sqrt[6]{A} = \sqrt{\sqrt[3]{A}}.$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 2.1. Chứng minh rằng khi $ab \neq 0$ ta có $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$.

Giải.

Ta có $\frac{\sqrt[3]{a^5b^7}}{\sqrt[3]{a^2b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^5b^7}{a^2b}} - \sqrt[3]{\frac{a^4b^8}{ab^2}} = ab^2 - ab^2 = 0.$

Ví dụ 2.2. Chứng minh rằng khi $abc \neq 0$ ta có $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = abc^2$.

Giải.

Ta có $\frac{\sqrt[3]{a^4b^5c^7}}{\sqrt[3]{ab^2c}} = \sqrt[3]{\frac{a^4b^5c^7}{ab^2c}} = \sqrt[3]{a^3b^3c^6} = abc^2.$

Ví dụ 2.3. Với $a \geq 2 + \sqrt{2}$ và $u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}$:

$v = \sqrt{\left(a^2 + \frac{4}{a^2}\right) - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}$. Chứng minh rằng $u - v = 3$.

Giải.

Vì $a \geq 2 + \sqrt{2}$ nên $(a-2)^2 \geq 2$ hay $a + \frac{2}{a} \geq 4$.

Vậy $u - v = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a} - 1\right)^3} - \sqrt{\left(a + \frac{2}{a} - 4\right)^2} = a + \frac{2}{a} - 1 - \left(a + \frac{2}{a} - 4\right) = 3.$

Ví dụ 2.4. Đơn giản biểu thức $T = \sqrt[3]{8(7+5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7-5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$.

Giải.

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[3]{2^3(1+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{6^3(1-\sqrt{2})^3} + 4\sqrt{2} - 7 \\ &= 2(1+\sqrt{2}) + 6(1-\sqrt{2}) + 4\sqrt{2} - 7 = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.5. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

Giải.

$$\begin{aligned} \text{Đặt } T &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \\ \Rightarrow 2T &= \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{5})^3} \\ &= 1+\sqrt{5} + 1-\sqrt{5} = 2. \text{ Từ đó } T = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.6. Chứng minh, nếu $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ thì $a^3 + 3a = 4$.

Giải.

$$\text{Ta có } a^3 = (\sqrt{5}+2) - (\sqrt{5}-2) - 3a \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

Vậy $a^3 = 4 - 3a$ suy ra $a^3 + 3a = 4$.

Ví dụ 2.7. Chứng minh rằng
$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

Giải.

$$\text{Ta có } \frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} = \sqrt{3} \frac{(\sqrt{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^2.$$

$$\text{Từ đó } VT = \frac{3 + \sqrt[6]{108}}{3 + \sqrt[6]{108}} = 1.$$

$$\text{Đặt } VP = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = x$$

$$\Rightarrow x^3 = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2 - 3x\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}, \text{ hay } x^3 = 4 - 3x.$$

$$\text{Từ } x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Vậy VT = 1 = VP.

Ví dụ 2.8. Chứng minh rằng, nếu $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ thì

$$\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2.$$

Giải.

Nếu $\sqrt[3]{a+1} = \sqrt[3]{a-1}$ thì $2 = 0$: mâu thuẫn. Từ đó suy ra $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} \neq 0$.

Vì $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ nên

$$\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = \left[\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} \right] \left[\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} \right].$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = (a+1) - (a-1) = 2.$$

Ví dụ 2.9. Đơn giản biểu thức $T = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$

với $x \neq 0$; $x \neq -1$.

Giải.

$$\text{Ta có } \sqrt[6]{5+2\sqrt{6}} = \sqrt[6]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}} = 2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 2\sqrt[3]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 2.$$

$$\text{Vậy } T = \frac{x+1}{2+x+\frac{1}{x}} = \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}.$$

Ví dụ 2.10. Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$.

a) Chứng minh rằng $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.

b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Giải.

a) Vì $\sqrt[3]{61+46\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})^3} = 1+2\sqrt{5}$;

Từ đó $a = \sqrt{2} + \sqrt{7-1-2\sqrt{5}} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$

$\Rightarrow a^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.

b) Do $f(x) = (x^4 - 14x^2 + 9)(x+2) + 1$ và $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$ nên ta được $f(a) = 1$.

Ví dụ 2.11. Cho $a, b, c > 0$. Giả sử m, n, p là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $bc = \sqrt[m]{a}$, $ca = \sqrt[n]{b}$ và $ab = \sqrt[p]{c}$. Chứng minh rằng trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số bằng 1.

Giải.

Theo giả thiết có $a = b^m c^m$, $b = c^n a^n$, $c = a^p b^p$. Giả sử cả ba số a, b, c đã cho đều khác 1. Biến đổi như sau:

$$a = b^m c^m = (c^n a^n)^m (a^p b^p)^m = a^{mn+mp} b^{mp} c^{mn} = a^{mn+mp} (c^n a^n)^{mp} (a^p b^p)^{mn}$$

và suy ra $a = a^{mn+mp} (c^n a^n)^{mp} (a^p b^p)^{mn} = a^{mn+mp+2mnp} c^{mnp} b^{mnp}$ hay ta có biểu diễn

$$a = a^{mn+mp+2mnp} (b^m c^m)^{np} = a^{mn+np+mp+2mnp}.$$

Vì $0 < a \neq 1$ và m, n, p là những số nguyên dương lớn hơn 1 nên không thể có $mn + np + mp + 2mnp = 1$. Do vậy điều giả sử là sai hay trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số bằng 1, chẳng hạn $a = 1$.

Ví dụ 2.12. Cho $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}$.

a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm.

b) Giả sử đa thức $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. Tính $f(a)$.

Giải.

a) Ta có $a = \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2 - 3}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}} = 1+\sqrt{2}$.

Vậy $(a-1)^2 = (\sqrt{2})^2$ hay $a^2 - 2a - 1 = 0$.

Đa thức $x^2 - 2x - 1$ là đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm.

b) Chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x^2 - 2x - 1$ có biểu diễn dưới đây:

$$f(x) = (3x^4 + 2x^3 + 8x + 22)(x^2 - 2x - 1) + 53x + 22 - 53\sqrt{2}.$$

Thay $a = 1 + \sqrt{2}$ ta nhận được $f(a) = 75$.

Ví dụ 2.13. Cho $a = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$.

a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm.

b) Giả sử đa thức $f(x) = \frac{x^6 + x^4 + 4x^2}{40(x^4 + 4x^2 - 144)}$. Tính $f(a)$.

Giải.

$$\text{a) Vì } a = \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{\sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^3}} - \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^3} = 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} \text{ nên } a = -2\sqrt{3}.$$

Vậy $a^2 - 12 = 0$. Đa thức $x^2 - 12$ là đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm.

$$\text{b) Do } a^2 = 12 \text{ nên } f(a) = \frac{a^6 + a^4 + 4a^2}{40(a^4 + 4a^2 - 144)} = \frac{12^3 + 12^2 + 4.12}{40(12^2 + 4.12 - 12^2)} = 1$$

hay $f(a) = 1$.

Ví dụ 2.14. Cho $a = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$.

Giả sử ta có đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1935)^{2012}$. Hãy tính $f(a)$.

Giải.

$$\begin{aligned} \text{Vì } a^3 &= 38 + 17\sqrt{5} + 38 - 17\sqrt{5} + 3.a.\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}.\sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}} \\ \Rightarrow a^3 &= 76 - 3a \Rightarrow a^3 + 3a = 76 \Rightarrow f(a) = (76 + 1935)^{2012} = 2011^{2012}. \end{aligned}$$

BÀI TẬP

2.1. Hãy biểu diễn $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

2.2. Cho $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{11}}$. Chứng minh rằng $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$.

2.3. Cho $a = \left(\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} \right) \sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$.

a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm.

b) Giả sử $f(x) = \sum_{k=1}^{2012} kx^k + 2012$. Tính $f(a)$.

2.4. Chứng minh rằng, nếu $a, b > 0$ thì ta luôn có

$$\frac{a + 2\sqrt{ab} + 9b}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[3]{ab}} - 2\sqrt{b} = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^2.$$

2.5. Chứng minh rằng, nếu $ab \neq 0$ và $a \neq b^3$ thì ta luôn có

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2 \sqrt[3]{a^2} + b^4 \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4 \sqrt[3]{a^2} - a^2 b^2}{a^2 b^2 + b^2 - b^8 a^2 - b^4} = a^2 b^2.$$

2.6. Cho $a, b > 0$. Hãy đơn giản biểu thức

$$T = \frac{\sqrt{a^3 + 2a^2b} + \sqrt{a^4 + 2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a+b-\sqrt{a^2+2ab})} \cdot (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5} + a)}.$$

2.7. Giả sử $u^3 \geq v^2$ và $u, v \in \mathbb{Q}^+$. Hãy xác định u, v để

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

Chuyên đề 3. BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Cho hai số thực a và b

a được gọi là *lớn hơn* b , kí hiệu $a > b$, nếu hiệu $a - b$ là một số dương.

Tương tự như trên đối với $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$.

2) Với các số thực a, b, c và số tự nhiên n luôn có tính chất:

$$a > b \text{ khi và chỉ khi } a - b > 0;$$

$$a > b \text{ khi và chỉ khi } a + c > b + c;$$

$a > b$ khi và chỉ khi $a^{2n+1} > b^{2n+1}$;

$|a| > |b|$ khi và chỉ khi $a^{2n} > b^{2n}$, $n \geq 1$;

$a \geq b$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b \\ a > b \end{cases}$;

Với $c > 0$, $a > b$ khi và chỉ khi $ac > bc$;

Với $c < 0$, $a > b$ khi và chỉ khi $ac < bc$;

Với $a > b$, $b > c$ thì $a > c$;

$|a| \leq \alpha$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ -\alpha \leq a \leq \alpha. \end{cases}$

3) Với các số thực a và b ta luôn có tính chất:

a) Nếu $a > b$ thì $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$.

b) Nếu $a > b \geq 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

4) BĐT Cauchy (Cô-si) : Với các số a, b không âm, ta luôn có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

5) BĐT Bu-nhia-kốp-xki : Với các số $a, b, c, x, y, z \neq 0$ ta có các kết quả sau

a) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$.

b) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$.

Chứng minh.

a) Do $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 \geq (ax + by)^2$ nên $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

b) Do $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$

$= (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geq (ax + by + cz)^2$ nên

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$, $bz = cy$, $az = cx$.

6) a) $|a + b| \leq |a| + |b|$. Dấu "=" xảy ra khi $ab \geq 0$.

b) $||a| - |b|| \leq |a + b|$. Dấu "=" xảy ra khi $ab \leq 0$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

1. Một vài bất đẳng thức thường được sử dụng

Ví dụ 3.1. Chứng minh rằng với $a, b, c, x, y, z \geq 0$ luôn có các bất đẳng thức sau:

a) $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

b) $\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} \geq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}$.

Giải.

a) Vì $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \geq 4\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}$ nên

$$a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[4]{3(abc)^4} = 4\sqrt[3]{abc} \text{ hay } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

b) Nếu một trong ba số $a + x, b + y, c + z$ bằng 0, chẳng hạn $a + x = 0$ thì $a = x = 0$ và bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét $a + x, b + y, c + z \neq 0$.

Theo a) ta có
$$\begin{cases} \frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+y} + \frac{c}{c+z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+x)(b+y)(c+z)}} \\ \frac{x}{a+x} + \frac{y}{b+y} + \frac{z}{c+z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{(a+x)(b+y)(c+z)}} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta được $3 \geq 3 \frac{\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}}.$

Từ đây ta suy ra b).

Ví dụ 3.2. Cho ba số thực $a, b, c \geq 0$. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ khi $ab \geq 1$.

b) $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{1+abc}$ khi $a, b, c \geq 1$.

c) $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$.

d) $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \leq \frac{2}{1+ab}$ khi $ab \leq 1$.

$$e) \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \leq \frac{3}{1+abc} \text{ khi } a, b, c \leq 1.$$

$$g) \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}}.$$

Giải.

a) Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức $(ab-1)(a-b)^2 \geq 0$.

Vậy $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ khi $ab \geq 1$.

$$b) \text{ Vì } a, b, c \geq 1 \text{ nên từ } \begin{cases} \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \geq \frac{2}{1+abc} \\ \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{2}{1+bc} \geq \frac{2}{1+abc} \\ \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} \geq \frac{2}{1+ca} \geq \frac{2}{1+abc} \end{cases}$$

ta suy ra $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{1+abc}$.

c) Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức $(ab-1)^2 + ab(a-b)^2 \geq 0$.

Vậy $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$.

d) Quy đồng mẫu thức ở hai vế ta có kết quả.

$$e) \text{ Vì } a, b, c \leq 1 \text{ nên từ } \begin{cases} \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \leq \frac{2}{1+ab} \leq \frac{2}{1+abc} \\ \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \leq \frac{2}{1+bc} \leq \frac{2}{1+abc} \\ \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+a)^2} \leq \frac{2}{1+ca} \leq \frac{2}{1+abc} \end{cases}$$

ta suy ra $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \leq \frac{3}{1+abc}$.

g) Quy đồng mẫu thức hai vế có ngay bất đẳng thức.

Chú ý. Khi $ab > 1$ sẽ không có d). Thật vậy,

$$\text{khi } a = 2, b = 1 \text{ có } ab = 2 > 1 \text{ và } \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} < \frac{2}{3} = \frac{2}{1+ab};$$

$$\text{còn khi } a = 9, b = 1 \text{ có } ab = 9 > 1 \text{ và } \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{100} + \frac{1}{4} > \frac{2}{10} = \frac{2}{1+ab}.$$

2. Một vài phương pháp chứng minh đơn giản

Để chứng minh $A \geq B$ ta có thể xét hiệu $A - B$ và chỉ ra $A - B \geq 0$.

Ví dụ 3.3. Với ba số thực a, b, c luôn có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Từ đó suy ra kết quả: Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $ab + bc + ca \geq 1$ thì $a = b = c$. Hơn nữa ta còn có $a = b = c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Giải.

$$\text{Vì } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0 \text{ nên}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

$$\text{Khi } 1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq 1 \text{ thì } a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

$$\text{Từ đây suy ra } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \text{ hay } a = b = c.$$

Ví dụ 3.4. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Giải.

$$\text{Vì } a^2 > (b-c)^2, b^2 > (c-a)^2 \text{ và } c^2 > (a-b)^2 \text{ nên}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 > (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \text{ hay } a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Ví dụ 3.5. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác vuông với $a^2 = b^2 + c^2$. Chứng minh rằng, nếu hai số thực x và y thoả mãn $bx + cy = a$ thì $x^2 + y^2 \geq 1$.

Giải.

$$\text{Vì } (b^2 + c^2)(x^2 + y^2) - (bx + cy)^2 = (by - cx)^2 \geq 0 \text{ nên } a^2(x^2 + y^2) - a^2 \geq 0.$$

$$\text{Vì } a \neq 0 \text{ nên } x^2 + y^2 \geq 1.$$

Ví dụ 3.6. Chứng minh rằng với ba số thực $a, b, c \in [-2; 3]$ thoả mãn $a + b + c = 0$ luôn có bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \leq 18$.

Giải.

Vì $a, b, c \in [-2; 3]$ nên $(a+2)(a-3) \leq 0, (b+2)(b-3) \leq 0$ và $(c+2)(c-3) \leq 0$.

Từ đây suy ra $a^2 - a \leq 6, b^2 - b \leq 6$ và $c^2 - c \leq 6$.

Do bởi $a + b + c = 0$ nên sau khi cộng ba bất đẳng thức này, vế theo vế, ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 18.$$

Ví dụ 3.7. Với $a, b, c > 0$ và $abc = 1$, hãy chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8.$$

Giải.

Vì $1+a \geq 2\sqrt{a}, 1+b \geq 2\sqrt{b}$ và $1+c \geq 2\sqrt{c}$ nên

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{c} = 8\sqrt{abc} = 8.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.8. Chứng minh rằng với hai số thực $a, b \in [1; 2]$ luôn có

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leq \frac{9}{2}.$$

Giải.

Vì $a, b \in [1; 2]$ nên $(a-1)(a-2) \leq 0; (b-1)(b-2) \leq 0$.

Từ đây suy ra $a^2 + 2 \leq 3a; b^2 + 2 \leq 3b$ hay $a + \frac{2}{a} \leq 3; b + \frac{2}{b} \leq 3$.

Do bởi $6 \geq (a+b) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right) \geq 2\sqrt{(a+b)\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right)}$ nên $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leq \frac{9}{2}$.

Ví dụ 3.9. Với hai số thực a và b thoả mãn $a+b \geq 0$, hãy chứng minh các bất đẳng thức

$$a) \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3;$$

$$b) a^3 + b^3 + 2 \geq 2ab + a + b.$$

Giải.

a) Hiệu $T = \frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geq 0$.

b) Từ a) và $2ab \leq \frac{1}{2}(a+b)^2$ suy ra hiệu

$$a^3 + b^3 + 2 - 2ab - a - b \geq \frac{1}{4}(a+b)^3 - \frac{1}{2}(a+b)^2 - (a+b) + 2 = T. \text{ Đặt } x = a+b.$$

$$\text{Khi đó } T = \frac{1}{4}(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) = \frac{(x-2)^2(x+2)}{4} \text{ hay } T = \frac{1}{4}(a+b+2)(a+b-2)^2 \geq 0.$$

$$\text{Vậy } a^3 + b^3 + 2 \geq 2ab + a + b.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b \geq 0$.

Ví dụ 3.10. Với các số thực $a, b, c \geq 0$ ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c.$$

Giải.

$$\text{Hiển nhiên ta có } \begin{cases} a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c) \\ b^2 \geq b^2 - (c-a)^2 = (a+b-c)(-a+b+c) \\ c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 = (-a+b+c)(a-b+c). \end{cases}$$

• Nếu $a+b-c < 0$ thì $a-b+c > 0, -a+b+c > 0$. Như vậy

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) < 0 \leq abc.$$

Tương tự xét các trường hợp khác.

• Nếu $a+b-c \geq 0$ thì $a-b+c \geq 0, -a+b+c \geq 0$ và do đó

$$a^2b^2c^2 \geq (a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2.$$

Từ đây suy ra $abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$. Đây là điều cần chứng minh.

3. Bất đẳng thức chứa căn thức

Ví dụ 3.11. Chứng minh rằng, với các số a, b thỏa mãn $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

Giải.

Vì hai vế đều dương nên $\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$ tương đương bất đẳng thức $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1-ab$. Bất đẳng thức cuối cùng này tương đương với $(1-a^2)(1-b^2) \leq (1-ab)^2$ hay $(a-b)^2 \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức $\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$ là đúng.

Ví dụ 3.12. Chứng minh rằng, nếu $a^2 + b^2 = 1$ thì ta có bất đẳng thức

$$a\sqrt{1+b} + b\sqrt{1+a} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Giải.

Theo bất đẳng thức Bu-nhia-kốp-xki ta có

$$a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} = \sqrt{2}$$

$$\text{và } a\sqrt{1+b} + b\sqrt{1+a} \leq \sqrt{(a^2+b^2)(1+b+1+a)} = \sqrt{2+a+b}.$$

$$\text{Vậy } a\sqrt{1+b} + b\sqrt{1+a} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 3.13. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:

$$T = \sqrt{2012\sqrt{2011\sqrt{2010}}} < 2012.$$

Giải.

$$\text{Ta có } T < \sqrt{2012\sqrt{2012\sqrt{2012}}} = \sqrt[8]{2012^7}. \text{ Vậy } T < 2012.$$

Ví dụ 3.14. Với $a \in [2010; 2012]$, hãy chứng minh bất đẳng thức sau đây:

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2012-a} + \sqrt{a-2010} \leq 2.$$

Giải.

$$\text{Đặt } T = \sqrt{2012-a} + \sqrt{a-2010}. \text{ Ta có } T^2 = 2 + 2\sqrt{2012-a}\sqrt{a-2010} \geq 2.$$

$$\text{Do } T > 0 \text{ nên } T \geq \sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 2010$ hoặc $a = 2012$.

Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$2\sqrt{(2012-a)(a-2010)} \leq 2012-a+a-2010=2 \Rightarrow T^2 \leq 4. \text{ Suy ra } T \leq 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $2012-a=a-2010$ tức là $a=2011$.

Ví dụ 3.15. Chứng minh rằng, nếu $a, b > 0$ thì $\sqrt{\frac{a^5}{b}} + \sqrt{\frac{b^5}{a}} \geq (a+b)\sqrt{ab}$.

Giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{\frac{a^5}{b}} + \sqrt{\frac{b^5}{a}} = \frac{a^3 + b^3}{\sqrt{ab}} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{\sqrt{ab}}.$$

$$\text{Vì } a^2 - ab + b^2 \geq ab \text{ nên } \sqrt{\frac{a^5}{b}} + \sqrt{\frac{b^5}{a}} \geq \frac{(a+b)ab}{\sqrt{ab}} = (a+b)\sqrt{ab}.$$

Ví dụ 3.16. Chứng minh rằng, nếu $a, b > 0$ và $c = a + b$ thì ta luôn có

$$\text{a) } \sqrt[5]{\left(\frac{a}{c}\right)^4} + \sqrt[5]{\left(\frac{b}{c}\right)^4} > 1.$$

$$\text{b) } \sqrt[5]{\left(\frac{a}{c}\right)^6} + \sqrt[5]{\left(\frac{b}{c}\right)^6} < 1.$$

Giải.

$$\text{a) Vì } c = a + b \text{ nên } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1. \text{ Khi đó } 0 < \frac{a}{c}, \frac{b}{c} < 1.$$

$$\text{Vì } \left(\frac{a}{c}\right)^5 = \left(\frac{a}{c}\right)^4 \left(\frac{a}{c}\right) < \left(\frac{a}{c}\right)^4, 1 = \left(\frac{a}{c}\right)^4 \text{ nên } \frac{a}{c} = \sqrt[5]{\left(\frac{a}{c}\right)^5} < \sqrt[5]{\left(\frac{a}{c}\right)^4}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \frac{b}{c} < \sqrt[5]{\left(\frac{b}{c}\right)^4}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt[5]{\left(\frac{a}{c}\right)^4} + \sqrt[5]{\left(\frac{b}{c}\right)^4} > \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1.$$

$$\text{b) Vì } \left(\frac{a}{c}\right)^6 = \left(\frac{a}{c}\right)^5 \left(\frac{a}{c}\right) < \left(\frac{a}{c}\right)^5 \text{ nên } \frac{a}{c} = \sqrt[5]{\left(\frac{a}{c}\right)^5} > \sqrt[5]{\left(\frac{a}{c}\right)^6}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \frac{b}{c} > \sqrt[5]{\left(\frac{b}{c}\right)^6}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt[5]{\left(\frac{a}{c}\right)^6} + \sqrt[5]{\left(\frac{b}{c}\right)^6} < \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1.$$

Ví dụ 3.17. Chứng minh rằng, với số nguyên $n \geq 2$ ta luôn có

$$2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Do đó số nguyên lớn nhất m thỏa mãn $m \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$ là số 198.

Giải.

$$\text{Đặt } T = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} \text{ nên } \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}). \text{ Do đó ta có}$$

$$T > 2[(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] = 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

$$\text{Vậy } T > 2\sqrt{n} - 2. \text{ Lại có } \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Do đó ta có

$$T < 1 + 2[(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})] = 1 + 2\sqrt{n} - 2.$$

$$\text{Vậy } T < 2\sqrt{n} - 1.$$

$$\text{Với } n = 10000 \text{ ta có } 198 \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}} < 199.$$

Vậy số cần tìm là $m = 198$.

BÀI TẬP

3.1. Chứng minh với số thực $a < 1$ luôn có bất đẳng thức

$$T = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{64}) \leq \frac{1}{1-a}.$$

3.2. Giả sử các số a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$ và $c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng $|ac + bd| \leq 1$.

3.3. Giả sử $a, b, c \in [0; 4]$ thỏa mãn $a + b + c = 6$. Khi đó ta có $a^2 + b^2 + c^2 \leq 20$. Khi nào dấu bằng xảy ra.

3.4. Chứng minh rằng với $a \geq b \geq c$ luôn có $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a$.

3.5. Với $a, b \geq 0$, hãy chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a+b)(1+ab) \geq 4ab.$$

3.6. Với ba số $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$ luôn có bất đẳng thức $b + c \geq 16abc$.

3.7. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$.

3.8. Chứng minh rằng, nếu $a, b > 0$ thì $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

3.9. Chứng minh rằng, nếu a và b là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông với độ dài cạnh huyền là c thì $a + b \leq c\sqrt{2}$.

3.10. Với $a, b, c \in [1; 2]$, hãy chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 10.$$

3.11. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} < \frac{1}{2}.$$

3.12. Cho $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

3.13. Cho $a, b, c, d \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bc+cd+db+1} + \frac{b}{cd+da+ac+1} + \frac{c}{da+ab+bd+1} + \frac{d}{ab+bc+ca+1} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4abcd}.$$

3.14. Giả sử $a, b > 0$ và $c = a + b$. Chứng minh rằng $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$ và $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} < \sqrt{c^3}$.

3.15. Chứng minh rằng, nếu $a, b > 0$ thì $\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt[3]{a^3 + b^3}$.

3.16. Với $a, b, c \geq 0$ và không có hai số nào bằng nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Chuyên đề 4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Giả sử có biểu thức đại số $A = A(x, y, \dots, z)$ phụ thuộc vào các chữ $x, y, \dots, z$ (tham số), và số M sao cho ta luôn có $A \leq M$. Nếu có giá trị $x = a, y = b, \dots, z = c$ sao cho $A(a, b, \dots, c) = M$ thì M được gọi là *giá trị lớn nhất* của biểu thức đại số A .

Giả sử có số m sao cho ta luôn có $A \geq m$. Nếu có giá trị $x = a, y = b, \dots, z = c$ để $A(a, b, \dots, c) = m$ thì m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của biểu thức đại số A .

Chú ý rằng, trước khi xác định giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của A ta nên đơn giản biểu thức đại số A . Sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá biểu thức đại số A .

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 4.1. Giả thiết $2 \leq a \leq 4$. Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{a-2} + \sqrt{4-a}.$$

Giải.

Ta có $T^2 = 2 + 2\sqrt{a-2} \cdot \sqrt{4-a}$. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$T^2 \leq 2 + a - 2 + 4 - a = 4.$$

Do $T > 0$ nên $T \leq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $a - 2 = 4 - a$, tức là $a = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng 2.

Lại có $T^2 = 2 + 2\sqrt{a-2} \cdot \sqrt{4-a} \geq 2$. Do đó $T \geq \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = 2$ hoặc $a = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\sqrt{2}$.

Ví dụ 4.2. Giả thiết $a \geq 4$, $b \geq 9$. Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{b\sqrt{a-4} + a\sqrt{b-9}}{ab}.$$

Giải.

Hiển nhiên $T \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $a = 4$, $b = 9$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 0.

Ta có $T = \frac{\sqrt{a-4}}{a} + \frac{\sqrt{b-9}}{b}$, theo bất đẳng thức Cauchy có

$$a = a - 4 + 4 \geq 2\sqrt{4(a-4)} = 4\sqrt{a-4} \Rightarrow \frac{\sqrt{a-4}}{a} \leq \frac{1}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a - 4 = 4$ hay $a = 8$.

Tương tự $\frac{\sqrt{b-9}}{b} \leq \frac{1}{6}$. Dấu "=" xảy ra khi $b - 9 = 9$ hay $b = 18$.

Vậy $T \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$. Do đó giá trị lớn nhất của T bằng $\frac{5}{12}$ khi $a = 8$, $b = 18$.

Ví dụ 4.3. Giả thiết $a \geq 6$. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{a + 2\sqrt{3a-9}} + \sqrt{a - 2\sqrt{3a-9}}.$$

Giải.

Ta có $T^2 = a + 2\sqrt{3a-9} + a - 2\sqrt{3a-9} + 2\sqrt{a^2 - 4(3a-9)}$

$$= 2a + 2\sqrt{(a-6)^2} = 2a + 2(a-6) = 4a - 12.$$

Do $a \geq 6 \Rightarrow T^2 \geq 12$. Do $T > 0$ nên $T \geq 2\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $2\sqrt{3}$ khi $a = 6$.

Ví dụ 4.4. Giả thiết $-1 \leq a \leq 1$. Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} \cdot (\sqrt{(1+a)^3} - \sqrt{(1-a)^3})}{2 + \sqrt{1-a^2}}.$$

Giải.

Đặt $u = \sqrt{1+a}$, $v = \sqrt{1-a}$.

Khi đó ta có $u^2 + v^2 = 2$ và biến đổi

$$T = \frac{\sqrt{1+uv} \cdot (u^3 - v^3)}{u^2 + v^2 + uv} = \sqrt{1+uv} \cdot (u - v) = \sqrt{\frac{2+2uv}{2}} \cdot (u - v).$$

$$\text{Thay } 2 = u^2 + v^2 \text{ được } T = \frac{(u+v)(u-v)}{\sqrt{2}} = \frac{u^2 - v^2}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}.$$

Do vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức T bằng $\sqrt{2}$ khi $a = 1$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức T bằng $-\sqrt{2}$ khi $a = -1$.

Ví dụ 4.5. Giả thiết $0 < a \leq 1$. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt[3]{\frac{2a^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt{\frac{(a+1)^3 \sqrt{1-a}}{a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1-a^2}}{2a\sqrt{a}}}.$$

Giải.

$$\text{Ta có } T = \sqrt[6]{\frac{4a^4}{(a+1)^4} \cdot \frac{(a+1)^3(1-a)}{a^3} \cdot \frac{1-a^2}{4a^3}} = \sqrt[3]{\frac{1-a}{a}}.$$

Do $0 < a \leq 1$ nên $T \geq 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T bằng 0 khi $a = 1$.

Khi a tiến dần đến 0 thì T tiến dần đến $+\infty$. Vậy T không có giá trị lớn nhất.

Ví dụ 4.6. Cho $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$ và $g(x) = 2\sqrt{x-3}$ với $x \geq 3$. Khi đó hãy

a) Xác định giá trị nhỏ nhất của $f(x)$.

b) Chứng minh $f(x) > g(x)$ với mọi $x \geq 3$. Do đó không có $x \geq 3$ để $f(x) = g(x)$.

Giải.

a) Vì $x \geq 3$ nên $x-1 \geq 2$ tương đương với $\sqrt{x-1} \geq \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$ và $x-2 \geq 1$ tương đương với $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3-2} = 1$.

Từ đây suy ra $f(x) \geq \sqrt{2} + 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $\sqrt{2} + 1$ khi $x = 3$.

b) Vì $x-1 > x-3$ và $x-2 > x-3$ nên $\sqrt{x-1} > \sqrt{x-3}$ và $\sqrt{x-2} > \sqrt{x-3}$.

Vậy $f(x) > g(x)$ với mọi $x \geq 3$. Do đó không có $x \geq 3$ để $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 4.7. Cho $f(x) = \sqrt{6x-1} + \sqrt{9x^2-1}$ với $x \geq \frac{1}{3}$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ và chỉ ra những giá trị của x thoả mãn $f(x) = 1$.

Giải.

Vì $x \geq \frac{1}{3}$ nên $6x-1 > 0$ và $9x^2-1 \geq 0$.

Do đó biểu thức $f(x) = \sqrt{6x-1} + \sqrt{9x^2-1}$ hoàn toàn xác định với $x \geq \frac{1}{3}$.

Do $f(x) \geq \sqrt{6x-1} + 0$ và $\sqrt{6x-1} \geq \sqrt{6 \cdot \frac{1}{3} - 1} = 1$ với $x \geq \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng 1 tại $x = \frac{1}{3}$.

Từ đó suy ra chỉ có duy nhất một giá trị $x = \frac{1}{3}$ thoả mãn $f(x) = 1$.

Ví dụ 4.8. Cho $T = \sqrt{x^2 + 2x + \frac{3}{4}} + \sqrt{x^2 + 2x + \frac{3}{4}} + \sqrt{x^2 + 3x + \frac{9}{4}}$. Khi đó hãy

a) Xác định giá trị nhỏ nhất của T khi $x \geq -\frac{3}{2}$.

b) Xác định giá trị của x biết $2T = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$.

Giải.

a) Vì $\sqrt{x^2 + 3x + \frac{9}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{3}{2}\right|$ và $x \geq -\frac{3}{2}$ nên có

$$x^2 + 2x + \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 + 3x + \frac{9}{4}} = x^2 + 2x + \frac{3}{4} + \left|x + \frac{3}{2}\right| = x^2 + 3x + \frac{9}{4}.$$

Do đó $T = \sqrt{x^2 + 3x + \frac{9}{4}} = x + \frac{3}{2} \geq 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 0 tại $x = -\frac{3}{2}$.

b) Ta có $2T = (x^2 + x + 1)(2x + 3)$.

Vì $T \geq 0$ và $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên $2x + 3 \geq 0$ hay $x \geq -\frac{3}{2}$.

Từ đó suy ra $2x + 3 = (x^2 + x + 1)(2x + 3)$ và suy ra $x = -\frac{3}{2}$ hoặc $x^2 + x + 1 = 1$.

Do đó $x = -\frac{3}{2}$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 0$ là các giá trị cần tìm.

BÀI TẬP

- 4.1. Xác định giá trị lớn nhất của diện tích một hình chữ nhật biết chu vi của nó bằng $p > 0$ không đổi.
- 4.2. Xác định hình có thể tích lớn nhất nằm trong số các hình hộp chữ nhật có cùng tổng ba kích thước.
- 4.3. Cho mảnh tôn hình vuông với độ dài cạnh là 1m. Người ta cắt bốn góc bốn hình vuông bằng nhau và uốn phần còn lại thành một chiếc thùng hình hộp không nắp. Xác định thể tích lớn nhất có thể có của chiếc thùng đó.
- 4.4. Giả sử $x \geq \frac{1}{2}$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1}.$$

4.5. Giả sử $a, b, c \geq 1$. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = a + b + c + ab + bc + ca - 3abc.$$

4.6. Giả sử $a, b, c \geq 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của

$$T = \frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1}.$$

4.7. Giả sử $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c \leq 3$. Hãy xác định giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{a+b}{a^2+b^2+2} + \frac{b+c}{b^2+c^2+2} + \frac{c+a}{c^2+a^2+2}.$$

4.8. Giả sử $a, b, c \in [1; 2]$. Hãy chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$\frac{1}{4+a-ab} + \frac{1}{4+b-bc} + \frac{1}{4+c-ca} \geq \frac{3}{3+abc}$$

và tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $T = \frac{1}{4+a-ab} + \frac{1}{4+b-bc} + \frac{1}{4+c-ca}.$

Chuyên đề 5. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ ĐƠN GIẢN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương trình có hạng tử chứa ẩn số trong biểu thức đại số dưới dấu căn được gọi là *phương trình vô tỉ*. Trong chuyên đề này, ta chỉ xét các dạng phương trình vô tỉ đơn giản.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 5.1. Giải và biện luận phương trình $\sqrt{5x+1} = c$.

Giải.

Nếu $c < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $c \geq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{c^2 - 1}{5}.$

Ví dụ 5.2. Giải phương trình $\sqrt{25x+1} = \sqrt{13x-11}$.

Giải.

Điều kiện $25x+1 \geq 0$ và $13x-11 \geq 0$.

Từ phương trình $\sqrt{25x+1} = \sqrt{13x-11}$ suy ra $25x+1=13x-11$ hay $12x = -12$.

Giải ra được $x = -1$. Vì $25(-1)+1 = -24 < 0$ nên nghiệm này không thỏa mãn đầu bài. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 5.3. Giải phương trình $\sqrt{3x+2} = \sqrt{10x-12}$.

Giải.

Điều kiện $3x+2 \geq 0$ và $10x-12 \geq 0$.

Từ phương trình $\sqrt{3x+2} = \sqrt{10x-12}$ suy ra $7x = 14$ hay $x = 2$.

Vì $3.2+2 = 8 > 0$ và $10.2-12 = 8 > 0$ nên nghiệm này thỏa mãn đầu bài.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$.

Ví dụ 5.4. Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + \sqrt{7-2x} = 4x^2 - 12x + 13$.

Giải.

Điều kiện $2x+1 \geq 0$ và $7-2x \geq 0$.

Theo bất đẳng thức Bu-nhia-kốp-xki ta có

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{7-2x} \leq \sqrt{(1+1)(2x+1+7-2x)} = 4.$$

Vậy $\sqrt{2x+1} + \sqrt{7-2x} \leq 4$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$.

Lại có $4x^2 - 12x + 13 = (2x-3)^2 + 4 \geq 4$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 5.5. Giải phương trình $a\sqrt{x^2-b^2} + b\sqrt{x^2-a^2} = a^2 + b^2$ với $a, b > 0$.

Giải.

Điều kiện $x^2 \geq a^2$ và $x^2 \geq b^2$.

Theo bất đẳng thức Bu-nhia-kốp-xki ta có

$$a^2 + b^2 = a\sqrt{x^2-b^2} + b\sqrt{x^2-a^2} \leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2-a^2+x^2-b^2)}.$$

$$\text{Vậy } (a^2 + b^2)^2 \leq (a^2 + b^2)(2x^2 - a^2 - b^2).$$

$$\text{Từ đây suy ra } 2x^2 - a^2 - b^2 \geq a^2 + b^2 \text{ hay } x^2 \geq a^2 + b^2.$$

$$\text{Do } x^2 \geq a^2 + b^2 \text{ nên}$$

$$a^2 + b^2 = a\sqrt{x^2 - b^2} + b\sqrt{x^2 - a^2} \geq a\sqrt{a^2} + b\sqrt{b^2} = a^2 + b^2.$$

$$\text{Từ đây suy ra } x^2 = a^2 + b^2 \text{ hay } x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$

BÀI TẬP

5.1. Giải phương trình $\sqrt{3x-5} = \sqrt{7x-1}$.

5.2. Giải và biện luận phương trình $\sqrt{5x-7} = m$.

5.3. Giải phương trình $\sqrt{x-3} + \sqrt{13-x} = 2\sqrt{5}$.

5.4. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

5.5. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-7} + \sqrt[3]{x-3} = 6\sqrt[6]{(x-3)(x-7)}$.

5.6. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$.

5.7. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$.

5.8. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+7)^2} - \sqrt[3]{(2-x)(x+7)} = 3$.

5.9. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x}{2x-1}} + \sqrt{\frac{2x-1}{x}} = 2$.

5.10. Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})\left(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}\right) = 3$.

5.11. Cho $a, b, c > 0$. Hãy giải phương trình

$$a\sqrt{x^2 - b^2 - c^2} + b\sqrt{x^2 - c^2 - a^2} + c\sqrt{x^2 - a^2 - b^2} = a^2 + b^2 + c^2.$$

HÀM SỐ BẬC NHẤT

Chuyên đề 6. KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- 1) Cho A và B là hai tập hợp các số đều khác rỗng.

Một hàm số f từ A đến B kí hiệu $f : A \rightarrow B$, là một quy tắc gán mỗi phần tử của A cho đúng một phần tử của B.

Nếu y thuộc B là phần tử được gán cho phần tử x thuộc A qua hàm số f thì ta viết $y = f(x)$. Số $f(x)$ được gọi là *giá trị* của hàm số f tại x , x được gọi là *biến số* hay *đối số* của hàm số f . Với giá trị $x = a \in A$ ta có giá trị $y = f(a) \in B$.

- 2) Nếu f là một hàm số từ A đến B thì tập A được gọi là *tập xác định* của f và B được gọi là *miền giá trị* của f . Nếu $y = f(x)$ thì y được gọi là *ảnh* của x và x được gọi là *tạo ảnh* của y .
- 3) Giả sử A và B là hai tập con của $\mathbf{R}$ và f là hàm số từ A đến B. Khi đó tập tất cả các điểm $(a; f(a))$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy với mọi $a \in A$ được gọi là *đồ thị* của hàm số $y = f(x)$ với tập xác định A.
- 4) Người ta thường sử dụng một trong ba cách sau để cho một hàm số:
- Cho hàm số bởi bảng các giá trị tương ứng (biểu đồ).
 - Cho hàm số bởi công thức. Chú ý rằng, có những hàm số được cho bởi nhiều công thức khác nhau trên những tập xác định khác nhau. Chẳng hạn

$$f(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{khi } x \leq 2 \\ x^3+5 & \text{khi } x > 2; \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad f(x) = \begin{cases} x-12 & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2-2x & \text{khi } -1 < x < 2 \\ x^4-3x^2 & \text{khi } x \geq 2. \end{cases}$$

- Cho hàm số bởi một đồ thị.
- 5) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập I (I là một khoảng, một đoạn hay nửa khoảng). Ta nói
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm hằng* trên I nếu có số M để $f(x) = M$ với mọi $x \in I$.

b) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *đồng biến* hoặc *đơn điệu tăng* trên I nếu với mọi $x_1, x_2 \in I$ thoả mãn $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *nghịch biến* hoặc *đơn điệu giảm* trên I nếu với mọi $x_1, x_2 \in I$ thoả mãn $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ gọi là *không tăng* trên I nếu với mọi $x_1, x_2 \in I$ thoả mãn $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \geq f(x_2)$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là *không giảm* trên I nếu với mọi $x_1, x_2 \in I$ thoả mãn $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$. Khi xét hàm số $y = f(x)$, người ta thường quan tâm tới tính tăng, giảm, không tăng hoặc không giảm của nó trên một tập I nào đó. Khi đó ta thường nói : Xét sự biến thiên của $y = f(x)$ trên I .

- 6) Tập $D \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập đối xứng qua 0 nếu $x \in D$ thì $-x \in D$.

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là *hàm số chẵn* nếu D là tập xác định đối xứng qua 0 và $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in D$.

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là *hàm số lẻ* nếu D là tập xác định đối xứng qua 0 và $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in D$.

Kiến thức bổ sung

Cho $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Toạ độ trung điểm của AB là $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

Độ dài AB bằng $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 6.1. Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ trên tập xác định của hàm số.

Giải.

Hàm số $f(x)$ xác định khi $x \geq 1$. Với mọi x_1 và x_2 thoả mãn $1 \leq x_1 < x_2$, ta có hiệu

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2 - 1} - \sqrt{x_1 - 1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2 - 1} + \sqrt{x_1 - 1}} > 0.$$

Như vậy, hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ là đồng biến trên tập xác định của nó.

Ví dụ 6.2. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + m$. Khi đó

a) Chứng minh rằng hàm số đồng biến khi $x \geq 0$.

b) Chứng minh rằng hàm số nghịch biến khi $x \leq 0$.

c) Xác định m để $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Với những giá trị đã tìm được của m hãy chứng minh $x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 28x + m > -\frac{98}{5}$, $x \in \mathbf{R}$.

Giải.

a) Với mọi x_1 và x_2 thoả mãn $0 \leq x_1 < x_2$ ta có hiệu

$$\begin{aligned}f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^4 + 2x_2^2 + m) - (x_1^4 + 2x_1^2 + m) \\&= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2 + 2) > 0.\end{aligned}$$

Như vậy, hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + m$ là đồng biến trên $[0; +\infty)$.

b) Với mọi x_1 và x_2 thoả mãn $x_1 < x_2 \leq 0$ ta có hiệu

$$\begin{aligned}f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^4 + 2x_2^2 + m) - (x_1^4 + 2x_1^2 + m) \\&= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2 + 2) < 0\end{aligned}$$

vì $(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1^2 + 2) > 0$; $x_2 + x_1 < 0$.

Như vậy, ta thấy hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + m$ nghịch biến trên $(-\infty; 0]$.

c) Nếu $f(x) > 0$ với mọi giá trị của x thì $f(0) > 0$. Khi đó $m > 0$.

Với $m > 0$ hiển nhiên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 28x + m + \frac{98}{5} &= \left(x^4 + 4x^3 + 4x^2\right) + 10\left(x^2 + 2 \cdot \frac{7}{5}x + \frac{49}{25}\right) + m \\&= (x^2 + 2x)^2 + 10\left(x + \frac{7}{5}\right)^2 + m > 0.\end{aligned}$$

Vậy $x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 28x + m > -\frac{98}{5}$, $x \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 6.3. Hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ với tập xác định $D = [-1; 1]$ là một hàm số chẵn vì D là tập xác định đối xứng qua 0 và $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in D$.

Ví dụ 6.4. Hàm số $y = x^3 + 3x$ với tập xác định $\mathbf{R}$ là một hàm số lẻ vì $\mathbf{R}$ là tập xác định đối xứng qua 0 và $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 6.5. Hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 3x}{|x - 1|}$ với tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ vì D không là tập xác định đối xứng qua 0 (do $-1 \in D$, nhưng $1 \notin D$).

BÀI TẬP

6.1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt[4]{x^3 - 1}$.

6.2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt[4]{1 - x^4}$.

6.3. Xác định giá trị của a để tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{x - 2a} + \sqrt{7a + 1 - 2x}$ chứa đoạn $[-1; 1]$.

6.4. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \frac{x}{x - 2}$;

b) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$;

c) $y = \frac{x^3 - 5}{x - 1} + \sqrt{x} + 3$;

d) $y = \sqrt{x + \sqrt{x - 2}}$.

6.5. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Hãy xác định

a) $y = f(f(1))$;

b) $y = f(f(f(\dots(f(x)\dots)))$ với n kí hiệu f .

6.6. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$. Hãy tìm tập xác định của nó. Tìm tất cả những cặp số nguyên $(a; b)$ thuộc đồ thị của hàm số này.

6.7. Chứng minh rằng hàm số $y = x^5 + 3x^3 + 1$ đồng biến trên $\mathbf{R}$.

6.8. Chứng minh rằng hàm số $y = x^4 + 4x^2 - 5$ nghịch biến khi $x \geq 0$.

6.9. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x(x + 1)}$.

a) Tìm tập xác định D của hàm số.

b) Chứng minh rằng $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}$ trên D . Từ đó chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2011.2012} < 1.$$

6.10. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

a) Tìm tập xác định D của hàm số.

b) Xác định a, b, c biết rằng $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ trên D. Từ đó hãy tính tổng sau với số nguyên dương n :

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

6.11. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

Hãy xác định a, b, c biết

$$f(x+1) - f(x) = x^2$$

thoả mãn với mọi giá trị của x thuộc $\mathbf{R}$. Từ đó hãy tính tổng

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

với số nguyên $n \geq 1$.

6.12. Xác định tính chẵn lẻ của mỗi hàm số

a) $y = |2x - 3| + |2x + 3|$;

b) $y = \frac{|x-4| + |x+4|}{|x+3| - |x-3|}$.

6.13. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbf{R}$. Chứng minh rằng có thể biểu diễn $y = f(x)$ thành tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ. Hơn nữa hãy chứng minh sự biểu diễn ấy là duy nhất.

6.14. Giả sử $f(x) = (1 + ax)(1 + a^2x) \dots (1 + a^nx)$.

Chứng minh rằng $(1 + ax)f(ax) = (1 + a^{n+1}x)f(x)$. Từ đó hãy xác định A_i theo a, n, i biết rằng $f(x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_ix^i + \dots + A_nx^n$.

6.15. Xác định hàm số $g(f(x))$, $f(g(x))$ biết $f(x) = x^2 + 5$ và $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$.

6.16. Xác định hàm số $g(f(x))$, $f(g(x))$ biết $f(2x - 5) = x^2 + 3x - 1$ và

$$g(5x + 1) = \frac{x}{x - 7}.$$

Chuyên đề 7. HÀM SỐ $y = ax + b$ VÀ ĐỒ THỊ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Hàm số $y = ax + b$ xác định trên tập $\mathbf{R}$ với a và b là những số cho trước và $a \neq 0$ được gọi là *hàm số bậc nhất*. Hệ số a được gọi là *hệ số góc*.
- Cho hàm số bậc nhất $y = f(x) = ax + b$ xác định trên $\mathbf{R}$. Khi đó
 - Nếu $a > 0$ thì $y = ax + b$ là hàm đồng biến trên $\mathbf{R}$.
 - Nếu $a < 0$ thì $y = ax + b$ là hàm nghịch biến trên $\mathbf{R}$.
- Đồ thị (d) của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ trên tập $\mathbf{R}$ là một đường thẳng. Đường thẳng đó đi qua điểm $E\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ thuộc trục Ox và điểm $F(0; b)$ thuộc trục Oy . Khoảng cách h từ O đến d thỏa mãn $h = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$.
- Ta vẽ đồ thị (d) của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ như sau: Lấy hai điểm phân biệt $F(0; b)$ và $A(x_1; ax_1 + b)$, $x_1 \neq 0$. Đường thẳng (d) là đường thẳng (AF). Ta sẽ lấy $A \equiv E$ khi $b \neq 0$.
- Khi $a = 0$ ta có hàm hằng $y = b$. Đồ thị hàm $y = b$ là đường thẳng đi qua hai điểm $F(0; b)$ và $A(x_1; b)$. Nó song song với Ox hoặc trùng trục Ox khi $b = 0$.
- Giả sử đường thẳng (d) là đồ thị của hàm $y = ax + b$ trên tập $\mathbf{R}$ với a và b là những số cho trước. Khi đó $y = ax + b$ được gọi là phương trình xác định đường thẳng (d). Đôi khi ta cũng nói : (d) được xác định bởi phương trình $y = ax + b$ trên tập $\mathbf{R}$ và viết (d) : $y = ax + b$.

Kiến thức bổ sung

Cho $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Nếu $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ thì phương trình đường thẳng AB là

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 7.1. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$.

a) Vẽ đồ thị (d) của hàm số khi $a = b = 3$. Giả sử (d) đi qua điểm E thuộc Ox và F thuộc Oy. Tính diện tích tam giác vuông OEF.

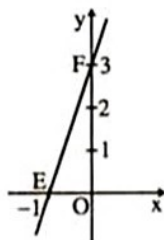
b) Giả sử $b = 2a$. Chứng minh rằng, với mỗi giá trị $a \neq 0$ đường thẳng (d_a) xác định bởi phương trình $y = ax + 2a$ luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Giải.

a) Khi $a = b = 3$ ta có hàm số $y = 3x + 3$.

Đường thẳng (d) xác định bởi phương trình $y = 3x + 3$ đi qua điểm E(-1; 0) thuộc trục Ox và F(0; 3) thuộc trục Oy (h.1).

Diện tích tam giác OEF bằng $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}$ (dvdt).



Hình 1

b) Khi $b = 2a$ ta có hàm $y = a(x + 2)$. Đường thẳng (d_a) xác định bởi $y = a(x + 2)$ luôn luôn đi qua điểm cố định $(-2; 0)$.

Ví dụ 7.2. Cho hàm số $y = f(x) = |x - 1| + |x - 6|$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Xác định giá trị lớn nhất của m để $f(x) \geq m$ với mọi giá trị của x.

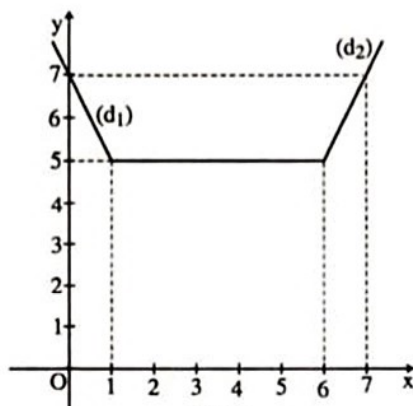
Giải.

$$a) \text{ Ta có } y = f(x) = \begin{cases} 7 - 2x & \text{khi } x \leq 1 \\ 5 & \text{khi } 1 \leq x \leq 6 \\ 2x - 7 & \text{khi } x \geq 6 \end{cases}$$

Vậy đồ thị của hàm số gồm ba phần :
Hai nửa đường thẳng (d_1) : $y = 7 - 2x$ khi $x \leq 1$; (d_2) : $y = 2x - 7$ khi $x \geq 6$ và đoạn $y = 5$ khi $1 \leq x \leq 6$ (h.2).

b) Dễ dàng thấy $y \geq 5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Dấu "=" xảy ra khi chẳng hạn $x = 1$.

Vậy để $f(x) \geq m$ với mọi giá trị của x thì giá trị lớn nhất của m bằng 5.



Hình 2

Ví dụ 7.3. Cho hàm số $y = f(x) = |x - 2| + |x - 5| - |3x + 6|$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Xác định giá trị nhỏ nhất của m để $f(x) \leq m$ với mọi giá trị của x .

Giải.

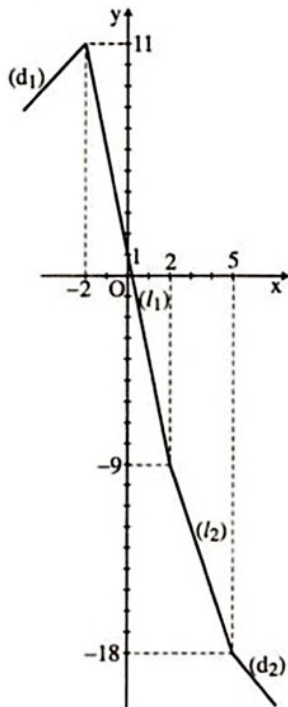
$$\text{a) Ta có } y = f(x) = \begin{cases} x + 13 & \text{khi } x \leq -2 \\ -5x + 1 & \text{khi } -2 \leq x \leq 2 \\ -3x - 3 & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \\ -x - 13 & \text{khi } x \geq 5. \end{cases}$$

Vậy đồ thị của hàm số gồm 4 phần : Hai nửa đường thẳng $(d_1) : y = x + 13$ khi $x \leq -2$; $(d_2) : y = -x - 13$ khi $x \geq 5$ và hai đoạn $(l_1) : y = -5x + 1$ khi $-2 \leq x \leq 2$; $(l_2) : y = -3x - 3$ khi $2 \leq x \leq 5$ (h.3).

b) Dễ dàng thấy $y \leq 11$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = -2$.

Vậy để $f(x) \leq m$ với mọi giá trị của x thì giá trị nhỏ nhất của m bằng 11.



Hình 3

BÀI TẬP

7.1. Chứng minh rằng hàm số $y = \begin{cases} -1 & \text{khi } x \leq -1 \\ x & \text{khi } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ là hàm số lẻ và vẽ

đồ thị của nó.

7.2. Chứng minh rằng hàm số $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq -1 \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ là hàm số chẵn và

vẽ đồ thị của nó.

7.3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2|3x - 5| + |x - 2| + 4x$.

7.4. Cho hàm số $y = f(x) = 2|x - 7| + 3|x - 1| - 4|x|$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Giải và biện luận phương trình $f(x) = m$.

7.5. Cho hàm số $y = f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x + 1|$.

a) Vẽ đồ thị và tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

b) Giải và biện luận phương trình $f(x) = m$.

c) Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có vô số nghiệm.

7.6. Giải và biện luận phương trình $\frac{|x - 5| + |x + 5|}{|x - 5| - |x + 5|} = m$.

7.7. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

7.8. Giả sử đường thẳng $(d): y = ax + 5$. Xác định a biết đường thẳng (d) đi qua điểm $A(5; 5)$. Tính khoảng cách từ $O(0; 0)$ đến đường thẳng (d) .

7.9. Xác định các giá trị của m để phương trình $|x - 3| - |5x + 7| + 8|x + 2| = m$ có nhiều hơn một nghiệm.

7.10. Xác định các giá trị của m để phương trình $|x - 3| + |x + 7| = m$ có vô số nghiệm.

Chuyên đề 8. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Hai đường thẳng trùng nhau:

Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ và $(d_2): y = a'x + b'$ trùng nhau là $a = a'$ và $b = b'$.

2) Hai đường thẳng cắt nhau:

Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ và $(d_2): y = a'x + b'$

cắt nhau tại đúng một điểm là $a \neq a'$. Tọa độ giao điểm là
$$\begin{cases} x_0 = \frac{b' - b}{a - a'} \\ y_0 = \frac{ab' - a'b}{a - a'} \end{cases}$$

3) Hai đường thẳng song song:

Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ và $(d_2): y = a'x + b'$ song song là $a = a'$ và $b \neq b'$.

4) Hai đường thẳng vuông góc:

Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ và $(d_2): y = a'x + b'$ trong đó $aa' \neq 0$ vuông góc với nhau là $aa' = -1$.

Chứng minh. Đường thẳng (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau thì chúng phải cắt nhau. Do đó $a \neq a'$. Giả sử chúng cắt nhau tại $A(x_0; y_0)$.

Ta có $ax_0 + b = y_0 = a'x_0 + b'$.

Lấy điểm $B(x_1; y_1 = ax_1 + b)$ thuộc (d_1) và điểm $C(x_2; y_2 = a'x_2 + b')$ thuộc (d_2) với $x_1, x_2 \neq x_0$.

Hiển nhiên $(d_1) \perp (d_2)$ khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ hay

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2.$$

(Xem Kiến thức bổ sung ở chuyên đề 6)

Khai triển và rút gọn được $x_2x_1 + y_2y_1 = x_2x_0 + y_2y_0 + x_1x_0 + y_1y_0 - x_0^2 - y_0^2$.

Do $ax_0 + b = y_0 = a'x_0 + b'$ và $y_1 = ax_1 + b$; $y_2 = a'x_2 + b'$ nên biến đổi

$$\begin{aligned} 0 &= (x_2 - x_0)(x_1 - x_0) + (y_2 - y_0)(y_1 - y_0) \\ &= (x_2 - x_0)(x_1 - x_0) + (a'x_2 + b' - a'x_0 - b')(ax_1 + b - ax_0 - b) \\ &= (x_2 - x_0)(x_1 - x_0) + a'a(x_2 - x_0)(x_1 - x_0) \\ &= (a'a + 1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0). \end{aligned}$$

Tóm lại $(d_1) \perp (d_2)$ khi và chỉ khi $aa' = -1$ vì $(x_2 - x_0)(x_1 - x_0) \neq 0$.

5) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng :

Giả sử $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $(d): y = ax + b$ với $a \neq 0$. Khi đó khoảng

$$\text{cách từ } M \text{ đến } (d) \text{ bằng } h = \frac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 8.1. Xác định giá trị của m để ba đường thẳng

$(d_1) : y = 2x + 1$; $(d_2) : y = 4x - 1$ và $(d_3) : y = 2mx - 3$ đồng quy.

Giải.

Giả sử hai đường thẳng $(d_1) : y = 2x + 1$; $(d_2) : y = 4x - 1$ cắt nhau tại $A(x_1; y_1)$.

Vậy $2x_1 + 1 = y_1 = 4x_1 - 1$. Giải ra được $x_1 = 1, y_1 = 3$. Vậy $(d_1) : y = 2x + 1$; $(d_2) : y = 4x - 1$ cắt nhau tại $A(1; 3)$.

Đường thẳng $(d_3) : y = 2mx - 3$ đi qua điểm A khi và chỉ khi $3 = 2m \cdot 1 - 3$ hay $m = 3$.

Tóm lại, để ba đường thẳng $(d_1) : y = 2x + 1$; $(d_2) : y = 4x - 1$ và $(d_3) : y = 2mx - 3$ đồng quy cần và đủ là $m = 3$.

Ví dụ 8.2. Cho hai đường thẳng được xác định bởi

$$(d_1) : y = 3x + 5m + 2 \text{ và } (d_2) : y = 7x - 3m - 6.$$

a) Xác định tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) .

b) Chứng minh rằng khi m thay đổi giao điểm A luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

Giải.

a) Giả sử hai đường thẳng $(d_1) : y = 3x + 5m + 2$ và $(d_2) : y = 7x - 3m - 6$ cắt nhau tại $A(x_1; y_1)$. Vậy $3x_1 + 5m + 2 = y_1 = 7x_1 - 3m - 6$.

Giải ra được $x_1 = 2m + 2, y_1 = 11m + 8$.

Vậy $(d_1) : y = 3x + 5m + 2$ và $(d_2) : y = 7x - 3m - 6$ cắt nhau tại điểm $A(2m + 2; 11m + 8)$.

$$\text{b) Từ hệ } \begin{cases} x_1 = 2m + 2 \\ y_1 = 11m + 8 \end{cases} \text{ suy ra hệ } \begin{cases} m = \frac{x_1 - 2}{2} \\ y_1 = 11m + 8. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } y_1 = 11 \cdot \frac{x_1 - 2}{2} + 8 = \frac{11}{2}x_1 - 3.$$

Từ đây suy ra điểm A chạy trên đường thẳng cố định xác định bởi phương trình

$$y = \frac{11}{2}x - 3.$$

Ví dụ 8.3. Xác định giá trị của m để hai đường thẳng $(d_1) : y = \frac{1}{2}x - 5$;

$(d_2) : y = 2mx - 3$ vuông góc với nhau và tìm tọa độ giao điểm.

Giải.

Hai đường thẳng $(d_1) : y = \frac{1}{2}x - 5$; $(d_2) : y = 2mx - 3$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \cdot 2m = -1$ hay $m = -1$. Khi đó $(d_1) : y = \frac{1}{2}x - 5$; $(d_2) : y = -2x - 3$.

Giả sử (d_1) và (d_2) cắt nhau tại $A(x_1; y_1)$. Khi đó $\frac{1}{2}x_1 - 5 = y_1 = -2x_1 - 3$.

Giải ra $x_1 = \frac{4}{5}$ và $y_1 = -\frac{23}{5}$. Ta có giao điểm $A\left(\frac{4}{5}; -\frac{23}{5}\right)$.

Ví dụ 8.4. Giả sử đường thẳng $(d_m) : y = 2(m+1)x + m - 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m đường thẳng (d_m) luôn luôn đi qua một điểm cố định A .

b) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d_m) vuông góc với đường thẳng $(d) : y = 3x + 18$. Từ đó tính khoảng cách từ A đến (d) .

Giải.

a) Giả sử đường thẳng $(d_m) : y = 2(m+1)x + m - 1$ đi qua điểm $A(x_0; y_0)$.

Khi đó có đồng nhất thức $y_0 = 2(m+1)x_0 + m - 1$ hay $(2x_0 + 1)m = y_0 - 2x_0 + 1$ thoả mãn với mọi giá trị của m .

Nếu $2x_0 + 1 \neq 0$ thì phương trình $(2x_0 + 1)m = y_0 - 2x_0 + 1$ có một nghiệm m duy nhất: mâu thuẫn.

Vậy $2x_0 + 1 = 0$ hay $x_0 = -\frac{1}{2}$ và $y_0 = 2x_0 - 1 = -2$.

Vậy đường thẳng (d_m) luôn luôn đi qua một điểm cố định $A\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$.

b) Đường thẳng $(d_m) : y = 2(m+1)x + m - 1$ vuông góc với đường thẳng $(d) : y = 3x + 18$ khi và chỉ khi $2(m+1) \cdot 3 = -1$ hay $m = -\frac{7}{6}$.

Đặt $m_0 = -\frac{7}{6}$. Xét giao điểm $B(x_1; y_1)$

giữa hai đường thẳng $(d_{m_0}) : y = -\frac{1}{3}x - \frac{13}{6}$ và

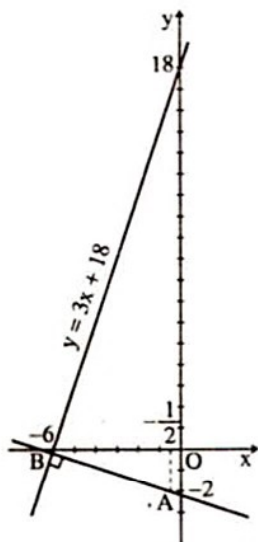
(d) : $y = 3x + 18$. Khi đó $-\frac{1}{3}x_1 - \frac{13}{6} = 3x_1 + 18$.

Giải ra $x_1 = -\frac{121}{20}$ và $y_1 = -\frac{3}{20}$.

Ta có giao điểm $B\left(-\frac{121}{20}; -\frac{3}{20}\right)$ (h.4).

Khoảng cách từ A đến (d) bằng độ dài

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{121}{20}\right)^2 + \left(-2 + \frac{3}{20}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{111^2 + 37^2}}{20} = \frac{37}{2\sqrt{10}}. \end{aligned}$$



Hình 4

Ví dụ 8.5. Cho các đường thẳng $(d_m) : y = 2x + m - 1$. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ mỗi đường thẳng (ứng với giá trị ấy của m) đến điểm $A(-1; 1)$ bằng 2.

Giải.

Xét đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$ vuông góc với $(d_m) : y = 2x + (m - 1)$ và đi qua $A(-1; 1)$.

$$(d) \perp (d_m) \Leftrightarrow 2a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Khi đó (d) là $y = -\frac{1}{2}x + b$;

(d) đi qua $A(-1; 1)$ nên $1 = -\frac{1}{2}(-1) + b$, do đó $b = \frac{1}{2}$.

Vậy (d) là $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Giao điểm $B(x_1; y_1)$ của (d) và (d_m) thỏa mãn $-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} = y_1 = 2x_1 + (m - 1)$.

Từ đó $x_1 = \frac{3-2m}{5}$, $y_1 = \frac{m+1}{5}$.

Khoảng cách từ $A(-1; 1)$ đến (d_m) là độ dài AB và bằng

$$\sqrt{\left(\frac{3-2m}{5}+1\right)^2 + \left(\frac{m+1}{5}-1\right)^2} = \frac{|m-4|}{\sqrt{5}}.$$

$$AB = 2 \Leftrightarrow \frac{|m-4|}{\sqrt{5}} = 2 \Leftrightarrow m = 4 \pm 2\sqrt{5}.$$

Lưu ý. Người ta chứng minh được khoảng cách từ điểm $A(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $ax + by + c = 0$ bằng

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Với công thức trên, khoảng cách từ điểm $A(-1; 1)$ đến đường thẳng $y = 2x + m - 1$ hay $2x - y + (m - 1) = 0$ bằng

$$\frac{|2(-1) - 1.1 + m - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|m-4|}{\sqrt{5}}.$$

BÀI TẬP

8.1. Hai đường thẳng được cho bởi

$$(d_m): y = \frac{m+1}{2m}x + \frac{m-1}{2m} \text{ và } (h_m): y = -\frac{1}{m}x - \frac{m-2}{m} \text{ với } m \neq 0.$$

a) Xác định giá trị của m để $(d_m) \parallel (h_m)$.

b) Xác định giá trị của m để $(d_m) \equiv (h_m)$.

8.2. Xác định giá trị của m để hai đường thẳng $(d): y = mx - 5$ và $(d'): y = x + m$ cắt nhau tại một điểm thuộc :

a) Trục tung.

b) Trục hoành.

8.3. Xác định tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng $(d_1): y = (m+2)x + 3$ và $(d_2): y = 2mx - 3m$ song song với nhau.

8.4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $(d_m): y = (1-m)x + 2$ và $(h_m): y = (m+1)x - 3$.

a) Biện luận theo m vị trí tương đối giữa hai đường thẳng (d_m) và (h_m) .

b) Xác định những giá trị của m để hai đường thẳng (d_m) và (h_m) vuông góc với nhau.

- 8.5. Cho đường thẳng (d) : $y = x - 5$.
- Xác định những điểm M thuộc trục Ox sao cho khoảng cách từ M đến (d) bằng 2.
 - Xác định những điểm N thuộc trục Oy sao cho khoảng cách từ N đến (d) bằng 2.
- 8.6. Xác định những giá trị của m sao cho khoảng cách từ điểm A(-1 ; 1) đến đường thẳng (d) : $y = x + m$ bằng 1.
- 8.7. Cho đường thẳng $(d_m) : y = \frac{m^2 - 1}{2m}x + \frac{2m + 1}{m}$, $m \neq 0$ và điểm A(1 ; 2). Tính khoảng cách từ A đến (d_m) và chỉ ra rằng với mọi giá trị $m \neq 0$ các đường thẳng (d_m) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.
- 8.8. Cho hai điểm B(1 ; 0) và C(5 ; 2). Xác định điểm A(x ; 6) để ABC là tam giác đều.

Chuyên đề 9. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

$$(d) : y = ax + b, a \neq 0$$

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ta vẽ đồ thị (d) : $y = ax + b$ với $a \neq 0$. Giả sử đường thẳng này cắt trục Ox tại $E\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.
Lấy $M(x_1 ; y_1 = ax_1 + b)$ với $y_1 > 0$. Với tia Ex xét góc $\alpha = \widehat{MEx}$.
Góc α được định nghĩa là góc giữa đường thẳng (d) và tia Ox.
- Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ (với $a \neq 0$) là a.
- Với $a = 0$ đồ thị (d) của hàm hằng $y = b$ song song hoặc trùng với đường Ox. Ta quy ước góc giữa (d) và tia Ox là 0° hoặc 180° .

Kiến thức bổ sung

Cho $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$ với $x_2 > x_1$. Hệ số góc của đường thẳng AB bằng

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 9.1. Cho đường thẳng (d) : $y = ax + b$, $a \neq 0$. Giả sử đường thẳng này cắt trục Ox tại $E\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$. Lấy $M(x_1; y_1 = ax_1 + b)$ với $y_1 > 0$ và đặt $\alpha = \widehat{MEx}$. Chứng minh rằng

- a) Góc α không phụ thuộc vào hệ số b.
- b) Nếu $a > 0$ thì α là góc nhọn; còn nếu $a < 0$ thì α là góc tù.

Giải.

a) Nếu (d') : $y = ax + b'$, $b' \neq b$, thì (d') // (d) và góc giữa (d') với trục Ox cũng bằng α . Như vậy, góc α không phụ thuộc vào hệ số b.

b) Giả thiết $a > 0$. Từ $y_1 = ax_1 + b = a\left(x_1 + \frac{b}{a}\right) > 0$ và $a > 0$ suy ra $x_1 > -\frac{b}{a}$.

Hạ $MF \perp Ox$ với F thuộc đường thẳng Ox. Khi đó $\alpha = \widehat{MEF}$ là góc nhọn.

Giả thiết $a < 0$. Từ $y_1 = ax_1 + b = a\left(x_1 + \frac{b}{a}\right) > 0$ và $a < 0$ suy ra $x_1 < -\frac{b}{a}$.

Hạ $MF' \perp Ox$ với F' thuộc đường thẳng Ox. Khi đó $\widehat{MEF'} < 90^\circ$.

Vì $\alpha = \widehat{MEx} = 180^\circ - \widehat{MEF'} > 90^\circ$ nên α là góc tù.

Lưu ý. Với $a = 0$ đồ thị (d) của hàm hằng $y = b$ song song hoặc trùng với đường thẳng Ox. Ta quy ước góc giữa (d) và trục Ox là 0° hoặc 180° .

Ví dụ 9.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy lấy bốn điểm A(6 ; 0), B(8 ; 0), C(0 ; 4) và D(0 ; 12). Gọi M là trung điểm đoạn AC.

- a) Xác định hệ số góc của đường thẳng OM.
- b) Chứng minh rằng OM vuông góc với BD.

Giải.

a) Tọa độ điểm M(3 ; 2) và hệ số góc OM là $a = \frac{2}{3}$.

b) Phương trình (BD) : $y = -\frac{3}{2}x + 12$. Vì $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$ nên OM vuông góc với BD.

Ví dụ 9.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy lấy ba điểm $A(u; v)$, $B\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$ và $C\left(\frac{a}{2}; 0\right)$, với $u \neq \pm \frac{a}{2}$. Đặt $AB = c$, $AC = b$, $AO = m$. Chứng minh rằng

a) $a^2 + 4m^2 = 2(b^2 + c^2)$.

b) Viết phương trình đường thẳng AB và AC.

Giải.

a) Ta có $b^2 = AC^2 = \left(u - \frac{a}{2}\right)^2 + v^2$; $c^2 = AB^2 = \left(u + \frac{a}{2}\right)^2 + v^2$ và $m^2 = u^2 + v^2$.

Vậy $2(b^2 + c^2) = 4u^2 + 4v^2 + a^2 = 4m^2 + a^2$.

b) Phương trình AB: $y = \frac{2v}{2u+a}x + \frac{av}{2u+a}$; AC: $y = \frac{2v}{2u-a}x - \frac{av}{2u-a}$.

BÀI TẬP

- 9.1. Giả sử đường thẳng (d) xác định bởi phương trình $y = x$. Xác định góc giữa (d) và tia Ox.
- 9.2. Xác định góc giữa đường thẳng (d') với tia Ox biết (d') đi qua điểm $A(1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng (d): $y = x$.
- 9.3. Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$ và $D(0; -1)$.
 - a) Chứng minh rằng tứ giác ABCD là một hình vuông.
 - b) Tìm phương trình xác định các cạnh AB, BC, CD, DA.
 - c) Tìm phương trình xác định đường thẳng đi qua trung điểm cạnh AB và trung điểm cạnh CD.
- 9.4. Xác định giá trị của a để đường thẳng (d): $y = ax + b$ lập với tia Ox một góc 60° .
- 9.5. Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm $A(2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(10; 0)$ và $D(0; m)$. Hãy xác định m để đường thẳng OH vuông góc với AB đi qua trung điểm đoạn CD.
- 9.6. Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh a, b, c. Gọi độ dài các đường trung tuyến là m_1, m_2, m_3 . Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2).$$
- 9.7. Cho hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Lập phương trình đường thẳng AB và tính hệ số góc của đường thẳng ấy.

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN**Chuyên đề 10. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN****I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

Cho ba số a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 \neq 0$

- 1) Phương trình $ax + by = c$ được gọi là *phương trình bậc nhất hai ẩn* x và y . Các số a, b, c được gọi là các *hệ số* của phương trình. Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình $ax + by = c$ nếu $ax_0 + by_0 = c$.
- 2) *Giải phương trình* $ax + by = c$ là tìm tất cả các nghiệm của nó. Kí hiệu $d = \{(x_0; y_0) | ax_0 + by_0 = c\}$ và d được gọi là *tập nghiệm* của phương trình đã cho. Tập nghiệm d là một đường thẳng.
- 3) Nếu $b = 0$ thì $a \neq 0$ và ta có $ax = c$. Vậy $x = \frac{c}{a}$, còn y được lấy tùy ý và ta có

$$d = \{(x = \frac{c}{a}, y) | y \in \mathbf{R}\}.$$

Nếu $b \neq 0$ thì $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Với $x = t$, nghiệm của phương trình $ax + by = c$ được viết

$$\left\{ x = t, y = -\frac{a}{b}t + \frac{c}{b}, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Nghiệm $\left(t; -\frac{a}{b}t + \frac{c}{b} \right)$ được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình

$$ax + by = c.$$

Khi muốn có một nghiệm cụ thể ta thay $t = x_0$ để có nghiệm $\left(x_0; -\frac{a}{b}x_0 + \frac{c}{b} \right)$.

- 4) Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Phương trình $ax + by = c$ với x và y nhận giá trị trong tập $\mathbb{Z}$ được gọi là *phương trình Diophante bậc nhất hai ẩn*. Các số a và b được gọi là *hệ số của ẩn*, số c được gọi là *số hạng tự do*. Phương trình Diophante được gọi là *giải được hoàn toàn* nếu ta có nghiệm tổng quát của nó.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 10.1. Giải và biện luận phương trình $(m - 1)x + my = m + 3$.

Giải.

Ta có $my = (1 - m)x + m + 3$.

Nếu $m = 0$ ta có phương trình $-x = 3$ và nghiệm của nó là $x = -3$ và $y = t$ là số tùy ý thuộc $\mathbb{R}$.

Nếu $m \neq 0$, phương trình $(m - 1)x + my = m + 3$ có nghiệm tổng quát là

$$x = t, y = \frac{1 - m}{m}t + \frac{m + 3}{m}, t \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 10.2. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $x - y + 1 = 0$ thỏa mãn đẳng thức

$$y^2 - y\sqrt{x} - 2x = 0.$$

Giải.

Nghiệm tổng quát của phương trình $x - y + 1 = 0$ là $x = t, y = t + 1$.

Để nghiệm này thỏa mãn đẳng thức $y^2 - y\sqrt{x} - 2x = 0$ cần và đủ là $t \geq 0$ và $(t + 1)^2 - (t + 1)\sqrt{t} - 2t = 0$ hay $(t + 1 + \sqrt{t})(t + 1 - 2\sqrt{t}) = 0$.

Do $t \geq 0$ nên $t + 1 - 2\sqrt{t} = 0$ hay $(\sqrt{t} - 1)^2 = 0$. Vậy $t = 1$.

Do đó $(1; 2)$ là nghiệm duy nhất của phương trình $x - y + 1 = 0$ thỏa mãn đẳng thức

$$y^2 - y\sqrt{x} - 2x = 0.$$

Ví dụ 10.3. Xét phương trình $ax + by = c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$. Đặt $d = \text{ƯCLN}(a, b)$. Chứng minh rằng

a) Phương trình $ax + by = c$ có nghiệm nguyên x, y khi và chỉ khi c chia hết cho d .

b) Nếu biết một nghiệm nguyên $(x_0; y_0)$ thì phương trình $ax + by = c$ giải được hoàn toàn.

Giải.

a) Giả sử phương trình $ax + by = c$ có nghiệm nguyên $(x_0; y_0)$.

Khi đó $ax_0 + by_0 = c$ nên c chia hết cho d , vì a và b chia hết cho d .

Ngược lại, giả sử c chia hết cho d . Đặt $c = dc_1$ với $c_1 \in \mathbb{Z}$.

Với thuật toán Euclide (Ơ-clit) để xác định ước số chung lớn nhất, ta có $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ để $ax_1 + by_1 = d$. Từ đây suy ra $a(c_1x_1) + b(c_1y_1) = c_1d = c$.

Vậy cặp số nguyên $x_0 = c_1x_1, y_0 = c_1y_1$ là nghiệm của $ax + by = c$.

b) Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $b \neq 0$ và chỉ cần xét phương trình $ax + by = c$ với $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$.

Giả sử cặp số nguyên $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình. Khi đó ta có $ax + by = c = ax_0 + by_0$. Vậy $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$.

Vì $x, x_0, y, y_0, a, b \in \mathbb{Z}$ và hai số a, b nguyên tố cùng nhau nên $x - x_0$ chia hết cho b .

Đặt $x - x_0 = bt, t \in \mathbb{Z}$. Khi đó $abt = -b(y - y_0)$.

Vì $b \neq 0$ nên $y - y_0 = -at$.

Ta có nghiệm tổng quát $x = x_0 + bt, y = y_0 - at$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $ax + by = c$ đã giải được hoàn toàn.

Ví dụ 10.4. Giải phương trình $11x + 7y = 5$ trong $\mathbb{Z}$.

Giải.

Theo câu b) của Ví dụ 10.3, nếu phương trình $ax + by = c$ có $(a, b) = 1$ và $(x_0; y_0)$ là một nghiệm thì nghiệm tổng quát là

$$x = x_0 + bt, y = y_0 - at.$$

Vì $\text{ƯCLN}(11, 7) = 1$ và $11 \cdot 10 + 7 \cdot (-15) = 5$ nên nghiệm tổng quát của phương trình $11x + 7y = 5$ là $x = 10 + 7t, y = -15 - 11t$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Lưu ý.

a) Nếu phát hiện $(3; -4)$ là một nghiệm của phương trình $11x + 7y = 5$ thì ta có nghiệm tổng quát của phương trình là

$$(3 + 7t; -4 - 11t) \text{ với } t \in \mathbb{Z}.$$

b) Có thể giải trực tiếp Ví dụ 10.4 không dựa vào Ví dụ 10.3 như sau :

$$\text{Ta có } 11x + 7y = 5 \text{ nên } y = \frac{5 - 11x}{7} = 1 - 2x + \frac{3x - 2}{7}.$$

$$\text{Ta phải có } \frac{3x - 2}{7} = k \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{7k + 2}{3} = 2k + 1 + \frac{k - 1}{3}.$$

Ta phải có $k - 1 = 3t \ (t \in \mathbb{Z})$ nên $k = 3t + 1$. Từ đó

$$x = 2(3t + 1) + 1 + t = 3 + 7t;$$

$$y = 1 - 2(3 + 7t) + 3t + 1 = -4 - 11t.$$

Ví dụ 10.5. Xác định số bộ ba số nguyên không âm $(x; y; z)$ thoả mãn phương trình

$$x + y + z = 2012.$$

Giải.

Với $x = 0$ ta có 2013 cặp $(k; 2012 - k)$ với $k = 0, 1, 2, \dots, 2012$ thoả mãn $0 + y + z = 2012$.

Với $x = 1$ ta có 2012 cặp $(k; 2011 - k)$ với $k = 0, 1, 2, \dots, 2011$ thoả mãn $1 + y + z = 2012$.

Tiếp tục như vậy, và với $x = 2012$ ta có đúng 1 cặp $(0; 0)$ thoả mãn $2012 + y + z = 2012$.

Vậy số bộ ba số nguyên không âm $(x; y; z)$ thoả mãn phương trình $x + y + z = 2012$ là

$$T = 1 + 2 + 3 + \dots + 2013 = \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2027091.$$

BÀI TẬP

10.1. Giải phương trình $5x - 7y = 1$.

10.2. Giải và biện luận phương trình $mx + (3m - 2)y = 2m + 1$.

10.3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $x - y + 1 = 0$ thoả mãn đẳng thức

$$(y-1)^2 + 2(y-1)\sqrt{x} - 3x = 0.$$

10.4. Giải phương trình $123x - 5y = 9$ trong $\mathbb{Z}$.

10.5. Cho phương trình $3x + my = m + 2$.

a) Xác định m để phương trình nhận cặp $(3; 5)$ làm một nghiệm.

b) Xác định m để phương trình nhận cặp $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ làm nghiệm.

10.6. Xác định số cặp số nguyên $(x; y)$ với $x \geq 12$, $y \geq 17$ thoả mãn phương trình

$$x + y = 100.$$

10.7. Xác định số bộ ba số nguyên (x, y, z) với $x \geq 1$, $y \geq 7$ và $z \geq 0$ thoả mãn phương trình $x + y + z = 2012$.

10.8. Chứng minh rằng tổng số các nghiệm nguyên không âm của các phương trình: $x + 2y = n$, $2x + 3y = n - 1$, ..., $nx + (n + 1)y = 1$, $(n + 1)x + (n + 2)y = 0$ đúng bằng $n + 1$ với mỗi số nguyên dương n .

10.9. Chứng minh rằng tổng số các nghiệm nguyên không âm của các phương trình: $x + 4y = 3n - 1$,

$$4x + 9y = 5n - 4,$$

$$9x + 16y = 7n - 9,$$

...

$$n^2x + (n + 1)^2y = n(n + 1)$$

đúng bằng n với mỗi số nguyên dương n .

Chuyên đề 11. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho các số $a, b, c, a', b', c' \in \mathbf{R}$ thoả mãn $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) \neq 0$. Hệ phương trình dạng

$$(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

được gọi là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x và y .

Giải và biện luận hệ phương trình : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

1. **Phương pháp thế.** Không mất tính tổng quát có thể cho $b \neq 0$. Rút y từ

phương trình đầu và thế vào phương trình dưới:
$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ a'x + b'(-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}) = c' \end{cases}$$

Vậy ta có hệ
$$\begin{cases} (ab' - a'b)x = cb' - c'b \\ y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \end{cases}$$

Giải và biện luận:

- a) Nếu $ab' - a'b \neq 0$ thì hệ phương trình (I) có đúng một nghiệm

$$\begin{cases} x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \\ y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \end{cases}$$

- b) Nếu $ab' - a'b = 0$ và $cb' - c'b \neq 0$ thì hệ phương trình (I) vô nghiệm.

- c) Nếu $ab' - a'b = cb' - c'b = 0$ thì hệ phương trình (I) có vô số nghiệm $(x_0; y_0)$ thoả mãn $ax_0 + by_0 = c$.

Chú ý rằng, điều kiện $ab' - a'b = 0$ và $cb' - c'b \neq 0$ tương đương với điều kiện $ab' - a'b = 0$ và $ca' - c'a \neq 0$.

Điều kiện $ab' - a'b = cb' - c'b = 0$ thường được viết thành $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (nếu $a'b'c' \neq 0$). Ta thấy ngay $ac' - a'c = 0$.

2. Phương pháp cộng đại số

Vì $b'(ax + by) - b(a'x + b'y) = cb' - c'b$ và $a'(ax + by) - a(a'x + b'y) = ca' - c'a$ nên $(ab' - a'b)x = cb' - c'b$ và $(ab' - a'b)y = ac' - a'c$.

Vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (ab' - a'b)x = cb' - c'b \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c \end{cases}$$

(Việc giải và biện luận hệ như ở 1).

3. Phương pháp định thức

Ta kí hiệu

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b; D_1 = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b; D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

và gọi chúng là những *định thức cấp hai* của các hệ số của hệ (I).

$$\text{Khi đó } \begin{cases} xD = D_1 \\ yD = D_2 \end{cases}$$

Giải và biện luận:

$$\text{a) Nếu } D \neq 0 \text{ thì hệ phương trình (I) có đúng một nghiệm } \begin{cases} x = \frac{D_1}{D} \\ y = \frac{D_2}{D} \end{cases}$$

b) Nếu $D = 0$ và $D_1 \neq 0$ hoặc $D_2 \neq 0$ thì hệ phương trình (I) vô nghiệm.

c) Nếu $D = D_1 = D_2 = 0$ thì hệ phương trình (I) có vô số nghiệm $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 = c$.

4. Phương pháp hình học

Xét hai đường thẳng (d): $ax + by = c$ và (d'): $a'x + b'y = c'$. Biện luận số nghiệm của hệ (I):

- a) Nếu (d) và (d') cắt nhau thì hệ phương trình (I) có đúng một nghiệm.
 b) Nếu (d) và (d') song song với nhau thì hệ phương trình (I) vô nghiệm.
 c) Nếu (d) và (d') trùng nhau thì hệ phương trình (I) có vô số nghiệm. Đó là tập nghiệm d của phương trình $ax + by = c$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 11.1. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} = -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện $x+y-1 \neq 0$ và $2x-y+3 \neq 0$.

Đặt $u = \frac{1}{x+y-1}$ và $v = \frac{1}{2x-y+3}$. Khi đó ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 4u - 5v = -\frac{5}{2} \\ 3u + v = -\frac{7}{5} \\ u, v \neq 0. \end{cases}$$

Giải ra có $u = -\frac{1}{2}, v = \frac{1}{10}$ và suy ra hệ phương trình $\begin{cases} x+y = -1 \\ 2x-y = 7. \end{cases}$

Hệ có nghiệm $x = 2, y = -3$.

Ví dụ 11.2. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14 \\ \sqrt{\frac{x+y}{8}} - \sqrt{\frac{x-y}{12}} = 3. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện $x + y \geq 0$ và $x - y \geq 0$.

Đặt $u = \sqrt{\frac{x+y}{8}}$ và $v = \sqrt{\frac{x-y}{12}}$. Khi đó ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2u + 2v = 14 \\ u - v = 3 \\ u, v \geq 0. \end{cases}$$

Giải ra ta có $u = 5$, $v = 2$ và suy ra hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 200 \\ x - y = 48. \end{cases}$

Hệ có nghiệm $x = 124$, $y = 76$.

Ví dụ 11.3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ (2m + 1)x + 7y = m + 3. \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m .

b) Khi hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ xác định hệ thức liên hệ giữa x_0 và y_0 không chứa m .

Giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} y = -mx + 2m - 1 \\ (2m + 1)x + 7(-mx + 2m - 1) = m + 3 \end{cases} \text{ hay hệ } \begin{cases} y = -mx + 2m - 1 \\ (5m - 1)x = 13m - 10. \end{cases}$$

• Nếu $m = \frac{1}{5}$ thì hệ trở thành $\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} - 1 \\ 0 \cdot x = \frac{13}{5} - 10. \end{cases}$ Hệ vô nghiệm.

• Nếu $m \neq \frac{1}{5}$ thì hệ có một nghiệm $\begin{cases} x = \frac{13m - 10}{5m - 1} \\ y = \frac{-3m^2 + 3m + 1}{5m - 1}. \end{cases}$

b) Giả sử hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} mx_0 + y_0 = 2m - 1 \\ (2m + 1)x_0 + 7y_0 = m + 3. \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} m(2-x_0) = y_0 + 1 \\ m(1-2x_0) = x_0 + 7y_0 - 3 \end{cases}$ và suy ra hệ thức

$$m(2-x_0)(x_0 + 7y_0 - 3) = m(1-2x_0)(y_0 + 1).$$

- Khi $m \neq 0$ ta có hệ thức $(2-x_0)(x_0 + 7y_0 - 3) = (1-2x_0)(y_0 + 1)$.
- Khi $m = 0$ ta có

$$\begin{cases} y_0 + 1 = 0 \\ x_0 + 7y_0 - 3 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ được $x_0 = 10, y_0 = -1$ và hệ thức

$$(2-x_0)(x_0 + 7y_0 - 3) = (1-2x_0)(y_0 + 1) \text{ vẫn đúng.}$$

Tóm lại, hệ thức cần tìm là $(2-x_0)(x_0 + 7y_0 - 3) = (1-2x_0)(y_0 + 1)$.

Ví dụ 11.4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2 \\ -3mx + my = m - 3. \end{cases}$

- Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m .
- Xác định m để hệ phương trình có nghiệm x và y đều nguyên.

Giải.

a) Ta tính

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ -3m & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m = m(m+3) \text{ và}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m-3 & m \end{vmatrix} = m+3, \quad D_2 = \begin{vmatrix} m & 2 \\ -3m & m-3 \end{vmatrix} = m(m+3).$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} xD = D_1 \\ yD = D_2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m(m+3)x = m+3 \\ m(m+3)y = m(m+3). \end{cases}$$

Ta giải và biện luận hệ

- Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -3$ thì hệ phương trình có đúng một nghiệm $x = \frac{1}{m}, y = 1$.

- Nếu $m = 0$ ta có hệ $\begin{cases} 0.x = 3 \\ 0.y = 0. \end{cases}$ Hệ phương trình vô nghiệm.

• Nếu $m = -3$ thì hệ phương trình trở thành $-3x + y = 2$. Hệ có vô số nghiệm dạng

$$\begin{cases} x = t \in \mathbf{R} \\ y = 3t + 2. \end{cases}$$

b) Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -3$ thì hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1}{m} \\ y = 1. \end{cases}$

Để hai số x và y đều nguyên thì $m = 1$ hoặc $m = -1$.

Khi $m = 0$ thì hệ vô nghiệm.

Khi $m = -3$ hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x = t \in \mathbf{R} \\ y = 3t + 2. \end{cases}$ Với t nguyên ta có x, y nguyên.

Vậy hệ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $m = \pm 1$ hoặc $m = -3$.

Ví dụ 11.5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - 3my = 3m + 3. \end{cases}$

Xác định giá trị của m để hệ có đúng một nghiệm $(x; y)$ thoả mãn $y = 8x^2$.

Giải.

Dễ dàng có $\begin{cases} x = 2 - my \\ m(m + 3)y = -m - 3. \end{cases}$

• Nếu $m = 0$ thì hệ vô nghiệm.

• Nếu $m = -3$ thì $\begin{cases} x = 2 + 3y \\ 0y = 0. \end{cases}$

Khi đó hệ có vô số nghiệm dạng $(x = 2 + 3a; y = a)$ với $a \in \mathbf{R}$.

• Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -3$ thì hệ phương trình có đúng một nghiệm

$$\left(x = 3; y = -\frac{1}{m} \right).$$

Để nghiệm $\left(x = 3; y = -\frac{1}{m} \right)$ thoả mãn $y = 8x^2$ cần và đủ là $-\frac{1}{m} = 8 \cdot 3^2 = 72$

$$\text{hay } m = -\frac{1}{72}.$$

Ví dụ 11.6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - my = 4. \end{cases}$

a) Xác định m để hệ phương trình có nghiệm.

b) Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = (x + 2y - 1)^2 + (2x - my - 4)^2 \text{ với } m \neq -4 \text{ và với } m = -4.$$

Giải.

a) Ta có $\begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2(1 - 2y) - my = 4 \end{cases}$ hay hệ $\begin{cases} x = 1 - 2y \\ (m + 4)y = -2. \end{cases}$

• Nếu $m = -4$ thì hệ vô nghiệm.

• Nếu $m \neq -4$ thì hệ có một nghiệm $\begin{cases} x = \frac{m+8}{m+4} \\ y = \frac{-2}{m+4}. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq -4$.

b) • Nếu $m \neq -4$ thì hệ $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - my - 4 = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{m+8}{m+4} \\ y = \frac{-2}{m+4}. \end{cases}$

Khi đó $T_{\min} = (x + 2y - 1)^2 + (2x - my - 4)^2 = 0$.

• Nếu $m = -4$ ta có $T = (x + 2y - 1)^2 + (2x + 4y - 4)^2$.

Đặt $t = x + 2y - 1$. Khi đó $T = t^2 + (2t - 2)^2 = 5t^2 - 8t + 4 = 5\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$.

$T_{\min} = \frac{4}{5}$ khi chẳng hạn $x = \frac{9}{5}, y = 0$.

Ví dụ 11.7. Có 50 con gà và chó. Tính số gà và chó để có 140 chân.

Giải.

Giả sử có x con gà và y con chó để có 140 chân.

Khi đó x, y nguyên, không âm, thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 4y = 140. \end{cases}$

Dễ dàng tìm được $x = 30$ con gà, $y = 20$ con chó.

Ví dụ 11.8. Tất cả có 120 bó cỏ để làm thức ăn cho 30 con gồm trâu và bò trong một tuần. Biết rằng trong một tuần mỗi con trâu ăn hết 5 bó cỏ, còn mỗi con bò ăn hết 3 bó cỏ. Hỏi có bao nhiêu con trâu và bao nhiêu con bò ?

Giải.

Gọi số trâu là x và số bò là y .

Khi đó x, y nguyên, không âm, thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 3y = 120. \end{cases}$$

Dễ dàng tìm được $x = 15, y = 15$. Ta có 15 con trâu và 15 con bò.

BÀI TẬP

11.1. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1. \end{cases}$

11.2. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 - b^2. \end{cases}$

11.3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + (2 - m)y = -1 \\ (m - 1)x - my = 2. \end{cases}$

a) Xác định m để hệ phương trình có nghiệm.

b) Giả sử $(x; y)$ là một nghiệm của hệ. Tìm một hệ thức của x và y không chứa m .

11.4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 12x - my = 2. \end{cases}$

a) Xác định m để hệ phương trình có nghiệm.

b) Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = (3x + 2y + 1)^2 + (12x - my - 2)^2.$$

11.5. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = a + b \\ bx - ay = -2ab. \end{cases}$

11.6. Giả sử có x, y thoả mãn hệ
$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

11.7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 18 \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

11.8. Giải và biện luận hệ
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ ax + by + 4z = a + b \\ ax - by + 6z = a - b. \end{cases}$$

11.9. 18 chiếc xe tải có 106 bánh gồm ba loại : Loại 4 bánh chở 5 tấn, loại 6 bánh chở 6 tấn và loại 8 bánh chở 6 tấn. Hỏi mỗi loại có bao nhiêu xe biết chúng chở được 101 tấn.

11.10. Có 100 trâu gồm trâu đực, trâu nài, trâu già và chúng ăn hết 100 bó cỏ. Tìm số trâu mỗi loại, biết rằng mỗi con trâu đực ăn 5 bó cỏ, mỗi con trâu nài ăn 3 bó cỏ và ba con trâu già mới ăn hết một bó cỏ.

Chương IV

HÀM SỐ $y = ax^2$.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Chuyên đề 12. HÀM SỐ $y = ax^2$ VÀ ĐỒ THỊ PARABOL

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Xét hàm số $y = ax^2$ với $a \neq 0$.

- 1) Hàm số $y = f(x) = ax^2$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- 2) Đồ thị của hàm $y = ax^2$ là một đường *parabol* với đỉnh $O(0 ; 0)$ và trục đối xứng là trục tung.
- 3) Với $a > 0$ hàm số $y = ax^2$ nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng 0 khi $x = 0$.
- 4) Với $a < 0$ hàm số $y = ax^2$ đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng 0 khi $x = 0$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Với các kết quả đã đạt được ở trên, ta tập trung khai thác một vài tính chất của parabol (P) : $y = ax^2$.

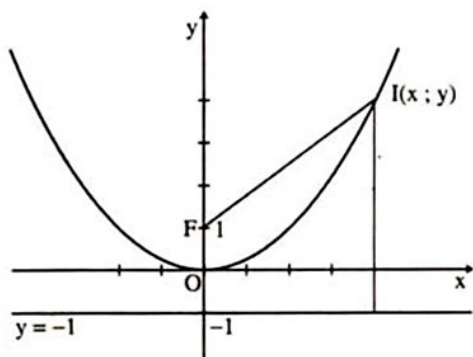
Ví dụ 12.1. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho đường thẳng (d) : $y = -1$ và điểm $F(0 ; 1)$. Tìm tập hợp tất cả những điểm I sao cho khoảng cách từ I đến (d) bằng IF.

Giải.

Giả sử điểm $I(x ; y)$. Khi đó khoảng cách từ I đến (d) bằng $|y+1|$ và $IF = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Như vậy $(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$.

Từ đây ta có $y = \frac{1}{4}x^2$. Suy ra tập hợp tất cả những điểm I sao cho khoảng cách từ I đến (d) bằng IF là đường parabol $(P_1): y = \frac{1}{4}x^2$ (h.5).



Hình 5

Ví dụ 12.2. Xác định điểm M thuộc parabol (P): $y = x^2$ sao cho độ dài đoạn IM là nhỏ nhất, trong đó $I(0; 1)$.

Giải.

Giả sử điểm $M(m; m^2)$ thuộc parabol (P): $y = x^2$.

$$\text{Khi đó } IM^2 = m^2 + (m^2 - 1)^2 = m^4 - m^2 + 1 = \left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy IM nhỏ nhất bằng } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ khi } m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hay } M\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Ví dụ 12.3. Trong mặt phẳng (Oxy), giả sử điểm A chạy trên parabol (P): $y = x^2$. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng OA.

Giải.

Giả sử điểm $A(a; a^2)$ thuộc (P). Gọi $I(x_1; y_1)$ là trung điểm của OA.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ y_1 = \frac{a^2}{2} = 2x_1^2. \end{cases}$$

Suy ra tập hợp các trung điểm I của đoạn OA là parabol $y = 2x^2$.

Ví dụ 12.4. Trong mặt phẳng (Oxy), giả sử hai điểm A và B chạy trên parabol (P): $y = x^2$ sao cho $A, B \neq O(0; 0)$ và $OA \perp OB$. Giả sử I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

- Chứng minh rằng toạ độ của điểm I thoả mãn phương trình $y = 2x^2 + 1$.
- Chứng minh rằng đường thẳng (AB) luôn đi qua một điểm cố định.
- Xác định toạ độ của các điểm A và B sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

Giải.

a) Giả sử $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$ là hai điểm thuộc (P).

Để $A, B \neq O(0; 0)$ và $OA \perp OB$ cần và đủ $ab \neq 0$ và $OA^2 + OB^2 = AB^2$

hay $ab \neq 0$ và $a^2 + a^4 + b^2 + b^4 = (a - b)^2 + (a^2 - b^2)^2$.

Giải ra được $ab = -1$. Gọi $I(x_1; y_1)$ là trung điểm AB. Khi đó

$$x_1 = \frac{a+b}{2}; y_1 = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{2} = \frac{(a+b)^2 + 2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} + 1 = 2x_1^2 + 1.$$

Vậy toạ độ của điểm I thoả mãn phương trình $y = 2x^2 + 1$.

b) Phương trình đường thẳng đi qua A và B là (AB): $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a^2}{b^2-a^2}$ (xem

Kiến thức bổ sung ở Chuyên đề 7) hay (AB): $y = (a+b)x - ab = (a+b)x + 1$.

Từ đây suy ra đường thẳng (AB): $y = (a+b)x + 1$ luôn luôn đi qua điểm cố định $(0; 1)$.

c) Vì $OA \perp OB$ nên $ab = -1$.

$$\begin{aligned} AB^2 &= (a-b)^2 + (a^2-b^2)^2 = a^2 + b^2 - 2ab + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \\ &= a^2 + b^2 + a^4 + b^4 \geq 2|ab| + 2a^2b^2 = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Vậy AB ngắn nhất bằng 2 khi chẳng hạn $A(-1; 1)$ và $B(1; 1)$.

Ví dụ 12.5. Trên parabol (P): $y = x^2$ ta lấy hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(3; 9)$. Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

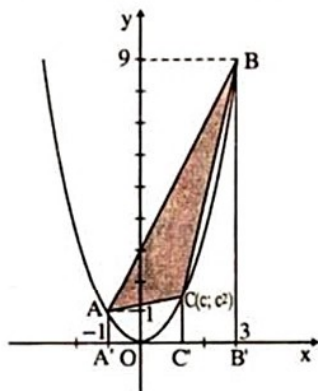
Giải. (h.6)

Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc (P) với $-1 < c < 3$.

Diện tích tam giác

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AA'B'B} - S_{AA'C'C} - S_{BB'C'C} \\ &= \frac{1+9}{2} \cdot 4 - \frac{1+c^2}{2} \cdot (c+1) - \frac{9+c^2}{2} \cdot (3-c) \\ &= 6 - 2c^2 + 4c \\ &= 8 - 2(c-1)^2 \leq 8. \end{aligned}$$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng 8 (dvdt) khi $C(1; 1)$.



Hình 6

Ví dụ 12.6. Trên parabol (P): $y = x^2$ ta lấy 6 điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 và A_6 . Chứng minh rằng, nếu $A_1A_2 \parallel A_4A_5$ và $A_2A_3 \parallel A_5A_6$ thì $A_3A_4 \parallel A_6A_1$.

Giải.

Giả sử $A_i(a_i; a_i^2)$ với $i = 1, 2, \dots, 6$.

Ta thấy, điều kiện $A_1A_2 \parallel A_4A_5$ tương đương với điều kiện $\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2 - a_1} = \frac{a_5^2 - a_4^2}{a_5 - a_4}$

(xem *Kiến thức bổ sung* ở Chuyên đề 9) hay $a_2 + a_1 = a_4 + a_5$.

Vậy, từ giả thiết suy ra $a_2 + a_1 = a_4 + a_5$ và $a_5 + a_6 = a_2 + a_3$. Do vậy

$$a_2 + a_1 + a_5 + a_6 = a_4 + a_5 + a_2 + a_3.$$

Từ đây suy ra $a_1 + a_6 = a_4 + a_3$ hay $A_3A_4 \parallel A_6A_1$.

Ví dụ 12.7. Trên parabol (P): $y = x^2$ ta lấy 6 điểm phân biệt $A_i(a_i; a_i^2)$ với $i = 1, 2, \dots, 6$. Giả sử $A_1A_2 \perp A_4A_5$ và $A_2A_3 \perp A_5A_6$. Chứng minh rằng, A_3A_4 và A_6A_1 không thể vuông góc với nhau nếu

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_4)(a_4 + a_5)(a_5 + a_6)(a_6 + a_1) \neq -1.$$

Giải.

Hệ số góc của đường thẳng A_1A_2 bằng $\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2 - a_1} = a_2 + a_1$.

Hệ số góc của đường thẳng A_4A_5 bằng $\frac{a_5^2 - a_4^2}{a_5 - a_4} = a_5 + a_4$.

Điều kiện $A_1A_2 \perp A_4A_5$ tương đương với điều kiện

$$(a_2 + a_1)(a_4 + a_5) = -1.$$

Tương tự có $(a_2 + a_3)(a_6 + a_5) = -1$.

Nếu $A_3A_4 \perp A_6A_1$ thì $(a_3 + a_4)(a_6 + a_1) = -1$.

Khi đó $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_4)(a_4 + a_5)(a_5 + a_6)(a_6 + a_1) = -1$.

Như vậy, nếu $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_4)(a_4 + a_5)(a_5 + a_6)(a_6 + a_1) \neq -1$ thì A_3A_4 và A_6A_1 không thể vuông góc với nhau.

Ví dụ 12.8. Trên parabol (P) : $y = x^2$ ta lấy ba điểm phân biệt $A(a ; a^2)$, $B(b ; b^2)$ và $C(c ; c^2)$ thoả mãn $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$. Hãy tính tích sau

$$T = (a + b + 1)(b + c + 1)(c + a + 1).$$

Giải.

$$\text{Vì } a^2 - b^2 = b - c \text{ nên } a + b = \frac{b-c}{a-b}, \text{ suy ra } a + b + 1 = \frac{b-c}{a-b} + 1 = \frac{a-c}{a-b}.$$

$$\text{Tương tự, có } b + c + 1 = \frac{b-a}{b-c} \text{ và } c + a + 1 = \frac{c-b}{c-a}.$$

$$\text{Vậy } T = \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{b-a}{b-c} \cdot \frac{c-b}{c-a} = -1.$$

BÀI TẬP

12.1. Cho parabol (P): $y = x^2$. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B nằm trên parabol có hoành độ theo thứ tự bằng -1 và 2.

12.2. Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng (d) : $y = kx + 1$ và parabol (P): $y = x^2$. Chứng minh rằng

a) Đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Có đúng một điểm M thuộc đường thẳng (d') : $y = -1$ để $MA \perp MB$ và đường thẳng MA tiếp xúc với (P).

12.3. Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng (d) : $y = kx + \frac{1}{2}$ và parabol

(P): $y = \frac{1}{2}x^2$. Giả sử đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB thoả mãn phương trình $y = x^2 + \frac{1}{2}$.

12.4. Trong mặt phẳng (Oxy) cho parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm $I(0; 1)$, $J(1; 0)$. Xác định các điểm M, N thuộc (P) sao cho IM, JN ngắn nhất.

12.5. Trong mặt phẳng (Oxy) cho parabol (P): $y = x^2$. Có thể tìm được hay không ba điểm A, B, C thuộc (P) sao cho tam giác ABC là tam giác đều?

12.6. Trong mặt phẳng (Oxy) cho parabol (P): $y = x^2$. Có thể tìm được hay không bốn điểm A, B, C, D thuộc (P) sao cho tứ giác ABCD là một hình vuông?

12.7. Trên parabol (P): $y = x^2$ ta lấy 4 điểm phân biệt $A(a; a^2)$, $B(b; b^2)$, $C(c; c^2)$ và $D(d; d^2)$ thoả mãn $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - d = d^2 - a$. Chứng minh rằng

$$(a+b+1)(b+c+1)(c+d+1)(d+a+1) = \frac{(a-c)^2(b-d)^2}{(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)}.$$

Chuyên đề 13. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, được gọi là *phương trình bậc hai một ẩn* với các hệ số a, b, c . Đôi khi a còn được gọi là hệ số *cao nhất*.

2) Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ tương đương với $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta có $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$:

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm.

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3) Trong trường hợp phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm x_1, x_2 ta có:

- Phân tích đa thức thành nhân tử

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Hệ thức Viète (Vi-et)^(*): $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

(*) Francois Viète (Vi-ét, 1540 - 1603), nhà Toán học Pháp. Xem ảnh bìa 1.

- 4) Nếu hai số x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = p, x_1 \cdot x_2 = q$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$.

Kiến thức bổ sung

Đường thẳng $y = mx + n$ gọi là tiếp xúc với parabol $y = ax^2$ nếu phương trình $ax^2 = mx + n$ có nghiệm kép.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 13.1. Cho phương trình $mx^2 - 2(m+2)x + 9 = 0$. (1)

Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.

Giải.

Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm kép là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+2)^2 - 9m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 5m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Nghiệm kép là $x = \frac{m+2}{m}$.

Với $m = 1$ thì nghiệm kép là $x = 3$.

Với $m = 4$ thì nghiệm kép là $x = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 13.2. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$.

a) Lập phương trình bậc hai nhận x_1^2, x_2^2 làm nghiệm.

b) Lập phương trình bậc hai nhận $\frac{x_1}{x_2}$ và $\frac{x_2}{x_1}$ làm nghiệm khi $b \neq 0$.

Giải.

a) Từ $x_1 + x_2 = -a$ và $x_1 \cdot x_2 = b$ suy ra $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2b$ và $x_1^2 \cdot x_2^2 = b^2$. Vậy phương trình $x^2 - (a^2 - 2b)x + b^2 = 0$ có hai nghiệm là x_1^2, x_2^2 .

b) Ta có $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{a^2 - 2b}{b}$ và $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1$.

Vậy phương trình $x^2 - \frac{a^2 - 2b}{b}x + 1 = 0$ có hai nghiệm là $\frac{x_1}{x_2}$ và $\frac{x_2}{x_1}$.

Ví dụ 13.3. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 4 + a \\ 3x - 4y = -5 + 7a. \end{cases}$$

a) Xác định a để hệ có một nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 185$.

b) Xác định a để hệ có nghiệm $(x; y)$ với $T = xy$ lớn nhất.

Giải.

a) Hệ đã cho tương đương với hệ
$$\begin{cases} y = 4 + a - 2x \\ x = a + 1. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(a + 1; 2 - a)$.

Để $x^2 + y^2 = 185$ cần và đủ là $(a + 1)^2 + (a - 2)^2 = 185$, hay $a^2 - a - 90 = 0$.

Giải ra ta được $a = 10$ và $a = -9$.

b) Ta có $T = xy = (a + 1)(2 - a) = 2 + a - a^2 = \frac{9}{4} - \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 \leq \frac{9}{4}$.

Vậy $T_{\max} = \frac{9}{4}$ khi $a = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 13.4. Chứng minh rằng các phương trình sau có vô số nghiệm trong $\mathbb{Q}$:

a) $x^2 + xy + y^2 = 1$;

b) $x^4 + y^4 + z^4 = 2$.

Giải.

a) Đặt $y = 1 - xt$. Ta có

$$x^2 + x(1 - xt) + (1 - xt)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2(t^2 - t + 1) = x(2t - 1).$$

$$\text{Với } x \neq 0 \text{ thì } x = \frac{2t-1}{t^2-t+1}; y = 1-xt = \frac{1-t^2}{t^2-t+1}.$$

Phương trình đã cho có nhiều vô hạn nghiệm hữu tỉ

$$\left(\frac{2t-1}{t^2-t+1}; \frac{1-t^2}{t^2-t+1} \right) \text{ với } t \in \mathbb{Q}.$$

b) Xét trường hợp đặc biệt $z = x + y$. Khi đó

$$2 = x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

Như vậy $x^2 + xy + y^2 = 1$. Đặt $y = 1 - xt$. Khi đó

$$\begin{cases} x = \frac{2t-1}{t^2-t+1} \\ y = \frac{1-t^2}{t^2-t+1} \\ z = \frac{2t-t^2}{t^2-t+1} \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{Q}.$$

Với mỗi $t \in \mathbb{Q}$ ta có một nghiệm hữu tỉ $\left(\frac{2t-1}{t^2-t+1}; \frac{1-t^2}{t^2-t+1}; \frac{2t-t^2}{t^2-t+1} \right)$.

Từ đó suy ra phương trình có nhiều vô hạn nghiệm hữu tỉ.

Ví dụ 13.5. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + 16y^4 + z^4 = 2$ có vô số nghiệm trong $\mathbb{Q}$.

Giải.

Xét trường hợp đặc biệt $z = x + 2y$. Khi đó ta có

$$2 = x^4 + 16y^4 + (x + 2y)^4 = 2(x^2 + 2xy + 4y^2)^2.$$

Như vậy $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$. Đặt $x = 1 - yt$. Khi đó

$$\begin{cases} x = \frac{4-t^2}{t^2-2t+4} \\ y = \frac{2t-2}{t^2-2t+4} \\ z = \frac{4t-t^2}{t^2-2t+4} \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{Q}.$$

Từ đó suy ra phương trình có vô số nghiệm hữu tỉ.

Ví dụ 13.6. Trong mặt phẳng (Oxy) cho parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$. Giả sử hai đường thẳng đi qua $I(0; 1)$ cắt (P) ở A_1, B_1 và A_2, B_2 tương ứng. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{IA_1} + \frac{1}{IB_1} = \frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} = 1$.

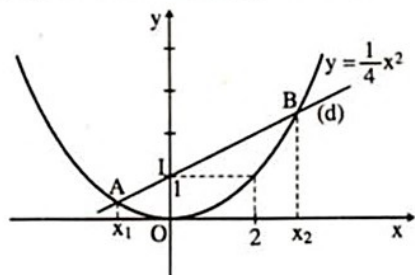
b) $\frac{1}{\sqrt{IA_1 \cdot IA_2}} + \frac{1}{\sqrt{IB_1 \cdot IB_2}} \leq 1$.

Giải.

a) Đường thẳng (d) đi qua (0; 1) và cắt (P) tại hai điểm có dạng $y = kx + 1$.

Giả sử (d) cắt (P) tại A, B (h.7). Khi đó toạ độ của hai điểm A, B là nghiệm

$$\begin{aligned} \text{của hệ } \begin{cases} y = kx + 1 \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = kx + 1 \\ x^2 = 4y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = kx + 1 \\ x^2 - 4kx - 4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Hình 7

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $x^2 - 4kx - 4 = 0$ và $A(x_1; kx_1 + 1)$, $B(x_2; kx_2 + 1)$.

Ta có thể giả thiết $x_1 < 0 < x_2$. Ta có $x_1 + x_2 = 4k$ và $x_1 x_2 = -4$. Biến đổi

$$\begin{aligned} \frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + k^2 x_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + k^2 x_2^2}} \\ &= \frac{1}{-x_1 \sqrt{1+k^2}} + \frac{1}{x_2 \sqrt{1+k^2}} = \frac{x_2}{-x_1 x_2 \sqrt{1+k^2}} + \frac{-x_1}{-x_1 x_2 \sqrt{1+k^2}} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{4\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_2 x_1}}{4\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{16k^2 + 16}}{4\sqrt{1+k^2}} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{IA_1} + \frac{1}{IB_1} = \frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} = 1.$$

b) Từ câu a) suy ra

$$2 = \frac{1}{IA_1} + \frac{1}{IB_1} + \frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} = \frac{IA_1 + IA_2}{IA_1 \cdot IA_2} + \frac{IB_1 + IB_2}{IB_1 \cdot IB_2} \geq \frac{2\sqrt{IA_1 IA_2}}{IA_1 \cdot IA_2} + \frac{2\sqrt{IB_1 IB_2}}{IA_1 \cdot IA_2}.$$

$$\text{Do đó } 1 \geq \frac{1}{\sqrt{IA_1 \cdot IA_2}} + \frac{1}{\sqrt{IB_1 \cdot IB_2}}.$$

Ví dụ 13.7. Trong mặt phẳng (Oxy) cho parabol (P): $y = x^2$. Giả sử góc vuông $\widehat{uIv}$ thay đổi, nhưng hai cạnh của nó luôn luôn tiếp xúc với (P). Chứng minh rằng đỉnh I chạy trên một đường thẳng cố định.

Giải. (h.8)

Giả sử góc vuông $\widehat{uIv}$ với đỉnh $I(a; b)$ và phương trình hai cạnh góc vuông

$$(uI): y = k(x - a) + b,$$

$$(vI): y = k'(x - a) + b \text{ trong đó } k.k' = -1.$$

Vì hai cạnh góc vuông này tiếp xúc (P) nên các phương trình

$x^2 - kx + ka - b = 0$ và $x^2 - k'x + k'a - b = 0$ đều có nghiệm kép.

$$\text{Vậy } \Delta_1 = k^2 - 4ka + 4b = 0 \text{ và } \Delta_2 = k'^2 - 4k'a + 4b = 0.$$

Từ đây suy ra k và k' là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 4ta + 4b = 0$.

$$\text{Vì } k.k' = -1 \text{ nên } 4b = -1 \text{ hay } b = -\frac{1}{4}.$$

Điều này chỉ ra đỉnh góc vuông $I\left(a; -\frac{1}{4}\right)$ chạy trên đường thẳng cố định

$$(d): y = -\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 13.8. Trong mặt phẳng (Oxy) cho điểm $A(0; 1)$. Giả sử điểm $B(2b; -1)$ thay đổi.

a) Viết phương trình đường trung trực (d) của đoạn AB.

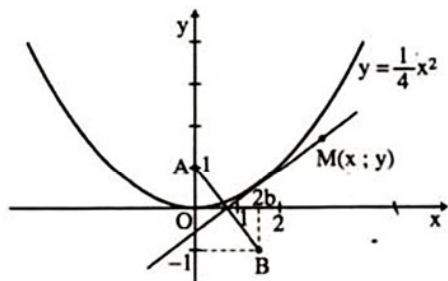
b) Chứng minh rằng đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$.

Giải. (h.9)

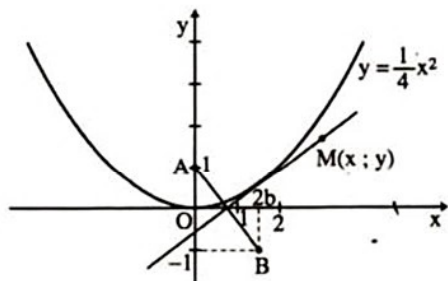
a) Giả sử điểm $M(x; y)$ thuộc mặt phẳng. Điểm M thuộc đường thẳng trung trực (d) của đoạn AB khi và chỉ khi $MA = MB$ hay $MA^2 = MB^2$.

Hệ thức này chính là

$$x^2 + (y - 1)^2 = (x - 2b)^2 + (y + 1)^2.$$



Hình 8



Hình 9

Từ đây suy ra $-2y = -4bx + 4b^2 + 2y$ hay phương trình đường thẳng

$$(d) : y = bx - b^2.$$

b) Phương trình $\frac{1}{4}x^2 = bx - b^2$ tương đương với $(x - 2b)^2 = 0$ có nghiệm kép $x = 2b$.

Vậy đường thẳng (d) luôn luôn tiếp xúc với parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$ tại điểm $C(2b; b^2)$.

Ví dụ 13.9. Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng (d): $y = kx + \frac{1}{2}$ và parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng (d): $y = kx + \frac{1}{2}$ đi qua một điểm cố định và (d) cắt parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Có đúng một điểm M thuộc đường thẳng (d'): $y = -\frac{1}{2}$ để $MA \perp MB$.

Giải. (h.10)

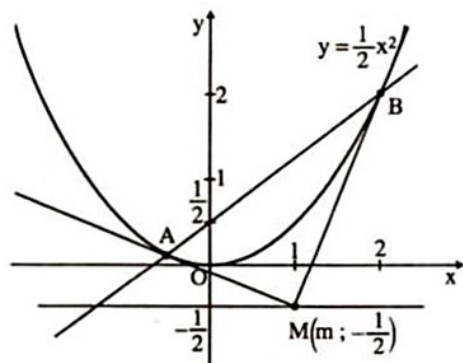
a) Đường thẳng (d): $y = kx + \frac{1}{2}$

đi qua điểm $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ cố định ;

(d) cắt parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$

khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} y = kx + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$



Hình 10

Vì phương trình $x^2 - 2kx - 1 = 0$ có $\Delta' = k^2 + 1 > 0$ nên hệ phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2kx - 1 = 0$.

Vậy (d) cắt (P) tại $A\left(x_1; kx_1 + \frac{1}{2}\right)$ và $B\left(x_2; kx_2 + \frac{1}{2}\right)$.

b) Giả sử điểm $M\left(m; -\frac{1}{2}\right)$ thuộc đường thẳng (d').

Khi đó $MA \perp MB$ khi và chỉ khi $MA^2 + MB^2 = AB^2$ hay

$$(m - x_1)^2 + (kx_1 + 1)^2 + (m - x_2)^2 + (kx_2 + 1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (kx_2 - kx_1)^2.$$

Từ đây suy ra $2m^2 - 2m(x_1 + x_2) + 2k(x_1 + x_2) + 2 = -2x_1x_2 - 2k^2x_1x_2$.

Do $x_1 + x_2 = 2k$ và $x_1x_2 = -1$ nên $m^2 - 2mk + 2k^2 + 1 = 1 + k^2$ hay

$$(m - k)^2 = 0.$$

Vậy ta có đúng một điểm $M\left(k; -\frac{1}{2}\right)$ để $MA \perp MB$.

Ví dụ 13.10. Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng (d): $y = x + 8$ và parabol (P): $y = x^2$. Xác định độ dài cạnh hình vuông ABCD biết hai đỉnh A và B thuộc đường thẳng (d) còn hai đỉnh C và D thuộc parabol (P).

Giải. (h.11)

Vì $BC \perp (d)$ và (d) tạo với Ox góc $45^\circ = \widehat{CDB}$ nên $BD \perp Ox$ hoặc $BD \parallel Ox$. Không mất tính tổng quát, giả sử $BD \perp Ox$ (vì nếu $BD \parallel Ox$ thì chỉ cần đổi vị trí của A và B sẽ có $BD \perp Ox$).

Đặt $A(a; a + 8)$, $B(x; x + 8)$, $C(c; c^2)$,

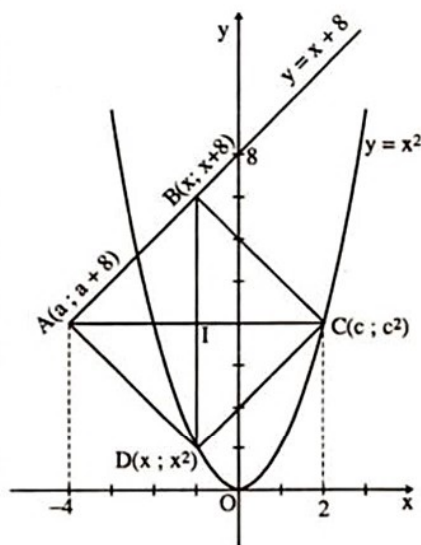
$D(x; x^2)$, trong đó $a + 8 = c^2$ và $x = \frac{a + c}{2}$.

Gọi I là giao điểm của AC và BD. Ta có $ID \perp Ox$ và $IC \perp Oy$ nên $ID = |x^2 - c^2|$ và $IC = |x - c|$.

Do $ID = IC$ nên $x^2 - c^2 = x - c$ hoặc $x^2 - c^2 = c - x$.

• Xét $x^2 - c^2 = x - c$.

Vì $x \neq c$ nên $x + c = 1$.



Hình 11

$$\begin{aligned}\text{Biến đổi } 2x &= c + a = c + c^2 - 8 \\ &= 1 - x + (1 - x)^2 - 8 \\ &= x^2 - 3x - 6.\end{aligned}$$

Ta nhận được

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = 6$.

- Với $x = -1$ ta có $c = 2$, $a = -4$.

Khi đó $A(-4; 4)$, $B(-1; 7)$, $C(2; 4)$, $D(-1; 1)$ và độ dài cạnh $AB = 3\sqrt{2}$ (h.11).

- Với $x = 6$ ta có $c = -5$, $a = 17$.

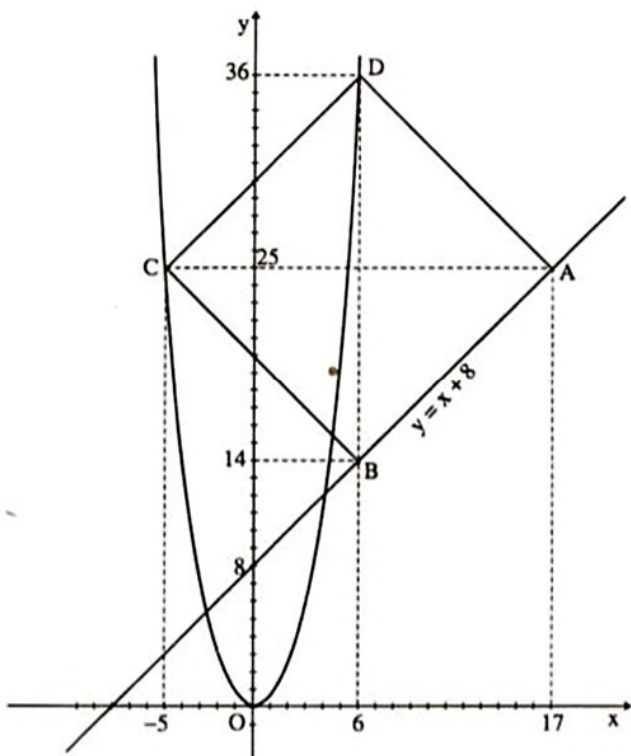
Khi đó $A(17; 25)$, $B(6; 14)$, $C(-5; 25)$, $D(6; 36)$ và độ dài cạnh $AB = 11\sqrt{2}$ (h.12).

• Xét $x^2 - c^2 = c - x$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } x + c &= -1 \text{ và } 2x = c + a = c + (c^2 - 8) = (-1 - x) + (1 + x)^2 - 8 \\ &= x^2 + x - 8\end{aligned}$$

nên $x^2 = x + 8$. (Loại vì khi đó $B \equiv D$).

Ví dụ 13.11. Trong mặt phẳng (Oxy) cho parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm $M(-1; 1)$ và $N(1; 1)$ thuộc (P). Giả sử hai dây cung bất kỳ AB và CD đều khác MN, đi qua trung điểm I của MN. Gọi giao điểm của AC và BD với MN là P và Q tương ứng. Chứng minh rằng $IP = IQ$.



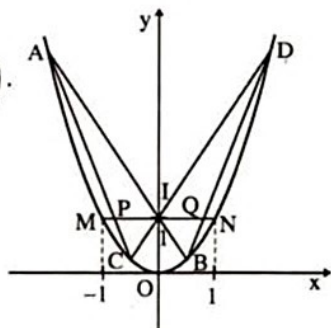
Hình 12

Giải. (h.13)

Đặt $A(x_1; x_1^2)$, $B(x_2; x_2^2)$, $C(x_3; x_3^2)$, $D(x_4; x_4^2)$.

Trung điểm I của MN chính là điểm $I(0; 1)$.

Đường thẳng đi qua I và cắt (P) tại hai điểm có dạng $y = kx + 1$. Giao điểm của nó với (P) có hoành độ là nghiệm của phương trình $x^2 = kx + 1$ hay $x^2 - kx - 1 = 0$.



Hình 13

Theo hệ thức Vi-et $x_1x_2 = -1$; $x_3x_4 = -1$.

Phương trình của đường thẳng AC là

$$\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y - x_1^2}{x_3^2 - x_1^2} \Leftrightarrow x - x_1 = \frac{y - x_1^2}{x_3 + x_1} \quad (\text{do } x_1 \neq x_3).$$

Toạ độ của P là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - x_1 = \frac{y - x_1^2}{x_3 + x_1} \\ y = 1. \end{cases}$

$$\text{Từ đó } x = x_1 + \frac{1 - x_1^2}{x_3 + x_1} = \frac{x_1^2 + x_1x_3 + 1 - x_1^2}{x_3 + x_1} = \frac{x_3x_1 + 1}{x_3 + x_1}.$$

$$\text{Do đó } x_P = \frac{x_3x_1 + 1}{x_3 + x_1}. \text{ Tương tự } x_Q = \frac{x_2x_4 + 1}{x_2 + x_4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } x_P + x_Q &= \frac{x_1x_3 + 1}{x_1 + x_3} + \frac{x_2x_4 + 1}{x_2 + x_4} \\ &= \frac{x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_2 + x_4 + x_1x_2x_4 + x_1 + x_2x_3x_4 + x_3}{(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)}. \end{aligned}$$

Do $x_1x_2 = x_3x_4 = -1$ nên

$$x_P + x_Q = \frac{-x_3 - x_1 + x_2 + x_4 - x_4 + x_1 - x_2 + x_3}{(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)} = 0.$$

Vậy $IP = IQ$.

BÀI TẬP

13.1. Giải phương trình $(8x - 7)^2 - (3x + 1)^2 = 0$.

13.2. Giải phương trình $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = x^3 - 1$.

13.3. Giải và biện luận phương trình $2ax^2 - 5x + 3 = 0$.

13.4. Xác định tất cả các giá trị của m để phương trình

$$x^2 + (3m - 7)x + m = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_2 = 3x_1$.

13.5. Xác định tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 5|x| + m = 0$ có đúng một nghiệm.

13.6. Giải và biện luận phương trình $ax^2 - 2(3a + 1)x + a - 2 = 0$.

13.7. Tìm hai cách khác nhau để tính

$$a = \sqrt{52 + 14\sqrt{3}} + \sqrt{52 - 14\sqrt{3}}.$$

13.8. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - ax + b = 0$. Lập phương trình bậc hai nhận $3x_1 + 2x_2$ và $3x_2 + 2x_1$ làm nghiệm.

13.9. Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của $x^2 + ax + 1 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = x_1^4 + x_2^4.$$

13.10. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + bx + 1 = 0$. Tính

$$T = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_4 + x_1) \text{ và}$$

$$S = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3) + (x_1 + x_4)(x_2 + x_4).$$

13.11. Cho bốn số a, b, c, d thoả mãn $ab + 2(b + c + d) = c(a + b)$. Chứng minh rằng trong ba phương trình sau đây có ít nhất một phương trình có nghiệm:

$$x^2 - ax + b = 0, x^2 - bx + c = 0, x^2 - cx + d = 0.$$

13.12. Cho 4 phương trình với ẩn x dưới đây:

$$x^2 - 2ax + 4 = 0;$$

$$x^2 + 2x + 4a^2 = 0;$$

$$x^2 + 4ax + 1 = 0 ;$$

$$x^2 - 4x + a^2 = 0.$$

Chứng minh rằng, với mọi giá trị của a thuộc $\mathbf{R}$ ít nhất có hai phương trình có nghiệm.

- 13.13. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + 6x - 8 = 0$. Chứng minh rằng luôn lập được một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào a .

Chuyên đề 14. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- 1) Phương trình $a(f(x))^2 + bf(x) + c = 0, a \neq 0$ được đưa về phương trình bậc hai một ẩn bằng cách đặt $t = f(x)$.

- 2) Phương trình $bx(bx + a)(bx + 2a)(bx + 3a) = c, b \neq 0$ được đưa về phương trình bậc hai một ẩn bằng cách đặt $t = (bx)^2 + 3abx$.

- 3) Phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$. Vì $x = 0$ không là nghiệm nên $x \neq 0$.

Chia hai vế cho x^2 ta có $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$, được đưa về phương trình bậc hai một ẩn bằng cách đặt $t = x + \frac{1}{x}$ với $|t| \geq 2$.

- 4) Phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + akx + k^2 = 0, k \neq 0$. Vì $x = 0$ không là nghiệm

nên $x \neq 0$. Chia hai vế cho x^2 ta có $\left(x + \frac{k}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{k}{x}\right) + b - 2k = 0$, đưa về phương trình bậc hai một ẩn bằng cách đặt $t = x + \frac{k}{x}$.

- 5) Phương trình $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ đưa về phương trình bậc hai bằng cách đặt

$$x = t - \frac{a+b}{2}. \text{ Khi đó}$$

$$\begin{aligned}
 c &= (x+a)^4 + (x+b)^4 = \left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a-b}{2}\right)^4 \\
 &= 2t^4 + 12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 t^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4.
 \end{aligned}$$

Đặt $y = t^2 \geq 0$. Ta có $2y^2 + 12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 y + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 - c = 0$.

- 6) Phương trình $a(a+x)(a+2x)(a+3x) = b(b+x)(b+2x)(b+3x)$ được đưa về phương trình bậc hai như sau: Đặt $u = a^2 + 3ax$, $v = b^2 + 3bx$.

Khi đó $u(u+2x^2) = v(v+2x^2)$ hay $(u-v)(u+v+2x^2) = 0$.

Phương trình đã cho được đưa về hai phương trình sau:

- $a^2 + 3ax = b^2 + 3bx$.
- $2x^2 + 3(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$.

- 7) Phương trình vô tỷ quy về phương trình bậc hai bằng cách bình phương hai vế hoặc đặt ẩn phụ.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 14.1. Giải phương trình $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$.

Giải.

Vì $x^4 - 4x^3 - 1 = (x^2 - 2x - 1)^2 - 2(x+1)^2$ nên phương trình đã cho tương đương $\left[x^2 - (2 + \sqrt{2})x - (1 + \sqrt{2})\right]\left[x^2 - (2 - \sqrt{2})x - (1 - \sqrt{2})\right] = 0$.

Dễ dàng suy ra nghiệm $x = \frac{2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{10 + 8\sqrt{2}}}{2}$.

Ví dụ 14.2. Xác định những giá trị của m để phương trình

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$$

có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 > 0$.

Giải.

Phương trình đã cho có dạng $(x^2 - 1)(x^2 - 2m - 1) = 0$.

Vậy $x^2 = 1$ hoặc $x^2 = 2m + 1$.

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt cần và đủ là $2m + 1 > 0$ và $2m + 1 \neq 1$. Như vậy $m \neq 0$, $m > -\frac{1}{2}$.

Khi đó 4 nghiệm phương trình là ± 1 và $\pm\sqrt{2m+1}$.

Giả sử phương trình đã cho có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn điều bài.

• Nếu $m > 0$ thì $x_1 = -\sqrt{2m+1}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ và $x_4 = \sqrt{2m+1}$.

Để $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$ và $m > 0$ cần và đủ $\sqrt{2m+1} - 1 = 2$ hay $m = 4$.

• Nếu $-\frac{1}{2} < m < 0$ thì $x_1 = -1$, $x_2 = -\sqrt{2m+1}$, $x_3 = \sqrt{2m+1}$ và $x_4 = 1$.

Để $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$ và $-\frac{1}{2} < m < 0$ cần và đủ $1 = 3\sqrt{2m+1}$ hay $m = -\frac{4}{9}$.

Ví dụ 14.3. Giải phương trình $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$.

Giải.

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia hai vế cho x^2 ta có $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 + 3\left(x - \frac{2}{x}\right) + 2 = 0$.

Đặt $t = x - \frac{2}{x}$. Ta có $t^2 + 3t + 2 = 0$ và nhận được $t = -1$, $t = -2$.

Giải phương trình $x - \frac{2}{x} = -1$ và $x - \frac{2}{x} = -2$ được 4 nghiệm

$$x_1 = -2, x_2 = 1, x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Ví dụ 14.4. Chứng minh rằng, nếu phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm thực thì $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$ và $2a^2 + b^2 \geq \frac{4}{3}$.

Giải.

Vì $x = 0$ không là nghiệm nên $x \neq 0$.

Chia hai vế cho x^2 ta có $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$, đưa về phương trình

bậc hai một ẩn bằng cách đặt $t = x + \frac{1}{x}$ với $|t| \geq 2$.

Ta có $t^2 + at + b - 2 = 0$ với $t^2 \geq 4$.

Giả thiết phương trình đã cho có nghiệm.

Khi đó $t^2 + at + b - 2 = 0$ có nghiệm t với $t^2 \geq 4$.

Theo bất đẳng thức Bu-nhia-kốp-xki ta có

$$(a^2 + b^2)(t^2 + 1) \geq (at + b)^2 = (2 - t^2)^2.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 \geq \frac{t^4 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1}.$$

$$\text{Bất đẳng thức } \frac{t^4 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1} \geq \frac{4}{5} \text{ tương đương } (t^2 - 4)(5t^2 - 4) \geq 0: \text{ đúng.}$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}.$$

Ta lại có $(a^2 + b^2 + a^2)(x^6 + x^4 + x^2) \geq (ax^3 + bx^2 + ax)^2 = (-1 - x^4)^2$ theo bất đẳng thức Bu-nhia-kốp-xki. Vậy $2a^2 + b^2 \geq \frac{x^8 + 2x^4 + 1}{x^6 + x^4 + x^2}$.

$$\text{Kiểm tra } \frac{x^8 + 2x^4 + 1}{x^6 + x^4 + x^2} \geq \frac{4}{3}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $(x^2 - 1)^2(3x^4 + 2x^2 + 3) \geq 0$ (đúng).

$$\text{Vậy } 2a^2 + b^2 \geq \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 14.5. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 15x - 17} = x + 3$.

Giải.

Điều kiện $2x^2 + 15x - 17 \geq 0$.

Từ phương trình ta suy ra $x + 3 \geq 0$ hay $x \geq -3$.

Bình phương hai vế được $2x^2 + 15x - 17 = x^2 + 6x + 9$ hay $x^2 + 9x - 26 = 0$.

$$\text{Ta có hai nghiệm } x = \frac{-9 \pm \sqrt{185}}{2}.$$

So sánh với điều kiện ta nhận được đúng một nghiệm $x = \frac{-9 + \sqrt{185}}{2}$.

Ví dụ 14.6. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$.

Giải.

$$\text{Ta có } 3x^2 - 2x + 8 = \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{23}{3} > 0.$$

$$\text{Đặt } t = 3x^2 - 2x + 8. \text{ Khi đó ta có } \sqrt{t+7} + \sqrt{t} = 7.$$

$$\text{Bình phương hai vế có } \sqrt{t(t+7)} = 21 - t, \text{ điều kiện bổ sung } t \leq 21.$$

Bình phương hai vế, rút ra $t = 9$ (thỏa mãn điều kiện).

$$\text{Vậy } 3x^2 - 2x + 8 = 9, \text{ hay } 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$\text{Giải phương trình này được } x = 1, x = -\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 14.7. Giải phương trình $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + \sqrt{x^2 + 2x + 17} = 3$.

Giải.

Cách 1. Phương trình đã cho viết thành

$$(x^2 + 2x + 1)^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 17} = 4.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x + 17} \geq 4$. Ta có $x^2 + 2x + 1 = t^2 - 16$ và phương trình đã cho được viết thành

$$(t^2 - 16)^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t - 4) \left[(t - 4)(t + 4)^2 + 1 \right] = 0.$$

Phương trình $t - 4 = 0$ có nghiệm $t = 4$, hay $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$;

Phương trình $(t - 4)(t + 4)^2 + 1 = 0$ vô nghiệm do $t \geq 4$.

Tóm lại phương trình có một nghiệm $x = -1$.

Cách 2. Phương trình đã cho viết thành

$$4 = (x^2 + 2x + 1)^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 17} = (x + 1)^4 + \sqrt{(x + 1)^2 + 16} \geq 4.$$

Vậy phương trình có đúng một nghiệm $x = -1$.

Ví dụ 14.8. Giải phương trình $3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x + 18} - 2|$.

Giải. Đặt $f(t) = 3t - 2|t - 2| = \begin{cases} t + 4 & \text{nếu } t \geq 2 \\ 5t - 4 & \text{nếu } t \leq 2. \end{cases}$

Dễ dàng kiểm tra $f(t)$ là hàm đơn điệu tăng.

Phương trình đã cho viết thành $f(x) = f(\sqrt{3x + 18})$.

Từ đây suy ra $x = \sqrt{3x + 18}$ hay $x = 6$.

Ví dụ 14.9. Giải phương trình $\sqrt[3]{25x(2x^2 + 9)} = 4x + \frac{3}{x}$.

Giải. Điều kiện $x \neq 0$. Vì hai vế của phương trình đều là những hàm số lẻ, nên ta chỉ cần xét $x > 0$. Ta có

$$4x^2 + 3 = \sqrt[3]{25x^4(2x^2 + 9)} = \sqrt[3]{5x^2 \cdot 5x^2 \cdot (2x^2 + 9)} \leq \frac{5x^2 + 5x^2 + 2x^2 + 9}{3} = 4x^2 + 3.$$

Như vậy $x^2 = 3$ và ta có $x = \sqrt{3} > 0$. Tóm lại $x = \pm\sqrt{3}$.

BÀI TẬP

14.1. Giải phương trình $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$.

14.2. Giải phương trình $(x - 1)^4 + (x + 3)^4 = 32$.

14.3. Tìm quan hệ giữa a, b, c để phương trình $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ có nghiệm.

14.4. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm thì

$$a^2 + 8 \geq 4b.$$

14.5. Giải và biện luận phương trình $mx^4 + 5x^2 - 1 = 0$.

14.6. Tìm những giá trị của m để phương trình

$$x^4 - (3m + 4)x^2 + 12m = 0$$

có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 > 0$.

14.7. Giải phương trình $x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 2x + 1 = 0$.

14.8. Giải phương trình $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 20x + 25 = 0$.

14.9. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm thực thì $a^2 + (b-2)^2 \geq \frac{16}{5}$.

14.10. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 4} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$.

14.11. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 4x + 5}} + \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 3x + 5}} = \frac{10}{3}$.

14.12. Giải phương trình $\sqrt[3]{10 - \sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt{x^2 + 1}} = 4$.

14.13. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{1 + x - x^2} = x^2 - x + 2$.

Chuyên đề 15. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cần chú ý đến các phương pháp và các dạng sau :

- 1) Phương pháp biến thành tích.
- 2) Phương pháp thế.
- 3) Phương pháp đánh giá.
- 4) Hệ phương trình đối xứng.
- 5) Hệ phương trình phản xứng.
- 6) Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

1. Phương pháp biến đổi thành tích

Ví dụ 15.1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x + 4y + xy = 14 \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$$

Giải.

Ta có $x^2 + y^2 + xy + 4x + 4y + xy = 21$, hay

$$(x + y)^2 + 4(x + y) - 21 = 0.$$

Ta có $x + y = 3$ hoặc $x + y = -7$.

Từ đây suy ra hai hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x + 4y + xy = 14. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7 \\ 4x + 4y + xy = 14. \end{cases}$$

- Xét hệ thứ nhất : $\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x + 4y + xy = 14 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2. \end{cases}$

Hệ này có hai nghiệm là $(2 ; 1)$ và $(1 ; 2)$.

- Xét hệ thứ hai : $\begin{cases} x + y = -7 \\ 4x + 4y + xy = 14 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 42. \end{cases}$

Ta thấy x và y là hai nghiệm của phương trình $t^2 + 7t + 42 = 0$.

Vì $\Delta = 49 - 4.42 < 0$ nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ thứ hai vô nghiệm.

Tóm lại, hệ đã cho có hai nghiệm là $(2 ; 1)$ và $(1 ; 2)$.

Ví dụ 15.2. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + 16\frac{y^2}{x^2} = 8 \\ x + y + xy = 5. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện : $x, y \neq 0$. Đặt $t = \frac{x^2}{y^2} > 0$.

Từ $\frac{x^2}{y^2} + 16\frac{y^2}{x^2} = 8$ suy ra $t + \frac{16}{t} = 8$ hay $t^2 - 8t + 16 = 0$.

Vậy $t = 4$. Từ đây suy ra $\frac{x}{y} = \pm 2$ và ta có các hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ x + y + xy = 5. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = -2 \\ x + y + xy = 5. \end{cases}$$

• Xét hệ thứ nhất $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2y \\ 2y^2 + 3y - 5 = 0. \end{cases}$

Hệ này có hai nghiệm là $(2; 1)$ và $\left(-5; -\frac{5}{2}\right)$.

• Xét hệ thứ hai $\begin{cases} \frac{x}{y} = -2 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -2y \\ 2y^2 + y + 5 = 0. \end{cases}$

Hệ này vô nghiệm.

Tóm lại, hệ đã cho có hai nghiệm là $(2; 1)$ và $\left(-5; -\frac{5}{2}\right)$.

Ví dụ 15.3. Xác định tất cả các giá trị của a và b để hệ phương trình dưới đây có không ít hơn năm nghiệm $(x; y)$:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + axy - 1 = 0 \\ bx(2x - y) + (y - 1)(2x - y) = bx + y - 1. \end{cases}$$

Giải.

Viết hệ đã cho thành dạng
$$\begin{cases} (bx + y - 1)(2x - y - 1) = 0 \\ 4x^2 + y^2 + axy - 1 = 0. \end{cases}$$

Tập nghiệm của hệ này chính là hợp hai tập nghiệm của các hệ :

$$\begin{cases} y = 1 - bx \\ (4 + b^2 - ab)x^2 + (a - 2b)x = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ (8 + 2a)x^2 - (4 + a)x = 0. \end{cases}$$

Nếu cả $4 + a \neq 0$ và $(4 + b^2 - ab)(a - 2b) \neq 0$ thì hệ đã cho có không nhiều hơn 4 nghiệm.

Vậy để hệ đã cho có nhiều hơn 5 nghiệm thì cần và đủ là hoặc $4 + a = 0$ và b tùy ý hoặc $4 + b^2 - ab = a - 2b = 0$.

Khi đó hoặc $a = -4$ và $b \in \mathbf{R}$ tùy ý hoặc $a = 4, b = 2$.

Ví dụ 15.4. Xác định tất cả các giá trị của a để hệ phương trình dưới đây có ít nhất một nghiệm $(x; y)$

$$\begin{cases} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0 \\ 5x^2 - 16xy + 13y^2 - 6x + 10y + 2ax - 4ay + a^2 - 2a - 5 = 0. \end{cases}$$

Giải.

Viết lại hệ thành dạng

$$\begin{cases} (2x - 3y - 1)^2 + 6(x - 2y - \frac{1}{6}) = 0 \\ (2x - 3y - 1)^2 + (x - 2y + a - 1)^2 = 7. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = 2x - 3y - 1, v = x - 2y - \frac{1}{6}, b = a - \frac{5}{6}.$$

Khi đó ta có hệ :

$$\begin{cases} u^2 + 6v = 0 \\ u^2 + (v + b)^2 = 7 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u^2 = -6v \\ v^2 + 2(b - 3)v + b^2 - 7 = 0. \end{cases}$$

Ta xác định b để $v^2 + 2(b - 3)v + b^2 - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm $v \leq 0$.

Xét $\Delta' = (b - 3)^2 - b^2 + 7 = -6b + 16 \geq 0$. Khi đó $b \leq \frac{8}{3} < 3$.

Từ đây suy ra $b - 3 < 0$ và phương trình $v^2 + 2(b - 3)v + b^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm v_1, v_2 thỏa mãn $v_1 + v_2 = -2(b - 3) > 0$.

Để hệ đã cho có ít nhất một nghiệm thì cần và đủ là $b \leq \frac{8}{3}, b^2 \leq 7$.

Do đó $\frac{5}{6} - \sqrt{7} \leq a \leq \frac{5}{6} + \sqrt{7}$.

2. Phương pháp thế

Ví dụ 15.5. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} (1+x)(1+2x)(1+3x) = (1+3y)(1+3y+2x^2) \\ 2x+3y=30. \end{cases}$$

Giải.

Ta có $(1+3x)(1+3x+2x^2) = (1+3y)(1+3y+2x^2)$.

Đặt $u = 1 + 3x, v = 1 + 3y$.

Khi đó $u^2 - v^2 + 2x^2(u - v) = 0$.

Từ đây suy ra hoặc $u - v = 0$ hoặc $u + v + 2x^2 = 0$.

Như vậy hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 1+3x=1+3y \\ 2x+3y=30 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 2x^2+3x+3y+2=0 \\ 2x+3y=30. \end{cases}$$

Ta có nghiệm $(6; 6)$.

Ví dụ 15.6. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^2} + xy = 72 \\ \frac{y^4}{x^2} + xy = 9. \end{cases}$$

Giải. Điều kiện $x, y \neq 0$. Đặt $t = xy$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \frac{x^4}{y^2} = 72 - t \\ \frac{y^4}{x^2} = 9 - t. \end{cases}$$

Nhân vế với vế của hai phương trình ta nhận được $t^2 = (72 - t)(9 - t)$ hay $t = 8$.

Dễ dàng suy ra hai nghiệm $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$.

Ví dụ 15.7. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \frac{21}{5} \\ \frac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \frac{21}{4}. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện : $x, y \neq 0$. Đặt $u = x^2 + y^2$, $v = 2xy$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} \frac{1}{u} = \frac{21}{5} - v \\ u = \frac{21}{4} - \frac{1}{v}. \end{cases}$$

Nhân vế với vế của hai phương trình ta nhận được phương trình

$$1 = \left(\frac{21}{5} - v\right)\left(\frac{21}{4} - \frac{1}{v}\right) \text{ hay } \frac{21}{20} = \frac{v}{4} + \frac{1}{5v}.$$

Ta có phương trình bậc hai $5v^2 - 21v + 4 = 0$.

Dễ dàng suy ra hai nghiệm $v = 4$ hoặc $v = \frac{1}{5}$.

• Xét trường hợp $v = 4$. Khi đó $u = \frac{21}{4} - \frac{1}{4} = 5$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Dễ dàng suy ra $(x + y)^2 = 9$ và ta được $x + y = \pm 3$.

Như vậy ta có hai hệ $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$.

Giải lần lượt từng hệ được tất cả 4 nghiệm $(2; 1), (1; 2); (-2; -1); (-1; -2)$.

• Xét trường hợp $v = \frac{1}{5}$. Khi đó $\frac{1}{u} = \frac{21}{5} - \frac{1}{5} = 4$.

Ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ xy = \frac{1}{10} \end{cases}$.

Dễ dàng suy ra $(x + y)^2 = \frac{9}{20}$ và ta được $x + y = \pm \frac{3}{2\sqrt{5}}$.

Như vậy ta có hai hệ : $\begin{cases} x + y = \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ xy = \frac{1}{10} \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = -\frac{3}{2\sqrt{5}} \\ xy = \frac{1}{10} \end{cases}$.

Giải lần lượt từng hệ được tất cả bốn nghiệm :

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right), \left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Tóm lại, hệ đã cho có 8 nghiệm : $(2; 1), (1; 2), (-2; -1), (-1; -2),$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right), \left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

3. Phương pháp đánh giá

Ví dụ 15.8. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 y^2 (x^2 + y^2) = 2 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Giải.

Vì $4 = (x + y)^2 \geq 4xy$ nên $0 \leq xy \leq 1$.

Vì $x^2y^2(x^2 + y^2) = x^2y^2(4 - 2xy) = 2xy \cdot xy \cdot (2 - xy)$, nên

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2 \left(\frac{xy + xy + 2 - xy}{3} \right)^3 \leq 2 \left(\frac{1 + 2}{3} \right)^3 = 2.$$

Do vậy, từ $x^2y^2(x^2 + y^2) = 2$ suy ra $x = y = 1$.

Kiểm tra thấy $x = y = 1$ thoả mãn hệ.

Tóm lại, hệ có đúng một nghiệm $x = 1, y = 1$.

Ví dụ 15.9. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2 + (y + 3)^2 = 1 \\ x^3 + (y + 3)^3 = 1. \end{cases}$$

Giải.

Đặt $z = y + 3$. Khi đó
$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

Vì $1 = x^2 + z^2 \geq x^2$ nên $-1 \leq x \leq 1$.

Tương tự ta có $-1 \leq z \leq 1$.

Từ $0 = 1 - 1 = x^2 + z^2 - x^3 - z^3 = x^2(1 - x) + z^2(1 - z) \geq 0$,

ta suy ra
$$\begin{cases} x^2(1 - x) = 0 \\ z^2(1 - z) = 0. \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ thì $z^3 = 1$ hay $(y + 3)^3 = 1$. Ta có nghiệm $x = 0, y = -2$.

Nếu $x = 1$ thì $z^3 = 0$ hay $(y + 3)^3 = 0$. Ta có nghiệm $x = 1, y = -3$.

Tóm lại, hệ có 2 nghiệm $(0; -2)$ và $(1; -3)$.

Ví dụ 15.10. Chứng minh rằng hệ phương trình sau đây không có nghiệm dương :

$$\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 32 \\ 2y^2 + yz + z^2 = 25 \\ 2z^2 + zx + x^2 = 86. \end{cases}$$

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $(x; y; z)$ với $x, y, z > 0$.

Từ phương trình thứ nhất và thứ hai suy ra $2x^2 < 32$ và $z^2 < 25$.

Vì $x, z > 0$ nên $x < 4, z < 5$.

Từ đây suy ra $86 = 2z^2 + zx + x^2 < 50 + 20 + 16 = 86$: mâu thuẫn.

Như vậy hệ phương trình đã cho không có nghiệm dương.

Ví dụ 15.11. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2y^2 + 9y = 21 + x^2 \\ 3x^2 + 2y^2 - 4xy + 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

Giải.

Viết phương trình $3x^2 + 2y^2 - 4xy + 3y - 7 = 0$ thành phương trình bậc hai với ẩn x ta có

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 + 3y - 7 = 0.$$

Để hệ có nghiệm thì phương trình bậc hai này phải có nghiệm.

Khi đó $\Delta' \geq 0$ hay $4y^2 - 3(2y^2 + 3y - 7) \geq 0$.

Vậy $2y^2 + 9y \leq 21$.

Vì $2y^2 + 9y = 21 + x^2 \geq 21$ nên $x^2 = 0$ và $2y^2 + 9y - 21 = 0$.

$$\text{Từ hệ: } \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 + 9y = 21 \\ 2y^2 + 3y = 7 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 + 9y = 21 \\ 6y = 14. \end{cases}$$

Do $y = \frac{7}{3}$ không là nghiệm của $2y^2 + 9y = 21$ ta suy ra hệ đã cho vô nghiệm.

4. Hệ phương trình đối xứng**Hệ đối xứng loại I**

Đa thức $f(x, y)$ của hai biến x và y được gọi là đa thức *đối xứng* nếu $f(x, y) = f(y, x)$.

Với hai đa thức đối xứng $f(x, y)$ và $g(x, y)$ ta xét hệ phương trình đối xứng loại I :

$$\begin{cases} f(x, y) = a \\ g(x, y) = b. \end{cases}$$

Hiển nhiên, nếu $x = x_0, y = y_0$ là nghiệm của hệ thì $x = y_0, y = x_0$ cũng là nghiệm của hệ.

Ví dụ 15.12. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ x^2 + y^2 = 6 - 4a^2. \end{cases}$$

a) Giải và biện luận hệ phương trình.

b) Xác định a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

a) Ta có
$$\begin{cases} y = 2a - x \\ x^2 + (2a - x)^2 + 4a^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

hay hệ phương trình
$$\begin{cases} y = 2a - x \\ 2x^2 - 4ax + 8a^2 - 6 = 0. \end{cases}$$

Xét $x^2 - 2ax + 4a^2 - 3 = 0$. Ta có $\Delta' = 3 - 3a^2$.

Nếu $a^2 > 1$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $a^2 \leq 1$ hay $-1 \leq a \leq 1$ thì hệ đã cho có nghiệm

$$x_1 = a + \sqrt{3 - 3a^2}, y_1 = a - \sqrt{3 - 3a^2} \text{ và}$$

$$x_2 = a - \sqrt{3 - 3a^2}, y_2 = a + \sqrt{3 - 3a^2}.$$

Tóm lại : Nếu $|a| > 1$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $|a| \leq 1$ thì hệ có nghiệm

$$(a + \sqrt{3 - 3a^2}; a - \sqrt{3 - 3a^2}) \text{ và } (a - \sqrt{3 - 3a^2}; a + \sqrt{3 - 3a^2}).$$

b) Để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì cần và đủ là $3 - 3a^2 = 0$ hay $a = \pm 1$.

Ví dụ 15.13. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y - a(1 + xy) = 0 \\ xy + 2x + 2y + 5 = 0. \end{cases}$$

a) Giải hệ đã cho với $a = 1$.

b) Xác định a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

a) Khi $a = 1$ thì hệ đã cho trở thành hệ :

$$\begin{cases} xy - x - y + 1 = 0 \\ xy + 2x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} (x - 1)(y - 1) = 0 \\ xy + 2x + 2y + 5 = 0. \end{cases}$$

Với $x = 1$ có $3y + 7 = 0$. Vậy $x = 1, y = -\frac{7}{3}$.

Với $y = 1$ có $3x + 7 = 0$. Vậy $x = -\frac{7}{3}, y = 1$.

Vậy hệ có hai nghiệm $x = 1, y = -\frac{7}{3}$ và $x = -\frac{7}{3}, y = 1$.

b) Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$. Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = y_0, y = x_0$.

Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $x_0 = y_0$. Xét trường hợp $x = y$.

Khi đó $0 = xy + 2x + 2y + 5 = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$: mâu thuẫn.

Vậy không có giá trị nào của a để hệ có đúng một nghiệm.

Ví dụ 15.14. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a(x + y) = a \\ xy + a(x + y) + 4 = 0. \end{cases}$$

Hãy xác định tất cả các giá trị của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$. Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = y_0,$

$y = x_0$.

Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $x_0 = y_0$. Xét trường hợp $x = y$.

$$\text{Khi đó} \quad \begin{cases} 2x^2 - 2ax = a \\ x^2 + 2ax + 4 = 0. \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình được $3x^2 + 4 = a$.

Để hệ có đúng một nghiệm thì phương trình này có đúng một nghiệm $x = 0$.
Vậy $a = 4$.

Với $a = 4$ hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x + y) = 4 \\ xy + 4(x + y) + 4 = 0. \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình $x^2 + xy + y^2 = 0$ hay $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 0$.

Từ đây suy ra $x = y = 0$.

Tóm lại, để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì cần và đủ là $a = 4$.

Ví dụ 15.15. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = a. \end{cases}$$

Hãy xác định tất cả các giá trị a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$. Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = y_0, y = x_0$.

Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $x_0 = y_0$. Xét trường hợp $x = y$.

Khi đó
$$\begin{cases} 2x = 2a \\ x^4 = a. \end{cases}$$
 Từ đây suy ra $a = 0$ hoặc $a = 1$.

• Với $a = 0$ hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 0. \end{cases}$$

Vì $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 0$ nên $0 = 2x^4 + 2y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 + x^4 + y^4$ và suy ra $x = y = 0$.

Kiểm tra, nghiệm $(0; 0)$ thoả mãn đầu bài. Vậy $a = 0$ thoả mãn.

• Với $a = 1$ hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 1. \end{cases}$$

Từ $2x^4 + 2y^4 - 2x^2y^2 = 2$ được $(x^2 - y^2)^2 + x^4 + y^4 = 2$, chỉ có thể $x^2 = y^2 = 1$.

Do $x + y = 2$ nên $x = y = 1$. Vậy $a = 1$ thoả mãn.

Kết luận : $a = 0, a = 1$.

Hệ đối xứng loại II

Cho hàm $f(x, y)$. Xét hệ phương trình đối xứng loại II :
$$\begin{cases} f(x, y) = a \\ f(y, x) = a. \end{cases}$$

Hiển nhiên, nếu $x = x_0, y = y_0$ là nghiệm của hệ thì $x = y_0, y = x_0$ cũng là nghiệm của hệ.

Ví dụ 15.16. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + (1 + y)^2 = a \\ y^2 + (x + 1)^2 = a. \end{cases}$$

Hãy xác định các giá trị của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$. Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = y_0, y = x_0$.

Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $x_0 = y_0$. Xét trường hợp $x = y$.

Khi đó $x^2 + (1 + x)^2 = a$ hay $2x^2 + 2x + 1 - a = 0$.

Để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì phương trình $2x^2 + 2x + 1 - a = 0$ chỉ có một nghiệm. Khi đó $\Delta' = 0$ hay $a = \frac{1}{2}$.

$$\text{Với } a = \frac{1}{2} \text{ hệ đã cho trở thành } \begin{cases} x^2 + (1 + y)^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 + (x + 1)^2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cộng hai phương trình và nhân với 2 ta có $(2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 0$.

Vậy $x = y = -\frac{1}{2}$. Kiểm tra, nghiệm $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ thoả mãn đầu bài.

Vậy $a = \frac{1}{2}$ thoả mãn.

Ví dụ 15.17. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 6x + a = 2y \\ y^2 + 6y + a = 2x. \end{cases}$$

Hãy xác định các giá trị của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$. Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = y_0, y = x_0$. Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $x_0 = y_0$. Xét trường hợp $x = y$.

Khi đó $x^2 + 6x + a = 2x$ hay $x^2 + 4x + a = 0$.

Để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì phương trình $x^2 + 4x + a = 0$ chỉ có một nghiệm. Vậy $a = 4$.

$$\text{Với } a = 4, \text{ xét hệ } \begin{cases} x^2 + 6x + 4 = 2y \\ y^2 + 6y + 4 = 2x. \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ ta có $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 0$.

Vậy $x = -2, y = -2$. Do đó, với $a = 4$ hệ phương trình có đúng một nghiệm.

Tóm lại, để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì cần và đủ là $a = 4$.

Ví dụ 15.18. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + ay = 4x \\ y^2 + ax = 4x. \end{cases}$$

Hãy xác định các giá trị của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$.

Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = y_0, y = x_0$. Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $x_0 = y_0$.

Xét trường hợp $x = y$. Khi đó $x^2 + ax = 4x$ hay $x^2 = (4 - a)x$.

Để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì phương trình $x^2 = (4 - a)x$ chỉ có một nghiệm hay $0 = x = 4 - a$. Vậy $a = 4$.

$$\text{Với } a = 4, \text{ xét hệ } \begin{cases} x^2 + 4y = 4x \\ y^2 + 4x = 4y. \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ ta có $x^2 + y^2 = 0$. Vậy $x = 0, y = 0$.

Do đó, $a = 4$ hệ phương trình có đúng một nghiệm.

Tóm lại, để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì cần và đủ là $a = 4$.

5. Hệ phương trình phản xứng

Đa thức $f(x, y)$ của hai biến x và y được gọi là đa thức *phản xứng* đối với x nếu $f(x, y) = f(-x, y)$.

Với hai đa thức phản xứng đối với x $f(x, y)$ và $g(x, y)$ ta xét hệ phương trình phản xứng :

$$\begin{cases} f(x, y) = a \\ g(x, y) = b. \end{cases}$$

Hiển nhiên, nếu $x = x_0, y = y_0$ là nghiệm của hệ thì $x = -x_0, y = y_0$ cũng là nghiệm của hệ.

Tương tự, ta cũng có thể xét hệ phản xứng đối với y .

Ví dụ 15.19. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x + y)^2 + a = x + 4y \\ (x - y)^2 + a = 4y - x. \end{cases}$$

Hãy xác định các giá trị của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$.

Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = -x_0, y = y_0$. Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $x_0 = 0$.

Xét trường hợp $x = 0$. Khi đó $y^2 - 4y + a = 0$.

Để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì phương trình $y^2 - 4y + a = 0$ chỉ có một nghiệm hay $a = 4$.

Với $a = 4$, xét hệ :
$$\begin{cases} (x + y)^2 + 4 = x + 4y \\ (x - y)^2 + 4 = 4y - x. \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ ta có $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$ hay $x^2 + (y - 2)^2 = 0$.

Vậy $x = 0, y = 2$. Do đó, với $a = 4$ hệ phương trình có đúng một nghiệm.

Tóm lại, để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì cần và đủ là $a = 4$.

Ví dụ 15.20. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x - y} = a \\ x - y + \frac{1}{x + y} = a. \end{cases}$$

Hãy xác định các giá trị của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Điều kiện $x + y, x - y \neq 0$. Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$.

Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = x_0, y = -y_0$. Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $y_0 = 0$.

Xét trường hợp $y = 0$. Khi đó $x + \frac{1}{x} = a$.

Để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$ chỉ có một nghiệm hay $a = \pm 2$.

$$\text{Với } a = 2, \text{ xét hệ: } \begin{cases} x + y + \frac{1}{x - y} = 2 \\ x - y + \frac{1}{x + y} = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 2(x - y) \\ x^2 - y^2 + 1 = 2(x + y) \\ x^2 - y^2 \neq 0. \end{cases}$$

Từ đây suy ra: $2(x - y) = 2(x + y)$. Vậy $y = 0, x^2 + 1 = 2x$. Từ đó được $x = 1$.

Do đó, với $a = 2$ hệ phương trình có đúng một nghiệm $(1; 0)$.

Tương tự với $a = -2$ hệ phương trình có đúng một nghiệm $(1; 0)$.

Tóm lại, để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì cần và đủ là $a = \pm 2$.

Ví dụ 15.21. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x + y)^2 + 2x + 2y = a \\ (x - y)^2 - 2x + 2y = a. \end{cases}$$

Hãy xác định các giá trị của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$.

Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = -x_0, y = y_0$. Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $x_0 = 0$.

Xét trường hợp $x = 0$. Khi đó $y^2 + 2y - a = 0$.

Để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì phương trình $y^2 + 2y - a = 0$ chỉ có một nghiệm hay $a = -1$.

Với $a = -1$, xét hệ :
$$\begin{cases} (x+y)^2 + 2x + 2y = -1 \\ (x-y)^2 - 2x + 2y = -1. \end{cases}$$

Cộng hai phương trình được $x^2 + (y+1)^2 = 0$.

Từ đây suy ra $x = 0, y = -1$.

Do đó, với $a = -1$ hệ phương trình có đúng một nghiệm $(0; -1)$.

Tóm lại, để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì cần và đủ là $a = -1$.

6. Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai

Hệ phương trình dạng
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$
 được gọi là một hệ phương

trình *đẳng cấp bậc hai*. Khi giải hệ đẳng cấp bậc hai thường sử dụng cách đặt $x = ty$ hoặc $y = tx$.

Ví dụ 15.22. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = 33 \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$$

Giải.

Nếu $y = 0$ thì ta có $x^2 = 33$ và $x^2 = -3$. Hệ này không có nghiệm.

Do vậy, nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ thì $y \neq 0$. Với $y \neq 0$ ta đặt $x = ty$.

Khi đó ta có hệ :
$$\begin{cases} (t^2 + 6)y^2 = 33 \\ (t^2 - 2t)y^2 = -3. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $-3(t^2 + 6) = 33(t^2 - 2t)$, vì $y \neq 0$.

Ta có $12t^2 - 22t + 6 = 0$. Giải phương trình được $t = \frac{3}{2}$ và $t = \frac{1}{3}$.

• Với $t = \frac{3}{2}$ ta có $\left(\frac{9}{4} + 6\right)y^2 = 33$. Vậy $y^2 = 4$.

Hệ phương trình đã cho nhận $(3; 2)$ và $(-3; -2)$ làm nghiệm.

• Với $t = \frac{1}{3}$ ta có $\left(\frac{1}{9} + 6\right)y^2 = 33$. Vậy $y^2 = \frac{27}{5}$.

Hệ phương trình đã cho nhận $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}; 3\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ và $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}; -3\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ làm nghiệm.

Vậy, hệ có 4 nghiệm $(3; 2)$, $(-3; -2)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}; 3\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ và $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}; -3\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

Ví dụ 15.23. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Giải.

Nếu $x = 0$ thì ta có $y^2 = 3$ và $-2y^2 = 6$. Hệ này không có nghiệm.

Do vậy, nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ thì $x \neq 0$. Với $x \neq 0$ ta đặt $y = tx$.

Khi đó ta có hệ :
$$\begin{cases} (t^2 - 3t + 2)x^2 = 3 \\ (-2t^2 + 2t + 1)x^2 = 6. \end{cases}$$

Vậy $2(t^2 - 3t + 2) = -2t^2 + 2t + 1$, vì $x \neq 0$.

Ta có $4t^2 - 8t + 3 = 0$. Giải phương trình tìm được $t = \frac{3}{2}$ và $t = \frac{1}{2}$.

Với $t = \frac{3}{2}$ ta có $\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2\right)x^2 = 3$ hay $-\frac{1}{4}x^2 = 3$: vô nghiệm.

Với $t = \frac{1}{2}$ ta có $\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right)x^2 = 3$ hay $x^2 = 4$. Khi đó hệ có nghiệm $(2; 1)$

và $(-2; -1)$.

Vậy hệ có nghiệm $(2; 1)$ và $(-2; -1)$.

BÀI TẬP

15.1. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 3y = a \\ y^2 - 3x = a. \end{cases}$$

15.2. Cho hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x+y)^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

- Giải hệ đã cho với $a = 10$.
- Xác định a để hệ có nghiệm.
- Xác định a để hệ đã cho có đúng 2 nghiệm.

15.3. Cho hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

- Giải hệ đã cho với $a = 3$.
- Xác định a để hệ có nghiệm.
- Xác định a để hệ đã cho có đúng 2 nghiệm.
- Xác định a để hệ đã cho có đúng 1 nghiệm.

15.4. Cho hệ phương trình :
$$\begin{cases} |x| + |y| = a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 - 1. \end{cases}$$

- Xác định a để hệ có nghiệm.
- Xác định a để hệ đã cho có đúng 2 nghiệm.

15.5. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y + 3xy = 21 \\ x^2 + y^2 - xy = -15. \end{cases}$$

15.6. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 7y^2 = 28 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 10. \end{cases}$$

15.7. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 = 8 \\ x^2 - 9xy - 2y^2 = -10. \end{cases}$$

15.8. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 = 0. \end{cases}$$

15.9. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 15x^2 - 11xy + 2y^2 = -7 \\ 2a^2x + 3ay < 0 \\ x < y. \end{cases}$$

15.10. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136 \\ x^3y + xy^3 = 30. \end{cases}$$

15.11. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 158 \\ 3x^2y + y^3 = -185. \end{cases}$$

15.12. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$$

15.13. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

Chuyên đề 16. MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN, BA ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cần chú ý đến các dạng sau :

- 1) Hệ phương trình hai ẩn.
- 2) Hệ phương trình ba ẩn.
- 3) Hệ phương trình chứa căn.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Hệ phương trình hai ẩn

Ví dụ 16.1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = \frac{2y}{1-y^2} \\ y = \frac{2x}{1-x^2}. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện : $x, y \neq \pm 1$.

Hệ đã cho tương đương với :
$$\begin{cases} 2x = y(1-x^2) \\ 2y = x(1-y^2) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2x = y(1-x^2) \\ (x+y)(xy+1) = 0. \end{cases}$$

Từ đây suy ra hai hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x = y(1 - x^2) \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2x = y(1 - x^2) \\ xy + 1 = 0. \end{cases}$$

- Xét hệ thứ nhất : $\begin{cases} 2x = y(1 - x^2) \\ x + y = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -y \\ -2y = y(1 - y^2). \end{cases}$

Hệ này có ba nghiệm $(0; 0)$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ và $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

- Xét hệ thứ hai : $\begin{cases} 2x = y(1 - x^2) \\ xy + 1 = 0. \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai suy ra $x, y \neq 0$.

Vậy ta có hệ : $\begin{cases} xy + 1 = 0 \\ 2x^2 = xy(1 - x^2) \end{cases}$ hay $\begin{cases} xy + 1 = 0 \\ 2x^2 = -1 + x^2. \end{cases}$

Hệ này không có nghiệm.

Tóm lại, hệ đã cho có ba nghiệm $(0; 0)$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ và $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

Ví dụ 16.2. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x(x + 2y) = 8 \\ \frac{1}{(x + y)^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x + y)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện $x, y \neq 0$.

Ta có $\frac{1}{(x + y)^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x + y)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{x^2 y^2}.$

Hệ đã cho tương đương với hệ : $\begin{cases} x(x + 2y) = 8 \\ x^2 y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \pm 4 \\ x^2 + 2xy = 8. \end{cases}$

- Xét hệ : $\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + 2xy = 8. \end{cases}$ Khi đó : $\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 = 0. \end{cases}$ Hệ này vô nghiệm.

- Xét hệ : $\begin{cases} xy = -4 \\ x^2 + 2xy = 8. \end{cases}$ Khi đó $\begin{cases} xy = -4 \\ x^2 = 16. \end{cases}$

Hệ này có nghiệm $(4; -1)$ và $(-4; 1)$.

Tóm lại, hệ đã cho có hai nghiệm $(4; -1)$ và $(-4; 1)$.

Ví dụ 16.3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \frac{1 - x^2}{(1 + xy)^2 - (x + y)^2} - y^2 = 1. \end{cases}$$

Giải.

Ta có
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \frac{1 - x^2}{(1 + xy)^2 - (x + y)^2} + 1 - y^2 = 2. \end{cases}$$

Hệ này tương đương với hệ :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \frac{1}{1 - y^2} + 1 - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x, y \neq \pm 1. \end{cases}$$

Khi đó, hệ có nghiệm $(-3; 0)$ và $(3; 0)$.

Ví dụ 16.4. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9a \\ x^2y + xy^2 = 6a. \end{cases}$$

Hãy xác định tất cả các giá trị của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$. Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = y_0, y = x_0$.

Nếu hệ có đúng một nghiệm $x_0 = y_0$. Xét trường hợp $x = y$.

Khi đó
$$\begin{cases} 2x^3 = 9a \\ 2x^3 = 6a. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $9a = 6a$ hay $a = 0$.

Với $a = 0$ hệ đã cho trở thành :
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^2y + xy^2 = 0. \end{cases}$$

Vì $x = b, y = -b$ với mọi $b \in \mathbf{R}$ đều là nghiệm của hệ.

Vậy $a = 0$ không thỏa mãn điều bài.

Tóm lại, không có giá trị nào của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Ví dụ 16.5. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 = y^3 - 5y^2 - ay \\ y^2 = x^3 - 5x^2 - ax. \end{cases}$$

Hãy xác định các giá trị của a để hệ đã cho có đúng một nghiệm.

Giải.

Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0, y = y_0$. Khi đó hệ cũng có nghiệm $x = y_0, y = x_0$.

Nếu hệ có đúng một nghiệm thì $x_0 = y_0$.

Xét trường hợp $x = y$. Khi đó $x^3 - 6x^2 - ax = 0$ hay $x(x^2 - 6x - a) = 0$.

Từ đây suy ra $x = 0$ hoặc $x^2 - 6x - a = 0$.

Để hệ đã cho có đúng một nghiệm thì phương trình $x^2 - 6x - a = 0$ chỉ có nghiệm $x = 0$ hoặc vô nghiệm.

Để dàng suy ra trường hợp $a = 0$ không thoả mãn nên $\Delta' < 0$ hay $a < -9$.

Với $a < -9$, xét hệ :
$$\begin{cases} x^2 = y^3 - 5y^2 - ay \\ y^2 = x^3 - 5x^2 - ax. \end{cases}$$

Hệ này tương đương với hệ :
$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 5x^2 - ax \\ y^2 - x^2 = (x^3 - y^3) - 5(x^2 - y^2) - a(x - y). \end{cases}$$

Từ đây suy ra hai hệ :
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 = x^3 - 5x^2 - ax \\ (x^2 + xy + y^2) - 4(x + y) - a = 0 \\ y^2 = x^3 - 5x^2 - ax. \end{cases}$$

• Giải hệ thứ nhất :
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 = x^3 - 5x^2 - ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x^2 - 6x - a) = 0. \end{cases}$$

Vì $a < -9$ nên hệ này chỉ có nghiệm $x = y = 0$.

• Giải hệ thứ hai :
$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2) - 4(x + y) - a = 0 \\ y^2 = x^3 - 5x^2 - ax. \end{cases}$$

Từ $(x^2 + xy + y^2) - 4(x + y) - a = 0$ suy ra $x^2 + (y - 4)x + y^2 - 4y - a = 0$.

$$\text{Tính } \Delta = (y - 4)^2 - 4[y^2 - 4y - a] = -3\left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{64}{3} + 4a < 0, \text{ vì } a < -9.$$

Như vậy, phương trình bậc hai này vô nghiệm. Do đó hệ thứ hai vô nghiệm.
Tóm lại, để hệ có đúng một nghiệm cần và đủ là $a < -9$.

Hệ phương trình ba ẩn

Ví dụ 16.6. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2 = y + 1 \\ y^2 = z + 1 \\ z^2 = x + 1. \end{cases}$$

Giải.

Do vai trò của x, y, z là như nhau nên ta có thể coi $x = \max\{x, y, z\}$.

Vì $y + 1 = x^2, z + 1 = y^2, x + 1 = z^2$ nên $x, y, z \geq -1$.

Đặt $f(t) = t^2 - 1$. Ta có $f(t)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$, đồng biến trên $(0; +\infty)$
và $y = f(x), z = f(y), x = f(z)$.

Nếu $x = y$ thì $y = f(x) = f(y) = z$.

Tương tự, nếu $y = z$ thì $z = x$ và nếu $z = x$ thì $x = y$.

Tóm lại, nếu có hai biến bằng nhau thì cả ba biến bằng nhau và hệ có hai nghiệm :

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \text{ và } \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

Xét trường hợp : Không có hai biến nào bằng nhau.

Khi đó $z < y < x$ hoặc $y < z < x$.

Nếu $x \leq 0$ thì từ $z < y < x$ suy ra $y = f(x) < f(y) = z$: mâu thuẫn ;

Hoặc từ $y < z < x$ suy ra $x = f(z), f(y) = z$: mâu thuẫn.

Do vậy $x > 0$. Vì $x > 0, z \geq -1$ và $z^2 = x + 1 > 1$ suy ra $z > 1$.

Từ $y^2 = z + 1 > 1$ và $y \geq -1$ suy ra $y > 1$. Khi đó $x = f(z) < f(x) = y$: mâu thuẫn.

Tóm lại, $x = y = z$ và hệ có hai nghiệm :

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \text{ và } \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

Ví dụ 16.7. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

Giải.

Cộng ba phương trình vế với vế, ta có : $(x - 3)^3 + (y - 3)^3 + (z - 3)^3 = 0$.

Nếu $x = 3$ thì $y = 3$ và $z = 3$. Ta có nghiệm : $(3 ; 3 ; 3)$.

Nếu $x > 3$ thì $y^3 - 27 = 9x^2 - 27x > 0$. Vậy $y > 3$.

Tương tự, khi $y > 3$ thì $z^3 - 27 = 9y^2 - 27y > 0$. Do đó $z > 3$.

Như vậy, khi $x > 3$ có $y > 3$ và $z > 3$.

Hệ thức $(x - 3)^3 + (y - 3)^3 + (z - 3)^3 = 0$ là sai.

Tương tự, khi $x < 3$ thì $y, z < 3$ và hệ thức $(x - 3)^3 + (y - 3)^3 + (z - 3)^3 = 0$ là sai.

Tóm lại, hệ chỉ có một nghiệm $(3 ; 3 ; 3)$.

Ví dụ 16.8. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z + xy + yz + zx = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Giải.

Với $t = x + y + z$ có $3(xy + yz + zx) \leq t^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 9$.

Như vậy $9 \geq t^2 \geq 3(6 - t)$. Từ đây suy ra $t = 3$.

Tóm lại :
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Dễ dàng suy ra $x = y = z = 1$.

Ví dụ 16.9. Giải hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2(x + y + z + xy + yz + zx) + xyz = -2. \end{cases}$$

Giải.

$$\text{Xét } T = 2(1+x)(1+y)(1+z) - xyz.$$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ nên } |x|, |y|, |z| \leq 1.$$

$$\text{Nếu } xyz > 0 \text{ thì } 0 = T = (x+y+z+1)^2 + xyz > 0 : \text{ mâu thuẫn.}$$

$$\text{Nếu } xyz \leq 0 \text{ thì } T \geq 0. \text{ Như vậy } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2(1+x)(1+y)(1+z) = xyz \\ xyz \leq 0 \\ 2(1+x)(1+y)(1+z) \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Dễ dàng suy ra } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (1+x)(1+y)(1+z) = 0 \\ xyz = 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra ba nghiệm $(0; 0; -1)$, $(0; -1; 0)$ và $(-1; 0; 0)$.

Ví dụ 16.10. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = xyz \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 10 \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

Giải.

$$\text{Vì } x, y, z > 0 \text{ nên } xyz = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \text{ và như vậy } t = \sqrt[3]{(xyz)^2} \geq 3.$$

$$\text{Xét } T = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cauchy có } T \geq 3 \left(\sqrt[3]{(xyz)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(xyz)^2}} \right) = 3 \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

với $t \geq 3$.

$$\text{Dễ dàng kiểm tra } T \geq 10 \text{ và như vậy } t = 3 \text{ hay } x = y = z = \sqrt{3}.$$

Hệ phương trình chứa căn

Ví dụ 16.11. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1-y^2 \\ 2x+y=1. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$. Từ $1 \geq 1-y^2 = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} \geq \sqrt{4x-1}$

suy ra $1 \geq 1-y^2 \geq \sqrt{4x-1} \geq \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} - 1} = 1$.

Dấu "=" phải xảy ra và ta có được $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$.

Kiểm tra lại $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ thoả mãn hệ phương trình.

Do đó hệ có đúng một nghiệm $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$.

Ví dụ 16.12. Xác định m để hệ phương trình sau đây có nghiệm và giải hệ ứng với m tìm được :

$$\begin{cases} 4x + \sqrt{11-y} = m \\ x^2 - 2|x|y + 121 = 0. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện $y \leq 11$. Ta thấy ngay $x = 0$ không thoả mãn phương trình thứ hai.

Vậy $x \neq 0$. Khi đó $y = \frac{x^2 + 121}{2|x|} \geq 11$ theo bất đẳng thức Cauchy.

Từ hai bất đẳng thức $y \leq 11$ và $y \geq 11$ suy ra $y = 11$. Khi $y = 11$ thì $x = \pm 11$.

Với $x = 11$, $y = 11$ có $m = 44$. Với $x = -11$, $y = 11$ có $m = -44$.

Ví dụ 16.13. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x-4)\sqrt{y-3} + (y-1)\sqrt{x+2} = 7\sqrt{6} \\ 12x\sqrt{y-4} + 4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} = 5xy. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện $x \geq 2, y \geq 4$.

Vì $12x\sqrt{y-4} \leq 3x(y-4+4) = 3xy$ và

$$4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} \leq 2y(x-2+2) = 2xy.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên vế với vế, ta được

$$5xy = 12x\sqrt{y-4} + 4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} \leq 3xy + 2xy = 5xy.$$

Do vậy, dấu "=" phải xảy ra. Khi đó $x = 4, y = 8$.

Kiểm tra lại, ta thấy $x = 4, y = 8$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Ví dụ 16.14. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{8xy}{x^2 + y^2 + 6xy} + \frac{17}{8} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = \frac{21}{4} \\ \sqrt{x-16} + \sqrt{y-9} = 7. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện $x \geq 16, y \geq 9$.

Khi đó $\frac{8}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 6} + \frac{17}{8} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = \frac{21}{4}$. Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$.

Từ sự đánh giá qua bất đẳng thức dưới đây :

$$6 = \frac{8}{t+6} + \frac{17}{8}t + \frac{3}{4} = \frac{8}{t+6} + \frac{1}{8}(t+6) + 2t \geq 2 + 2.2 = 6, \text{ suy ra } t+6 = 8$$

hay $t = 2$. Vậy $y = x \geq 16$.

Xét phương trình vô tỉ $\sqrt{x-16} + \sqrt{x-9} = 7$ với $x \geq 16$.

Bình phương hai vế và giản ước được : $\sqrt{(x-16)(x-9)} = 37-x$.

Từ đây suy ra $x = 25$.

Kiểm tra lại, ta thấy $x = 25, y = 25$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Ví dụ 16.15. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{14-y} = 2\sqrt{6} \\ \sqrt{y-2} + \sqrt{14-x} = 2\sqrt{6}. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện $2 \leq x, y \leq 14$. Cộng hai phương trình, vế với vế, được :

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{14-x} + \sqrt{y-2} + \sqrt{14-y} = 4\sqrt{6}.$$

Xét : $T = \sqrt{t-2} + \sqrt{14-t}$ với $t \in [2; 14]$.

$$\text{Vì } T = \sqrt{t-2} + \sqrt{14-t} \leq \sqrt{(1+1)(t-2+14-t)} = 2\sqrt{6}$$

theo bất đẳng thức Bu-nhi-akốp-xki và dấu "=" xảy ra khi $t = 8$ nên hệ phương trình có đúng một nghiệm $x = y = 8$.

Ví dụ 16.16. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{13-y} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{y-3} + \sqrt{13-z} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{z-3} + \sqrt{13-x} = 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

Giải.

Điều kiện $3 \leq x, y, z \leq 13$. Cộng ba phương trình, vế với vế, được :

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{13-x} + \sqrt{y-3} + \sqrt{13-y} + \sqrt{z-3} + \sqrt{13-z} = 6\sqrt{5}.$$

Xét : $T = \sqrt{t-3} + \sqrt{13-t}$ với $t \in [3; 13]$.

$$\text{Vì : } T = \sqrt{t-3} + \sqrt{13-t} \leq \sqrt{(1+1)(t-3+13-t)} = 2\sqrt{5}$$

theo bất đẳng thức Bu-nhi-akốp-xki và dấu "=" xảy ra khi $t = 8$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm $x = y = z = 8$.

BÀI TẬP

16.1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65 \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$$

16.2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

16.3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt[3]{y}\sqrt{x} = 12 \\ xy = 64. \end{cases}$$

16.4. Xác định giá trị lớn nhất của x để có số nguyên dương n sao cho hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} 3nx + y = -30 \\ \frac{3}{2}x - \frac{y}{2n} = -n - \frac{15}{n} - 196. \end{cases}$$

16.5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

16.6. Xác định tất cả các giá trị của a để hệ phương trình dưới đây có nghiệm :

$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy) \\ xy + x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

16.7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ xy + yz + zx \geq 1. \end{cases}$$

16.8. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 25 \\ y^2 + yz + z^2 = 49 \\ z^2 + zx + x^2 = 121 \\ x, y, z \geq 0. \end{cases}$$

16.9. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y + 2 = 3 - x \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y \\ x^2 + z^2 = 4x, z \geq 0. \end{cases}$$

16.10. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 \\ (2 - x)(3x - 2z) = 3 - z \\ y^2 + z^2 = 6z, z \leq 3. \end{cases}$$

16.11. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2y^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0 \\ 2z^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0 \\ 2x^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0. \end{cases}$$

16.12. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x(1 - y) = \frac{1}{4} \\ y(1 - z) = \frac{1}{4} \\ z(1 - x) = \frac{1}{4} \\ x, y, z \geq 0. \end{cases}$$

16.13. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$$

16.14. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = \frac{2x^2}{x^2 + 1} \\ z = \frac{2y^2}{y^2 + 1} \\ x = \frac{2z^2}{z^2 + 1} \end{cases}$$

16.15. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2 \\ xyz = \frac{1}{8} \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

16.16. Giả sử x_0 là nghiệm lớn của phương trình $x^2 + 2(a-3)x + a - 13 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của x_0 biết $a \geq 1$.

16.17. Giả sử x_0 là nghiệm bé của phương trình $x^2 + (a-3)x - 2a - 2 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của x_0 biết $a \leq -4$.

16.18. Giả sử x_0 là nghiệm lớn của phương trình $x^2 + 2(a-b-3)x + a - b - 13 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của x_0 biết $a \geq 2, b \leq 1$.

Chuyên đề 17. PHÂN THỨC HỮU TỈ VÀ XÁC ĐỊNH QUAN HỆ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cần chú ý đến các kiến thức và dạng toán sau :

- 1) Nếu đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(a) = 0$ thì $f(x)$ chia hết cho $x - a$.
- 2) Phân thức đơn giản.
- 3) Phân tích phân thức thành tổng.
- 4) Giả sử một hệ phương trình có nghiệm. Tìm quan hệ giữa các hệ số.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 17.1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , đa thức

$$f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$$

chia hết cho đa thức $x(x+1)(2x+1)$.

Giải.

Vì $f(0) = f(-1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ nên $f(x)$ chia hết cho x , $x+1$ và $2x+1$. Vì x ,

$x+1$, $2x+1$ có nghiệm khác nhau nên $f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho đa thức $x(x+1)(2x+1)$.

Ví dụ 17.2. Cho ba số phân biệt a, b, c với $abc \neq 0$. Đơn giản biểu thức :

$$T(x) = \frac{x(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{x(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{x(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)}.$$

Giải.

Từ bậc $T(x) \leq 3$ và $T(a) = T(b) = T(c) = 1$ suy ra

$$T(x) = \alpha(x-a)(x-b)(x-c) + 1.$$

Cho $x = 0$ ta có $\alpha = \frac{1}{abc}$.

$$\text{Vậy } T(x) = \frac{1}{abc}(x-a)(x-b)(x-c) + 1.$$

Ví dụ 17.3. Giả thiết a và b là hai số phân biệt và $a, b \notin \{0, -1, -2\}$.

a) Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \frac{x}{1+a} + \frac{y}{1+b} = 1 \\ \frac{x}{2+a} + \frac{y}{2+b} = 1. \end{cases}$$

b) Giả sử x và y là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{2}{ab}.$$

Giải.

a) Xét $f(t) = \frac{x}{a+t} + \frac{y}{b+t} - 1 = -\frac{p(t)}{(a+t)(b+t)}$ với đa thức $p(t)$ bậc 2.

Vì $f(1) = f(2) = 0$ nên $p(1) = p(2) = 0$ và như vậy :

$$\frac{x}{a+t} + \frac{y}{b+t} - 1 = -\frac{(t-1)(t-2)}{(a+t)(b+t)}.$$

Quy đồng hai vế được : $x(b+t) + y(a+t) - (a+t)(b+t) = -(t-1)(t-2)$.

$$\text{Với } t = -a, t = -b, \text{ có : } \begin{cases} x = \frac{(a+1)(a+2)}{a-b} \\ y = \frac{(b+1)(b+2)}{b-a}. \end{cases}$$

b) Với $t = 0$ ta được : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{2}{ab}$.

Ví dụ 17.4. Với ba số a, b, c phân biệt và $a, b, c \notin \{0, -1, -2, -3\}$, giả sử các số x, y, z thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{1+a} + \frac{y}{1+b} + \frac{z}{1+c} = 1 \\ \frac{x}{2+a} + \frac{y}{2+b} + \frac{z}{2+c} = 1 \\ \frac{x}{3+a} + \frac{y}{3+b} + \frac{z}{3+c} = 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 + \frac{6}{abc}$.

Giải.

$$\text{Xét } f(t) = \frac{x}{a+t} + \frac{y}{b+t} + \frac{z}{c+t} - 1 = -\frac{p(t)}{(a+t)(b+t)(c+t)} \text{ với đa thức}$$

$p(t)$ bậc 3.

Vì $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ nên $p(1) = p(2) = p(3) = 0$ và như vậy :

$$\frac{x}{a+t} + \frac{y}{b+t} + \frac{z}{c+t} - 1 = -\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(a+t)(b+t)(c+t)}.$$

$$\text{Với } t=0, \text{ ta được : } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 + \frac{6}{abc}.$$

Ví dụ 17.5. Với hai số a, b phân biệt và $a, b \notin \{0, 1, 2, 3\}$, hãy giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{1-a} + \frac{y}{1-b} = 1 \\ \frac{x}{2-a} + \frac{y}{2-b} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Giả sử x, y là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Hãy tính tổng dưới đây :

$$T = \frac{x}{3-a} + \frac{y}{3-b} + \frac{ab}{3(3-a)(3-b)}.$$

Giải.

$$\text{Xét } f(t) = \frac{x}{t-a} + \frac{y}{t-b} - \frac{1}{t} = \frac{p(t)}{t(t-a)(t-b)} \text{ với đa thức } p(t) \text{ bậc } \leq 2.$$

Vì $f(1) = f(2) = 0$ nên $p(1) = p(2) = 0$ và như vậy :

$$\frac{x}{t-a} + \frac{y}{t-b} - \frac{1}{t} = \frac{u(t-1)(t-2)}{t(t-a)(t-b)}.$$

Quy đồng hai vế được $xt(t-b) + yt(t-a) - (t-a)(t-b) = u(t-1)(t-2).$

Từ đây suy ra :

$$\begin{cases} u = -\frac{ab}{2} \text{ với } t = 0 \\ x = \frac{u(a-1)(a-2)}{a(a-b)} \text{ với } t = a \\ y = \frac{u(b-1)(b-2)}{b(b-a)} \text{ với } t = b. \end{cases}$$

Từ $\frac{x}{t-a} + \frac{y}{t-b} - \frac{1}{t} = -\frac{ab}{2} \frac{(t-1)(t-2)}{t(t-a)(t-b)}$ suy ra $T = \frac{1}{3}$ khi $t = 3$.

Ví dụ 17.6. Với ba số a, b, c phân biệt và $a, b, c \notin \{0, 1, 2, 3, 4\}$, hãy giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{1-a} + \frac{y}{1-b} + \frac{z}{1-c} = 1 \\ \frac{x}{2-a} + \frac{y}{2-b} + \frac{z}{2-c} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3-a} + \frac{y}{3-b} + \frac{z}{3-c} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Giả sử x, y, z là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Hãy tính tổng dưới đây :

$$T = \frac{x}{4-a} + \frac{y}{4-b} + \frac{z}{4-c} + \frac{abc}{4(4-a)(4-b)(4-c)}.$$

Giải.

Xét $f(t) = \frac{x}{t-a} + \frac{y}{t-b} + \frac{z}{t-c} - \frac{1}{t} = \frac{p(t)}{t(t-a)(t-b)(t-c)}$ với đa thức $p(t)$

bậc ≤ 3 .

Vì $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ nên $p(1) = p(2) = p(3) = 0$ và như vậy :

$$\frac{x}{t-a} + \frac{y}{t-b} + \frac{z}{t-c} - \frac{1}{t} = \frac{u(t-1)(t-2)(t-3)}{t(t-a)(t-b)(t-c)}.$$

Quy đồng hai vế được

$$\begin{aligned} xt(t-b)(t-c) + yt(t-c)(t-a) + zt(t-a)(t-b) - (t-a)(t-b)(t-c) \\ = u(t-1)(t-2)(t-3). \end{aligned}$$

Từ đây suy ra :

$$\begin{cases} u = -\frac{abc}{6} \text{ với } t = 0 \\ x = \frac{u(a-1)(a-2)(a-3)}{a(a-b)(a-c)} \text{ với } t = a \\ y = \frac{u(b-1)(b-2)(b-3)}{b(b-c)(b-a)} \text{ với } t = b \\ z = \frac{u(c-1)(c-2)(c-3)}{c(c-a)(c-b)} \text{ với } t = c. \end{cases}$$

$$\text{Từ } \frac{x}{t-a} + \frac{y}{t-b} + \frac{z}{t-c} - \frac{1}{t} = -\frac{abc}{6} \cdot \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{t(t-a)(t-b)(t-c)}$$

$$\text{suy ra } T = \frac{1}{4} \text{ khi } t = 4.$$

Ví dụ 17.7. Tính tổng :

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \text{ và chỉ ra } T < \frac{1}{4}.$$

Giải.

$$\text{Từ } \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \text{ ta suy ra tổng bằng}$$

$$T = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}, \text{ từ đó có điều phải chứng minh.}$$

Ví dụ 17.8. Tính tổng :

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{4k^2 - 1}.$$

Giải.

$$\text{Ta có } 16T = \sum_{k=1}^n \frac{16k^4 - 1 + 1}{4k^2 - 1} = \sum_{k=1}^n (4k^2 + 1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

Từ biểu diễn $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k+1)}$ ta suy ra tổng bằng

$$T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16(2n+1)}.$$

Ví dụ 17.9. Xác định quan hệ giữa a, b, c biết rằng hệ phương trình dưới đây có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + 1 = ax \\ y^2 + 1 = by \\ x^2y^2 + 1 = cxy. \end{cases}$$

Giải.

Vì $x^2y^2 + 1 = (x^2 + 1)(y^2 + 1) - (x^2 + y^2)$ nên

$$cxy = abxy - (x^2 + y^2) \text{ hay } x^2 + y^2 = (ab - c)xy.$$

Mặt khác, ta còn có

$$(x^2 + y^2)(x^2y^2 + 1) = x^4y^2 + x^2y^4 + x^2 + y^2 = x^2(y^2 + 1)^2 + y^2(x^2 + 1)^2 - 4x^2y^2.$$

$$\text{Từ đây suy ra } c(ab - c)x^2y^2 = b^2x^2y^2 + a^2x^2y^2 - 4x^2y^2.$$

$$\text{Do } xy \neq 0 \text{ nên } a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$$

Ví dụ 17.10. Xác định quan hệ giữa a, b, c, d biết rằng hệ phương trình dưới đây có một nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ x^2 + cx + d = 0. \end{cases}$$

Giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ (a - c)x = d - b. \end{cases} \text{ Khi đó } x = \frac{d - b}{a - c}. \text{ Thay } x = \frac{d - b}{a - c} \text{ vào phương trình}$$

$$\text{đầu ta được } (d - b)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0.$$

Ví dụ 17.11. Giả sử $ax^2 + bx + c = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$ với $a \neq 0$.

Đặt $h = \max \{|a|, |b|, |c|\}$, $h_1 = \max \{|a_1|, |b_1|\}$ và $h_2 = \max \{|a_2|, |b_2|\}$.

Chứng minh rằng $\frac{h_1 h_2}{2} < h \leq 2h_1 h_2$.

Giải.

Ta có $ax^2 + bx + c = a_1 a_2 x^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)x + b_1 b_2$.

Vậy $|a| = |a_1 a_2| = |a_1| |a_2| \leq h_1 h_2$, $|b| = |a_1 b_2 + a_2 b_1| \leq |a_1| |b_2| + |a_2| |b_1| \leq 2h_1 h_2$ và $|c| = |b_1 b_2| \leq h_1 h_2$.

Từ những đánh giá này suy ra $h \leq 2h_1 h_2$.

Giả sử $h_1 = |a_1|$, $h_2 = |b_2|$.

Nếu $|b_1| > \frac{h_1}{2}$ thì $|c| = |b_1| |b_2| > \frac{h_1 h_2}{2}$.

Nếu $|a_2| > \frac{h_2}{2}$ thì $|a| = |a_1| |a_2| > \frac{h_1 h_2}{2}$.

Nếu $|b_1| \leq \frac{h_1}{2}$ và $|a_2| \leq \frac{h_2}{2}$ thì

$$|b| = |a_1 b_2 + a_2 b_1| \leq |a_1| |b_2| - |a_2| |b_1| \geq h_1 h_2 - \frac{h_1 h_2}{4} > \frac{h_1 h_2}{2}.$$

Giả sử $h_1 = |a_1|$, $h_2 = |a_2|$. Khi đó $h \geq |a| = |a_1| |a_2| = h_1 h_2 > \frac{h_1 h_2}{2}$.

Tóm lại, ta đã chỉ ra được : $\frac{h_1 h_2}{2} < h \leq 2h_1 h_2$.

Ví dụ 17.12. Điểm A trong mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là những số hữu tỉ. Tồn tại hay không một điểm I sao cho A là điểm duy nhất có tọa độ là những số hữu tỉ để $IA = \sqrt{10}$?

Giải.

Xét điểm $J(\sqrt{5}; \sqrt{5})$.

Giả sử điểm $B(x; y)$ có tọa độ là những số hữu tỉ thoả mãn $JB = \sqrt{10}$.

Vậy $(x - \sqrt{5})^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 10$ hay $x^2 + y^2 = 2\sqrt{5}(x + y)$.

Từ đây suy ra $x = y = 0$. Giả sử $A(a; b)$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Với điểm $I' = (a + \sqrt{5}; b + \sqrt{5})$, A là điểm duy nhất có toạ độ là những số hữu tỉ thoả mãn $IA = \sqrt{10}$.

BÀI TẬP

17.1. Chứng minh rằng đa thức $x^{1952} + x^{2011} + x^{2013}$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

17.2. Xác định quan hệ giữa a, b, c, p, q, r, s biết rằng hệ phương trình dưới đây có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + px + q = 0 \\ y^2 + ry + s = 0 \\ ax + by - c = 0. \end{cases}$$

17.3. Chứng minh rằng nếu a, d thoả mãn $ad < 0$ thì hệ phương trình dưới đây vô nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0 \\ x^2 + x + d = 0. \end{cases}$$

17.4. Chứng minh rằng nếu các số $a, b \in \mathbb{R}$ thoả mãn $a^2 + b^2 < \frac{4}{5}$ thì phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ vô nghiệm.

17.5. Giả sử các số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thoả mãn $ab + 2(b + c + d) = c(a + b)$.

Chứng minh rằng một trong ba phương trình sau đây phải có nghiệm :

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + d = 0.$$

17.6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{a}{x+y} + \frac{b}{y+z} - \frac{c}{z+x} = 1 \\ \frac{a}{x+y} - \frac{b}{y+z} + \frac{c}{z+x} = 1 \\ -\frac{a}{x+y} + \frac{b}{y+z} + \frac{c}{z+x} = 1. \end{cases}$$

17.7. Cho ba số a, b, c thoả mãn $abc(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) \neq 0$.

Hãy xác định x, y, z biết

$$\frac{1}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)(t^2 + c^2)} = \frac{x}{t^2 + a^2} + \frac{y}{t^2 + b^2} + \frac{z}{t^2 + c^2}$$

và tính

$$T = \frac{1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(1 + a^2)} + \frac{1}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)(1 + b^2)} + \frac{1}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(1 + c^2)}.$$

17.8. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và phương trình $a'x^2 + b'x + c' = 0$ có hai nghiệm x'_1, x'_2 . Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2)(x'_1 + x'_2) = 2012(x_1x_2 + x'_1x'_2) \text{ biết } ac' + a'c = 2012bb'.$$

17.9. Giả sử hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ x^2 + cx + d = 0 \end{cases}$ có nghiệm. Chứng minh rằng

$$(d + ab)^2 = (b^2 + ad - bc)(a^2 - b + c).$$

17.10. Giả sử hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y + z) = a \\ y^2(z + x) = b \\ z^2(x + y) = c \\ xyz = d \end{cases}$ có nghiệm. Chứng minh rằng

$$d^2(a + b + c + 2d) = abc.$$

CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

Chuyên đề 18. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Định lý về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

a) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.

c) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm và :

- Với mọi x nằm trong khoảng hai nghiệm thì $f(x)$ trái dấu với a ;
- Với mọi x nằm ngoài khoảng hai nghiệm thì $f(x)$ cùng dấu với a .

Lưu ý. Nhớ câu "trong trái, ngoài cùng".

Chứng minh định lý trên xem Ví dụ 18.1.

2) Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

Giả sử tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Từ định lý dấu của tam thức bậc hai, ta suy ra :

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2.$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}.$$

3) Điều kiện để bất phương trình bậc hai có nghiệm là mọi x

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

$$a) f(x) > 0 \text{ có nghiệm là mọi } x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) \geq 0 \text{ có nghiệm là mọi } x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

- c) $f(x) < 0$ có nghiệm là mọi $x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- d) $f(x) \leq 0$ có nghiệm là mọi $x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- e) $\begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ có nghiệm là mọi } x \\ \text{Xây ra được } f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

Lưu ý

- Các kết quả trên đều được suy ra từ định lý về dấu của tam thức bậc hai.
- Chứng minh câu e : Xem ví dụ 18.6.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 18.1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Chứng minh rằng :

- a) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbf{R}$.
- b) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- c) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) thỏa mãn :
- Với $x_1 < x < x_2$ thì $f(x)$ trái dấu với a ;
 - Với $x < x_1$ hoặc $x > x_2$ thì $f(x)$ cùng dấu với a .

Giải.

$$\text{Xét } \frac{f(x)}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}. \quad (1)$$

- a) Nếu $\Delta < 0$ thì từ (1) suy ra $\frac{f(x)}{a} > 0$, tức là $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbf{R}$.

- b) Nếu $\Delta = 0$ thì từ (1) suy ra $\frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, tức là $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.

- c) Nếu $\Delta > 0$ thì từ (1) suy ra

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{a} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= (x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

- Với $x_1 < x < x_2$ thì $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ nên $f(x)$ trái dấu với a ;
- Với $x < x_1$ hoặc $x > x_2$ thì $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ nên $f(x)$ cùng dấu với a .

Ví dụ 18.2. Giải các bất phương trình :

a) $2x^2 - 3x + 5 > 0$;

b) $x^2 + 2x - 1 < 0$;

c) $3x^2 - 4x - 1 > 0$.

Giải.

a) Phương trình $2x^2 - 3x + 5 = 0$ có $\Delta = 9 - 40 < 0$ nên với mọi x thì $2x^2 - 3x + 5$ cùng dấu với 2, tức là $2x^2 - 3x + 5 > 0$ với mọi x .

Tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbf{R}$.

b) Phương trình $x^2 + 2x - 1 = 0$ có hai nghiệm $-1 - \sqrt{2}$ và $-1 + \sqrt{2}$.

Do đó $x^2 + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$.

c) Phương trình $3x^2 - 4x - 1 = 0$ có hai nghiệm $\frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ và $\frac{2 + \sqrt{7}}{3}$.

$$\text{Do đó } 3x^2 - 4x - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \\ x > \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

Lưu ý. Nếu không sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta giải các bất phương trình trên như sau :

a) $2x^2 - 3x + 5 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 5 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} > 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là mọi x .

b) $x^2 + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 < 2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 < 2$.

$$\Leftrightarrow |x + 1| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x + 1 < \sqrt{2}.$$

Vậy $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 3x^2 - 4x - 1 > 0 &\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 > \frac{7}{9} \Leftrightarrow \left|x - \frac{2}{3}\right| > \frac{\sqrt{7}}{3} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{3} < -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ x - \frac{2}{3} > \frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \\ x > \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 18.3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

Giải.

Do $0 < x < 1$ nên $A > 3$.

$$\text{Ta có } A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x-x^2}.$$

$$\text{Đặt } \frac{x+1}{x-x^2} = a \text{ với } a > 3.$$

Viết thành phương trình bậc hai đối với x nhận a là tham số

$$x+1 = a(x-x^2) \Leftrightarrow ax^2 + (1-a)x + 1 = 0$$

$$\Delta = (1-a)^2 - 4a = a^2 - 6a + 1.$$

Giải bất phương trình $a^2 - 6a + 1 \geq 0$ được

$$a \leq 3 - 2\sqrt{2} \text{ (loại vì trái với } a > 3) \text{ hoặc } a \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Do đó $\min A = 3 + 2\sqrt{2}$ tại

$$x = \frac{a-1}{2a} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ (thỏa mãn } 0 < x < 1).$$

Ví dụ 18.4. Tìm giá trị của m để biểu thức sau có giá trị không âm với mọi x :

$$f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m.$$

Giải.

Cách 1. Phương trình $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$ có hai nghiệm là m và 2 .

• Với $m \neq 2$ thì không xảy ra $f(x) \geq 0$ với mọi x . Cụ thể là:

– Nếu $m > 2$ thì $f(x) < 0$ với $2 < x < m$.

– Nếu $m < 2$ thì $f(x) < 0$ với $m < x < 2$.

• Với $m = 2$ thì $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$ với mọi x .

Kết luận : Với $m = 2$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi x .

Cách 2. Tam thức $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 2m$ đã có $a = 1 > 0$ nên $f(x) \geq 0$ với mọi $x \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 - 8m \leq 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Ví dụ 18.5. Tìm giá trị của m để nghiệm của bất phương trình sau là mọi số thực x :

$$(m + 2)x^2 + 4x + 3 < 0.$$

Giải.

Với mọi x , ta có

$$(m + 2)x^2 + 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 < 0 \\ \Delta' < 0. \end{cases}$$

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - 3(m + 2) < 0 \Leftrightarrow -3m - 2 < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}.$$

Kết hợp với $m < -2$, ta được các giá trị của m phải tìm là

$$-\frac{2}{3} < m < -2.$$

Ví dụ 18.6. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Chứng minh rằng điều kiện để $f(x) \geq 0$ với mọi x và xảy ra được $f(x) = 0$ là $a > 0$ và $\Delta = 0$.

Giải.

Điều kiện để $f(x) \geq 0$ với mọi x là $a > 0$ và $\Delta \leq 0$. (1)

Để $f(x) = 0$ thì phải có $\Delta \geq 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a > 0$ và $\Delta = 0$. Khi đó $f(x) = 0$ tại $x = -\frac{b}{2a}$.

Ví dụ 18.7. Cho biểu thức

$$A = x^2 - 2mx + (m + 1).$$

Tìm giá trị của m để biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là -11 .

Giải.

Ta có $A \geq -11 \Leftrightarrow A + 11 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + (m + 12) \geq 0$.

$$\Delta' = m^2 - m - 12.$$

Điều kiện để $A + 11 \geq 0$ với mọi x và xảy ra được $A + 11 = 0$ là $\Delta' = 0$ (theo Ví dụ 18.6).

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow (m - 4)(m + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -3. \end{cases}$$

- Với $m = 4$ thì $A = x^2 - 8x + 5 = (x - 4)^2 - 11 \geq -11$, ta có

$$\min A = -11 \text{ tại } x = 4.$$

- Với $m = -3$ thì $A = x^2 + 6x - 2 = (x + 3)^2 - 11 \geq -11$, ta có

$$\min A = -11 \text{ tại } x = -3.$$

Ví dụ 18.8. Cho biểu thức

$$A = \frac{mx + n}{x^2 + 1}.$$

Tìm các giá trị của m, n để biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là -1 , giá trị lớn nhất là 4 .

Giải.

- Ta có $A \geq -1 \Leftrightarrow A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{mx + n}{x^2 + 1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + mx + (n + 1) \geq 0$

Điều kiện để $A + 1 \geq 0$ với mọi x và xảy ra được $A + 1 = 0$ là

$$\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4n - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4n + 4. \quad (1)$$

- Ta có $A \leq 4 \Leftrightarrow A - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{mx + n}{x^2 + 1} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow mx + n - 4x^2 - 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - mx + (4 - n) \geq 0.$$

Điều kiện để $A - 4 \leq 0$ với mọi x và xảy ra được $A - 4 = 0$ là

$$\Delta_2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 16n - 64 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 64 - 16n. \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) suy ra $4n + 4 = 64 - 16n \Leftrightarrow n = 3$.

Suy ra $m^2 = 4 \cdot 3 + 4 = 16$, do đó $m = \pm 4$.

Kết luận: Có hai cặp giá trị của $(m; n)$ là $(4; 3)$ và $(-4; 3)$.

BÀI TẬP

18.1. Giải các bất phương trình :

a) $x^2 - x - 1 > 0$;

b) $x^2 - 14x + 29 < 0$.

18.2. Tìm giá trị của m để nghiệm của bất phương trình sau là mọi x :

$$(m - 1)x^2 - 2x + 1 > 0.$$

18.3. Cho phương trình

$$x^2 - 2mx + 3m + 1 = 0.$$

Tìm giá trị của m để phương trình :

a) Có nghiệm ;

b) Có hai nghiệm trái dấu ;

c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

18.4. Cho biểu thức

$$A = x^2 - (m + 1)x + 1.$$

Tìm giá trị của m để $A \geq 0$ với mọi x.

18.5. Cho biểu thức

$$A = -x^2 + 4mx - (m + 1).$$

Tìm giá trị của m để biểu thức A có giá trị lớn nhất là 2.

18.6. Cho biểu thức

$$A = \frac{2x^2 + mx + n}{x^2 + 1}.$$

Tìm các giá trị của m, n để biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất là 3.

Chuyên đề 19. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Giải phương trình nghiệm nguyên chứa các ẩn $x, y, \dots$ là tìm các bộ số nguyên $(x_0; y_0; \dots)$ thoả mãn phương trình đó. Khi giải phương trình nghiệm nguyên ngoài các phép biến đổi tương đương, ta còn có thể sử dụng các tính chất của tập hợp số nguyên như : tính chia hết, tính chất của số nguyên tố, ... để giới hạn miền nghiệm của phương trình. Trong chuyên đề này, xin giới thiệu một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên mà việc phân loại các phương pháp dựa trên phạm vi kiến thức chủ yếu được vận dụng.

I. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

1. Biến đổi phương trình về dạng $A_1 A_2 \dots A_n = k$ trong đó $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ là các đa thức hệ số nguyên, k là số nguyên

Phương pháp : Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ, phân tích đa thức thành nhân tử đưa phương trình về dạng trên. Sau đó dựa vào tính chất của các A_i để phân tích $k = k_1 k_2 \dots k_n$ (với $k_i \in \mathbb{Z}$) rồi dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1 = k_1 \\ A_2 = k_2 \\ \dots \\ A_n = k_n. \end{cases}$$

Ví dụ 19.1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2xy - x - y = 1$.

Giải.

Biến đổi phương trình thành $4xy - 2x - 2y = 2$

$$\Leftrightarrow 2x(2y - 1) - (2y - 1) = 3 \Leftrightarrow (2x - 1)(2y - 1) = 3.$$

Vì x và y là các số nguyên nên $2x - 1$ và $2y - 1$ là các số nguyên.

Do vai trò x, y như nhau, không giảm tổng quát giả sử $x \geq y$ nên $2x - 1 \geq 2y - 1$.

Mà $3 = 3.1 = (-3).(-1)$ nên xảy ra hai trường hợp

$$1) \begin{cases} 2x-1=3 \\ 2y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 2x-1=-1 \\ 2y-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1. \end{cases}$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm $(x; y)$ là $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(0; -1)$, $(-1; 0)$.

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng $ax + by + cxy = d$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên.

Ví dụ 19.2. Tìm số nguyên x để $x^2 + x + 2009$ là số chính phương.

Giải.

Ta có $x^2 + x + 2009 = y^2$ ($y \in \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 - (2y)^2 = -8035$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x-2y+1) = -8035.$$

Do $y \in \mathbb{N}$ nên $2x+2y+1 \geq 2x-2y+1$, và chúng đều là số nguyên.

$$\begin{aligned} \text{Ta có sự phân tích } -8035 &= 1607 \cdot (-5) = (-1607) \cdot 5 \\ &= 1 \cdot (-8035) = 8035 \cdot (-1). \end{aligned}$$

Vì vậy xảy ra bốn trường hợp

$$1) \begin{cases} 2x+2y+1=1607 \\ 2x-2y+1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2=1602 \\ 4y=1612 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=400 \\ y=403. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x+2y+1=5 \\ 2x-2y+1=-1607 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2=-1602 \\ 4y=1612 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-401 \\ y=403. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x+2y+1=1 \\ 2x-2y+1=-8035 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2=-8034 \\ 4y=8036 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2009 \\ y=2009. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x+2y+1=8035 \\ 2x-2y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2=8034 \\ 4y=8036 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2008 \\ y=2009. \end{cases}$$

Vậy x có thể là 400, -401, -2009, 2008.

2. Biến đổi phương trình về dạng $a_1A_1^2 + a_2A_2^2 + \dots + a_nA_n^2 = k$, trong đó A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là các đa thức hệ số nguyên; a_i là số nguyên dương, k là số tự nhiên.

Phương pháp : Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ $(a + b)^2$, đưa phương trình về dạng trên. Sau đó dựa vào tính chất các a_i , A_i để phân tích $k = a_1k_1^2 + a_2k_2^2 + \dots + a_nk_n^2$ (với $k_i \in \mathbb{Z}$), dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1^2 = k_1^2 \\ A_2^2 = k_2^2 \\ \dots \\ A_n^2 = k_n^2. \end{cases}$$

Ví dụ 19.3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz = 10.$$

Giải.

Biến đổi như sau

$$[x^2 + 2x(y - 2z) + (y - 2z)^2] - (y - 2z)^2 + 5y^2 + 6z^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2z)^2 + 4y^2 + 4yz + 2z^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2z)^2 + (2y + z)^2 + z^2 = 10.$$

Nhận thấy x, y, z là các số nguyên và $2y + z + z = 2(y + z)$ là số chẵn, nên $(2y + z)^2$ và z^2 là hai số chính phương cùng tính chẵn lẻ, nên viết

$$10 = 0^2 + 3^2 + 1^2.$$

Xây ra các khả năng sau

$$1) \begin{cases} (x + y - 2z)^2 = 0 \\ (2y + z)^2 = 3^2 \\ z^2 = 1. \end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x; y; z)$ là

$$(1; 1; 1), (4; -2; 1), (-4; 2; -1), (-1; -1; -1). \quad (*)$$

$$2) \begin{cases} (x + y - 2z)^2 = 0 \\ (2y + z)^2 = 1 \\ z^2 = 3^2. \end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x; y; z)$ là

$$(7; -1; 3), (8; -2; 3), (-8; 2; -3), (-7; 1; -3). \quad (**)$$

Vậy có tất cả 8 bộ $(x; y; z)$ thỏa mãn được mô tả ở (*) và (**).

II. PHƯƠNG PHÁP RÚT MỘT ẨN THEO ẨN CÒN LẠI

Xét phương trình tìm nghiệm nguyên dạng $F(x, y) = 0$

1. Nếu $F(x, y)$ là đa thức bậc nhất đối với x (hoặc y) với hệ số nguyên thì ta sẽ biểu diễn được x theo y (hoặc y theo x) rồi sử dụng phép chia đa thức và tính chất chia hết để giải.
2. Nếu $F(x, y)$ là đa thức bậc hai đối với x (hoặc y) với hệ số nguyên thì ta sẽ coi $F(x, y) = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x (hoặc y) để xét điều kiện Δ phải là số chính phương.

Ví dụ 19.4. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$3x^2 - 2xy + y - 5x + 2 = 0.$$

Giải.

Cách 1. Phương trình này chỉ chứa bậc nhất đối với y nên ta có thể rút y theo x .

$$\text{Ta có } (1-2x)y = -3x^2 + 5x - 2.$$

Do x nguyên nên $1-2x \neq 0$. Suy ra

$$y = \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x - 1} \Leftrightarrow 4y = \frac{12x^2 - 20x + 8}{2x - 1} = 6x - 7 + \frac{1}{2x - 1}.$$

Do x, y là các số nguyên suy ra $\frac{1}{2x-1}$ là số nguyên, nên $2x-1 \in \{1; -1\}$. Từ đó tìm được $(x; y)$ là $(1; 0), (0; -2)$.

Cách 2. Coi phương trình bậc hai đối với x , ta có

$$3x^2 - (2y+5)x + y+2 = 0.$$

$$\Delta = (2y+5)^2 - 12(y+2) = 4y^2 + 8y + 1.$$

Nếu phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là

$$4y^2 + 8y + 1 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (2y+2)^2 - k^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (2y+k+2)(2y-k+2) = 3.$$

Từ đó cũng tìm được các nghiệm như trên.

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng

$$ax^2 + bxy + cx + dy = e, \text{ (hoặc } ay^2 + bxy + cx + dy = e)$$

trong đó a, b, c, d, e là các số nguyên.

Ví dụ 19.5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3.$$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng

$$y[2y^2 + (x^2 - 3x)y + x + 3x^2] = 0.$$

Nếu $y = 0$ thì x là số nguyên tùy ý.

$$\text{Xét } y \neq 0 \text{ thì } 2y^2 + (x^2 - 3x)y + x + 3x^2 = 0. \quad (1)$$

Ta coi (1) là phương trình bậc hai ẩn y , ta tính

$$\Delta = (x^2 - 3x)^2 - 8(x + 3x^2) = x(x + 1)^2(x - 8).$$

Trường hợp $x = -1$ thì $\Delta = 0$, nghiệm kép của (1) là $y = -1$.

Trường hợp $x \neq -1$, để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là

$$x(x - 8) = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x - 4 - k)(x - 4 + k) = 16.$$

Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $x - 4 - k \leq x - 4 + k$ và $(x - 4 - k) + (x - 4 + k) = 2(x - 4)$ nên $x - 4 - k, x - 4 + k$ cùng chẵn.

Lại có $16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = (-4) \cdot (-4) = (-2) \cdot (-8)$. Xảy ra bốn trường hợp

$$\begin{cases} x - 4 - k = a \\ x - 4 + k = b \end{cases} \text{ với } (a; b) = (2; 8), (4; 4), (-4; -4), (-2; -8).$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-1; -1), (8; -10), (0; k)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Lưu ý. Trường hợp $F(x, y)$ là đa thức có hệ số nguyên với bậc cao hơn 2 theo biến x và y , ta cũng có thể đưa về một trong hai trường hợp trên bằng cách đặt ẩn phụ.

Ví dụ 19.6. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8.$$

Giải.

Ta có thể đưa về dạng phương trình bậc hai ẩn y bằng phép đặt $x = y + a$ (với a nguyên). Khi đó ta có

$$(3a - 2)y^2 + (3a^2 - 2)y + a^3 - 8 = 0.$$

Do a nguyên nên $3a - 2 \neq 0$, tính

$$\begin{aligned}\Delta &= (3a^2 - 2)^2 - 4(3a - 2)(a^3 - 8) = -3a^4 + 8a^3 - 12a^2 + 96a - 60 \\ &= -(a^2 - 4a - 2)^2 - 2a(a^3 - 56) - 56.\end{aligned}$$

Để cho $\Delta \geq 0$ suy ra $2a(a^3 - 56) < 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq \sqrt[3]{56}$. Vì a nguyên nên a chỉ nhận giá trị 1, 2, 3.

Thử chọn chỉ có $a = 2$ là thích hợp và tìm được $(x; y)$ là $(0; -2); (2; 0)$.

III. PHƯƠNG PHÁP SẮP THỨ TỰ

1. Phương pháp sắp thứ tự toàn phần

Khi phương trình đối xứng với các ẩn $x, y, z, \dots$, ta thường giả sử $x \leq y \leq z \leq \dots$ để giới hạn miền nghiệm của phương trình và bắt đầu đi tìm từ nghiệm bé nhất trở đi.

Ví dụ 19.7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$5(x + y + z) + 3 = 2xyz.$$

Giải.

Do vai trò x, y, z như nhau, không giảm tổng quát giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Chia hai vế của phương trình cho xyz ta có

$$2 = \frac{5}{xy} + \frac{5}{xz} + \frac{5}{yz} + \frac{3}{xyz} \leq \frac{18}{x^2}.$$

Do vậy $2x^2 \leq 18 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$.

1) Với $x = 1$ thì ta có $5(y + z) + 8 = 2yz \Leftrightarrow (2y - 5)(2z - 5) = 41$.

Vì y, z nguyên dương và $y \leq z$ nên $-3 \leq 2y - 5 \leq 2z - 5$, và $41 = 1 \cdot 41$.

Chỉ xảy ra trường hợp

$$\begin{cases} 2y - 5 = 1 \\ 2z - 5 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 23. \end{cases}$$

2) Với $x = 2$ thì ta có $5(y + z) + 13 = 4yz \Leftrightarrow (4y - 5)(4z - 5) = 77$.

Vì y, z nguyên dương và $2 = x \leq y \leq z$ nên $-3 \leq 4y - 5 \leq 4z - 5$, và $77 = 11 \cdot 7$.

Xây ra trường hợp

$$\begin{cases} 4y - 5 = 7 \\ 4z - 5 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 4. \end{cases}$$

3) Với $x = 3$ thì ta có $5(y + z) + 18 = 6yz \Leftrightarrow (6y - 5)(6z - 5) = 133$. (*)

Mặt khác y, z nguyên dương và $3 \leq y \leq z$ nên $15 \leq 6y - 5 \leq 6z - 5$

suy ra $(6y - 5)(6z - 5) \geq 15^2 = 225$. (Mâu thuẫn với (*)).

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương $(x; y; z)$ là $(1; 3; 3), (2; 3; 4)$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Với cách làm tương tự, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng $a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + b = cx_1x_2\dots x_n$, trong đó a, b, c, n là các số nguyên dương và $n \geq 2$.

Ví dụ 19.8. Tìm tất cả các tam giác có số đo các cạnh là những số nguyên dương và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

Giải.

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là a, b, c với $a \geq b \geq c > 1$, với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Theo công thức tính diện tích tam giác, ta có

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$, r là bán kính đường tròn nội tiếp.

Do $r = 1$ nên $p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2$

$$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) = p$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Suy ra $(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c) = 4(a+b+c)$.

Vì $(b+c-a), (a-b+c), (a+b-c)$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ, mà $4(a+b+c)$ là số chẵn nên $(b+c-a), (a-b+c), (a+b-c)$ cùng chẵn.

Đặt $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a-b+c}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$ với $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ dẫn đến phương trình

$$xyz = x + y + z.$$

Do $a \geq b \geq c$ nên $x \leq y \leq z$, suy ra $xyz = x + y + z \leq 3z$, dẫn đến $xy \in \{1; 2; 3\}$.

Xây ra các khả năng

a) Nếu $xy = 1$ thì $x = 1; y = 1$ suy ra $2 + z = z \Leftrightarrow z = 0$ (loại do $z \geq 1$).

b) Nếu $xy = 2$ thì $x = 1; y = 2$ suy ra $3 + z = 2z \Leftrightarrow z = 3$.

c) Nếu $xy = 3$ thì $x = 1; y = 3$ suy ra $4 + z = 3z \Leftrightarrow z = 2$ (loại do $y \leq z$).

Do vậy $(x; y; z) = (1; 2; 3)$. Suy ra $(a; b; c) = (5; 4; 3)$.

Vậy tam giác có độ dài ba cạnh là 5, 4, 3 thoả mãn.

2. Phương pháp sắp thứ tự từng phần

Ở một số phương trình nghiệm nguyên ta quan tâm đến một ẩn bằng cách phân chia tập hợp số của ẩn đó thành các tập con rời nhau. Sau đó giải phương trình tìm nghiệm nguyên trong từng tập con đó.

Ta thường sử dụng những nhận xét sau: Với X, Y nguyên, a, n nguyên dương

a) Nếu $X^n < Y^n < (X+a)^n$ thì $Y^n = (X+i)^n$ với $i = 1, 2, \dots, a-1$.

b) Nếu $X(X+1) < Y(Y+1) < (X+a)(X+a+1)$ thì

$$Y(Y+1) = (X+i)(X+i+1) \text{ với } i = 1, 2, \dots, a-1.$$

c) Không tồn tại số nguyên Y sao cho $X^n < Y^n < (X+1)^n$.

d) Không tồn tại số nguyên Y sao cho $X(X+1) < Y(Y+1) < (X+1)(X+2)$.

Ví dụ 19.9. Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình

a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^4$;

b) $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$.

Giải.

a) Với $x = 0$ thay vào phương trình tìm được $y = 1$ hoặc $y = -1$.

Với $x = -1$ thì $y = 1$ hoặc $y = -1$.

Với $x > 0$ thì $x^4 < y^4 < (x+1)^4$, điều này vô lí.

Với $x < -1$ thì $(x+1)^4 < y^4 < x^4$, điều này vô lí.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm nguyên $(x; y)$ là

$$(0; 1), (0; -1), (-1; 1), (-1; -1).$$

b) Với $x = 0$ thì $y = 1$.

Với $x = -1$ thì $y = 0$.

Với $x > 0$ thì $x^3 < y^3 < (x+1)^3$, điều này vô lí.

Với $x < -1$ thì $(x+1)^3 < y^3 < x^3$, điều này vô lí.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 1)$, $(-1; 0)$.

Nhận xét. Với cách làm tương tự như trên, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = y^n \text{ với } n \text{ là số nguyên dương.}$$

IV. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHIA HẾT VÀ TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN TỐ

Phương pháp

- Dựa vào đặc điểm của phương trình để phát hiện tính chia hết của một ẩn.
- Để chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên thì có thể sử dụng tính chất chia hết: Chỉ ra tồn tại số nguyên m sao cho hai vế của phương trình khi cùng chia cho m có số dư khác nhau.

- Những kết quả thường dùng:

Với $a \in \mathbb{Z}$ thì a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, chia cho 4 dư 0 hoặc 1, chia cho 8 dư 0 hoặc 1 hoặc 4; a^3 chia cho 9 dư 0, 1, 8; a^4 chia cho 16 dư 0, 1.

- Ta thường sử dụng một số tính chất sau đây của số nguyên tố để giải phương trình

a) Nếu p là số nguyên tố thì $a^n \vdots p \Leftrightarrow a \vdots p$ (với a nguyên).

b) Định lí Fermat nhỏ: Nếu p là số nguyên tố thì $a^p - a \vdots p$ với mọi số nguyên dương a .

Đặc biệt, nếu $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} - 1 \vdots p$.

c) Nếu p là số nguyên tố dạng $4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $(a^2 + b^2) \vdots p \Leftrightarrow a \vdots p$ và $b \vdots p$.

Thật vậy, nếu $a \vdots p$ và $b \vdots p$ thì $a^2 + b^2 \vdots p$.

Giả sử a không chia hết cho p , do $a^2 + b^2 \vdots p$ nên b không chia hết cho p . Theo định lí Fermat nhỏ ta có $a^{p-1} - 1 \vdots p$ và $b^{p-1} - 1 \vdots p$. Khi đó

$$a^{p-1} + b^{p-1} - 2 = a^{4k+2} + b^{4k+2} - 2 = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} - 2.$$

Suy ra $2 \vdots p$, điều này mâu thuẫn với p là số nguyên tố dạng $4k + 3$.

Hệ quả. i) $x^2 + 1$ không có ước nguyên tố dạng $4k + 3$ với $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$.

ii) Nếu p là số nguyên tố và $x^2 + 1 \vdots p$ thì p có dạng $4k + 1$, với $k \in \mathbb{N}$.

d) Nếu p là số nguyên tố lẻ dạng $8k + 5$ hoặc $8k + 7$ thì $a^2 + 2b^2 \vdots p \Leftrightarrow a \vdots p$ và $b \vdots p$.

Ví dụ 19.10. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$4x + 9y = 48.$$

Giải.

Giả sử x, y là các số nguyên thoả mãn phương trình đã cho.

Ta thấy 48 và $4x$ chia hết cho 4 nên $9y$ chia hết cho 4, mà $(9, 4) = 1$ nên y chia hết cho 4.

Đặt $y = 4t$ ($t \in \mathbb{Z}$), thay vào phương trình đầu ta được $4x + 36t = 48$

$\Leftrightarrow x = 12 - 9t$ và $y = 4t$ (*). Thay các biểu thức của x, y ở (*) thấy thoả mãn.

Vậy phương trình có vô số nghiệm $(x; y) = (12 - 9t; 4t)$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 19.11. Tìm những số tự nhiên lẻ n để $26n + 17$ là số chính phương.

Giải.

Giả sử $26n + 17 = k^2$ (với k tự nhiên lẻ). Khi đó

$$26n + 13 = (k - 2)(k + 2) \Leftrightarrow 13(2n + 1) = (k - 2)(k + 2).$$

Do $13(2n + 1) \vdots 13$ nên $(k - 2) \vdots 13$ hoặc $(k + 2) \vdots 13$.

Nếu $(k - 2) \vdots 13$ thì $k = 13t + 2$ (t lẻ), khi đó $n = \frac{13t^2 - 4t - 1}{2}$.

Nếu $(k + 2) \vdots 13$ thì $k = 13t - 2$ (t lẻ), khi đó $n = \frac{13t^2 + 4t - 1}{2}$.

Vậy số tự nhiên lẻ n cần tìm có dạng $\frac{13t^2 \pm 4t - 1}{2}$ (t lẻ).

Ví dụ 19.12. Tìm các số nguyên x, y, z sao cho

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2012.$$

Giải.

Giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình.

Nhận thấy x^4, y^4, z^4 chia cho 16 dư 0 hoặc 1, nên $x^4 + y^4 + z^4$ chia cho 16 có số dư là một trong các số 0, 1, 2, 3.

Trong khi đó số 2012 chia cho 16 dư 12. Hai điều này mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 19.13. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 13y^2 = z^2 \\ 13x^2 + y^2 = t^2. \end{cases}$$

Giải.

Giả sử tìm được bộ số nguyên dương $(x, y, z, t) = (a, b, c, d)$ thỏa mãn điều kiện bài ra, ta có

$$\begin{cases} a^2 + 13b^2 = c^2 \\ 13a^2 + b^2 = d^2. \end{cases}$$

Gọi ƯCLN(a, b) = m ($m \in \mathbb{N}^*$), suy ra $c \vdots m$ và $d \vdots m$.

Đặt $a = ma_1, b = mb_1, c = mc_1, d = md_1$, với a_1, b_1, c_1, d_1 là các số tự nhiên và $(a_1, b_1) = 1$. Suy ra $14(a_1^2 + b_1^2) = c_1^2 + d_1^2 \Leftrightarrow 14(a_1^2 + b_1^2) = c_1^2 + d_1^2$.

Suy ra $c_1^2 + d_1^2 \vdots 7$, do đó $c_1 \vdots 7$ và $d_1 \vdots 7$, dẫn đến $a_1^2 + b_1^2 \vdots 7$ nên $a_1 \vdots 7$ và $b_1 \vdots 7$.

Điều này mâu thuẫn với $(a_1, b_1) = 1$.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự ta có thể chứng minh được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + ny^2 = z^2 \\ nx^2 + y^2 = t^2 \end{cases} \text{ với } n+1 \text{ có ước nguyên tố dạng } 4k+3 \text{ và } (n+1, p^2) = 1$$

không có nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 19.14. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0.$$

Giải.

Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình.

Khi đó $x_0 \not\equiv 3$, đặt $x_0 = 3x_1$ (với $x_1 \in \mathbb{Z}$) ta có $9x_1^3 - y_0^3 - 3z_0^3 = 0$.

Khi đó $y_0 \not\equiv 3$, đặt $y_0 = 3y_1$ (với $y_1 \in \mathbb{Z}$) ta có $3x_1^3 - 9y_1^3 - z_0^3 = 0$.

Khi đó $z_0 \not\equiv 3$, đặt $z_0 = 3z_1$ (với $z_1 \in \mathbb{Z}$) ta có $x_1^3 - 3y_1^3 - 9z_1^3 = 0$.

Như vậy $(x_1; y_1; z_1) = \left(\frac{x_0}{3}; \frac{y_0}{3}; \frac{z_0}{3}\right)$ cũng là nghiệm nguyên của phương

trình. Quá trình tiếp tục như vậy ta suy ra các bộ số $\left(\frac{x_0}{3^n}; \frac{y_0}{3^n}; \frac{z_0}{3^n}\right)$ mọi $n \in \mathbb{N}$

cũng là nghiệm của phương trình. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm nguyên $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Nhận xét. Ta gọi phương pháp giải trong ví dụ trên là phương pháp lùi vô hạn của Fermat, thường để chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm.

Bắt đầu giả sử phương trình đã cho có một nghiệm nguyên, sau đó dùng tính chất chia hết và tính chất của số nguyên tố để chứng tỏ phương trình có vô số nghiệm nguyên.

V. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp : Để giải phương trình bằng phương pháp này, ta thường làm như sau :

Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc để đánh giá một vế của phương trình không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) vế còn lại. Muốn cho hai vế bằng nhau thì bất đẳng thức phải trở thành đẳng thức.

Các bất đẳng thức cơ bản thường dùng :

1) $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$ với mọi $a_i, i = 1, \dots, n$.

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2) Bất đẳng thức Cô-si

+ Với hai số a, b không âm luôn có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

+ Tổng quát, giả sử $a_i \geq 0$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \text{ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

3) Bất đẳng thức Bu-nhia-kôp-xki

+ Với hai cặp số (a, b) và (x, y) luôn có $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

+ Tổng quát, cho hai dãy số thực tùy ý $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó ta có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = k b_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Ví dụ 19.15. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 4z = -4.$$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 4z + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (2; 2; 2)$.

Ví dụ 19.16. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4)(z^2 + 9) = 48xyz.$$

Giải.

Nhận thấy nếu $(x_0; y_0; z_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình thì x_0, y_0, z_0 cùng dương hoặc có hai số âm và một số dương.

Ngoài ra $(-x_0; -y_0; z_0), (x_0; -y_0; -z_0), (-x_0; y_0; -z_0)$ cũng là nghiệm.

Do đó trước hết ta đi tìm nghiệm nguyên dương.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$$x^2 + 1 \geq 2x \geq 0; y^2 + 4 \geq 4y \geq 0; z^2 + 9 \geq 6z \geq 0.$$

Suy ra $(x^2 + 1)(y^2 + 4)(z^2 + 9) \geq 48xyz$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = 2, z = 3$.

Vậy nghiệm nguyên $(x; y; z)$ của phương trình là

$$(1; 2; 3), (-1; -2; 3), (1; -2; -3), (-1; 2; -3).$$

Nhận xét. Bằng cách này ta có thể tìm nghiệm nguyên của phương trình dạng

$(x_1^2 + a_1^2)(x_2^2 + a_2^2) \dots (x_n^2 + a_n^2) = 2^n x_1 x_2 \dots x_n a_1 a_2 \dots a_n$ với a_i, n là các số nguyên dương.

Ví dụ 19.17. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y^2 + t^2 = 16 \\ xt + yz = 12. \end{cases}$$

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-kóp-xki cho hai bộ số (x, z) và (t, y) ta có

$$9 \cdot 16 = (x^2 + z^2)(y^2 + t^2) \geq (xt + yz)^2 = 12^2,$$

suy ra $(x^2 + z^2)(y^2 + t^2) = (xt + yz)^2$ khi và chỉ khi $xy = zt$.

Từ $x^2 + z^2 = 9 \Leftrightarrow x = 0, z = \pm 3$ hoặc $x = \pm 3, z = 0$.

Nếu $x = 0$ thì $t = 0$, khi đó $y^2 = 16, yz = 12$. Vậy $y = 4, z = 3$ hoặc $y = -4, z = -3$.

Nếu $z = 0$ thì $y = 0$, tương tự tìm được $x = 3, t = 4$ hoặc $x = -3, t = -4$.

Vậy nghiệm nguyên $(x; y; z; t)$ của hệ là

$$(0; 4; 3; 0), (0; -4; -3; 0), (3; 0; 0; 4), (-3; 0; 0; -4).$$

BÀI TẬP

Phương pháp phân tích

19.1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) $2x^2 - xy - 6y^2 + 13y - 3x + 7 = 0$;

b) $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 21$.

19.2. Tìm số nguyên dương x sao cho $2^x + 65$ là số chính phương.

19.3. Tìm tất cả các tam giác vuông có độ dài cạnh là số tự nhiên và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

19.4. Hãy viết số 2012 thành tổng của các số nguyên liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách viết ?

19.5. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz = 12$;

b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 4yz - 2zt = 10$.

Phương pháp rút một ẩn theo ẩn còn lại

19.6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xy^2 + 2xy - 243y + x = 0.$$

19.7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$y^2x = x^2 + x + 12.$$

19.8. Giải phương trình tìm nghiệm nguyên

$$3x^2y + 5xy - 8y - x^2 - 10x = 4.$$

Phương pháp sắp thứ tự

19.9. Tìm ba số nguyên dương biết tổng các nghịch đảo của chúng bằng 1.

19.10. Tìm bốn số nguyên dương biết tổng bình phương các nghịch đảo của chúng bằng 1.

19.11. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$\frac{1}{x^2(x^2 + y^2)} + \frac{1}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{1}{x^2(x^2 + y^2 + z^2)} = 1.$$

19.12. Cho tam giác có số đo đường cao là số tự nhiên và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Chứng minh rằng tam giác đó đều.

19.13. Hãy tìm tất cả bộ ba số nguyên dương phân biệt (p, q, r) khác 1 sao cho $pqr - 1$ chia hết cho $(p - 1)(q - 1)(r - 1)$.

19.14. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a) $(x + 2)^4 - x^4 - 8x = y^2$;

b) $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$;

c) $x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0$.

19.15. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$8(2 - x) + y^2 - z^2 = 0 \text{ với } y < x < 10.$$

Phương pháp sử dụng tính chất chia hết và tính chất của số nguyên tố

19.16. Giải các phương trình tìm nghiệm nguyên

a) $1 + x + x^2 + x^3 = 1997^y$;

b) $2^x + 153 = y^2$.

19.17. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 71.$$

19.18. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) $19x^2 + 28y^2 = 729$;

b) $x^4 + y^4 = 11z^4$.

19.19. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$;

b) $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$;

c) $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 8t^3$;

d) $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$.

Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức

19.20. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2xy + 2y - 4z - 5$;

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2}$.

19.21. Giải phương trình

$$\frac{4}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{25}{\sqrt{z-5}} = 16 - \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1} - \sqrt{z-5}.$$

19.22. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x + y + 1)^2 = 3(x^2 + y^2 + 1).$$

19.23. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 48. \end{cases}$$

Chuyên đề 20. PHẦN NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG

I. PHẦN NGUYÊN

1. Định nghĩa

Phần nguyên của số thực a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a , kí hiệu là $[a]$. Ta có $[a] \leq a < [a] + 1$.

Phần lẻ của số thực a là hiệu của a với phần nguyên của nó, kí hiệu là $\{a\}$.

Ta có $\{a\} = a - [a]$, $0 \leq \{a\} < 1$.

Ví dụ. $[5,3] = 5$; $[-5,3] = -6$; $[2012] = 2012$;

$$\{5,3\} = 5,3 - 5 = 0,3; \quad \{-5,3\} = -5,3 - (-6) = 0,7;$$

$$\{2012\} = 2012 - 2012 = 0.$$

2. Tính chất

1) $a \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow [a] = a$ hoặc $\{a\} = 0$.

2) $n \in \mathbf{Z}$ và $n \leq a < n+1 \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow [a] = n$.

3) $[\{a\}] = \{[a]\} = 0$.

4) Nếu $n \in \mathbf{Z}$ thì $[n+a] = n + [a]$; $\{n+a\} = \{a\}$.

5) Nếu $[n+a] = n$ thì $n \in \mathbf{Z}$ và $0 \leq a < 1$.

6) $a \geq b \Rightarrow [a] \geq [b]$.

7) $[a] + [b] \leq [a+b]$.

Tổng quát $[a_1] + [a_2] + \dots + [a_n] \leq [a_1 + a_2 + \dots + a_n]$.

8) $[a] - [b] \geq [a-b]$.

9) $\{a\} + \{b\} \geq \{a+b\}$; $\{a\} - \{b\} \leq \{a-b\}$.

10) Nếu $[a] = [b]$ thì $|a-b| < 1$.

11) $[a] + \left[a + \frac{1}{2} \right] = [2a]$.

12) Nếu $n \in \mathbf{N}^*$ thì $[na] \geq n[a]$; $\left[\frac{[a]}{n} \right] = \left[\frac{a}{n} \right]$.

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -[a]$;

Nếu a không là số nguyên thì $[-a] = -[a] - 1$;

Chứng minh

Các tính chất từ 1) đến 5) có thể chứng minh dễ dàng trên dựa vào định nghĩa phần nguyên.

6) Vì $a \geq b$ nên tồn tại số $c \geq 0$ sao cho $a = b + c$. Do đó $a = [b] + \{b\} + c$, suy ra

$$[a] = [b] + [\{b\} + c]. \text{ Mà } [\{b\} + c] \geq 0 \text{ nên } [a] \geq [b].$$

7) Viết $a = [a] + \{a\}$, $b = [b] + \{b\}$. Khi đó

$$[a + b] = [[a] + \{a\} + [b] + \{b\}] = [a] + [b] + [\{a\} + \{b\}].$$

Mà $[\{a\} + \{b\}] \geq 0$ nên

$$[a + b] \geq [a] + [b].$$

8) Áp dụng tính chất 7 ta có

$$[a - b] + [b] \leq [a - b + b] = [a] \text{ nên } [a] - [b] \geq [a - b].$$

$$\begin{aligned} 9) \{a\} - \{b\} &= a - [a] + b - [b] = (a + b) - ([a] + [b]) \geq a + b - [a + b] \\ &= \{a + b\}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \{a\} - \{b\} \geq \{a - b\}.$$

10) Từ $[a] = [b]$ suy ra $a - \{a\} = b - \{b\}$. Không giảm tổng quát, giả sử $a \geq b$.

Nếu $a = b$ thì $|a - b| = 0$;

Nếu $a > b$ thì từ $a - b = \{a\} - \{b\} \leq \{a - b\}$

$$\text{suy ra } |a - b| = a - b \leq \{a - b\} < 1.$$

Vậy luôn có $0 \leq |a - b| < 1$.

11) Đặt $\{a\} = d$ thì $0 \leq d < 1$.

$$\bullet \text{ Nếu } 0 \leq d < \frac{1}{2} \text{ thì } \left[a + \frac{1}{2}\right] = \left[a\right] + d + \frac{1}{2} = [a] + \left[d + \frac{1}{2}\right] = [a];$$

$$[2a] = [2([a] + d)] = 2[a] + [2d] = 2[a]. \text{ Từ đó suy ra điều phải chứng minh.}$$

$$\bullet \text{ Nếu } \frac{1}{2} \leq d < 1 \text{ thì } \left[a + \frac{1}{2}\right] = \left[a\right] + d + \frac{1}{2} = [a] + \left[d + \frac{1}{2}\right] = [a] + 1;$$

$$[2a] = [2([a] + d)] = 2[a] + [2d] = 2[a] + 1. \text{ Từ đó suy ra điều phải chứng minh.}$$

12) Ta có

$$[na] = [n([a] + \{a\})] = n[a] + [n\{a\}], \text{ mà } [n\{a\}] \geq 0 \text{ nên } [na] \geq n[a].$$

$$\left[\frac{a}{n} \right] = \left[\frac{[a]}{n} + \frac{\{a\}}{n} \right] = \left[\frac{[a]}{n} \right].$$

14) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -a = -[a]$.

Nếu a không nguyên thì $0 < \{a\} < 1$, nên $-1 < -\{a\} < 0$, suy ra $[-\{a\}] = -1$.

Ta có $[-a] = [-([a] + \{a\})] = [-[a]] + [-\{a\}] = -[a] - 1$.

II. ỨNG DỤNG

1. Chứng minh một số bài toán về số học

Ví dụ 20.1. Cho $a > 0$ và số n nguyên dương. Chứng minh rằng số các số nguyên dương là bội số của n và không vượt quá a là $\left[\frac{a}{n} \right]$.

Giải.

Ta viết $a = nq + r$, trong đó q là số tự nhiên, $0 \leq r < n$.

Rõ ràng các bội số của n không vượt quá a là $n, 2n, \dots, qn$, tổng cộng có q số.

Mặt khác $\left[\frac{a}{n} \right] = q$. Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

Ví dụ 20.2. Số $2012!$ có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0?

Giải.

Vì $10 = 2 \cdot 5$ nên để biết $2012!$ có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0, ta cần phải tính số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố.

Theo kết quả ở Ví dụ 20.1, số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố bằng

$$\left[\frac{2012}{5} \right] + \left[\frac{2012}{5^2} \right] + \left[\frac{2012}{5^3} \right] + \left[\frac{2012}{5^4} \right] = 402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

(Do $2012 < 5^5$).

Số mũ của 2 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố nhiều hơn 501.

Vậy $2012!$ Có tận cùng là 501 chữ số 0.

Nhận xét. Nếu $5^k \leq n < 5^{k+1}$ thì số chữ số 0 tận cùng về bên phải của số $n!$ bằng

$$\left[\frac{n}{5} \right] + \left[\frac{n}{5^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{5^k} \right].$$

Ví dụ 20.3. Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k .

Giải.

Ta có $2012 = 2^2 \cdot 503$.

Số mũ cao nhất của 503 có trong $2011!$ là

$$\left[\frac{2011}{503} \right] = 3 \quad (\text{do } 2011 < 503^2).$$

Vậy $2011!$ chia hết cho 503^3 và không chia hết cho 503^4 , hiển nhiên $2011!$ chia hết cho 4^3 . Do vậy $2011!$ chia hết cho 2012^3 và không chia hết cho 2012^4 .

Muốn cho $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k thì $k \leq 3 \cdot 2012 = 6036$.

Vậy $\max k = 6036$.

Ví dụ 20.4. Tìm số tự nhiên n sao cho

$$\left[\frac{n}{2010} \right] = \left[\frac{n}{2011} \right] = \left[\frac{n}{2012} \right]. \quad (1)$$

Giải.

Viết $n = 2010k + r$ ($0 \leq r < 2010$, k, r là các số tự nhiên). Thay vào (1) ta có

$$\left[\frac{2010k + r}{2010} \right] = \left[\frac{2011k + r - k}{2011} \right] = \left[\frac{2012k + r - 2k}{2012} \right]$$

$$\Leftrightarrow k = k + \left[\frac{r-k}{2011} \right] = k + \left[\frac{r-2k}{2012} \right] \Leftrightarrow \left[\frac{r-k}{2011} \right] = \left[\frac{r-2k}{2012} \right] = 0.$$

Suy ra $0 \leq r - 2k$ nên $2k \leq r < 2010$, $0 \leq k < 1005$.

Vậy $n = 2010k + r$ ($0 \leq k < 1005$; $2k \leq r < 2010$).

Do có 1005 giá trị của k (từ 0 đến 1004). Với mỗi k thì r nhận các giá trị từ $2k$ đến 2009. Vậy số nghiệm tự nhiên n của (1) là

$$\sum_{k=0}^{1004} (2010 - 2k) = 1011030.$$

Ví dụ 20.5. Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{x^2-1}] \text{ là số nguyên tố.}$$

Giải.

Nhận xét

$$[\sqrt{n^2}] = [\sqrt{n^2+1}] = \dots = [\sqrt{(n+1)^2-1}] = n, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Đặt } S_n = [\sqrt{n^2}] + [\sqrt{n^2+1}] + \dots + [\sqrt{(n+1)^2-1}] = (2n+1)n = 2n^2 + n.$$

$$\text{Do đó } y = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{x^2-1}] = S_1 + S_2 + \dots + S_{x-1}$$

$$= \frac{x(4x^2 - 3x - 1)}{6}.$$

Nên $6y = x(4x^2 - 3x - 1)$, suy ra $6y \vdots x$, mà x, y là các số nguyên tố suy ra $x \in \{2; 3; y\}$.

Nếu $x = 2$ thì $y = 3$ (thỏa mãn); nếu $x = 3$ thì $y = 13$ (thỏa mãn); nếu $x = y$ thì $y = -1$ hoặc $y = \frac{7}{4}$ (loại).

Vậy bài toán có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 3$.

2. Giải phương trình có chứa dấu phần nguyên

1. Dạng 1. $[f(x)] = a$ ($a \in \mathbb{Z}$)

Phương pháp: $[f(x)] = a$ ($a \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow a \leq f(x) < a + 1$.

Ví dụ 20.6. Giải phương trình

$$[x]^2 - 3[x] + 2 = 0.$$

Giải.

Đặt $[x] = y$ ($y \in \mathbb{Z}$), phương trình có dạng

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ hoặc } y = 2.$$

Nếu $y = 1$ thì $[x] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$

Nếu $y = 2$ thì $[x] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $[1; 3)$.

Ví dụ 20.7. Giải phương trình

$$[x^2 + 5]^2 - 9[x^2 + 7] = -26.$$

Giải.

Do $[x^2 + 7] = [x^2 + 5] + 2$. Đặt $y = [x^2 + 5]$, với $y \in \mathbb{Z}$ và $y \geq 5$.

Ta có $y^2 - 9y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ (loại do $y \geq 5$) hoặc $y = 8$.

Với $y = 8$ thì $[x^2 + 5] = 8 \Leftrightarrow 8 \leq x^2 + 5 < 9 \Leftrightarrow 3 \leq x^2 < 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \leq x < 2 \text{ hoặc } -2 < x \leq -\sqrt{3}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2)$.

2. Dạng 2. $[f(x)] = g(x)$

Phương pháp: Đặt $g(x) = t$ (t nguyên), biểu diễn $f(x) = h(t)$ đưa về phương trình

$$[h(t)] = t \Leftrightarrow t \leq h(t) < t + 1 \text{ hay } 0 \leq h(t) - t < 1.$$

Tìm t , sau đó từ $g(x) = t$ tìm ra x .

Ví dụ 20.8. Giải phương trình

$$\left[\frac{4-3x}{5} \right] = \frac{5x-5}{7}.$$

Giải.

$$\text{Đặt } \frac{5x-5}{7} = t \quad (t \in \mathbb{Z}) \text{ thì } x = \frac{7t+5}{5}; \quad \frac{4-3x}{5} = \frac{5-21t}{25}.$$

Ta có

$$\left[\frac{5-21t}{25} \right] = t \Leftrightarrow t \leq \frac{5-21t}{25} < t+1$$

$$\Leftrightarrow 25t \leq 5-21t \leq 25t+25 \Leftrightarrow \frac{-20}{46} < t \leq \frac{5}{46}.$$

Do t nguyên nên $t = 0$. Suy ra $x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 20.9. Giải phương trình

$$x^2 - 9[x] + 8 = 0.$$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng $[x] = \frac{x^2 + 8}{9}$.

Đặt $\frac{x^2 + 8}{9} = t$ ($t \in \mathbb{N}^*$) thì $x = \sqrt{9t - 8}$ (do $x > 0$). Ta có

$$[\sqrt{9t - 8}] = t \Leftrightarrow t \leq \sqrt{9t - 8} < t + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 9t + 8 \leq 0 \\ t^2 - 7t + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq t \leq 8 \\ t \leq \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \text{ hoặc } t \geq \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

Do t là số tự nhiên nên $t \in \{1; 6; 7; 8\}$. Do đó $x \in \{1; \sqrt{46}; \sqrt{55}; 8\}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1; \sqrt{46}; \sqrt{55}; 8\}$.

Ví dụ 20.10. Giải phương trình

$$\left[\frac{2x - 1}{3} \right] + \left[\frac{4x + 1}{6} \right] = \frac{5x - 4}{3}.$$

Giải.

Áp dụng tính chất 11) $[a] + \left[a + \frac{1}{2} \right] = [2a]$, ta có

$$\left[\frac{2x - 1}{3} \right] + \left[\frac{4x + 1}{6} \right] = \left[\frac{2x - 1}{3} \right] + \left[\frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{4x - 2}{3} \right]$$

nên phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{4x - 2}{3} \right] = \frac{5x - 4}{3}.$$

Đặt $\frac{5x - 4}{3} = t$ ($t \in \mathbb{Z}$) thì $x = \frac{3t + 4}{5}$; $\frac{4x - 2}{3} = \frac{4t + 2}{5}$. Suy ra

$$\left[\frac{4t + 2}{5} \right] = t \Leftrightarrow 0 \leq \frac{4t + 2}{5} - t < 1 \Leftrightarrow -3 < t \leq 2 \Leftrightarrow t \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

(do t nguyên), tương ứng tìm được $x \in \left\{ \frac{-2}{5}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}; \frac{7}{5}; 2 \right\}$.

3. Dạng 3. $[f(x)] = [g(x)]$

Phương pháp : Đặt $[f(x)] = [g(x)] = t$ suy ra $|f(x) - g(x)| < 1$, dẫn đến $a < x < b$.

Với $a < x < b$ suy ra $\begin{cases} a_1 < f(x) < b_1 \\ a_2 < g(x) < b_2 \end{cases}$; từ đó tìm được t .

Ứng với mỗi giá trị của t nguyên, giải hệ $\begin{cases} [f(x)] = t \\ [g(x)] = t \end{cases}$ để tìm x .

Tập hợp các giá trị x tìm được từ hệ trên sẽ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 20.11. Giải phương trình

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x-1}{2} \right].$$

Giải.

Đặt $\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x-1}{2} \right] = t$ ($t \in \mathbb{Z}$). Theo tính chất 10) ta có

$$\left| \frac{2x-1}{3} - \frac{x-1}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x-5}{6} < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 11. \text{ Khi đó}$$

$$\begin{cases} 0 < \frac{x+1}{2} < 6 \\ -1 < \frac{2x-1}{3} < 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \left[\frac{x+1}{2} \right] \leq 5 \\ -1 \leq \left[\frac{2x-1}{3} \right] \leq 6 \end{cases}. \text{ Suy ra } t \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Với } t = 0 \text{ thì } \left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{2x-1}{3} < 1 \\ 0 \leq \frac{x+1}{2} < 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Với } t = 1 \text{ thì } \left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq \frac{2x-1}{3} < 2 \\ 1 \leq \frac{x+1}{2} < 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < \frac{7}{2} \\ 1 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3. \end{aligned}$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ thì } \left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq \frac{2x-1}{3} < 3 \\ 2 \leq \frac{x+1}{2} < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2} \leq x < 5 \\ 3 \leq x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq x < 5.$$

$$\text{Với } t = 3 \text{ thì } \left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq \frac{2x-1}{3} < 4 \\ 3 \leq \frac{x+1}{2} < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x < \frac{11}{2} \\ 5 \leq x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < \frac{11}{2}.$$

$$\text{Với } t = 4 \text{ thì } \left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq \frac{2x-1}{3} < 5 \\ 4 \leq \frac{x+1}{2} < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{2} \leq x < 8 \\ 7 \leq x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 7 \leq x < 8.$$

$$\text{Với } t = 5 \text{ thì } \left[\frac{2x-1}{3} \right] = \left[\frac{x+1}{2} \right] = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq \frac{2x-1}{3} < 6 \\ 5 \leq \frac{x+1}{2} < 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 \leq x < \frac{19}{2} \\ 9 \leq x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow 9 \leq x < \frac{19}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $[0,5; 1) \cup [2; 3) \cup [3,5; 5,5] \cup [7; 8) \cup [9; 9,5)$.

4. Dạng 4. Phương trình chứa nhiều dấu phần nguyên

Phương pháp : Sử dụng tính chất của phần nguyên, phân tích đa thức thành nhân tử, đặt ẩn phụ (nếu cần) để đưa về các dạng 1, 2, 3.

Ví dụ 20.12. Giải phương trình

$$[x] + [2x] + [3x] + \dots + [2009x] = 4036082.$$

Giải.

Nhận xét rằng

$[x] \leq x < [x] + 1$ suy ra $k[x] \leq kx < k[x] + k$ nên $k[x] \leq [kx] \leq k[x] + k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).

Do đó thay $k = 1, 2, \dots, 2009$ rồi cộng theo vế ta có

$$2019045 [x] \leq [x] + [2x] + \dots + [2009x] \leq 2019045[x] + 2017036.$$

$$2019045 [x] \leq 4036082 \leq 2019045[x] + 2017036.$$

Lại có $4036082 = 2019045 + 2017037$. Do đó phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 20.13. Giải phương trình

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] - [x^2] = [-x^2].$$

Giải.

Áp dụng tính chất 13) ta có

$$[-x^2] = \begin{cases} -[x^2] & \text{khi } x^2 \in \mathbb{Z} \\ -[x^2] - 1 & \text{khi } x^2 \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Nếu x^2 là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2x-1}{3} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 2.$$

Mà x^2 là số nguyên nên $x \in \{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}\}$.

- Nếu x^2 không là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] = -1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2x-1}{3} + 1 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq x < \frac{1}{2}.$$

Mà x^2 không nguyên nên phải loại $x = -1$, $x = 0$ và $x = \sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \{1; \sqrt{3}\}$.

III. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA DẤU PHẦN NGUYÊN

Khi giải bất phương trình có chứa dấu phần nguyên, ta thường đặt biểu thức $[f(x)] = t$ (t nguyên) để chuyển về giải bất phương trình không còn chứa dấu phần nguyên, rồi vận dụng định nghĩa và tính chất của phần nguyên để tìm ra nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 20.14. Giải bất phương trình

$$[x + 2] > 5.$$

Giải.

Cách 1. Nhận xét rằng $[a] > b$ (b nguyên) khi và chỉ khi $a \geq b + 1$.

Ta có $[x + 2] > 5$ khi và chỉ khi $x + 2 \geq 6$. Do đó $x \geq 4$.

Cách 2. Đặt $[x + 2] = t$ (t là số nguyên) thì có $t > 5$. Do vậy $t \in \{6; 7; 8; \dots\}$.

Từ $[x + 2] = t$ suy ra $t \leq x + 2 < t + 1$, suy ra $t - 2 \leq x < t - 1$, $t \in \{6; 7; 8; \dots\}$.

Vậy $x \geq 4$. Bất phương trình có vô số nghiệm $x \geq 4$.

Ví dụ 20.15. Giải bất phương trình

$$2[x]^2 - 9[x + 1] + 16 < 0.$$

Giải.

Áp dụng tính chất 4) ta có $[x + 1] = [x] + 1$. Biến đổi bất phương trình thành

$$2[x]^2 - 9[x] + 7 < 0.$$

Đặt $[x] = t$ (t là số nguyên) thì có $2t^2 - 9t + 7 < 0$ suy ra $1 < t < 3,5$ mà t nguyên nên $t \in \{2; 3\}$.

Với $t = 2$ thì $[x] = 2$ suy ra $2 \leq x < 3$.

Với $t = 3$ thì $[x] = 3$ suy ra $3 \leq x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2; 4)$.

Ví dụ 20.16. Giải bất phương trình

$$[2x] > [x].$$

Giải.

Cách 1. Đặt $[x] = t$ (t là số nguyên) thì $t \leq x < t + 1$ suy ra $2t \leq 2x < 2t + 2$.

Do đó $[2x] = 2t$ hoặc $2t + 1$.

• Với $[2x] = 2t$ thì $0 \leq \{x\} < 0,5$ và $2t > t \Leftrightarrow t > 0$, mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x \geq 1$.

• Với $[2x] = 2t + 1$ thì $0,5 \leq \{x\} < 1$ ta có $2t + 1 > t \Leftrightarrow t > -1$, mà t nguyên nên t là số tự nhiên. Dẫn đến $x \geq 0$.

Kết hợp với $0,5 \leq \{x\} < 1$ dẫn đến $x \geq 0,5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 0,5$.

Cách 2. Nhận xét rằng $[a] > [b]$ khi và chỉ khi $a > b$ và $[a] \neq [b]$.

Ta có $[2x] > [x] \Leftrightarrow 2x > x$ và $[2x] \neq [x] \Leftrightarrow x > 0$ và $[2x] \neq [x]$.

Trước hết ta tìm x sao cho $[2x] = [x]$.

Đặt $[2x] = [x] = t$ (t nguyên) ta có

$$|2x - x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \text{ suy ra } 0 < x < 1 \text{ nên } [x] = 0.$$

Với $t = 0$ thì $[x] = [2x] = 0$ suy ra $0 \leq 2x < 1$ nên $0 \leq x < 0,5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 0,5$.

BÀI TẬP

20.1. Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho $(100!)^k$ chia hết cho 10^{100} .

20.2. Tìm số tự nhiên n sao cho

$$\left[\sqrt[3]{1} \right] + \left[\sqrt[3]{2} \right] + \dots + \left[\sqrt[3]{x^3 - 1} \right] = 400.$$

20.3. Giải phương trình

$$x[x] + 3x - \{x\} + 2 = 0.$$

20.4. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 8[x] + 7 = 0$;

b) $\left[\frac{1-x}{2} \right] + \left[1 - \frac{x}{2} \right] = \frac{1-3x}{8}.$

20.5. Giải phương trình

$$20\left(x+37-\left[\frac{x+37}{3}\right]\right)=x.$$

20.6. Giải phương trình

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2012}\right] + \dots + \left[x + \frac{2011}{2012}\right] = 2x + 1005.$$

20.7. Giải các bất phương trình

a) $\left[\frac{2x-5}{9}\right] < 10;$

b) $\left[\frac{3x-5}{7}\right] > x;$

c) $\left[\frac{2x+1}{2}\right] + [x+1] \leq \frac{6x+5}{2};$

d) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[2x + \frac{1}{2}\right] + \left[4x + \frac{1}{2}\right] + \left[8x + \frac{1}{2}\right] \geq 100,1.$

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

CHUYÊN ĐỀ 1

1.1. ĐS. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.2. $T = \sqrt{18} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{(4-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} = 4$.

1.3. Đặt $T = \sqrt{10+2\sqrt{24}} - \sqrt{10-2\sqrt{24}}$. Ta có

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{10+4\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{(2+\sqrt{6})^2} - \sqrt{(\sqrt{6}-2)^2} \\ &= 2+\sqrt{6} - (\sqrt{6}-2) = 4. \end{aligned}$$

1.4. ĐS. $T = 1$.

1.5. ĐS. $ab = \sqrt{2}$.

1.6. Ta có

$$\frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} + \frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4} + \frac{16(\sqrt{5}+3)}{5-9} = \sqrt{5}+1+3(\sqrt{5}+2)-4(\sqrt{5}+3) = -5.$$

1.7. Đặt $T = \left(\frac{2}{\sqrt{6}-1} + \frac{3}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{\sqrt{6}-3} \right) \cdot \frac{5}{9\sqrt{6}+4}$. Ta có

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{2(\sqrt{6}+1)}{6-1} + \frac{3(\sqrt{6}+2)}{6-4} + \frac{3(\sqrt{6}+3)}{6-9} \right) \cdot \frac{5}{9\sqrt{6}+4} \\ &= \left(\frac{2(\sqrt{6}+1)}{5} + \frac{3(\sqrt{6}+2)}{2} - (\sqrt{6}+3) \right) \cdot \frac{5}{9\sqrt{6}+4} \\ &= \left(\frac{4(\sqrt{6}+1)}{10} + \frac{15(\sqrt{6}+2)}{10} - \frac{10(\sqrt{6}+3)}{10} \right) \cdot \frac{5}{9\sqrt{6}+4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.8. ĐS. $f(3) = 8\sqrt{\frac{2}{5}} - 2\sqrt{3}$.

1.9.
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}{(x+1) - (x-1)}$$

$$= \frac{x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}.$$

Vì $a = \frac{4}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ nên $f(a) = \sqrt{3} + \sqrt{3-1} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

CHUYÊN ĐỀ 2

2.1. ĐS. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.2. Ta có $a^3 = 2 + 3a\sqrt[3]{-10}$ nên $(a^3 - 2)^3 = 27a^3(-10)$.

Vậy $a^9 - 6a^6 + 28a^3 = 8$.

2.3. a) Ta có $(1 + 2\sqrt{6})^2 = 25 + 4\sqrt{6}$. Vậy $\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} = 0$.

Do đó $a = 1$. Đa thức $p(x) = x - 1$ là đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm.

b) Ta có $f(a) = \sum_{k=1}^{2012} k + 2012 = \frac{2012 \cdot 2015}{2} = 2027090$.

2.6. ĐS. $T = \sqrt[3]{a} + \sqrt{a}$.

2.7. Đặt $u = a^4$, $v = b^6$ với $a, b > 0$. Ta có

$$T = \frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}} + 3\sqrt[3]{v} = \frac{a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4}{a^2 - 2b^2 + 2ab} + 3b^2.$$

$$\text{Vậy } T = \frac{a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4}{a^2 - 2b^2 + 2ab} + 3b^2 = \frac{a^4 - 5a^2b^2 - 2b^4 + 6ab^3}{a^2 - 2b^2 + 2ab} = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = |\sqrt[4]{u} - \sqrt[6]{v}| + \sqrt[6]{v}.$$

Vì $u^3 \geq v^2$ nên $|\sqrt[4]{u} - \sqrt[6]{v}| + \sqrt[6]{v} = \sqrt[4]{u}$. Như vậy $u = 1$ nếu

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

$$\text{Với } u = 1 \text{ ta có } T = \sqrt{\frac{1 - 8\sqrt[6]{v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{1 - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[6]{v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v}.$$

$$\text{Nếu } 1 - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[6]{v} = 0 \text{ thì } \sqrt[3]{v} = \frac{3+1}{2} > 1.$$

Do đó $v^2 > 1 = u^3$: mâu thuẫn, suy ra $1 - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[6]{v} \neq 0$.

Tóm lại với $u^3 \geq v^2$ và $u, v \in \mathbb{Q}^+$, để

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1$$

cần và đủ là $u = 1$ và $v < 1$, $v \in \mathbb{Q}^+$ được lấy tùy ý.

CHUYÊN ĐỀ 3

$$3.1. \text{ Vì } T = \frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{64})}{1-a} = \frac{1-a^{128}}{1-a}.$$

$$\text{Nên } T = \frac{1-a^{128}}{1-a} \leq \frac{1}{1-a}.$$

$$3.2. \text{ Vì } 1 - (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2 \geq 0$$

nên $lac + bdl \leq 1$.

3.3. Không mất tính tổng quát có thể giả thiết $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi đó $2 \leq a \leq 4$.

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+c)^2 - 2bc \leq a^2 + (6-a)^2 = 2a^2 - 12a + 36.$$

$$\text{Như vậy } a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(a^2 - 6a + 18) = 2[(a-2)(a-4) + 10] \leq 20.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 4, b = 2, c = 0$.

$$3.4. \text{ Xét } T = a^4 + b^4 + c^4 - a^3b - b^3c - c^3a$$

$$= a^3(a-b) + b^3(b-c) + c^3(c-a)$$

$$= a^3(a-b) + b^3(b-c) - c^3[(a-b) + (b-c)]$$

$$= (a-b)(a^3 - c^3) + (b-c)(b^3 - c^3) \geq 0.$$

$$\text{Do đó có } a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a.$$

$$3.5. \text{ Vì } a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ và } 1+ab \geq 2\sqrt{ab} \text{ nên } (a+b)(1+ab) \geq 4ab.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

$$3.6. \text{ Vì } 1 = (a+b+c)^2 = [a + (b+c)]^2 \geq 4a(b+c) \text{ nên ta có ngay}$$

$$b+c = 1, (b+c) \geq 4a(b+c)(b+c) \geq 4a \cdot 4bc = 16abc.$$

$$3.7. \text{ Vì } a^2 + a + 2 = (a^2 + a + 1) + 1 \geq 2\sqrt{a^2 + a + 1} \text{ nên } \frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $a = 1$.

CHUYÊN ĐỀ 4

$$4.1. \text{ ĐS. Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật bằng } \frac{p^2}{16} \text{ khi nó là hình vuông.}$$

$$4.2. \text{ ĐS. Thể tích lớn nhất của hình hộp chữ nhật bằng } \frac{p^3}{27} \text{ khi nó là hình lập phương.}$$

- 4.3. ĐS. Thể tích lớn nhất của chiếc thùng bằng $\frac{2}{27}m^3$ khi cắt 4 góc bốn hình vuông cạnh $\frac{1}{6}m$.
- 4.4. ĐS. $f_{\min} = 1$ tại $x = \frac{1}{2}$.
- 4.5. ĐS. $T_{\max} = 3$ khi $a = b = c = 1$.
- 4.6. ĐS. $T_{\max} = 1$ khi $a = b = c = 1$.
- 4.7. ĐS. $T_{\max} = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.
- 4.8. ĐS. $T_{\max} = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 2$ và $T_{\min} = \frac{3}{4}$ khi $a = b = c = 1$.

CHUYÊN ĐỀ 5

- 5.1. ĐS. Phương trình vô nghiệm.
- 5.2. ĐS. Nếu $m < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

$$\text{Nếu } m \geq 0 \text{ thì } x = \frac{m^2 + 7}{5}.$$

- 5.3. ĐS. $x = 8$.
- 5.4. ĐS. $x = 3$.
- 5.5. ĐS. $x = \frac{7 \cdot 2^6 - 3}{2^6 - 1}$ và $x = \frac{7 \cdot 4^6 - 3}{4^6 - 1}$.
- 5.6. ĐS. $x = 0$ và $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.
- 5.7. ĐS. $x = -6$; $x = -5,5$ và $x = -5$.
- 5.8. ĐS. $x = 1$ và $x = -6$.
- 5.9. ĐS. $x = 1$.
- 5.10. ĐS. $x = -1$.
- 5.11. ĐS. $x = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

CHUYÊN ĐỀ 6

6.1. ĐS. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

6.2. ĐS. $[-1; 1]$.

6.3. ĐS. Không có giá trị a nào.

6.5. ĐS. a) $y = \sqrt{3}$; b) $y = \sqrt{x^2 + n}$.

6.6. ĐS. Tập xác định là $[0; +\infty)$ và có duy nhất một cặp số nguyên $(0; 0)$ thuộc đồ thị hàm số.

6.11. ĐS. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}; T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

6.12. ĐS. a) Hàm số chẵn; b) Hàm số lẻ.

6.13. ĐS. $y = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

6.14. ĐS. $A_{k+1} = \frac{a^{n-k} - 1}{a^{k+1} - 1} \cdot \frac{a^{n-2} - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{a^{n-1} - 1}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot a^{1+2+\dots+k+1}$.

CHUYÊN ĐỀ 7

7.4. a) ĐS $y = \begin{cases} 17-x & \text{khi } x \leq 0 \\ 17-9x & \text{khi } 0 < x \leq 1 \\ 11-3x & \text{khi } 1 < x \leq 7 \\ x-17 & \text{khi } x > 7 \end{cases}$.

b) Khi $m < -10$ thì phương trình vô nghiệm; khi $m \geq -10$ thì phương trình có nghiệm.

7.5. ĐS. a) $y = \begin{cases} -3x+2 & \text{khi } x \leq -1 \\ -x+4 & \text{khi } -1 < x \leq 1 \\ x+2 & \text{khi } 1 < x \leq 2 \\ 3x-17 & \text{khi } x > 2 \end{cases} \quad y_{\min} = 3 \text{ khi } x = 1.$

b) Khi $m < 3$ thì phương trình vô nghiệm; khi $m \geq 3$ thì phương trình có nghiệm.

c) Không có giá trị nào của m để phương trình có vô số nghiệm.

7.6. HD. Điều kiện $x \neq 0$. Vì hàm số ở vế trái là hàm số lẻ nên chỉ cần xét $x > 0$.
Từ đó suy ra : Khi $|m| < 1$ thì phương trình vô nghiệm;

Khi $|m| \geq 1$ thì phương trình có nghiệm $x = -\frac{5}{m}$; $x = -5m$.

7.9. ĐS. $m > 2$.

7.10. ĐS. $m = 10$.

CHUYÊN ĐỀ 8

8.5. ĐS. a) $M(5 \pm 2\sqrt{2}; 0)$; b) $N(0; -5 \pm 2\sqrt{2})$.

8.6. ĐS. $m = 2 \pm \sqrt{2}$.

8.7. ĐS. Khoảng cách $h(A, d_m) = 1$. Vậy (d_m) luôn tiếp xúc với đường tròn tâm A, bán kính 1.

8.8. ĐS. Không có điểm A.

CHUYÊN ĐỀ 9

9.1. ĐS. 45° .

9.2. ĐS. 135° .

9.4. ĐS. $a = \sqrt{3}$.

9.5. ĐS. Phương trình OH : $y = \frac{2}{3}x$. Đường thẳng OH đi qua trung điểm đoạn

CD khi và chỉ khi $m = \frac{20}{3}$.

9.6. Vì $a^2 + 4m_1^2 = 2b^2 + 2c^2$; $b^2 + 4m_2^2 = 2c^2 + 2a^2$ và $c^2 + 4m_3^2 = 2a^2 + 2b^2$
 nên $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$.

9.7. ĐS. $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1}$ và hệ số góc $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

CHUYÊN ĐỀ 10

10.3. ĐS. $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

10.4. ĐS. $x = 5t - 2$; $y = 123t - 51$ với $t \in \mathbb{Z}$.

10.5. a) $m = -\frac{7}{4}$; b) $m = 3$.

10.6. ĐS. Đặt $u = x - 12$; $v = y - 17$. Ta có $u + v = 100 - 29 = 71$ với $u, v \geq 0$ và nguyên. Số cặp $(u; v)$ thoả mãn phương trình là 72. Do vậy số cặp số nguyên cần tìm là 72.

10.7. ĐS. Đặt $u = x - 1$; $v = y - 7$. Ta có $u + v + z = 2004$ với $u, v, z \geq 0$ và nguyên. Vậy số bộ ba số cần tìm bằng

$$1 + 2 + \dots + 2005 = \frac{2005 \cdot 2006}{2}.$$

10.8. HD. Phương trình tổng quát

$$kx + (k+1)y = n - k + 1 \text{ hay } k(x + y + 1) + y = n + 1.$$

Kí hiệu $t = x + y + 1$, ta có

$$y = n + 1 - kt, x = t - 1 - y = t - 1 - (n + 1) + kt = (k + 1)t - (n + 2).$$

Vì x, y nguyên không âm nên t nguyên và $\frac{n+2}{k+1} \leq t \leq \frac{n+1}{k}$. Tính số nghiệm t .

10.9. HD. Phương trình tổng quát $k^2x + (k+1)^2y = [(k+1)^2 - k^2]n - k^2$

với $k = 1, 2, \dots, n$.

Kiểm tra $x = -n - 1$, $y = n$ là một nghiệm.

Khi đó tất cả các nghiệm có dạng

$$x = -(n + 1) + (s + 1)^2 t, y = n - s^2 t$$

với t nguyên và s là một trong các số thừa nhận được của k .

Vì x, y nguyên không âm nên t nguyên thỏa mãn $\frac{n+1}{(s+1)^2} \leq t \leq \frac{n}{s^2}$.

Tính số nghiệm t .

CHUYÊN ĐỀ 11

11.3. ĐS. a) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq \frac{2}{3}$.

b) $x + 2y + 3 = 0$.

11.4. ĐS. a) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq -8$.

b) Khi $m \neq -8$ thì $T_{\min} = 0$; còn khi $m = -8$ thì $T_{\min} = \frac{36}{17}$.

11.5. HD. Ta có $x(a^2 + b^2) = a(a + b - 2b^2)$ và $y(a^2 + b^2) = b(2a^2 + a + b)$.

Nếu $a^2 + b^2 \neq 0$ thì hệ có một nghiệm $\left(\frac{a(a + b - 2b^2)}{a^2 + b^2}; \frac{b(2a^2 + a + b)}{a^2 + b^2} \right)$.

Nếu $a^2 + b^2 = 0$ thì hệ có vô số nghiệm.

11.6. HD. Từ hai phương trình đầu suy ra

$$x(ac - b^2) = c^2 - ab, y(ac - b^2) = a^2 - bc.$$

$$\text{Vậy } b(ac - b^2) = cx(ac - b^2) + ay(ac - b^2) = c(c^2 - ab) + a(a^2 - bc).$$

11.7. ĐS. (2 ; 2 ; 2).

11.8. HD. Rút z từ phương trình đầu và thế vào hai phương trình còn lại.

11.9. ĐS. (7 ; 5 ; 6).

- 11.10. ĐS. (4 ; 18 ; 78), (8 ; 11 ; 81), (12 ; 4 ; 84) và nếu chấp nhận không có con trâu đúng nào thì có thêm một đáp số nữa là (0 ; 25 ; 75).

CHUYÊN ĐỀ 12

12.1. ĐS. $AB = 3\sqrt{2}$.

12.4. ĐS. $M\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$ và $N\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{3}{2}\right)$.

12.5. ĐS. Có thể, chẳng hạn $A(-\sqrt{3}; 3)$, $B(\sqrt{3}; 3)$ và $C(0; 0)$.

12.6. ĐS. Không thể.

CHUYÊN ĐỀ 13

13.1. ĐS. $x = \frac{8}{5}; x = \frac{6}{11}$.

13.2. ĐS. Vô nghiệm.

13.3. ĐS. Khi $a = 0$ thì $x = \frac{3}{5}$. Khi $a \neq 0$, xét dấu $\Delta = 25 - 24a$.

13.4. ĐS. $m = \frac{71 \pm \sqrt{1072}}{27}$.

13.5. ĐS. Không có m.

13.6. HD. Xét $a = 0$ và $a \neq 0$.

13.7. HD. Cách 1: Tách $a = 7 + \sqrt{3} + 7 - \sqrt{3}$.

Cách 2: $a^2 = 196$.

13.8. ĐS. $x^2 - 5ax + 6a^2 + b = 0$.

13.9. HD. Để phương trình có nghiệm cần và đủ là $a^2 \geq 4$.

$$\text{Vì } T = a^2(a^2 - 4) + 2 \geq 2.$$

Vậy $T_{\min} = 2$ khi $a = \pm 2$.

13.10. ĐS. $T = (a + b)^2$; $S = b(a + b)$.

13.11. HD. Nếu cả ba phương trình vô nghiệm thì $a^2 + b^2 + c^2 < 4(b + c + d)$.

$$\text{Vậy } ab + 2(b + c + d) > \frac{(a + b)^2 + c^2}{2} \geq c(a + b) : \text{mâu thuẫn.}$$

13.12. ĐS. Tương tự như bài 13.11.

13.13. ĐS. $4(x_1 + x_2) = 3x_1 \cdot x_2$.

CHUYÊN ĐỀ 14

14.1. ĐS. $x = -4$; $x = 1$.

14.2. ĐS. $x = -1$.

14.3. ĐS. $c \geq \frac{(a - b)^4}{8}$.

14.4. HD. Đưa về phương trình $t^2 + at + b - 2 = 0$ có nghiệm.

14.6. HD. Đặt $2d = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 > 0$.

Khi đó $x_4 = x_3 + 2d$; $x_1 = x_2 - 2d$ và $x_2 = -d$; $x_3 = d$.

Vì $x^4 - (3m + 4)x^2 + 12m$ là hàm chẵn.

Vậy nghiệm của phương trình là $-3d, -d, d, 3d$ với $d > 0$.

Từ đó suy ra $m = 12$ hoặc $m = \frac{4}{7}$. Thử lại.

14.9. HD. Chia hai vế cho x^2 và đặt $t = x + \frac{1}{x}$.

Khi đó $at + b - 2 = t^4$ với $|t| \geq 2$ và suy ra $a^2 + (b-2)^2 \geq \frac{t^4}{t^2+1}$ với $t^2 \geq 4$.

Dễ dàng kiểm tra $\frac{t^4}{t^2+1} \geq \frac{16}{5}$.

14.10. ĐS. $x = 0$; $x = -1$.

14.11. HD. Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2+3x+5}{x^2-4x+5}}$. Khi đó $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$.

Vậy $t = 3$ và $t = \frac{1}{3}$.

Từ đó suy ra x .

14.12. ĐS. $x = \pm\sqrt{3}$.

14.13. ĐS. $x = 1$.

CHUYÊN ĐỀ 15

15.1. HD. Ta có $(x-y)(x+y+3) = 0$ và $x^2 - 3y = a$.

15.2. ĐS. a) $(3; 1)$, $(1; 3)$, $(-3; -1)$, $(-1; -3)$.

b) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a \geq 8$.

c) Hệ có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $a = 8$.

15.3. ĐS. a) $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a \geq 2$

c) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a = 2$ hoặc $a > 4$.

d) Không có.

15.4. ĐS. a) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a \geq 1$.

b) Không có giá trị của a .

15.5. HD. Đặt $t = x + y$. Khi đó $t^2 + t - 6 = 0$.

15.10. ĐS. $(3; 1), (1; 3), (-3; -1), (-1; -3)$.

15.11. ĐS. $(2; -5)$.

15.12. ĐS. $(3; 1), (1; 3), (-3; -1), (-1; -3)$.

15.13. ĐS. $(1; 2), (2; 1)$.

CHUYÊN ĐỀ 16

16.1. ĐS. Hệ có hai nghiệm $(4; 1)$ và $(1; 4)$.

16.2. ĐS. Hệ có hai nghiệm $(2; 1)$ và $(-2; -1)$.

16.3. ĐS. Hệ có hai nghiệm $(64; 1)$ và $(1; 64)$.

16.4. ĐS. $x_{\max} = -69$.

16.5. ĐS. Hệ có hai nghiệm $(1; 0)$ và $(0; 1)$.

16.6. ĐS. $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; +\infty\right)$.

16.7. ĐS. $x = y = z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

16.8. ĐS. Hệ vô nghiệm.

16.9. ĐS. Hệ có hai nghiệm $(4; -3; 0)$ và $(2; -1; 2)$.

16.10. ĐS. Hệ có hai nghiệm $(2; -3; 3)$ và $(1; 0; 0)$.

16.11. ĐS. Hệ có một nghiệm $(-1; -1; -1)$.

16.12. ĐS. Hệ có một nghiệm: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

16.13. ĐS. Hệ có 6 nghiệm

$(1; -1; 2), (1; 2; -1), (-1; 1; 2), (2; 1; -1), (-1; 2; 1), (2; -1; 1)$.

16.14. ĐS. Hệ có hai nghiệm $(0; 0; 0)$ và $(1; 1; 1)$.

16.15. ĐS. Hệ có một nghiệm $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

16.16. ĐS. x_0 lớn nhất bằng 6 khi $a = 1$.

16.17. ĐS. x_0 nhỏ nhất bằng 1 khi $a = -4$.

16.18. ĐS. x_0 lớn nhất bằng 6 khi $a = 2, b = 1$.

CHUYÊN ĐỀ 17

17.2. HD. Ta có $y = \frac{c - ax}{b}$. Khi đó $\left(\frac{c - ax}{b}\right)^2 + r \cdot \frac{c - ax}{b} + s = 0$

hay $(c - ax)^2 + rb(c - ax) + sb^2 = 0$. Từ đây suy ra hệ :

$$\begin{cases} x^2 + px + q = 0 \\ x^2 - \frac{br - 2c}{a} \cdot x + \frac{c^2 + rbc + sb^2}{a^2} = 0. \end{cases}$$

17.3. HD. Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Ta có $(d + a)^2 - a^3d = 0$: mâu thuẫn vì $ad < 0$.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

17.4. HD. Giả sử phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $x \neq 0$ và khi chia hai vế cho x^2 được : $x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$.

Đặt : $t = x + \frac{1}{x}$. Ta có $|t| \geq 2$ và $t^2 + at + b - 2 = 0$. Từ đây suy ra $at + b = 2 - t^2$

với $|t| \geq 2$.

Theo bất đẳng thức Bu-nhia-kốpx-ki ta có :

$$(a^2 + b^2)(t^2 + 1) \geq (at + b)^2 = (2 - t^2)^2.$$

$$\text{Vậy : } a^2 + b^2 \geq \frac{t^4 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1}.$$

Bất đẳng thức $\frac{t^4 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1} \geq \frac{4}{5}$ tương đương $(t^2 - 4)(5t^2 - 4) \geq 0$: đúng.

Điều này chỉ ra $\frac{4}{5} > a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$: mâu thuẫn.

Như vậy, phương trình không có nghiệm.

17.5. HD. Giả sử cả ba phương trình đều vô nghiệm.

Khi đó ta có ngay : $\Delta_1 = a^2 - 4b < 0$, $\Delta_2 = b^2 - 4c < 0$ và $\Delta_3 = c^2 - 4d < 0$.

Từ đây suy ra :

$$ab + 2(b + c + d) > ab + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{(a + b)^2 + c^2}{2} \geq c(a + b).$$

Như vậy $ab + 2(b + c + d) > c(a + b)$: mâu thuẫn.

Điều này chứng tỏ có ít nhất một $\Delta_i \geq 0$ và như vậy tồn tại phương trình có nghiệm.

17.6. HD. Cộng ba phương trình ta có

$$\frac{a}{x+y} + \frac{b}{y+z} + \frac{c}{z+x} = 3.$$

Vậy $\frac{a}{x+y} = \frac{b}{y+z} = \frac{c}{z+x} = 1$. Dễ dàng suy ra nghiệm

$$x = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}; \quad y = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2c}; \quad z = -\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

17.7. HD. Ta có

$$x = \frac{1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}; \quad y = \frac{1}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}; \quad z = \frac{1}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

$$\text{Vậy } T = \frac{1}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

CHUYÊN ĐỀ 18

18.1. ĐS. a) $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) $7-2\sqrt{5} < x < 7+2\sqrt{5}$.

18.2. ĐS. Giải $m-1 > 0$ và $\Delta' = 1-(m-1) < 0$ được $m > 2$.

18.3. a) $\Delta' = m^2 - 3m - 1$.

Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ hoặc } m \geq \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

b) Điều kiện để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu là

$$\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow 3m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}.$$

c) Điều kiện để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt cùng dấu là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 1 < 0 \\ 3m+1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ hoặc } m > \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < \frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ hoặc } m > \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

18.4. $A = x^2 - (m+1)x + 1$.

$$\Delta = (m+1)^2 - 4 = m^2 + 2m - 3.$$

$$A \geq 0 \text{ với mọi } x \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m+3)(m-1) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.$$

18.5. Ta có $A \leq 2 \Leftrightarrow 2 - A \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4mx + (m+3) \geq 0$.

Điều kiện để $2 - A \geq 0$ với mọi x và xảy ra được $2 - A = 0$ là $\Delta' = 0$.

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -\frac{3}{4}.$$

• Với $m = 1$ thì $A = -x^2 + 4x - 2 = 2 - (x - 2)^2 \leq 2$;

$\max A = 2$ tại $x = 2$.

• Với $m = -\frac{3}{4}$ thì $A = -x^2 - 3x - \frac{1}{4} = 2 - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \leq 2$;

$\max A = 2$ tại $x = -\frac{3}{2}$.

18.6. • Ta có $A \geq 1 \Leftrightarrow A - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + mx + (n-1) \geq 0$.

Điều kiện để $A - 1 \geq 0$ với mọi x và xảy ra được $A - 1 = 0$ là

$$\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4n + 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4n - 4. \quad (1)$$

• Ta có $A \leq 3 \Leftrightarrow A - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + mx + (n-3) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - (n-3) \geq 0$.

Giải $\Delta_2 = 0$ được $m^2 = 12 - 4n$. (2)

• Từ (1) và (2) ta tìm được $m = \pm 2, n = 2$.

CHUYÊN ĐỀ 19

19.1. a) Biến đổi phương trình về dạng $(2x + 3y - 5)(-2x + 4y - 2) = 24$.

Dùng nhận xét theo phương pháp phân tích, ta tìm được các nghiệm nguyên $(x; y)$ là

$$(-2; -1), (3; -1), (-1; 3), (4; 3).$$

b) Cách 1. Coi phương trình là bậc hai đối với x (y là tham số)

$$3x^2 + 10yx + (8y^2 - 21) = 0.$$

Phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta = y^2 + 63 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$\Leftrightarrow (y + k)(y - k) = -63$. Sử dụng nhận xét tìm y, k từ đó tìm được x .

Các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là

$(-41; 31), (41; -31), (1; -1), (-1; 1), (-11; 9), (11; -9), (19; -9), (-19; 9).$

Cách 2. Có thể biến đổi phương trình về dạng $(x + 2y)(3x + 4y) = 21$ rồi nhận xét.

19.2. Theo bài ra ta có $2^x + 65 = k^2$ (k nguyên dương, $k > 8$).

Nếu x lẻ thì 2^x có tận cùng là 2 hoặc 8, nên $2^x + 65$ có tận cùng là 7 hoặc 3 không thể là số chính phương. Vậy x là số chẵn.

Đặt $x = 2y$ (y nguyên dương), khi đó $(2^y + k)(2^y - k) = -65 = 65 \cdot (-1)$
 $= 13 \cdot (-5).$

Tìm được $x = 4$ hoặc $x = 10$.

19.3. Gọi độ dài ba cạnh của tam giác vuông là x, y, z , với x, y, z là các số tự nhiên và $x \leq y < z$. Theo bài ra và định lý Py-ta-go ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 & (1) \\ xy = 2(x + y + z) & (2) \end{cases}$$

Từ (2) rút z theo x, y và thay vào (1) ta có

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{xy}{2} - x - y \right)^2 \Leftrightarrow xy - 4x - 4y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4x - 8}{x - 4} = 4 + \frac{8}{x - 4}.$$

Từ đó tìm được $(x; y; z) = (5; 12; 13)$, và $(x; y; z) = (6; 8; 10)$.

19.4. Gọi x là số nguyên đầu tiên và số 2012 viết thành tổng của k số nguyên liên tiếp. Ta có

$$x + (x + 1) + \dots + (x + k - 1) = 2012 \Leftrightarrow (2x + k - 1)k = 4024.$$

Nhận thấy $2x + k - 1$ và k khác tính chẵn lẻ và k là số nguyên dương, mà $4024 = 8 \cdot 503 = 4024 \cdot 1$ nên xảy ra bốn khả năng :

k	1	8	503	4024
x	2012	248	-247	-2011

$$\begin{aligned} \text{Do vậy } 2012 &= 248 + 249 + \dots + 255 = (-247) + (-246) + \dots + 255 \\ &= (-2011) + (-2010) + \dots + 2012. \end{aligned}$$

19.5. a) Biến đổi phương trình về dạng

$$(x-y)^2 + (x+z)^2 + z^2 = 12 = 4 + 4 + 4.$$

Tìm được $(x; y; z)$ là $(-4; -6; 2)$, $(0; 2; 2)$, $(0; -2; 2)$, $(-4; -2; 2)$,
 $(0; 2; -2)$, $(0; -2; -2)$, $(4; 6; -2)$, $(4; 2; -2)$.

b) Biến đổi phương trình về dạng

$$(x+y+z+t)^2 + (y+z-t)^2 + (z-t)^2 + t^2 = 10 = 4 + 4 + 1 + 1.$$

19.6. Rút x theo y ta có $x = \frac{243y}{(y+1)^2}.$

Do $(y, y+1) = 1$ nên 243 chia hết cho $(y+1)^2$.

Vì vậy $(y+1)^2 = 3^2$ hoặc 9^2 (do $y+1 > 1$).

Tìm được $(x; y)$ là $(54; 2)$, $(24; 8)$.

**19.7. Với $x = 0$ thì vế trái của phương trình bằng 0, còn vế phải bằng 12 (vô lí).
 Vậy $x \neq 0$. Rút y theo x, ta có**

$$y^2 = \frac{x^2 + x + 12}{x} = x + 1 + \frac{12}{x}.$$

Nhận thấy 12 chia hết cho x. Thử thấy các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là

$$(2; 3), (2; -3), (6; 3), (6; -3).$$

19.8. Biến đổi $(3x^2 + 5x - 8).y = x^2 + 10x + 4$.

Nếu $3x^2 + 5x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (do x nguyên) thì vế phải bằng 15, vô lí.

Vậy $3x^2 + 5x - 8 \neq 0$. Rút y theo x được

$$y = \frac{x^2 + 10x + 4}{3x^2 + 5x - 8} = \frac{(x-1)(x+11) + 15}{(x-1)(3x+8)}.$$

Để y nguyên thì suy ra 15 chia hết cho $(x-1)$. Từ đó ta tìm được các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là $(2; 2)$, $(4; 1)$, $(-2; 2)$, $(-4; -1)$.

19.9. Gọi ba số nguyên dương cần tìm là x, y, z (với $1 \leq x \leq y \leq z$).

$$\text{Ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

$$\text{Do } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \leq \frac{3}{x} \text{ nên } 1 < x \leq 3.$$

• Nếu $x = 3$ thì $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \leq \frac{2}{y}$ suy ra $y \leq 3$, mà $y \geq x = 3$ nên $y = 3$, do đó $z = 3$.

• Nếu $x = 2$ thì $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \leq \frac{2}{y}$ suy ra $y \leq 4$, mà $y \geq x = 2$ nên $y \in \{3, 4\}$.

Nếu $y = 3$ thì $z = 6$.

Nếu $y = 4$ thì $z = 4$.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương

$(x; y; z)$ là $(3; 3; 3), (2; 3; 6), (2; 4; 4)$ và các hoán vị của nó.

19.10. Gọi bốn số nguyên dương cần tìm là x, y, z, t (với $1 \leq x \leq y \leq z \leq t$).

$$\text{Ta có } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1.$$

Tương tự lập luận tìm được $x = y = z = t = 2$.

19.11. Nhận thấy

$$1 = \frac{1}{x^2(x^2+y^2)} + \frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)} + \frac{1}{x^2(x^2+y^2+z^2)} < \frac{3}{x^2(x^2+y^2)}$$

suy ra $x^2(x^2+y^2) = 2$, do đó $x = y = 1$.

Từ đó tìm được $z = 1$.

19.12. Gọi độ dài ba đường cao trong tam giác là x, y, z với x, y, z là các số nguyên dương và lớn hơn 2.

$$\text{Ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{r} = 1, \text{ suy ra } x = y = z = 3.$$

Vậy tam giác thoả mãn điều kiện đã cho là tam giác đều.

19.13. Đặt $x = p - 1$, $y = q - 1$, $z = r - 1$, không giảm tổng quát giả sử $1 \leq x < y < z$, ta có

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-1}{xyz} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$$

$$= R(x; y; z), (R(x; y; z) \in \mathbb{N}).$$

Suy ra $R(x; y; z) > 1$ và $R(x; y; z) \leq R(x'; y'; z')$ khi

$$x \geq x' \geq 1, y \geq y' \geq 1, z \geq z' \geq 1.$$

- Nếu $(x+1)(y+1)(z+1)-1$ lẻ thì xyz lẻ, do đó x, y, z đồng thời lẻ.

Với $x \geq 3$ thì $1 \leq R(x; y; z) \leq R(3; 5; 7) = \frac{191}{105} < 2$ nên $R(x; y; z)$ không nguyên.

Xét $x = 1$ thì $1 < R(x; y; z) = R(1; y; z) < R(1; 3; 5) = \frac{47}{15} < 4$.

Vậy $R(x; y; z) = 2$ hoặc $R(x; y; z) = 3$.

+ Nếu $R(1; y; z) = 2$ thì $2yz = 2(y+1)(z+1)-1 \Leftrightarrow 2z + 2y + 1 = 0$ vô lí với y, z là số nguyên dương.

+ Nếu $R(1; y; z) = 3$ thì $3yz = 2(y+1)(z+1)-1 \Leftrightarrow (y-2)(z-2) = 5$.

Tìm được $y = 3, z = 7$. Do đó $p = 2, q = 4, r = 8$.

- Nếu $(x+1)(y+1)(z+1)-1$ chẵn thì $(x+1)(y+1)(z+1)$ lẻ, do đó x, y, z đồng thời chẵn.

Với $x \geq 4$ thì $1 < R(x; y; z) \leq R(4; 6; 8) < 2$ nên $R(x; y; z)$ không nguyên.

Xét $x = 2$ thì $1 < R(x; y; z) = R(2; y; z) < R(2; 4; 6) < 3$, vậy $R(2; y; z) = 2$.

Khi đó $4yz = 3(y+1)(z+1)-1 \Leftrightarrow (y-3)(z-3) = 11$.

Tìm được $y = 4, z = 14$. Do đó $p = 3, q = 5, r = 15$.

Vậy có hai bộ $(p; q; r)$ là $(2; 4; 8), (3; 5; 15)$ thoả mãn.

19.14. a) Biến đổi phương trình về dạng

$$8x^3 + 24x^2 + 24x + 16 = y^3 \Leftrightarrow (2x + 2)^3 + 8 = y^3.$$

Với $x = -2$ thì $y^3 = 0$.

Với $x = -1$ thì $y^3 = 8 \Leftrightarrow y = 2$.

Với $x \geq 0$ hoặc $x < -2$ thì $(2x + 2)^3 < y^3 < (2x + 3)^3$, nên y không nguyên.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-1; 2)$, $(-2; 0)$.

b) Biến đổi phương trình $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$

Với $y \geq 0$ hoặc $y \leq -2$ thì $y^3 < x^3 < (y + 1)^3$, nên x không nguyên.

Với $y = -1$ thì tìm được $x = -1$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất $(x; y) = (-1; -1)$.

c) Chuyển về ta có

$$y^4 = x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1.$$

Nếu $x \neq 0$ hoặc $z \neq 0$ thì $(x^2 + z^2 + 1)^2 < y^4 < (x^2 + y^2 + 2)^2$ nên y không nguyên.

Vậy $x = z = 0$, suy ra $y^4 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -1$.

Do đó phương trình có các nghiệm nguyên $(x; y; z)$ là $(0; 1; 0)$, $(0; -1; 0)$.

19.15. ĐS. $(x; y; z) = (2; 1; 1)$.

19.16. a) Biến đổi phương trình về dạng $(1 + x)(1 + x^2) = 1997^y$.

Suy ra y là số tự nhiên và $1 + x \leq 1 + x^2$. Ta có

$$\begin{cases} 1 + x = 1997^m \\ 1 + x^2 = 1997^n \\ y = mn \quad (m, n \in \mathbb{N}, m < n). \end{cases}$$

Suy ra $1 + (1997^m - 1)^2 = 1997^n \Leftrightarrow 2 + 2 \cdot 1997^m + 1997^{2m} = 1997^n$.

Nếu $n \geq m \geq 1$ thì suy ra 2 chia hết cho 1997, vô lí.

Vậy $m = 0$, tìm được $x = 0, y = 0$.

b) Nếu x là số lẻ thì vế trái chia cho 4 dư 2, còn vế phải chia cho 4 dư 0 hoặc 1. mâu thuẫn. Vậy x là số chẵn. Đặt $x = 2k$ (k nguyên), ta có

$(y - 2^k)(y + 2^k) = 153$. Từ đó sử dụng nhận xét của phương pháp phân tích tìm được $x = 4$, $y = 13$ hoặc $x = 4$, $y = -13$.

19.17. Giả sử phương trình có nghiệm nguyên $(x; y; z)$, ta thấy

$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 71$ chia cho 4 dư 3, suy ra $y^2 + z^2$ chia cho 4 dư 3. Điều này không thể xảy ra, vì bình phương của một số nguyên chia cho 4 dư 0 hoặc 1, do đó $y^2 + z^2$ chia cho 4 dư 0, 1, 2. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

19.18. a) Do phương trình chỉ chứa số mũ chẵn của x, y nên trước tiên ta tìm nghiệm tự nhiên của phương trình.

Giả sử phương trình có nghiệm tự nhiên $(x; y)$, ta có $19(x^2 + y^2) + 9y^2 = 729$.

Suy ra $19(x^2 + y^2) : 3$, mà $(19, 3) = 1$ nên $x^2 + y^2 : 3$, do đó $x : 3$ và $y : 3$.

Đặt $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{N}$), ta có $19(x_1^2 + y_1^2) + 9y_1^2 = 81$.

Lập luận tương tự, có $19(x_2^2 + y_2^2) + 9y_2^2 = 9$ với $x_1 = 3x_2$, $y_1 = 3y_2$ ($x_2, y_2 \in \mathbb{N}$).

$19(x_3^2 + y_3^2) + 9y_3^2 = 9$ với $x_2 = 3x_3$, $y_2 = 3y_3$ ($x_3, y_3 \in \mathbb{N}$).

$19(x_4^2 + y_4^2) + 9y_4^2 = 1$ với $x_3 = 3x_4$, $y_3 = 3y_4$ ($x_4, y_4 \in \mathbb{N}$). Đẳng thức cuối cùng này vô lí.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

19.19. Lập luận tương tự như Ví dụ 19.14. Kết quả như sau

a) $x = y = z = 0$; b) $x = y = z = 0$; c) $x = y = z = t = 0$; d) $x = y = z = t = 0$.

19.20. a) Biến đổi phương trình về dạng $(x - y)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 0$.

Từ đó tìm được $(x; y; z) = (1; 1; -2)$.

b) Biến đổi phương trình về dạng

$$(\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 1)^2 + (\sqrt{z-2} - 1)^2 = 0.$$

Từ đó tìm được $(x; y; z) = (1; 2; 3)$.

19.21. Điều kiện $x > 2, y > 1, z > 5$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có

$$\frac{4}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} \geq 2\sqrt{4} = 4; \quad \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1} \geq 2; \quad \frac{25}{\sqrt{x-5}} + \sqrt{x-5} \geq 2\sqrt{25} = 10.$$

$$\text{Do đó } \frac{4}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{25}{\sqrt{z-5}} - \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1} - \sqrt{z-5} \geq 16.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 6, y = 2, z = 30$.

19.22. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-kôp-xki cho hai bộ số $(x; y; 1)$ và $(1; 1; 1)$ ta có

$$(x + y + 1)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + 1^2) = 3(x^2 + y^2 + 1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Vậy nghiệm nguyên là $(x; y) = (1; 1)$.

19.23. Áp dụng các bất đẳng thức Cô-si và Bu-nhia-kôp-xki ta có

$$48 = x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq \frac{(xy + yz + zx)^2}{3} = \frac{12^2}{3} = 48.$$

Từ đó suy ra $x = y = z = 2$.

CHUYÊN ĐỀ 20

20.1. $100!$ có tận cùng là $\left[\frac{100}{5} \right] + \left[\frac{100}{25} \right] = 24$ chữ số 0.

$(100!)^k$ có tận cùng là $24k$ chữ số 0.

Để $(100!)^k$ chia hết cho 10^{100} thì $24k \geq 100$.

Suy ra $k \geq \frac{100}{24}$, mà k nguyên nên k nhỏ nhất bằng 5.

20.2. Nhận xét $\left[\sqrt[3]{n^3} \right] = \left[\sqrt[3]{n^3 + 1} \right] = \dots = \left[\sqrt[3]{(n+1)^3 - 1} \right] = n.$

Đáp số $x = 5$.

20.3. Biến đổi phương trình như sau

$$x[x] + 2x + [x] + 2 = 0 \Leftrightarrow ([x] + 2)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ [x] + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -2 \leq x < -1. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $[-2; -1]$.

20.4. a) Sử dụng dạng 2, phương trình vô nghiệm.

b) Áp dụng công thức $[a] + [a + 0,5] = [2a]$ ta có

$$[1 - x] = \frac{1 - 3x}{8}, \text{ rồi sử dụng dạng 2 tìm được } x = \frac{1}{3}.$$

20.5. Biến đổi phương trình thành $\left[\frac{x+37}{3} \right] = 19x + 740$, rồi sử dụng dạng 2 tìm được $x = -39$.

20.6. Trước hết ta chứng minh rằng

Nếu n là số nguyên dương thì

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx].$$

Thật vậy, đặt $[x] = m$ ($m \in \mathbb{Z}$). Chọn k là số nguyên dương, $k < n$, sao cho

$$m + \frac{k-1}{n} \leq x < m + \frac{k}{n}. \text{ Khi đó}$$

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-k}{n} \right] = (n-k+1)[x] = m(n-k+1).$$

$$\left[x + \frac{n-k+1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = ([x] + 1)(k-1) = (m+1)(k-1).$$

$$[nx] = mn + k - 1.$$

Từ đó dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

Áp dụng vào với $n = 2012$ dẫn đến $[2012x] = 2x + 1005$, đây là dạng 2 nên ta tìm được $x = \frac{1}{2}$.

20.7. a) Nhận xét rằng $[a] < b$ (b nguyên) khi và chỉ khi $a < b$.

Do đó bất phương trình tương đương với $\frac{2x-5}{9} < 10 \Leftrightarrow x < \frac{95}{2}$.

$$b) \left[\frac{3x-5}{7} \right] > x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-5}{7} > x \\ \left[\frac{3x-5}{7} \right] \neq [x]. \end{cases}$$

Sử dụng dạng 3, giải $\left[\frac{3x-5}{7} \right] = [x]$ ta tìm được $-2 \leq x < 0$.

$$\text{Mà } \frac{3x-5}{7} > x \Leftrightarrow x < -\frac{5}{4}.$$

Đáp số. Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -2$.

c) Áp dụng công thức $[a] + [a + 0,5] = [2a]$ dẫn đến bất phương trình

$$[2x+1] \leq \frac{6x+5}{2} \Leftrightarrow [2x] \leq \frac{6x+3}{2}.$$

$$\text{Đáp số. } x > -\frac{3}{2}.$$

d) Áp dụng công thức $[a] + [a + 0,5] = [2a]$ liên tiếp dẫn đến bất phương trình

$$[16x] \geq 100,1 \Leftrightarrow 16x \geq 101 \Leftrightarrow x \geq \frac{101}{16}.$$

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu

3

CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN

Chương I. CĂN THỨC

5

Chuyên đề 1. Căn bậc hai

5

Chuyên đề 2. Căn bậc ba và căn bậc n

9

Chuyên đề 3. Bất đẳng thức

15

Chuyên đề 4. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức chứa căn thức

26

Chuyên đề 5. Phương trình vô tỉ đơn giản

31

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

34

Chuyên đề 6. Khái niệm hàm số và đồ thị

34

Chuyên đề 7. Hàm số $y = ax + b$ và đồ thị

39

Chuyên đề 8. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

42

Chuyên đề 9. Hệ số góc của đường thẳng $(d) : y = ax + b, a \neq 0$

48

Chương III. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

51

Chuyên đề 10. Phương trình bậc nhất hai ẩn

51

Chuyên đề 11. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

56

Chương IV. HÀM SỐ $y = ax^2$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

65

Chuyên đề 12. Hàm số $y = ax^2$ và đồ thị Parabol

65

Chuyên đề 13. Phương trình bậc hai một ẩn

70

<i>Chuyên đề 14.</i> Phương trình quy về phương trình bậc hai	81
<i>Chuyên đề 15.</i> Hệ phương trình bậc hai hai ẩn	87
<i>Chuyên đề 16.</i> Một số hệ phương trình hai ẩn, ba ẩn	106
<i>Chuyên đề 17.</i> Phân thức hữu tỉ và xác định quan hệ	119

CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

<i>Chuyên đề 18.</i> Dấu tam thức bậc hai	128
<i>Chuyên đề 19.</i> Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên	135
<i>Chuyên đề 20.</i> Phần nguyên và ứng dụng	151

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ	164
--------------------------------	-----

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc **NGUYỄN QUÝ THAO**

Tổ chức bản thảo

và chịu trách nhiệm nội dung : Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

Biên tập lần đầu và tái bản : **NGUYỄN NGỌC TÚ**

Trình bày bìa : **LƯƠNG QUỐC HIỆP**

Thiết kế sách : **NGUYỄN THANH THUÝ**

Chế bản : **PHÒNG CHẾ BẢN CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
HÀ NỘI**

Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ TOÁN 9 TẬP MỘT - ĐẠI SỐ

Mã số: T9T73h3 - SBE

Số ĐKKH xuất bản: 124-2013/CXB/215-116/GD.

In 5.000 bản (QĐ: 62), khổ 17 x 24 cm.

In tại Công ty Cổ phần In & Bao bì Đồng Tháp: 212 Lê Lợi -
Phường 3 - Thị xã Sa Đéc - Tỉnh Đồng Tháp.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 03 năm 2013.