

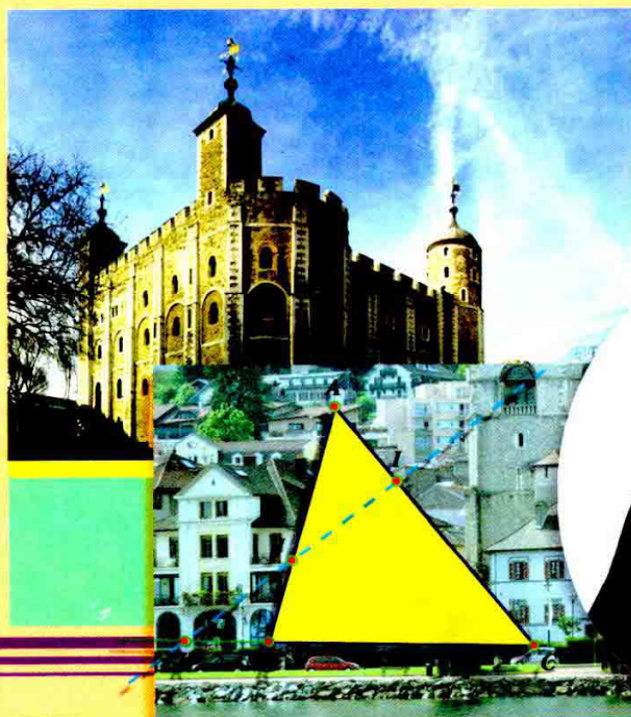
VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)  
NGUYỄN NGỌC ĐẠM – NGUYỄN BÁ ĐĂNG  
LÊ QUỐC HÁN – HỒ QUANG VINH

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

# TOÁN 9

TẬP HAI

## HÌNH HỌC



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)  
NGUYỄN NGỌC ĐẠM - NGUYỄN BÁ ĐĂNG  
LÊ QUỐC HÁN - HỒ QUANG VINH

**TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN**  
**TRUNG HỌC CƠ SỞ**

**Toán 9**

**Tập hai - HÌNH HỌC**

*(Tái bản lần thứ nhất)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



## PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN

Vũ Hữu Bình : Chương IV

Nguyễn Ngọc Dạm : Chương I

Nguyễn Bá Đương : Chương II, Chương III, Chuyên đề 15

Lê Quốc Hán : Chuyên đề 17

Hồ Quang Vinh : Chuyên đề 16

*Ảnh minh họa bìa 1 : Robert Simson (1687 - 1768)*

## **Lời nói đầu**

---

Bộ sách **Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở** gồm 8 cuốn, từ lớp 6 đến lớp 9, mỗi lớp 2 tập (tập một: Đại số, tập hai: Hình học), được biên soạn nhằm:

- Cung cấp cho các em học sinh một tài liệu có hệ thống và khá đầy đủ để học tập chuyên sâu về môn Toán ở cấp Trung học cơ sở.

- Tạo nguồn cho các lớp chuyên Toán ở Trung học phổ thông và giúp các em học sinh lớp 9 thi vào lớp 10 chuyên Toán.

- Giúp các cán bộ chỉ đạo môn Toán, các thầy cô giáo dạy Toán có thêm tài liệu để chỉ đạo và giảng dạy chuyên sâu về Toán tại các hoạt động chuyên đề, ngoại khóa, các câu lạc bộ Toán học nhằm bồi dưỡng cho học sinh về kiến thức, kỹ năng, tư duy và những phẩm chất tốt trong học tập, nghiên cứu và sáng tạo, góp phần vào việc đào tạo và bồi dưỡng nhân tài.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã và đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học, các trường Trung học cơ sở có uy tín, những chuyên gia Toán có kinh nghiệm ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Cuốn sách **Tài liệu chuyên Toán THCS - Toán 9, tập hai : Hình học** gồm 14 chuyên đề cơ bản và 3 chuyên đề nâng cao.

Ở mỗi chuyên đề cơ bản, cuốn sách không lặp lại các nội dung đã có trong Sách giáo khoa mà chỉ tóm tắt các kiến thức cơ bản, đồng thời bổ sung thêm một số kiến thức cần thiết. Do đó, khi giảng dạy các chuyên đề, các thầy cô giáo nên sử dụng kết hợp tài liệu này với Sách giáo khoa. Các ví dụ minh họa được chọn lọc nhằm giúp học sinh biết cách giải và trình bày một số dạng toán nâng cao thường gặp. Sau đó là các bài tập có hướng dẫn giải.

Các chuyên đề nâng cao nhằm giúp bạn đọc hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình, chúng được trình bày đơn giản để học sinh có thể tiếp thu được.

Chúng tôi hi vọng cuốn sách này sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

Mặc dù các tác giả đã làm việc nhiệt tình, nghiêm túc và có trách nhiệm với bạn đọc, tuy nhiên, cuốn sách vẫn khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc. Các góp ý xin gửi về

*Ban Toán - Tin, Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội,  
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.*

*Chủ biên*  
**VŨ HỮU BÌNH**

# CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN

## Chương I

### HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

#### **Chuyên đề 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO**

#### **I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

Khi giải các bài toán liên quan đến cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ngoài việc nắm vững các kiến thức về định lý Thalès (Ta-let), về các trường hợp đồng dạng của tam giác, cần phải nắm vững các kiến thức sau :

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (h.1-1), ta có

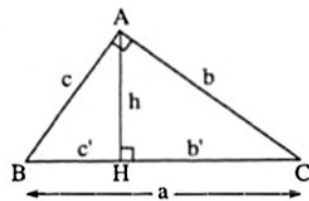
1)  $a^2 = b^2 + c^2$

2)  $b^2 = a.b'$  ;  $c^2 = a.c'$

3)  $h^2 = b'.c'$

4)  $a.h = b.c$

5)  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .



Hình 1-1

#### **II. VÍ DỤ MINH HOẠ**

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết  $AB : AC = 3 : 4$  và  $AB + AC = 21\text{cm}$ .

a) Tính các cạnh của tam giác ABC ;

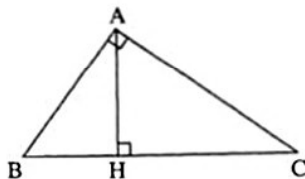
b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.

**Giải.** (h.1-2)

a) Theo đề bài  $AB : AC = 3 : 4$ , suy ra

$$\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{AB + AC}{3 + 4} = \frac{21}{7} = 3. \text{ Do đó}$$

$$AB = 3.3 = 9 \text{ (cm)} ; AC = 3.4 = 12 \text{ (cm)}.$$



Hình 1-2

Tam giác ABC vuông tại A, theo định lí Pythagore (Py-ta-go) ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225, \text{ suy ra } BC = 15\text{cm}.$$

b) Tam giác ABC vuông tại A, ta có

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC, \text{ suy ra } AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{9 \cdot 12}{15} = 7,2(\text{cm}).$$

$AH^2 = BH \cdot HC$ . Đặt  $BH = x$  ( $0 < x < 9$ ) thì  $HC = 15 - x$ , ta có

$$(7,2)^2 = x(15 - x) \Leftrightarrow x^2 - 15x + 51,84 = 0 \Leftrightarrow x(x - 5,4) - 9,6(x - 5,4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5,4)(x - 9,6) = 0 \Leftrightarrow x = 5,4 \text{ hoặc } x = 9,6\text{cm (loại)}.$$

Vậy  $BH = 5,4\text{cm}$ . Từ đó  $HC = BC - BH = 9,6$  (cm).

*Chú ý.* Có thể tính BH như sau :

$$AB^2 = BH \cdot BC \text{ suy ra } BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9^2}{15} = 5,4(\text{cm}).$$

Rõ ràng cách tính này đơn giản hơn.

**Ví dụ 2.** Cho hình thang ABCD có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ,  $\widehat{B} = 60^\circ$ ,  $CD = 30\text{cm}$ ,  $CA \perp CB$ . Tính diện tích của hình thang.

**Giải.** (h.1-3)

Ta có  $\widehat{CAD} = \widehat{ABC} = 60^\circ$  (cùng phụ với  $\widehat{CAB}$ ), vì thế trong tam giác vuông ACD ta có  $AC = 2AD$ .

Theo định lí Pythagore thì :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$\text{hay } (2AD)^2 = AD^2 + 30^2$$

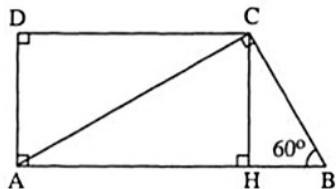
$$\text{suy ra } 3AD^2 = 900 \Leftrightarrow AD^2 = 300 \text{ nên } AD = 10\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Kẻ  $CH \perp AB$ . Tứ giác AHCD là hình chữ nhật vì có  $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^\circ$ , suy ra  $AH = CD = 30\text{cm}$ ;  $CH = AD = 10\sqrt{3}$  (cm).

Tam giác ACB vuông tại C, ta có :

$$CH^2 = HA \cdot HB, \text{ suy ra } HB = \frac{CH^2}{HA} = \frac{(10\sqrt{3})^2}{30} = \frac{300}{30} = 10 \text{ (cm), do đó}$$

$$AB = AH + HB = 30 + 10 = 40 \text{ (cm)}.$$



Hình 1-3



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}CH.(AB + CD) = \frac{1}{2}.10\sqrt{3}.(40 + 30) = 350\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích hình thang ABCD bằng  $350\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

**Ví dụ 3.** Cho tam giác nhọn ABC, đường cao CK ; H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .  $S, S_1, S_2$  theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH. Chứng minh rằng  $S = \sqrt{S_1.S_2}$ .

**Giải.** (h.1-4)

Tam giác AMB vuông tại M, có  $MK \perp AB$

$$\text{nên } MK^2 = AK.BK \quad (1)$$

$\triangle AHK \sim \triangle CBK$  vì có  $\widehat{AKH} = \widehat{CKB} = 90^\circ$  ;

$\widehat{KAH} = \widehat{KCB}$  (cùng phụ với  $\widehat{ABC}$ ).

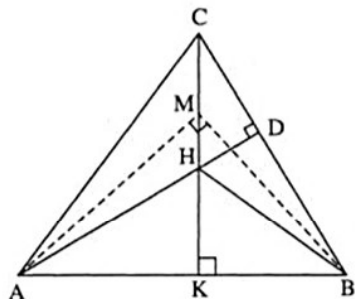
$$\text{Suy ra } \frac{AK}{CK} = \frac{HK}{BK},$$

$$\text{do đó } AK.BK = CK.HK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $MK^2 = CK.HK$  nên  $MK = \sqrt{CK.HK}$  ;

$$\begin{aligned} S_{AMB} &= \frac{1}{2}.AB.MK = \frac{1}{2}.AB.\sqrt{CK.HK} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}.AB.CK. \frac{1}{2}.AB.HK} = \sqrt{S_1.S_2}. \end{aligned}$$

Vậy  $S = \sqrt{S_1.S_2}$ .



Hình 1-4

## BÀI TẬP

- 1.1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và điểm M nằm giữa B và C. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC. Chứng minh rằng  $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ .
- 1.2. Cho hình chữ nhật ABCD và điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh rằng  $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ .

- 1.3. Cho hình chữ nhật ABCD có  $AD = 6\text{cm}$ ,  $CD = 8\text{cm}$ . Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E, cắt cạnh AB tại F. Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF.
- 1.4. Cho tam giác ABC có  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 4\text{cm}$ ,  $AC = 5\text{cm}$ . Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành bốn tam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.
- 1.5. Trong một tam giác vuông tỉ số giữa đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng  $40 : 41$ . Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng  $\sqrt{41}\text{cm}$ .
- 1.6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ  $HE \perp AB$ ,  $HF \perp AC$ . Gọi O là giao điểm của AH và EF. Chứng minh rằng  $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$ .
- 1.7. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M và N lần lượt là điểm thuộc HC và HB sao cho  $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$ .  
Tam giác AMN là tam giác gì ? Vì sao ?
- 1.8. Cho hình vuông ABCD, cạnh bằng a.
- M là một điểm trên cạnh AD sao cho  $\widehat{ABM} = 30^\circ$ . Tính AM, BM theo a.
  - Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại F, đường thẳng này cắt CD tại N. Tính độ dài các đoạn thẳng AF, MF, BF theo a.
- 1.9. Cho hình vuông ABCD và điểm I thay đổi nằm giữa A và B. Tia DI cắt BC tại E. Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC tại F. Chứng minh rằng tổng  $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DE^2}$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm I.
- 1.10. Cho tam giác ABC, đường cao BH. Đặt  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $AH = c'$ . Chứng minh rằng :
- Nếu  $\widehat{A} < 90^\circ$  thì  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$ .
  - Nếu  $\widehat{A} > 90^\circ$  thì  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$ .
- 1.11. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Biết  $AB = 8\text{cm}$ ,  $BC = AC = 2\text{cm}$ ,  $BAH = 30^\circ$ . Tính diện tích tam giác ABC.
- 1.12. Cho tam giác ABC, các đường cao ứng với các cạnh a, b, c lần lượt là  $h_a, h_b, h_c$ .  
Chứng minh rằng nếu  $\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$  thì tam giác ABC vuông tại A.

1.13.\* Cho tam giác ABC, hai đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I thỏa mãn  $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$ . Tam giác ABC là tam giác gì ? Vì sao ?

1.14.\* Cho tam giác ABC,  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $BC = 2a$ , đường cao AH. Kẻ  $HD \perp AC$ ,  $HE \perp AB$ . Tìm giá trị lớn nhất của :

a) Độ dài đoạn thẳng DE ;

b) Diện tích tứ giác ADHE.

1.15.\* Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 60cm. Trên đoạn BC lấy điểm D sao cho  $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt AB tại E, cắt AC tại F. Tính độ dài các cạnh của tam giác DEF.

1.16.\* Cho tam giác ABC. Đường trung tuyến AD, đường cao BH, đường phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức

$$(BA + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2BC \cdot CA^2.$$

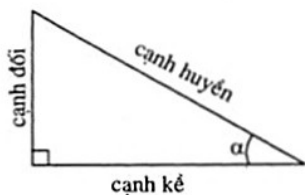
## Chuyên đề 2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn  $\alpha$  (h.2.1) được định nghĩa như sau :

$$\sin \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}} ; \cos \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}} ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{kề}} ; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}.$$



Hình 2-1

Nếu  $\alpha$  là một góc nhọn thì  $0 < \sin \alpha < 1$  ;  $0 < \cos \alpha < 1$  ;  $\operatorname{tg} \alpha > 0$  ;  $\operatorname{cotg} \alpha > 0$ .

2. Với hai góc  $\alpha, \beta$  mà  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , ta có :

$$\sin \alpha = \cos \beta ; \cos \alpha = \sin \beta ; \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta ; \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

Nếu hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  có  $\sin \alpha = \sin \beta$  hoặc  $\cos \alpha = \cos \beta$  thì  $\alpha = \beta$ .

3.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  ;  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$ .

4. Với một số góc đặc biệt, ta có :

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} ; \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \cotg 60^\circ = \tg 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tg 45^\circ = \cotg 45^\circ = 1 ; \cotg 30^\circ = \tg 60^\circ = \sqrt{3}.$$

## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Biết  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Tính  $\cos \alpha$ ,  $\tg \alpha$  và  $\cotg \alpha$ .

**Giải.** Cách 1. Xét  $\triangle ABC$  vuông tại A (h.2-2). Đặt  $\hat{B} = \alpha$ .

Ta có :

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13} \text{ suy ra } \frac{AC}{5} = \frac{BC}{13} = k,$$

do đó  $AC = 5k$ ,  $BC = 13k$ .

$\triangle ABC$  vuông tại A nên

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = (13k)^2 - (5k)^2 = 144k^2, \text{ suy ra } AB = 12k.$$

$$\text{Vậy : } \cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13} ;$$

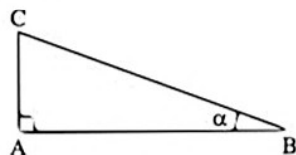
$$\tg \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12} ;$$

$$\cotg \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}.$$

**Cách 2.** Ta có  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ , suy ra  $\sin^2 \alpha = \frac{25}{169}$ ,

mà  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , do đó  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ , suy ra

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}.$$



Hình 2-2

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12}{5}.$$

**Nhận xét :** Trong cách giải thứ nhất, ta biểu thị độ dài các cạnh của tam giác ABC theo đại lượng k rồi sử dụng định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\cot \alpha$ .

Trong cách giải thứ hai, ta sử dụng giả thiết  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$  để tính  $\sin^2 \alpha$  rồi tính  $\cos \alpha$  từ  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Sau đó ta tính  $\operatorname{tg} \alpha$  và  $\cot \alpha$  qua  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$ .

**Ví dụ 2.** Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết  $HD : HA = 1 : 2$ , chứng minh rằng  $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 3$ .

**Giải.** (h.2-3)

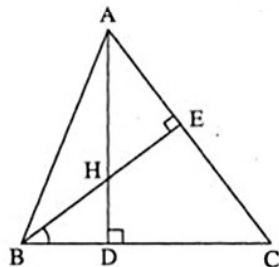
Ta có :

$$\operatorname{tg} B = \frac{AD}{BD} ; \operatorname{tg} C = \frac{AD}{CD}.$$

$$\text{Suy ra } \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \frac{AD^2}{BD \cdot CD} \quad (1)$$

$$\widehat{HBD} = \widehat{CAD} \text{ (cùng phụ với } \widehat{ACB})$$

$$\widehat{HDB} = \widehat{ADC} = 90^\circ.$$



Hình 2-3

$$\text{Do đó } \triangle BDH \sim \triangle ADC \text{ (g-g), suy ra } \frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}, \text{ do đó } BD \cdot DC = DH \cdot AD \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \frac{AD^2}{DH \cdot AD} = \frac{AD}{DH} \quad (3)$$

$$\text{Theo đề bài } \frac{HD}{AH} = \frac{1}{2} \text{ suy ra } \frac{HD}{AH + HD} = \frac{1}{2+1} \text{ hay } \frac{HD}{AD} = \frac{1}{3}, \text{ suy ra } AD = 3HD.$$

Thay vào (3) ta được

$$\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \frac{3HD}{DH} = 3.$$

**Ví dụ 3.** Biết  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}$ , tính  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ .

**Giải.** Biết  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}$ . Để tính  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ta cần tính  $\sin \alpha + \cos \alpha$  rồi giải phương trình với ẩn là  $\sin \alpha$  hoặc  $\cos \alpha$ .

Ta có :

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + 2 \cdot \frac{12}{25} = \frac{49}{25}.$$

Suy ra  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$  nên  $\sin \alpha = \frac{7}{5} - \cos \alpha$ . Từ đó ta có

$$\cos \alpha \left( \frac{7}{5} - \cos \alpha \right) = \frac{12}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{5} \cos \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{12}{25}$$

$$\Leftrightarrow 25 \cos^2 \alpha - 35 \cos \alpha + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \cos \alpha (5 \cos \alpha - 4) - 3(5 \cos \alpha - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5 \cos \alpha - 4)(5 \cos \alpha - 3) = 0$$

Suy ra  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  hoặc  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ .

• Nếu  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  thì  $\sin \alpha = \frac{12}{25} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ .

• Nếu  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  thì  $\sin \alpha = \frac{12}{25} : \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ .

Vậy  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  hoặc  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ .

## BÀI TẬP

2.1. a) Biết  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , tính  $A = 5 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha$ .

b) Biết  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ , tính  $B = 4 \sin^2 \alpha - 5 \cos^2 \alpha$ .

2.2. a) Biết  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ , tính  $C = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ .

b) Biết  $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{4}{3}$ , tính  $D = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ .

2.3. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Chứng minh rằng nếu  $\operatorname{cotg} B = 3 \operatorname{cotg} C$  thì  $AM = AC$ .

2.4. Cho tam giác ABC có  $BC \geq AC \geq AB$ , đường phân giác AD, đường cao CH. Chứng minh rằng  $CH \geq AD$ .

2.5. Cho tam giác nhọn ABC có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

2.6. Cho tam giác ABC, hai đường cao BD, CE. Chứng minh rằng :

a)  $S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A$ .

b)  $S_{BCDE} = S_{ABC} \cdot \sin^2 A$ .

2.7. Chứng minh rằng diện tích của một tam giác bằng một nửa tích của hai cạnh với sin của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

2.8. Cho tam giác nhọn ABC, đường phân giác AD. Biết  $AB = c$ ,  $AC = b$ , tính độ dài đoạn AD theo b và c.

2.9. Cho tam giác nhọn ABC có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và  $b + c = 2a$ . Chứng minh :

a)  $2 \sin A = \sin B + \sin C$ .

b)  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ , trong đó  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là chiều cao của tam giác ứng với cạnh a, b, c.

2.10. Cho tam giác nhọn ABC và hai đường trung tuyến BN và CM vuông góc với nhau. Chứng minh rằng  $\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C \geq \frac{2}{3}$ .

2.11. Cho tam giác ABC vuông tại A,  $AB < AC$  và trung tuyến AM. Đặt  $\widehat{ACB} = \alpha$ ,  $\widehat{AMB} = \beta$ .

Chứng minh rằng  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin \beta$ .

2.12.\* Không sử dụng các công thức lượng giác, hãy chứng minh rằng

$$\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4}.$$

2.13.\* Tìm góc nhọn  $\alpha$ , biết  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

2.14. Cho tam giác ABC vuông tại A,  $\hat{C} = \alpha$  ( $\alpha < 45^\circ$ ), trung tuyến AM, đường cao AH,  $BC = a$ .

Chứng minh các công thức sau :

a)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$  ;

b)  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$  ;

c)  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ .

2.15.\* Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a)  $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ .

b)  $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{8}$  khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

### Chuyên đề 3. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

#### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng :

a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cosin góc kề.

b) Cạnh góc vuông kia nhân với tang của góc đối hay nhân với cotang của góc kề (h.3-1).

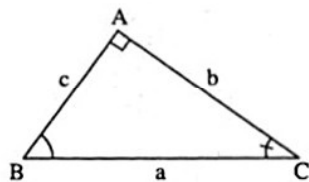
$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$$

2. Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc chưa biết của tam giác vuông đó.



Hình 3-1



## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Tam giác ABC có  $AB = 16$ ,  $AC = 14$  và  $\hat{B} = 60^\circ$ .

a) Tính độ dài cạnh BC ;

b) Tính diện tích tam giác ABC.

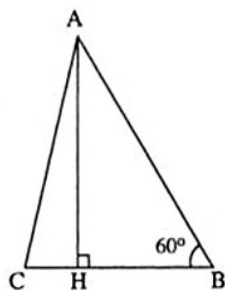
**Giải.** (h.3-2)

a) Kẻ đường cao AH.

Xét tam giác vuông ABH, ta có

$$BH = AB \cdot \cos B = AB \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

$$AH = AB \cdot \sin B = AB \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$



Hình 3-2

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AHC ta có

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 14^2 - (8\sqrt{3})^2 = 196 - 192 = 4;$$

Suy ra  $HC = 2$ .

Vậy  $BC = CH + HB = 2 + 8 = 10$ .

b) *Cách 1.*  $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$  (dvdt).

*Cách 2.*  $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot BA \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$  (dvdt).

**Ví dụ 2.** Cho tam giác nhọn ABC có  $\hat{A} = 75^\circ$ ,  $AB = 30\text{cm}$ ,  $BC = 35\text{cm}$ . Hãy tính các cạnh và các góc còn lại của tam giác (làm tròn đến hàng đơn vị).

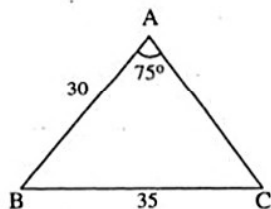
**Giải.** (h.3-3)

Vì tam giác ABC là tam giác nhọn, nên theo bài 2.5 ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ suy ra}$$

$$\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} = \frac{30 \cdot \sin 75^\circ}{35} \approx 0,8275,$$

do đó  $\hat{C} \approx 56^\circ$ .



Hình 3-3

$$\hat{B} \approx 180^\circ - (75^\circ + 56^\circ) = 49^\circ ;$$

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{35 \cdot \sin 49^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 27 \text{ (cm)}.$$

Vậy :  $AC \approx 27\text{cm}$ ,  $\hat{B} \approx 49^\circ$ ;  $\hat{C} \approx 56^\circ$ .

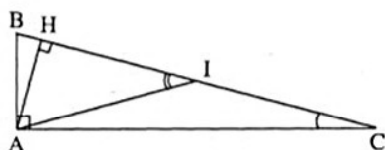
**Ví dụ 3.3.** Không dùng máy tính và bảng số, hãy chứng minh rằng

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

**Giải.** (h.3-4)

Vẽ tam giác ABC vuông tại A với  $BC = 2a$  (a là một độ dài tùy ý),  $\hat{C} = 15^\circ$ , suy ra  $\hat{B} = 75^\circ$ .

Gọi I là trung điểm của BC, ta có  $IA = IB = IC = a$ .



Hình 3-4

Vì AIB là góc ngoài tại đỉnh I của tam giác cân IAC nên  $\widehat{AIB} = 2\hat{C} = 30^\circ$ .

$$\text{Kẻ } AH \perp BC \text{ thì } IH = AI \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad AH = AI \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2};$$

$$CH = CI + IH = a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2 + \sqrt{3})}{2}.$$

Tam giác AHC vuông tại H, theo định lý Pythagore, ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= CH^2 + AH^2 = \frac{a^2(2 + \sqrt{3})^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1)}{4} = \frac{4a^2(2 + \sqrt{3})}{4} \\ &= a^2(2 + \sqrt{3}), \text{ suy ra } AC = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2a} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

## BÀI TẬP

3.1. Cho hình chữ nhật ABCD có  $\widehat{BAC} = 30^\circ$ ,  $AC = 10\text{cm}$ . Tính chu vi và diện tích của hình chữ nhật đó.

3.2. Cho tam giác ABC vuông tại B,  $\widehat{A} = \alpha$ , BO là trung tuyến ứng với cạnh huyền AC. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BO cắt AC tại D. Đặt  $AC = a$ .

$$\text{Chứng minh rằng } AD = \frac{a(\cos 2\alpha + 1)}{2 \cos \alpha}.$$

3.3. Cho tam giác ABC, đường cao AA', trực tâm H. Cho biết  $\frac{AH}{A'H} = k$ . Chứng minh rằng  $\text{tg} B \text{tg} C = 1 + k$ .

3.4. Cho hình bình hành ABCD có  $\widehat{A} = 45^\circ$ ,  $AB = BD = 18\text{cm}$ .

a) Tính độ dài cạnh AD ;

b) Tính diện tích hình bình hành ABCD.

3.5. Cho tam giác ABC có góc A nhọn, hai đường cao BH, CK.

Chứng minh rằng nếu  $AB > AC$  thì  $BH > CK$ .

3.6. Cho tam giác ABC, phân giác AD. Biết  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $\widehat{A} = 2\alpha$  ( $\alpha < 45^\circ$ ).

$$\text{Chứng minh rằng } AD = \frac{2bc \cos \alpha}{b + c}.$$

3.7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đặt  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh rằng :

$$AH = a \sin B \cos B ; BH = a \cos^2 B ; CH = a \sin^2 B.$$

3.8. Cho tam giác nhọn ABC,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .

$$\text{Chứng minh rằng } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

3.9. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao ứng với cạnh bên có độ dài bằng h, góc ở đáy của tam giác bằng  $\alpha$ .

$$\text{Chứng minh rằng } S_{ABC} = \frac{h^2}{4 \sin \alpha \cos \alpha}$$

- 3.10. Ở độ cao 920m, từ một máy bay trực thăng người ta nhìn hai điểm A và B của hai đầu một chiếc cầu những góc so với phương nằm ngang lần lượt là  $\alpha = 37^\circ$  và  $\beta = 31^\circ$ .

Tính chiều dài AB của chiếc cầu.

- 3.11. Cho tam giác nhọn ABC, ba đường cao AH, BI, CK. Chứng minh rằng  $S_{HIK} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$ .

- 3.12.\* Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C khi và chỉ khi

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2} (\cot^2 A + \cot^2 B).$$

- 3.13.\* Cho tam giác ABC vuông tại A. Hai đường trung tuyến AE và BD vuông góc với nhau. Biết  $AB = 1$  (đơn vị độ dài). Tính diện tích tam giác ABC.

- 3.14.\* Cho tam giác ABC, biết  $AB = 8\text{cm}$ ,  $AC = 7\text{cm}$  và  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ . Tính cạnh và các góc còn lại của tam giác.

- 3.15.\* a) Tính  $\text{tg} 15^\circ$  (không dùng bảng số, máy tính).

b) Cho tam giác ABC có  $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 105^\circ$  và  $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$ . Tính số đo các góc ABC và ACB.

# ĐƯỜNG TRÒN

---

### Chuyên đề 4. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN CÁC TÍNH CHẤT VỀ ĐƯỜNG KÍNH, DÂY

#### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đường tròn tâm O, bán kính R là hình gồm các điểm cách đều điểm O một khoảng bằng R. Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính, hoặc khi biết một đoạn thẳng là đường kính của nó.
2. Qua ba điểm không thẳng hàng dựng được một và chỉ một đường tròn (tâm của đường tròn là giao điểm các đường trung trực của các đoạn thẳng tạo bởi ba điểm đó).
3. Tâm của đường tròn là *tâm đối xứng* của đường tròn đó.
4. Bất kì đường thẳng nào chứa một đường kính cũng là trục đối xứng của đường tròn.
5. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.
6. Trong một đường tròn :
  - Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy ;
  - Đường kính đi qua trung điểm của một dây (không phải đường kính) thì vuông góc với dây ấy.
7. Tam giác nội tiếp đường tròn có một cạnh là đường kính của đường tròn khi và chỉ khi tam giác đó là tam giác vuông.
8. Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau :
  - Hai dây cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm;
  - Trong hai dây cung không bằng nhau, dây cung lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.

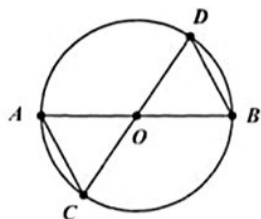
## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Cho đường tròn (O), đường kính AB và hai dây AC, BD. Chứng minh rằng AC song song với BD khi và chỉ khi CD là đường kính.

**Giải.** (h.4-1) Ta có  $AC \parallel BD \Leftrightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAC}$  (1)

Hai tam giác OBD và OAC là hai tam giác cân ( $OB = OD, OA = OC$ ) nên  $\widehat{OBD} = \widehat{ODB}, \widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ .

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \widehat{BOD} = \widehat{AOC} \Leftrightarrow C, O, D$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow CD$  là đường kính của đường tròn (O).

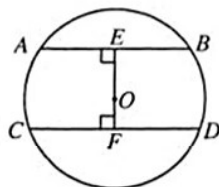


Hình 4-1

**Ví dụ 2.** Cho đường tròn (O), hai dây AB, CD song song với nhau. Gọi E, F là trung điểm của AB và CD. Chứng minh E, F, O thẳng hàng.

**Giải.** (h.4-2) Nối O với E cắt đường thẳng CD tại F'.

$EA = EB \Rightarrow OE \perp AB, AB \parallel CD \Rightarrow OF' \perp CD$   
 $\Rightarrow F'C = F'D \Rightarrow F$  trùng  $F'$ . Vậy O, E, F thẳng hàng.



Hình 4-2

**Ví dụ 3.** Dựng một đường tròn nhận đoạn thẳng AB cho trước làm dây cung, có bán kính r cho trước.

**Giải.** (h.4-3) Gọi I là trung điểm của AB. Giả sử đường tròn (O) đã dựng được, AB cho trước,  $OA = r$ .

Tam giác AOI vuông có  $AI = \frac{1}{2}AB, OA = r$

nên dựng được. Suy ra cách dựng đường tròn như sau :

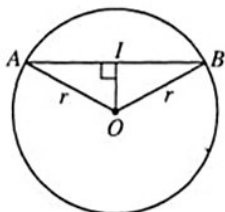
**Cách dựng :** Dựng đường thẳng vuông góc với AB tại I ;

Dựng đường tròn (A, r) cắt đường thẳng trên tại O ; Dựng đường tròn (O, OA).

Hiển nhiên đường tròn này đi qua A, B và có bán kính bằng r.

**Biện luận :**  $r > \frac{1}{2}AB$  : có hai nghiệm hình ;  $r = \frac{1}{2}AB$  : có một nghiệm hình;

$r < \frac{1}{2}AB$  vô nghiệm.



Hình 4-3

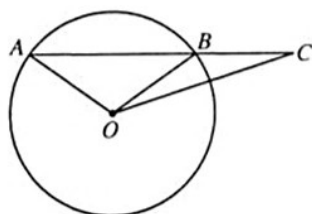
**Nhận xét.** Có thể dựng tam giác AOB biết độ dài ba cạnh, sau đó dựng đường tròn.

**Ví dụ 4.** Cho đường tròn  $(O, R)$  và dây  $AB$ . Kéo dài  $AB$  về phía  $B$  lấy điểm  $C$  sao cho  $BC = R$ . Chứng minh  $\widehat{AOC} = 180^\circ - 3\widehat{ACO}$ .

**Giải.** (h.4-4) Các tam giác  $OAB$ ,  $OBC$  cân và  $\widehat{OBA}$  là góc ngoài tam giác  $BCO$  nên  $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 2\widehat{BCO}$ ;

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= 180^\circ - 2\widehat{OBA} = 180^\circ - 2 \cdot 2\widehat{BCO} \\ &= 180^\circ - 4\widehat{BCO}\end{aligned}\quad (1)$$

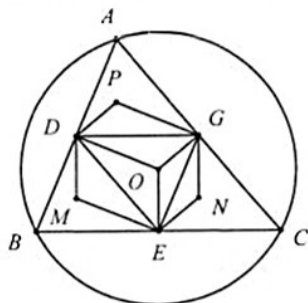
$$\begin{aligned}\text{Do đó } \widehat{AOC} &= \widehat{AOB} + \widehat{BOC} \\ &= 180^\circ - 4\widehat{BCO} + \widehat{BOC} = 180^\circ - 3\widehat{BCO} = 180^\circ - 3\widehat{ACO}.\end{aligned}$$



Hình 4-4

**Ví dụ 5.** Cho tam giác  $ABC$ . Từ trung điểm các cạnh kẻ các đường vuông góc với hai cạnh kia tạo thành một lục giác. Chứng minh rằng diện tích tam giác  $ABC$  gấp hai lần diện tích lục giác.

**Giải.** (h.4-5) Gọi trung điểm các cạnh tam giác  $ABC$  là  $D, E, G$ , các đường vuông góc tạo thành lục giác  $DMENGP$ . Vẽ đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$ , ta có  $DM \perp BC$ ,  $OE \perp BC$ ,  $GN \perp BC$  suy ra  $DM \parallel OE \parallel GN$ .



Hình 4-5

Tương tự suy ra lục giác  $DMENGP$  có các cặp cạnh đối song song với nhau, nên các tứ giác  $ODME$ ,  $OENG$ ,  $OGPD$  là hình bình hành, do đó diện tích lục giác  $DMENGP$  gấp hai lần diện tích tam giác  $DEG$ . Mặt khác,  $D, E, G$  là trung điểm các cạnh  $\Rightarrow$  diện tích tam giác  $ABC$  gấp bốn lần diện tích tam giác  $DEG$  và do đó gấp hai lần diện tích lục giác  $DMENGP$ .

**Lời bình :** Cái hay của lời giải là đưa vào đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  để nhận biết các tính chất.

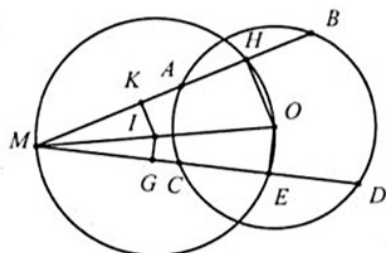
**Ví dụ 6.** Cho đường tròn  $(O)$ , hai dây  $AB, CD$  kéo dài cắt nhau tại điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Gọi  $H, E$  là trung điểm  $AB$  và  $CD$  (h.4-6).

Chứng minh rằng  $AB < CD$  khi và chỉ khi  $MH < ME$ .

**Giải. Cách 1 :** Ta có  $OH \perp AB$ ,  $OE \perp CD$ ;

Dựng đường tròn tâm I, đường k.  
 $OM \Rightarrow H, E$  thuộc đường tròn (I).

Kẻ  $IK \perp MH$ ,  $IG \perp ME$  ta có  
 $KM = KH$ ,  $GM = GE$  suy ra  $OH = 2IK$ ,  
 $OE = 2IG$ , mà  $AB < CD$  nên  $OH > OE$   
 $\Leftrightarrow IK > IG \Leftrightarrow MH < ME$ .



Hình 4-6

**Cách 2 :** Tam giác OMH và OME là hai tam giác vuông, theo định lý Pytago ta có  $OH^2 + MH^2 = OM^2$ ;  $OE^2 + ME^2 = OM^2$

$$\Rightarrow OH^2 + MH^2 = OE^2 + ME^2, \text{ khi đó } AB < CD \Leftrightarrow OH > OE$$

$$\Leftrightarrow MH^2 < ME^2 \Leftrightarrow MH < ME.$$

**Ví dụ 7.** Cho đường tròn (O) và điểm A nằm trong đường tròn ( $A \neq O$ ).

Tìm trên đường tròn điểm M sao cho góc  $\widehat{OMA}$  lớn nhất.

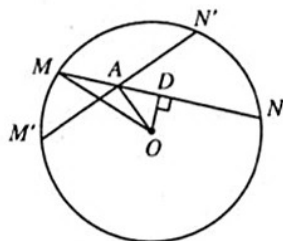
**Giải.** (h.4-7) Giả sử M nằm trên đường tròn, nối M với A cắt đường tròn tại N.

Gọi D là trung điểm của MN  $\Rightarrow OD \perp MN$ .

Xét tam giác vuông OMD có OM không đổi nên góc  $\widehat{OMA}$  lớn nhất

$\Leftrightarrow$  khoảng cách từ O đến đường thẳng qua A là lớn nhất. Suy ra cách dựng như sau :

Qua A dựng đường thẳng vuông góc với OA cắt đường tròn tại M', N'

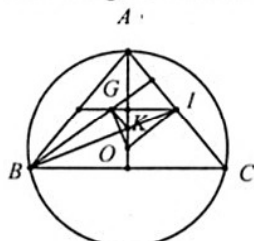


Hình 4-7

$\Rightarrow OD \leq OA \Rightarrow OA$  lớn nhất  $\Rightarrow \widehat{OMA}$  lớn nhất. Ta có M' (hoặc N') là điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Ví dụ 8.** Cho đường tròn (O), A, B, C là ba điểm trên đường tròn sao cho  $AB = AC$ . Gọi I là trung điểm của AC, G là trọng tâm của tam giác ABI. Chứng minh rằng  $OG \perp BI$ .

**Giải.** (h.4-8) Gọi K là giao điểm của BI và AO, vì G là trọng tâm tam giác ABI, K là trọng tâm tam giác ABC nên GK song song với AC; I là trung điểm của AC nên  $OI \perp AC \Rightarrow OI \perp GK$ .



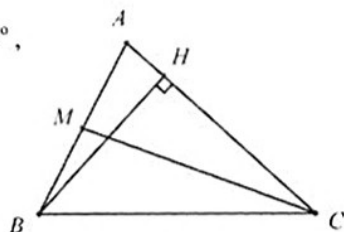
Hình 4-8



Tam giác OGI có  $OI \perp GK$  và  $OK \perp GI$  nên K là trực tâm tam giác OGI, suy ra BI vuông góc với OG (đpcm).

**Ví dụ 9.** Dựng tam giác ABC. Biết  $\widehat{A} = \alpha < 90^\circ$ , đường cao BH = h và trung tuyến CM = m.

**Giải. Phân tích :** (h.4-9) Giả sử tam giác ABC dựng được  $\Rightarrow$  tam giác vuông ABH dựng được vì biết  $\widehat{A} = \alpha$  và BH = h  $\Rightarrow$  AB xác định  $\Rightarrow$  trung điểm M xác định.



Hình 4-9

Điểm C là giao của đường tròn  $(M, m)$  với tia AH.

**Cách dựng :** Dựng góc vuông đỉnh H, lấy trên cạnh góc vuông đoạn HB = h ;

Dựng tam giác vuông ABH sao cho  $\widehat{B} = 90^\circ - \alpha$  ; Dựng đường tròn  $(M, m)$  cắt tia AH kéo dài tại C. Ta có ABC là tam giác cần dựng.

**Biện luận :** Bài toán vô nghiệm khi  $m < \frac{h}{2}$ .

**Ví dụ 10.** Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn  $(O, r)$ , biết  $AB = r\sqrt{3}$ ,  $AC = r\sqrt{2}$ . Tính các góc của tam giác ABC.

**Giải.** (h.4-10) Kẻ  $OH \perp AB$

$$\Rightarrow HA = HB = \frac{r\sqrt{3}}{2}, OH^2 = OA^2 - AH^2 = \frac{1}{4}r^2$$

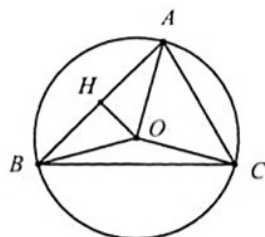
$$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}r \Rightarrow \widehat{OAH} = 30^\circ = \widehat{OBH}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ;$$

Tam giác AOC có  $OA = OC = r$ ,  $AC = r\sqrt{2}$ ;  $AC^2 = OA^2 + OC^2$ , theo định lý đảo Pytago có  $\widehat{AOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 360^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{AOC}) = 150^\circ. \text{ Tam giác OBC cân, } OB = OC = r$$

$$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 75^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 60^\circ.$$



Hình 4-10

**Ví dụ 11.** Cho đoạn thẳng BC cố định, I là trung điểm BC, A là điểm trên mặt phẳng sao cho  $BA = BC$ . Gọi H là trung điểm AC, đường thẳng AI cắt đường thẳng BH tại M. Chứng minh M nằm trên một đường tròn cố định khi A thay đổi.

**Giải.** (h.4-11) Từ  $BA \perp BC$ ,  $HA \perp HC$  suy ra  $BH \perp AC$ ;

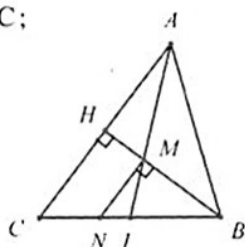
$AI$ ,  $BH$  là các đường trung tuyến của tam giác  $ABC$   
nên  $M$  là trọng tâm,  $BM = 2MH$ .

Từ  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $AC$ , cắt  $BC$  tại  $N$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{BM}{MH} = 2 \Rightarrow BN = 2NC;$$

$B, C$  cố định  $\Rightarrow N$  cố định;  $MN \parallel AC$ ,  $BH \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{BMN} = 90^\circ \Rightarrow M$  nằm trên đường tròn đường kính  $BN$ .



Hình 4-11

**Ví dụ 12.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , kẻ  $BH \perp AC$ . Trên  $AC$  và  $CD$  lấy điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{DC}$ . Chứng minh bốn điểm  $M, B, C, N$  nằm trên một đường tròn.

**Giải.** (h.4-12)  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $\widehat{BCN} = 90^\circ$ , cần chứng minh  $BM \perp MN$ .

Nối  $B$  với  $M$ ,  $M$  với  $N$ . Kẻ  $MK \perp BC$ , cắt  $BH$

tại  $I \Rightarrow MK \parallel CD \Rightarrow \frac{MI}{AB} = \frac{HM}{HA} \quad (1)$

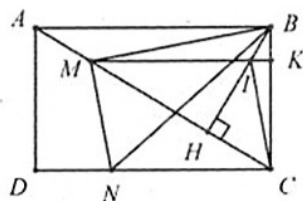
Mặt khác, từ  $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{DC}$  suy ra

$$\frac{AH}{AM} = \frac{DC}{DN} \Rightarrow \frac{MH}{AH} = \frac{NC}{DC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{MI}{AB} = \frac{NC}{DC} \Rightarrow MI \parallel NC$ . Ta lại có  $MI \parallel NC$  nên  $MICN$  là hình bình hành

$\Rightarrow MN \parallel CI$ , nhưng  $I$  là trực tâm của tam giác  $BCM$  nên  $CI \perp MB$ ,

suy ra  $MN \perp MB \Rightarrow \widehat{BMN} = 90^\circ \Rightarrow M, B, C, N$  nằm trên đường tròn đường kính  $BN$ .



Hình 4-12

**Ví dụ 13.** Cho đường tròn  $(O, R)$  và dây  $AB = 2a$  ( $a < R$ ). Từ  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt đường tròn tại  $D$ . Tính độ dài  $AD$  theo  $R$  và  $a$ .

**Giải.** (h.4-13) Hạ  $OI \perp AB$  thì  $IA = IB = a$ .

Kéo dài  $DO$  cắt đường tròn tại  $E$  thì tam giác  $ADE$  vuông, theo hệ thức trong tam giác vuông ta có  $AI^2 = ID \cdot IE$ . Đặt  $ID = x$  ta có  $a^2 = x(2R - x) \Leftrightarrow x^2 - 2Rx + a^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = R \pm \sqrt{R^2 - a^2}.$$

Mặt khác, trong tam giác vuông  $ADE$  ta có

$$AD^2 = DE \cdot DI = 2R(R \pm \sqrt{R^2 - a^2}) \Rightarrow AD = \sqrt{2R(R \pm \sqrt{R^2 - a^2})}.$$

**Chú ý:** Đường thẳng qua  $O$  vuông góc với  $AB$  cắt đường tròn tại  $D$  và  $E$ , học sinh dễ bỏ qua tính độ dài  $AE$ .

**Ví dụ 14.** Cho đường tròn  $(O, R)$ , đường kính  $AB$ ;  $E$  là điểm nằm trong đường tròn,  $AE$  cắt đường tròn tại  $C$ ,  $BE$  cắt đường tròn tại  $D$ .

Chứng minh  $AE \cdot AC + BE \cdot BD$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $E$ .

**Giải.** (h.4-14)  $AB$  là đường kính đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ.$$

Hạ  $EH \perp AB$ , ta có  $\triangle ACB \sim \triangle AHE$  (g.g)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{AC}{AB} &= \frac{AH}{AE} \\ \Rightarrow AE \cdot AC &= AH \cdot AB \end{aligned} \quad (1)$$

Tương tự,  $\triangle BDA \sim \triangle BHE$

$$\Rightarrow BE \cdot BD = BH \cdot BA \quad (2)$$

Cộng hai vế của (1) và (2) ta được

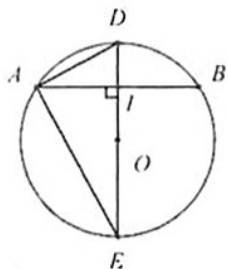
$$AE \cdot AC + BE \cdot BD = AH \cdot AB + BH \cdot BA = AB(AH + HB) = AB^2 = 4R^2.$$

**Ví dụ 15.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Chứng minh rằng bốn hình tròn có đường kính  $AB, BC, CD, DA$  phủ kín miền tứ giác  $ABCD$ .

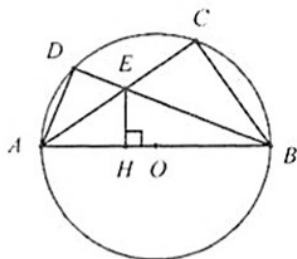
**Giải.** (h.4-15) Giả sử  $O$  là điểm bất kì trong tứ giác  $ABCD$ , tạo thành bốn góc  $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOA}$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOA} = 360^\circ$$

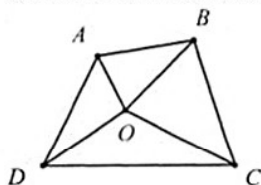
Nếu  $O$  nằm ngoài cả 4 hình tròn thì cả 4 góc  $AOB, BOC, COD, DOA$  đều nhọn, vô lí. Vậy  $O$  phải thuộc ít nhất một trong 4 hình tròn (đpcm).



Hình 4-13



Hình 4-14



Hình 4-15

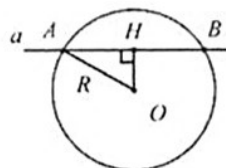
## BÀI TẬP

- 4.1. Cho đường tròn  $(O, R)$ . Tính độ dài cạnh của tam giác đều, bát giác đều nội tiếp đường tròn đã cho.
- 4.2. Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $P$  ở trong đường tròn. Xác định dây lớn nhất và dây ngắn nhất đi qua điểm  $P$ .
- 4.3. Cho đường tròn  $(O)$ , hai bán kính  $OA, OB$  vuông góc với nhau.  
Kẻ tia phân giác của góc  $AOB$ , cắt đường tròn ở  $D$ ;  $M$  là điểm chuyển động trên cung nhỏ  $AB$ , từ  $M$  kẻ  $MH \perp OB$  cắt  $OD$  tại  $K$ .  
Chứng minh  $MH^2 + KH^2$  có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$ .
- 4.4. Chứng minh rằng bao giờ cũng chia được một tam giác bất kì thành 7 tam giác cân, trong đó có ba tam giác bằng nhau.
- 4.5. Cho đường tròn  $(O)$  và một dây cung  $EF$  có khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây là  $d$ . Dựng hai hình vuông nội tiếp trong mỗi phần đó, sao cho mỗi hình vuông có hai đỉnh nằm trên đường tròn, hai đỉnh còn lại nằm trên dây  $EF$ . Tính hiệu của hai cạnh hình vuông đó theo  $d$ .
- 4.6. Cho hai đường tròn đồng tâm. Dựng một dây cắt hai đường tròn theo thứ tự tại  $A, B, C, D$  sao cho  $AB = BC = CD$ .
- 4.7. Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ , biết  $AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $AC = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Tính các góc của tam giác  $ABC$ .
- 4.8. Cho hình thoi  $ABCD$ . Gọi  $R_1$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ ,  $R_2$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABD$ . Tính cạnh của hình thoi  $ABCD$  theo  $R_1, R_2$ .
- 4.9. Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm được tô cùng một màu mà khoảng cách giữa hai điểm đó bằng 1.
- 4.10. Cho đường tròn  $(O, R)$  và dây  $AB$  cố định. Từ điểm  $C$  thay đổi trên đường tròn dựng hình bình hành  $CABD$ . Chứng minh giao điểm hai đường chéo của hình bình hành  $CABD$  nằm trên một đường tròn cố định.

## Chuyên đề 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khi đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$  có hai điểm chung, ta nói đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$  *cắt nhau*. Đường thẳng  $a$  còn gọi là *cát tuyến* (h.5-1).



Hình 5-1

$$OH \perp AB \Rightarrow OH < R \text{ và } HA = HB = \sqrt{R^2 - OH^2}.$$

2. Khi đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$  chỉ có một điểm chung, ta nói đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$  *tiếp xúc nhau* (h.5-2a).

Đường thẳng  $a$  là *tiếp tuyến* của đường tròn  $(O)$ . Điểm chung gọi là *tiếp điểm*.

3. Khi đường thẳng  $a$  là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
4. Khi đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$  không có điểm chung, ta nói đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$  không giao nhau. Khi đó

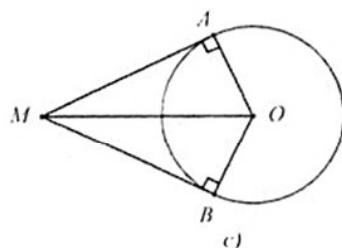
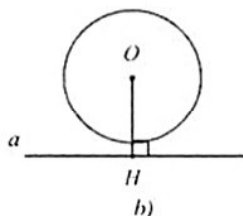
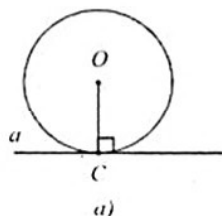
$$OH > R \text{ (h.5-2b)}.$$

5. Nếu một đường thẳng đi qua một tiếp điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.
6. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

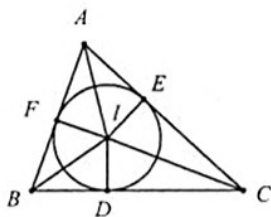
Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm (h.5-2c).

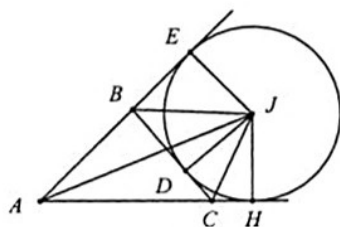


Hình 5-2

7. Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn nội tiếp là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác (h.5-3).
8. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia được gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác. Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp ứng với ba góc tam giác. Tâm của đường tròn bàng tiếp là giao điểm của hai đường phân giác ngoài, hoặc đường phân giác trong và một đường phân giác ngoài (h.5-4).



Hình 5-3



Hình 5-4

## KIỆN THỨC BỔ SUNG

- Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ .
- Nếu I nằm trong tam giác ABC và  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ ,  $\widehat{AIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}$  thì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
- Nếu J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC thì  $\widehat{BJC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ .
- Cho tam giác ABC, đặt BC a, CA b, AB c,  $a+b+c = 2p$ ; r là bán kính đường tròn nội tiếp, S là diện tích tam giác ABC thì  $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ ,  $S = pr$ .
- Nếu đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC tại F, E thì  $AE = AF = \frac{AB+AC-BC}{2}$ .

Các kiến thức bổ sung từ 1-5 coi như bài tập, bạn đọc tự chứng minh.

## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Cho góc vuông  $xOy$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với hai cạnh  $Ox$ ,  $Oy$  tại  $A$  và  $B$ . Một tiếp tuyến của đường tròn  $(I)$  tại điểm  $E$  cắt  $Ox$ ,  $Oy$  tại  $C$  và  $D$ .

Chứng minh  $\frac{1}{3}(OA+OB) < CD < \frac{1}{2}(OA+OB)$ .

**Giải.** (h.5-5) Ta có  $CA = CE$ ,  $DB = DE$

nên  $CD = CA + DB$ ; (1)

Trong  $\triangle OCD$  có  $CD < OC + OD$  (2).

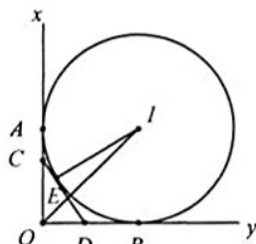
Từ (1) và (2) ta có

$$2CD < CA + DB + OC + OD \Rightarrow 2CD < OA + OB (*).$$

$$\triangle OCD \text{ là tam giác vuông} \Rightarrow OC < CD, OD < CD \Rightarrow OC + OD < 2CD \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) và (1) suy ra } OC + OD + CA + DB < 3CD \Rightarrow OA + OB < 3CD. \quad (**)$$

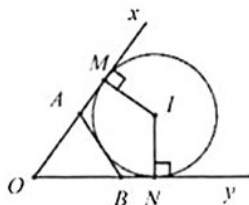
$$\text{Vậy } \frac{1}{3}(OA+OB) < CD < \frac{1}{2}(OA+OB).$$



Hình 5-5

**Ví dụ 2.** Cho góc  $xOy$ , hai điểm  $A, B$  thứ tự chuyển động trên  $Ox$  và  $Oy$  sao cho chu vi tam giác  $OAB$  không đổi. Chứng minh  $AB$  luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.

**Giải.** Dựng đường tròn bàng tiếp góc  $O$  của tam giác  $OAB$  (h.5-6). Ta có  $OM + ON = OA + OB + AB$  là chu vi tam giác  $OAB$  không đổi nên  $OM + ON$  không đổi. Mặt khác,  $OM = ON$  (bằng nửa chu vi tam giác  $OAB$ )  $\Rightarrow M, N$  cố định  $\Rightarrow$  giao điểm  $I$  của đường vuông góc với  $Ox$  kẻ từ  $M$  với đường phân giác góc  $xOy$  là cố định. Vậy  $AB$  luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm  $I$  bán kính  $IM$ .



Hình 5-6

**Ví dụ 3.** Cho hình vuông  $ABCD$ , lấy điểm  $E$  trên cạnh  $BC$  và điểm  $F$  trên cạnh  $CD$  sao cho  $AB = 3BE = 2DF$ . Chứng minh  $EF$  tiếp xúc với cung tròn tâm  $A$ , bán kính  $AB$ .

**Giải.** (h.5-7)  $3BE = 2DF = AB \Rightarrow BE = \frac{AB}{3}$ ,

$DF = \frac{AB}{2} = CF \Rightarrow CE = \frac{2AB}{3}$ . Trong tam giác vuông

CEF có:  $EF^2 = CE^2 + CF^2 = \frac{4AB^2}{9} + \frac{AB^2}{4} = \frac{25AB^2}{36}$ ,

$EF = \frac{5AB}{6}$ . Các tam giác ABE, ADF, CEF là các tam giác vuông

$$\Rightarrow S_{ABE} = \frac{AB^2}{6}; S_{ADF} = \frac{AB^2}{4}; S_{CEF} = \frac{AB^2}{6}$$

$$\Rightarrow S_{AEF} = AB^2 - S_{ABE} - S_{ADF} - S_{CEF} = \frac{5AB^2}{12}. \quad (1)$$

Kẻ  $AG \perp EF \Rightarrow S_{AEF} = \frac{EF \cdot AG}{2} = \frac{5AB \cdot AG}{12}. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $AG = \frac{AB}{5}$

$\Rightarrow EF$  tiếp xúc với cung tròn tâm A, bán kính AB.

**Ví dụ 4.** Cho đường tròn (O, R), và đường thẳng a cắt đường tròn tại A, B. Gọi M là điểm trên a và nằm ngoài đường tròn, qua M kẻ các tiếp tuyến MC, MD. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên a, đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định.

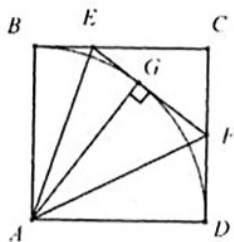
**Giải.** (h.5-8) MC, MD là tiếp tuyến  
 $\Rightarrow OC \perp MC, OD \perp MD$  và MO là tia phân giác của  $\widehat{CMD}$ ;  $\triangle OCM$  là tam giác vuông,  $OM \perp CH$   
 $\Rightarrow R^2 = OC^2 = OH \cdot OM \quad (1)$

Kẻ  $OI \perp AB$  cắt CD kéo dài tại K. Ta có  
 $\triangle OHK \sim \triangle OIM \Rightarrow \frac{OK}{OM} = \frac{OH}{OI}$

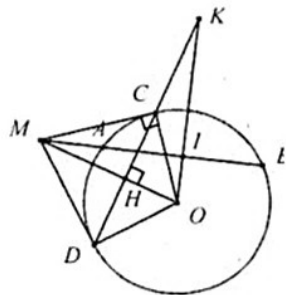
$$\Rightarrow OK = \frac{OM \cdot OH}{OI} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } OK = \frac{R^2}{OI}, \text{ mà } OI \text{ không đổi nên}$$

OK không đổi  $\Rightarrow K$  là điểm cố định. Vậy CD luôn đi qua điểm cố định khi M thay đổi trên a.

**Chú ý:** Bạn đọc hãy xét trường hợp đường thẳng a không cắt đường tròn (O, R).



Hình 5-7



Hình 5-8



**Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua I dựng đường thẳng vuông góc với IA cắt AB, AC tại M và N. Chứng minh rằng :

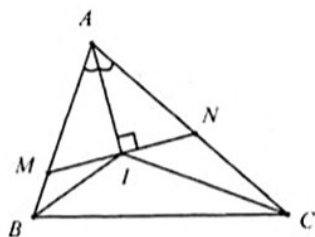
a)  $\frac{BM}{CN} = \frac{BI^2}{CI^2}$  ;

b)  $BM.AC + CN.AB + AI^2 = AB.AC$ .

**Giải.** (h.5-9) a) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC  $\Rightarrow$  AI là phân giác của  $\hat{A}$ ;  $MN \perp AI$

$$\Rightarrow \widehat{AMI} = 90^\circ \quad \frac{1}{2} \hat{A} = \frac{1}{2} (\hat{B} + \hat{C}); \quad \widehat{AMI} = \widehat{MIB} + \frac{1}{2} \hat{B}$$

$$\Rightarrow \widehat{MIB} = \frac{1}{2} \hat{C}$$



Hình 5-9

$$\Rightarrow \triangle BMI \sim \triangle BIC \Rightarrow \frac{BM}{BI} = \frac{BI}{BC}$$

$$\Rightarrow BI^2 = BM.BC. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } CI^2 = CN.CB \quad (2)$$

$$\text{Chia từng vế (1) và (2) cho nhau} \Rightarrow \frac{BI^2}{CI^2} = \frac{BM}{CN}.$$

b) Từ chứng minh trên suy ra

$$\triangle BMI \sim \triangle INC \Rightarrow \frac{BM}{IN} = \frac{MI}{NC} \Rightarrow BM.CN = MI.NI;$$

$$\triangle AMN \text{ là tam giác cân} \Rightarrow IM = IN \Rightarrow BM.CN = IM^2, \triangle AIM \text{ vuông}$$

$$\Rightarrow IM^2 = AM \cdot AI^2 \Rightarrow BM.CN = AM^2 \cdot AI^2$$

$$= AM.AN \cdot AI^2 = (AB - BM)(AC - CN) \cdot AI^2 =$$

$$= AB.AC - AB.CN - BM.AC + BM.CN \cdot AI^2$$

$$\Rightarrow BM.AC + CN.AB + AI^2 = AB.AC.$$

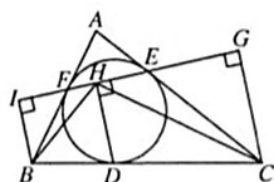
**Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC, D, E, F thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác AEC với các cạnh BC, CA, AB ; H là hình chiếu của D trên EF. Chứng minh HD là tia phân giác của góc BHC (h.5-10).

**Giải.** Gọi I, G là hình chiếu của B, C trên EF

thì  $HD // BI // CG$ ; E, F là các tiếp điểm  
 $\Rightarrow AF = AE \Rightarrow \triangle AFE$  là tam giác cân, suy ra  
 $\widehat{BFI} = \widehat{CEG} \Rightarrow BFI \sim CEG$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BI}{CG} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD} = \frac{HI}{HG} \Rightarrow \triangle BHI \sim \triangle CHG$$

(c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{BHI} = \widehat{CHG} \Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{CHD} \Rightarrow HD$  là  
 tia phân giác của  $\widehat{BHC}$ .

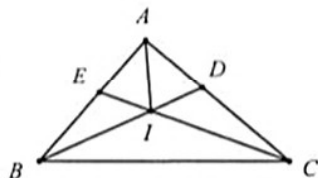


Hình 5-10

**Ví dụ 7.** Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. D, E thứ tự là giao điểm của đường thẳng BI và CI với cạnh AC, AB. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi  $BI \cdot CI = \frac{1}{2} BD \cdot CF$ .

**Giải.** (h.5-11) I là tâm đường tròn nội tiếp  $\Rightarrow$   
 BD, CE là hai đường phân giác của  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow DA = \frac{AC \cdot BA}{BC + BA} \quad (1)$$



Hình 5-11

I là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC \Rightarrow AI$  là  
 phân giác của góc A trong  $\triangle ABD$

$$\Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{IB}{BD} = \frac{AB}{AB + AD} \quad (2). \text{ Thay (1) vào (2)} \Rightarrow \frac{IB}{BD} = \frac{BC + AB}{AB + BC + CA}$$

$$\text{Tương tự, } \frac{IC}{CE} = \frac{BC + AC}{AB + BC + CA} \Rightarrow \frac{IB}{BD} \cdot \frac{IC}{CE} = \frac{(BC + AB)(BC + AC)}{(AB + BC + CA)^2};$$

$$BI \cdot CI = \frac{1}{2} BD \cdot CE \Leftrightarrow 2(BC + AB)(BC + AC) = (AB + BC + CA)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(BC^2 + BC \cdot AC + AB \cdot BC + AB \cdot AC)$$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(AB \cdot BC + BC \cdot CA + CA \cdot AB)$$

$$\Leftrightarrow BC^2 + AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ.$$

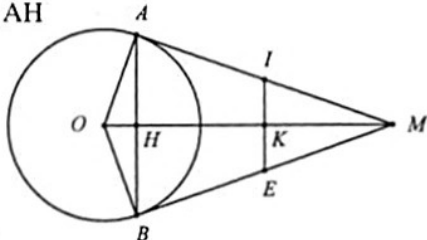
**Ví dụ 8.** Cho đường tròn  $(O, R)$  và điểm M cách tâm O một khoảng bằng  $3R$ . Từ M kẻ hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $(O, R)$  tại A và B, gọi I và E là trung điểm của MA và MB. Tính khoảng cách từ O đến IE.

**Giải.** (h.5-12) Ta có  $OA \perp MA$ ,  $OB \perp MB$  và  $AB \perp OM$

$\Rightarrow \triangle OAM$  là tam giác vuông, đường cao  $AH$

$$\Rightarrow OA^2 = OH \cdot OM \Rightarrow OH = \frac{OA^2}{OM} = \frac{R}{3}$$

$$\Rightarrow MH = 3R - \frac{1}{3}R = \frac{8}{3}R;$$



Hình 5-12

$I, E$  là trung điểm của  $MA, MB \Rightarrow IE$  là đường trung bình của  $\triangle MAB$

$$\Rightarrow HK = \frac{1}{2}MH = \frac{4R}{3} \Rightarrow OK = OH + HK = \frac{R}{3} + \frac{4R}{3} = \frac{5R}{3}.$$

**Ví dụ 9.** Cho tam giác  $ABC$  cân ( $AB = AC$ ). Gọi  $O$  là trung điểm của  $BC$ , dựng đường tròn ( $O$ ) tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $D, E$ .  $M$  là điểm chuyển động trên cung nhỏ  $\widehat{DE}$ , tiếp tuyến với đường tròn ( $O$ ) tại  $M$  cắt các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $P$  và  $Q$ .

Chứng minh  $BC^2 \geq 4BP \cdot CQ$ . Từ đó xác định vị trí của  $M$  để diện tích  $\triangle APQ$  đạt giá trị lớn nhất.

**Giải.** (h.5-13)  $S_{APQ} = S_{ABC} - S_{BPQC}$ ;

$S_{ABC}$  không đổi nên  $S_{APQ}$  lớn nhất  $\Leftrightarrow S_{BPQC}$  nhỏ nhất.

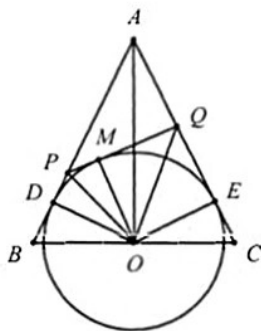
$D, E, M$  là các tiếp điểm

$\Rightarrow OD \perp AB, OE \perp AC, OM \perp PQ, BD = CE$ ;

$$OD = OE = OM = R \Rightarrow S_{BPQC} = \frac{1}{2}R(BP + PQ + QC)$$

$$= \frac{1}{2}R(BD + CE + 2DP + 2EQ) = R(BD + DP + EQ)$$

$$= R(BP + CQ - BD) \quad (1)$$



Hình 5-13

Mặt khác,  $\widehat{POQ} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A}) = \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle BPO \sim \triangle COQ$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BP}{CO} = \frac{BO}{CQ} \Rightarrow BP \cdot CQ = BO \cdot CO = \frac{BC^2}{4} \Rightarrow BC^2 \geq 4BP \cdot CQ.$$

Từ (1) suy ra  $S_{BPQC} \geq R(2\sqrt{BP \cdot CQ} - BD) - R(BC - BD)$ , dấu bằng xảy ra  
 $\Leftrightarrow BP = CQ \Leftrightarrow PQ \parallel BC \Leftrightarrow M$  thuộc đường cao AO (điểm chính giữa cung BC).

**Kết luận:**  $S_{APQ}$  lớn nhất  $\Leftrightarrow S_{BPQC}$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M$  thuộc AO.

**Chú ý:** Bạn đọc hãy chứng minh điều ngược lại:  $BC^2 - 4BP \cdot CQ$  thì PQ là tiếp tuyến.

**Ví dụ 10.** Cho đường tròn (O), M là điểm ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ cát tuyến cắt đường tròn tại A và B (MA > MB), gọi CD là đường kính vuông góc với AB, đường thẳng MC và MD cắt đường tròn tại E và K, giao điểm của DE, CK là H, I là trung điểm MH. Chứng minh IE, IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Giải.** (h.5-14) CD là đường kính  $\Rightarrow CE \perp DE$ ,  
 $CK \perp DK \Rightarrow H \in AM$ ;

$\triangle HEM$  là tam giác vuông, IM  $\perp$  IH

$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{EHI}, \widehat{IEM} = \widehat{IME}; \quad (1)$

$\triangle CED$  và  $\triangle HEM$  là hai tam giác vuông

$\Rightarrow \widehat{CMH} = \widehat{EDC};$

$\triangle ODE$  cân  $\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{OED}$ ; kết hợp (1) suy ra

$\widehat{IEM} = \widehat{IME} = \widehat{ODE}; \widehat{DEI} + \widehat{IEM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OED} + \widehat{DEI} = 90^\circ$

$\Rightarrow IE$  là tiếp tuyến của đường tròn (O).

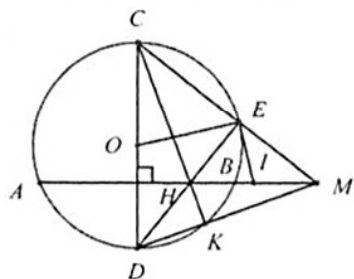
Hoàn toàn tương tự, IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Ví dụ 11.** Cho tam giác vuông ABC, đường cao AH. Gọi AD, AE là đường phân giác của các góc  $\widehat{BAH}, \widehat{CAH}$ . Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

**Giải.** (h.5-15)  $\triangle AEC$  có  $\widehat{AEB} = \widehat{C} + \widehat{CAE} = \widehat{C} + \frac{1}{2}(90^\circ - \widehat{C}) = 45^\circ + \frac{1}{2}\widehat{C}$ ;

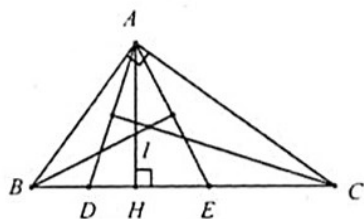
$\widehat{BAE} = \widehat{BAH} + \widehat{HAE} = \widehat{C} + \frac{1}{2}(90^\circ - \widehat{C}) = 45^\circ + \frac{1}{2}\widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{AEB} \Rightarrow \triangle BAE$  cân  $\Rightarrow BA = BE$ , tương tự  $CA = CD$ .



Hình 5-14

Từ B kẻ đường vuông góc với AE, từ C kẻ đường vuông góc với AD, chúng cắt nhau tại I, ta có BI là phân giác của góc  $\widehat{B}$ , CI là phân giác góc  $\widehat{C} \Rightarrow I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Ta lại có BI là đường trung trực của AE, CI là trung trực của AD  $\Rightarrow I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$  (đpcm).



Hình 5-15

**Ví dụ 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, các tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi M là trung điểm của AC, đường thẳng MI cắt cạnh AB tại N, đường thẳng DF cắt đường cao AH của  $\triangle ABC$  tại P.

Chứng minh rằng tam giác ANP là tam giác cân.

**Giải.** (h.5-16) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và E là tiếp điểm

nên  $IE \perp AC$ , mà  $\widehat{A} = 90^\circ$  suy ra  $IE \parallel AB$

$$\Rightarrow \frac{AN}{EI} = \frac{AM}{EM}$$

$$\Rightarrow AN = \frac{AM \cdot EI}{EM} = \frac{AC \cdot EI}{2(AM - AE)}. \quad (1)$$

Tứ giác AEIF là hình vuông nên  $AE = EI$ ;

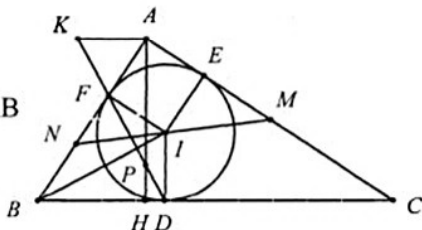
D, E, F là các tiếp điểm

$$\Rightarrow AE + CD + BD = \frac{1}{2}(BC + CA + AB) \Rightarrow AE = \frac{AC + AB - BC}{2}, \text{ thay vào (1)}$$

$$\begin{aligned} \text{ta được } AN &= \frac{AC \cdot AE}{AC - (AC + AB - BC)} = \frac{AC(AC + AB - BC)}{2(BC - AB)} \\ &= \frac{BC^2 - AB^2 + AC \cdot AB - AC \cdot BC}{2(BC - AB)} = \frac{BC + AB - AC}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt DF tại K;

$$D, F \text{ là tiếp điểm} \Rightarrow BD = BF \Rightarrow AK = AF \Rightarrow \widehat{AKF} = \widehat{BDF} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B};$$



Hình 5-16

$$\Delta AKP \text{ có } AP = AK \operatorname{tg} \widehat{K} = AK \operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{B} \right) = AK \cotg \frac{\widehat{B}}{2} = AE \cotg \frac{\widehat{B}}{2}$$

$$\Rightarrow AP = \frac{AC + AB - BC}{2} \cdot \frac{BD}{ID} \quad (3). \text{ Ta có } BD = \frac{BC + AB - AC}{2} \text{ và } ID = AE$$

$$\Rightarrow AP = \frac{AC + AB - BC}{2} \cdot \frac{BC + AB - AC}{AC + AB - BC} = \frac{BC + AB - AC}{2} \quad (4)$$

Từ (2) và (4)  $\Rightarrow AN = AP \Rightarrow$  tam giác ANP cân.

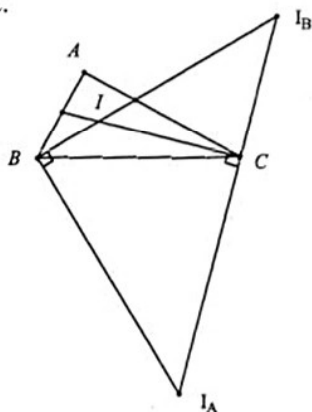
**Ví dụ 13.** Tính góc A của tam giác ABC, biết rằng đỉnh B cách đều tâm các đường tròn bàng tiếp của góc  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  của tam giác ABC.

**Giải.** (h.5-17) Gọi  $I_A, I_B$  là tâm hai đường tròn bàng tiếp góc  $\widehat{A}, \widehat{B} \Rightarrow I_A, I_B, C$  thẳng hàng  $\Rightarrow \Delta BI_A I_B$  có  $BI_A \perp BI_B$  (do tính chất đường phân giác trong và ngoài).

Theo giả thiết,  $BI_A = BI_B \Rightarrow \Delta BI_A I_B$  vuông cân  $\Rightarrow \widehat{BI_A I_B} = 45^\circ, CI \perp CI_A$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\text{mà } \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = 270^\circ - 180^\circ = 90^\circ.$$



Hình 5-17

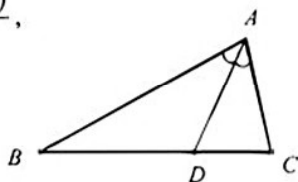
**Ví dụ 14.** Cho tam giác ABC có  $AB = 2AC$  và đường phân giác AD. Gọi  $r, r_1, r_2$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ACD, ABD.

Chứng minh rằng  $AD = \frac{pr}{3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right) - p$ , ( $p$  là nửa chu vi tam giác ABC).

$$\text{Giải. (h.5-18)} S_{ABC} = pr, S_{ADC} = \frac{r_1(AC + CD + AD)}{2},$$

$$S_{ABD} = \frac{r_2(AB + BD + AD)}{2};$$

AD là phân giác của  $\widehat{A}$  nên khoảng cách từ D đến AB và AC bằng nhau;



Hình 5-18

$$AB = 2AC \Rightarrow S_{ABD} = 2S_{ADC} \Rightarrow S_{ABC} = 3S_{ADC}$$

$$\Rightarrow S_{ACD} = \frac{pr}{3} \Rightarrow \frac{AC + CD + AD}{2} = \frac{pr}{3r_1} \quad (1)$$

$$S_{ABD} = \frac{2}{3} S_{ADC} \Rightarrow \frac{AB + BD + AD}{2} = \frac{2pr}{3r_2} \quad (2), \text{ cộng (1) và (2) theo vế ta được}$$

$$\frac{AC + CD + AD + AB + BD + AD}{2} = \frac{pr}{3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right) \Rightarrow AD = \frac{pr}{3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right) - p.$$

**Ví dụ 15.** Cho đường tròn (O) và điểm A cố định bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB và cát tuyến qua A cắt đường tròn tại C và D (AC < AD). Hỏi trọng tâm tam giác BCD chạy trên đường nào khi cát tuyến ACD thay đổi?

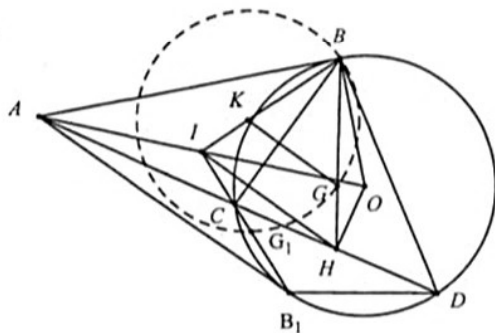
**Giải.** (h.5-19)

AB là tiếp tuyến  $\Rightarrow \widehat{ABO} = 90^\circ$ .

Kẻ  $OH \perp CD \Rightarrow HC = HD$

$\Rightarrow$  4 điểm A, B, O, H nằm trên đường tròn đường kính AO, I là trung điểm của AO đồng thời là tâm đường tròn qua A, B, O, H.

Gọi G là trọng tâm  $\triangle BCD$ , từ G kẻ đường thẳng song song với HI cắt BI tại K;



Hình 5-19

$$\triangle BIH \text{ có } \frac{KG}{IH} = \frac{BG}{BH} = \frac{BK}{BI} = \frac{2}{3}, A, O \text{ cố định} \Rightarrow B, I \text{ cố định} \Rightarrow K \text{ cố định};$$

$$KG = \frac{2}{3} IH = \frac{OA}{3}$$

$$\Rightarrow G \text{ nằm trên đường tròn tâm K, bán kính } R = \frac{OA}{3}.$$

**Giới hạn :**

C chỉ chạy trên cung  $\widehat{BB_1}$  nên G chỉ chạy trên cung  $\widehat{GG_1}$  nằm trong đường tròn (O).

## BÀI TẬP

- 5.1. Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$ .  $C$  là điểm trên nửa đường tròn, khoảng cách từ  $C$  đến  $AB$  là  $h$ . Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  theo  $R$  và  $h$ .
- 5.2. Cho tam giác  $ABC$ ,  $D$  là điểm trên  $BC$ . Đường tròn nội tiếp tam giác  $ABD$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $E$ , đường tròn nội tiếp tam giác  $ADC$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $F$ , đồng thời hai đường tròn này cùng tiếp xúc với đường thẳng  $d$  (khác  $BC$ ), đường thẳng  $d$  cắt  $AD$  tại  $I$ . Chứng minh rằng  $AI = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$ .
- 5.3. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Đường tròn đường kính  $BH$  cắt cạnh  $AB$  tại  $M$ , đường tròn đường kính  $HC$  cắt cạnh  $AC$  tại  $N$ . Chứng minh rằng  $MN$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đường kính  $BH$  và  $HC$ .
- 5.4. Cho tam giác cân  $ABC$  ( $AB = AC$ ), đường cao  $AK$ . Gọi  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ , đường tròn đường kính  $AH$  cắt cạnh  $AB$ ,  $AC$  tại  $D$  và  $E$ . Chứng minh rằng  $KD$  và  $KE$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $AH$ .
- 5.5. Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Từ  $M$  kẻ tiếp tuyến  $MA$ ,  $MB$  với đường tròn ( $A, B$  là tiếp điểm), tia  $OM$  cắt đường tròn tại  $C$ , tiếp tuyến tại  $C$  cắt tiếp tuyến  $MA$ ,  $MB$  tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh rằng diện tích tam giác  $MPQ$  lớn hơn một nửa diện tích tam giác  $ABC$ .
- 5.6. Trong tất cả các tam giác có cùng cạnh  $a$ , đường cao kẻ từ đỉnh đối diện với cạnh  $a$  bằng  $h$ , hãy xác định tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.
- 5.7. Cho tam giác  $ABC$ ,  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua  $I$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $IA$  cắt các cạnh  $AB$ ,  $AC$  tại  $D$  và  $E$ . Chứng minh 
$$\frac{BD}{CE} = \left( \frac{IB}{IC} \right)^2.$$
- 5.8. Cho ba điểm  $A, B, C$  cố định nằm trên một đường thẳng và theo thứ tự đó. Đường tròn  $(O)$  thay đổi luôn đi qua  $B$  và  $C$ . Từ  $A$  kẻ các tiếp tuyến  $AM$  và  $AN$  với đường tròn  $(O)$  ( $M, N$  là hai tiếp điểm). Đường thẳng  $MN$  cắt  $AO$  tại  $H$ , gọi  $E$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng khi đường tròn  $(O)$  thay đổi, tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OHE$  nằm trên một đường thẳng cố định.



**5.9.** Cho tam giác ABC,  $\widehat{A} = 30^\circ$  và BC là cạnh nhỏ nhất. Trên AB lấy điểm D, trên AC lấy điểm E sao cho  $BD = CE = BC$ . Gọi O và I là tâm đường tròn ngoại, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng  $OI = DE$  và  $OI \perp DE$ .

**5.10.** Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn  $(I, r)$ , kẻ các tiếp tuyến với đường tròn và song song các cạnh tam giác ABC. Các tiếp tuyến này tạo với các cạnh của tam giác ABC thành ba tam giác nhỏ, gọi diện tích ba tam giác nhỏ là  $S_1, S_2, S_3$  và diện tích tam giác ABC là  $S$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$$

**5.11.** Cho tam giác ABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp,  $I_A$  là tâm đường tròn bàng tiếp góc  $\widehat{A}$  và M là trung điểm BC. Gọi H và D là hình chiếu của I,  $I_A$  trên cạnh BC. Chứng minh rằng M là trung điểm của HD, từ đó suy ra đường thẳng MI đi qua trung điểm của AH.

**5.12.** Cho đường tròn  $(O, r)$  và điểm A cố định trên đường tròn. Qua A dựng tiếp tuyến d với đường tròn  $(O, r)$ . M là điểm chuyển động trên d, từ M kẻ tiếp tuyến đến đường tròn  $(O, r)$  có tiếp điểm là B (khác A). Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB và trục tâm tam giác AMB chạy trên đường nào?

**5.13.** Cho nửa đường tròn đường kính AB, từ điểm M trên đường tròn kẻ tiếp tuyến d. Gọi H và K là hình chiếu của A và B trên d. Chứng minh  $AH + BK$  không đổi từ đó suy ra đường tròn đường kính HK luôn tiếp xúc với AH, BK và AB.

**5.14.** Cho tam giác ABC, M là điểm trong tam giác, gọi H, D, E là hình chiếu của M thứ tự trên BC, CA, AB. Xác định vị trí của M sao cho giá trị của biểu thức

$$\frac{BC}{MH} + \frac{CA}{MD} + \frac{AB}{ME}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

**5.15.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi O và I là tâm đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác ABC. Biết tam giác BIO vuông tại I. Chứng minh

$$\frac{BC}{5} = \frac{CA}{4} = \frac{AB}{3}$$

## Chuyên đề 6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn

- Hai đường tròn có hai điểm chung được gọi là hai đường tròn *cắt nhau*. Hai điểm chung gọi là hai *giao điểm*. Đoạn thẳng nối hai điểm chung gọi là *dây chung*.
- Hai đường tròn chỉ có một điểm chung được gọi là hai đường tròn *tiếp xúc nhau*. Điểm chung đó gọi là *tiếp điểm*.
- Hai đường tròn không có điểm chung được gọi là hai đường tròn *không giao nhau*.

#### 2. Tính chất đường nối tâm

- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

#### 3. Hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính

Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  với  $R > r$ ;  $d = OO'$ .

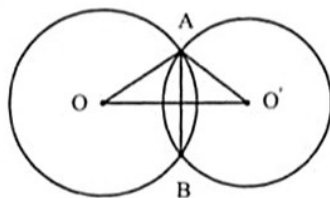
a) Hai đường tròn cắt nhau thì

$$R - r < d < R + r \quad (\text{h.6-1}).$$

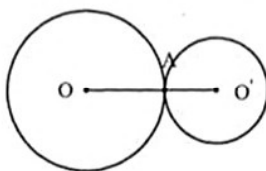
b) Hai đường tròn tiếp xúc nhau thì :

$$d = R + r \quad (\text{tiếp xúc ngoài, h.6-2a})$$

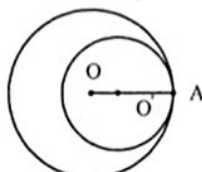
hoặc  $d = R - r$  (tiếp xúc trong, h.6-2b) ;



Hình 6-1



a)



b)

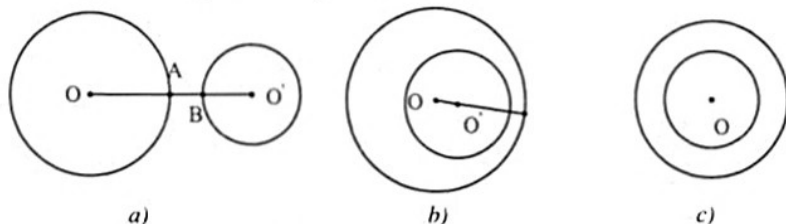
Hình 6-2

c) Hai đường tròn không giao nhau thì :

$d > R + r$  (hai đường tròn ở ngoài nhau, h.6-3a) ;

hoặc  $d < R + r$  (hai đường tròn đựng nhau, h.6-3b) ;

hoặc  $d = 0$  (hai đường tròn đồng tâm, h.6-3c).

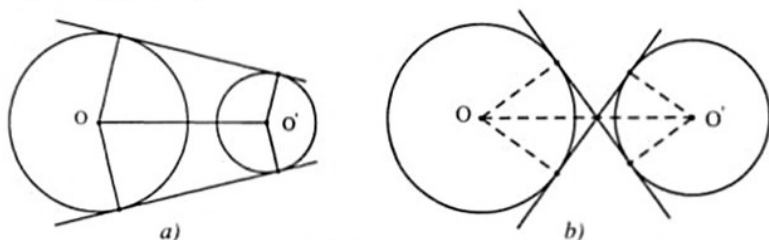


Hình 6-3

#### 4. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn.

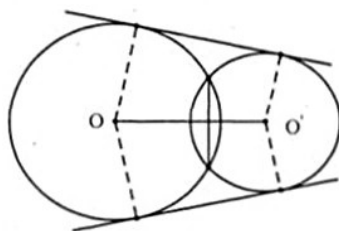
Hai đường tròn ở ngoài nhau có 2 tiếp tuyến chung ngoài (h.6-4a) và 2 tiếp tuyến chung trong (h.6-4b).



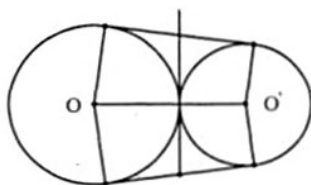
Hình 6-4

Hai đường tròn cắt nhau có 2 tiếp tuyến chung (h.6-5).

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có 3 tiếp tuyến chung (h.6-6).

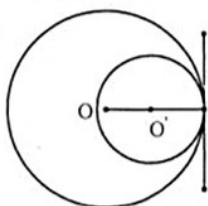


Hình 6-5

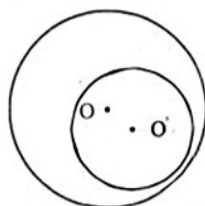


Hình 6-6

- Hai đường tròn tiếp xúc trong có 1 tiếp tuyến chung (h.6-7).
- Hai đường tròn đựng nhau không có tiếp tuyến chung (h.6-8).



Hình 6-7



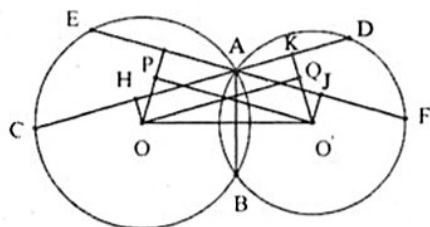
Hình 6-8

Bạn đọc hãy dựng các tiếp tuyến chung của các trường hợp trên như một bài tập.

## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Qua  $A$  kẻ cát tuyến  $CAD$  và  $EAF$  ( $C, E$  thuộc  $(O)$ ,  $D, F$  thuộc  $(O')$ ) sao cho  $AB$  là phân giác của góc  $\widehat{CAF}$ . Chứng minh  $CD \parallel EF$ .

**Giải.** (h.6-9) Từ  $O$  kẻ các đường thẳng  $OH \perp CA$ ,  $OI \perp EA$ ,  $OQ \parallel CD$ .



Hình 6-9

Từ  $O'$  kẻ  $O'J \perp AF$ ,  $O'K \perp AD$ ,  $O'P \parallel EF$ ;

$$AB \perp OO' \Rightarrow \widehat{IOO'} = \widehat{BAF} \text{ và } \widehat{KO'O} = \widehat{BAC}.$$

Theo giả thiết  $\widehat{BAC} = \widehat{BAF}$  nên  $\widehat{IOO'} = \widehat{KO'O}$ .

$\Delta POO'$  và  $\Delta QO'O$  là hai tam giác vuông có  $\widehat{IOO'} = \widehat{KO'O}$

và  $OO'$  chung  $\Rightarrow \Delta POO' = \Delta QO'O \Rightarrow O'P = OQ$ ;

$OH \perp AC$ ,  $O'K \perp AD \Rightarrow CD \parallel HK$  và  $OHKQ$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow OQ \parallel HK$ , tương tự  $EF \parallel IJ$  và  $PO' = IJ$ . Từ  $OQ = PO'$  suy ra  $CD \parallel EF$ .

**Ví dụ 2.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  và bốn đường tròn  $(A; R_A)$ ,  $(B; R_B)$ ,  $(C; R_C)$ ,  $(D; R_D)$  sao cho  $R_A + R_C = R_B + R_D < AC$ . Gọi  $d_1, d_3$  là hai tiếp tuyến

chung ngoài của  $(A; R_A)$  và  $(C; R_C)$ ,  $d_2, d_4$  là hai tiếp tuyến ngoài của  $(B; R_B)$  và  $(D; R_D)$ . Chứng minh tồn tại một đường tròn tiếp xúc với cả bốn đường thẳng  $d_1, d_2, d_3, d_4$ .

**Giải.** (h.6-10) Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ .

$$\text{Kẻ } OI \perp d_1 \Rightarrow OI = \frac{1}{2}(R_A + R_C), \text{ đặt}$$

$$OI = d_{(O, d_1)}$$

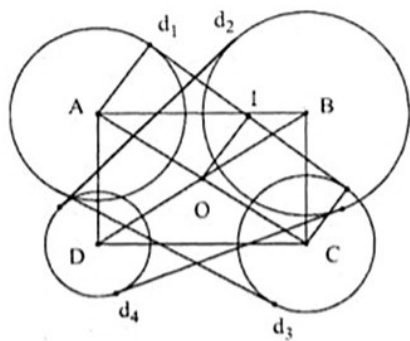
$$\Rightarrow d_{(O, d_1)} = d_{(O, d_3)} = \frac{1}{2}(R_A + R_C);$$

$$\text{Tương tự, } d_{(O, d_2)} = d_{(O, d_4)} = \frac{1}{2}(R_B + R_D).$$

$$\text{Theo giả thiết, } R_A + R_C = R_B + R_D$$

$$\Rightarrow d_{(O, d_1)} = d_{(O, d_3)} = d_{(O, d_2)} = d_{(O, d_4)} \Rightarrow \text{đường tròn tâm } O \text{ bán kính}$$

$$\frac{1}{2}(R_A + R_C) \text{ luôn tiếp xúc với các đường thẳng } d_1, d_2, d_3, d_4.$$



Hình 6-10

**Ví dụ 3.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  ngoài nhau,  $AB$  và  $CD$  là hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn, đường thẳng  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $M$ , cắt đường tròn  $(O')$  tại  $N$ . Chứng minh rằng  $AM = DN$ .

**Giải.** (h.6-11) Gọi  $I, J$  là trung điểm của  $AB$  và  $OO' \Rightarrow IJ$  là đường trung bình của hình thang  $ABO'O \Rightarrow IJ \perp AB \Rightarrow IA \perp IB$ ;

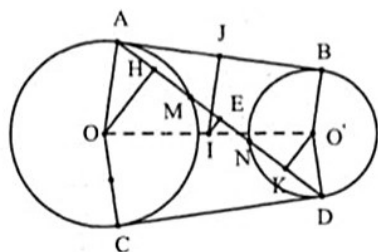
Do tính chất  $B$  và  $D$  đối xứng nhau qua  $OO' \Rightarrow IB \perp ID \Rightarrow$

$IA \perp IB \perp ID \Rightarrow I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABD$ .

$$\text{Kẻ } IE \perp AD \Rightarrow EA \perp ED;$$

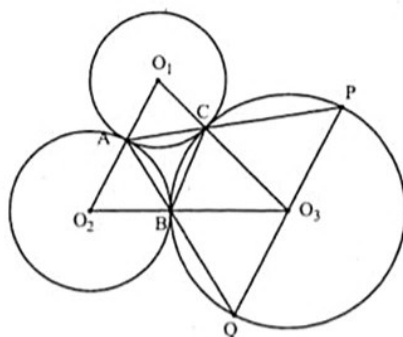
$$\text{Kẻ } OH \perp AD, O'K \perp AD, \text{ ta có } IO \perp IO' \Rightarrow EH \perp EK$$

$$\Rightarrow EA - EH = ED - EK \Rightarrow AH = DK \Rightarrow AM = DN.$$



Hình 6-11

**Ví dụ 4.** Cho ba đường tròn  $(O_1)$ ,  $(O_2)$ ,  $(O_3)$  tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. Gọi các tiếp điểm của  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  là A ; của  $(O_2)$ ,  $(O_3)$  là B ; của  $(O_3)$ ,  $(O_1)$  là C. AB và AC kéo dài cắt đường tròn  $(O_3)$  tại P và Q. Chứng minh rằng P,  $O_3$ , Q thẳng hàng.



Hình 6-12

**Giải.** (h.6-12). Ta có  $O_1AC$ ,  $O_2AB$ ,  $O_3BC$  là các tam giác cân

$$\Rightarrow \widehat{AO_1C} = 180^\circ - 2\widehat{O_1AC} ;$$

$$\widehat{AO_2B} = 180^\circ - 2\widehat{O_2BA} ;$$

$$\widehat{BO_3C} = 180^\circ - 2\widehat{O_3CB} .$$

Mặt khác,  $\widehat{AO_1C} + \widehat{AO_2B} + \widehat{BO_3C} = 180^\circ$ , cộng ba đẳng thức trên theo vế ta được  $\widehat{O_1AC} + \widehat{O_2BA} + \widehat{O_3CB} = 180^\circ$ ;  $\widehat{O_2BA} = \widehat{O_3BQ}$ ,  $\widehat{O_1AC} = \widehat{O_3CP}$

$$\Rightarrow \widehat{BO_3Q} = 180^\circ - 2\widehat{O_3PQ} = 180^\circ - 2\widehat{O_2BA} .$$

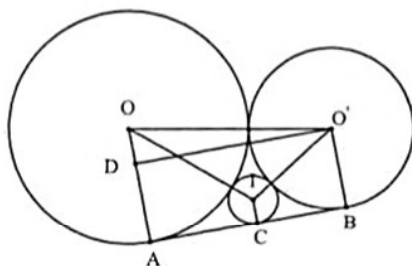
$$\text{Tương tự, } \widehat{BO_3C} = 180^\circ - 2\widehat{O_3CB}, \widehat{CO_3P} = 180^\circ - 2\widehat{O_1AC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BO_3Q} + \widehat{BO_3C} + \widehat{CO_3P}$$

$$= 180^\circ - 2\widehat{O_2BA} + 180^\circ - 2\widehat{O_3CB} + 180^\circ - 2\widehat{O_1AC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow P, O_3, Q \text{ thẳng hàng.}$$

**Ví dụ 5.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài AB (A thuộc  $(O)$ , B thuộc  $(O')$ ). Đường tròn  $(I; r)$  tiếp xúc với AB và hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .



Hình 6-13

Chứng minh rằng  $AB = 2\sqrt{R \cdot R'}$ , từ đó suy ra  $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}$ .

**Giải.** (h.6-13) Giả sử  $R > R'$ , từ  $O'$  kẻ đường thẳng song song với AB cắt OA tại D  $\Rightarrow \triangle ODO'$  là tam giác vuông  $\Rightarrow AB = O'D$ ,  $OD = R - R'$ .

Theo định lí Pythagor,  $DO'^2 = OO'^2 - OD^2 = (R+R')^2 - (R-R')^2 = 4RR'$

$$\Rightarrow DO' = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow AB = 2\sqrt{R.R'}.$$

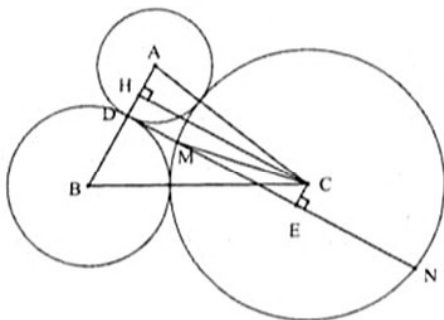
Theo giả thiết, đường tròn  $(I; r)$  tiếp xúc với  $AB$  và hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ , gọi  $C$  là tiếp điểm của đường tròn  $(I; r)$  với  $AB$ , từ chứng minh trên suy ra

$$AC = 2\sqrt{Rr} \text{ và } CB = 2\sqrt{rR'}. \text{ Do } AB = AC + CB$$

$$\Rightarrow \sqrt{R.R'} = \sqrt{Rr} + \sqrt{rR'}, \text{ chia cả hai vế cho } \sqrt{RrR'} \text{ được } \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}.$$

**Ví dụ 6.** Cho ba đường tròn  $(A; a)$ ,  $(B; b)$ ,  $(C; c)$  tiếp xúc với nhau từng đôi một.

Tại tiếp điểm  $D$  của đường tròn  $(A; a)$  và  $(B; b)$ , kẻ tiếp tuyến chung cắt đường tròn  $(C; c)$  tại  $M$  và  $N$ . Tính  $MN$  theo  $a, b, c$ .



Hình 6-14

**Giải.** (h.6-14) Kẻ  $CH \perp AB$ ,  
 $CE \perp MN \Rightarrow MN = 2ME$ ,  
 $ME^2 = CM^2 - CE^2 = c^2 - CE^2$

$DECH$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow CE = DH$ .

Theo định lí Pythagor cho  $\triangle CAH$  và  $\triangle CBH$ ,  $AC^2 - AH^2 = CB^2 - BH^2$

$$\Rightarrow (a+c)^2 - (a-DH)^2 = (b+c)^2 - (b+DH)^2$$

$$\Rightarrow (b+DH)^2 - (a-DH)^2 = (b+c)^2 - (a+c)^2$$

$$\Rightarrow DH = \frac{c(b-a)}{a+b} \Rightarrow ME^2 = c^2 - \frac{c^2(b-a)^2}{(a+b)^2} = \frac{4c^2ab}{(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow ME = \frac{2c\sqrt{ab}}{a+b} \Rightarrow MN = \frac{4c\sqrt{ab}}{a+b}.$$

**Ví dụ 7.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Trong nửa mặt phẳng bờ  $OO'$  có chứa điểm  $B$ , kẻ các bán kính  $OC // O'D$ .

Chứng minh rằng  $B$  là trực tâm của tam giác  $ACD$ .

**Giải.** (h.6-15) Tứ giác  $OCDO'$  có  $OC = O'D$  và  $OC \parallel O'D \Rightarrow OCDO'$  là hình bình hành  $\Rightarrow CD \parallel OO'$ ,

mà  $AB \perp OO'$  nên  $AB \perp CD$  (1).

Kẻ đường kính  $DE$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AB$  và  $OO'$  thì  $IA = IB$ ,  $IO = IO'$ . Tứ giác  $OCO'E$  là hình bình hành nên  $E, I, C$  thẳng hàng và  $IE = IC$ . Tứ giác  $AEBC$  có hai đường chéo  $AB$  và  $CE$  cắt nhau tại trung điểm  $\Rightarrow$  tứ giác  $AEBC$  là hình bình hành

$\Rightarrow EB \parallel AC$ ;  $DE$  là đường kính  $\Rightarrow DB \perp BE \Rightarrow BD \perp AC$  (2). Từ (1) và (2) suy ra  $B$  là trực tâm của tam giác  $ACD$ .

**Ví dụ 8.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ , góc vuông  $\widehat{xAy}$  thay đổi luôn đi qua  $A$ , cắt đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  tại  $B$  và  $C$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ . Xác định vị trí của  $B, C$  để  $AH$  có độ dài lớn nhất.

**Giải.** (h.6-16) Kẻ đường kính  $BD \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$ , theo giả thiết  $\widehat{BAC} = 90^\circ$

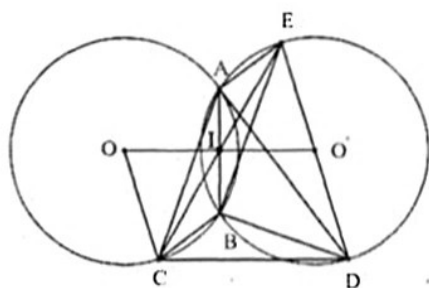
$\Rightarrow D, A, C$  thẳng hàng  $\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{O'AC}$ ;

$\widehat{OAD} = \widehat{ODA}$ ,  $\widehat{O'AC} = \widehat{O'CA} \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{O'CA} \Rightarrow BD \parallel CO'$ .

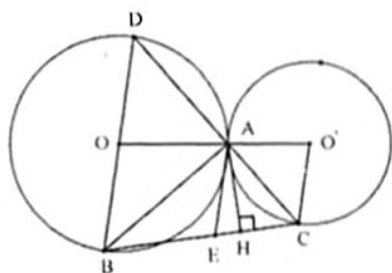
Từ  $A$  kẻ  $AE \parallel BD \Rightarrow \frac{AE}{BD} = \frac{CA}{CD} = \frac{O'A}{O'O} \Rightarrow AE = \frac{BD \cdot O'A}{O'O} = \frac{2R \cdot R'}{R + R'}$ ,

$AH \perp BC \Rightarrow AH \leq AE \Rightarrow AH \leq \frac{2R \cdot R'}{R + R'} \Rightarrow AH$  lớn nhất khi  $AH = \frac{2R \cdot R'}{R + R'}$ , đẳng

thức xảy ra khi  $H \equiv E \Leftrightarrow OB \perp BC, O'C \perp BC \Leftrightarrow BC$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$ .



Hình 6-15



Hình 6-16



**Ví dụ 9.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  ( $R > R'$ ) cắt nhau tại A và B. Kẻ đường kính AC và đường kính AD. Tính độ dài BC, BD biết  $CD = a$ .

**Giải.** (h.6-17) Đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$

có AC, AD là đường kính

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$$

$\Rightarrow C, B, D$  thẳng hàng

$$\Rightarrow CD = a = CB + BD.$$

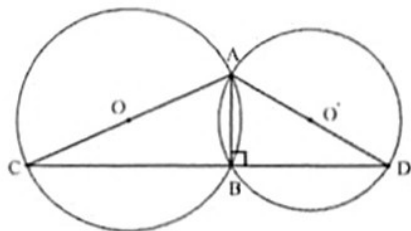
Theo định lý Pythagor

$$\Rightarrow AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$$

$$\Rightarrow 4R^2 - BC^2 = 4R'^2 - (a - BC)^2$$

$$\Rightarrow 2aBC = 4R^2 - 4R'^2 + a^2 \Rightarrow BC = \frac{4R^2 - 4R'^2 + a^2}{2a}$$

$$\Rightarrow BD = a - BC = \frac{a^2 - 4R^2 + 4R'^2}{2a}.$$

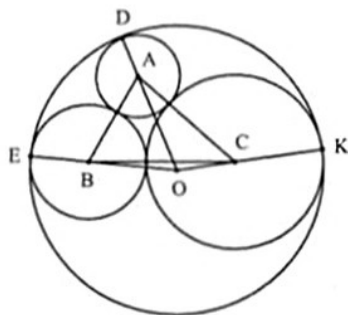


Hình 6-17

**Ví dụ 10.** Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho ba tam giác MAB, MAC, MBC có chu vi bằng nhau.

**Giải.** Dựng ba đường tròn  $(A; x)$ ,  $(B; y)$ ,  $(C; z)$  tiếp xúc với nhau từng đôi một (h.6-18).

Giả sử đường tròn  $(O, R)$  tiếp xúc với ba đường tròn trên. Gọi các tiếp điểm là D, E, K.



Hình 6-18

$$\Rightarrow OA + x = OB + y = OC + z = R$$

$$\Rightarrow OA + OB + (x + y) = 2R$$

$$\Rightarrow OA + OB + AB = 2R.$$

$$\text{Tương tự, } OA + OC + x + z = OA + OC + AC = 2R;$$

$$OB + OC + y + z = OB + OC + BC = 2R;$$

$OA + OB + AB$  là chu vi tam giác OAB,  $OA + OC + AC$  là chu vi tam giác OAC;  $OB + OC + BC$  là chu vi tam giác OBC

$\Rightarrow$  chu vi ba tam giác  $OAB$ ,  $OAC$ ,  $OBC$  bằng nhau  $\Rightarrow$  điểm  $O$  chính là điểm  $M$  cần tìm.

**Ví dụ 11.** Cho đường tròn tâm  $(O)$  và dây cung  $AB$ .  $M$  là điểm trên  $AB$ . Dựng đường tròn  $(O_1)$  qua  $A, M$  và tiếp xúc với  $(O)$ , đường tròn  $(O_2)$  qua  $M, B$  và tiếp xúc với  $(O)$ , hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là  $N$ . Chứng minh rằng  $\widehat{MNO} = 90^\circ$ .

**Giải.** (h.6-19)  $(O)$  tiếp xúc với  $(O_1)$  tại  $A$

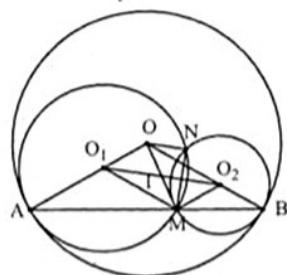
$\Rightarrow O, O_1, A$  thẳng hàng.

Tương tự,  $O, O_2, B$  thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ ;

$\widehat{O_1AM} = \widehat{O_1MA} \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{O_1MA}$

$\Rightarrow O_1M \parallel OB$



Hình 6-19

Tương tự,  $O_2M \parallel OA \Rightarrow OO_1MO_2$  là hình bình hành  $\Rightarrow O_1O_2$  đi qua trung điểm của  $OM$ ,  $MN \perp O_1O_2$  và cắt nhau tại trung điểm  $MN \Rightarrow O_1O_2 \parallel ON \Rightarrow \widehat{MNO} = 90^\circ$ .

**Ví dụ 12.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  ngoài nhau, tiếp tuyến chung trong  $CD$  và tiếp tuyến chung ngoài  $AB$  ( $A, C$  thuộc  $(O)$ ,  $B, D$  thuộc  $(O')$ ). Chứng minh rằng  $AC, BD$  và  $OO'$  đồng quy.

**Giải.** (h.6-20)  $AB$  cắt  $CD$  tại  $E$ ,  $OE$  cắt  $AC$  tại  $I$ ,  $EO'$  cắt  $BD$  tại  $K$ ; ta có

$EO$  là phân giác góc  $\widehat{AEC}$ ,  $EO'$  là phân giác góc  $\widehat{BED}$

$\Rightarrow OE \perp EO'$ , gọi  $H$  là giao điểm của

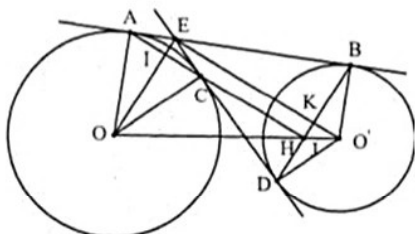
$AC$  với  $OO'$ ;  $AC \perp OE \Rightarrow AH \parallel EO'$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OO'} = \frac{OI}{OE} \quad (1)$$

$\widehat{BEO'} = \widehat{EAH}$ ,  $\widehat{EAH} = \widehat{AOE}$

$\Rightarrow \widehat{BEO'} = \widehat{AOE} \Rightarrow$  hai tam giác vuông  $\triangle BEO'$  và  $\triangle AOE$  đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{OI}{OE} = \frac{EK}{EO'} \quad (2)$$



Hình 6-20

Giả sử BD cắt  $OO'$  tại J,  $OE \parallel BD$  nên  $\frac{OJ}{OO'} = \frac{KE}{OE}$  (3)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow \frac{OH}{OO'} = \frac{OJ}{OO'} \Rightarrow OH = OJ \Rightarrow H \equiv J$ .

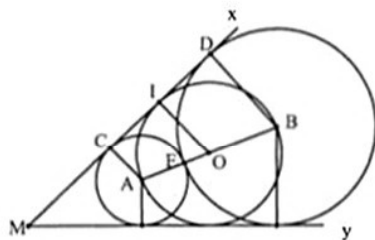
Vậy AC, BD,  $OO'$  đồng quy.

**Ví dụ 13.** Dựng hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau có tâm là hai điểm A, B cho trước, sao cho một trong hai tiếp tuyến chung ngoài đi qua điểm M cho trước.

**Giải. Phân tích** (h.6-21)

Giả sử đã dựng được hai đường tròn có tâm là A, B, tiếp xúc với nhau tại E và tiếp tuyến chung ngoài đi qua M có các tiếp điểm C, D.

Gọi O là trung điểm của AB và I là trung điểm của CD, có  $AC \perp Mx$ ,  $BD \perp Mx \Rightarrow AC \parallel BD \Rightarrow OI$  là đường trung bình của hình thang ACDB  $\Rightarrow OI = \frac{AC+BD}{2}$ .



Hình 6-21

(A) và (B) tiếp xúc nhau  $\Rightarrow AC+BD=AB \Rightarrow OI = \frac{1}{2} AB$  và  $OI \perp Mx$ .

**Cách dựng :** Dựng đường tròn  $(O; \frac{1}{2} AB)$  ;

Dựng đường thẳng Mx qua M và tiếp xúc đường tròn  $(O; \frac{1}{2} AB)$  tại I ;

Dựng các đường thẳng qua A, B vuông góc với Mx, cắt Mx tại C và D ;

Dựng đường tròn (A; AC) và (B; BD).

**Chứng minh:**  $AC \perp Mx$ ,  $BD \perp Mx \Rightarrow AC \parallel BD$  ;

$OA = OB$ ; AC, OI, BD song song với nhau  $\Rightarrow OI = \frac{AC+BD}{2}$ , mặt khác

$AB = 2OI \Rightarrow AB = AC + BD \Rightarrow (A; AC)$  và  $(B; BD)$  tiếp xúc nhau tại E và tiếp tuyến chung CD đi qua M.

**Biện luận:** Nếu  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O; \frac{1}{2}AB)$  : Từ  $M$  kẻ được hai tiếp tuyến với đường tròn  $\Rightarrow$  bài toán có hai nghiệm.

Nếu  $M$  nằm trên đường tròn  $(O; \frac{1}{2}AB)$ , bài toán có một nghiệm.

Nếu  $M$  nằm trong đường tròn  $(O; \frac{1}{2}AB)$ , bài toán vô nghiệm.

## BÀI TẬP

- 6.1. Cho đường tròn  $(O; R)$  ngoại tiếp tam giác đều  $ABC$ . Đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với hai cạnh  $AB, AC$  và đường tròn  $(O; R)$ . Tính khoảng cách từ  $O'$  đến  $B$  theo  $R$ .
- 6.2. Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ ,  $C$  là điểm trên nửa đường tròn sao cho  $CA < CB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $CH$ , đường tròn  $(I; \frac{CH}{2})$  cắt nửa đường tròn tại  $D$  và cắt các cạnh  $CA, CB$  thứ tự tại  $M$  và  $N$ , đường thẳng  $CD$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh rằng  $CMHN$  là hình chữ nhật, từ đó suy ra  $E, I, M, N$  thẳng hàng.
- 6.3. Cho ba đường tròn tâm  $O_1, O_2, O_3$  có cùng bán kính  $R$  cắt nhau tại điểm  $O$  cho trước.  $A, B, C$  là các giao điểm còn lại của ba đường tròn. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có bán kính  $R$ .
- 6.4. Ba đường tròn có bán kính bằng nhau cùng đi qua điểm  $O$ , từng đôi cắt nhau tại điểm thứ hai là  $A, B, C$ . Chứng minh rằng  $O$  là trực tâm tam giác  $ABC$ .
- 6.5. Cho hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ , kẻ dây  $AM$  của đường tròn  $(O_1)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_2)$  tại  $A$ , kẻ dây  $AN$  của  $(O_2)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_1)$  tại  $A$ . Trên đường thẳng  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $BD = AB$ . Chứng minh bốn điểm  $A, M, N, D$  nằm trên một đường tròn.
- 6.6. Cho đường tròn  $(O; R)$ , một điểm  $A$  trên đường tròn và đường thẳng  $d$  không đi qua  $A$ . Vẽ đường tròn tiếp xúc với  $(O; R)$  tại  $A$  và tiếp xúc với đường thẳng  $d$ .

**6.7.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  có cùng bán kính  $R$  sao cho tâm của đường tròn này nằm trên đường tròn kia, chúng cắt nhau tại  $A, B$ . Tính bán kính của đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với hai cung nhỏ  $\widehat{AO}, \widehat{AO'}$  đồng thời tiếp xúc với  $OO'$ .

**6.8.** Cho đường tròn  $(O)$  và dây  $AB$  cố định, điểm  $M$  tùy ý thay đổi trên đoạn thẳng  $AB$ . Qua  $A, M$  dựng đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . Qua  $B$  và  $M$  dựng đường tròn tâm  $J$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $B$ . Hai đường tròn tâm  $I$  và tâm  $J$  cắt nhau tại điểm thứ hai  $N$ . Chứng minh rằng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định.

**6.9.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài bằng  $a$  cho trước và hai tia  $Ax, By$  vuông góc với  $AB$ , nằm về cùng một phía đối với  $AB$ . Gọi  $(O)$  và  $(O')$  là các đường tròn thay đổi thỏa mãn đồng thời

a)  $(O)$  tiếp xúc với  $(O')$ .

b) Đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $Ax$  và  $AB$ ;

c) Đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với  $By$  và tiếp xúc với  $BA$ .

Tính giá trị lớn nhất của diện tích hình thang  $HO'E$ , trong đó  $H, E$  là hình chiếu của  $O$  và  $O'$  trên  $AB$ .

**6.10.** Cho hai đường tròn  $(O_1; R_1)$  và  $(O_2; R_2)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Một đường tròn  $(O)$  thay đổi tiếp xúc ngoài với hai đường tròn  $(O_1; R_1)$  và  $(O_2; R_2)$ . Giả sử  $MN$  là đường kính của đường tròn  $(O)$  sao cho  $MN \parallel OO'$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $MO_2$  và  $NO_1$ . Chứng minh rằng điểm  $H$  thuộc một đường thẳng cố định.

# GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

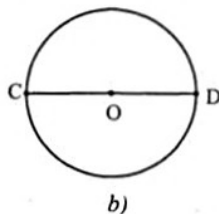
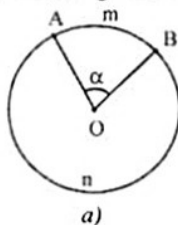
## Chuyên đề 7. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY CUNG. GÓC NỘI TIẾP

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Góc ở tâm

Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

Hai cạnh của góc ở tâm cắt đường tròn tại hai điểm chia đường tròn thành hai cung. Với góc ở tâm  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 180^\circ$ ) : Cung nằm trong góc  $\alpha$  được gọi là cung nhỏ  $\widehat{AmB}$ , cung nằm bên ngoài góc  $\alpha$  được gọi là cung lớn  $\widehat{AnB}$  (h.7-1a).



Hình 7-1

Với góc  $\alpha = 180^\circ$  ta có 2 cung nửa đường tròn (h.7-1b).

#### 2. Số đo cung

– Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó :

$$sđ \widehat{AmB} = sđ \angle AOB.$$

– Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa  $360^\circ$  và số đo của cung nhỏ :

$$sđ \widehat{AnB} = 360^\circ - sđ \widehat{AmB}.$$

– Số đo của cung nửa đường tròn bằng  $180^\circ$ .

#### 3. So sánh hai cung

– Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

– Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

#### 4. Cộng số đo cung

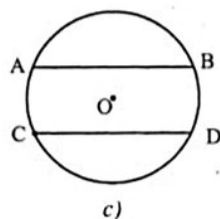
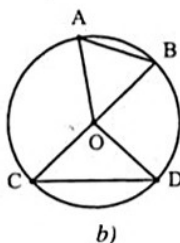
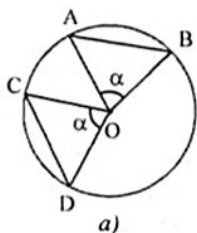
Nếu C là điểm nằm trên cung AB thì  $sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{AC} + sđ \widehat{CB}$ .

#### 5. Liên hệ giữa cung và dây cung

• Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

a)  $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD$  (h.7-2a) ;

b)  $\widehat{AB} < \widehat{CD} \Leftrightarrow AB < CD$  (h.7-2b)



Hình 7-2

• Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau (h.7-2c).

• Trong một đường tròn :

a) Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

b) Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

#### 6. Góc nội tiếp

*Góc nội tiếp là góc có đỉnh ở trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn.*

**Định lý:** Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn :  $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ \widehat{BC}$ .

**Hệ quả:** Trong một đường tròn

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc các cung bằng nhau thì bằng nhau.

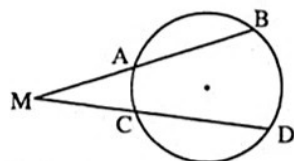
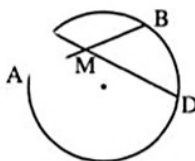
c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng  $90^\circ$ ) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

## Kiến thức bổ sung

*Hệ thức trong đường tròn :*

Nếu hai dây (hoặc hai cát tuyến) AB và CD cắt nhau tại điểm M thì  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$  (h.7-3).



Hình 7-3

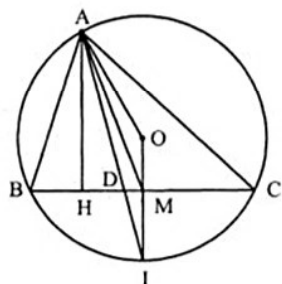
## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC không cân, từ đỉnh A kẻ đường cao AH, phân giác AD, trung tuyến AM.

a) Chứng minh rằng điểm D nằm giữa H và M.

b) Giả sử tam giác ABC nhọn, chứng minh rằng  $\widehat{MAD} < \widehat{DAH}$ .

**Giải.** (h.7-4) a) Không mất tính tổng quát giả sử  $AC > AB$ , đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường phân giác AD tại I  $\Rightarrow \widehat{BI} = \widehat{CI} \Rightarrow BI = CI$ . Tam giác ABC không cân  $\Rightarrow H, D, M$  là ba điểm phân biệt  $\Rightarrow D$  nằm giữa A và I, AM là trung tuyến  $\Rightarrow IM \perp BC$ ; AH là đường cao kẻ từ A  $\Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow D$  nằm giữa H và M.



Hình 7-4

b) Tam giác ABC nhọn  $\Rightarrow \widehat{BAC} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{BC}$  nhỏ hơn nửa đường tròn  $\Rightarrow M$  nằm giữa O và I  $\Rightarrow AM$  nằm giữa hai tia AI và AO

$$\Rightarrow \widehat{MAD} < \widehat{OAI}, OA = OI \Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OIA}; AH \parallel IM \Rightarrow \widehat{OIA} = \widehat{IAH} \\ \Rightarrow \widehat{MAD} < \widehat{DAH}.$$

**Ví dụ 2.** Cho tam giác đều ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng nửa đường tròn (O) đường kính BC. Trên nửa đường tròn lấy các điểm D, E sao cho  $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}$ . Các đường thẳng AD, AE cắt đoạn BC tại M và N. Chứng minh  $BM = MN = NC$ .

**Giải.** (h.7-5) Từ  $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC} \Rightarrow BD = DE = EC$

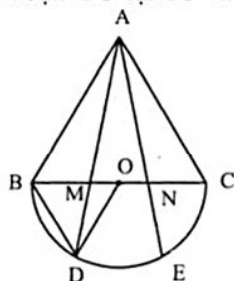
$\Rightarrow \widehat{BOD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle OBD$  là tam giác đều

$$\Rightarrow \triangle AMC \text{ và } \triangle DMB \text{ đồng dạng} \Rightarrow \frac{AC}{DB} = \frac{MC}{MB}.$$

Mặt khác,  $AC = 2BD$

$$\Rightarrow MC = 2MB, BC = BM + MC \Rightarrow BC = 3BM.$$

Tương tự,  $BC = 3CN$ . Vậy  $BM = MN = NC$ .



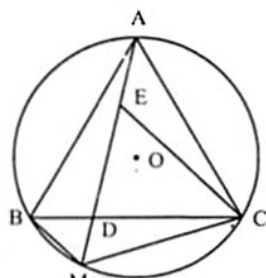
Hình 7-5



**Ví dụ 3.** Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm trên cung nhỏ BC, MA cắt cạnh BC tại D.

Chứng minh rằng  $MA = MB + MC$  và  $\frac{1}{MD} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ .

**Giải.** (h.7-6) Từ C kẻ đường thẳng song song với MB cắt MA tại E, ta có  $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$  (cùng chắn cung AB)



Hình 7-6

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = 60^\circ;$$

$$\begin{aligned} CE \parallel MB &\Rightarrow \widehat{CEM} = \widehat{AMB} = 60^\circ, \\ \widehat{AMC} = \widehat{ABC} &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \triangle MEC \text{ là tam giác đều} \Rightarrow MC = ME.$$

$$\widehat{ACE} = 60^\circ = \widehat{ECB} = \widehat{BCM} \Rightarrow \triangle CAE = \triangle CBM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow MB = AE \Rightarrow MA = ME + EA = MC + MB.$$

$$\triangle DMB \text{ đồng dạng } \triangle DEC \text{ (gg)} \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{ED}{EC} = \frac{ME}{MC} \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MD}{MC}$$

$$\frac{MC}{MC} = 1 - \frac{MD}{MC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{MD} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}.$$

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng  $DI = DB = DC$ .

**Giải.** (h.7-7) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác

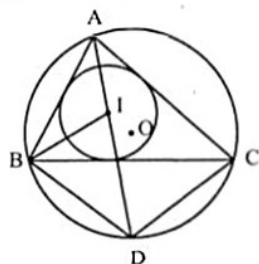
$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{CD}$$

$$\Rightarrow DB = DC;$$

$$\text{Xét } \triangle DBI \text{ có } \widehat{BID} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$$

$$\frac{1}{2} \widehat{A} + \frac{1}{2} \widehat{B} = \frac{1}{2} (\widehat{A} + \widehat{B}) \quad (1);$$

$$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} = \frac{1}{2} \widehat{B} + \widehat{DAC} = \frac{1}{2} (\widehat{B} + \widehat{A}) \quad (2)$$

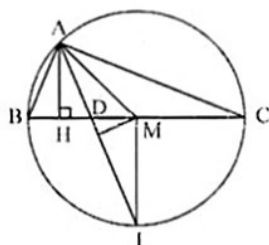


Hình 7-7

Từ (1) và (2) suy ra  $\triangle DBI$  cân tại D  $\Rightarrow DB = DI$ . Ta lại có  $DB = DC$  nên  $DI = DB = DC$ .

**Ví dụ 5.** Đường cao, đường phân giác, trung tuyến cùng xuất phát từ một đỉnh của một tam giác chia góc ở đỉnh đó thành bốn phần bằng nhau. Tính các góc của tam giác đã cho.

**Giải.** (h.7-8) Gọi AH, AD, AM là đường cao, phân giác, trung tuyến cùng xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC, theo Ví dụ 1, các điểm được sắp thứ tự H, D, M; AD kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại I  $\Rightarrow \widehat{BI} = \widehat{IC} \Rightarrow BI = IC \Rightarrow IM \perp BC \Rightarrow IM \parallel AH$



Hình 7-8

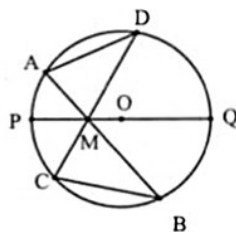
$\Rightarrow \widehat{HAI} = \widehat{AIM}$  (so le). Ta có

M nằm trên đường trung trực của BC. Mặt khác, theo giả thiết,  $\widehat{HAI} = \widehat{IAM} \Rightarrow \widehat{MIA} = \widehat{IAM} \Rightarrow MA = MI \Rightarrow M$  nằm trên đường trung trực của AI. Ta có BC và AC là hai dây cung của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC \Rightarrow M$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC  $\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = \frac{90^\circ}{4} = 22^\circ 30' \Rightarrow \widehat{C} = 22^\circ 30' \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'.$$

**Ví dụ 6.** Cho đường tròn (O, R), M là điểm nằm trong đường tròn. Qua M kẻ hai dây AB và CD. Chứng minh rằng  $MA \cdot MB = MC \cdot MD = R^2 - d^2$ , (trong đó d = MO).

**Giải.** (h.7-9) Xét hai tam giác  $\triangle MAD$  và  $\triangle MCB$ , có  $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ ,  $\widehat{AMD} = \widehat{CMB}$  nên chúng đồng dạng  $\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$



Hình 7-9

$\Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$ , không phụ thuộc vào vị trí các dây AB và CD.

Qua M kẻ đường kính PQ, theo chứng minh trên

$$\Rightarrow MA \cdot MB = MP \cdot MQ = (OP - MO)(MO + OQ) = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$$

$$\Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD = R^2 - d^2.$$

(Bạn đọc tự chứng minh kết quả trong trường hợp M nằm ngoài đường tròn).

**Ví dụ 7.** Chứng minh rằng trong mọi tam giác :

a) Trục tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thẳng hàng, hơn nữa  $HG = 2GO$  (Đường thẳng Euler).

b)  $d^2 = R^2 - 2Rr$  (Hệ thức Euler) r, R là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác và d là khoảng cách giữa hai tâm đường tròn.

**Giải.**

a) (h.7-10) Kẻ đường kính  $AD \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 90^\circ$ ;

$H$  là trực tâm tam giác  $ABC \Rightarrow BH \perp AC, CH \perp AB \Rightarrow$  tứ giác  $BDCH$  là hình bình hành  $\Rightarrow BC$  và  $HD$  cắt nhau tại trung điểm  $E$  của mỗi đường  $\Rightarrow AE$  là trung tuyến của tam giác  $ABC$ ,  $AE$  cắt  $HO$  tại  $G \Rightarrow G$  là trọng tâm tam giác  $AHD$

$\Rightarrow HG = 2GO$  và  $AG = 2GE \Rightarrow G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

b) (h.7-11) Theo Ví dụ 6  $\Rightarrow IA \cdot IM = R^2 - d^2$  (1)

$AM$  là phân giác góc  $A \Rightarrow MB = MC = MI$ . Kẻ đường kính  $MN$ , ta có

$$\widehat{NCM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{MAC} = \frac{1}{2} \widehat{A}.$$

$\Delta IAK$  và  $\Delta MNC$  là hai tam giác vuông có góc nhọn bằng nhau nên đồng dạng  $\Rightarrow \frac{IA}{MN} = \frac{IK}{MC} \Rightarrow$

$$IA \cdot MC = MN \cdot IK \Rightarrow IA \cdot IM = 2R \cdot r.$$

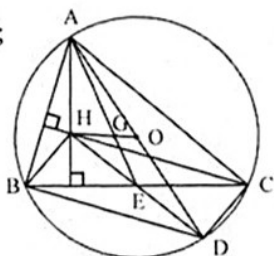
$$\text{Từ (1) suy ra } R^2 - d^2 = 2Rr \Rightarrow d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Từ kết quả trên suy ra trong mọi tam giác có  $R \geq 2r$ , dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác đó là tam giác đều.

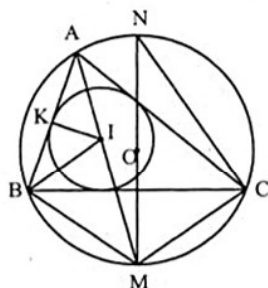
**Ví dụ 8.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  tiếp xúc trong tại  $A$  ( $R > r$ ). Tiếp tuyến tại  $M$  của đường tròn  $(O'; r)$  cắt đường tròn  $(O; R)$  tại  $B$  và  $C$ . Chứng minh rằng  $AM$  là tia phân giác của góc  $BAC$ .

**Giải.** (h.7-12) Đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  tiếp xúc trong tại  $A$

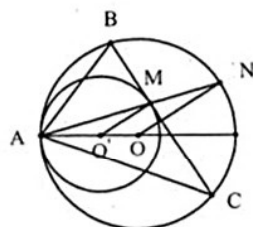
$\Rightarrow A, O, O'$  thẳng hàng;  $AM$  cắt đường tròn  $(O; R)$  tại  $N \Rightarrow \Delta O'AM$  và  $\Delta OAN$  là hai tam giác cân, có góc  $\widehat{OAN}$  chung  $\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{ANO} \Rightarrow OM \parallel ON$ ;



Hình 7-10



Hình 7-11

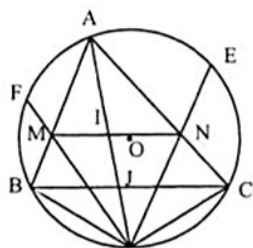


Hình 7-12

BC tiếp xúc với đường tròn (O; r) tại M

$\Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow ON \perp BC \Rightarrow \widehat{NB} = \widehat{NC} \Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{NAC} \Rightarrow AN$  là tia phân giác của góc BAC.

**Ví dụ 9.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là các điểm chính giữa của các cung nhỏ  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CA}$ ,  $\widehat{AB}$ , đường thẳng DF cắt AB tại M, đường thẳng DE cắt AC tại N. Chứng minh rằng MN song song với BC và đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Hình 7-13

**Giải.** (h.7-13)  $\widehat{BF} = \widehat{FA}$  nên DF là phân giác của  $\widehat{ADB} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{DB}$  (1)

Tương tự,  $\frac{AN}{NC} = \frac{AD}{DC}$  (2), theo giả thiết  $\widehat{DB} = \widehat{DC} \Rightarrow DB = DC$ .

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ; theo định lý Thales đảo,  $MN \parallel BC$ .

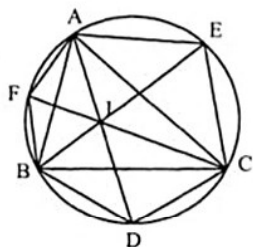
Gọi I và J là giao điểm của AD với MN và BC,  $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AI}{IJ}$  (3)

Xét hai tam giác  $\triangle BDJ$  và  $\triangle ADB$  có  $\widehat{ADB}$  chung,  $\widehat{BAD} = \widehat{CBD}$  nên chúng đồng dạng  $\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AB}{BJ}$ . Từ (3) và (1) suy ra  $\frac{AB}{BJ} = \frac{AI}{IJ} \Rightarrow BI$  là phân giác của  $\widehat{ABJ} \Rightarrow I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

**Ví dụ 10.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường phân giác của góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng  $AD + BE + CF > AB + BC + CA$ .

**Giải.** (h.7-14) Gọi giao điểm các đường phân giác là I. Theo Ví dụ 4 ta có  $DI = DB = DC$ , nên

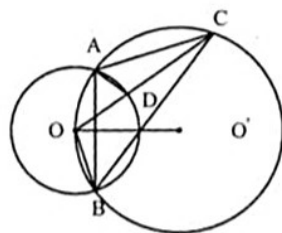
$$\begin{aligned} & 2(AD + BE + CF) \\ &= AI + BI + BI + CI + CI + AI + 2(ID + IE + IF) \\ &= (AI + BI) + (BI + CI) + (CI + AI) \\ &\quad + (DB + DC + EC + EA + FA + FB) \\ &> AB + BC + CA + BC + CA + AB = 2(BC + CA + AB) \\ &\Rightarrow AD + BE + CF > AB + BC + CA. \end{aligned}$$



Hình 7-14

**Ví dụ 11.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Tâm của đường tròn  $(O)$  nằm trên đường tròn  $(O')$ , dây  $OC$  của  $(O')$  cắt  $(O)$  tại  $D$ . Chứng minh rằng  $D$  là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Giải.** Ta có  $\widehat{BOC} = \widehat{BAC}$  (chấn cung  $\widehat{BC}$ );  
 $\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BOD}$  (góc nội tiếp và góc ở tâm)  
 $\Rightarrow \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{DAC} \Rightarrow AD$  là tia phân giác của  $\widehat{BAC}$  (1)



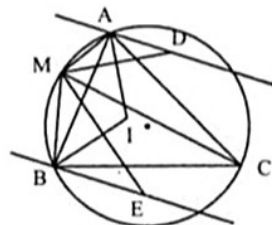
Hình 7-15

$OO' \perp AB \Rightarrow \widehat{OA} = \widehat{OB} \Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{OCB} \Rightarrow$   
 $CO$  là tia phân giác của  $\widehat{ACB}$  (2). Từ (1) và (2) suy ra  $D$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Ví dụ 12.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp.  $M$  là điểm tùy ý trên đường tròn. Chứng minh rằng các đường thẳng đối xứng của  $AM$ ,  $BM$ ,  $CM$  qua các đường phân giác của  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  song song với nhau.

**Giải.** (h.7-16) Giả sử  $M$  trên cung  $\widehat{AB}$ ,  $AD$  là đường thẳng đối xứng của  $AM$  qua đường phân giác  $AI$

$\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{DAC}$ ,  $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$  (cùng chấn cung  $\widehat{MB}$ ). Tương tự,  $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$  suy ra



Hình 7-16

$$\begin{aligned} \widehat{DAB} + \widehat{ABE} &= \widehat{A} + \widehat{CAD} + \widehat{B} + \widehat{CBE} \\ &= \widehat{A} + \widehat{MCB} + \widehat{B} + \widehat{ACM} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \\ &\Rightarrow AD \parallel BE. \end{aligned}$$

Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

**Ví dụ 13.** Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$  cố định,  $M$  là điểm trên đường tròn, qua  $M$  dựng đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $M$ , và tiếp xúc với  $AB$  tại  $N$ , đường tròn  $(I)$  cắt  $MA$  tại  $C$  và  $MB$  tại  $D$ .  $MN$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$ ,  $CN$  cắt  $BE$  tại  $P$  và  $DN$  cắt  $AE$  tại  $Q$ . Xác định vị trí của đường tròn  $(I)$  sao cho chu vi của tam giác  $EPQ$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Giải.** (h.7-17)  $AB$  là đường kính  $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow CD$  là đường kính đường tròn  $(I) \Rightarrow I$  nằm trên  $CD$  và  $M, I, O$  thẳng hàng  $\Rightarrow CD \parallel AB$ ,  
 $IN \perp AB \Rightarrow \widehat{NC} = \widehat{ND} \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{NMD} \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BE} \Rightarrow E$  cố định và  $OE \perp AB$ .

$\Delta NCD$  là tam giác vuông cân  $\Rightarrow NQ \perp AE$ .  
 Tương tự,  $NP \perp BE \Rightarrow$  tứ giác  $EPNQ$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow \Delta EPQ$  là tam giác vuông,  $NE = PQ$ ;  
 $EQ = NP = PB$ .

Chu vi  $\Delta EPQ = EQ + EP + PQ = PB + EP + EN = EB + EN$ .

Ta có  $EB + EN \geq OE\sqrt{2} + EO = \frac{1}{2}AB(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow$  Chu vi  $\Delta EPQ$  có giá trị nhỏ nhất bằng  $\frac{1}{2}AB(1 + \sqrt{2})$ , đạt được khi  $N \equiv O \Leftrightarrow M \equiv K \Leftrightarrow I$  là trung điểm  $OK$ .

**Ví dụ 14.** Cho đường tròn  $(O)$  và dây  $AB$  cố định.  $M$  là điểm bất kì trên đường tròn. Điểm  $I$  chia đôi đường gấp khúc  $AMB$ . Chứng minh rằng  $I$  thuộc một đường tròn cố định.

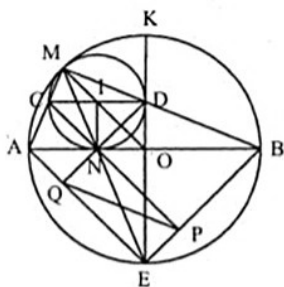
**Giải.** (h.7-18) Kéo dài  $AM$  lấy điểm  $C$  sao cho  $MB = MC$ . Ta có  $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{ADB}$ .

Gọi  $D$  là điểm chính giữa của cung  $\widehat{AB}$ , ta có  $DA = DB = DC \Rightarrow \Delta ADC$  cân,  $I$  là trung điểm  $AC \Rightarrow DI \perp AC$ ;  $A, D$  cố định  $\Rightarrow I$  nằm trên đường tròn đường kính  $AD$ .

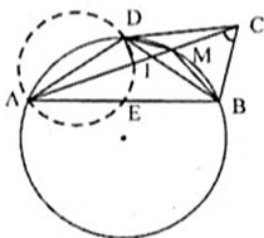
**Ví dụ 15.** Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ .  $M$  là trung điểm  $AB$ , qua  $M$  dựng hai dây  $CD$  và  $PQ$ ,  $CQ$  và  $PD$  cắt  $AB$  ở  $E$  và  $F$ . Chứng minh  $ME = MF$  (Bài toán Con bướm).

**Giải.** (h.7-19) Hạ  $OH \perp CQ$ ,  $OK \perp PD \Rightarrow HC = HQ$ ,  $KP = KD$ ;

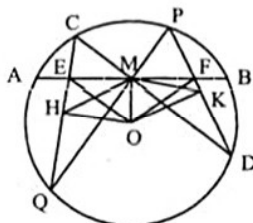
$\Delta MPD$  và  $\Delta MCQ$  có  $\widehat{QCD} = \widehat{QPD}$  (chắn cung  $\widehat{QD}$ ) và góc  $\widehat{M}$  đối đỉnh  $\Rightarrow$  hai tam giác đồng dạng  $\Rightarrow \widehat{CHM} = \widehat{PKM}$  (1);



Hình 7-17



Hình 7-18



Hình 7-19

M là trung điểm AB  $\Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow$  bốn điểm O, M, E, H nằm trên đường tròn đường kính OE  $\Rightarrow \widehat{EHM} = \widehat{EOM}$  (chấn cung EM) (2)

Tương tự, bốn điểm O, M, F, K nằm trên đường tròn đường kính OF  $\Rightarrow \widehat{MKF} = \widehat{MOF}$  (chấn cung MF) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra  $\widehat{EOM} = \widehat{FOM}$ ,  $OM \perp AB \Rightarrow$  tam giác OEF là tam giác cân  $\Rightarrow ME = MF$ .

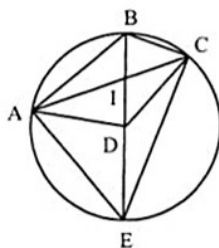
**Ví dụ 16.** Cho tứ giác ABCD có  $\widehat{BAC} = 20^\circ$ ,  $\widehat{BCA} = 35^\circ$ ,  $\widehat{BDC} = 40^\circ$ ,  $\widehat{BDA} = 70^\circ$ . Tính góc tạo bởi hai đường chéo của tứ giác.

**Giải.** (h.7-20) Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đường thẳng BD kéo dài cắt đường tròn tại E.

Xét tam giác DEC, có  $\widehat{BEC} = \widehat{BAC} = 20^\circ$  (chấn cung BC).

Góc ngoài  $\widehat{BDC} = \widehat{DEC} + \widehat{DCE} \Rightarrow 40^\circ = 20^\circ + \widehat{DCE} \Rightarrow \widehat{DCE} = 20^\circ \Rightarrow DE = DC$ . Tương tự, xét tam giác ADE ta có  $DE = DA$  do đó

D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC  $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ACB} = 35^\circ$   
 $\Rightarrow \widehat{ADE} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = 55^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 35^\circ = \widehat{CAD}$   
 $\Rightarrow \widehat{AID} = 180^\circ - \widehat{BDA} - \widehat{CAD} = 180^\circ - 70^\circ - 35^\circ = 75^\circ$ .



Hình 7-20

## BÀI TẬP

**7.1.** Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có  $S = \frac{abc}{4R}$  (S là diện tích tam giác ;

a, b, c là độ dài ba cạnh, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác).

**7.2.** Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự nằm trên đường tròn (O ; R). Chứng

minh đẳng thức:  $\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}$ .

**7.3.** Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC khi biết ba cạnh là a, b, c.

**7.4.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A kẻ cát tuyến cắt đường tròn (O) tại C, cắt đường tròn (O') tại D sao cho CD vuông góc với AB, đường thẳng CB cắt đường tròn (O) tại M, đường thẳng DB cắt đường tròn (O') tại N. Chứng minh AB là tia phân giác của  $\widehat{MAN}$ .

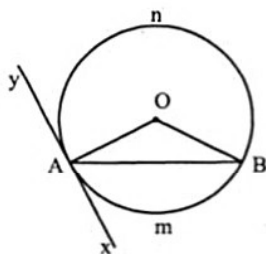
- 7.5. Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại A và B. Qua A kẻ cát tuyến cắt đường tròn  $(O)$  tại C, cắt đường tròn  $(O')$  tại D. Chứng minh rằng tam giác ACD có số đo các góc không đổi, từ đó xác định vị trí của cát tuyến CD có độ dài lớn nhất.
- 7.6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn  $(O)$ , các đường phân giác của các góc  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại D, E, F. Chứng minh đường thẳng EF vuông góc với AD.
- 7.7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm I trong tam giác, M là điểm trên đường tròn. Gọi D, H, E là các điểm đối xứng của M qua AI, BI, CI. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi AD, BH, CE song song.
- 7.8. Cho đoạn thẳng AB và điểm C trên đoạn AB, qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với AB. M là điểm trên d, gọi D và E là các điểm đối xứng của C qua MA và MB, đường thẳng DE cắt MA và MB tại P và Q. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác CPQ chạy trên đường nào khi M chuyển động trên d?
- 7.9. Cho tứ giác ABCD có  $\widehat{BAC} = 40^\circ, \widehat{BDA} = 70^\circ, \widehat{BCA} = 20^\circ, \widehat{BDC} = 35^\circ$ . Tính góc tạo bởi hai đường chéo.
- 7.10. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn  $(O)$ , đường phân giác AD bằng cạnh AC và vuông góc với OH (H là trực tâm của tam giác ABC). Tính các góc của tam giác ABC.

## **Chuyên đề 8. GÓC TẠO BỞI HAI CÁT TUYẾN HOẶC TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN**

### **I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**Định nghĩa:** Nếu xy là tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại điểm A thì điểm A chia đường thẳng xy thành hai tia tiếp tuyến Ax và Ay. Do đó tiếp tuyến tại A tạo với dây AB hai góc:

- Góc giữa tia tiếp tuyến Ax với dây AB chắn cung  $\widehat{AmB}$ ;
- Góc giữa tia tiếp tuyến Ay với dây AB chắn cung  $\widehat{AnB}$ .



Hình 8-1



**Định lý:** Số đo của cung tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

$$\widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AmB}, \quad \widehat{BAy} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AnB}.$$

\* Nếu góc  $\widehat{BAx}$  có số đo bằng nửa số đo của cung  $\widehat{AB}$  căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh  $Ax$  là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

\* **Hệ quả:** Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

\* **Định lý:**

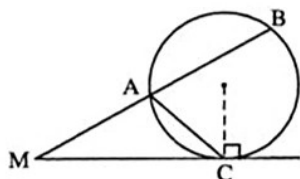
Số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn

Số đo của góc có đỉnh bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

### Kiến thức bổ sung

**Hệ thức lượng trong đường tròn:**

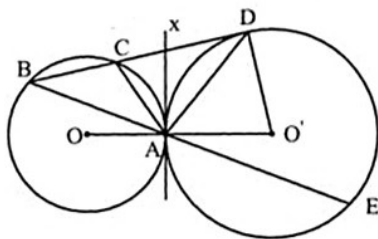
Nếu  $MAB$  là cát tuyến và  $MC$  là tiếp tuyến kẻ từ  $M$  đến một đường tròn thì  $MC^2 = MA \cdot MB$  (h.8-2).



Hình 8-2

## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ , dây  $BC$  của đường tròn  $(O)$  đồng thời là tiếp tuyến của đường tròn  $(O')$  tại  $D$ . Đường thẳng  $BA$  cắt đường tròn  $(O')$  tại  $E$ . Chứng minh rằng  $\widehat{CAD} = \widehat{DAE}$ .



Hình 8-3

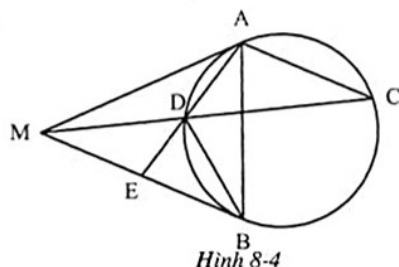
**Giải.** (h. 8-3) Dựng tiếp tuyến chung  $Ax \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CAx}$  (chắn cung  $\widehat{AC}$ ) và  $\widehat{DAX} = \widehat{ADC}$  (chắn cung  $\widehat{AD}$ ), do đó  $\widehat{DAE} = \widehat{ABD} + \widehat{ADB} = \widehat{CAx} + \widehat{DAX} = \widehat{CAD}$  (đpcm).

**Ví dụ 2.** Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O). Từ A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn tại C, đường thẳng MC cắt đường tròn tại D. Chứng minh đường thẳng AD đi qua trung điểm của MB.

**Giải.** (h. 8-4)  $AC \parallel MB \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CMB}$  (so le), mà  $\widehat{ACD} = \widehat{MAD}$  (chắn cung  $\widehat{AD}$ ) nên  $\widehat{CMB} = \widehat{MAD}$

$\Rightarrow \Delta MED$  đồng dạng với  $\Delta AEM$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{ED}{EM} \Rightarrow ME^2 = AE \cdot ED \quad (1)$$



Hình 8-4

MB là tiếp tuyến  $\Rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{DAB}$  (chắn cung  $\widehat{BD}$ )

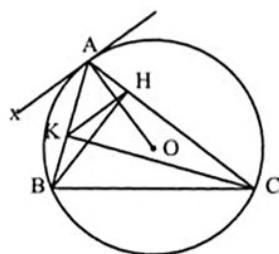
$$\Rightarrow \Delta BED \text{ và } \Delta AEB \text{ đồng dạng} \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow BE^2 = AE \cdot ED \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $ME = BE$ .

**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), A là điểm cố định; B, C thay đổi. Kẻ đường cao BH và CK. Chứng minh rằng HK luôn song song với một đường thẳng cố định.

**Giải.** (h. 8-5) Bài này có nhiều cách giải, xin giới thiệu hai cách sử dụng kiến thức trong chuyên đề, bạn đọc hãy tìm lời giải khác.

**Cách 1:** Qua A dựng tiếp tuyến Ax với đường tròn  $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BAx}$  (chắn cung  $\widehat{AB}$ ). Ta có  $BH \perp AC$ ,  $CK \perp AB \Rightarrow B, K, H, C$  nằm trên đường tròn đường kính BC  $\Rightarrow \widehat{HKC} = \widehat{HBC}$  (chắn cung  $\widehat{HC}$ ),  $\widehat{HBC} + \widehat{C} = 90^\circ$ ,  $\widehat{AKH} + \widehat{HKC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{KAx} \Rightarrow KH \parallel Ax$ .



Hình 8-5

Có OA cố định,  $OA \perp Ax \Rightarrow Ax$  cố định  $\Rightarrow KH$  luôn song song với đường thẳng cố định.

**Cách 2:** (h.8-6) Đường thẳng HK cắt đường tròn ngoại tiếp tại M, N, ta có

$$\widehat{AKN} = \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{AN} + \widehat{MB}) \quad (1)$$

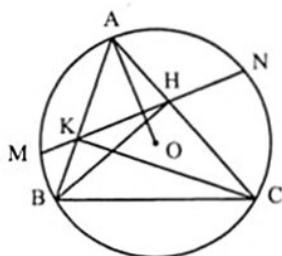
$CK \perp AB, BH \perp AC \Rightarrow B, K, H, C$  nằm trên đường tròn đường kính BC

$$\Rightarrow \widehat{BKH} = \widehat{BKC} + \widehat{CKH} = 90^\circ + \widehat{HBC}.$$

$$\text{Ta có } \widehat{AKN} = 180^\circ - \widehat{BKN}$$

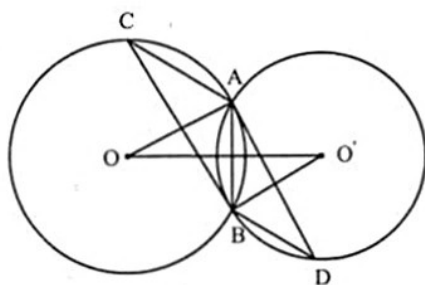
$$= 180^\circ - 90^\circ - \widehat{HBC} = 90^\circ - \widehat{HBC} = \widehat{C} = \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{BM} + \widehat{MA}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{AM} = \widehat{AN} \Rightarrow OA \perp HK \Rightarrow KH$  luôn song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O).



Hình 8.6

**Ví dụ 4.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại D, tiếp tuyến tại B với đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại C. Chứng minh rằng  $AC \cdot AD^2 = BD \cdot BC^2$ .



Hình 8-7

**Giải.** (h. 8-7) Ta có  $\widehat{ACB} = \widehat{DAB}$  (chấn cung  $\widehat{AB}$  của đường tròn (O));

$$\widehat{ADB} = \widehat{ABC} \text{ (chấn cung } \widehat{AB} \text{ của đường tròn (O'))}$$

$$\Rightarrow \triangle CAB \text{ đồng dạng } \triangle ABD \Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{CB}{AD}, \frac{AB}{BD} = \frac{CB}{AD}.$$

Nhân từng vế hai đẳng thức trên ta được

$$AC \cdot AD^2 = BD \cdot BC^2.$$

**Ví dụ 5.** Cho tam giác nhọn ABC, đường cao BH và CK. Trên BH lấy điểm D và trên CK lấy điểm E sao cho  $\widehat{ADC} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ . Chứng minh rằng  $AD = AE$ .

(Đề thi Olympic New York 1976)

**Giải.** (h. 8-8) Theo giả thiết,  $\widehat{C} = \widehat{AKH} \Rightarrow \Delta AKH$  và  $\Delta ACB$  đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AK \cdot AB = AH \cdot AC,$$

$$AD \perp DC \Rightarrow AD^2 = AH \cdot AC.$$

$$\text{Tương tự, } AE^2 = AK \cdot AB \Rightarrow AE = AD.$$

**Ví dụ 6.** Chứng minh rằng trong một tam giác, đường tròn ngoại tiếp đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp tam giác.

**Giải.** Gọi I, J thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc  $\widehat{C}$

$\Rightarrow$  I, J nằm trên đường phân giác của góc  $\widehat{C}$ .

Gọi E là giao điểm của CJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

$$\widehat{AIE} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C}), \widehat{EAI} = \widehat{EAB} + \widehat{BAI} = \frac{1}{2}(\widehat{C} + \widehat{A}) \Rightarrow \Delta EAI \text{ cân tại E}$$

$$\Rightarrow EA = EI, J \text{ là tâm đường tròn bàng tiếp của góc } \widehat{C} \Rightarrow AJ \perp AI$$

$$\Rightarrow \Delta AIJ \text{ vuông tại A. Từ đó suy ra } EI = EJ.$$

**Ví dụ 7.** Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác tại một đỉnh của tam giác chia ngoài cạnh đối diện theo tỉ số bình phương của hai cạnh kề.

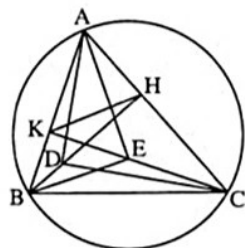
**Giải.** (h. 8-10) Giả sử tiếp tuyến tại A cắt cạnh BC kéo dài tại D.

$$\widehat{DAB} = \widehat{ACB} \Rightarrow \Delta DAB \text{ và } \Delta DCA \text{ đồng dạng} \\ \Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DA} = \frac{AB}{CA}$$

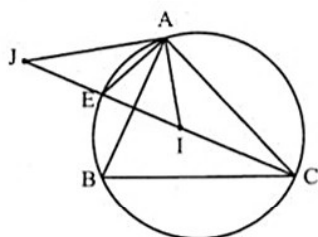
$$\Rightarrow DA^2 = DB \cdot DC \quad (1) \text{ và } \left(\frac{DB}{DA}\right)^2 = \left(\frac{AB}{CA}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{DB^2}{DA^2} = \frac{AB^2}{CA^2} = \frac{c^2}{b^2} \quad (2)$$

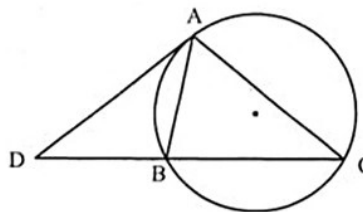
$$\text{Nhân từng vế (1) với (2) được } DB^2 = DB \cdot DC \cdot \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{c^2}{b^2}.$$



Hình 8-8



Hình 8-9



Hình 8-10

*Nhận xét.* Ta có thể tính đoạn thẳng DA theo độ dài các cạnh của tam giác:

$$\frac{DC}{b^2} = \frac{DB}{c^2} = \frac{DC - DB}{b^2 - c^2} = \frac{BC}{b^2 - c^2} = \frac{a}{b^2 - c^2} \quad (\text{giả sử } b > c)$$

$$\Rightarrow DC = \frac{ab^2}{b^2 - c^2}, \quad DB = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}. \quad \text{Từ } DA^2 = DB \cdot DC \Rightarrow DA^2 = \frac{(abc)^2}{(b^2 - c^2)^2}$$

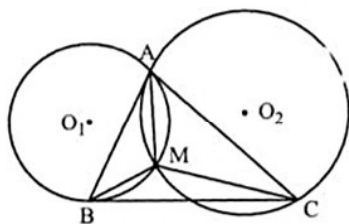
$$\Rightarrow DA = \frac{abc}{b^2 - c^2}.$$

**Ví dụ 8.** Cho tam giác ABC. Tìm điểm M trong tam giác sao cho  $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}$ .

*Giải.* (h. 8-11) *Phân tích:*

Giả sử điểm M dựng được thỏa mãn

$\widehat{MAB} = \widehat{MBC} \Rightarrow M$  nằm trên đường tròn  $(O_1)$  qua A, B và tiếp xúc với BC tại B,  
 $\widehat{MAB} = \widehat{MCA} \Rightarrow M$  nằm trên đường tròn  $(O_2)$  đi qua A và C đồng thời tiếp xúc với AB tại A  $\Rightarrow$  M là giao điểm của hai đường tròn  $(O_1), (O_2)$ .



Hình 8-11

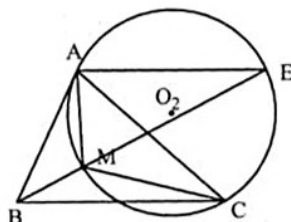
*Cách dựng:*

*Cách 1:* Dựng trung trực của AB;

Dựng đường thẳng vuông góc với BC tại B, ta xác định được tâm đường tròn  $(O_1)$ .

Tương tự, dựng đường tròn  $(O_2)$ .

Giao điểm (khác A) của hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$  là điểm M cần dựng.



Hình 8-12

*Chứng minh:* Theo cách dựng có  $\widehat{MAB} = \widehat{MBC}$ ,  $\widehat{MCA} = \widehat{MAB}$

$$\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}.$$

*Cách 2:* Dựng đường tròn  $(O_2)$ ; Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường tròn  $(O_2)$  tại E. Nối E với B cắt đường tròn  $(O_2)$  tại M (bạn đọc tự chứng minh).

*Biện luận:* Có hai điểm M tồn tại trong tam giác đó suy ra từ cách dựng.

Điểm M có tên là **điểm Broca** và góc  $\varphi$  gọi là **góc Broca**,

$$\varphi = \widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}.$$

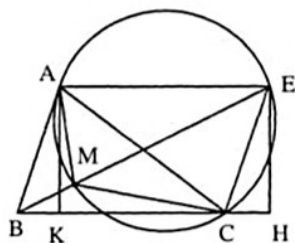
**Ví dụ 9.** Cho tam giác nhọn ABC, M là điểm trong tam giác thỏa mãn

$$\varphi = \widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}. \text{ Chứng minh } \cotg \varphi = \cotg A + \cotg B + \cotg C.$$

**Giải.** (h. 8-13) Với cách dựng 2 cũ. Ví dụ 8, gọi H và K là hình chiếu của E và A trên BC.

ta có  $\widehat{EBH} = \varphi$ , suy ra

$$\begin{aligned} \cotg \varphi &= \frac{HB}{HE} = \frac{HC + CK + KB}{HE} \\ &= \frac{HC}{HE} + \frac{CK}{HE} + \frac{KB}{HE} = \frac{HC}{HE} + \cotg C + \cotg B. \end{aligned}$$



Hình 8-13

Góc  $\widehat{ECH} = \widehat{CEA}$  (so le),  $\widehat{CEA} = \widehat{BAC}$  (chắn cung AC)

$$\Rightarrow \cotg \varphi = \cotg A + \cotg B + \cotg C.$$

**Ví dụ 10.** Cho góc  $\widehat{xOy}$ , trên Ox lấy hai điểm A, B, trên Oy lấy điểm C sao cho  $OA \cdot OB = OC^2$ . Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm A, B, C nhận OC là tiếp tuyến.

**Giải. Cách 1** (h. 8-14).  $OA \cdot OB = OC^2 \Rightarrow$

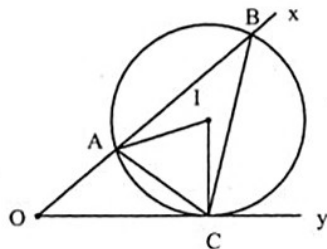
$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB}$$

$\Rightarrow \Delta OAC$  đồng dạng với  $\Delta OCB$  (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABC}.$$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC  $\Rightarrow$

$$\widehat{ACO} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AIC}.$$



Hình 8-14

Theo cách nhận biết, OC là tiếp tuyến của đường tròn qua ba điểm A, B, C.

**Cách 2.** Dựng đường tròn qua ba điểm A, B, C, từ O kẻ tiếp tuyến với đường tròn cùng phía với C đối với AB. Gọi tiếp điểm là D, dễ dàng suy ra  $OD^2 = OA \cdot OB \Rightarrow OD = OC$ . Vì C và D cùng nằm trên đường tròn nên  $C \equiv D$ .

**Ví dụ 11.** Cho đường tròn (O), đường kính AB, dây CD song song với AB. Từ C kẻ cát tuyến song song với AD cắt đường tròn (O) tại E, đường thẳng BE cắt CD ở F, qua F kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại M. Chứng minh rằng MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

(Dự tuyển IMO - 1995).

**Giải. Trường hợp 1** (h. 8-15) Xét tam giác MAC và tam giác FDB, có

$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}, \widehat{MAC} = \widehat{FDB},$$

$MF \parallel AD \Rightarrow$  tứ giác MADF là hình bình hành  $\Rightarrow MA = FD$

$$\Rightarrow \triangle MAC = \triangle FDB \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{FBD} \quad (1)$$

$$CE \parallel AD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{ED}$$

$$\Rightarrow \widehat{CDA} = \widehat{EAD}, \widehat{EAD} = \widehat{EBD} \text{ (chấn cung } \widehat{ED}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{MCA} = \widehat{CDA} \Rightarrow MC$  là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Trường hợp 2.** (h. 8-16) Vị trí của CD thay đổi dẫn tới hình vẽ khác so với trường hợp 1, vì vậy yêu cầu khi làm bài phải xét cả hai trường hợp 1 và 2, cách chứng minh hoàn toàn tương tự (bạn đọc tự chứng minh).

**Ví dụ 12.** Cho hai điểm A, B và đường thẳng d không trùng với đường thẳng AB. Dụng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng d.

**Giải.** Giả sử đường tròn (O) dụng được đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng d.

Xét trường hợp d cắt AB (h. 8-17).

Kéo dài AB cắt d tại D, ta có  $DC^2 = DA \cdot DB$ , từ đó suy ra cách dụng.

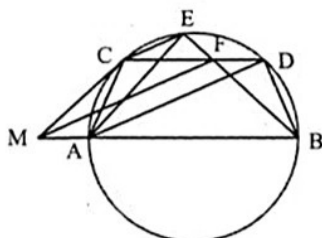
**Cách dụng:** Tìm giao điểm D của AB và d.

Dụng điểm C trên d thỏa mãn  $DC^2 = DA \cdot DB$

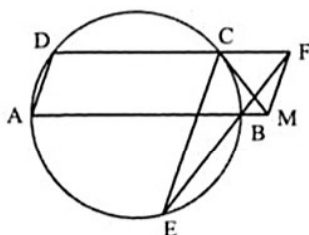
(Có rất nhiều cách dụng điểm C, bạn đọc tự tìm).

Dụng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

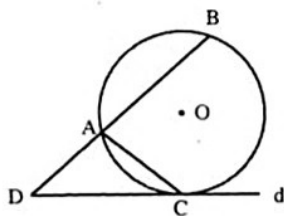
**Chứng minh:** Dành cho bạn đọc.



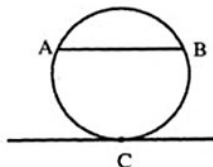
Hình 8-15



Hình 8-16



Hình 8-17



Hình 8-18

**Biện luận:** Nếu  $D \equiv A$  hoặc  $D \equiv B$ , bài toán có một nghiệm hình ;

Nếu D ở ngoài đoạn thẳng AB, bài toán có hai nghiệm ;

Nếu D ở trong đoạn thẳng AB, bài toán vô nghiệm.

Nếu  $AB \parallel d$ ,  $C$  là giao điểm của đường trung trực của  $AB$  với  $d$  (h. 8-18).

**Ví dụ 13.** Cho đường tròn (O), từ điểm M ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA, MB. Đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AB tại B cắt đường tròn (O) tại C. Chứng minh rằng đường thẳng AC đi qua trung điểm của MB.

**Giải.** Gọi D là giao điểm của AC với đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AB tại B (h. 8-19).

Ta có  $\widehat{CDB} = \widehat{ABC}$  (chấn cung  $\widehat{BC}$ ), MA  
là tiếp tuyến nên  $\widehat{ABC} = \widehat{MAC}$

$$\Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{MAC} \Rightarrow BD \parallel AM \quad (1)$$

MB là tiếp tuyến đường tròn (O)

$$\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{MBC} ;$$

$$\widehat{MBC} = \widehat{MDC} \text{ (chấn cung } \widehat{MC})$$

$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{CAB} \Rightarrow AB \parallel MD$  (2). Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABDM là hình bình hành  $\Rightarrow AC$  đi qua trung điểm I của MB.

**Ví dụ 14.** Cho hai đường tròn  $(O_1)$ , và  $(O_2)$  tiếp xúc ngoài tại I, kẻ đường kính  $AO_1D$ , từ D kẻ tiếp tuyến với đường tròn  $(O_2)$ , gọi tiếp điểm là E. Chứng minh rằng tam giác DAE là tam giác cân.

***Giải.*** (h.8-20) Kẻ tiếp tuyến chung AB

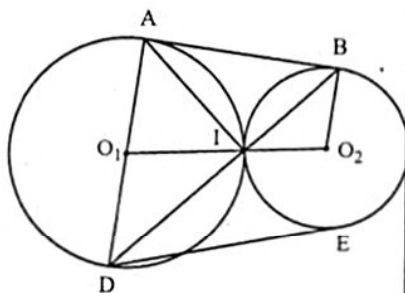
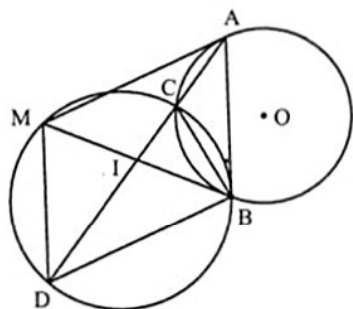
$$\Rightarrow AD \parallel BO_2 \Rightarrow \widehat{DO_1I} = \widehat{BO_2I} ;$$

$O_1DI$ ,  $O_2BI$  là các tam giác cân

$$\Rightarrow \widehat{O_1ID} = \widehat{O_2IB}$$

$\Rightarrow D, I, B$  thẳng hàng ;  $AD$  là đường kính  $\Rightarrow AI \perp DI$ .

Tam giác  $ADB$  là tam giác vuông tại  $A$





$$\Rightarrow AD^2 = DI.DB \text{ (1); } DE \text{ là tiếp tuyến } \Rightarrow DE^2 = DI.DB \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $DE^2 = AD^2 \Rightarrow DE = DA \Rightarrow \triangle DAE$  là tam giác cân.

**Ví dụ 15.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác góc B và C cắt đường tròn (O) tại D, E. Dựng đường tròn tâm D tiếp xúc với cạnh AC, đường tròn tâm E tiếp xúc cạnh AB. Chứng minh rằng tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên tiếp tuyến chung của hai đường tròn (D) và (E).

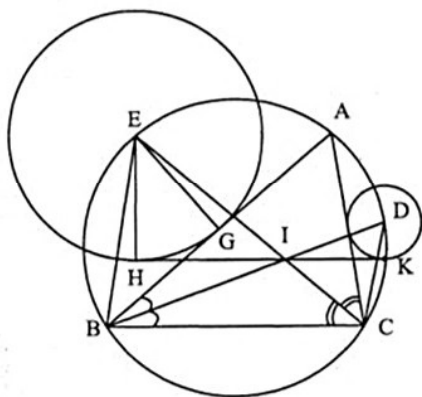
**Giải.** (h. 8-21) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Từ I kẻ tiếp tuyến IH với đường tròn (E) và tiếp tuyến IK với đường tròn (D). Theo giả thiết B, I, D thẳng hàng; C, I, E thẳng hàng. Gọi G là tiếp điểm của (E) với AB. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BIE} &= \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \widehat{IBA} + \widehat{ICA} \\ &= \widehat{DBA} + \widehat{ABE} = \widehat{DBE}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  tam giác EBI cân  $\Rightarrow EB = EI$ .

Xét  $\triangle EGB$  và  $\triangle EHI$  là hai tam giác vuông, có  $EH = EG$  và  $EB = EI$  nên chúng bằng nhau  $\Rightarrow \widehat{EIH} = \widehat{EBG}$   
 $= \widehat{ECA} = \widehat{ECB} \Rightarrow IH \parallel BC$ .

Hoàn toàn tương tự chứng minh được  $IK \parallel BC$ . Vậy H, I, K thẳng hàng.



Hình 8-21

## BÀI TẬP

- 8.1. Cho tam giác cân ABC ( $AB = AC$ ), đường vuông góc với AB tại A cắt BC tại D. Gọi I là trung điểm của BC, đường thẳng AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AIC tại E. Chứng minh  $AI = IE$ .
- 8.2. Cho đường tròn (O), M là điểm nằm ngoài đường tròn, qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB, gọi E là điểm tùy ý trên đường tròn tâm M bán kính MA, đường thẳng EA và EB cắt đường tròn (O) lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng CD là đường kính của đường tròn (O).
- 8.3. Cho đường tròn (O), từ điểm M nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA, MB, D là điểm trên cung lớn  $\widehat{AB}$ , đường thẳng AD cắt MB kéo dài tại E sao cho D là trung điểm của AE. Đường thẳng MD cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh rằng BI song song với AD.

8.4. Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại A và B. Từ A kẻ cát tuyến cắt hai đường tròn tại C và D, qua C và D dựng hai tiếp tuyến với hai đường tròn. Chứng minh rằng hai tiếp tuyến ấy cắt nhau theo một góc không đổi.

8.5. Cho đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp tam giác ABC, từ điểm M trên cung  $\widehat{BC}$  không chứa A, hạ các đường vuông góc đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, H, K. Chứng minh

$$\frac{BC}{MD} = \frac{CA}{MH} + \frac{AB}{MK}.$$

8.6. Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn gần B có các tiếp điểm là C và D ( $C \in (O)$  và  $D \in (O')$ ). Qua A kẻ đường thẳng song song với CD cắt đường tròn  $(O)$  tại M và cắt đường tròn  $(O')$  tại N, đường thẳng BC, BD cắt đường thẳng MN tại P và Q, đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E, Chứng minh rằng AE vuông góc với CD và tam giác EPQ là tam giác cân (Vô địch Nga - 2003).

8.7. Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại A và B. Điểm M trên  $(O)$ , qua M kẻ tiếp tuyến MD với đường tròn  $(O')$  (D là tiếp điểm).

Chứng minh giá trị biểu thức  $\frac{MD^2}{MA \cdot MB}$  không phụ thuộc vào điểm M.

8.8. Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc trong tại M, tâm  $O'$  nằm trong đường tròn  $(O)$ , N là điểm trên đường tròn  $(O)$ , qua N kẻ tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  cắt đường tròn  $(O')$  tại A và B, MN cắt đường tròn  $(O')$  tại E. Từ E kẻ tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại I và cắt đường tròn  $(O')$  tại C. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

8.9. Tìm điểm M trong tam giác vuông ABC ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) sao cho  $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}$  (Vô địch Hungary - 1985).

8.10. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Từ các điểm A, B, C dựng các tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$ , tiếp tuyến tại A cắt hai tiếp tuyến kia tại M, N. Hạ đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh HA là tia phân giác của  $\widehat{MHN}$ .

8.11. Từ điểm M ở ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB. Gọi C là điểm tùy ý trên đường tròn  $(O)$ , qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  cắt MA và MB lần lượt tại E và F. Đường thẳng AB cắt OE, OF lần lượt tại P, Q.

Chứng minh rằng tỉ số  $\frac{PQ}{EF}$  không phụ thuộc vào vị trí của C.

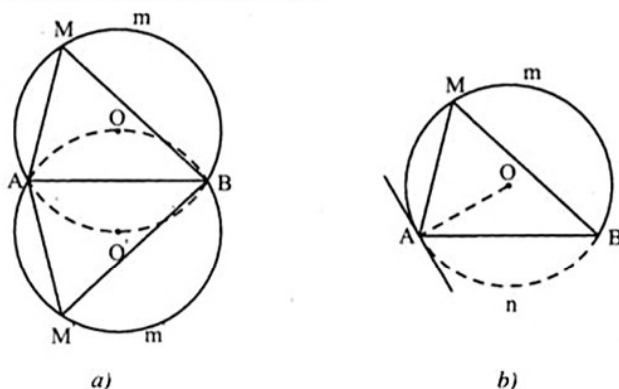
8.12. Cho các điểm A, B, C, D nằm trên một đường thẳng theo thứ tự đó. Một đường tròn  $(O)$  đi qua B và C sao cho các đường thẳng AM, AN, DK, DE tiếp xúc với  $(O)$ . Gọi P, Q thứ tự là giao điểm của MN, KE với BC. Chứng minh vị trí các điểm P và Q không phụ thuộc vào đường tròn  $(O)$ .

## Chuyên đề 9. CUNG CHỨA GÓC VÀ BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Quỹ tích cung chứa góc

**Bài toán:** Cho đoạn thẳng  $AB$  và góc  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ). Tìm quỹ tích (tập hợp) các điểm  $M$  thỏa mãn  $\widehat{AMB} = \alpha$ .



Hình 9

a) Với đoạn thẳng  $AB$  và góc  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) cho trước thì quỹ tích các điểm  $M$  thỏa mãn  $\widehat{AMB} = \alpha$  là hai cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn  $AB$  (h.9a).

b) Khi  $\alpha = 90^\circ$  thì hai cung  $\widehat{AmB}$  và  $\widehat{AnB}$  là hai nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng  $AB$  cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính  $AB$ .

c) Cung  $\widehat{AmB}$  là cung chứa góc  $\alpha$  thì cung  $\widehat{AnB}$  là cung chứa góc  $180^\circ - \alpha$  (h.9b).

#### 2. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm  $M$  thỏa mãn tính chất  $T$  là hình  $H$  nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

**Phần thuận:** Mọi điểm có tính chất  $T$  đều thuộc hình  $H$ .

**Phản đảo:** Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

**Kết luận:** Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất T là hình H.

**Chú ý:** Thông thường với bài toán "Tìm quỹ tích..." ta nên dự đoán hình H trước khi chứng minh.

## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

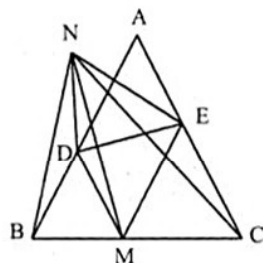
**Ví dụ 1.** Cho tam giác cân ABC ( $AB = AC$ ), M là điểm trên cạnh đáy BC. Qua M kẻ các đường song song với hai cạnh bên cắt hai cạnh đó tại D và E. Gọi N là điểm đối xứng của M qua DE. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, N nằm trên một đường tròn.

**Giải.** (h. 9-1)  $MD \parallel AC, ME \parallel AB \Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{A} = \widehat{MEC} \Rightarrow DB = DM, EC = EM$

M, N đối xứng nhau qua DE  $\Rightarrow DN = DM, EM = EN$

$\Rightarrow D$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN

$$\Rightarrow \widehat{BNM} = \frac{1}{2} \widehat{BDM} = \frac{1}{2} \widehat{A}.$$



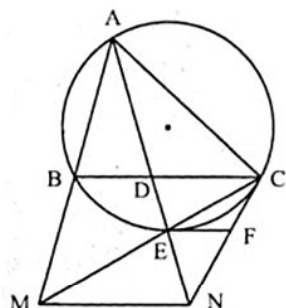
Hình 9-1

Tương tự, E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN

$\Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{BNM} + \widehat{MNC} = \widehat{A}$ . Ta thấy N và A ở cùng phía của BC và cùng nhìn đoạn BC dưới một góc bằng nhau nên B, C, N, A nằm trên một đường tròn.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có  $AB < AC$ . Đường phân giác AD cắt đường tròn (O) ở E, gọi M là giao điểm của AB và CE. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AD tại N, tiếp tuyến tại E cắt CN tại F. Chứng minh rằng  $BC \parallel MN \parallel EF$ , từ đó suy ra  $\frac{1}{CF} = \frac{1}{CN} + \frac{1}{CD}$ .

**Giải.** (h. 9-2) AD là phân giác  $\widehat{A} \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{EC}$ ,  $\widehat{CAE} = \widehat{BCE}$ ,  $\widehat{CEF} = \widehat{CAE}$  (chắn cung CE). Suy ra  $\widehat{CEF} = \widehat{BCE} \Rightarrow BC \parallel EF$ .



Hình 9-2

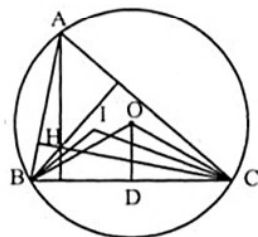
FC là tiếp tuyến  $\Rightarrow \widehat{ECF} = \widehat{CAN} = \widehat{NAM}$ . Ta thấy C và A nhìn MN (về một phía của MN) dưới cùng một góc  $\Rightarrow M, A, C, N$  nằm trên một cung tròn  $\Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{CAN} \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{CEF} \Rightarrow EF \parallel MN$ .

$$BC \parallel MN \parallel EF \Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{NF}{NC}, \frac{EF}{MN} = \frac{CF}{CN}; \text{ cộng từng vế hai đẳng thức}$$

$$\Rightarrow EF \left( \frac{1}{CD} + \frac{1}{MN} \right) = \frac{NF + FC}{CN} = 1 \Rightarrow \frac{1}{EF} = \frac{1}{MN} + \frac{1}{CD}. \text{ Ta lại có EF, CF là tiếp tuyến và } EF \parallel MN \text{ nên } EF = CF, MN = CN \Rightarrow \frac{1}{CF} = \frac{1}{CN} + \frac{1}{CD}.$$

**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R), gọi H là trực tâm, I và O là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC, đồng thời AH bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng năm điểm B, C, O, I, H nằm trên một đường tròn.

**Giải.** (h. 9-3) Gọi D là trung điểm của BC  $\Rightarrow OD \perp BC$ , trong mọi tam giác ta có  $AH = 2OD$  (bạn đọc tự chứng minh).



Hình 9-3

Theo giả thiết  $AH = R \Rightarrow R = OB = 2OD$ .

$\triangle OBD$  là tam giác vuông có  $OB = 2OD \Rightarrow \widehat{OBD} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

H là trực tâm của tam giác ABC  $\Rightarrow CH \perp AB, BH \perp AC \Rightarrow \widehat{BHC} = 120^\circ, \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{A} = 120^\circ$ . Ta thấy  $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC} = 120^\circ$  nên ba điểm O, H, I nằm trên cung tròn nhìn về một phía của BC dưới góc  $120^\circ$ . Vậy năm điểm B, C, O, I, H nằm trên một đường tròn.

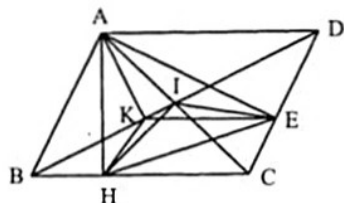
**Ví dụ 4.** Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại I. Từ A kẻ các đường vuông góc với BC, CD, DB thứ tự tại H, E, K. Chứng minh rằng bốn điểm H, E, I, K nằm trên một đường tròn.

**Giải.** (h. 9-4)  $AH \perp BC, AE \perp CD \Rightarrow$  bốn điểm A, H, C, E nằm trên đường tròn đường kính AC, I là trung điểm AC  $\Rightarrow I$  là tâm đường tròn đường kính AC  $\Rightarrow \widehat{HIE} = 2\widehat{HAE} = 2(180^\circ - \widehat{BCD})$ ;

$AH \perp BC, AK \perp BD, AE \perp CD$  nên  
mỗi tứ giác  $AKED, AKHB$  đều có bốn đỉnh  
cùng thuộc đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{EKD} = \widehat{EAD} \text{ và } \widehat{BKH} = \widehat{BAH}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \widehat{HKE} &= 180^\circ - \widehat{EKD} - \widehat{BKH} \\ &= 180^\circ - \widehat{EAD} - \widehat{BAH} \\ &= 2(180^\circ - \widehat{BCD})\end{aligned}$$



Hình 9-4

$\Rightarrow K$  và  $I$  cùng nhìn đoạn  $HE$  dưới một góc  $2(180^\circ - \widehat{BCD})$

$\Rightarrow K, I, E, H$  nằm trên một đường tròn.

**Ví dụ 5.** Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ ,  $D$  và  $E$  là hình chiếu của  $I$  trên  $AB$  và  $AC$ , giao điểm của  $DE$  với  $BI$  và  $CI$  thứ tự là  $N$  và  $M$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $B, C, M, N$  nằm trên một đường tròn.

**Giải.** (h. 9-5) Gọi giao điểm của  $AB$  và  $CM$  là  $P$ , giao điểm của  $BN$  và  $AC$  là  $Q$ .

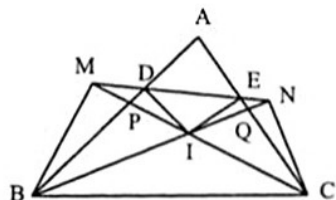
$I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\Rightarrow BN$  và  $CM$   
là phân giác của góc  $\widehat{B}, \widehat{C}$ ;

$$ID \perp AB, IE \perp AC \Rightarrow AD = AE$$

$$\Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{ADE} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{A};$$

$$\widehat{MIB} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A}) = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{A}$$

Suy ra  $\widehat{MDB} = \widehat{MIB} \Rightarrow B, M, D, I$  nằm trên một cung tròn,  $ID \perp BD \Rightarrow$   
 $BM \perp MI \Rightarrow \widehat{BMC} = 90^\circ$ . Hoàn toàn tương tự có  $\widehat{BNC} = 90^\circ$ . Vậy bốn điểm  $B,$   
 $M, N, C$  nằm trên một đường tròn.



Hình 9-5

**Ví dụ 6.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác,  $P$  là một điểm trong tam giác thoả mãn  $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$ . Chứng minh rằng  $AP \geq AI$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $P$  trùng với  $I$  (IMO - 2006).

**Giải.** (h. 9-6) Theo giả thiết  $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$

$$\Rightarrow \widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow 2(\widehat{PBC} + \widehat{PCB}) = \widehat{B} + \widehat{C}$$

$$\Rightarrow 2(180^\circ - \widehat{BPC}) = \widehat{B} + \widehat{C} = (180^\circ - \widehat{A})$$

$$\Rightarrow \widehat{BPC} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{A}.$$

Mặt khác,  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{A} \Rightarrow P$  và  $I$  luôn nhìn

đoạn  $BC$  về một phía dưới cùng một góc  $90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{A}$

$\Rightarrow B, P, I, C$  cùng nằm trên một cung tròn.

Kéo dài  $AI$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  tại  $D \Rightarrow DB = DC = DI$ ,

$\Rightarrow D$  là tâm đường tròn qua bốn điểm  $B, I, P, C$

$\Rightarrow DI = DP$

$$\Rightarrow AP + PD \geq AD = AI + ID = AI + DP \Rightarrow AP \geq AI.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $AP + PD = AD \Leftrightarrow P \equiv I \Leftrightarrow P$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

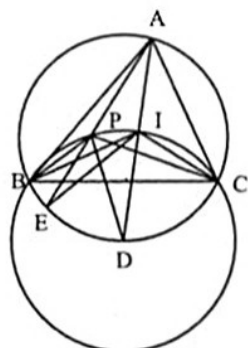
**Ví dụ 7.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có một góc ở đỉnh bằng  $\alpha$ , các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  luôn đi các điểm cố định thứ tự  $M, N, H, K$ . Chứng minh rằng giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  nằm trên một cung tròn cố định.

**Giải.** (h. 9-7) Gọi giao điểm của hai đường chéo là  $O$ , trung điểm  $MH, NK$  lần lượt là  $P, Q$ . Theo định lý Thales ta có  $OP \parallel AB \parallel CD$  và  $OQ \parallel BC \parallel AD \Rightarrow$

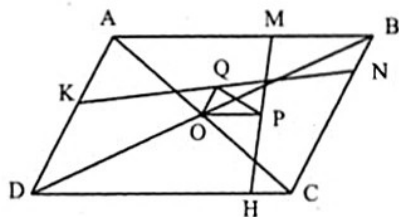
$\widehat{POQ} = \alpha$  (hoặc  $180^\circ - \alpha$ ). Các điểm  $M, N, H, K$  cố định  $\Rightarrow P, Q$  cố định.

Góc  $\widehat{POQ} = \alpha$  (hoặc  $180^\circ - \alpha$ ) suy ra  $O$  luôn nhìn đoạn  $PQ$  dưới một góc không đổi. Vậy các điểm  $O$  nằm trên cung chứa góc  $\alpha$  (hoặc  $180^\circ - \alpha$ ) dựng trên đoạn  $PQ$ .

**Ví dụ 8.** Cho tam giác cân  $ABC$  ( $AB = AC$ ), qua  $A$  kẻ đường thẳng  $d$  tùy ý không cắt  $BC$ . Tìm trên  $d$  điểm  $M$  sao cho chu vi tam giác  $MBC$  nhỏ nhất. Chứng minh rằng khi  $d$  thay đổi,  $M$  nằm trên một cung tròn cố định.



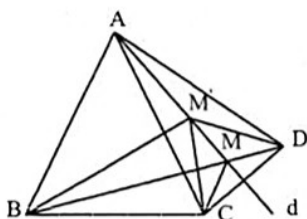
Hình 9-6



Hình 9-7

**Giải.** (h. 9-8) Giả sử  $M'$  là điểm trên  $d$ , gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $C$  qua  $d \Rightarrow M'C = M'D \Rightarrow$  chu vi  $\Delta M'BC$  bằng

$M'B + BC + M'C = M'B + BC + M'D$ , mà  $BC$  không đổi  $\Rightarrow$  chu vi  $\Delta M'BC$  nhỏ nhất khi  $M'B + M'D$  nhỏ nhất. Ta luôn có  $M'B + M'D \geq BD$ , dấu bằng xảy ra khi  $B, M, D$  thẳng hàng hay  $M$  là giao điểm của  $BD$  với  $d$ .



Hình 9-8

$\widehat{AB} \quad \widehat{AC} \quad \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{ABD} \quad \widehat{ADB}, \widehat{ADM} \quad \widehat{ACM}$   
 $\Rightarrow \widehat{ABM} \quad \widehat{ACM} \Rightarrow A, B, C, M$  nằm trên một đường tròn  $\Rightarrow \widehat{BMC} \quad \widehat{A} \Rightarrow$   
 $M$  nằm trên cung chứa góc có độ lớn bằng  $\widehat{A}$  dựng trên cạnh  $BC$ .

**Ví dụ 9.** Cho đoạn thẳng  $AB = a$ ,  $k$  là số dương cho trước,  $M$  là điểm chuyển động sao cho  $\frac{MA}{MB} = k$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ . (Đường tròn Apoloni).

**Giải.** (h. 9-9) Dựng  $MD, ME$  là phân giác trong và ngoài của góc  $\widehat{AMB} \Rightarrow MD \perp ME$ .

$$\text{Phân thuận: } \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MB} = k$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DA + DB} = \frac{k}{k + 1}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{ak}{k + 1} \quad (1).$$

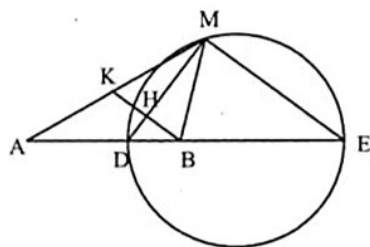
$$\text{Tương tự, } AE = \frac{ak}{k - 1} \quad (2)$$

$\Rightarrow D, E$  cố định,  $\widehat{DME} = 90^\circ \Rightarrow M$  thuộc đường tròn đường kính  $DE$ .

**Phân đảo:** Lấy  $M$  trên đường tròn đường kính  $DE$ , qua  $B$  kẻ đường vuông góc với  $DM$  cắt  $MD, MA$  tại  $H$  và  $K \Rightarrow BK \parallel ME$

$$\Rightarrow \frac{BK}{EM} = \frac{AB}{AE} = \frac{k - 1}{k}, \frac{BH}{EM} = \frac{DB}{DE}; \quad DE = AE - AD = \frac{ak}{k - 1} - \frac{ak}{k + 1} = \frac{2ak}{k^2 - 1}.$$

$$\text{Từ (1) có } DB = \frac{a}{k + 1} \Rightarrow \frac{BH}{EM} = \frac{DB}{DE} = \frac{a}{k + 1} \cdot \frac{k^2 - 1}{2ak} = \frac{k - 1}{2k} \Rightarrow 2 \frac{BH}{EM} = \frac{BK}{EM}$$



Hình 9-9



$\Rightarrow BK = 2BH \Rightarrow HB = HK \Rightarrow \triangle MBK$  là tam giác cân  $\Rightarrow MD$  là phân giác của  $\widehat{AMB}$  và  $ME$  là phân giác ngoài của  $\widehat{AMB}$ . Vậy  $\frac{MA}{MB} = \frac{DA}{DB} = k$ .

**Kết luận:** Quỹ tích các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $DE$ .

**Ví dụ 10.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , dựng ra phía ngoài tam giác hai nửa đường tròn đường kính  $AB$  và  $AC$ . Đường thẳng  $d$  thay đổi qua  $A$  cắt hai nửa đường tròn tại  $M$  và  $N$ . Tìm quỹ tích trung điểm của  $MN$ .

**Giải.** (h. 9-10)

**Phân thuận:**  $\widehat{BMA} = \widehat{CNA} = 90^\circ$

$\Rightarrow BM \perp MN, CN \perp MN$

$\Rightarrow BM \parallel CN$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ ,  $E$  là trung điểm của  $MN$

$\Rightarrow I$  cố định và  $IE \parallel BM \Rightarrow IE \perp MN$ .

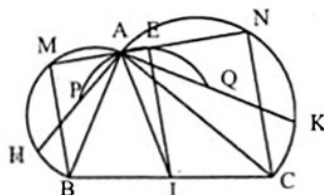
Điểm  $E$  nhìn  $AI$  cố định dưới góc vuông nên  $E$  nằm trên đường tròn đường kính  $AI$ .

**Giới hạn:** Khi  $M \equiv A$ ,  $MN$  trở thành tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính  $AB \Rightarrow N \equiv K$  ( $AK \perp AB$ ).

Khi  $N \equiv A \Rightarrow MN$  trở thành tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính  $AC \Rightarrow M \equiv H$  ( $AH \perp AC$ )  $\Rightarrow E$  chuyển động trên cung  $\widehat{PAQ}$  của đường tròn đường kính  $AI$  ( $P$  và  $Q$  thứ tự là trung điểm của  $AH$  và  $AK$ ).

**Phân đảo:** Lấy  $E' \in \widehat{PAQ}$ , đường thẳng  $AE'$  cắt hai nửa đường tròn tại  $M', N' \Rightarrow$  tứ giác  $BM'N'C$  là hình thang vuông  $\Rightarrow IE' \parallel BM' \parallel CN' \Rightarrow EM' = EN'$ .

**Kết luận:** Quỹ tích các điểm  $E$  là cung  $\widehat{PAQ}$  của đường tròn đường kính  $AI$ .



Hình 9-10

## BÀI TẬP

**9.1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC$  cố định,  $A$  thay đổi sao cho  $\widehat{BAC} = \alpha$ . Tìm quỹ tích trọng tâm  $G$ , trực tâm  $H$ , tâm đường tròn nội tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ .

**9.2.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm  $M$  thuộc miền trong tam giác thỏa mãn điều kiện  $\widehat{BAM} = \widehat{BCM}, \widehat{CAM} = \widehat{CBM}$ .

- 9.3. Cho đường tròn tâm  $(O)$ , đường kính  $AB$ . Trên  $AB$  lấy hai điểm  $P, Q$  đối xứng nhau qua  $O$ , trên đường tròn lấy điểm  $M$  sao cho  $MA < MB$ . Các đường thẳng  $MP, MQ, MO$  cắt đường tròn thứ tự tại  $C, D, E$ , đường thẳng  $CD$  cắt  $AB$  tại  $F$ . Qua  $D$  kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $ME$  tại  $I$ , cắt  $MC$  tại  $N$ . Chứng minh rằng  $EF$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .
- 9.4. Cho góc vuông  $\widehat{xOy}$ , trên  $Ox$  lấy điểm  $A$ , trên  $Oy$  lấy điểm  $B$  sao cho  $OA = OB$ ,  $M$  là điểm tùy ý trên  $AB$ . Qua  $M$  dựng đường tròn  $(O_1)$  tiếp xúc với  $OA$  tại  $A$ . Dựng đường tròn  $(O_2)$  qua  $M$  và tiếp xúc với  $OB$  tại  $B$ , hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là  $N$ . Chứng minh  $N$  nằm trên một đường tròn cố định. Xác định vị trí của  $M$  để  $O_1O_2$  nhỏ nhất.
- 9.5. Cho hình thang  $ABCD$  nội tiếp đường tròn ( $AB \parallel CD, AB < CD$ ), tiếp tuyến tại  $A$  và  $C$  cắt nhau tại  $M$ , các đường thẳng  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $N$ . Chứng minh  $MN$  song song với  $AB$ .
- 9.6. Cho hình bình hành  $ABCD$ , đường phân giác của góc  $\widehat{BAD}$  cắt  $BC$  và  $CD$  tại  $M$  và  $N$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $CMN$ .
- Chứng minh bốn điểm  $O, B, C, D$  nằm trên một đường tròn.
  - Gọi  $E$  là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác  $CMN$  và tam giác  $BCD$ . Chứng minh  $\widehat{AEC} = 90^\circ$ .
- 9.7. Cho ba đường tròn  $(C_1), (C_2), (C_3)$  cùng đi qua hai điểm  $A$  và  $B$ . Từ  $A$  kẻ hai đường thẳng  $x, y$  tùy ý cắt  $(C_1), (C_2), (C_3)$  thứ tự tại  $M, N, E$  và  $D, H, K$ . Chứng minh rằng  $\frac{MN}{DH} = \frac{NE}{HK}$ .

## **Chuyên đề 10. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP ĐA GIÁC**

### **I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**Định nghĩa:** Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là *tứ giác nội tiếp* đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).

**Định lý:** Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^\circ$ .

**Định lý đảo:** Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^\circ$  thì tứ giác đó nội tiếp một đường tròn.

**Định nghĩa:** – Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là *đường tròn ngoại tiếp* đa giác, và đa giác đó được gọi là *đa giác nội tiếp* đường tròn.

– Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là *đường tròn nội tiếp* đa giác và đa giác được gọi là *đa giác ngoại tiếp* đường tròn.

**Định lý:** Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Trong đa giác đều, tâm của đường tròn ngoại tiếp trùng với tâm của đường tròn nội tiếp, được gọi là tâm của đa giác đều.

### **Kiến thức bổ sung**

Tiêu chuẩn để tứ giác ABCD nội tiếp được.

**Tiêu chuẩn 1.** Tứ giác ABCD nội tiếp được khi và chỉ khi

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$$

**Tiêu chuẩn 2.** Tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi  $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ .

**Tiêu chuẩn 3. Điều kiện cần:** Cho đường tròn (O) và điểm M không thuộc đường tròn đó. Từ M kẻ hai cát tuyến tùy ý MAB và MCD. Ta có  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

**Điều kiện đủ:** Cho hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau tại điểm M. Trên  $d_1$  lấy hai điểm A, B và trên  $d_2$  lấy hai điểm C, D thỏa mãn:  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ ; đồng thời điểm M nằm ngoài cả hai đoạn AB và CD, hoặc điểm M nằm trong cả hai đoạn AB và CD.

Khi đó bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

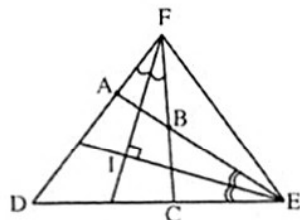
Các tiêu chuẩn nêu trên coi như bài tập, bạn đọc tự chứng minh mỗi khi áp dụng.

## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Cho tứ giác ABCD, AB và CD cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi các phân giác của góc  $\widehat{AED}$  và  $\widehat{CFD}$  vuông góc với nhau.

**Giải.** (h.10-1a) Gọi I là giao điểm hai đường phân giác của góc  $\widehat{AED}$  và  $\widehat{CFD}$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{IFE} + \widehat{IEF} &= \frac{1}{2} \widehat{CFD} + \widehat{CFE} + \frac{1}{2} \widehat{AED} + \widehat{AEF} \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{CFD} + \widehat{AED}) + (\widehat{CFE} + \widehat{AEF}) = \frac{1}{2} (\widehat{CFD} + \widehat{AED}) + 180^\circ - \widehat{B} \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{C} - \widehat{D} + 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{D}) + 180^\circ - \widehat{B} \\ &= 360^\circ - \widehat{B} - \widehat{D} - \frac{1}{2} (\widehat{C} + \widehat{A}) \\ &= \widehat{C} + \widehat{A} - \frac{1}{2} (\widehat{C} + \widehat{A}) = \frac{1}{2} (\widehat{C} + \widehat{A}).\end{aligned}$$



Hình 10-1a

$$\text{Tứ giác ABCD nội tiếp} \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\widehat{A} + \widehat{C}) = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{IFE} + \widehat{IEF} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{FIE} = 90^\circ.$$

**Chú ý:** Ví dụ 1 có tính chất đặc biệt. Đường phân giác EI cắt BC tại P và AD tại M, đường phân giác FI cắt cạnh AB tại N và CD tại Q. Ta có tứ giác MNPQ là hình thoi.

Với chứng minh này Ví dụ 1 có lời giải khác :

$$\widehat{FME} = \widehat{D} + \widehat{MED}, \quad \widehat{BPM} = \widehat{PBE} + \widehat{BEP}.$$

$$\text{Tứ giác ABCD nội tiếp} \Leftrightarrow \widehat{D} = \widehat{CBE},$$

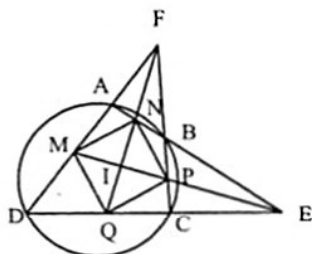
$$\text{ME là phân giác góc } \widehat{AED} \Leftrightarrow \widehat{MED} = \widehat{MEA}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{FMP} = \widehat{FPM} \Leftrightarrow FM = FP;$$

$$\text{FQ là phân giác góc } \widehat{CFD} \Leftrightarrow FQ \perp EM$$

$$\Leftrightarrow IM = IN \Leftrightarrow NM = NP, \quad QM = QP$$

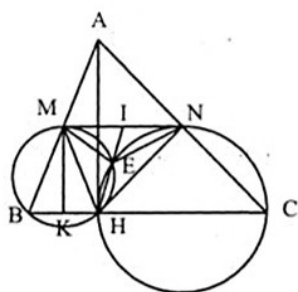
$$\Leftrightarrow \text{MNPQ là hình thoi.}$$



Hình 10-1b

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC và đường cao AH, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNH tại E. Chứng minh rằng tứ giác AMEN là tứ giác nội tiếp và HE đi qua trung điểm của MN.

**Giải.** (h.10-2) Tứ giác MBHE và HENC nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{MEH} = 180^\circ - \widehat{B}$ ,  $\widehat{HEN} = 180^\circ - \widehat{C}$



Hình 10-2

$\Rightarrow \widehat{MEN} = 360^\circ - \widehat{MEH} - \widehat{HEN} =$   
 $= 360^\circ - 180^\circ + \widehat{B} - 180^\circ + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{B} + \widehat{C}$   
 $\Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow$  tứ giác AMEN nội tiếp.

HE cắt MN tại I, hạ  $MK \perp BC$ , theo giả thiết  $AH \perp BC$ ,  $MA = MB \Rightarrow MB = MH$

$\Rightarrow KB = KH$ ,  $MK \perp MN \Rightarrow MN$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta MBH$ ,  $IM^2 = IE \cdot IH$ . Tương tự,  $IN^2 = IE \cdot IH \Rightarrow IM = IN$ .

**Ví dụ 3.** Cho tam giác cân ABC ( $AB = AC$ ), P là điểm trên cạnh đáy BC. Kẻ các đường thẳng song song với các cạnh bên, các giao điểm đó là D và E ( $D \in AB$ ,  $E \in AC$ ), gọi Q là điểm đối xứng của P qua DE. Chứng minh Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. (Vô địch Hungari 1949).

**Giải.** (h.10-3)  $PD \parallel AC$ ,  $PE \parallel AB \Rightarrow ADPE$  là hình bình hành

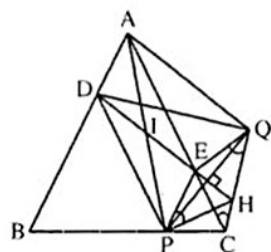
$\Rightarrow PD = AE$ ,  $AD = EP$ , Q và P đối xứng qua DE  $\Rightarrow DP = DQ$ ,  $EQ = EP$

$\Rightarrow AE = DQ$  kết hợp  $EQ = DA \Rightarrow ADEQ$  là hình thang cân  $\Rightarrow AQ \parallel DE$

$\Delta ABC$  cân  $\Rightarrow EP = EC \Rightarrow EQ = EC \Rightarrow \widehat{EQC} = \widehat{ECQ}$ .

Kéo dài DE cắt CQ tại H  $\Rightarrow \widehat{EPH} = \widehat{EQH} \Rightarrow \widehat{EPH} = \widehat{ECH} \Rightarrow EPCH$  nội tiếp,

$\widehat{PEH} = \widehat{BAQ} \Rightarrow \widehat{BAQ} + \widehat{BCQ} = 180^\circ \Rightarrow Q$  thuộc đường tròn qua (A, B, C).



Hình 10-3

**Ví dụ 4.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), D là điểm trên cạnh BC. Gọi  $O_1$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD,  $O_2$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC. Chứng minh bốn điểm A, O,  $O_1$ ,  $O_2$  nằm trên một đường tròn. Giả sử AD là phân giác của góc A, chứng minh tam giác  $OO_1O_2$  là tam giác cân.

**Giải.** (h.10-4) Gọi M, N, E thứ tự là trung điểm của AB, AD, AC  
 $\Rightarrow$  các điểm (M, N, E) ; (O, O<sub>1</sub>, M) (O<sub>1</sub>, N, O<sub>2</sub>) và O, E, O<sub>2</sub> thẳng hàng

$\Rightarrow OO_1 \perp AB, OO_2 \perp AC, O_1O_2 \perp AD$

$\Rightarrow$  các tứ giác AMO<sub>1</sub>N, ANEO<sub>2</sub>, AMOE

nội tiếp ;

$\widehat{MAO_1} = \widehat{MNO_1}$  (chấn cung  $\widehat{MO_1}$ ),

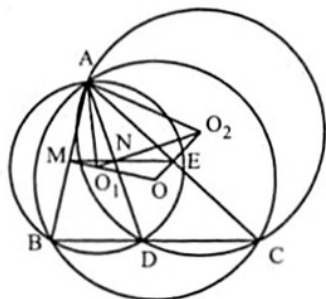
$\widehat{MNO_1} = \widehat{O_2NE}$  (đối đỉnh) ;

$\widehat{O_2NE} = \widehat{O_2AE} \Rightarrow \widehat{MAO_1} = \widehat{EAO_2}$

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{O_1AO_2}$  ;  $\widehat{MAE} + \widehat{MOE} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{O_1AO_2} + \widehat{O_1OO_2} = 180^\circ$

$\Rightarrow$  tứ giác AO<sub>1</sub>OO<sub>2</sub> nội tiếp.



Hình 10-4

Giả sử AD là phân giác góc  $\widehat{A}$ , do tính chất đường phân giác  $\Rightarrow$

$$BD = \frac{AB \cdot BC}{AC + AB} \quad (1)$$

Ta có  $\widehat{B} = \widehat{AOO_2}$ ,  $\widehat{ADB} = \widehat{AO_1M} = \widehat{AO_2O} \Rightarrow \triangle ABD$  và  $\triangle AOO_2$  đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{OO_2}{BD} = \frac{AO}{AB} \Rightarrow OO_2 = \frac{BD \cdot AO}{AB}, \text{ kết hợp (1)} \Rightarrow OO_2 = \frac{BC \cdot AO}{AC + AB}.$$

Tương tự,  $OO_2 = \frac{BC \cdot AO}{AC + AB} \Rightarrow$  tam giác OO<sub>1</sub>O<sub>2</sub> là tam giác cân.

**Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và đường kính AD. Qua D kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt cạnh BC tại P, đường thẳng PO cắt cạnh AB, AC tại N và M. Chứng minh ON = OM.

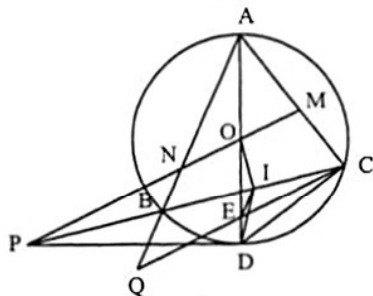
**Giải.** Từ C kẻ đường thẳng song song với PO cắt AB kéo dài tại Q, CQ cắt AD tại E.

Gọi I là trung điểm BC  $\Rightarrow OI \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{OIP} = 90^\circ$ ,

PD là tiếp tuyến  $\Rightarrow AD \perp PD$

$\Rightarrow \widehat{ODP} = 90^\circ$ .



Hình 10-5

I và D cùng nhìn đoạn OP dưới góc vuông  $\Rightarrow O, I, D, P$  nằm trên một đường tròn  $\Rightarrow \widehat{OPI} = \widehat{ODI}$  (cùng chắn cung  $\widehat{OI}$ );  $PO \parallel CQ \Rightarrow \widehat{OPI} = \widehat{ICQ}$  (so le)

$\Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{ODI} \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{EDI} \Rightarrow$  bốn điểm E, I, C, D nằm trên cùng một đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{EIC} = 180^\circ - \widehat{EDC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{QBC}$$

$$\Rightarrow IE \parallel BQ, \text{ mà } IB = IC \Rightarrow EQ = EC \Rightarrow OM = ON.$$

**Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn tâm (I) luôn đi qua B và C cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Đường tròn tâm (J) ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh  $KI \parallel OJ$ .

**Giải.** (h.10-6) Trong đường tròn (I) ta có  $\widehat{MIC} = 2\widehat{MBC}$ .

Trong đường tròn (O) ta có  $\widehat{AKC} = \widehat{ABC}$  (1)

$$\widehat{MKC} = \widehat{MKA} - \widehat{CKA} = 180^\circ - \widehat{ANM} - \widehat{CKA}$$

$$\widehat{CKA} = \widehat{ABC} = \widehat{MBC};$$

BMNC nội tiếp đường tròn (I)

$$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{MBC}, \text{ từ (1) } \Rightarrow$$

$$\widehat{MKC} = 180^\circ - 2\widehat{MBC} = 180^\circ - \widehat{MIC}$$

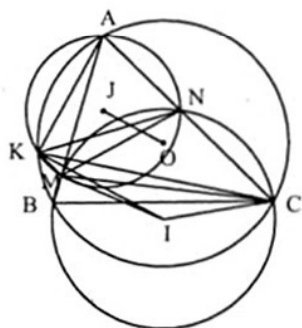
$$\Rightarrow \widehat{MKC} + \widehat{MIC} = 180^\circ \Rightarrow \text{tứ giác MKCI nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{IMC}. \text{ Trong tam giác IMC:}$$

$$\widehat{IMC} = \frac{180^\circ - \widehat{MIC}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{MBC}}{2} = 90^\circ - \widehat{MBC}$$

$$\Rightarrow \widehat{IMC} + \widehat{MBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IKC} + \widehat{AKC} = 90^\circ \Rightarrow IK \perp AK.$$

Đường tròn tâm (J) và đường tròn (O) cắt nhau tại A, K  $\Rightarrow OJ \perp AK \Rightarrow OJ \parallel IK$ .



Hình 10-6

**Ví dụ 7.** Cho tứ giác ABCD, đường chéo BD không phải là phân giác các góc  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{ADC}$ . M là điểm trong tứ giác thỏa mãn  $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$  và  $\widehat{ADB} = \widehat{MDC}$ . Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp  $\Leftrightarrow MA = MC$ .

**Giải.** (h.10-7a) Kéo dài BM cắt AC tại N, DM cắt AC tại E.

Giả sử tứ giác ABCD nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{BCN} = \widehat{ADB}$ ,

theo giả thiết  $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$

$$\Rightarrow \triangle BCN \text{ đồng dạng } \triangle BDA \Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{AD}{BD} \quad (1).$$

Tương tự,  $\triangle DAE$  và  $\triangle DBC$  đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{CN}{BC} = \frac{AE}{BC} \Rightarrow CN = AE$ . Ta lại có  $\widehat{ANB} = \widehat{NBC} + \widehat{ACB}$ ,

$$\widehat{MEC} = \widehat{ACD} + \widehat{MDC} = \widehat{ABD} + \widehat{ADB} = \widehat{NBC} + \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{MNE}$$

$$\Rightarrow MN = ME \Rightarrow MA = MC.$$

Ngược lại: Giả sử  $MA = MC$ . Gọi giao điểm của CD và DM với đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC là P và Q, ta có

$$\widehat{MBC} = \widehat{MQC}, \text{ theo giả thiết } \widehat{ABD} = \widehat{MBC}, \widehat{ADB} = \widehat{MDC}$$

$$\Rightarrow \triangle ADB \text{ và } \triangle MDP \text{ đồng dạng (g.g)}$$

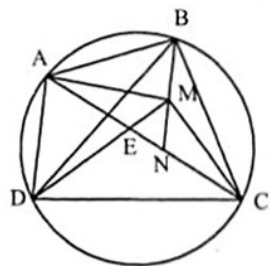
$$\Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{DP}{MD} \quad (1)$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{MDC} \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{BDP}$$

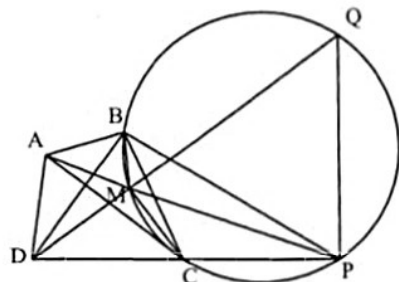
$$\Rightarrow \triangle ADM \text{ và } \triangle BDP \text{ đồng dạng}$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{AM} = \frac{BD}{AD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{BP}{AM} = \frac{DP}{MD} \quad (3)$$



Hình 10-7a



Hình 10-7b



$\triangle DMC$  và  $\triangle DPQ$  đồng dạng  $\Rightarrow \frac{PQ}{MC} = \frac{DP}{DM}$  (4). Từ (3) và (4) suy ra

$\frac{BP}{AM} = \frac{PQ}{MC}$ , theo giả thiết  $MA = MC \Rightarrow BP = PQ \Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{BPQ} = \widehat{QMB}$   
 $= \widehat{MDP} + \widehat{MPD} = \widehat{ADB} + \widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DCB} + \widehat{DAB} = 180^\circ \Rightarrow ABCD$   
 nội tiếp.

**Ví dụ 8.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, đường phân giác góc  $\hat{A}$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $M$ , gọi  $E$  là trung điểm của  $BC$ ,  $K$  là điểm đối xứng của  $I$  qua  $E$ . Đường thẳng  $MK$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $P$ . Chứng minh  $P$  thuộc cung nhỏ  $\widehat{AC}$  và  $BP = AP + CP$ .

**Giải.** (h.10-8)  $EI = EK, EB = EC$  và  $\widehat{IEB} = \widehat{KEC}$

$\Rightarrow \triangle EIB = \triangle EKC$  (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{KCE} = \widehat{IBE} = \frac{1}{2}\hat{B} < \frac{1}{2}\hat{A} = \widehat{BCM}$ ,

$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow E, C$  nằm về một phía đối với

$AM \Rightarrow K$  và  $C$  nằm về một phía với  $AM \Rightarrow K$

nằm trong góc  $\widehat{AMC} \Rightarrow P$  thuộc cung nhỏ  $\widehat{BC}$ .

Lấy điểm  $Q$  thuộc  $BP$  sao cho  $PA = PQ \Rightarrow$

$\widehat{PAQ} = \widehat{AQP} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{APB}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B})$

$\Rightarrow \widehat{QAI} + \widehat{IAC} + \widehat{CAP} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{A}) \Rightarrow \widehat{IAQ} + \widehat{PAC} = \frac{1}{2}\hat{B} = \widehat{IBQ} + \widehat{PBC}$

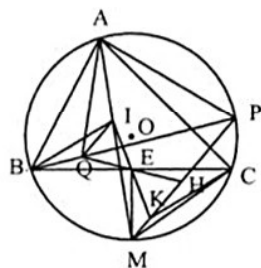
mà  $\widehat{PAC} = \widehat{PBC} \Rightarrow \widehat{IAQ} = \widehat{IBQ} \Rightarrow$  tứ giác  $ABQI$  nội tiếp

$\Rightarrow \frac{1}{2}\hat{A} = \widehat{BAI} = \widehat{IQP} = \widehat{BPM} \Rightarrow IQ \parallel PM$ . Gọi  $H$  là giao điểm  $QE$  với  $PM$

$\Rightarrow QIHK$  là hình bình hành  $\Rightarrow BQCH$  là hình bình hành  $\Rightarrow BQ \parallel CH$

$\Rightarrow \widehat{PHC} = \widehat{ABQ} = \frac{1}{2}\hat{A} \Rightarrow$  tam giác  $CPH$  cân  $\Rightarrow CP = CH = BQ$

$\Rightarrow BP = BQ + QP = CH + PA = PC + PA$ .



Hình 10-8

**Ví dụ 9.** Cho hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Kéo dài  $AB$  về phía  $B$  lấy điểm  $M$ , từ  $M$  kẻ hai tiếp tuyến  $ME, MF$  với đường tròn  $(O_1)$ ,  $(E, F$  là

các tiếp điểm, F cùng phía ( $O_2$ ) đối với AB). Đường thẳng BE và BF cắt đường tròn ( $O_2$ ) tại P và Q, gọi I là giao điểm của PQ và EF. Chứng minh rằng  $QI = IP$ .

**Giải.** (h.10-9) Kéo dài EF cắt PQ tại I.

MF là tiếp tuyến  $\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{FAB}$   
(chấn cung BF)

$\Rightarrow \Delta MFB$  và  $\Delta MAF$  đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MF}{MA} = \frac{FB}{FA}.$$

Tương tự,  $\Delta MEB$  và  $\Delta MAE$  đồng dạng  $\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{EB}{EA}$ , mà  $ME = MF$

$$\Rightarrow \frac{FB}{FA} = \frac{EB}{EA} \quad (1); \quad \widehat{AFE} = \widehat{ABE} \text{ (chấn cung } \widehat{AE}), \text{ ABPQ là tứ giác nội tiếp}$$

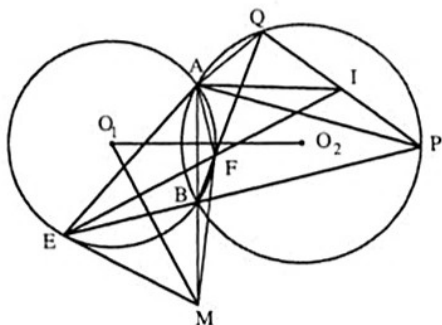
$$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AQP} \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{AQP} \Rightarrow \text{tứ giác AFIQ là tứ giác nội tiếp} \Rightarrow \widehat{AFQ} = \widehat{AIQ}$$

$$\Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AIP}, \text{ mặt khác } \widehat{ABF} = \widehat{APQ} \Rightarrow \Delta FBA \text{ và } \Delta IPA \text{ đồng dạng}$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{AF} = \frac{PI}{AI} \quad (2)$$

Tương tự,  $\Delta ABE \sim \Delta AQI$

$$\Rightarrow \frac{QI}{IA} = \frac{BE}{AE} \quad (3). \text{ Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{QI}{IA} = \frac{PI}{IA} \Rightarrow QI = IP.$$



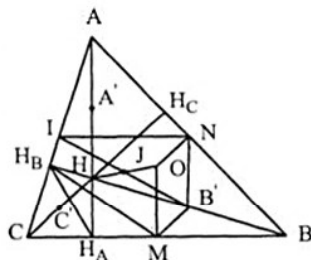
Hình 10-9

**Ví dụ 10.** Chứng minh rằng trong một tam giác ba trung điểm của các cạnh, ba chân đường cao của tam giác và ba trung điểm các đoạn thẳng nối đỉnh đến trực tâm của tam giác đó cùng nằm trên một đường tròn (gọi là đường tròn Euler hay đường tròn chín điểm).

**Giải.** (h.10-10) Xin giới thiệu hai cách để bạn đọc tham khảo.

$$\text{Cách 1: } BH_B \perp AC \Rightarrow \widehat{IH_B B} = 90^\circ, NA = NB,$$

$$B'H = B'B \Rightarrow NB' \parallel AH \Rightarrow \widehat{INB'} = 90^\circ.$$



Hình 10-10

$\Rightarrow$  bốn điểm I, N, B', H<sub>B</sub> nằm trên đường tròn đường kính IB'.

Tương tự chứng minh được các điểm còn lại thuộc đường tròn đường kính IB'.

Cách 2: Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính R, J là giao điểm của HO và IB'  $\Rightarrow OI \perp AC \Rightarrow OI \parallel BH$ ;

$OI = BH \Rightarrow IOBH$  là hình bình hành  $\Rightarrow JH = JO$

$\Rightarrow A'HMO$  là hình bình hành  $\Rightarrow JA' = JM$ .

Xét  $\Delta AHO$  có  $JA'$  là đường trung bình  $\Rightarrow JA' = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$ . Chứng minh

tiếp được các điểm còn lại cách J một khoảng bằng  $\frac{R}{2}$ . Ta xác định được tâm, bán kính của đường tròn 9 điểm.

**Ví dụ 11.** Chứng minh rằng trong một tam giác, đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp tam giác đó.

**Giải.** (h.10-11) Gọi SQ là đường kính đường tròn (O), kẻ  $AP \perp SQ$ ,

J là trung điểm OH  $\Rightarrow J$  là tâm đường tròn Euler, hạ  $JE \perp BC$ .

I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC,

hạ  $IN \perp BC \Rightarrow A, I, S$  thẳng hàng.

Trong mọi tam giác ta có  $AH = 2OM$ .

Tứ giác HOMK là hình thang  $\Rightarrow JE$  là đường trung bình  $\Rightarrow HK + OM = 2JE$ ,  
 $PO = PM \quad OM = AK \quad OM = AH + HK \quad OM$

$$= 2OM + HK \quad OM = OM + HK = 2JE.$$

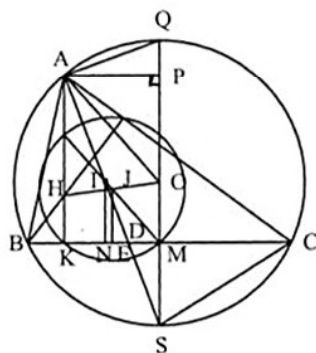
Gọi D là giao điểm của AS và BC  $\Rightarrow \widehat{IDN} = \widehat{AQP}$

$\Rightarrow \Delta APQ$  và  $\Delta IND$  là hai tam giác vuông đồng dạng  $\Rightarrow \frac{PQ}{DN} = \frac{AP}{IN}$

$\Rightarrow PQ \cdot IN = AP \cdot DN = MK \cdot DN \quad (AP = MK), (1)$

$\Delta SDC$  và  $\Delta SCA$  có  $\widehat{ASC}$  chung,  $\widehat{SAC} = \widehat{SCD}$  nên chúng đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{SD}{SC} = \frac{SC}{SA} \Rightarrow SC^2 = SD \cdot SA.$$



Hình 10-11

I là tâm đường tròn nội tiếp  $\Rightarrow SB = SC = SI \Rightarrow SI^2 = SD \cdot SA$ .

Hình chiếu của A, I, D, S trên cạnh BC tương ứng là K, N, D, M

$$\Rightarrow MN^2 = MD \cdot MK \Rightarrow MN \cdot MK = MN^2 = MN \cdot MK = MD \cdot MK$$

$$\Rightarrow MN(MK - MN) = MK(MN - MD)$$

$$\Rightarrow MN \cdot NK = MK \cdot DN. \text{ Kết hợp (1)} \Rightarrow MN \cdot NK = IN \cdot PQ.$$

Theo định lý Pythagore ta có  $IJ^2 = (IN - JE)^2 + (MN - ME)^2$

$$IJ^2 = (IN - \frac{1}{2}PO)^2 + (MN - \frac{1}{2}MK)^2$$

$$\Rightarrow IJ^2 = IN^2 - IN \cdot PO + \frac{1}{4}(PO^2 + MK^2) - MN \cdot MK + MN^2$$

$$= \frac{1}{4}OA^2 - IN^2 - IN \cdot PO - MN \cdot NK$$

$$= \frac{1}{4}R^2 + r^2 - IN(QP + PO) = \frac{1}{4}R^2 + r^2 - R \cdot r = (\frac{R}{2} - r)^2$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{R}{2} - r. \text{ Vậy đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp.}$$

Bạn đọc hãy vận dụng cách giải tương tự để chứng minh kết quả : Đường tròn Euler tiếp xúc ngoài với đường tròn bàng tiếp.

**Ví dụ 12.** Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng  $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$ ; Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD nội tiếp (bất đẳng thức Ptolême).

**Giải.** (h.10-12) Lấy điểm M trong tứ giác sao cho  $\widehat{MDC} = \widehat{ADB}$  và  $\widehat{MCD} = \widehat{ABD}$ , ta có  $\triangle ABD$  và  $\triangle MCD$  đồng dạng (g.g)

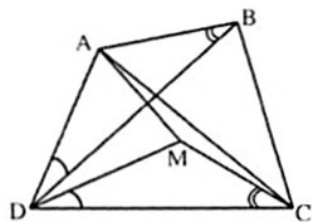
$$\Rightarrow \frac{AB}{MC} = \frac{BD}{CD} \text{ và } \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{MD}$$

$$\Rightarrow AB \cdot CD = BD \cdot MC \quad (1)$$

Với cách dựng ta có  $\widehat{ADM} = \widehat{BDC}$ ,  $\frac{BD}{CD} = \frac{AD}{MD}$

$$\Rightarrow \triangle ADM \text{ và } \triangle BDC \text{ đồng dạng}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AM \cdot BD \quad (2)$$



Hình 10-12

Cộng từng vế (1) và (2) được  $AB.CD + AD.BC = BD(MC + MA) \geq BD.AC$

$\Rightarrow AB.CD + BC.AD \geq AC.BD$ . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trên cạnh

$AC \Leftrightarrow A, M, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow$  tứ giác ABCD nội tiếp.

Khi đó đẳng thức được gọi là *Định lý Ptolômê* (xem Chuyên đề 17).

**Ví dụ 13.** Cho tam giác cân ABC ( $AB = AC$ ). Gọi P là điểm trong tam giác thỏa mãn  $\widehat{PBC} = \widehat{PCA}$ , gọi I là trung điểm của BC, chứng minh rằng  $\widehat{BPI} + \widehat{APC} = 180^\circ$ .

**Giải.** (h.10-13) Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BP tại D

$\Rightarrow \widehat{PBC} = \widehat{PDA}$  (so le).

Theo giả thiết,  $\widehat{PBC} = \widehat{PCA} \Rightarrow \widehat{PCA} = \widehat{PDA}$

Hình 10-13

$\Rightarrow$  tứ giác ADCP nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{APC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$  (1) và  $\widehat{DAC} = \widehat{DPC}$ .

Kéo dài PI = IQ suy ra BPCQ là hình bình hành  $\Rightarrow \widehat{CBQ} = \widehat{BCP}$ .

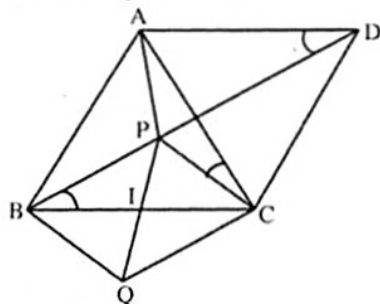
Kết hợp giả thiết  $\Rightarrow \widehat{PBQ} = \widehat{BCA}$ ,  $AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{CAD}$

$\Rightarrow \widehat{PBQ} = \widehat{DAC} \Rightarrow \triangle PBC$  và  $\triangle ADB$  đồng dạng (g.g)

$\Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{PB}{BQ} = \frac{AD}{AC}$ , kết hợp  $\widehat{PBQ} = \widehat{DAC}$

$\Rightarrow \triangle PBQ$  và  $\triangle DAC$  đồng dạng  $\Rightarrow \widehat{BPQ} = \widehat{ADC}$ , thay vào (1) được

$\widehat{BPI} + \widehat{APC} = 180^\circ$ .



**Ví dụ 14.** Cho tam giác nhọn ABC không cân, đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại D và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại I. Từ D hạ DK, DH vuông góc với cạnh AB và AC. Chứng minh rằng diện tích tứ giác AKIH bằng diện tích tam giác ABC (IMO 1987).

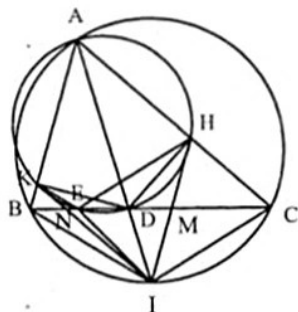
**Giải.**  $DK \perp AB, DH \perp AC \Rightarrow$  tứ giác AKDH nội tiếp, gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn (AKDH) với cạnh BC  $\Rightarrow$

$$\widehat{BCI} = \widehat{BAI} = \widehat{HAD} = \widehat{HED} \Rightarrow HE \parallel CI$$

$$\Rightarrow HEIC \text{ là hình thang, } S_{HIC} = S_{EIC} \Rightarrow S_{EMI} = S_{HMC}.$$

$$\text{Tương tự, } KE \parallel BI \Rightarrow S_{ENI} = S_{NBK}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{AKIH} &= S_{AKNMH} + S_{NEI} + S_{EMI} \\ &= S_{AKNMH} + S_{NBK} + S_{MHC} = S_{ABC}. \end{aligned}$$



Hình 10-14

**Ví dụ 15.** Cho tam giác nhọn ABC ( $AB < AC$ ), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H, gọi I là trung điểm của BC. Hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI và CDI cắt nhau ở K, DE cắt BC tại M. Chứng minh M, H, K thẳng hàng, từ đó suy ra tứ giác BKDM nội tiếp.

**Giải.** (h.10-15)  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{EKD} + \widehat{EKI} + \widehat{IKD} = 540^\circ.$

Theo giả thiết  $\widehat{B} + \widehat{EKI} = \widehat{IKD} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{EKD} = 180^\circ \Rightarrow$  tứ giác AEKD nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AKE}.$

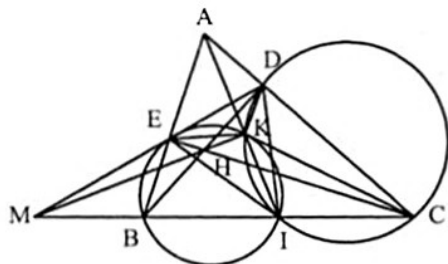
$BD \perp AC, CE \perp AB \Rightarrow$  tứ giác BEDC nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{B}.$

Kết hợp với  $\widehat{ADE} = \widehat{AKE}$

$$\text{được } \widehat{B} = \widehat{AKE}$$

$$\Rightarrow \widehat{EKI} + \widehat{AKE} = \widehat{EKI} + \widehat{B} = 180^\circ$$

$\Rightarrow A, K, I$  thẳng hàng.



Hình 10-15

$\triangle BDC$  là tam giác vuông,  $IB = IC \Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{IDC} = \widehat{ICD}, \widehat{IKC} = \widehat{KAC} + \widehat{ACK}, \widehat{ICD} = \widehat{ICK} + \widehat{KCD} \Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{ICK}, \widehat{KAD} = \widehat{DEK}$  (chấn cung  $\widehat{DK}$ )  $\Rightarrow \widehat{ICK} = \widehat{DEK}$

$\Rightarrow$  tứ giác MEKC nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MKC}.$  Theo kết quả trên suy ra  $\widehat{IKC} = \widehat{AED} = \widehat{MEB}, \widehat{MEC} = \widehat{MEB} + 90^\circ, \widehat{MKC} = \widehat{MKI} + \widehat{IKC} \Rightarrow \widehat{MKI} = 90^\circ$

$\Rightarrow MK \perp KI \Rightarrow A, E, H, D, K$  nằm trên đường tròn đường kính  $AH \Rightarrow HK \perp AI \Rightarrow M, H, K$  thẳng hàng.

Tứ giác  $DEHK$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{HEK} = \widehat{HDK}$ , tứ giác  $MEKC$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{KMC} \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{HDK} \Rightarrow \widehat{KMB} = \widehat{BDK} \Rightarrow$  tứ giác  $BKDM$  nội tiếp.

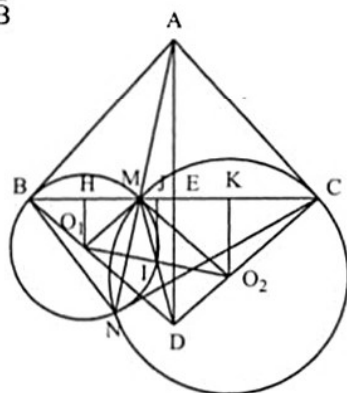
**Ví dụ 16.** Cho tam giác cân  $ABC$  ( $AB = AC$ ),  $M$  là điểm trên  $BC$ . Qua  $M$  dựng đường tròn tâm  $(O_1)$  tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$ , qua  $M$  dựng đường tròn tâm  $(O_2)$  tiếp xúc với  $AC$  tại  $C$ , gọi  $N$  là giao điểm của hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$ . Chứng minh rằng  $A, M, N$  thẳng hàng và tìm quỹ tích trung điểm của  $O_1O_2$  khi  $M$  thay đổi

**Giải.** (h.10-16)  $\widehat{BNM} = \widehat{ABM}$  và  $\widehat{MNC} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BNC} = 180^\circ \Rightarrow ABNC$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{BNA} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{BNM} \Rightarrow N, M, A$  thẳng hàng.

$BO_1$  cắt  $CO_2$  kéo dài tại  $D \Rightarrow AD$  là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC \Rightarrow D$  cố định,  $\triangle O_1BM$  và  $\triangle BDC$  là các tam giác cân  $\Rightarrow O_1M \parallel CD$ .

Tương tự,  $O_2M \parallel DB$ , do đó  $O_1MO_2D$  là hình bình hành.



Hình 10-16

**Phần thuận:**  $I$  là trung điểm của  $O_1O_2$ , hạ  $IJ \perp BC$

$\Rightarrow IJ = \frac{1}{2}(O_1H + O_2K) = \frac{ED}{2} \Rightarrow I$  nằm trên đường thẳng song song với  $BC$

cách  $BC$  một khoảng  $\frac{1}{2}ED$ .

**Giới hạn:**  $M$  trên  $BC \Rightarrow I$  nằm trên đường trung bình của tam giác  $DBC$ .

**Phần đảo:** (Dành cho bạn đọc).

**Ví dụ 17.** Cho tam giác nhọn ABC, D là điểm trong tam giác sao cho

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^\circ \text{ và } AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

a) Tính giá trị của  $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ .

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại C của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và BCD vuông góc với nhau (IMO - 1993).

**Giải.** (h.10-17) a) Theo giả thiết  $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^\circ$ , từ D kẻ  $DE \perp BD$ ,  $DB = DE$

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{C} \text{ và } AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{BC}$$

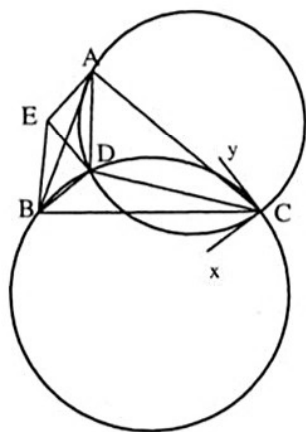
$\Rightarrow \triangle ADE$  và  $\triangle ACB$  đồng dạng (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}, \widehat{A} = \widehat{DAE}$$

$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{BAE} \Rightarrow \triangle CAD$  và  $\triangle BAE$  đồng

$$\text{dạng} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} = \frac{CD}{BD\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sqrt{2}}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}.$$



Hình 10-17

b) Từ C kẻ tiếp tuyến Cx với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADC$ , và tiếp tuyến Cy với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BDC$ .

Ta có  $\widehat{DAC} = \widehat{DCx}$  (chấn cung  $\widehat{DC}$ ),

$\widehat{DBC} = \widehat{DCy}$  (chấn cung  $\widehat{DC}$ );

$$\widehat{ADE} + \widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{A} - \widehat{CAD} + \widehat{B} - \widehat{DBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{DBC} = 90^\circ \Rightarrow Cx \perp Cy.$$



**Ví dụ 18.** Cho hình bình hành ABCD, một đường tròn tùy ý đi qua A cắt AB, AD và AC lần lượt tại M, N, E. Chứng minh  $AM \cdot AB + AN \cdot AD = AE \cdot AC$ .

**Giải.** (h.10-18) Từ đỉnh B dựng góc  $\widehat{ABK} = \widehat{AEM}$

$$\Rightarrow \triangle ABK \text{ và } \triangle AEM \text{ đồng dạng} \Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AM}{AE} \quad (1).$$

Từ  $\widehat{ABK} = \widehat{AEM}$  suy ra  $\widehat{BME} = \widehat{BKC}$ ,  
mà  $\widehat{BME} = \widehat{ANE}$  nên  $\widehat{BKC} = \widehat{ANE}$ ,

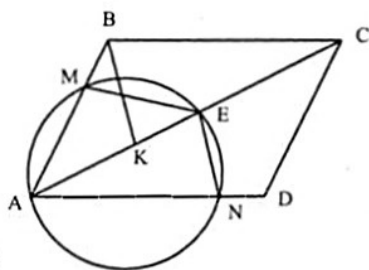
ABCD là hình bình hành  $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \triangle KCB$  và  $\triangle NAE$  đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KC}{NA} = \frac{CB}{AE} \Rightarrow KC = \frac{CB \cdot NA}{AE} = \frac{AD \cdot NA}{AE} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } AK + KC = \frac{AB \cdot AM}{AE} + \frac{AD \cdot NA}{AE} = AC$$

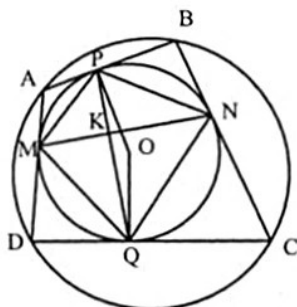
$$\Rightarrow AM \cdot AB + AN \cdot AD = AE \cdot AC.$$



Hình 10-18

**Ví dụ 19.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn và ngoại tiếp trong một đường tròn khác. Gọi các tiếp điểm với đường tròn nội tiếp lần lượt là M, P, N, Q. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

**Giải. Cách I.** (h.10-19) MPNQ là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{MQP}$  (cùng chắn cung  $\widehat{MP}$ ),  
 $\widehat{NQC} = \widehat{NMQ}$  (chắn cung  $\widehat{QN}$ ),  $AM = AP \Rightarrow$   
tam giác AMP cân



Hình 10-19

$$\Rightarrow \widehat{AMP} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{A} \Rightarrow \widehat{MQP} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{A}.$$

$$\text{Tương tự, } \widehat{NMQ} = 90^\circ - \frac{1}{2} \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \widehat{MQP} + \widehat{NMQ} = 90^\circ \quad \frac{1}{2}\widehat{A} + 90^\circ \quad \frac{1}{2}\widehat{C}$$

$$= 180^\circ \quad \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C}), \text{ ABCD là tứ giác nội tiếp } \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MQP} + \widehat{NMQ} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MKQ} = 90^\circ \Rightarrow MN \text{ vuông góc với } PQ.$$

Cách 2. Xét tổng các góc của hai tứ giác AMKP và CQKN, suy ra

$$2\widehat{QKN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{QKN} = 90^\circ.$$

Bạn đọc hãy chứng minh bài toán: Cho tứ giác MPNQ nội tiếp. Qua M, N, P, Q dựng các tiếp tuyến tạo thành tứ giác ABCD. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ khi và chỉ khi tứ giác ABCD nội tiếp.

**Ví dụ 20.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Dựng đường tròn qua B và tiếp xúc với cạnh AC tại A, dựng đường tròn qua C và tiếp xúc với AB tại A, hai đường này tròn cắt nhau tại D. Chứng minh  $\widehat{ADO} = 90^\circ$  (Vô địch Nga - 1999).

**Giải.** (h.10-20)  $\widehat{ABD} = \widehat{CAD}$  (chấn cung  $\widehat{AD}$ ),

$$\widehat{ACD} = \widehat{BAD} \text{ (chấn cung } \widehat{AD} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle BDA \text{ và } \triangle ADC \text{ đồng dạng.}$$

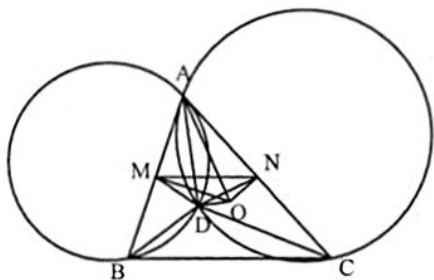
Gọi M là trung điểm của AB, N là trung điểm của AC, ta có  $\widehat{DMA} = \widehat{DNC}$

$$\Rightarrow \widehat{DMA} + \widehat{DNA} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$  AMDN nội tiếp. Mặt khác,  $OM \perp AB, ON \perp AC \Rightarrow M, D, O, N$  nằm trên một đường tròn

$$\Rightarrow \text{năm điểm } A, M, D, O, N \text{ nằm trên đường tròn đường kính } OA$$

$$\Rightarrow \widehat{ADO} = 90^\circ.$$



Hình 10-20

**Ví dụ 21.** Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) đi qua A và C cắt AB, AC theo thứ tự tại K và N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và KBN cắt nhau tại B và M. Chứng minh góc  $\widehat{OMB}$  vuông (IMO - 1985).

**Giải.** (h.10-21) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ , J là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta BKN$ , dựng tiếp tuyến Bx với đường tròn (J)

$$\widehat{KBx} = \widehat{BNK}, \text{ AKNC nội tiếp} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{BNK}$$

$$\Rightarrow \widehat{MKx} = \widehat{A} \Rightarrow Bx \parallel AC.$$

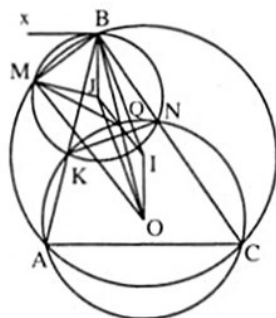
OI là trung trực của AC nên dễ dàng chứng minh được  $BJ \parallel OI$ .

Từ B kẻ tiếp tuyến By với đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ , chứng minh tương tự có  $BI \parallel OJ$

$\Rightarrow$  tứ giác BIOJ là hình bình hành.

Gọi Q là giao điểm BO và JI  $\Rightarrow QO = QB$ ,

JI là trung trực BM  $\Rightarrow QM = QB \Rightarrow QM = QB = QO \Rightarrow \Delta BMO$  là tam giác vuông  $\Rightarrow \widehat{OMB} = 90^\circ$ .



Hình 10-21

**Ví dụ 22.** Cho tứ giác ABCD thỏa mãn  $\widehat{CAB} = 30^\circ$ ,  $\widehat{DBC} = 60^\circ$ ,  $\widehat{ACD} = 40^\circ$ ,  $\widehat{BDA} = 50^\circ$  và  $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} > 180^\circ$ . Tính các góc của tứ giác ABCD.

**Giải.** (h.10-22) Qua A, B, C dựng đường tròn (O), các đường thẳng BD, AD, CD cắt đường tròn (O) lần lượt tại E, M, N.

$$\widehat{ADC} + \widehat{ABC} > 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} > 180^\circ \quad \widehat{ABC} = \widehat{AEC}$$

$\Rightarrow D$  nằm trong đường tròn (O)

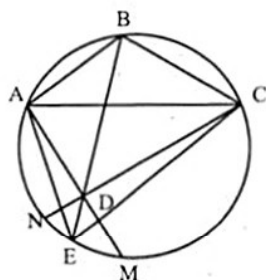
$$\widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow \text{sđ } \widehat{BC} = 60^\circ, \widehat{CBD} = \widehat{CBE} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{CME} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{BC} + \widehat{BME} = 180^\circ$$

$\Rightarrow BE$  là đường kính của đường tròn (O)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{BAE} &= 180^\circ = \text{sđ } \widehat{BA} + \text{sđ } \widehat{AN} + \text{sđ } \widehat{NE} \\ &= \widehat{BA} + \widehat{EM} \quad \widehat{EM} + 2\widehat{ACN} + \widehat{NE} \\ &= 2\widehat{ADB} - \widehat{EM} + 80^\circ + \widehat{NE} \\ &= 100^\circ + 80^\circ \quad \widehat{EM} + \widehat{NE} \end{aligned}$$



Hình 10-22

$$\Rightarrow \widehat{EM} = \widehat{NE} \Rightarrow BE \text{ là trục đối xứng của } AC \Rightarrow$$

$$\widehat{ABD} = 60^\circ, \widehat{BCA} = 30^\circ, \widehat{BDC} = 50^\circ, \widehat{CAD} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 70^\circ, \hat{B} = 120^\circ, \hat{C} = 70^\circ, \hat{D} = 100^\circ.$$

**Ví dụ 23.** Cho tam giác vuông  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) và  $\hat{B} < \hat{C}$ , tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  tại  $A$  cắt cạnh  $BC$  kéo dài tại  $D$ , gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $BC$ ,  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BE$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AH$ , đường thẳng  $BI$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  tại  $K$ . Chứng minh rằng  $BD$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ADK$ .

**Giải.** (h.10-23)  $E$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $BC \Rightarrow DE$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow AE \perp BC \text{ và } MA = ME.$$

Theo giả thiết  $IA \perp IH$  nên

$$IM \parallel BE \Rightarrow \widehat{KIM} = \widehat{KBE} = \widehat{KAE}$$

$$\Rightarrow A, I, M, K \text{ nằm trên một đường}$$

$$\text{tròn} \Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{IKM};$$

$$\widehat{BAH} = \widehat{BAE} = \widehat{HAE} = \widehat{BKE} = \widehat{IKM} = \widehat{MKE} \quad (1)$$

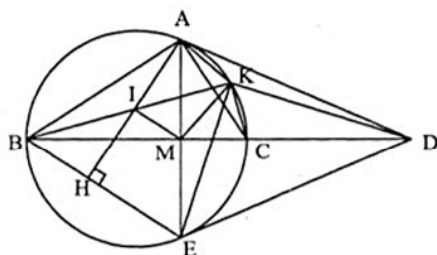
Mặt khác,  $\widehat{ABE} = \widehat{EAD}$  (chấn cung  $\widehat{AE}$ );

$$\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 90^\circ - \widehat{EAD} = \widehat{ADM} = \widehat{EDM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{MKE} = \widehat{EDM} \Rightarrow$  bốn điểm  $M, K, D, E$  nằm trên một đường tròn  $\Rightarrow \widehat{KDM} = \widehat{KEM} = \widehat{KEA} = \widehat{KAD} \Rightarrow BD$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ADK$ .

**Ví dụ 24.** Cho  $A, B, C, D$  là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường tròn sao cho các đoạn thẳng  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $E$ . Trên đoạn  $CE$  lấy điểm  $M$  khác  $C$  và  $E$ . Tiếp tuyến tại  $E$  của đường tròn qua  $D, E, M$  cắt  $BC$  và  $AB$  lần lượt tại  $F$  và  $G$ .

$$\text{Tính tỉ số } \frac{EG}{EF} \text{ theo } t = \frac{AM}{AC} \quad (IMO \ 1990).$$



Hình 10-23

**Giải.** (h.10-24) GE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle DEM$

$$\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{DEG} = \widehat{EMD} \text{ (chắn cung } \widehat{DE}) ;$$

$$\widehat{CBD} = \widehat{CAD} \text{ (chắn cung } \widehat{CD}) \Rightarrow \triangle BEF \sim \triangle AMD$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{AM} = \frac{EF}{MD} \Rightarrow BE \cdot MD = AM \cdot EF \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{ABD} = \widehat{ACD}, \widehat{BGE} = \widehat{BEF} - \widehat{ABE} = \widehat{EMD} - \widehat{MCD} = \widehat{MDC}$$

$$\Rightarrow \triangle BGE \text{ và } \triangle CDM \text{ đồng dạng}$$

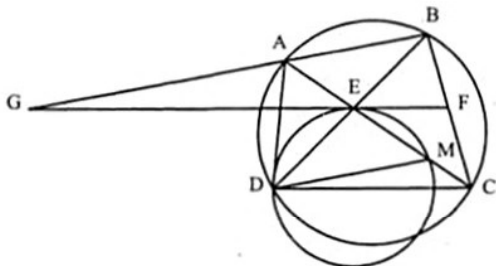
$$\Rightarrow \frac{GE}{DM} = \frac{BE}{CM}$$

$$\Rightarrow GE \cdot CM = BE \cdot DM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$GE \cdot CM = AM \cdot EF$$

$$\Rightarrow \frac{GE}{EF} = \frac{AM}{CM} = \frac{t}{1-t}.$$



Hình 10-24

**Ví dụ 25.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác AD và BE cắt nhau tại I, H là trực tâm tam giác, đường thẳng OH cắt AC và BC lần lượt tại P và Q. Giả sử tứ giác CEID nội tiếp, chứng minh  $PQ = AP + BQ$ . (CMO 2005).

$$\text{Giải. Tứ giác CEID nội tiếp} \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{EID} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{AIB} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{C})$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ.$$

H là trực tâm  $\triangle ABC \Rightarrow$  tứ giác CMHN nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AHB} = 180^\circ - \widehat{C} = 120^\circ; \widehat{C} = 60^\circ$$

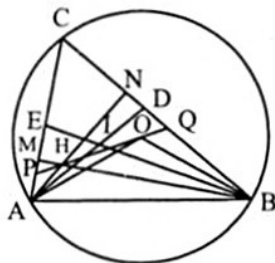
$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{AHOB nội tiếp} \Rightarrow \widehat{PHA} = \widehat{OBA},$$

$$OA = OB \Rightarrow \widehat{OBA} = 30^\circ, \text{ mặt khác } \widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{PAH} = 30^\circ \Rightarrow \triangle APH \text{ cân}$$

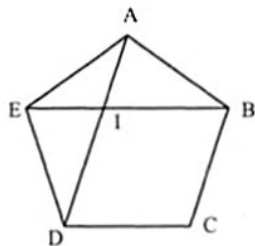
$$\Rightarrow PH = PA. \text{ Tương tự, } \triangle QHB \text{ cân nên } QH = QB, \text{ do đó}$$

$$PQ = PH + HQ = AP + BQ.$$



Hình 10-25

**Ví dụ 26.** Tính đường chéo của ngũ giác đều có cạnh bằng  $a$ . Từ đó suy ra cách dựng ngũ giác đều có cạnh cho trước.



Hình 10-26a

**Giải.** (h.10-26a) ABCDE là ngũ giác đều nên nó nội tiếp một đường tròn. Ta có  $\widehat{EAB} = 108^\circ$ ,  $\widehat{AEB} = \widehat{EAD} = \widehat{ABE} = 36^\circ$ ,  $\widehat{IAB} = \widehat{AIB} = 72^\circ$

$$\Rightarrow IA = IE, BA = BI;$$

$$\triangle ABE \sim \triangle IAE \Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{IA}{AE} \Rightarrow AB^2 = BE \cdot AI = BE(BE - AB)$$

$$\Rightarrow AB^2 = BE^2 - BE \cdot AB; \text{ chia cả hai vế cho } AB^2 \text{ và đặt } \frac{BE}{AB} = x \text{ ta có}$$

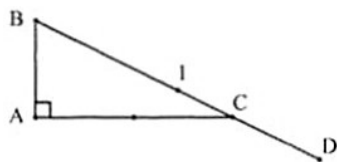
$$1 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow BE = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a.$$

Cách dựng đoạn  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} a$  (h.10-26b) :

Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho  $AB = a$ ,  $AC = 2a \Rightarrow BC = a\sqrt{5}$ ; trên tia đối của tia CB đặt  $CD = a \Rightarrow BD = (1 + \sqrt{5})a$ .

Lấy I là trung điểm của BD thì  $BI = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a$ .



Hình 10-26b

Từ đó suy ra cách dựng đường chéo của ngũ giác đều và dựng tiếp ngũ giác đều.

**Ví dụ 27.** Cho đa giác đều  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ . Chứng minh rằng:

$$1) A_1A_2^2 + A_1A_2 \cdot A_1A_4 = A_1A_3^2 \quad (1)$$

$$2) A_1A_2^2 + A_1A_3 \cdot A_1A_4 = A_1A_4^2 \quad (2)$$

$$3) 8\cos^3 \alpha - 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha + 1 = 0, \text{ trong đó } \alpha = \widehat{A_2A_1A_3}.$$

**Giải.** (h.10-26c)  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$  là đa giác đều nên nó nội tiếp một đường tròn

$$\Rightarrow A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots;$$

$$A_1A_3 = A_2A_4; A_1A_4 = A_2A_5.$$

Áp dụng định lí Ptolômê với các tứ giác

$$A_1A_2A_3A_4 \text{ và tứ giác } A_1A_2A_4A_5$$

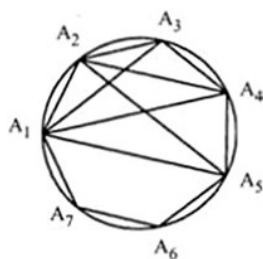
$$\Rightarrow A_1A_2^2 + A_1A_2 \cdot A_1A_4 = A_1A_3^2;$$

$$A_1A_2^2 + A_1A_3 \cdot A_1A_4 = A_1A_4^2; \quad \alpha = \widehat{A_2A_1A_3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{A_1A_3}{2A_1A_2}.$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow A_1A_4 = \frac{A_1A_3^2 - A_1A_2^2}{A_1A_2}.$$

$$\text{Thay vào (2) và biểu thị } \cos \alpha = \frac{A_1A_3}{2A_1A_2}$$

$$\text{ta được } 8\cos^3 \alpha - 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha + 1 = 0.$$



Hình 10-26c

## BÀI TẬP

**10.1.** Cho đường tròn (O), đường kính AB, từ A kẻ hai cát tuyến cắt tiếp tuyến tại B ở M, N và cắt đường tròn (O) tại C và D. Chứng minh rằng bốn điểm D, C, M, N nằm trên một đường tròn.

**10.2.** Cho hai đường tròn cắt nhau tại M và N. Qua điểm I trên đoạn MN kẻ dây AB của đường tròn (O) và dây CD của đường tròn (O'). Chứng minh bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn.

**10.3.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Dựng bốn đường tròn bán kính tùy ý, mỗi đường tròn đi qua hai đỉnh liên tiếp của tứ giác, các đường tròn đó cắt nhau tạo thành một tứ giác. Chứng minh tứ giác tạo thành là tứ giác nội tiếp.

**10.4.** Cho tam giác ABC, M và N là hai điểm trên phân giác AD thỏa mãn  $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$ . Đường thẳng CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm P, đường thẳng BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại Q. Chứng minh P, A, Q thẳng hàng và  $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$ .

**10.5.** Cho tam giác ABC, gọi P và Q là hai điểm ở trong tam giác sao cho  $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$  và  $\widehat{PBA} = \widehat{QBC}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$\frac{PA \cdot QA}{AB \cdot AC} + \frac{PB \cdot QB}{AB \cdot BC} + \frac{PC \cdot QC}{BC \cdot AC}.$$

**10.6.** Cho tam giác ABC ( $AB < AC$ ). Gọi H là trực tâm, I và O là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC, đồng thời AH bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. So sánh góc  $\widehat{ACB}$  và  $\widehat{AHI}$ .

**10.7.** Cho hai đường tròn ( $O_1$ ) và ( $O_2$ ) tiếp xúc trong tại M (đường tròn ( $O_2$ ) nằm trong). Hai điểm P và Q thuộc đường tròn ( $O_2$ ), qua P kẻ tiếp tuyến với ( $O_2$ ) cắt ( $O_1$ ) tại B và D, qua Q kẻ tiếp tuyến với ( $O_2$ ) cắt ( $O_1$ ) tại A và C. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACD, BCD nằm trên PQ.

**10.8.** Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB. Trên đường thẳng AB lấy điểm C cố định nằm ngoài đoạn AB. Từ C kẻ hai tiếp tuyến CE và CF với đường tròn. Gọi I là giao điểm của AB và EF. Qua C kẻ cát tuyến cắt đường tròn tại M, N. Chứng minh  $\widehat{AIM} = \widehat{BIN}$ .

**10.9.** Cho tam giác nhọn ABC, M là điểm tùy ý trên cạnh BC. Kẻ trung trực của các đoạn BM, CM cắt cạnh AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng đường thẳng qua M và vuông góc với EF đi qua một điểm cố định.

**10.10.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, AD và BC cắt nhau tại N. Đường phân giác của góc  $\widehat{AMD}$  cắt BC tại E và cắt AD tại K. Đường phân giác góc  $\widehat{ANB}$  cắt CD tại P và cạnh AB tại Q. Chứng minh rằng tứ giác EPKQ là hình thoi.

**10.11.** Cho hai đường tròn ( $O_1$ ) và ( $O_2$ ) cắt nhau tại A và B. Đường thẳng  $O_1A$  cắt đường tròn ( $O_2$ ) tại D, đường thẳng  $O_2A$  cắt đường tròn ( $O_1$ ) tại C. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD cắt đường tròn ( $O_1$ ) tại M và đường tròn



( $O_2$ ) tại N. Chứng minh năm điểm B, C, D,  $O_1$ ,  $O_2$  nằm trên một đường tròn, từ đó suy ra  $BC + BD = MN$ .

**10.12.** Cho đường tròn tâm O ở trên cạnh AB của một tứ giác ABCD và tiếp xúc với ba cạnh còn lại. Chứng minh rằng nếu tứ giác ABCD nội tiếp thì  $AD + BC = AB$  (IMO 1985).

**10.13.** Cho tứ giác ABCD, đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, AB và CD không song song, đường trung trực của AB và CD cắt nhau tại P (P nằm trong tứ giác ABCD). Chứng minh rằng ABCD nội tiếp khi và chỉ khi các tam giác ABP và CDP có diện tích bằng nhau (IMO 1998).

**10.14.** Cho tam giác nhọn ABC, I là điểm trong tam giác, BI cắt AC tại M, CI cắt AB tại N và tứ giác AMIN nội tiếp. Chứng minh rằng  $BN \cdot BA + CM \cdot CA$  không phụ thuộc vào điểm I. Xác định điểm I sao cho tứ giác BNMC nội tiếp.

**10.15.** Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng

$$\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^\circ$$

**10.16.** Chứng minh rằng trong một tứ giác ngoại tiếp đường tròn, hai đoạn thẳng nối hai tiếp điểm của hai cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác có một cặp góc đối bằng nhau.

**10.17.** Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp được đường tròn. Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD và trung điểm hai đường chéo của tứ giác thẳng hàng (Đường thẳng này có tên là đường thẳng Newton).

**10.18.** Cho đoạn thẳng AB, M là điểm trong mặt phẳng sao cho tam giác MAB là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB, I là trung điểm AB và D là hình chiếu của H trên MI.

Chứng minh rằng tích  $MI \cdot DI$  không phụ thuộc vào vị trí của M.

**10.19.** Cho đường thẳng d và đường tròn (O; R), đường thẳng d không cắt đường tròn, trên d lấy điểm M, từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB. Gọi H là hình chiếu của O trên d; D, E là hình chiếu của H lần lượt trên MA, MB. Chứng minh đường thẳng DE đi qua điểm cố định.

**10.20.** Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp một đường tròn bán kính bằng 1 và các góc bằng nhau. Chứng minh rằng ABCDE là ngũ giác đều, từ đó suy ra  $AB \cdot AC = \sqrt{5}$  (Vô địch Hungary năm 1900 và 1905).

## Chuyên đề 11. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Độ dài đường tròn

a) Độ dài  $C$  của một đường tròn bán kính  $R$  là :  $C = 2\pi R$ .

b) Độ dài cung tròn: Một cung  $n^\circ$  của một đường tròn bán kính  $R$  có độ dài

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

#### 2. Diện tích hình tròn

a) Diện tích hình tròn có bán kính  $R$  :  $S = \pi R^2$ .

b) Diện tích hình quạt tròn bán kính  $R$  với góc ở tâm  $n^\circ$  :  $S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}$ .

#### 3. Hình viên phân : là hình giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy.

Diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung  $\widehat{AB}$  và dây  $AB$  bằng hiệu giữa diện tích hình quạt  $OAB$  và diện tích tam giác  $OAB$  :

$$S_{\text{vpAB}} = S_{\text{qOAB}} - S_{\Delta OAB}.$$

#### 4. Hình vành khăn : là phần hình tròn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm bán kính $R$ và $r$ ( $R > r$ ).

$$S_{\text{vkh}} = \pi(R^2 - r^2).$$

### Kiến thức bổ sung

Nếu  $a$ ,  $R$  và  $r$  là cạnh và bán kính đường tròn ngoại và nội tiếp đa giác đều  $n$  cạnh thì

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}, \quad \frac{r}{R} = \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

### II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Cho đường tròn tâm  $(O ; R)$ .  $A$  là điểm trên đường tròn, dựng đường tròn tâm  $O'$  đường kính  $OA$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên  $(O')$ , tia  $OM$  cắt đường tròn  $(O ; R)$  tại  $N$ .

a) Chứng minh rằng độ dài cung  $\widehat{AM}$  và  $\widehat{AN}$  của hai đường tròn bằng nhau.

b) Chứng minh rằng diện tích quạt tròn OAN gấp hai lần diện tích quạt tròn O'AM.

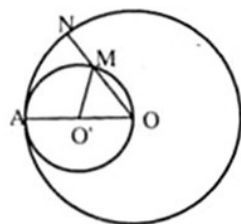
**Giải.** a) Hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A,

$$\Delta O'O'M \text{ có } O'O = O'M \Rightarrow \Delta O'O'M \text{ cân, } O'A = \frac{1}{2} R.$$

$$\text{Đặt } \widehat{AOM} = n^\circ \text{ thì } \widehat{AO'M} = 2n^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AM} = \frac{\pi R}{180} \cdot \frac{2n}{2} = \frac{\pi Rn}{180}; \quad \widehat{AN} = \frac{\pi Rn}{180}$$

$$\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{AN}.$$



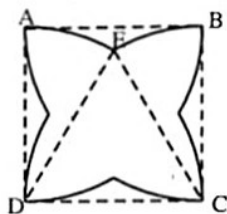
Hình 11-1

$$\text{b) } S_{OAN} = \frac{\pi R^2 n}{360}, \quad S_{O'AM} = \frac{\pi R'^2 2n}{4 \cdot 360} = \frac{\pi R'^2 n}{720} \Rightarrow S_{OAN} = 2S_{O'AM}.$$

**Ví dụ 2.** Cho A, B, C, D là bốn đỉnh của hình vuông có cạnh là a. Tính chu vi P và diện tích S hình hoa 4 cánh giới hạn bởi các đường cong có bán kính bằng a, tâm là các đỉnh của hình vuông (hình vẽ).

$$\text{Giải. Độ dài cung } \widehat{AE} = \frac{2\pi a}{12} = \frac{\pi a}{6}$$

$$\Rightarrow P = 8 \cdot \frac{\pi a}{6} = \frac{4\pi a}{3}.$$



Hình 11-2

$$\Delta EDC \text{ là tam giác đều, góc } \widehat{ADE} = 30^\circ \Rightarrow S_{EDC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

$$S_{qDAE} = \frac{a^2 \pi 30}{360} = \frac{a^2 \pi}{12} \Rightarrow S_{AEB} = S_{ABCD} - 2S_{qDAE} - S_{ECD} = a^2 - \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ABE} = \frac{a^2(12 - 2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

$$\Rightarrow S = a^2 - 4S_{ABE} = a^2 - \frac{a^2(12 - 2\pi - 3\sqrt{3})}{3} = \frac{a^2(2\pi + 3\sqrt{3} - 9)}{3}.$$

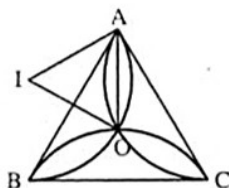
**Ví dụ 3.** Cho tam giác đều ABC tâm O có cạnh bằng a. Dựng ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OBC, OCA, chúng đôi một cắt nhau tạo thành hình hoa thị 3 cánh. Tính diện tích hình hoa thị (h.11-3).

**Giải.** Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta OAB \Rightarrow$

$\Delta IAO$  là tam giác đều có cạnh  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ , hình hoa thị

gồm 6 hình viên phân bằng nhau. Ta có  $S_{qIOA} = \frac{\pi a^2}{18}$ ,

$$S_{IAO} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \Rightarrow S = 6 \left( \frac{\pi a^2}{18} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \right) = \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}.$$



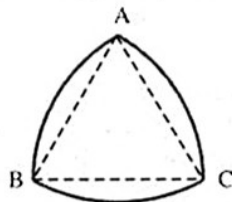
Hình 11-3

**Ví dụ 4.** Cho A, B, C là ba đỉnh của tam giác đều cạnh a. Dựng ba cung tròn tâm là A, B, C, bán kính a. Tính diện tích hình giới hạn bởi ba cung tròn (h.11-4).

**Giải.** Diện tích giới hạn bởi ba đường cong là diện tích ba hình viên phân và diện tích  $\Delta ABC$  đều.

$$S_{qABC} = \frac{a^2\pi}{6}, S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{vp} = \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} \Rightarrow$$

$$S = \frac{a^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} \cdot 3 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2(\pi - \sqrt{3})}{2}.$$



Hình 11-4

**Ví dụ 5.** Cho hai đường tròn bằng nhau ( $O; R$ ) và ( $O'; R$ ), tâm đường tròn này nằm trên đường tròn kia. Tính diện tích S phần giao của hai hình tròn (h.11-5).

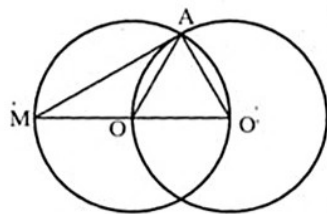
**Giải.**

$\Delta AOO'$  là tam giác đều cạnh R

$$\Rightarrow S_{qOAO'} = \frac{R^2\pi}{6}, S_{vp} = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

$$\Rightarrow S = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3}) \cdot 4}{12} + \frac{R^2\sqrt{3} \cdot 2}{4}$$

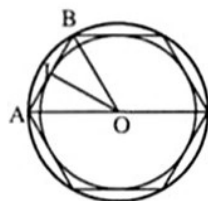
$$= \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}.$$



Hình 11-5

**Ví dụ 6.** Cho lục giác đều cạnh a. Tính diện tích hình vành khăn giới hạn bởi các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp lục giác đó và tính diện tích S của hình giới hạn bởi lục giác đều và đường tròn nội tiếp lục giác (h.11-6).

**Giải.** Lục giác đều có cạnh bằng  $a \Rightarrow OA = a \Rightarrow \Delta OAB$  là tam giác đều,  $OI$  là đường cao  $\Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .



Hình 11-6

$$S_{\text{vkh}} = \pi(a^2 - \frac{3a^2}{4}) = \frac{\pi a^2}{4}, S_{\text{LG}} = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} - \frac{3a^2 \pi}{4} = \frac{a^2 (6\sqrt{3} - 3\pi)}{4}.$$

**Ví dụ 7.** Cho tam giác ABC. Gọi  $S_1, S_2, S_3$  là diện tích các nửa hình tròn thứ tự có đường kính là BC, CA, AB. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông khi và chỉ khi  $(S_1^2 + S_2^2 - S_3^2)^2 - 4S_1^2 S_2^2$ .

**Giải.**  $(S_1^2 + S_2^2 - S_3^2)^2 = 4S_1^2 S_2^2 \Leftrightarrow (S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 - 2S_1 S_2)(S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 + 2S_1 S_2) = 0$

$$\Leftrightarrow (S_1 - S_2 - S_3)(S_1 - S_2 + S_3)(S_1 + S_2 - S_3)(S_1 + S_2 + S_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (S_1 - S_2 - S_3)(S_1 - S_2 + S_3)(S_1 + S_2 - S_3) = 0. \text{ Xảy ra một trong ba trường hợp}$$

a)  $S_1 - S_2 - S_3 = 0 \Leftrightarrow S_1 = S_2 + S_3 \Leftrightarrow \frac{a^2 \pi}{8} = \frac{b^2 \pi}{8} + \frac{c^2 \pi}{8} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$

vuông tại A.

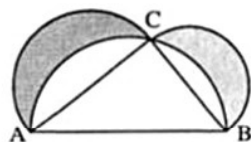
b)  $S_2 = S_1 + S_3 \Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông tại B.

c)  $S_3 = S_1 + S_2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông tại C.

**Ví dụ 8.** Cho tam giác ABC nội tiếp nửa đường tròn đường kính AB. Dựng ra phía ngoài các nửa đường tròn đường kính AC và BC tạo thành hai "hình trăng khuyết" (Hypocrat). Chứng minh rằng tổng diện tích  $S$  của hai hình trăng khuyết bằng diện tích tam giác ABC (h.11-8).

**Giải.**  $\Delta ABC$  vuông  $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC, AB^2 = AC^2 + BC^2,$

$$S_{\text{vpAC}} + S_{\text{vpBC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB^2 \pi}{4} - \frac{1}{2} AC \cdot BC,$$



Hình 11-8

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{AC^2 \pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{BC^2 \pi}{4} - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{AB^2 \pi}{4} - \frac{1}{2} AC \cdot BC \right) = \\ &= \frac{\pi}{8} (AC^2 + BC^2 - AB^2) + \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot BC = S_{\Delta ABC}. \end{aligned}$$

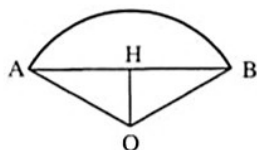
**Ví dụ 9.** Cho hình viên phân có chu vi là  $p$ , số đo cung là  $120^\circ$ . Tính bán kính của đường tròn tạo thành hình viên phân và tính diện tích hình viên phân đó.

**Giải.** (h.11-9) Gọi bán kính đường tròn là  $R$ ,  
 $\widehat{AOB} = 120^\circ$

$$\Rightarrow AB = R\sqrt{3}, \text{ cung } \widehat{AB} \text{ có độ dài } \frac{2\pi R}{3}$$

$$\Rightarrow p = R\sqrt{3} + \frac{2\pi R}{3} \Rightarrow R = \frac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}$$

$$S_{qAOB} = \frac{3\pi p^2}{(2\pi + 3\sqrt{3})^2}, S_{OAB} = \frac{9\sqrt{3}p^2}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2} \Rightarrow S = \frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}.$$



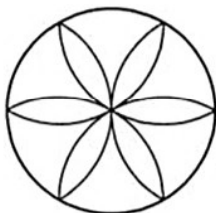
Hình 11-9

**Ví dụ 10.** Tính diện tích hình hoa thị 6 cánh tạo bởi 6 cung tròn có bán kính  $R$ , tâm là các đỉnh của lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính  $R$  (h.11-10).

**Giải.** Diện tích một cánh hoa thị:

$$S = 2\left(\frac{R^2\pi}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}$$

$$\Rightarrow \text{diện tích hoa thị 6 cánh là } R^2(2\pi - 3\sqrt{3}).$$



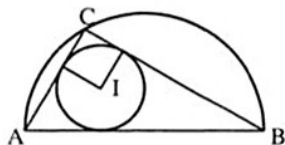
Hình 11-10

**Ví dụ 11.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$ ,  $C$  là điểm trên nửa đường tròn sao cho cung  $\widehat{AC} = 60^\circ$ , đường tròn (I) nội tiếp tam giác  $ABC$ . Tính diện tích hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính  $AB$  và phần ngoài đường tròn (I).

**Giải.**  $\widehat{AC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{CBA} = 30^\circ \Rightarrow AC = R, BC = R\sqrt{3}$ . Gọi bán kính của (I) là  $r$

$$\Rightarrow r = \frac{AC \cdot BC}{AC + BC + AB} = \frac{R\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{R^2\pi}{2} - \frac{3R^2\pi}{(3 + \sqrt{3})^2} = \frac{R^2\pi(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$



Hình 11-11

**Ví dụ 12.** Cho tam giác vuông  $ABC$  có cạnh huyền  $BC$  cố định. Gọi  $S_A, S_B, S_C$  lần lượt là diện tích các nửa hình tròn đường kính  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $2(S_B^2 + S_C^2) \geq S_A^2$ . Xác định vị trí của  $A$  để có dấu bằng.

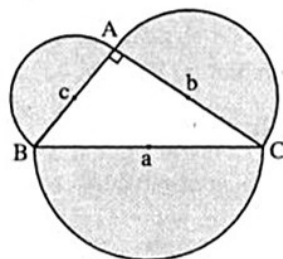
**Giải.** Đặt  $AB = c, BC = a, CA = b$ ;  $S_A = \frac{a^2 \pi}{8}$ ,

$$S_B = \frac{b^2 \pi}{8}, S_C = \frac{c^2 \pi}{8}.$$

$$2(S_B^2 + S_C^2) \geq S_A^2 \Leftrightarrow 2(b^4 + c^4) \geq a^4 = (b^2 + c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2 - c^2)^2 \geq 0. \text{ Dấu bằng xảy}$$

ra khi  $b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông cân tại A.



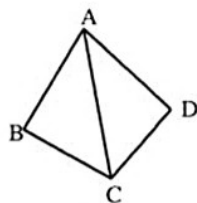
Hình 11-12

**Ví dụ 13.** Cho 19 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng nằm trong một lục giác đều có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác tạo bởi 3 trong 19 điểm đã cho, có ít nhất một góc không lớn hơn  $45^\circ$  và nằm trong đường tròn có bán kính nhỏ hơn  $\frac{3}{5}$ .

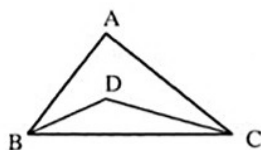
**Giải.** Chia lục giác đều thành 6 tam giác đều có cạnh bằng 1, có 19 điểm nằm trong lục giác đều, theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất một tam giác chứa 4 trong 19 điểm đã cho.

a) Giả sử 4 điểm đó là A, B, C, D sắp xếp thành một tứ giác lồi  $\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow$  có ít nhất một góc  $\leq 90^\circ$ .

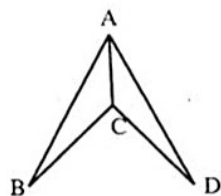
Giả sử góc đó là  $\widehat{A} \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{CAD} \leq 90^\circ \Rightarrow$  trong 2 góc  $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}$  có ít nhất một góc  $\leq 45^\circ$ .



a)



b)



c)

Hình 11-13

Giả sử  $\widehat{BAC} \leq 45^\circ \Rightarrow$  tam giác ABC thỏa mãn có góc không lớn hơn  $45^\circ$ .

b) Giả sử 4 điểm tạo thành như trên hình 11-13b, c.

**Trường hợp 1:**  $\widehat{BDC} \geq 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} + \widehat{BCD} \leq 90^\circ \Rightarrow$  có ít nhất một trong hai góc  $\widehat{CBD}, \widehat{BCD} \leq 45^\circ$ , chẳng hạn  $\widehat{BCD} \leq 45^\circ \Rightarrow \Delta BCD$  là tam giác có góc không lớn hơn  $45^\circ$ .

Trường hợp 2:  $\widehat{BCD} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} < 90^\circ \Rightarrow$  trong 2 góc  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{CAD}$  có một góc không lớn hơn  $45^\circ$ .

Giả sử  $\widehat{BAC} \leq 45^\circ \Rightarrow$  tam giác ABC có một góc không lớn hơn  $45^\circ$ .

Tam giác đều có cạnh bằng 1, bán kính đường tròn ngoại tiếp là  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{5}$ .

Vậy luôn tồn tại một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 19 điểm đã cho, có ít nhất một góc không lớn hơn  $45^\circ$ , nằm trong đường tròn bán kính nhỏ hơn  $\frac{3}{5}$ .

**Ví dụ 14.** Cho hai  $n$ -giác đều nội tiếp và ngoại tiếp cùng một đường tròn có độ dài là  $P$  và diện tích là  $S$ . Gọi  $p_1, s_1$  là độ dài và diện tích đường tròn nội tiếp, gọi  $p_2, s_2$  là độ dài và diện tích đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng  $P^2 = p_1 p_2$  và  $S^2 = s_1 s_2$ .

**Giải.** Gọi AB là cạnh đa giác đều nội tiếp, MN là cạnh đa giác đều ngoại tiếp đường tròn (O)  
 $\Rightarrow OB \perp MN, OM \perp AB$ ,

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \widehat{MOB} = \frac{180^\circ}{n} = \alpha, OB = r,$$

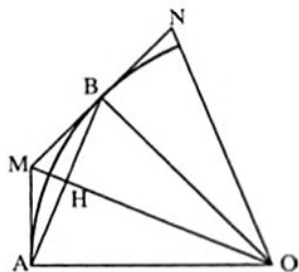
$$HO = r \cos \alpha; OM = \frac{OB}{\cos \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow P = 2\pi r, p_1 = 2\pi r \cos \alpha, p_2 = \frac{2\pi r}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow p_1 p_2 = 4\pi^2 r^2 = P^2.$$

$$s_1 = \pi r^2 \cos^2 \alpha, s_2 = \frac{\pi r^2}{\cos^2 \alpha}, S = \pi r^2$$

$$\Rightarrow s_1 s_2 = \pi r^2 \cos^2 \alpha \frac{\pi r^2}{\cos^2 \alpha} = \pi^2 r^4 = (\pi r^2)^2 = S^2.$$



Hình 11-14

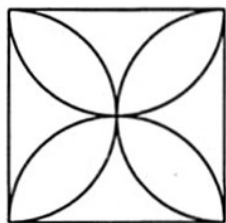
## BÀI TẬP

**11.1.** Cho hình vuông có cạnh bằng  $a$ . Vẽ bốn đường tròn có tâm là các đỉnh hình vuông, có bán kính  $\frac{a}{2}$ . Tính diện tích phần hình vuông nằm ngoài các đường tròn đó.



- 11.2. Gọi  $AB$  là cạnh đa giác đều  $n$  cạnh nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ . Tính diện tích hình quạt  $OAB$  và hình viên phân định bởi dây cung nhỏ  $AB$  trong các trường hợp  $n = 3, 4, 6$ .

- 11.3. Tính diện tích hình hoa thị bốn cánh (như hình 11.15), cạnh hình vuông bằng  $a$ .



Hình 11-15

- 11.4. Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ .

Dựng trong hình chữ nhật hai nửa đường tròn đường kính  $AD$  và  $CD$ . Tính diện tích phần chung của hai nửa hình tròn.

- 11.5. Cho đường tròn  $(O; R)$ , và dây  $AB = a$ . Kẻ đường kính  $CD$  vuông góc với  $AB$ . Tính  $AC$ ,  $AD$  theo  $R$ ,  $a$ . Từ đó tính cạnh bát giác đều và thập nhị giác đều nội tiếp theo  $R$ .

- 11.6. Cho hai đường tròn  $(O_1; R_1)$  và  $(O_2; R_2)$  tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài  $AB$  trong đó  $A$  thuộc  $(O_1; R_1)$ ,  $B$  thuộc  $(O_2; R_2)$ . Tính diện tích hình tròn tiếp xúc với  $AB$  đồng thời tiếp xúc ngoài với hai đường tròn trên.

- 11.7. Cho hình vuông  $OABC$  cạnh  $a$ . Trên  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $AB = 3AD$ ,  $E$  là trung điểm của  $BC$ , dựng đường tròn tâm  $O$  bán kính  $a$ . Tính diện tích hình giới hạn bởi hình vuông, đường tròn và các đoạn thẳng  $AD$ ,  $DE$ ,  $EC$ .

# HÌNH TRỤ. HÌNH NÓN. HÌNH CẦU

## Chuyên đề 12. HÌNH TRỤ

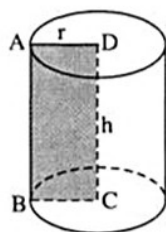
### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khi quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một hình trụ (h.12-1).
2. Với hình trụ có bán kính đáy  $r$  và chiều cao  $h$ , ta có :

Diện tích xung quanh bằng  $S_{xq} = 2\pi rh$ .

Diện tích toàn phần bằng  $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$ .

Thể tích bằng  $V = \pi r^2 h$ .



Hình 12-1

### II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Một hình trụ có chiều cao bằng  $h$ , diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

**Giải**

Gọi bán kính đáy bằng  $r$ . Ta có

$$S_{xq} = 2\pi rh.$$

Theo đề bài, diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy nên

$$2\pi rh = 2\pi r^2. \text{ Suy ra } r = h.$$

Diện tích xung quanh bằng

$$2\pi rh = 2\pi h^2.$$

Thể tích bằng

$$\pi r^2 h = \pi h^3.$$

**Ví dụ 2.** Hai bạn Hoàng và Khoa có hai miếng bìa hình chữ nhật có chiều dài  $a$ , chiều rộng  $b$  trong đó  $a > b$ . Bạn Hoàng cuộn tấm bìa theo chiều dài cho hai

mép sát nhau rồi dùng băng dính dán lại được một hình trụ không có đáy (khi đó chiều rộng của tấm bìa là chiều cao của hình trụ). Bạn Khoa cuộn tấm bìa theo chiều rộng theo cách tương tự như trên. Hình trụ của bạn nào có thể tích lớn hơn ?

### ***Giải***

Hình trụ của bạn Hoàng có chu vi đáy bằng  $a$ , chiều cao bằng  $b$  nên nó có thể tích bằng

$$V_1 = \pi \left( \frac{a}{2\pi} \right)^2 b = \frac{a^2 b}{4\pi}.$$

Hình trụ của bạn Khoa có chu vi đáy bằng  $b$ , chiều cao bằng  $a$  nên nó có thể tích bằng

$$V_2 = \pi \left( \frac{b}{2\pi} \right)^2 a = \frac{b^2 a}{4\pi}.$$

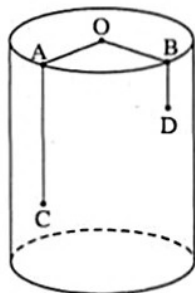
Ta thấy 
$$V_1 : V_2 = \frac{a^2 b}{4\pi} : \frac{b^2 a}{4\pi} = \frac{a}{b} > 1.$$

Vậy hình trụ của bạn Hoàng có thể tích lớn hơn.

**Ví dụ 3.** Đáy của một hình trụ có

bán kính  $OA, OB = 3\frac{9}{11}$  cm, số đo cung  $AB$  bằng  $120^\circ$  (h.12-2).

Trên mặt xung quanh của hình trụ có các điểm  $C$  và  $D$  sao cho  $CA, DB$  vuông góc với đáy và  $CA = 9$  cm,  $DB = 3$  cm. Tính chiều dài ngắn nhất mà một con kiến phải bò trên mặt xung quanh của hình trụ từ  $C$  đến  $D$  (lấy  $\pi = \frac{22}{7}$ ).

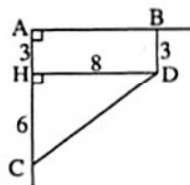


Hình 12-2

### ***Giải***

Cắt mặt xung quanh của hình trụ theo đường thẳng  $AC$  rồi trải phẳng, ta được hình 12-3.

$$AB = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3\frac{9}{11} \cdot \frac{1}{3} = 8 \text{ (cm)}.$$



Hình 12-3

Kẻ  $DH \perp AC$ , ta có  $DH = AB = 8\text{cm}$ ,

$$CH = AC - AH = 9 - 3 = 6 (\text{cm}).$$

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông  $CHD$  ta được

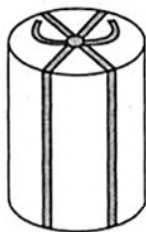
$$CD^2 = CH^2 + DH^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

nên  $CD = 10\text{cm}$ .

Chiều dài ngắn nhất mà con kiến phải bò từ  $C$  đến  $D$  là  $10\text{cm}$ .

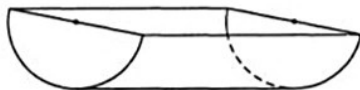
## BÀI TẬP

- 12.1.** Bạn Ngọc dùng một băng vải màu dài  $1\text{m}$  để buộc một gói quà có dạng hình trụ như ở hình 12-4. Hình trụ có bán kính đáy  $5\text{cm}$  và chiều cao  $12\text{cm}$ . Biết rằng cần  $10\text{cm}$  băng vải để thắt nơ. Băng vải trên có đủ dài để buộc gói quà hay không ?



Hình 12-4

- 12.2.** Một chiếc máng có dạng nửa hình trụ (h.12-5), hai đáy ở hai bên là hai nửa hình tròn có đường kính  $20\text{cm}$ . Chiều dài của máng (tức là chiều cao của nửa hình trụ) là  $3\text{m}$ . Tính diện tích tôn để làm máng (không kể các chỗ nối, lấy  $\pi = 3,14$ ).



Hình 12-5

- 12.3.** Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao, thiết diện đi qua trục bằng  $72\text{cm}^2$ . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.
- 12.4.** Người ta thả một hòn đá ngập vào trong nước của một chiếc lọ thủy tinh hình trụ có bán kính đáy  $1,2\text{dm}$  làm cho mực nước trong lọ dâng cao thêm  $0,8\text{dm}$ . Tính thể tích của hòn đá (làm tròn đến  $0,1\text{dm}^3$ ).
- 12.5.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 4\text{cm}$ ,  $BC = 3\text{cm}$ . Khi quay hình chữ nhật đó một vòng quanh cạnh  $BC$ , ta được một hình trụ có diện tích xung quanh bằng  $S_1$  và thể tích bằng  $V_1$ . Khi quay hình chữ nhật đó một vòng quanh

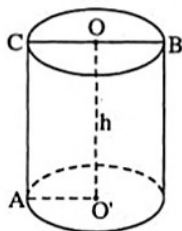
cạnh AB, ta được một hình trụ có diện tích xung quanh bằng  $S_2$  và thể tích bằng  $V_2$ .

a) Tính  $S_1$  và  $V_1$ .

b) Tính  $S_2$  và  $V_2$ .

**12.6.** Một hộp thuốc hình trụ được đặt khít trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật. Thể tích của hình trụ bằng bao nhiêu phần trăm thể tích của hình hộp chữ nhật ? (làm tròn đến 0,1%).

**12.7.** Một con kiến bò ở mặt ngoài của một cái cốc hình trụ từ A đến B như ở hình 12-6. Chiều cao của cốc bằng 16cm, chu vi đáy của cốc bằng 24cm. Con kiến bò từ A đến B mất ít nhất mấy giây, biết rằng vận tốc của nó là 5cm/s ?



Hình 12-6

### Chuyên đề 13. HÌNH NÓN

#### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

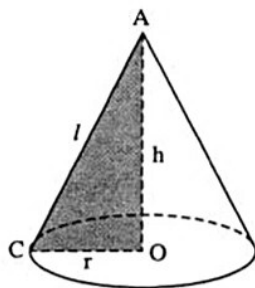
1. Khi quay tam giác AOC vuông tại O một vòng quanh cạnh OA cố định, ta được một hình nón (h.13-1).

2. Với hình nón có bán kính đáy  $r$ , đường sinh  $l$ , chiều cao  $h$ , ta có :

Diện tích xung quanh bằng  $S_{xq} = \pi rl$ .

Diện tích toàn phần bằng  $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$

Thể tích bằng  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .



Hình 13-1

3. Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt cắt và mặt đáy là một hình nón cụt. Để tính diện tích xung quanh (hoặc thể tích) của hình nón cụt, ta có thể tính hiệu các diện tích xung quanh (hoặc thể tích) của hai hình nón.

Cũng có thể dùng công thức sau với  $r_1$  và  $r_2$  là các bán kính đáy,  $l$  là đường sinh,  $h$  là chiều cao của hình nón cụt :

$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l ; \quad V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

## II. VÍ DỤ MINH HOẠ

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A có  $AC < AB$ . Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AB, ta được một hình nón có diện tích toàn phần là  $S_1$ .

Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC, ta được một hình nón có diện tích toàn phần là  $S_2$ . Chứng minh rằng  $S_1 < S_2$ .

**Giải.** (h.13.2)

Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AB, ta được hình nón thứ nhất (h.13.2a). Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC, ta được hình nón thứ hai (h.13.2b).

Đặt  $AB = c$ ,  $AC = b$  ( $b < c$ ).

Ta có  $S_1 = \pi b \cdot BC + \pi b^2$

$$S_2 = \pi c \cdot BC + \pi c^2$$

Do  $b < c$  nên  $S_1 < S_2$ .

**Ví dụ 2.** Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm, số đo diện tích xung quanh (tính bằng  $\text{cm}^2$ ) bằng số đo thể tích (tính bằng  $\text{cm}^3$ ). Tính chiều cao của hình nón.

**Giải.** (h.13.3)

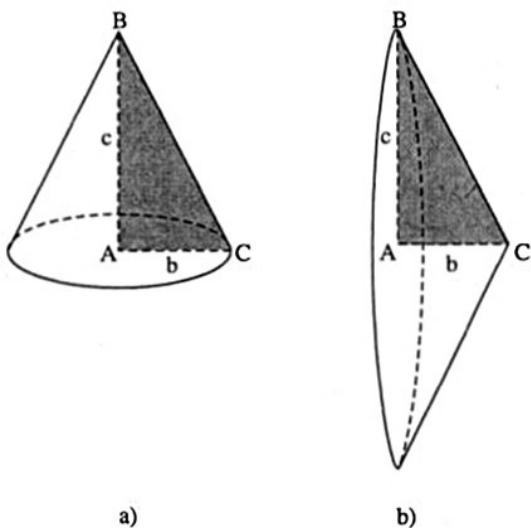
Gọi  $h$  là chiều cao của hình nón. Đường sinh của hình nón bằng  $\sqrt{5^2 + h^2}$ .

Diện tích xung quanh của hình nón bằng

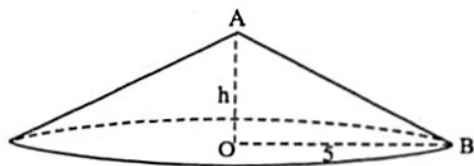
$$S = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{25 + h^2}.$$

Thể tích của hình nón bằng  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot h = \frac{25}{3} \pi h$ .

Ta có  $5\pi\sqrt{25+h^2} = \frac{25}{3}\pi h$



Hình 13-2



Hình 13-3

$$\begin{aligned} \text{nên } 3\sqrt{25 + h^2} &= 5h \Leftrightarrow 9(25 + h^2) = 25h^2 \\ \Leftrightarrow 225 + 9h^2 &= 25h^2 \Leftrightarrow 225 = 16h^2 \\ \Leftrightarrow h &= 3,75 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

Chiều cao của hình nón bằng 3,75 cm.

**Ví dụ 3.** Một hình trụ và một hình nón cùng có chiều cao bằng 4 dm. Biết rằng diện tích toàn phần của hai hình bằng nhau và thể tích của chúng cũng bằng nhau. Tính bán kính đáy của mỗi hình.

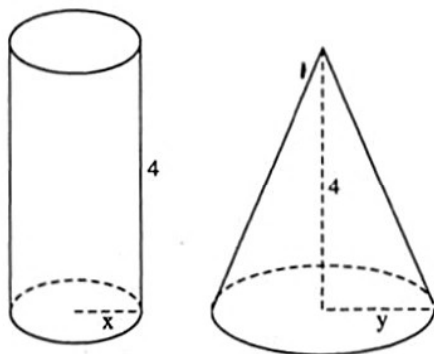
**Giải.** (h.13.4)

Gọi bán kính đáy của hình trụ là  $x$ , bán kính đáy của hình nón là  $y$ .

Thể tích của hai hình bằng nhau nên  $\pi x^2 \cdot 4 = \frac{1}{3} \pi y^2 \cdot 4$

$$\text{suy ra } y^2 = 3x^2. \quad (1)$$

Diện tích toàn phần của hai hình bằng nhau nên



Hình 13-4

$$2\pi x \cdot 4 + 2\pi x^2 = \pi y \sqrt{y^2 + 4^2} + \pi y^2$$

$$\Leftrightarrow 8x + 2x^2 = y \sqrt{y^2 + 16} + y^2. \quad (2)$$

Thay  $y^2 = 3x^2$  vào (2) được

$$\begin{aligned} 8x + 2x^2 &= x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3x^2 + 16} + 3x^2 \\ \Leftrightarrow 8x - x^2 &= x\sqrt{9x^2 + 48} \\ \Leftrightarrow 8 - x &= \sqrt{9x^2 + 48}. \end{aligned}$$

Bình phương hai vế (với điều kiện  $x \leq 8$ ) ta được

$$64 - 16x + x^2 = 9x^2 + 48 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Nghiệm dương của phương trình trên là  $x = \sqrt{3} - 1$ .

Khi đó  $y = x\sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$ .

Vậy bán kính đáy của hình trụ bằng  $\sqrt{3} - 1 \approx 0,73$  (dm), bán kính đáy của hình nón bằng

$$3 - \sqrt{3} \approx 1,27 \text{ (dm)}.$$

**Ví dụ 4.** Cho một hình nón đỉnh A có đường kính đáy  $BC = 2$  dm, đường sinh  $AC = 3$  dm.

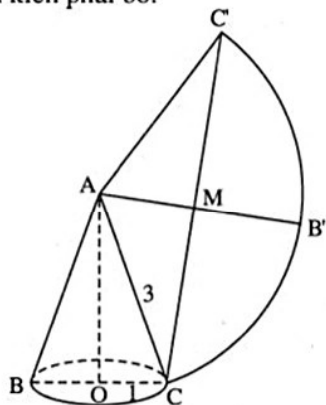
- Tính số đo cung của hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón.
- Một con kiến bò trên mặt xung quanh của hình nón từ C gặp đường sinh AB rồi đi tiếp trở về C. Tính độ dài ngắn nhất mà con kiến phải bò.

**Giải.** (h.13-5)

a) Khi khai triển mặt xung quanh của hình nón, ta được hình quạt tròn có tâm A, bán kính  $AC = 3$  dm, độ dài cung của hình quạt bằng độ dài đường tròn đáy tức là bằng  $2\pi \cdot 1 = 2\pi$  (dm).

Độ dài của cả đường tròn tâm A bán kính 3 dm bằng  $2\pi \cdot 3 = 6\pi$  (dm).

Số đo cung  $CC'$  của hình quạt bằng  $360^\circ \cdot \frac{2\pi}{6\pi} = 120^\circ$ .



Hình 13-5

b) Cắt mặt xung quanh của hình nón theo đường sinh AC rồi trải phẳng, ta được hình quạt tròn  $ACC'$  (h.13.5), cung  $CC'$  có số đo  $120^\circ$  (theo câu a), điểm B di chuyển đến điểm  $B'$  ở chính giữa cung  $CC'$ .

Quãng đường ngắn nhất phải tìm là độ dài đoạn thẳng  $CC'$ .

Gọi M là giao điểm của  $CC'$  và  $AB'$ . Ta có tam giác  $ACB'$  đều,  $\widehat{AMC} = 90^\circ$ ,

$$CM = AC \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2,6 \text{ (dm)}. \text{ Suy ra } CC' = 2 CM \approx 5,2 \text{ dm}.$$

Độ dài ngắn nhất mà con kiến phải bò là 5,2 dm.

**Ví dụ 5.**

- Chứng minh công thức tính diện tích xung quanh của hình nón cụt

$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l.$$



b) Chứng minh công thức tính thể tích của hình nón cụt :

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

**Giải.** (h.13-6)

a) Diện tích xung quanh của hình nón cụt là hiệu giữa diện tích xung quanh của hình nón lớn (bằng  $\pi r_2 l_2$ ) và diện tích xung quanh của hình nón nhỏ (bằng  $\pi r_1 l_1$ ). Do đó

$$\begin{aligned} S_{xq} &= \pi r_2 l_2 - \pi r_1 l_1 \\ &= \pi [r_2 (l + l_1) - r_1 (l_2 - l)] \\ &= \pi (r_2 l + r_2 l_1 - r_1 l_2 + r_1 l). \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác ta có  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{l_1}{l_2}$  nên  $r_2 l_1 = r_1 l_2$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $S_{xq} = \pi (r_2 l + r_1 l) = \pi (r_1 + r_2) l$ .

b) Thể tích của hình nón cụt là hiệu giữa thể tích của hình nón lớn (bằng  $\frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2$ ) và thể tích của hình nón nhỏ (bằng  $\frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1$ ).

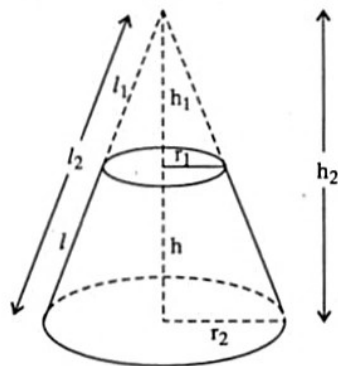
Do đó

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi (r_2^2 h_2 - r_1^2 h_1) = \frac{1}{3} \pi [r_2^2 (h + h_1) - r_1^2 (h_2 - h)] \\ &= \frac{1}{3} \pi (r_2^2 h + r_2^2 h_1 - r_1^2 h_2 + r_1^2 h). \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, ta có  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2}$  nên  $r_2 h_1 = r_1 h_2$ , suy ra

$$\begin{aligned} r_2^2 h_1 &= r_1 r_2 h_2 \quad \text{và} \quad r_1 r_2 h_1 = r_1^2 h_2, \text{ do đó} \\ r_2^2 h_1 - r_1^2 h_2 &= r_1 r_2 (h_2 - h_1) = r_1 r_2 h. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$ .



Hình 13-6

**Ví dụ 6.** Một hình nón có bán kính đáy 6 cm, đường sinh 10 cm. Một mặt phẳng song song với đáy cắt mặt xung quanh của hình nón theo một đường tròn và chia mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính bán kính của đường tròn đó.

**Giải.** (h.13-7)

Gọi A là đỉnh của hình nón. Bán kính của đường tròn phải tìm là  $O'B'$ .

Đặt  $O'B' = r$ ,  $AB' = l$ .

Diện tích xung quanh của hình nón nhỏ bằng  $S' = \pi rl$ .

Diện tích xung quanh của hình nón lớn bằng

$$S = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi.$$

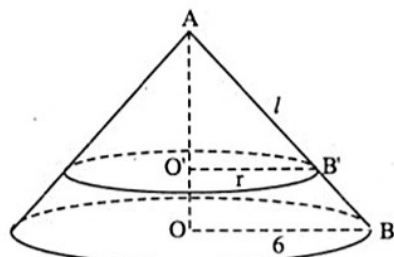
$$\text{Theo đề bài } \frac{S'}{S} = \frac{1}{2} \text{ nên } \frac{rl}{60} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } l = \frac{30}{r}. \quad (1)$$

Trong mặt phẳng AOB, ta có  $O'B' \parallel OB$  nên

$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{AB'}{AB} \Leftrightarrow \frac{r}{6} = \frac{l}{10} \Leftrightarrow l = \frac{5r}{3}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{5r}{3} = \frac{30}{r} \Rightarrow r^2 = 18 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}.$$

Bán kính của đường tròn ( $O'$ ) bằng  $3\sqrt{2} \approx 4,24$  (cm).



Hình 13-7

## BÀI TẬP

- 13.1. Một đồng cát hình nón có bán kính đáy 2 m, đường sinh 2,5 m. Tính thể tích của đồng cát.
- 13.2. Một hình nón có đường sinh bằng 3 cm, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh 3 cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.
- 13.3. Một hình nón có thiết diện đi qua trục là một tam giác đều, diện tích xung quanh bằng  $6\text{ cm}^2$ .
  - a) Tính diện tích đáy.
  - b) Tính chiều cao của hình nón.

- 13.4.** Khi cuộn một tấm bìa hình quạt có bán kính 8 cm, số đo cung là  $90^\circ$  cho hai mép sát nhau, ta được một hình nón. Tính thể tích của hình nón.
- 13.5.** Cho tam giác ABC vuông tại A,  $AB = 15$  cm,  $AC = 20$  cm. Tính thể tích hình tạo thành khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC.
- 13.6.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC, ta được một hình có diện tích toàn phần bằng  $S_1$ . Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC, ta được một hình có diện tích toàn phần bằng  $S_2$ . Chứng minh rằng  $S_1 < S_2$ .
- 13.7.** Tính diện tích xung quanh và thể tích của một hình nón cụt có các bán kính đáy 10 cm và 18 cm, chiều cao 15 cm.
- 13.8.** Cho hình thang vuông ABCD ( $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ) có  $AB = AD = a$ ,  $CD = 2a$ . Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình tạo thành khi quay hình thang đó một vòng quanh cạnh AD.
- 13.9.** Một hình nón có bán kính đáy 6 cm, đường sinh 10 cm. Một mặt phẳng song song với đáy cắt mặt xung quanh của hình nón theo một đường tròn và chia hình nón thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính bán kính của đường tròn đó.

## Chuyên đề 14. HÌNH CẦU

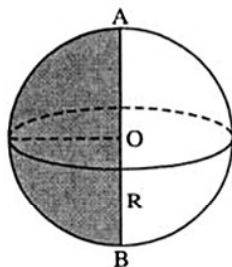
### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Khi quay nửa hình tròn tâm O bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định, ta được một hình cầu (h.14-1).
- Công thức tính diện tích mặt cầu

$$S = 4\pi R^2.$$

Công thức tính thể tích hình cầu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



Hình 14-1

## II. VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1.** Một quả bóng hình cầu có bán kính 26 cm. Khi đặt quả bóng trên mặt nước, phần quả bóng nhô lên trên mặt nước cao 36 cm. Giao của mặt xung quanh của quả bóng và mặt nước là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

**Giải.** (h.14-2)

Kí hiệu như trên hình 14.2. Bán kính của đường tròn phải tìm là HC.

Ta có  $AB = 52$  cm,  $HA = 36$  cm,

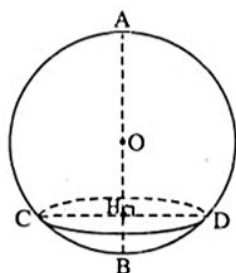
$$HB = 52 - 36 = 16 \text{ (cm)}.$$

Tam giác ABC vuông tại C

$$\text{nên } HC^2 = HA \cdot HB = 36 \cdot 16.$$

$$\text{Suy ra } HC = 6 \cdot 4 = 24 \text{ (cm)}.$$

Bán kính đường tròn (H) bằng 24 cm.



Hình 14-2

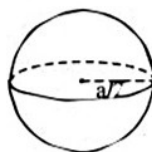
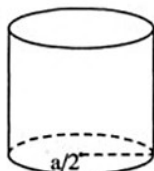
**Ví dụ 2.** Cho một hình trụ, một hình nón, một hình cầu. Đường kính đáy và chiều cao của hình trụ và hình nón đều bằng a. Đường kính của hình cầu cũng bằng a. Gọi  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  theo thứ tự là thể tích của hình trụ, hình nón, hình cầu. Tính  $V_1 : V_2 : V_3$ .

**Giải.** (h.14-3)

$$V_1 = \pi \left( \frac{a}{2} \right)^2 \cdot a = \frac{1}{4} \pi a^3.$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{a}{2} \right)^2 \cdot a = \frac{1}{12} \pi a^3.$$

$$V_3 = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{a}{2} \right)^3 = \frac{1}{6} \pi a^3.$$



Hình 14-3

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{12} : \frac{1}{6} = \frac{3}{12} : \frac{1}{12} : \frac{2}{12} = 3 : 1 : 2.$$

**Ví dụ 3.** Cho tam giác đều ABC. Gọi (O ; R) là đường tròn ngoại tiếp và (O ; r) là đường tròn nội tiếp tam giác đó. Khi quay tam giác ABC cùng với hai đường tròn trên một vòng quanh OA thì tam giác ABC, đường tròn (O ; R), đường

tròn (O ; r) tạo thành các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự là  $S_1, S_2, S_3$ . Tính  $S_1 : S_2 : S_3$ .

**Giải.** (h.14-4)

$S_1$  là diện tích toàn phần của hình nón có đỉnh A và bán kính đáy HC.

Ta có  $HC = OC \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$  nên

$$S_1 = \pi \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R\sqrt{3} + \pi \left( \frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{9}{4} \pi R^2.$$

$S_2$  là diện tích mặt cầu có bán kính R nên  $S_2 = 4\pi R^2$ .

$S_3$  là diện tích mặt cầu có bán kính  $r = R \sin 30^\circ = \frac{R}{2}$  nên

$$S_3 = 4\pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 = \pi R^2.$$

Do đó  $S_1 : S_2 : S_3 = \frac{9}{4} : 4 : 1 = 9 : 16 : 4$ .

**Ví dụ 4.** Cho một hình cầu và hình trụ ngoại tiếp nó (đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng đường kính của hình cầu). Tính tỉ số giữa :

- Diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ ;
- Thể tích hình cầu và thể tích hình trụ.

**Giải.** (h.14-5)

Gọi R là bán kính của hình cầu.

a)  $S_{\text{cầu}} = 4\pi R^2$

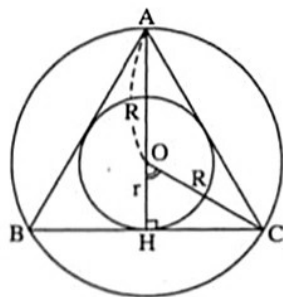
$S_{\text{xq trụ}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$

$S_{\text{cầu}} : S_{\text{xq trụ}} = 1$ .

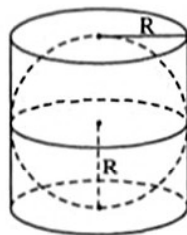
b)  $V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

$V_{\text{trụ}} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$ .

$V_{\text{cầu}} : V_{\text{trụ}} = \frac{4}{3} : 2 = \frac{2}{3}$ .



Hình 14-4



Hình 14-5

**Ví dụ 5.** Một hình cầu có bán kính 3 cm. Một hình nón cũng có bán kính đáy bằng 3 cm và có diện tích toàn phần bằng diện tích mặt cầu. Tính chiều cao của hình nón.

**Giải.** (h.14-6)

Gọi  $h$  là chiều cao,  $l$  là đường sinh của hình nón.

$$\text{Ta có } l = \sqrt{h^2 + 3^2} = \sqrt{h^2 + 9}.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{tp}} &= \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{h^2 + 9} + \pi \cdot 3^2 \\ &= 3\pi(3 + \sqrt{h^2 + 9}). \end{aligned}$$

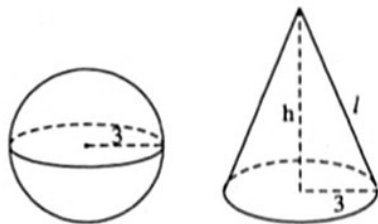
$$S_{\text{cầu}} = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi.$$

$$\text{Ta có } 3\pi(3 + \sqrt{h^2 + 9}) = 36\pi$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{h^2 + 9} = 9 \Leftrightarrow h^2 + 9 = 81$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 72 \Leftrightarrow h = 6\sqrt{2}.$$

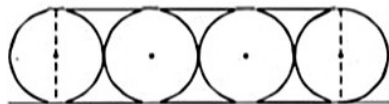
Chiều cao của hình nón bằng  $6\sqrt{2}$  cm.



Hình 14-6

## BÀI TẬP

- 14.1.** Bốn quả bóng bàn có đường kính 4 cm xếp vào một hộp như trên hình 14-7. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hộp.



Hình 14-7

- 14.2.** Một hình cầu có số đo thể tích (tính bằng  $\text{cm}^3$ ) gấp bốn lần số đo diện tích mặt cầu (tính bằng  $\text{cm}^2$ ). Tính bán kính của hình cầu.
- 14.3.** Cho một hình cầu và một hình trụ. Chiều cao và bán kính đáy của hình trụ đều bằng bán kính của hình cầu. So sánh
- Diện tích toàn phần của hai hình ;
  - Thể tích của hai hình.
- 14.4.** Bán kính của Trái Đất bằng 6370 km. Diện tích lục địa và băng chiếm 29,2% diện tích bề mặt Trái Đất. Tính diện tích lục địa và băng (làm tròn đến 1 triệu  $\text{km}^2$ ).

- 14.5. Trên Trái Đất, vĩ tuyến nào có độ dài bằng nửa độ dài đường Xích đạo ?
- 14.6. Cho một hình cầu có bán kính  $R$ . Một hình trụ và một hình nón cũng có bán kính đáy bằng  $R$  và cũng có thể tích bằng thể tích hình cầu. Tính chiều cao của hình trụ và hình nón.
- 14.7. Cho một hình cầu và một hình lập phương ngoại tiếp nó. Tính tỉ số phần trăm giữa :
- Diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình lập phương
  - Thể tích hình cầu và thể tích của hình lập phương.
- 14.8. Cho một hình lập phương có cạnh bằng 2 dm. Một hình cầu ngoại tiếp hình lập phương đó (8 đỉnh của hình lập phương thuộc mặt cầu). Tính bán kính của hình cầu.
- 14.9. Cho tam giác đều  $ABC$ . Gọi  $(O ; R)$  là đường tròn ngoại tiếp và  $(O ; r)$  là đường tròn nội tiếp tam giác đó. Khi quay cả ba hình trên một vòng quanh  $OA$  thì tam giác  $ABC$ , đường tròn  $(O ; R)$ , đường tròn  $(O ; r)$  tạo thành các hình có thể tích theo thứ tự là  $V_1, V_2, V_3$ .
- Tính  $V_1 : V_2 : V_3$ .

# MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

## Chuyên đề 15. ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

Robert Simson là một nhà toán học người Scotland, giáo sư toán học của đại học Glasgow. Ông sinh ngày 14 tháng 10 năm 1687 tại West Kilbride và mất ngày 1 tháng 10 năm 1768 tại Glasgow.

### I. ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

**Bài toán 1:** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm tùy ý trên (O), gọi D, E, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng D, E, H thẳng hàng.

**Giải.** (h.15-1) Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cung BC không chứa A.

$MD \perp BC, ME \perp AC \Rightarrow$  tứ giác MDEC nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{EDC} \quad (1)$$

$MH \perp AB, MD \perp BC \Rightarrow$  tứ giác MHBD nội tiếp

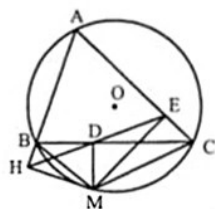
$$\Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{HDB} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} ABMC \text{ nội tiếp} &\Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MCA}, \text{ mà } \widehat{MBH} + \widehat{HMB} = \widehat{MCA} + \widehat{EMC} = 90^\circ \\ &\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{HMB} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow \widehat{HDB} = \widehat{EDC} \Rightarrow H, D, E$  thẳng hàng.

Đường thẳng qua D, H, E có tên là *đường thẳng Simson* của tam giác ABC ứng với điểm M (hay *đường thẳng Wallace*, để khỏi trùng với nhà toán học người Anh Thomas Simpson 1710-1761).

**Bài toán 2:** Cho tam giác ABC, M là điểm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Gọi D, E, H là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB và D, E, H thẳng hàng. Chứng minh M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

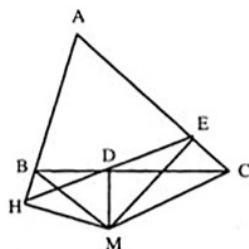


Hình 15-1



**Giải.** (h.15-2)

Theo giả thiết,  $MD \perp BC, ME \perp CA, MH \perp AB$  và  $D, H, E$  thẳng hàng  $\Rightarrow$  tứ giác  $MDBH$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{HDB}$  (chấn cung  $\widehat{HB}$ ),  $\widehat{HDB} = \widehat{EDC}$  (đối đỉnh),  $\widehat{EDC} = \widehat{EMC}$  (chấn cung  $\widehat{EC}$ )  $\Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{EMC}$



Hình 15-2

Cùng cộng với  $\widehat{BME}$  được  $\widehat{EMH} = \widehat{BMC}$ . (1)

Tứ giác  $AEMH$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{EMH} = 180^\circ$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{A} + \widehat{BMC} = 180^\circ \Rightarrow$  tứ giác  $ABMC$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow M$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

Từ hai bài toán trên ta có kết quả :

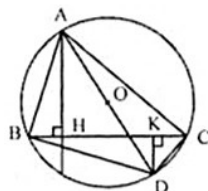
"Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  là điểm trong mặt phẳng chứa tam giác và không trùng với các đỉnh, gọi  $D, E, H$  là hình chiếu của  $M$  trên ba cạnh của tam giác  $ABC$ . Điều kiện cần và đủ để điểm  $M$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $D, E, H$  thẳng hàng".

Như vậy, với mỗi điểm  $M$  có một đường thẳng Simson đối với tam giác  $ABC$  cho trước.

## II. VÍ DỤ MINH HỌA

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng : a) Đường thẳng Simson của đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$  là đường cao hạ từ đỉnh đó.

b) Đường thẳng Simson của điểm  $D$  đối xứng với đỉnh  $A$  qua tâm  $O$  là cạnh  $BC$  của tam giác.



Hình 15-3

**Giải.** (h.15-3) a) Đối với đỉnh  $A$ , đường thẳng Simson trùng với đường cao  $AH$  (hiển nhiên).

b)  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua tâm  $O \Rightarrow AD$  là đường kính  $\Rightarrow DB \perp AB, DC \perp AC \Rightarrow$  đường thẳng Simson chính là đường thẳng  $BC$ .

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $M$  và  $N$  là các điểm thuộc  $(O)$ . Chứng minh rằng góc giữa hai đường thẳng Simson của  $M$  và  $N$  đối với tam giác  $ABC$  bằng nửa số đo cung  $\widehat{MN}$ . Đặc biệt, nếu  $M$  và  $N$  đối xứng nhau qua tâm  $O$ , thì các đường thẳng Simson của chúng vuông góc với nhau tại một điểm trên đường tròn Euler.

**Giải.** (h.15-4) AEMH nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AMH} = 90^\circ - \widehat{MAC} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{BFNK nội tiếp} &\Rightarrow \widehat{BFK} = \widehat{BNK} \\ &= 90^\circ - \widehat{CBN} \quad (2) \end{aligned}$$

Cộng theo vế (1) và (2)

$$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{BFK} = 180^\circ - \widehat{MAC} - \widehat{CBN}$$

$$\Rightarrow \widehat{MAC} + \widehat{CBN} = 180^\circ - (\widehat{AEH} + \widehat{BFK}) = \widehat{EPF}$$

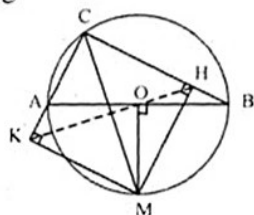
(P là giao điểm của ED và FI).

$\Rightarrow$  đường thẳng ED và đường thẳng FI tạo với nhau góc có số đo bằng nửa số đo cung  $\widehat{MN}$ . (Trường hợp đặc biệt bạn đọc tự chứng minh).

**Ví dụ 3.** Cho đường tròn (O) đường kính AB, C là điểm trên đường tròn. Đường phân giác của  $\widehat{ACB}$  cắt đường tròn (O) tại M, gọi H và K là hình chiếu của M trên BC và CA. Chứng minh rằng O, K, H thẳng hàng.

**Giải.** (h.15-5) CM là phân giác góc  $\widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{MA} = \widehat{MB} \Rightarrow MO \perp AB$ . Theo giả thiết  $MH \perp BC, MK \perp CA$ . Theo Bài toán 1 ta có H, O, K thẳng hàng (đường thẳng Simson của điểm M đối với tam giác ABC).

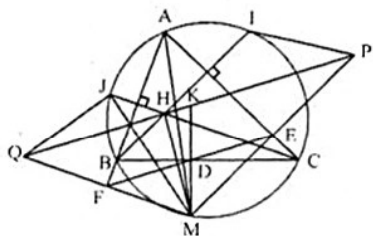


Hình 15-5

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC, M là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi K, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng P, K, Q nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này luôn đi qua một điểm cố định.

(Vô địch Nhật Bản- 1996).

**Giải.** (h.15-6) Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của MK, MP, MQ với BC, CA, AB  $\Rightarrow MD \perp BC, ME \perp AC, MF \perp AB \Rightarrow D, E, F$  thẳng hàng. Mặt khác,  $MD = DK, ME = EP, MF = FQ \Rightarrow ED$  là đường trung bình của  $\triangle MKP$ ,  $DF$  là đường trung bình của tam giác  $MKQ \Rightarrow Q, K, P$  thẳng hàng và  $EF \parallel PQ$ .



Hình 15-6

Gọi H là trực tâm  $\Delta ABC$  và I, J là điểm đối xứng của H qua AC và AB  $\Rightarrow$  I, J thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC \Rightarrow$  MHIP, MHJQ là hình thang cân  $\Rightarrow \widehat{QHJ} = \widehat{MJH} = \widehat{MAC}$ . Tương tự,  $\widehat{PHI} = \widehat{MIH} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{QHJ} + \widehat{PHI} + \widehat{IHJ} = \widehat{MAC} + \widehat{MAB} + \widehat{IHJ} = \widehat{A} + \widehat{IHJ} = 180^\circ \Rightarrow$  P, Q, H thẳng hàng  $\Rightarrow$  đường thẳng PQ luôn đi qua trực tâm H của  $\Delta ABC$ , đường thẳng này có tên là *đường thẳng Steiner*.

**Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc cung  $\widehat{BC}$  không chứa đỉnh A. Gọi D, E, H là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng  $\frac{BC}{MD} = \frac{CA}{ME} + \frac{AB}{MH}$ . (Vô địch Mĩ 1979)

**Giải.** (h.15-7) Theo Bài toán 1 ta có H, D, E thẳng hàng. Các tứ giác MHBD, MDEC nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{MEH} = \widehat{MCB}$ ,  $\widehat{MBC} = \widehat{MHE} \Rightarrow \Delta MEH \sim \Delta MCB$ .

$$\text{Kẻ } MI \perp HE \Rightarrow \frac{BC}{MD} = \frac{HE}{MI} \quad (1)$$

$$\widehat{MHD} = \widehat{MBC} = \widehat{MAC}, \quad \widehat{MDH} = \widehat{MBH} = \widehat{MCA}$$

$$\Rightarrow \Delta MHD \sim \Delta MAC \Rightarrow \frac{AC}{ME} = \frac{HD}{MI} \quad (2)$$

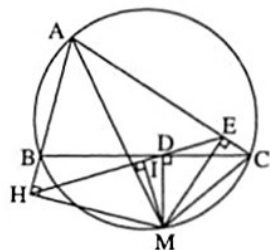
$$\text{Tương tự, } \Delta MED \sim \Delta MAB \Rightarrow \frac{AB}{MH} = \frac{DE}{MI} \quad (3)$$

$$\text{Cộng theo vế (2) và (3) được } \frac{AC}{ME} + \frac{AB}{MH} = \frac{HD+DE}{MI} = \frac{HE}{MI}, \text{ kết hợp với (1)}$$

$$\text{suy ra } \frac{BC}{MD} = \frac{CA}{ME} + \frac{AB}{MH}.$$

**Lưu ý.** Đặc biệt, nếu  $\Delta ABC$  đều ta có  $\frac{1}{ME} + \frac{1}{MH} = \frac{1}{MD}$  (Olympic Việt Nam).

**Ví dụ 6.** Cho tam giác nhọn ABC, M là điểm thuộc cung  $\widehat{BC}$  không chứa đỉnh A. Gọi D, H là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh AC, AB. Xác định vị trí của M để độ dài DH lớn nhất.



Hình 15-7

**Giải.** (h.15-8) Hạ  $HE \perp BC \Rightarrow D, E, H$  thẳng hàng.

Tứ giác  $MHBE$  nội tiếp  $\Rightarrow$   
 $\widehat{CBM} = \widehat{DHM}$ , tứ giác  $MCDE$  nội tiếp  $\Rightarrow$   
 $\widehat{BCM} = \widehat{HDM} \Rightarrow \triangle HDM \sim \triangle BCM$

$$\Rightarrow \frac{HD}{BC} = \frac{HM}{BM}, MH \leq MB \Rightarrow \frac{MH}{MB} \leq 1 \Rightarrow \frac{HD}{BC} \leq 1$$

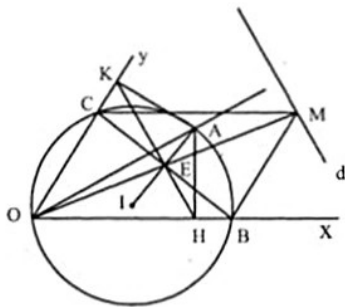
Hình 15-8

$\Rightarrow HD \leq BC$ . Do đó  $HD$  lớn nhất khi và chỉ khi  $HD = BC \Leftrightarrow MH = MB \Leftrightarrow MB \perp AB \Leftrightarrow AM$  là đường kính  $\Leftrightarrow M$  đối xứng với  $A$  qua tâm  $O$ .

**Ví dụ 7.** Cho góc  $\widehat{xOy}$ , lấy điểm  $A$  cố định thuộc phân giác  $\widehat{xOy}$ . Vẽ đường tròn  $(I)$  thay đổi qua  $O$  và  $A$  cắt  $Ox, Oy$  tại  $B$  và  $C$ , dựng hình bình hành  $OBMC$ . Chứng minh rằng  $M$  thuộc một đường thẳng cố định.

**Giải.** (h.15-9) Vì  $A$  trên phân giác của góc  $\widehat{xOy} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB} \Rightarrow IA \perp BC$ , kẻ  $AH \perp Ox$ ,  $AK \perp Oy$ .

$\Rightarrow K, H$  cố định và  $K, E, H$  thẳng hàng  $\Rightarrow$   
 đường thẳng Simson của  $A$  đối với tam giác  $OBC$  cố định.

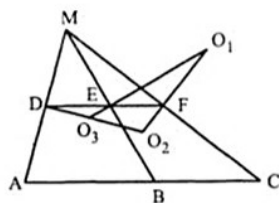


Hình 15-9

Hình bình hành  $OBMC$  có  $OM = 2OE \Rightarrow M$  thuộc đường thẳng  $d$  song song với đường thẳng Simson và cách  $O$  một khoảng không đổi, bằng 2 lần khoảng cách từ  $O$  đến  $HK$ .

**Ví dụ 8.** Cho ba điểm  $A, B, C$  thuộc một đường thẳng và  $M$  không thuộc đường thẳng đó. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $MAB, MBC, MCA$  và điểm  $M$  cùng thuộc một đường tròn.

**Giải.** (h.15-10) Gọi  $O_1, O_2, O_3$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $MBC, MAC, MAB$  và  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên các cạnh của tam giác  $O_1O_2O_3$ , ta có  $D, E, F$  là trung điểm của  $MA, MB, MC$ , suy ra  $D, E, F$  thẳng hàng. Theo Bài toán 2 ta có  $O_1, O_2, O_3, M$  nằm trên một đường tròn.

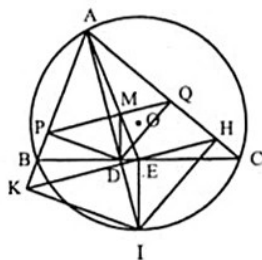


Hình 15-10

**Ví dụ 9.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và đường phân giác  $AD$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  trên  $AB, AC$ ; từ  $D$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  cắt  $PQ$  tại  $M$ . Chứng minh rằng  $M$  thuộc trung tuyến kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .

**Giải.** (h.15-11) Gọi  $I$  là giao điểm của đường phân giác  $AD$  với đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

Từ  $I$  kẻ  $IK \perp AB, IH \perp AC$ , nối  $I$  với  $O$  cắt  $BC$  tại  $E \Rightarrow EB = EC$  và  $IE \perp BC$ . Theo Bài toán 1 ta có  $K, E, H$  thẳng hàng.



Hình 15-11

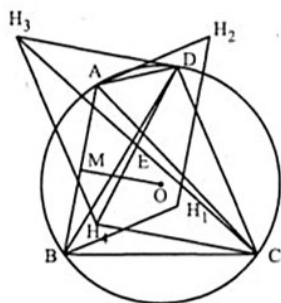
Mặt khác,  $DP \parallel IK$  và  $DQ \parallel IH \Rightarrow \frac{AP}{AK} = \frac{AD}{AI}$

và  $\frac{AQ}{AH} = \frac{AD}{AI} \Rightarrow \frac{AP}{AK} = \frac{AQ}{AH} \Rightarrow PQ \parallel KH$ .

$MD \perp BC, IE \perp BC \Rightarrow DM \parallel IE$ . Gọi  $M'$  là giao điểm của  $AE$  và  $PQ$ , dễ dàng chứng minh được  $M'D \parallel IE \Rightarrow M$  trùng  $M'$ .

Vậy  $M$  thuộc trung tuyến  $AE$ .

**Ví dụ 10.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O),  $d_A, d_B, d_C, d_D$  là các đường thẳng Simson của A, B, C, D tương ứng đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng  $d_A, d_B, d_C, d_D$  đồng quy.



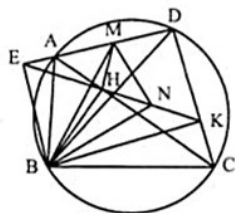
Hình 15-12

**Giải.** (h.15-12) Gọi  $H_1, H_2, H_3, H_4$  lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC  $\Rightarrow$  đường thẳng Steiner của các điểm A, B, C, D đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC lần lượt đi qua  $H_1, H_2, H_3, H_4$   $\Rightarrow d_A, d_B, d_C, d_D$  đi qua trung điểm của  $AH_1, BH_2, CH_3, DH_4$ .

Gọi M là trung điểm của AB  $\Rightarrow CH_4 = 2OM$ ;

$DH_3 = 2OM \Rightarrow CDH_3H_4$  là hình bình hành  $\Rightarrow DH_4, CH_3$  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tương tự,  $AH_1, BH_2, CH_3, DH_4$  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường  $\Rightarrow d_A, d_B, d_C, d_D$  đồng quy.

**Ví dụ 11.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn. Gọi H, K là hình chiếu của B trên AC và CD, M, N là trung điểm AD và HK. Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác vuông.



Hình 15-13

**Giải.** (h. 15-13) Từ B kẻ  $BE \perp AD$ , theo Bài toán 1 ta có E, H, K thẳng hàng. Tứ giác BEDK nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{EKB}$ , tứ giác BHKC nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{BHK} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ ; mặt khác,  $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$   $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BHK} \Rightarrow \triangle BHK \sim \triangle BAD$ ,  $MA = MD$  và  $NH = NK \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle HBN$   $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BNE} \Rightarrow$  tứ giác BEMN nội tiếp, mà  $BE \perp AD \Rightarrow BN \perp MN$ . Vậy BMN là tam giác vuông.

**Ví dụ 12.** Cho tam giác ABC, BE, CK là các đường cao của tam giác ABC. Gọi P, Q là hình chiếu của E trên BC và CK. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của KE.

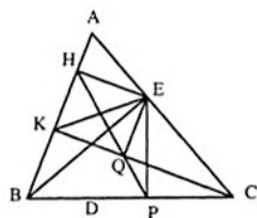
**Giải.** (h. 15-14) Từ E hạ  $EH \perp AB$ , theo giả thiết  $EP \perp BC, EQ \perp CK$ , tứ giác BKEC nội tiếp nên theo

Bài toán 1 ta có P, Q, H thẳng hàng.

Tứ giác KHEQ có:  $\widehat{EHK} = \widehat{HKQ} = \widehat{KQE} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  KHEQ là hình chữ nhật, KE và HQ là đường chéo, chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

$\Rightarrow$  PQ đi qua trung điểm của KE.



Hình 15-14

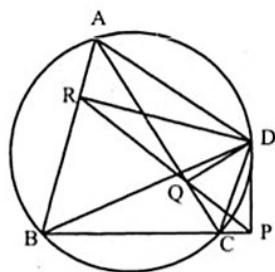
**Ví dụ 13.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Gọi P, Q, R là hình chiếu của D trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng  $PQ = QR$  khi và chỉ khi các đường phân giác của  $\widehat{ABC}$  và  $\widehat{ADC}$  cắt nhau trên AC.

**Giải.** (h. 15-15) Theo giả thiết ta có P, Q, R thẳng hàng. DPCQ là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{DPR}$ , tương tự  $\widehat{DAC} = \widehat{DRP} \Rightarrow$

$\triangle DCA$  và  $\triangle DPR$  đồng dạng. Cũng vậy,  $\triangle DAB$  và  $\triangle DQP$ ,  $\triangle DBC$  và  $\triangle DRQ$  đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB \cdot \frac{QR}{BC}}{DB \cdot \frac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC};$$

$PQ = QR$  khi và chỉ khi  $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow$  đường phân giác  $\widehat{ABC}$  và  $\widehat{ADC}$  cắt nhau trên AC.



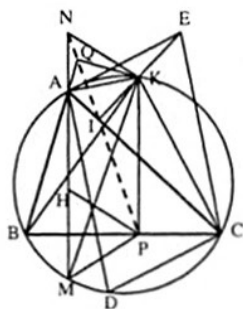
Hình 15-15

**Ví dụ 14.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là H, D là điểm trên cung nhỏ BC, dựng hình bình hành ADCE, K là trực tâm của tam giác ACE. Gọi P, Q là hình chiếu của K trên BC và AB. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của HK. (Olympic Vietnam 2004)

**Giải.** (h.15-16) Theo giả thiết ta có  $\widehat{ADC} = \widehat{AEC}$ ,  
K là trực tâm  $\triangle AEC \Rightarrow EK \perp AC$ ;

$\widehat{AKC} + \widehat{AEC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AKC} + \widehat{ADC} = 180^\circ \Rightarrow$  tứ  
giác ADCK nội tiếp  $\Rightarrow K \in (O)$ , EK cắt AC tại I  $\Rightarrow$   
P, Q, I thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Giả sử AH cắt (O) tại M và cắt PQ tại N  $\Rightarrow$   
 $MN \parallel KP$ ,  $KQ \perp AB$ ,  $KP \perp BC \Rightarrow BQKP$  là tứ giác nội  
tiếp  $\Rightarrow \widehat{QBK} = \widehat{AMK} = \widehat{QPK} \Rightarrow MPKN$  tứ giác nội  
tiếp  $\Rightarrow MPKN$  là hình thang cân  $\Rightarrow KN = PM$ , mặt  
khác  $PH = PM \Rightarrow PH = KN \Rightarrow HPKN$  là hình bình hành  $\Rightarrow NP$  cắt HK tại trung  
điểm mỗi đoạn  $\Rightarrow PQ$  đi qua trung điểm của HK.



Hình 15-16

**Ví dụ 15.** Cho hai đường tròn  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  cắt nhau tại A và B. Một đường  
thẳng d thay đổi qua A cắt  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  lần lượt tại C, D (A nằm giữa C và D). Tiếp  
tuyến tại C của  $(O_1)$  và tại D của  $(O_2)$  cắt nhau tại M. Gọi P, Q lần lượt là hình  
chiếu vuông góc của B xuống hai tiếp tuyến. Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với  
một đường tròn cố định.

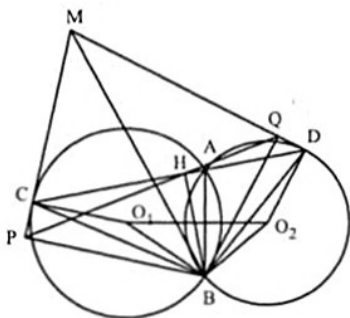
**Giải.** (h. 15-17) MC, MD là tiếp tuyến của  
 $(O_1)$ ,  $(O_2) \Rightarrow$

$$\widehat{ABC} = \widehat{MCA}, \widehat{ABD} = \widehat{MDA} \Rightarrow$$

$$\widehat{CBD} = \widehat{MCD} + \widehat{MDC} = 180^\circ - \widehat{CMD} \Rightarrow$$

$$\widehat{CBD} + \widehat{CMD} = 180^\circ \Rightarrow \text{tứ giác MCBD nội tiếp.}$$

Hạ  $BH \perp CD$ , áp dụng định lý Simson cho  
điểm B đối với tam giác MCD ta có P, H, Q  
thẳng hàng; A, B cố định  $\Rightarrow H$  nằm trên đường  
tròn đường kính AB  $\Rightarrow PQ$  luôn tiếp xúc với  
đường tròn đường kính AB.



Hình 15-17

## BÀI TẬP

**15.1.** Cho đường tròn (O) và ba dây cung tùy ý AB, AC, AD. Các đường tròn  
đường kính AB, AC, AD cắt nhau từng đôi một tại M, N, E. Chứng minh M,  
N, E thẳng hàng.



- 15.2. Nếu hai tam giác cùng nội tiếp đường tròn (O), thì góc giữa hai đường thẳng Simson của điểm M trên (O) đối với hai tam giác đó không phụ thuộc vào vị trí của M trên (O).
- 15.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC, E là điểm đối xứng của B qua AC, F là điểm đối xứng của C qua AB. Giả sử H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi  $OH = 2R$ . (Đề thi Anh 1990)
- 15.4. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không cắt (O). Điểm M thay đổi trên d. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O). Gọi H là hình chiếu của O trên d và E, F lần lượt là hình chiếu của H trên MA, MB. Chứng minh rằng AB luôn đi qua một điểm cố định từ đó suy ra EF cũng đi qua điểm cố định.
- 15.5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P và Q thuộc đường tròn (O) sao cho CP, CQ đối xứng với nhau qua phân giác của góc  $\widehat{BCA}$ . Chứng minh rằng CQ vuông góc với với đường thẳng Simson của P đối với tam giác ABC.
- 15.6. Cho góc nhọn  $\widehat{xOy}$  và tia phân giác Oz, điểm M cố định trên Oz (M khác O). Vẽ đường tròn (S) đi qua O và M cắt Ox, Oy tại A và B. Gọi I là trung điểm của AB, dựng hình vuông OCID. Tìm quỹ tích điểm C khi đường tròn (S) thay đổi.
- 15.7. Cho tam giác ABC không đều, P là hình chiếu của A trên BC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Gọi  $l_a$  là đường thẳng đi qua chân hai đường cao hạ từ P xuống DE, DF. Tương tự cho  $l_b, l_c$ . Chứng minh rằng  $l_a, l_b, l_c$  đồng quy.
- 15.8. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), M là điểm trên đường tròn đó. Gọi a, b, c, d là các đường thẳng Simson của M đối với các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC, gọi  $A_1, B_1, C_1, D_1$  là hình chiếu của M trên các đường thẳng a, b, c, d. Chứng minh  $A_1, B_1, C_1, D_1$  thẳng hàng.
- 15.9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). MN là dây cung chuyển động trên đường tròn có độ dài không đổi, Chứng minh rằng đường thẳng Simson của M và N đối với tam giác ABC hợp với nhau một góc không đổi.
- 15.10. Cho tứ giác ABCD, AB cắt CD tại E, BC cắt AD tại F. Chứng minh các trực tâm của các tam giác ABF, CDF, ADE, BCE thẳng hàng.

## Chuyên đề 16. BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG

### I. BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL.

Cho tam giác  $ABC$  và  $M$  là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi  $R_a, R_b, R_c$  theo thứ tự là khoảng cách từ  $M$  đến các đỉnh  $A, B, C$ . Còn  $d_a, d_b, d_c$  lần lượt là khoảng cách từ  $M$  đến các cạnh  $BC, CA, AB$ . Khi đó ta có bất đẳng thức  $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $ABC$  đều và  $M$  là tâm của tam giác đều đó.

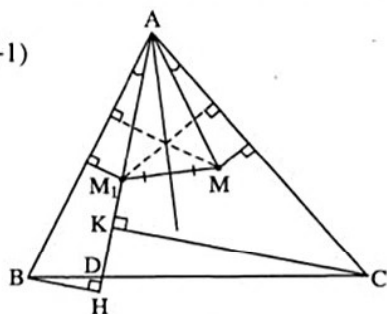
Bất đẳng thức *Erdos – Mordell* ( $E - M$ ) là một bất đẳng thức khá nổi tiếng trong tam giác, được nhà toán học nổi tiếng người Hungari *P. Erdos* đề xuất vào năm 1935, khi nghiên cứu các tính chất của tam giác. Bị lôi cuốn bởi tính giản dị của bài toán, *P. Erdos* lao vào chứng minh, song vinh dự giải được bài toán đó không thuộc về ông, mà thuộc về nhà hình học nổi tiếng người Anh tên là *Louis Mordell*. *L. Mordell* đã chứng minh bất đẳng thức ( $E - M$ ) bằng phương pháp lượng giác (sử dụng định lý sin và định lý cosin). Mãi đến năm 1945, nhà toán học người Nga *Cadarinốp* mới đề xuất được một lời giải thuần túy hình học có thể chấp nhận được. Tiếp theo đó nhiều nhà toán học trên thế giới đã nêu được những lời giải ngắn gọn cho bất đẳng thức ( $E - M$ ). Chẳng hạn chứng minh bằng cách sử dụng định lý *Ptolemy* của *André Avez*; sử dụng kiến thức tam giác đồng dạng của *Leon Bankoff*; sử dụng bất đẳng thức về diện tích của *V. Komornik*; sử dụng lượng giác của *Barrow*...

Sau đây là một lời giải thuần túy hình học phù hợp với trình độ các bạn học sinh lớp 9.

**Chứng minh bất đẳng thức ( $E - M$ ).** (h.16-1)

Đặt  $BC = a$ ;  $CA = b$ ;  $AB = c$ .

Lấy điểm  $M_1$  đối xứng với điểm  $M$  qua đường phân giác trong của góc  $BAC$ . Dựng  $BH \perp AM_1$  và  $CK \perp AM_1$ . Giả sử  $AM_1$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Khi đó  $BD \geq BH$ ;  $DC \geq CK$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $AD \perp BC$  hay  $AM_1 \perp BC$ . Từ đó ta có



Hình 16-1

$a \geq BH + CK \Leftrightarrow aR_a \geq 2S_{ABM_1} + 2S_{ACM_1}$  (chú ý rằng  $AM_1 = AM = R_a$ ).

$$\text{hay } aR_a \geq cd_b + bd_c. \text{ Từ đó } R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } R_b \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a \quad (2)$$

$$R_c \geq \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a \quad (3)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta thu được

$$R_a + R_b + R_c \geq d_a \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + d_b \left( \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + d_c \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

(sử dụng bất đẳng thức *Cauchy* cho các biểu thức trong ngoặc).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  đồng thời  $M_1$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Nói cách khác,  $M_1$  (và do đó cả  $M$ ) là tâm của tam giác đều  $ABC$ .

Từ cách chứng minh trên chúng ta còn có một số kết quả sau:

**Hệ quả 1.** (Bất đẳng thức *Erdos Mordell* dạng tích).

Cho tam giác  $ABC$  và  $M$  là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi  $R_a, R_b, R_c$  thứ tự là khoảng cách từ  $M$  đến các đỉnh  $A, B, C$ . Còn  $d_a, d_b, d_c$  lần lượt là khoảng cách từ  $M$  đến các cạnh  $BC, CA, AB$ . Khi đó ta có bất đẳng thức  $R_a \cdot R_b \cdot R_c \geq 8d_a d_b d_c$ .

**Chứng minh.** Từ cách chứng minh bất đẳng thức ( $E - M$ ) ta có

$$R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c \quad (1)$$

$$R_b \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a \quad (2)$$

$$R_c \geq \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a \quad (3)$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} R_a \cdot R_b \cdot R_c &\geq \left( \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c \right) \left( \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a \right) \left( \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a \right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}d_b \cdot \frac{b}{a}d_c} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}d_c \cdot \frac{c}{b}d_a} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{c}d_b \cdot \frac{b}{c}d_a} = 8d_a d_b d_c \text{ (dpcm)}. \end{aligned}$$

**Hệ quả 1.** (Bất đẳng thức *Erdos – Mordell* dạng căn thức).

Cho tam giác  $ABC$  và  $M$  là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi  $R_a, R_b, R_c$  thứ tự là khoảng cách từ  $M$  đến các đỉnh  $A, B, C$ . Còn  $d_a, d_b, d_c$  lần lượt là khoảng cách từ  $M$  đến các cạnh  $BC, CA, AB$ . Khi đó ta có bất đẳng thức  $\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \geq \sqrt{2}(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c})$ .

**Chứng minh.** Từ các bất đẳng thức (1), (2) và (3) theo bất đẳng thức *Cauchy*

$$\text{ta có } \sqrt{R_a} \geq \sqrt{\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c} \geq \frac{\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot \sqrt{d_b} + \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{d_c}}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

Tương tự ta cũng có

$$\sqrt{R_b} \geq \sqrt{\frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a} \geq \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{d_c} + \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \sqrt{d_a}}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\sqrt{R_c} \geq \sqrt{\frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a} \geq \frac{\sqrt{\frac{a}{c}} \cdot \sqrt{d_b} + \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{d_a}}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (4), (5) và (6) ta thu được

$$\begin{aligned} & \sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} \right) \cdot \sqrt{d_a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{a}{c}} \right) \cdot \sqrt{d_b} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \cdot \sqrt{d_c} \\ & \geq \sqrt{2}(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}) \end{aligned}$$

(Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy* cho các biểu thức trong ngoặc của bất đẳng thức trên). Ta có điều cần chứng minh.

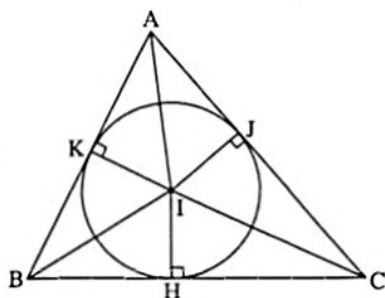
## II. MỘT VÀI ÁP DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL

Chúng ta xét vài áp dụng của Bất đẳng thức *Erdos – Mordell* ( $E - M$ ) và các Hệ quả 1, Hệ quả 2 thông qua một số bài toán sau:

**Ví dụ 1.** Gọi  $I$  là tâm,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác  $ABC$  đều là  $IA + IB + IC = 6r$ .

**Giải.** (h.16-2)

Kẻ IH, IJ, IK theo thứ tự vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Ta có  $IH = IJ = IK = r$ . Áp dụng bất đẳng thức *Erdos - Mordell* cho điểm I trong tam giác ABC, ta thấy  $IA + IB + IC \geq 2(IH + IJ + IK) = 6r$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Nói cách khác, điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là  $IA + IB + IC = 6r$  (đpcm).



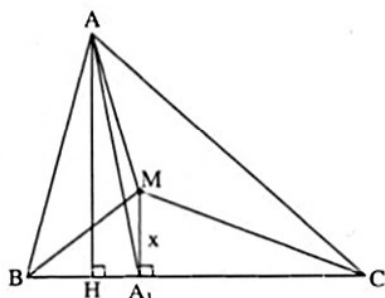
Hình 16-2

Ta xét một kết quả mạnh hơn.

**Ví dụ 2.** Giả sử M là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng  $MA + MB + MC \geq 6r$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Giải.** (h.16-3)

Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Kẻ AH vuông góc với BC,  $MA_1$  vuông góc với BC. Khi đó ta có  $AM + MA_1 \geq AH$ . Từ đó  $AM \geq \frac{2S_{ABC}}{BC} - x$ .



Hình 16-3

Tương tự,  $BM \geq \frac{2S_{ABC}}{CA} - y$ ;  $CM \geq \frac{2S_{ABC}}{AB} - z$ . Cộng theo vế ba bất đẳng thức này ta thu được

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &\geq 2S_{ABC} \left( \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB} \right) - (x + y + z) \\ &= r(BC + CA + AB) \left( \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB} \right) - (x + y + z) \end{aligned} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy* ta được

$$(BC + CA + AB) \left( \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB} \right) \geq 9 \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Erdos - Mordell* cho điểm M đối với tam giác ABC ta có

$$MA + MB + MC \geq 2(x + y + z) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra  $MA + MB + MC \geq 9r - \left( \frac{MA + MB + MC}{2} \right)$  hay

$MA + MB + MC \geq 6r$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều (đpcm).

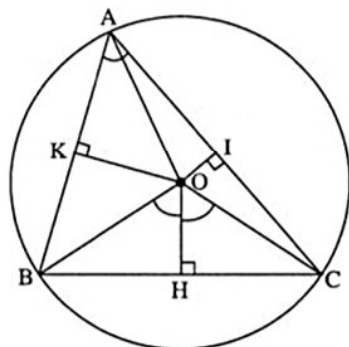
**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta có các bất đẳng thức

a)  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ .

b)  $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Giải.** a) (h.16-4)

Gọi O, R theo thứ tự là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; H, I, K thứ tự là hình chiếu vuông góc kẻ từ O đến các cạnh BC, CA, AB. Từ giả thiết tam giác ABC nhọn, ta nhận thấy  $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$  (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung) hay  $\widehat{BAC} = \widehat{HOC}$ . Tương tự có  $\widehat{ABC} = \widehat{AOI}$ ;  $\widehat{ACB} = \widehat{BOK}$ . Từ đó



Hình 16-4

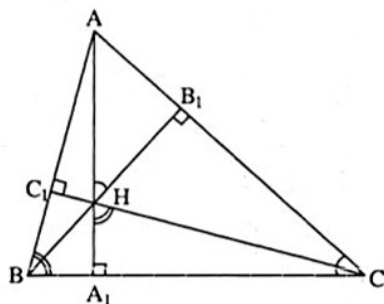
$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= \cos \widehat{HOC} + \cos \widehat{AOI} + \cos \widehat{BOK} = \frac{OH}{OC} + \frac{OI}{OA} + \frac{OK}{OB} \\ &= \frac{OH + OI + OK}{R} \end{aligned} \quad (1)$$

Nhưng theo bất đẳng thức *Erdoes – Mordell* cho điểm O nằm trong tam giác ABC ta có  $OH + OI + OK \leq \frac{OA + OB + OC}{2}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

b) (h.16-5)

Dựng  $AA_1 \perp BC$ ;  $BB_1 \perp AC$ ;  $CC_1 \perp AB$ . Gọi  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Do tứ giác  $BC_1HA_1$  nội tiếp nên  $\widehat{ABC} = \widehat{A_1HC}$ . Tứ giác  $CA_1HB_1$  nội tiếp nên  $\widehat{ACB} = \widehat{B_1HA}$ . Tứ giác  $AC_1HB_1$  nội tiếp nên  $\widehat{BAC} = \widehat{C_1HB}$ . Do đó



Hình 16-5

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \cos \widehat{A_1HC} \cdot \cos \widehat{B_1HA} \cdot \cos \widehat{C_1HB} = \frac{HA_1 \cdot HB_1 \cdot HC_1}{HA \cdot HB \cdot HC} \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Erdos – Mordell* dạng tích ta có

$$HA \cdot HB \cdot HC \geq 8HA_1 \cdot HB_1 \cdot HC_1. \text{ Từ (3) suy ra } \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}. \text{ Đẳng thức}$$

xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $ABC$  đều.

**Ví dụ 4.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , gọi  $I, I_a, I_b, I_c$  theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, tâm các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các đỉnh  $A, B, C$  của tam giác đó;  $r$  là bán kính của đường tròn  $(I)$ . Chứng minh rằng

a)  $IA \cdot IB \cdot IC \geq 8r^3$ .

b)  $II_a + II_b + II_c \geq 12r$ .

c)  $II_a \cdot II_b \cdot II_c \geq 64r^3$ .

d)  $\sqrt{II_a} + \sqrt{II_b} + \sqrt{II_c} \geq 6\sqrt{r}$ .

**Giải.** a) (h.16-6). Gọi  $H, J, K$  lần lượt là tiếp điểm của đường tròn  $(I)$  với các cạnh  $BC, CA, AB$ . Sử dụng bất đẳng thức *Erdos – Mordell* dạng tích ta có

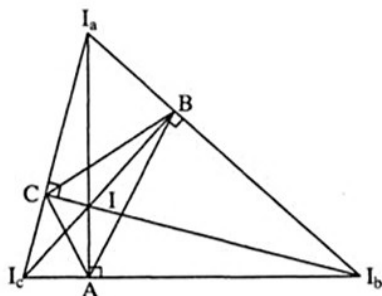
$IA \cdot IB \cdot IC \geq 8IH \cdot IJ \cdot IK$ , hay  $IA \cdot IB \cdot IC \geq 8r^3$  (dpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $ABC$  đều.

**Lưu ý.** Bất đẳng thức ở câu a) cũng đúng cho tam giác  $ABC$  bất kì.

b) (h.16-8)

Nhận xét rằng điểm I là trực tâm của tam giác  $I_a I_b I_c$ . Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm I đối với tam giác  $I_a I_b I_c$  ta nhận được

$II_a + II_b + II_c \geq 2(IA + IB + IC) \geq 12r$   
(Theo kết quả của Ví dụ 1). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.



Hình 16-6

c) Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng tích cho điểm I đối với tam giác  $I_a I_b I_c$  ta nhận được  $II_a \cdot II_b \cdot II_c \geq 8IA \cdot IB \cdot IC \geq 64r^3$  (Theo kết quả câu a)). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

d) Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm I trong tam giác  $I_a I_b I_c$  ta có  $\sqrt{II_a} + \sqrt{II_b} + \sqrt{II_c} \geq \sqrt{2}(\sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC})$  (1)

Tiếp tục Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell dạng căn thức cho điểm I đối với tam giác ABC ta được

$$\sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} \geq \sqrt{2}(\sqrt{IH} + \sqrt{IJ} + \sqrt{IK}) = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{r} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\sqrt{II_a} + \sqrt{II_b} + \sqrt{II_c} \geq 6\sqrt{r}$  (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC với  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó. Chứng minh bất đẳng thức  $abc \geq 24\sqrt{3} r^3$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Giải.** Gọi  $p$  là nửa chu vi tam giác ABC. Từ công thức Heron  $S_{ABC}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$  và  $S_{ABC} = p \cdot r$  suy ra

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \quad (1)$$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Theo định lý Pythagore và từ (1) ta có

$$\begin{aligned} IA^2 \cdot IB^2 \cdot IC^2 &= (r^2 + (p-a)^2)(r^2 + (p-b)^2)(r^2 + (p-c)^2) \\ &= \left(\frac{(p-a)bc}{p}\right) \left(\frac{(p-b)ac}{p}\right) \left(\frac{(p-c)ab}{p}\right) \end{aligned} \quad (2)$$



Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy* ta có

$$\frac{p}{3} = \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

hay  $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27}$  (3). Từ (2) và (3) ta suy ra

$$IA^2 \cdot IB^2 \cdot IC^2 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{27} \Leftrightarrow IA \cdot IB \cdot IC \leq \frac{abc}{3\sqrt{3}} \quad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Erdos – Mordell* dạng tích ta có  $IA \cdot IB \cdot IC \geq 8r^3$  (5)

Từ (4) và (5) ta suy ra  $abc \geq 24\sqrt{3} r^3$  (dpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**Chú ý.** Các bạn học sinh lớp 9 nếu đã làm quen với định lý sin trong tam giác ABC thì thấy  $a = 2R\sin A$ ;  $b = 2R\sin B$ ;  $c = 2R\sin C$  ( $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Khi đó từ bất đẳng thức  $abc \geq 24\sqrt{3} r^3$  ta nhận được bất đẳng thức

$$8R^3 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \geq 24\sqrt{3} r^3 \Leftrightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \geq 3\sqrt{3} \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

**Hệ quả :** Với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \geq 3\sqrt{3} \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**Ví dụ 6.** Giả sử đường tròn tâm I bán kính  $r$  nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại  $A_1, B_1, C_1$ . Chứng minh bất đẳng thức

$AB \cdot BC \cdot CA \geq 8 A_1 B_1 \cdot B_1 C_1 \cdot C_1 A_1$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

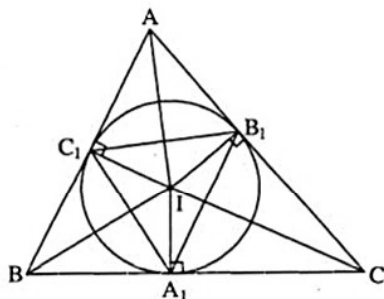
**Giải.** (h.16-7)

Đặt  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  và  $p$  là nửa chu vi tam giác ABC. Sử dụng định lý Ptolemy cho các tứ giác nội tiếp  $IC_1 A B_1$ ;  $IC_1 B A_1$ ;  $IA_1 C B_1$  ta thấy

$$IA \cdot B_1 C_1 = IB_1 \cdot AC_1 + IC_1 \cdot AB_1 \text{ hay}$$

$$IA \cdot B_1 C_1 = 2r(p-a) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } IB \cdot A_1 C_1 = 2r(p-b); \quad (2)$$



Hình 16-7

$IC.A_1B_1 = 2r(p-c)$  (3). Nhân các đẳng thức (1), (2), (3) theo vế ta được

$$IA.IB.IC = \frac{8r^3(p-a)(p-b)(p-c)}{B_1C_1.C_1A_1.A_1B_1} \quad (4)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có

$$(p-a)(p-b) \leq \left( \frac{(p-a)+(p-b)}{2} \right)^2 = \frac{c^2}{4}; (p-b)(p-c) \leq \left( \frac{(p-b)+(p-c)}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4};$$

$$(p-c)(p-a) \leq \left( \frac{(p-c)+(p-a)}{2} \right)^2 = \frac{b^2}{4}. \text{ Nhân ba bất đẳng thức theo vế ta thu}$$

$$\text{được } (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8} \quad (5)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Erdos – Mordell* dạng tích ta có  $IA.IB.IC \geq 8r^3$  (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra  $AB.BC.CA \geq 8 A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1$  (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**Ví dụ 7. (IMO 1991).** Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba góc  $\widehat{PAB}$ ,  $\widehat{PBC}$ ,  $\widehat{PCA}$  nhỏ hơn hoặc bằng  $30^\circ$ .

**Giải. (Phản chứng).** Giả sử không có góc nào trong ba góc  $\widehat{PAB}$ ,  $\widehat{PBC}$ ,  $\widehat{PCA}$  nhỏ hơn hoặc bằng  $30^\circ$ . Khi đó, nếu có một góc lớn hơn hoặc bằng  $150^\circ$  thì hai góc còn lại nhỏ hơn hoặc bằng  $30^\circ$ . Giả sử cả ba góc đều lớn hơn  $30^\circ$  và nhỏ hơn  $150^\circ$ . Gọi  $d_a, d_b, d_c$  lần lượt là khoảng cách từ P đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có

$$2d_a = 2PB.\sin \widehat{PBC} > 2\sin 30^\circ.PB = PB \quad (1)$$

Tương tự cũng có  $2d_b > PC$  (2);  $2d_c > PA$  (3). Từ (1), (2), (3) ta suy ra

$PA + PB + PC < 2(d_a + d_b + d_c)$ . Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức *Erdos Mordell*. Từ đây ta có điều cần chứng minh.

**Ví dụ 8.** Giả sử H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh bất đẳng thức  $HD + HE + HF \geq \frac{3}{2}R$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Giải.** (h.16-8)

Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Còn  $\omega$  là tâm đường tròn Euler của tam giác  $ABC$ . Ta có các kết quả sau

+)  $\omega$  là trung điểm của  $OH$ .

+) Bán kính đường tròn Euler của tam giác  $ABC$  bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

(Bạn đọc tự chứng minh hai kết quả trên)

Sử dụng hai kết quả trên ta có

$$HD + OD \geq 2\omega D = R;$$

$$HE + OE \geq 2\omega E = R; HF + OF \geq 2\omega F = R.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$HD + HE + HF \geq 3R - (OD + OE + OF) \quad (1)$$

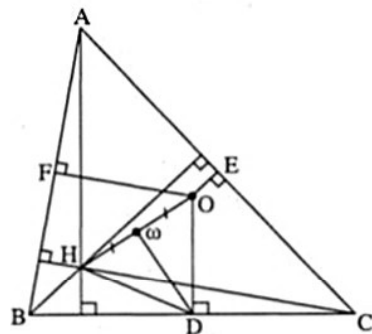
Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm  $O$  nằm trong tam giác  $ABC$  ta có

$$OD + OE + OF \leq \frac{OA + OB + OC}{2} = \frac{3R}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $HD + HE + HF \geq \frac{3}{2}R$  (dpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $ABC$  đều.

**Ví dụ 9.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ . Các đường cao  $AA_1, BB_1, CC_1$  đồng quy tại  $H$ . Kẻ  $OO_1$  vuông góc với  $BC$ ,  $OO_2$  vuông góc với  $AC$ ,  $OO_3$  vuông góc với  $AB$ . Chứng minh rằng

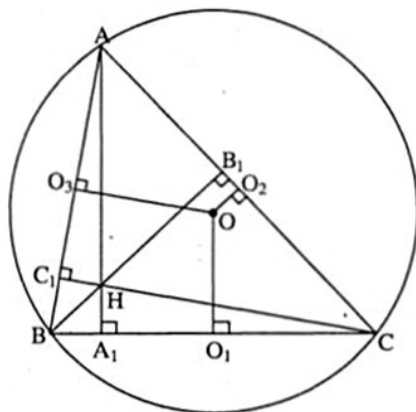
$$HA_1 + HB_1 + HC_1 \leq OO_1 + OO_2 + OO_3 \leq \frac{3R}{2}$$



Hình 16-8

**Giải.** (h.16-9)

Nhận xét rằng  $HA = 2OO_1$  ;  $HB = 2OO_2$  ;  $HC = 2OO_3$ . (có thể chứng minh các đẳng thức này bằng cách kẻ các đường kính của đường tròn (O) qua A, B, C rồi sử dụng tính chất đường trung bình trong tam giác).



Hình 16-9

+) Áp dụng bất đẳng thức *Erdos - Mordell* cho điểm H trong tam giác ABC ta có

$$HA_1 + HB_1 + HC_1 \leq \frac{HA + HB + HC}{2} = OO_1 + OO_2 + OO_3.$$

+) Áp dụng bất đẳng thức *Erdos - Mordell* cho điểm O trong tam giác ABC ta có

$$OO_1 + OO_2 + OO_3 \leq \frac{OA + OB + OC}{2} = \frac{3R}{2} \text{ (dpcm).}$$

**Chú ý.** Tổng hợp các kết quả của Ví dụ 8 và Ví dụ 9 ta có dãy bất đẳng thức

$$HA_1 + HB_1 + HC_1 \leq OO_1 + OO_2 + OO_3 \leq \frac{3R}{2} \leq HO_1 + HO_2 + HO_3.$$

**Ví dụ 10.** Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi  $R_a, R_b, R_c$  theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn  $d_a, d_b, d_c$  lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

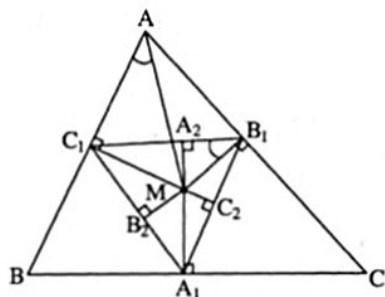
$$\text{Chứng minh bất đẳng thức } d_a + d_b + d_c \geq 2 \left( \frac{d_a d_c}{R_a} + \frac{d_c d_a}{R_b} + \frac{d_a d_b}{R_c} \right).$$

**Giải.** (h.16-10)

Gọi  $A_1, B_1, C_1$  theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ  $M$  lên các cạnh  $BC, CA, AB$ . Ta có  $B_1C_1 = MA \cdot \sin A = R_a \cdot \sin A$ ;  $C_1A_1 = MB \cdot \sin B = R_b \cdot \sin B$ ;  $A_1B_1 = MC \cdot \sin C = R_c \cdot \sin C$ .

Kẻ  $MA_2$  vuông góc với  $B_1C_1$ ;  $MB_2$  vuông góc với  $C_1A_1$ ;  $MC_2$  vuông góc với  $A_1B_1$ . Khi đó  $MA_2 = MB_1 \cdot \sin \widehat{MB_1A_2}$

$$= MB_1 \cdot \sin \widehat{MAC_1} = \frac{MB_1 \cdot MC_1}{MA} = \frac{d_b \cdot d_c}{R_a} \quad (2)$$



Hình 16-10

$$MB_2 = MC_1 \cdot \sin \widehat{MC_1B_2} = MC_1 \cdot \sin \widehat{MBA_1} = \frac{MA_1 \cdot MC_1}{MB} = \frac{d_a \cdot d_c}{R_b} \quad (2)$$

$$MC_2 = MA_1 \cdot \sin \widehat{MA_1C_2} = MA_1 \cdot \sin \widehat{MCB_1} = \frac{MB_1 \cdot MA_1}{MC} = \frac{d_b \cdot d_a}{R_c} \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Erdos - Mordell* cho điểm  $M$  trong tam giác  $A_1B_1C_1$  ta có

$$MA_1 + MB_1 + MC_1 \geq 2(MA_2 + MB_2 + MC_2) \quad (4)$$

Từ (39), (40), (41), (42) ta suy ra

$$d_a + d_b + d_c \geq 2 \left( \frac{d_a d_c}{R_a} + \frac{d_c d_a}{R_b} + \frac{d_a d_b}{R_c} \right) \text{ (đpcm).}$$

### III. PHẦN ĐỌC THÊM

Nhà toán học *Barrow* trong khi chứng minh bất đẳng thức (E - M) đã thu được kết quả sau: mạnh hơn bất đẳng thức *Erdos - Mordell* dạng tổng.

**(Bất đẳng thức Barrow).** Cho tam giác  $ABC$  và  $M$  là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi  $R_a, R_b, R_c$  theo thứ tự là khoảng cách từ  $M$  đến các đỉnh  $A, B, C$ . Còn  $d_a, d_b, d_c$  lần lượt là độ dài các đường phân giác trong của các góc  $BMC, CMA, AMB$  của các tam giác  $BMC, CMA, AMB$ .

Khi đó ta có bất đẳng thức  $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$ .

**Chứng minh.** Ta cần có một Bổ đề.

**Bổ đề.** Với mọi  $x, y, z$  và  $\alpha, \beta, \gamma$  sao cho  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  thì

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(yz \cos \alpha + zx \cos \beta + xy \cos \gamma).$$

**Chứng minh.** (h.16-11)

Ta có  $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos \alpha - 2zx \cos \beta - 2xy \cos \gamma$

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)x^2 + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)y^2 \\ &\quad + z^2 - 2yz \cos \alpha + 2xy \cos(\alpha + \beta) - 2zx \cos \beta \\ &= (z^2 + (x \cos \beta)^2 + (y \cos \alpha)^2 - 2z(x \cos \beta) - 2z(y \cos \alpha) + 2(x \cos \beta)(y \cos \alpha)) \\ &\quad + ((x \sin \beta)^2 - 2(x \sin \beta)(y \sin \alpha) + (y \sin \alpha)^2) \\ &= (z - x \cos \beta - y \cos \alpha)^2 + (x \sin \beta - y \sin \alpha)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. Trở lại với bất đẳng thức Barrow.

Đặt  $\widehat{BMC} = 2\alpha$ ;  $\widehat{CMA} = 2\beta$ ;  $\widehat{AMB} = 2\gamma$  thì rõ ràng  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

Theo công thức đường phân giác cho các tam giác  $BMC$ ,  $CMA$ ,  $AMB$  ta thấy

$$(R_b + R_c)d_a = 2R_b R_c \cos \alpha;$$

$$(R_a + R_c)d_b = 2R_a R_c \cos \beta;$$

$$(R_b + R_a)d_c = 2R_b R_a \cos \gamma.$$

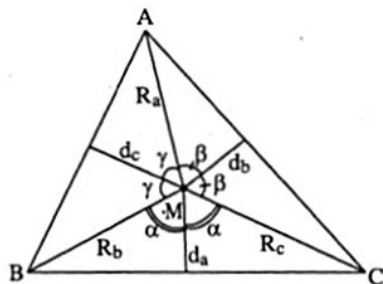
Từ đó suy ra

$$2\cos \alpha = d_a \left( \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \right);$$

$$2\cos \beta = d_b \left( \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_a} \right); \quad 2\cos \gamma = d_c \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right).$$

Sử dụng Bổ đề trên ta có

$$\begin{aligned} &d_a \left( \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \right) yz + d_b \left( \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_a} \right) zx + d_c \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) xy = \\ &= 2(yz \cos \alpha + zx \cos \beta + xy \cos \gamma) \leq x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$



Hình 16-11

Chọn  $x = \sqrt{R_a}$  ;  $y = \sqrt{R_b}$  ;  $z = \sqrt{R_c}$  ta nhận được

$$R_a + R_b + R_c \geq d_a \left( \frac{\sqrt{R_c}}{\sqrt{R_b}} + \frac{\sqrt{R_b}}{\sqrt{R_c}} \right) + d_b \left( \frac{\sqrt{R_c}}{\sqrt{R_a}} + \frac{\sqrt{R_a}}{\sqrt{R_c}} \right) + d_c \left( \frac{\sqrt{R_a}}{\sqrt{R_b}} + \frac{\sqrt{R_b}}{\sqrt{R_a}} \right) \\ \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

## BÀI TẬP

**16.1.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi  $R_1, R_2, R_3$  theo thứ tự là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB. Chứng minh bất đẳng thức  $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**16.2.** Cho tam giác nhọn ABC. Gọi  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng  $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**16.3.** Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \frac{A}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{B}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{C}{2}}} \geq 3\sqrt{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi nào?}$$

**16.4.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) và ngoại tiếp đường tròn (I ; r). Các đường cao  $AA_1, BB_1, CC_1$  đồng quy tại H. Chứng minh các hệ thức sau:

a)  $HA + HB + HC = 2(R + r).$

b)  $HA_1 + HB_1 + HC_1 \leq R + r.$

c)  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$

d)  $R \geq 2r.$

## Chuyên đề 17. ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ VÀ ĐẶC TRƯNG CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP

*Định lý Ptôlê-mê là một trong những định lý đẹp nhất của Hình học sơ cấp. Đẹp trước hết vì tính tự nhiên và sự đơn giản trong cách phát biểu định lý đó, nhưng chính yếu hơn là do các ứng dụng phong phú của nó. Có lẽ Định lý Ptôlê-mê là một trong những đặc trưng sâu sắc nhất về tứ giác nội tiếp đường tròn.*

### I. ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ

Định lý Ptôlê-mê được phát biểu như sau : Trong một tứ giác nội tiếp, tích hai đường chéo bằng tổng các tích các cặp cạnh đối diện.

Sau đây là một phương pháp chứng minh định lý này.

Giả sử tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Trên BD lấy điểm E sao cho  $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$  (xem hình 17-1). Vì

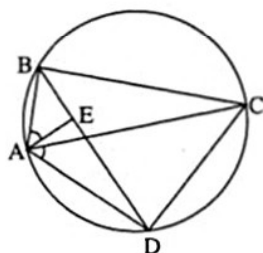
$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$  nên hai tam giác ABE và ACD đồng dạng. Suy ra  $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$ . Do đó  $AB \cdot CD = AC \cdot BE$  (1).

Tương tự,  $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$ ,  $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$  nên hai tam giác AED và ABC đồng dạng.

$$\text{Từ đó } \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}.$$

$$\text{Suy ra } AD \cdot BC = AC \cdot ED \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + ED)$  hay  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .



Hình 17-1

### II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ

Định lý Ptôlê-mê thường được sử dụng để chứng minh các hệ thức trong tam giác.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A có  $AB + AC = 4$  cm. Vẽ tam giác BCE vuông cân tại E (E và A nằm khác phía đối với BC). Tính độ dài AE.



**Giải.** (h.17-2)

Đặt  $BE = CE = a$ .

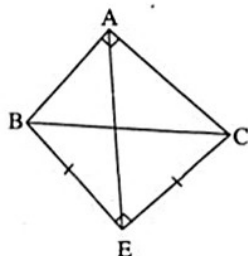
Áp dụng định lí Ptolômê vào tứ giác nội tiếp ABEC, ta có

$$AE \cdot BC = AB \cdot CE + AC \cdot BE$$

$$\Rightarrow AE \cdot a\sqrt{2} = AB \cdot a + AC \cdot a$$

$$\Rightarrow AE\sqrt{2} = AB + AC$$

$$\Rightarrow AE = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$



Hình 17-2

**Ví dụ 2.** Cho hình bình hành ABCD. Một đường tròn đi qua A cắt các đoạn thẳng AB, AC, AD theo thứ tự ở K, E, F. Chứng minh rằng

$$AK \cdot AB + AF \cdot AD = AE \cdot AC.$$

**Giải.** (h.17-3)

Áp dụng định lí Ptolômê vào tứ giác nội tiếp AKEF, ta có

$$AK \cdot EF + AF \cdot EK = AE \cdot KF. \quad (1)$$

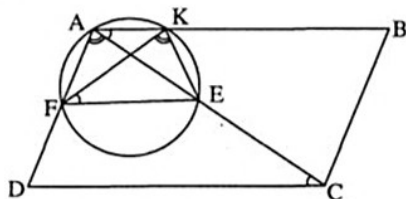
Mặt khác  $\triangle KFE \sim \triangle ACD$  (g.g)

$$\text{nên } \frac{EF}{CD} = \frac{KE}{AD} = \frac{KF}{AC} = k. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AK \cdot kAB + AF \cdot kAD = AE \cdot kAC, \text{ do đó}$$

$$AK \cdot AB + AF \cdot AD = AE \cdot AC.$$



Hình 17-3

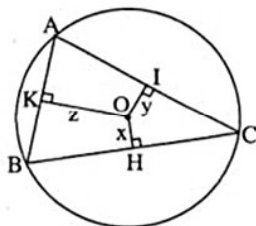
**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi x, y, z là các khoảng từ O đến BC, CA, AB và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh hệ thức  $x + y + z = R + r$ .

b) Kết quả thế nào nếu góc A tù ?

**Giải.** (h.17-4a)

a) Gọi H, I, K là chân các đường vuông góc hạ từ O xuống BC, CA, AB. Khi đó H, I, K là trung điểm của BC, CA, AB (xem hình 17-4a).



Hình 17-4a

Vì KI là đường trung bình của tam giác ABC nên  $KI = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ .

Áp dụng Định lí Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp AKOI có  $OA \cdot KI = OI \cdot AK + OK \cdot AI$  hay  $R \frac{a}{2} = y \frac{c}{2} + z \frac{b}{2}$ .

Từ đó  $Ra = yc + zb$ .

Tương tự,  $Rb = ya + xb$ ,  $Rc = xc + za$ .

Mặt khác,  $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}cz$ .

Suy ra  $(a + b + c)r = ax + by + cz$ .

Từ đó

$$\begin{aligned}(R + r)(a + b + c) &= Ra + Rb + Rc + r(a + b + c) \\ &= yc + zb + ya + xb + xa + zc + ax + by + cz \\ &= (x + y + z)(a + b + c).\end{aligned}$$

Suy ra  $x + y + z = R + r$ .

b) Khi góc A tù, tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm ngoài tam giác đó (h.17-4b). Trong trường hợp này các hệ thức tương ứng sẽ là

$$\begin{aligned}Ra &= yc + zb, Rb = za - xc, Rc = ya - bx, \\ r(a + b + c) &= yb + zc - ax\end{aligned}$$

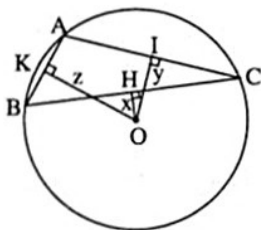
Cộng từng vế các đẳng thức trên, có

$$(R + r)(a + b + c) = (y + z - x)(a + b + c).$$

Từ đó  $y + z - x = R + r$ .

**Lưu ý.** Kết quả  $y + z - x = R + r$  không ấn tượng lắm. Tuy nhiên ta sẽ có kết quả đẹp hơn ở ví dụ dưới đây.

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC có góc A tù nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi  $r_a$  là bán kính của đường tròn bàng tiếp góc A, gọi x, y, z là các khoảng cách từ O đến BC, CA, AB. Chứng minh hệ thức  $x + y + z = r_a - R$ .



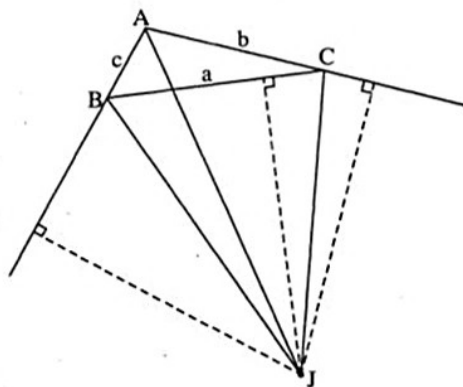
Hình 17-4b

**Giải.** (h.17-5)

$$\begin{aligned} S &= S_{OAC} + S_{OAB} - S_{OBC} \\ &= \frac{1}{2} by + \frac{1}{2} cz - \frac{1}{2} ax. \end{aligned} \quad (1)$$

Gọi J là tâm của đường tròn bàng tiếp góc A, ta có

$$\begin{aligned} S &= S_{JAC} + S_{JAB} - S_{JBC} \\ &= \frac{1}{2} br_a + \frac{1}{2} cr_a - \frac{1}{2} ar_a \\ &= \frac{1}{2} (b + c - a) r_a. \end{aligned} \quad (2)$$



Hình 17-5

Từ (1) và (2) suy ra  $(b + c - a)r_a = by + cz - ax$ .

Ta lại có  $Rb = za - xc$ ,  $Rc = ya - bx$ ,  $Ra = yc + zb$ .

Từ đó  $(r_a - R)(b + c - a) = (x + y + z)(b + c - a)$ . Suy ra  $x + y + z = r_a - R$ .

• Trước khi vào Ví dụ 5, bạn đọc hãy chứng minh bổ đề sau.

**Bổ đề.** Cho tam giác ABC có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và góc A bằng  $60^\circ$ . Khi đó  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ .

Thật vậy, kẻ CH vuông góc với AB. Khi đó trong tam giác vuông ACH có  $\widehat{A} = 60^\circ$  nên  $\widehat{ACH} = 30^\circ$  (xem hình 17-6).

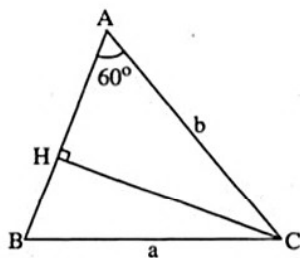
$$\text{Do đó } AH = \frac{b}{2}, HC = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Trong tam giác vuông BHC có

$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$

$$\text{hay } a^2 = \left(c - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

$$\text{Từ đó } a^2 = b^2 + c^2 - bc.$$



Hình 17-6

**Ví dụ 5.** Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a nội tiếp đường tròn tâm O và một điểm M trên cung nhỏ BC. Đặt  $MA = x$ ,  $MB = y$ ,  $MC = z$ .

Chứng minh rằng :

a)  $x = y + z$  ;

b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$  ;

c)  $x^4 + y^4 + z^4 = 2a^4$ .

**Giải.**

a) Áp dụng Định lí Ptolômê cho tứ giác nội tiếp ABMC có  $MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$ .  
Do đó  $xa = ya + za$  (h.17-7). Từ đó  $x = y + z$ .

b) Chú ý rằng  $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ ,

$$\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^\circ.$$

Áp dụng Bô-đê trên cho các tam giác MAB và MAC có :

$$a^2 = x^2 + y^2 - xy \text{ và } a^2 = x^2 + z^2 - xz.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } 2a^2 &= 2x^2 + y^2 + z^2 - x(y + z) \\ &= 2x^2 + y^2 + z^2 - x^2 \text{ (vì } x = y + z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

c) Áp dụng hằng đẳng thức  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$  nhận được

$$a^4 = (x^2 + y^2 - xy)^2 = x^4 + y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3 \text{ và}$$

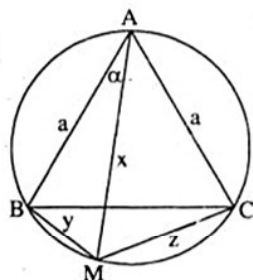
$$a^4 = (x^2 + z^2 - xz)^2 = x^4 + z^4 + 3x^2z^2 - 2x^3z - 2xz^3.$$

$$\text{Từ đó } 2a^4 = 2x^4 + y^4 + z^4 + 3x^2(y^2 + z^2) - 2x^3(y + z) - 2x(y^3 + z^3) \quad (1)$$

Chú ý rằng  $x = y + z$  nên  $2x^3(y + z) = 2x^4$  và

$$\begin{aligned} &3x^2(y^2 + z^2) - 2x(y^3 + z^3) \\ &= 3x^2(y^2 + z^2) - 2x(y + z)(y^2 + z^2 - yz) \\ &= 3x^2(y^2 + z^2) - 2x^2(y^2 + z^2 - yz) \\ &= x^2(y^2 + z^2 + 2yz) \\ &= x^2(y + z)^2 = x^4. \end{aligned}$$

Do đó từ (1) suy ra  $2a^4 = x^4 + y^4 + z^4$ .



Hình 17-7

**Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M trên cung nhỏ BC. Gọi H, I, K là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA, AB. Chứng minh hệ thức  $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MI} + \frac{AB}{MK}$ .

**Giải.**

Vì  $\widehat{MCH} = \widehat{MAK}$  (cùng chắn cung MB) nên hai tam giác MHC và MKA đồng dạng.

$$\text{Do đó } \frac{MH}{MK} = \frac{MC}{MA}. \text{ Suy ra } MC = \frac{MH \cdot MA}{MK}.$$

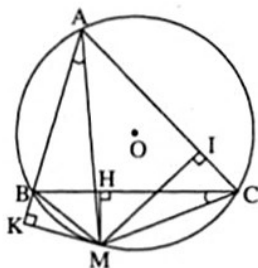
Tương tự,  $\widehat{MBH} = \widehat{MAI}$  nên hai tam giác MHB và MIA đồng dạng. Do đó  $\frac{MH}{MI} = \frac{MB}{MA}$ .

$$\text{Suy ra } MB = \frac{MH \cdot MA}{MI} \text{ (xem h.17-8)}$$

Áp dụng Định lí Ptolômê cho tứ giác nội tiếp ABMC có

$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB.$$

Từ đó  $MA \cdot BC = \frac{MH \cdot MA}{MI} AC + \frac{MH \cdot MA}{MK} AB$ . Chia hai vế đẳng thức cuối cùng cho  $MH \cdot MA$ , có  $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MI} + \frac{AB}{MK}$ .



Hình 17-8

**Ví dụ 7.** Cho tam giác ABC có  $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ . Chứng minh hệ thức  $a^2 - b^2 = bc$ .

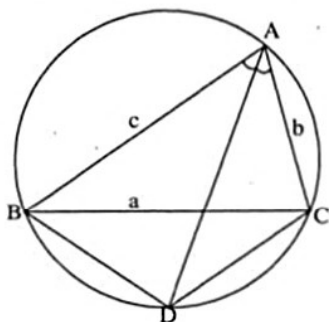
**Giải.** (h.17-9)

Phân giác góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D (h.17-9).

$$\text{Khi đó } \widehat{DBC} = \widehat{DAC} = \widehat{ABC}$$

$$\text{và } \widehat{DCB} = \widehat{DAB} = \widehat{ABC} \text{ nên } CD = AC = b$$

$$\text{và } BD = AC = b.$$



Hình 17-9

Tương tự,  $\widehat{ABD} = 2\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$  nên  $AD = BC = a$ . Áp dụng Định lí Ptôlê-mê cho tứ giác nội tiếp ABCD có  $AD \cdot BC = DC \cdot AB + DB \cdot AC$  hay  $a^2 = bc + b^2$ .

Từ đó  $a^2 - b^2 = bc$ .

**Ví dụ 8.** Cho tam giác ABC có  $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$ . Chứng minh hệ thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

**Giải.**

Từ giả thiết  $\widehat{A} = 2\widehat{B}$  và  $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ , theo Ví dụ 7 có  $a^2 - b^2 = bc$ ,  $b^2 - c^2 = ac$ .

Từ đó  $a^2 - c^2 = c(a + b)$ .

Trên cung lớn BC lấy điểm E sao cho  $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$ .

Khi đó  $CE = AB = c$  và  $\widehat{ACE} = \widehat{BAC}$  nên  $AE = BC = a$  (h.17-10).

Mặt khác,  $\widehat{ABE} = 3\widehat{ACB} = \widehat{BCE}$  nên  $BE = AE = a$ .

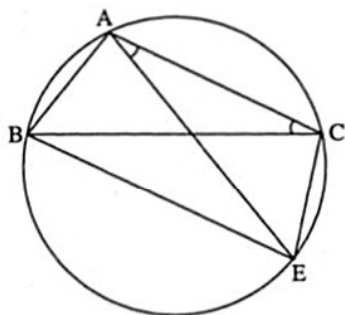
Áp dụng Định lí Ptôlê-mê cho tứ giác nội tiếp ABEC có

$$BC \cdot AE = AB \cdot EC + AC \cdot BE$$

hay  $a^2 = c^2 + ba$ . Từ đó  $a^2 - c^2 = ab$ .

Theo chứng minh trên,  $a^2 - c^2 = c(a + b)$  nên  $ab = c(a + b)$ .

Chia hai vế đẳng thức cuối cùng cho  $abc$ , được  $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$  (đpcm).



Hình 17-10

### III. ĐỊNH LÍ PTÔLÊ-MÊ VÀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỎ

Trong phần này ta sẽ sử dụng Định lí Ptôlê-mê để tính hàm số lượng giác của một số góc nhọn.

**Ví dụ 9.** Tính  $\sin 18^\circ$  và  $\cos 36^\circ$  (không dùng bảng số và máy tính).

**Giải.**

• Dụng tam giác cân ABC có  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72^\circ$ ,

$\widehat{BAC} = 36^\circ$  (h.17-11).

Đặt  $BC = a$ ,  $AB = AC = b$ .

Khi đó  $\widehat{ABC} = 2\widehat{BAC}$  nên theo Ví dụ 7 có

$$b^2 - a^2 = ab \text{ (lưu ý } AB = c = b).$$

$$\text{Từ đó } a^2 + ab - b^2 = 0 \text{ hay } \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai  $t^2 + t - 1 = 0$

$$\text{với } t = \frac{a}{b} > 0 \text{ nhận được } \frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

• Kẻ  $AH \perp BC$ . Khi đó  $BH = HC = \frac{a}{2}$  và  $\widehat{BAH} = 18^\circ$ .

$$\text{Từ đó } \sin 18^\circ = \sin \widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{2b} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Kẻ  $BK \perp AC$ . Khi đó  $AK = AB \cdot \cos \widehat{BAK} = b \cdot \cos 36^\circ$  và

$$KC = BC \cdot \sin \widehat{KBC} = a \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} b \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

$$\text{Vì } AK + KC = AC \text{ nên } b \cos 36^\circ + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{8} b = b.$$

$$\text{Từ đó } \cos 36^\circ = 1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{8} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

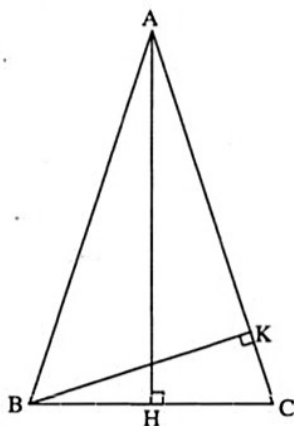
**Ví dụ 10.** Cho  $\alpha, \beta$  là các góc nhọn sao cho  $\alpha + \beta$  là góc nhọn.

Chứng minh công thức  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ .

**Giải.**

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau.

**Bổ đề.** Cho tam giác ABC có góc A nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Khi đó  $a = 2R \sin A$  (Định lý hàm số sin).



Hình 17-11

Thật vậy, vẽ đường kính BD.

Khi đó  $\widehat{BCD} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và  $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$  (h.17-12).

Trong tam giác vuông BDC có  $BC = BD \cdot \sin \widehat{BDC}$  hay  $a = 2R \sin A$ . Bỏ để được chứng minh.

Trên đường tròn tâm O, đường kính  $AC = 2R = 1$  lấy các điểm B, D sao cho  $\widehat{BAC} = \alpha$ ,  $\widehat{CAD} = \beta$ . Khi đó  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$  nên  $\widehat{ACB} = 90^\circ - \alpha$ ,  $\widehat{ACD} = 90^\circ - \beta$  (h.17-13).

Áp dụng Bỏ để có  $AB = 2R \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ . Tương tự,  $AD = \cos \beta$ .

Hơn nữa  $AC = 2R = 1$ ,  $BD = 2R \sin(\alpha + \beta)$   
 $= \sin(\alpha + \beta)$ ;

$BC = 2R \sin \alpha = \sin \alpha$ ,  $CD = 2R \sin \beta = \sin \beta$ .

Áp dụng Định lí Ptolômê cho tứ giác nội tiếp ABCD có

$AC \cdot BD = BC \cdot AD + CD \cdot AB$  hay  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ .

**Lưu ý.** a) Nếu bạn đọc biết thêm rằng  $\sin 90^\circ = 1$  và  $\beta$  là góc tù thì  $\sin \beta = \sin(180^\circ - \beta)$ , bạn sẽ thấy Định lí hàm số sin vẫn đúng đối với tam giác ABC tùy ý (không cần giả thiết các góc của tam giác ABC nhọn).

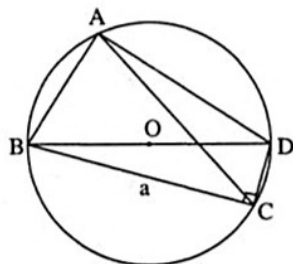
b) Công thức  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$  được gọi là *công thức cộng cung*. Thực ra công thức này đúng với  $\alpha, \beta$  là các góc tùy ý.

Áp dụng các hệ thức

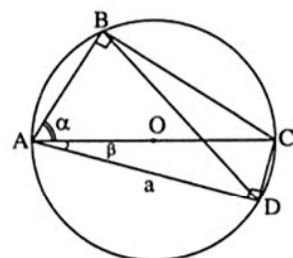
$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ,  $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ ,  $\cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \sin^2(\alpha + \beta)$  nhận được  
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ .

Khi  $\alpha = \beta$ , ta nhận được các công thức nhân đôi

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .



Hình 17-12



Hình 17-13

#### IV. BẤT ĐẲNG THỨC PTÔLÊMÊ

Bất đẳng thức Ptolômê được phát biểu như sau: Trong một tứ giác lồi ABCD, ta có

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$



Thật vậy, lấy điểm E trong tứ giác ABCD sao cho  $\widehat{EBA} = \widehat{DBC}$ ,  $\widehat{EAB} = \widehat{BDC}$  (h.17-14).

Khi đó hai tam giác ABE và DBC đồng dạng nên  $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$ .

Suy ra  $AB \cdot CD = BD \cdot AE$ .

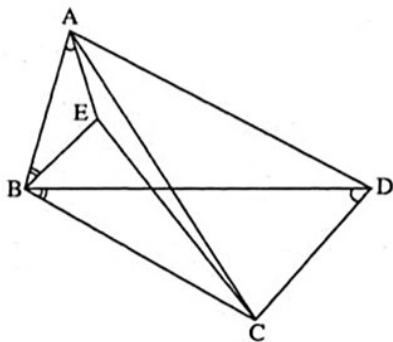
Ta lại có hai tam giác EBC và ABD đồng dạng nên  $\frac{BC}{BD} = \frac{EC}{AD}$ .

Suy ra  $AD \cdot BC = BD \cdot EC$ .

Từ đó  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD(AE + EC)$ .

Suy ra  $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi E nằm trên đoạn AC, nghĩa là khi và chỉ khi  $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$  hay ABCD là tứ giác nội tiếp.



Hình 17-14

## V. ĐẶC TRƯNG CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

Từ Bất đẳng thức Ptôlêmê ta suy ra : Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD nội tiếp được đường tròn là  $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ .

Như vậy  $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$  là một đặc trưng của tứ giác nội tiếp ABCD.

Thực ra, ta có thể tìm thấy nhiều đặc trưng khác của tứ giác nội tiếp. Chúng được cho bởi bài toán sau.

Đối với tứ giác ABCD cho trước, các khẳng định sau là tương đương :

1. Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp.
2.  $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ .
3.  $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ .
4.  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$  (Định lý Ptôlêmê).
5.  $MA \cdot MC = MB \cdot MD$ , trong đó M là giao điểm của AC và BD.
6. H, I, K thẳng hàng, trong đó H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AB, BC, CA (Đường thẳng Simson).

7.  $R_a R_b = R_c R_d$ , trong đó  $R_a, R_b, R_c, R_d$  là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC, BCD, CDA tương ứng.

8. Tứ giác  $O_1 O_2 O_3 O_4$  là hình chữ nhật, trong đó  $O_1, O_2, O_3, O_4$  là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ABC, BCD, CDA tương ứng.

9. Tứ giác  $G_1 G_2 G_3 G_4$  là tứ giác nội tiếp, trong đó  $G_1, G_2, G_3, G_4$  là trọng tâm các tam giác ABD, ABC, BCD, CDA tương ứng.

10. Hai đường phân giác của các góc (AB, CD) và (AD, BC) vuông góc với nhau.

$$11. \frac{CA}{DK} = \frac{AB}{DH} + \frac{BC}{DI}.$$

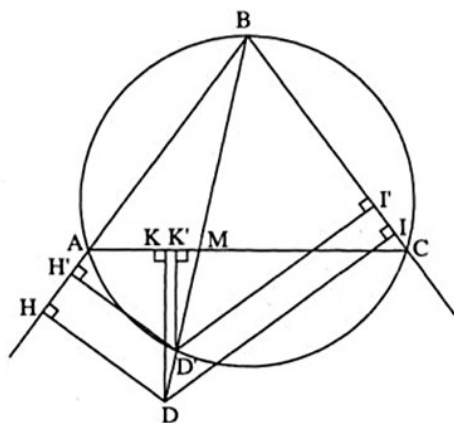
$$12. S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ trong đó } a = AB, b = BC, c = CA, d = DA \text{ và } p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

**Ví dụ 11.** Hãy chứng minh sự tương đương giữa các khẳng định (1) và (11) của bài toán trên.

**Giải.**

Ta biết (1) suy ra (11) theo Ví dụ 17.6.

Để chứng minh (11) suy ra (1), gọi  $D'$  là giao điểm BD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó tứ giác ABCD' là tứ giác nội tiếp nên  $\frac{AB}{D'H'} + \frac{BC}{D'I'} = \frac{CA}{D'K'}$  (\*), trong đó  $H', I', K'$  lần lượt là các chân đường vuông góc hạ từ  $D'$  đến AB, BC, CA (h.17-15).



Hình 17-15

$$\text{Mặt khác, } \frac{D'H'}{DH} = \frac{D'B}{DB} = \frac{D'I'}{DI} \text{ nên } D'H' = \frac{D'B \cdot DH}{DB} \text{ và } D'I' = \frac{D'B \cdot DI}{DB}. (**)$$

$$\text{Thay (**) vào (*) ta có } \frac{AB}{DH} + \frac{BC}{DI} = \frac{CA \cdot D'B}{DB \cdot D'K'}$$

$$\text{mà } \frac{AB}{DH} + \frac{BC}{DI} = \frac{CA}{DK} \text{ (gt) nên } \frac{D'B}{DB} = \frac{D'K'}{DK} = \frac{D'M}{DM}$$

trong đó M là giao điểm của DB với AC. Theo tính chất tỉ lệ thức, ta có

$$\frac{|DB - D'B|}{DB} = \frac{|DM - D'M|}{DM} \Rightarrow \frac{DD'}{DB} = \frac{DD'}{DM};$$

mà  $DB > DM$  nên  $DD' = 0$ , tức là  $D' \equiv D$ .

Do đó ABCD là tứ giác nội tiếp.

**Lưu ý.** Bạn đọc tự chứng minh sự tương đương của các cặp mệnh đề còn lại trong 12 mệnh đề nêu trên.

## VI. VÀI NÉT VỀ LỊCH SỬ

Ptôlêmê là nhà toán học Hy Lạp sống vào thế kỷ thứ hai sau công nguyên, tên đầy đủ của ông là *Claudius Ptolemy*. Tác phẩm chính của ông "Syntaxis Mathematica" viết vào khoảng năm 150 sau Công nguyên chủ yếu viết về Thiên văn học. Quyển I là bảng các dây cung cùng một giải thích ngắn gọn về việc nó được ra đời từ một mệnh đề hình học mà ngày nay ta gọi là *Định lý Ptôlêmê*. Sau đây là một số hệ quả được rút ra từ Định lý Ptôlêmê trong tác phẩm ấy.

1. Nếu a, b là hai dây cung có bán kính đơn vị thì  $s = \frac{a}{2}\sqrt{4-b^2} + \frac{b}{2}\sqrt{4-a^2}$  là dây của tổng hai cung đó.

2. Nếu a, b là hai dây cung có bán kính đơn vị với  $a \geq b$  thì  $s = \frac{a}{2}\sqrt{4-b^2} - \frac{b}{2}\sqrt{4-a^2}$  là dây của hiệu hai cung đó.

3. Nếu t là dây cung của một đường tròn bán kính đơn vị thì  $p = \sqrt{2 - \sqrt{4-t^2}}$  là dây cung của nửa cung đó.

Năm trăm năm sau, nhà toán học Ấn Độ Bramagupta trở lại nghiên cứu vấn đề này. Sau đây là một kết quả rút ra trong tác phẩm "Brahama – Sphuta – Siddhamata" của ông.

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn bán kính R, có  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = a$ ,  $AC = m$ ,  $BD = n$ . Khi đó

$$1) m^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}, \quad n^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd};$$

$$2) mn = ac + bd;$$

$$3) 4R^2 = \frac{(ad + bc)(ab + cd)}{ac + bd}.$$

Bạn đọc tự chứng minh các kết quả trên.

## BÀI TẬP

17.1. Cho tứ giác nội tiếp ABCD có hai đường chéo vuông góc. Gọi  $a, b, c, d$  là độ dài bốn cạnh liên tiếp của tứ giác. Tính diện tích của tứ giác.

17.2. Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kì thuộc cung nhỏ CD. Chứng minh hệ thức  $MA + MC = MB\sqrt{2}$ .

17.3. Cho tam giác nhọn ABC, các đường trung tuyến AM, BN, CP. Gọi R và r theo thứ tự là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh hệ thức

$$AM + BN + CP \leq 4R + r.$$

*Hướng dẫn* : Sử dụng kết quả của Ví dụ 3.

17.4. Cho đường tròn (O), dây BC cố định khác đường kính. Hãy xác định điểm A thuộc cung lớn BC sao cho tổng  $AB + AC$  có giá trị lớn nhất.

17.5. Cho tam giác ABC có R, r là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng  $R \geq 2r$ .

(Sử dụng kết quả của Ví dụ 3 và bất đẳng thức Erdos  $2(x + y + z) \leq 3R$ ).

17.6. Giả sử M là một điểm trên đường tròn nội tiếp lục giác đều  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ . Chứng minh

$$a) MA_1^2 + MA_3^2 + MA_5^2 = MA_2^2 + MA_4^2 + MA_6^2;$$

$$b) MA_1^4 + MA_3^4 + MA_5^4 = MA_2^4 + MA_4^4 + MA_6^4.$$

**17.7.** Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M trên cung nhỏ BC. Gọi H, I, K là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA, AB. Chứng minh các hệ thức

a)  $\frac{1}{MH} = \frac{1}{MI} + \frac{1}{MK}$  ;

b)  $MH^2 + MI^2 + MK^2 = h^2$ , trong đó h là đường cao của tam giác ABC.

**17.8.** Chứng minh các đẳng thức

a)  $\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$  ;

b)  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$ .

**17.9.** Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  trong mặt phẳng toạ độ cho bởi công thức

$$MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

để chứng minh bất đẳng thức Ptôlêmê.

# HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

## Chuyên đề 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

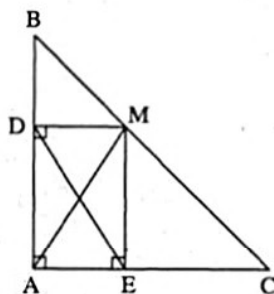
### 1.1. (h.1-5)

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông cân DMB và EMC, ta có :

$$MB^2 = BD^2 + DM^2 = 2MD^2$$

$$MC^2 = CE^2 + ME^2 = 2ME^2$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } MB^2 + MC^2 &= 2(MD^2 + ME^2) \\ &= 2DE^2 = 2AM^2 \quad (\text{vì } MA = DE). \end{aligned}$$



Hình 1-5

### 1.2. Xem hình 1-6.

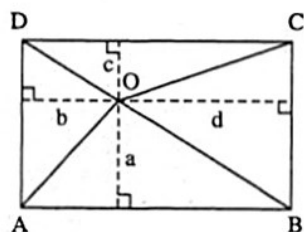
$$\text{Ta có : } OA^2 = a^2 + b^2 ; OC^2 = c^2 + d^2$$

$$\text{Suy ra } OA^2 + OC^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (1)$$

$$OB^2 = a^2 + d^2 ; OD^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{Suy ra } OB^2 + OD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$$



Hình 1-6

### 1.3. (h.1-7)

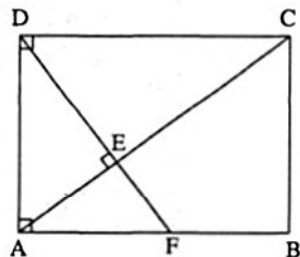
Tam giác ACD vuông tại D, ta có :

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(\text{cm})$$

$$AD \cdot DC = DE \cdot AC$$

$$\Rightarrow DE = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8 (\text{cm});$$

$$AD^2 = AE \cdot AC \Rightarrow AE = \frac{AD^2}{AC} = \frac{6^2}{10} = 3,6 (\text{cm}).$$



Hình 1-7

Suy ra  $EC = AC - AE = 10 - 3,6 = 6,4$  (cm).

Tam giác  $ADF$  vuông tại  $A$ , ta có :

$$AD^2 = DE \cdot DF \Rightarrow DF = \frac{AD^2}{DE} = \frac{6^2}{4,8} = 7,5 \text{ (cm)}$$

Suy ra  $EF = FD - ED = 7,5 - 4,8 = 2,7$  (cm) ;

$$AF^2 = FE \cdot FD = 2,7 \cdot 7,5 = 20,25 \Rightarrow AF = 4,5 \text{ (cm)}.$$

Suy ra  $BF = AB - AF = 8 - 4,5 = 3,5$  (cm).

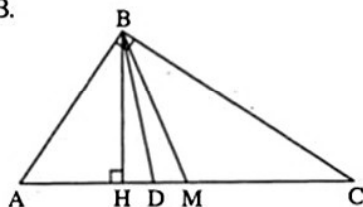
#### 1.4. (h.1-8)

Dễ dàng chứng minh được  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$ .

$$AB^2 = AH \cdot AC \text{ suy ra } AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{9}{5}.$$

$BD$  là phân giác của góc  $B$  nên

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$$



Hình 1-8

$$\text{suy ra } \frac{DA}{CA} = \frac{3}{7}, \text{ do đó } DA = \frac{3}{7}AC = \frac{15}{7}; \quad MA = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } AH < AD < AM, \text{ suy ra } HD = \frac{12}{35}, \quad DM = \frac{5}{14}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = 6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Đặt  $S_{ABC} = S$ ;  $S_{ABH} = S_1$ ;  $S_{BHD} = S_2$ ;  $S_{BMD} = S_3$ ;  $S_{BMC} = S_4$ . Ta có :

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AH}{AC} = \frac{9}{25}, \text{ suy ra } S_1 = \frac{9}{25} \cdot S = \frac{9}{25} \cdot 6 = \frac{54}{25} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Tương tự, } S_2 = \frac{72}{175} \text{ cm}^2; \quad S_3 = \frac{6}{14} \text{ cm}^2; \quad S_4 = 3 \text{ cm}^2.$$

- 1.5. Xét tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM (h.1-9)

AH : AM = 40 : 41, suy ra

$$\frac{AH}{40} = \frac{AM}{41} = k$$

$\Rightarrow AH = 40k, AM = 41k.$

$$MH^2 = AM^2 - AH^2 = (41k)^2 - (40k)^2 = 81k^2 \Rightarrow MH = 9k,$$

do đó  $CH = CM + MH = MA + MH = 50k$

$$\triangle AHB \sim \triangle CHA \text{ (g-g) nên } \frac{AB}{AC} = \frac{HA}{HC} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{4} = \frac{AC}{5} \Rightarrow \frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{25} = \frac{AB^2 + AC^2}{41} = \frac{BC^2}{41} = \frac{(\sqrt{41})^2}{41} = 1.$$

Từ đó tìm được  $AB = 4\text{cm}; AC = 5\text{cm}.$

- 1.6. (h.1-10)

Tứ giác AEHF là hình chữ nhật nên

$AH = EF; OE = OF$  suy ra  $EF = 2OE.$

Ta có  $OE \cdot OF = OE^2;$

$$EF^2 = AH^2 = 4OE^2 = 4OE \cdot OF$$

Tam giác ABC vuông tại A,  $AH \perp BC$  nên

$$AH^2 = BH \cdot HC, \text{ suy ra } BH \cdot HC = 4OE \cdot OF$$

- 1.7. (h.1-11)

Tam giác AMB vuông tại M, ta có

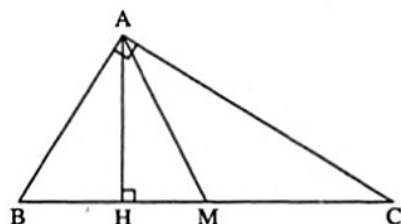
$$AM^2 = AE \cdot AB \quad (1)$$

Tam giác ANC vuông tại N, ta có

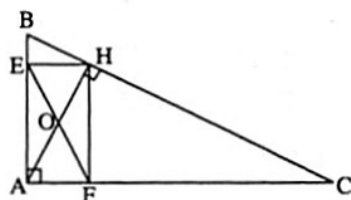
$$AN^2 = AD \cdot AC \quad (2)$$

$\triangle ABD \sim \triangle ACE$  (g-g), ta có

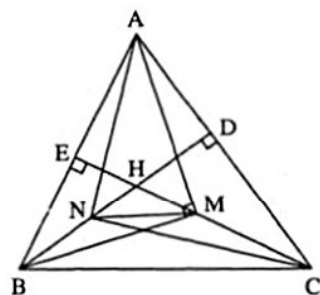
$$AD \cdot AC = AE \cdot AB \quad (3)$$



Hình 1-9



Hình 1-10



Hình 1-11



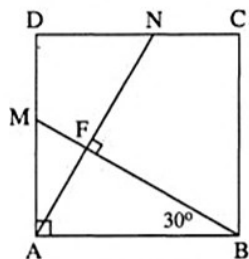
Từ (1), (2) và (3) suy ra  $AM^2 = AN^2$ , do đó  $AM = AN$ . Vậy  $\triangle AMN$  là tam giác cân tại A

1.8. (h.1-12)

a) Tam giác  $AMB$  vuông tại A, có  $\widehat{ABM} = 30^\circ$  nên  $BM = 2AM$ .

$$(2AM)^2 - AM^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow 3AM^2 = a^2, \text{ suy ra } AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 1-12

b)  $\widehat{MAF} = \widehat{ABF} = 30^\circ$  (cùng phụ với  $\widehat{FAB}$ ). Từ đó ta có

$$AF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; \quad MF = \frac{AM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$AF^2 = FM \cdot FB \Rightarrow FB = \frac{AF^2}{MF} = \frac{a^2 \cdot 6}{4 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

1.9. (h.1-13)

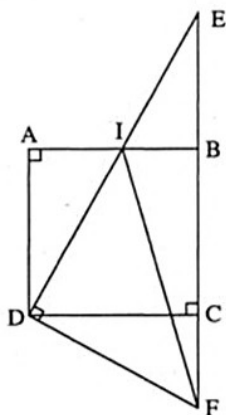
$\triangle AID = \triangle CFD$  (c.g.c) suy ra  $DI = DF$ .

Tam giác  $EDF$  vuông tại D, có  $DC \perp EF$ , suy ra

$$\frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2} = \frac{1}{DC^2}$$

mà  $DF = DI$  nên  $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{DC^2}$  không

đổi, do đó  $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DE^2}$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm I.

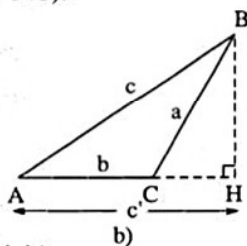
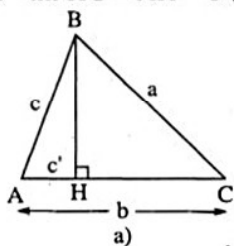


Hình 1-13

1.10. a) Trường hợp  $\widehat{A} < 90^\circ$  (h.1-14).

Nếu  $\widehat{C} < 90^\circ$  thì  $HC = b - AH$  (h.1-14a);

Nếu  $\widehat{C} > 90^\circ$  thì  $HC = AH - b$  (h.1-14b).



Hình 1-14

Cả hai trường hợp, ta đều có :

$$HC^2 = (b - AH)^2. \text{ Do đó}$$

$$BC^2 = BH^2 + CH^2$$

$$= AB^2 - AH^2 + (b - AH)^2$$

$$= AB^2 - AH^2 + b^2 - 2AH.b + AH^2$$

$$= AB^2 + b^2 - 2AH.b$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'.$$

b) Trường hợp  $\widehat{A} > 90^\circ$  (h.1-15)

Ta có :

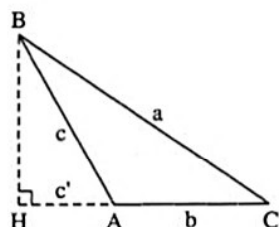
$$a^2 = BH^2 + HC^2$$

$$= (c^2 - HA^2) + (b + AH)^2$$

$$= c^2 - c'^2 + (b + c')^2$$

$$= c^2 - c'^2 + b^2 + c'^2 + 2bc'$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc'.$$



Hình 1-15

**Lưu ý.** Từ bài tập này, ta rút ra nhận xét sau trong tam giác :

a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia trừ đi hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

b) Bình phương của cạnh đối diện với góc tù bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia cộng với hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

1.11. (h.1-16)

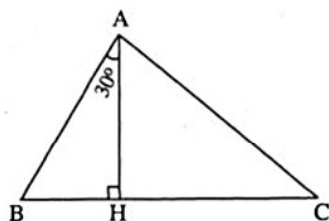
$$\widehat{BAH} = 30^\circ \text{ nên } BH = \frac{1}{2} AB = 4 \text{ (cm)} ;$$

$\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Do đó theo bài 1.10a), ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BH$$

$$AC^2 = 8^2 + BC^2 - 8BC \quad (1)$$

Do  $BC - AC = 2$  nên  $BC = AC + 2$ .



Hình 1-16

Thay vào (1) được

$$AC^2 = 64 + (AC + 2)^2 - 8(AC + 2).$$

Đặt  $AC = x$ , ta có :

$$x^2 = 64 + (x + 2)^2 - 8(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 64 + x^2 + 4x + 4 - 8x - 16$$

$$\Leftrightarrow 4x - 52 = 0 \Leftrightarrow x = 13.$$

do đó  $AC = 13\text{cm}$ ,  $BC = 15\text{cm}$ .

Tam giác  $AHB$  vuông tại  $H$  :  $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$  ;

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 15 = 30\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

**1.12.** Gọi  $S$  là diện tích tam giác  $ABC$ , ta có

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow a = \frac{2S}{h_a} \Rightarrow a^2 = 4S^2 \cdot \frac{1}{h_a^2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } b^2 = 4S^2 \cdot \frac{1}{h_b^2} ; c^2 = 4S^2 \cdot \frac{1}{h_c^2}$$

$$\text{Suy ra } b^2 + c^2 = 4S^2 \cdot \left( \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \right) = 4S^2 \cdot \frac{1}{h_a^2} \quad (2) \quad \left( \text{vì } \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \right)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \triangle ABC$  vuông tại  $A$ .

**1.13.\*** (h.1-17)

Theo đề bài  $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$ , suy ra

$$\frac{BI}{BD} \cdot \frac{CI}{CE} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

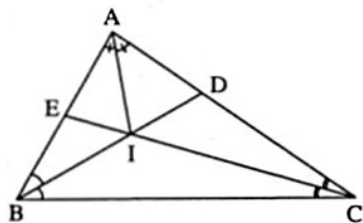
Đặt  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .

Theo tính chất đường phân giác :

$$\frac{IB}{ID} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{BI}{ID + IB} = \frac{AB}{AD + AB} \text{ hay}$$

$$\frac{BI}{BD} = \frac{AB}{AB + AD}$$

(\*)



Hình 1-17

$$\text{Ta lại có } \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{BC+AB} \Rightarrow \frac{AD}{b} = \frac{c}{a+c} \Rightarrow AD = \frac{bc}{a+c}.$$

$$\text{Thay vào (*) được } \frac{BI}{BD} = \frac{c}{c + \frac{bc}{a+c}} = \frac{1}{1 + \frac{b}{c+a}} = \frac{c+a}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\text{Tương tự, } \frac{CI}{CE} = \frac{b+a}{a+b+c}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra  $a^2 = b^2 + c^2$ . Vậy tam giác ABC vuông tại A.

#### 1.14.\* (h.1-18)

a) Gọi O là trung điểm của BC. Ta có

$DE = AH \leq AO$ . Do đó

$\max DE = a \Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông cân tại A.

b) Cách 1.  $S_{AEHD} = AE \cdot AD$

$$\text{Ta có } AH^2 = AE \cdot AB \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB}$$

Hình 1-18

$$\text{Tương tự, } AD = \frac{AH^2}{AC}.$$

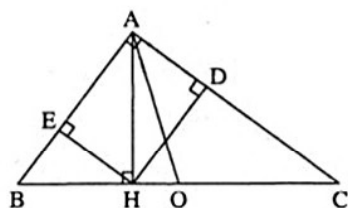
$$\text{Do đó } S_{AEHD} = \frac{AH^4}{AB \cdot AC} = \frac{AH^4}{AH \cdot BC} = \frac{AH^3}{BC} \leq \frac{OA^3}{BC} \quad \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } \max S_{AEHD} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại A.}$$

Cách 2.  $S_{AEHD} = 2S_{AHE}$ . Do đó  $S_{AEHD}$  lớn nhất  $\Leftrightarrow S_{AHE}$  lớn nhất.

$$\text{Ta có } \Delta AHE \sim \Delta CBA \text{ (g-g) nên } \frac{S_{AHE}}{S_{CBA}} = \left( \frac{AH}{BC} \right)^2, \text{ suy ra } S_{AHE} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow$$

$AH$  lớn nhất  $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông cân tại A.



**1.15.\* (h.1-19)**

Đặt  $EA = ED = x$ . Kẻ  $DH \perp AB$ .

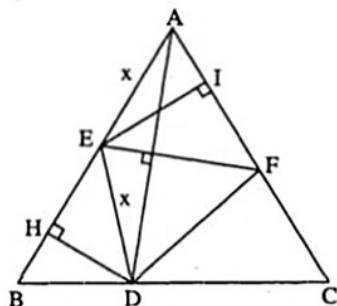
$\triangle BDH$  vuông tại  $H$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ;  $BD = 20\text{cm}$ ,

suy ra  $BH = 10\text{cm}$ ;  $DH = 10\sqrt{3}\text{ cm}$ . Do đó

$AH = 50\text{cm}$ ;  $EH = 50 - x\text{ (cm)}$ .

$\triangle EHD$  vuông tại  $H$ , ta có  $ED^2 = HE^2 + HD^2$

suy ra  $x^2 = (50 - x)^2 + (10\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 28\text{ (cm)}$ .



Hình 1-19

Vậy  $DE = 28\text{cm}$ .

Tương tự tìm được  $DF = 35\text{cm}$ .

Kẻ  $EI \perp AC$  ( $I \in AC$ ).

$\triangle AEI$  vuông tại  $I$  có  $\hat{A} = 60^\circ$ ;  $AE = 28\text{cm}$ ; suy ra  $AI = 14\text{cm}$ ;

$EI = 14\sqrt{3}\text{ cm}$ .

Do đó  $IF = AF - AI = DF - AI = 21\text{cm}$ .

$\triangle EIF$  vuông tại  $I$  nên  $EF^2 = IE^2 + IF^2$ . Từ đó tính được  $EF = 7\sqrt{21}\text{ cm}$ .

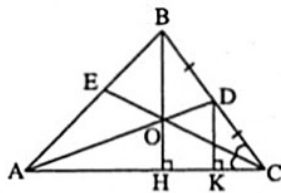
**1.16. (h.1-20) Tam giác vuông BHC có:**

$$CH^2 = BC^2 - BH^2$$

$$= BC^2 - (AB^2 - AH^2)$$

$$= BC^2 - AB^2 + AH^2$$

$$= BC^2 - AB^2 + (CA - CH)^2$$



Hình 1-20

$$\Rightarrow BC^2 + CA^2 - AB^2 = 2CA \cdot CH \Rightarrow CH = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2CA}$$

$$\text{Tương tự, } AH = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA}$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2} \quad (1)$$

Trong tam giác ADC, CO là phân giác nên  $\frac{OD}{OA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BC}{2CA}$  (2)

Từ D kẻ DK vuông góc với CA, ta có BH // DK và  $HK = \frac{HC}{2}$

$\Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{HK}{HA} = \frac{CH}{2HA}$  (3). Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2} = \frac{BC}{CA} \Rightarrow \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2CA^2} = \frac{BC}{BC + CA}.$$

Từ đó suy ra hệ thức cần chứng minh.

## Chuyên đề 2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

2.1. a)  $A = 5\sin^2 \alpha + 6(1 - \sin^2 \alpha)$

$$= 6 - \sin^2 \alpha = 6 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 6 - \frac{9}{25} = \frac{141}{25}.$$

b)  $B = 4(1 - \cos^2 \alpha) - 5\cos^2 \alpha$

$$= 4 - 9\cos^2 \alpha = 4 - 9 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 4 - \frac{144}{25} = \frac{-44}{25}.$$

2.2. a)  $C = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2}.$

b)  $D = \frac{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = -7.$

2.3. (h.2-4)

Vẽ đường cao AH, ta có

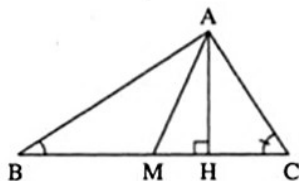
$$\cotg B = \frac{BH}{AH}; \cotg C = \frac{CH}{AH}.$$

Nếu  $\cotg B = 3\cotg C$  thì

$$BH = 3CH \Leftrightarrow BC = 4CH$$

$$\Leftrightarrow MC = 2CH \Leftrightarrow MH = HC$$

$$\Leftrightarrow \triangle AMC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow AM = AC.$$



Hình 2-4

2.4. (h.2-5)

Ta có  $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \geq 1$  nên  $CD \geq BD$ ,

suy ra  $BC \geq 2BD$ .

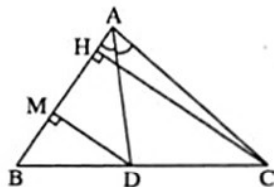
Kẻ  $DM \perp AB$ , ta có

$$\frac{CH}{MD} = \frac{BC}{BD} \geq 2, \text{ suy ra } CH \geq 2MD \quad (1)$$

Trong tam giác ABC, góc A lớn nhất nên  $\widehat{A} \geq 60^\circ$ , suy ra  $\widehat{MAD} \geq 30^\circ$ , do

$$\text{do } \sin \widehat{MAD} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MD}{AD} \geq \frac{1}{2}, \text{ ta có } 2MD \geq AD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $CH \geq AD$ .



Hình 2-5

2.5. (h.2-6)

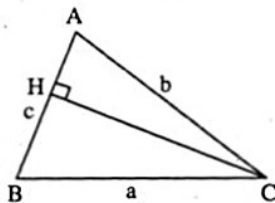
Vẽ  $CH \perp AB$ , ta có :

$$\sin A = \frac{CH}{AC}; \sin B = \frac{CH}{BC}.$$

$$\text{do đó } \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \text{ suy ra } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự, ta được } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



Hình 2-6

2.6. (h.2-7)

a) Ta có :  $\cos A = \frac{AD}{AB}$  ;  $\cos A = \frac{AE}{AC}$ ,

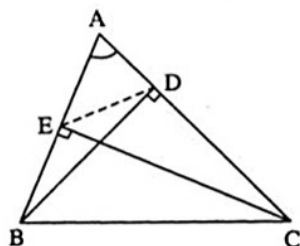
do đó  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ,

Vậy  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  (c-g-c), do đó

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \cos^2 A,$$

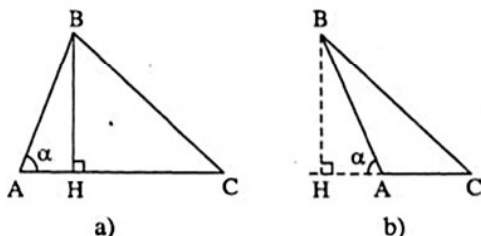
suy ra  $S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A$ .

b)  $S_{BCDE} = S_{ABC} - S_{ADE} = S_{ABC} - S_{ABC} \cdot \cos^2 A$   
 $= S_{ABC}(1 - \cos^2 A) = S_{ABC} \sin^2 A$ .



Hình 2-7

2.7. (h.2-8)



Hình 2-8

Gọi  $\alpha$  là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa hai cạnh AB và AC của tam giác ABC. Kẻ  $BH \perp AC$ , ta có :

$\sin \alpha = \frac{BH}{AB}$ , suy ra  $BH = AB \cdot \sin \alpha$ , suy ra

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \alpha.$$

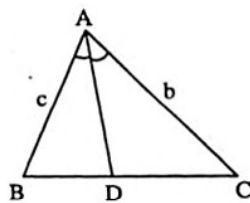
2.8. (h.2-9)

Theo bài 2.7, ta có

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin \widehat{CAD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2}.$$

Vậy  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot \sin \frac{A}{2} (AB + AC) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} (b + c)$



Hình 2-9



Mặt khác  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$ , suy ra

$$\frac{1}{2} AD \sin \frac{A}{2} (b+c) = \frac{1}{2} bc \sin A, \text{ do đó } AD = \frac{bc \cdot \sin A}{(b+c) \cdot \sin \frac{A}{2}}.$$

9. (h.2-10)

a) Theo bài 2.5, ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ suy ra}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{2a}{\sin B + \sin C}$$

do đó  $2a \sin A = a(\sin B + \sin C)$ , suy ra

$$2 \sin A = \sin B + \sin C.$$

b) Trên hình 2-10, ta có

$$\sin A = \frac{h_b}{c}; \sin C = \frac{h_b}{a}; \sin B = \frac{h_c}{a}.$$

Do đó từ kết quả câu a) suy ra

$$\frac{2h_b}{c} = \frac{h_b + h_c}{a} \quad (*)$$

Mặt khác  $2.S_{ABC} = a.h_a = b.h_b = c.h_c$  nên  $c = \frac{a.h_a}{h_c}$ . Thay vào (\*), được :

$$\frac{2.h_b.h_c}{a.h_a} = \frac{h_b + h_c}{a}, \text{ do đó } \frac{2}{h_a} = \frac{h_b + h_c}{h_b.h_c} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

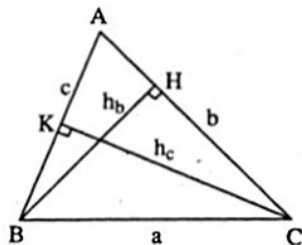
10. (h.2-11)

Gọi G là giao điểm của BN và CM. Tia AG cắt BC tại D thì D là trung điểm của BC, ta có  $BC = 2GD$  và  $AD = 3GD$ .

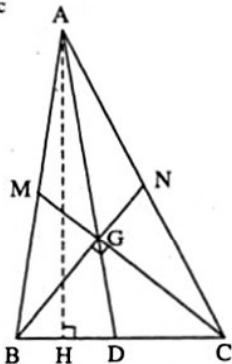
Trong các tam giác vuông AHB và AHC, ta lại có

$$\cotg B = \frac{BH}{AH}; \cotg C = \frac{CH}{AH}. \text{ Do đó}$$

$$\cotg B + \cotg C = \frac{BH + CH}{AH} = \frac{BC}{AH} \geq \frac{BC}{AD} = \frac{2GD}{3GD} = \frac{2}{3}.$$



Hình 2-10



Hình 2-11

### 2.11. (h.2-12)

Kẻ  $AH \perp BC$  thì H nằm giữa B và M. Ta có :

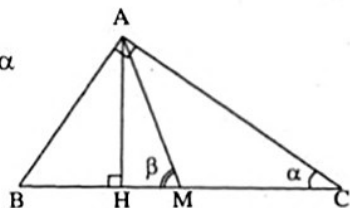
$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{BC}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{AB \cdot AC}{BC^2} = 1 + 2 \cdot \frac{AH \cdot BC}{BC^2}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{AH}{BC} = 1 + \frac{2AH}{2AM} = 1 + \frac{AH}{AM} = 1 + \sin \beta.$$

Vậy  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin \beta.$



Hình 2-12

### 2.12.\* (h.2-13)

Dựng tam giác ABC có  $AB = AC = b$ ,  $BC = a$  và  $\widehat{BAC} = 36^\circ$ . Khi đó  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72^\circ$ . Kẻ phân giác của góc ABC cắt AC tại M, ta có  $\widehat{ABM} = 36^\circ$ , do đó  $\triangle MAB$  cân tại M. Kẻ  $MK \perp AB$  suy ra  $KA = KB = \frac{b}{2}$ .

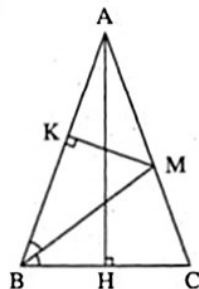
Lại có  $\widehat{BMC} = \widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 72^\circ = \widehat{MCB}$ , do đó  $\triangle MBC$  cân tại B, suy ra  $MA = MB = BC = a$ .

Kẻ  $AH \perp BC$ , ta có  $HB = HC$ .

Xét  $\triangle AKM$  có  $\cos A = \cos 36^\circ = \frac{AK}{AM} = \frac{b}{2a}$ .

Xét  $\triangle ABH$  có  $\cos B = \cos 72^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{2b}$ .

Suy ra  $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{b}{2a} \cdot \frac{a}{2b} = \frac{1}{4}$ .



Hình 2-13

2.13.\* Cách 1. Tương tự ví dụ 3 ta được  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

Từ đó có phương trình  $\sin^2 \alpha - \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$ .

Đặt  $\sin \alpha = t$  ( $t > 0$ ) ta lại có :

$$t^2 \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) t + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 2(\sqrt{3}+1)t + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)(2t-\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ hoặc } t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• Nếu  $t = \frac{1}{2}$  thì  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ , suy ra  $\alpha = 30^\circ$ .

• Nếu  $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$  thì  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , suy ra  $\alpha = 60^\circ$ .

Cách 2. (h.2-14)

Xét tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM. Nếu  $\widehat{B} = \alpha$  hoặc  $\widehat{C} = \alpha$  ta đều có

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{AB \cdot AC}{BC^2} = \frac{AH \cdot BC}{BC^2} = \frac{AH}{BC}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AH}{2AM} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ do đó } \frac{AH}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vì  $\widehat{\sin AMH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  nên  $\widehat{AMH} = 60^\circ$ . Khi đó  $\widehat{ACB} = 30^\circ$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

Nếu H nằm giữa M và C thì  $\widehat{AMC} = 60^\circ$  nên  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ ,  $\widehat{ACB} = 60^\circ$ .

Do vậy  $\alpha = 30^\circ$  hoặc  $\alpha = 60^\circ$ .

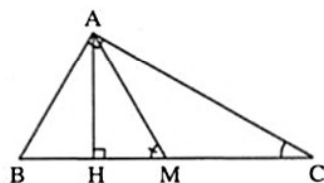
## 2.14. (h.2-15)

a) Ta có :

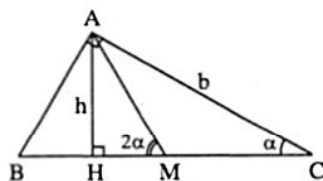
$$\sin \alpha = \sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{h}{b}$$

$$\cos \alpha = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\sin 2\alpha = \sin \widehat{AMB} = \frac{AH}{AM} = \frac{2h}{a}$$



Hình 2-14



Hình 2-15

$$\text{Suy ra } 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{h}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{2h}{a} = \sin 2\alpha.$$

$$\text{Vậy } \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha.$$

$$\text{b) Ta có: } 2\cos^2\alpha = 2\left(\frac{CH}{AC}\right)^2 = \frac{2CH^2}{AC^2};$$

$$\Delta HAC \sim \Delta ABC \text{ (g-g) nên } \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC}, \text{ suy ra } AC^2 = HC \cdot BC.$$

$$\text{Do đó } 2\cos^2\alpha = \frac{2CH^2}{BC \cdot CH} = \frac{2CH}{a}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2\alpha &= 1 + \frac{HM}{AM} = 1 + \frac{2HM}{a} = \frac{a + 2HM}{a} \\ &= \frac{(CM + HM) + (CM + HM)}{a} = \frac{2CH}{a} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha.$$

$$\text{c) Thay } \cos^2\alpha \text{ bởi } 1 - \sin^2\alpha \text{ vào } 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \text{ ta có}$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 - 2\sin^2\alpha, \text{ suy ra } 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

## 2.15.\* (h.2 16)

Đặt  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .

Vẽ phân giác của góc  $BAC$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Kẻ

$BM \perp AD$ ,  $CN \perp AD$ . Ta có:

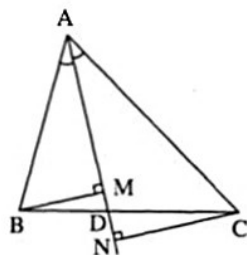
$$\sin \widehat{MAB} = \sin \frac{A}{2} = \frac{BM}{AB}, \text{ suy ra } BM = c \cdot \sin \frac{A}{2}.$$

$$\sin \widehat{NAC} = \sin \frac{A}{2} = \frac{CN}{AC}, \text{ suy ra } CN = b \cdot \sin \frac{A}{2}.$$

$$\text{Do đó } BM + CN = \sin \frac{A}{2} (b + c). \text{ Mà } BM + CN \leq BD + CD = BC = a, \text{ vì thế}$$

$$\sin \frac{A}{2} (b + c) \leq a \quad (1)$$

$$\text{Nhưng } b + c \geq 2\sqrt{bc} \text{ nên } \frac{1}{b + c} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}} \quad (2)$$



Hình 2-16

Từ (1) và (2) suy ra  $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ .

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow b = c$ .

Chứng minh tương tự ta có :

$$\sin \frac{B}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}}, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = c$$

$$\sin \frac{C}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b.$$

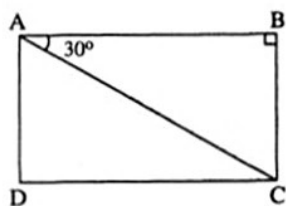
Do vậy  $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ . Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \triangle ABC$  là tam giác đều.

### Chuyên đề 3. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

#### 3.1. (h.3-5)

$$BC = AC \cdot \sin \widehat{BAC} = AC \cdot \sin 30^\circ \\ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ (cm)};$$

$$AB = AC \cdot \cos \widehat{BAC} = AC \cdot \cos 30^\circ \\ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$



Hình 3-5

Chu vi hình chữ nhật bằng :  $10(1 + \sqrt{3})$  cm.

Diện tích hình chữ nhật bằng :  $25\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.

#### 3.2. (h.3-6)

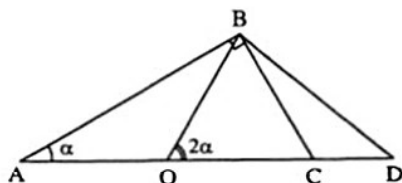
$$\text{Ta có } OB = OA = OC = \frac{a}{2},$$

$$\widehat{BOD} = 2\widehat{BAC} = 2\alpha; \text{ suy ra}$$

$$\cos 2\alpha = \cos \widehat{BOD} = \frac{OB}{OD},$$

$$\text{do đó } OD = \frac{OB}{\cos 2\alpha} = \frac{a}{2 \cos 2\alpha};$$

$$AD = OA + OD = \frac{a}{2} + \frac{a}{2 \cos 2\alpha} = \frac{a(\cos 2\alpha + 1)}{2 \cos 2\alpha}.$$



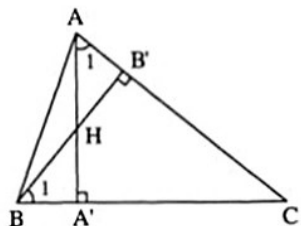
Hình 3-6

3.3. (h.3-7)

Ta có :

$$\operatorname{tg} B = \frac{AA'}{A'B} ; \operatorname{tg} C = \frac{AA'}{A'C}$$

$$\text{Suy ra } \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \frac{AA'^2}{A'B \cdot A'C}$$



Hình 3-7

$$\text{Vì } \frac{AH}{A'H} = k \text{ nên } AH = k \cdot A'H ;$$

$$AA' = AH + A'H = k \cdot A'H + A'H = A'H(k + 1) \quad (1), \text{ suy ra}$$

$$AA'^2 = A'H^2(k + 1)^2.$$

$$\text{Do đó } \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \frac{A'H^2(k + 1)^2}{A'B \cdot A'C} \quad (2)$$

$\triangle A'HB \sim \triangle A'CA$  (g-g), ta có  $A'B \cdot A'C = A'H \cdot AA'$ . Thay vào (2) được

$$\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \frac{A'H^2(k + 1)^2}{A'H \cdot AA'} = \frac{A'H(k + 1)^2}{AA'}. \text{ Thay } AA' \text{ bởi (1) ta có}$$

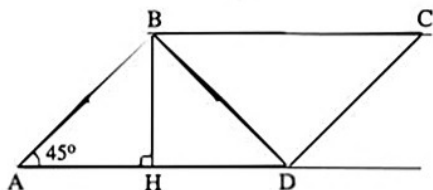
$$\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \frac{A'H(k + 1)^2}{A'H(k + 1)} = 1 + k.$$

3.4. (h.3-8)

Kẻ  $BH \perp AD$ , ta có  $AD = 2AH$ .

$$BH = AB \cdot \sin A = 18 \cdot \sin 45^\circ$$

$$= 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} \text{ (cm).}$$



Hình 3-8

$\triangle AHB$  vuông cân tại H nên  $AH = BH = 9\sqrt{2}$  (cm).

$$AD = 2 \cdot AH = 18\sqrt{2} \text{ (cm).}$$

b) Ta có

$$S_{ABCD} = AD \cdot BH = 18\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2} = 324 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

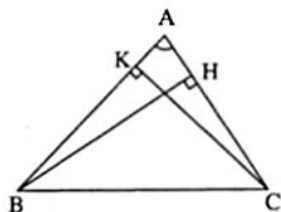
3.5. (h.3-9)

Ta có :

$$BH = AB \cdot \sin A ; CK = AC \cdot \sin A.$$

$$\text{Suy ra } \frac{BH}{CK} = \frac{AB \cdot \sin A}{AC \cdot \sin A} = \frac{AB}{AC} > 1.$$

(vì  $\sin A > 0$ ,  $AB > AC$ ), do đó  $BH > CK$ .



Hình 3-9

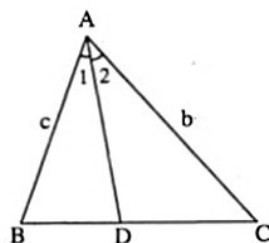
3.6. (h.3-10)

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot AB \sin A_1 = \frac{1}{2} AD \cdot c \cdot \sin \alpha ;$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot AC \sin A_2 = \frac{1}{2} AD \cdot b \sin \alpha.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABD} + S_{ACD} \\ &= \frac{1}{2} AD \cdot \sin \alpha (b + c) \end{aligned} \quad (1)$$



Hình 3-10

$$\text{Mặt khác, } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin 2\alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$AD = \frac{bc \sin 2\alpha}{(b+c) \sin \alpha} = \frac{bc \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{(b+c) \sin \alpha} = \frac{2bc \cos \alpha}{b+c} \quad (\text{vì } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

theo bài 2.14).

3.7. (h.3-11)

Ta có :

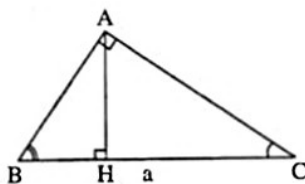
$$AH = AB \sin B ; BH = AB \cos B.$$

$$AB = BC \cos B = a \cos B ; AC = BC \sin B = a \sin B$$

Suy ra  $AH = a \sin B \cos B ;$

$$BH = a \cos^2 B ;$$

$$CH = \frac{AH^2}{BH} = a \sin^2 B.$$

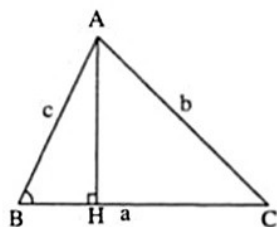


Hình 3-11

3.8. (h.3-12)

Cách 1. Tam giác AHC vuông tại H, ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= AH^2 + HC^2 \\ &= AH^2 + (BC - HB)^2 \\ &= (AH^2 + HB^2) + BC^2 - 2BC \cdot HB \\ &= AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot AB \cdot \cos B \\ &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B. \end{aligned}$$



Hình 3-12

Cách 2. Ta có :

$$AH = AB \sin B = c \sin B; HB = AB \cos B = c \cos B.$$

suy ra  $HC = BC - HB = a - c \cos B$ .

$$\begin{aligned} AC^2 &= AH^2 + HC^2 \\ &= (c \cdot \sin B)^2 + (a - c \cos B)^2 \\ &= c^2 \sin^2 B + a^2 + c^2 \cos^2 B - 2ac \cos B \\ &= a^2 + c^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) - 2ac \cos B \\ &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

3.9. (h.3-13)

Tam giác BCE vuông tại E, ta có

$$\sin \alpha = \sin C = \frac{BE}{BC} = \frac{h}{BC},$$

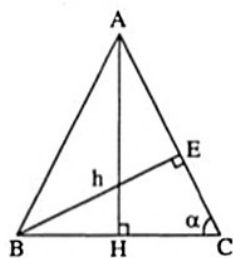
$$\text{suy ra } BC = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Kẻ } AH \perp BC, \text{ ta có } HB = HC = \frac{1}{2} BC = \frac{h}{2 \sin \alpha}.$$

Tam giác AHC vuông tại H, nên

$$AH = HC \cdot \tan C = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h}{2 \cos \alpha}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{h}{2 \cos \alpha} = \frac{h^2}{4 \sin \alpha \cos \alpha}.$$



Hình 3-13



### 3.10.

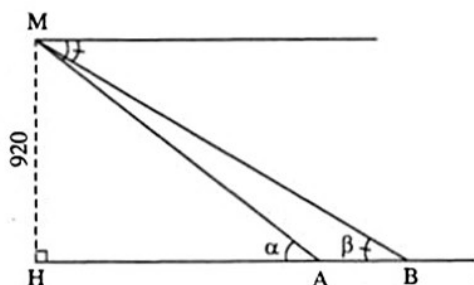
Các dữ kiện đã cho trong đề bài được biểu diễn trên hình 3-14.

Ta có :

$$AH = MH \cot \alpha = 920 \cdot \cot 37^\circ \\ \approx 920 \cdot 1,327 = 1221 \text{ (m)}$$

$$HB = MH \cdot \cot \beta \\ = 920 \cdot \cot 31^\circ \\ \approx 920 \cdot 1,664 = 1531 \text{ (m).}$$

$$\text{Vậy } AB = HB - HA \approx 1531 - 1221 = 310 \text{ (m).}$$



Hình 3-14

### 3.11. (h.3-15)

Kẻ  $KK_1 \perp AC$ , ta có :

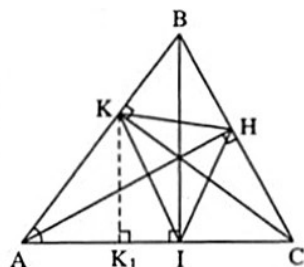
$$\frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} KK_1 \cdot AI}{\frac{1}{2} BI \cdot AC} = \frac{KK_1}{BI} \cdot \frac{AI}{AC} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AI}{AC} \\ = \frac{AK}{AC} \cdot \frac{AI}{AB} = \cos A \cdot \cos A = \cos^2 A.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \cos^2 A.$$

$$\text{Tương tự, } \frac{S_{BKH}}{S_{ABC}} = \cos^2 B ; \frac{S_{CIH}}{S_{ABC}} = \cos^2 C, \text{ suy ra}$$

$$\frac{S_{IKH}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BKH}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CIH}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C.$$

$$\text{Vậy } S_{IKH} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$$



Hình 3-15

### 3.12.\* Ta phải chứng minh :

a) Nếu tam giác ABC cân tại C thì

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2} (\cot^2 A + \cot^2 B) \quad (*)$$

Thật vậy, nếu  $\triangle ABC$  cân tại C thì  $\widehat{A} = \widehat{B}$  nên  $\sin A = \sin B$ ;  $\cos A = \cos B$ ,  $\cotg A = \cotg B$ . Do đó cả hai vế của (\*) đều bằng  $\cotg^2 A$ .

b) Nếu  $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cotg^2 A + \cotg^2 B)$  (\*) thì  $\triangle ABC$  cân tại C.

Thật vậy, ta có  $1 + \cotg^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ , suy ra

$$\cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad 1. \text{ Khi đó, từ (*) suy ra}$$

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} - 2 \right)$$

$$\text{suy ra } \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{2 \sin^2 A \sin^2 B}$$

$$\Rightarrow 4 \sin^2 A \cdot \sin^2 B = (\sin^2 A + \sin^2 B)^2$$

$$\Rightarrow (\sin^2 A - \sin^2 B)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Rightarrow \sin A = \sin B \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại C.}$$

### 3.13.\* (h.3-16)

Đặt  $BE = x > 0$ ,  $\widehat{ABC} = \alpha$  thì  $EC = EA = x$

và  $\widehat{EAB} = \widehat{AED} = \widehat{DEC} = \alpha$ .

Gọi giao điểm của AE và BD là F.

Theo tính chất trọng tâm tam giác

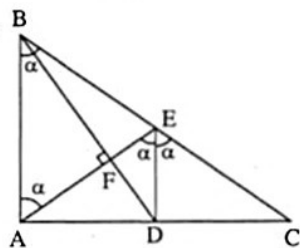
$$\text{suy ra } \frac{EF}{EA} = \frac{1}{3}, \text{ do đó } EF = \frac{1}{3}EA = \frac{x}{3}.$$

$$\text{Lại có } \frac{ED}{EC} = \frac{EF}{ED} = \cos \alpha, \text{ suy ra } ED^2 = EC \cdot EF,$$

$$\text{suy ra } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x \cdot \frac{x}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 \text{ nên } x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ suy ra } BC = 2x = \sqrt{3}$$

$$\text{và } AC^2 = BC^2 - AB^2 = (\sqrt{3})^2 - 1 = 2, \text{ suy ra } AC = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (dvdt).}$$



Hình 3-16

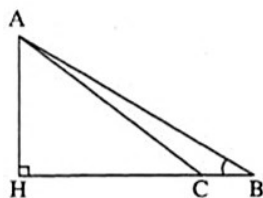
### 3.14.\*

Dựng đường cao AH của tam giác ABC.

- Nếu  $\widehat{C} = 90^\circ$  thì  $\triangle ABC$  vuông tại C. Khi đó

$$\sin 30^\circ = \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{8}, \text{ vô lí.}$$

- Nếu  $\widehat{C} > 90^\circ$  thì H thuộc tia đối của tia CB (h.3-17a)



Hình 3-17a

Xét tam giác AHB, ta có :

$$AH = AB \cdot \sin B = 8 \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ (cm)} ;$$

$$BH = AB \cdot \cos B = 8 \cdot \cos 30^\circ \approx 6,928 \text{ (cm).}$$

Xét tam giác vuông AHC, ta có :

$$\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{4}{7} \approx 0,571, \text{ suy ra } \widehat{ACH} \approx 35^\circ.$$

$$\text{Do đó } CH = AC \cdot \cos \widehat{ACH} = 7 \cdot \cos 35^\circ \approx 5,374 \text{ (cm).}$$

Từ đó ta có :

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ACH} \approx 145^\circ ,$$

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} \approx 5^\circ .$$

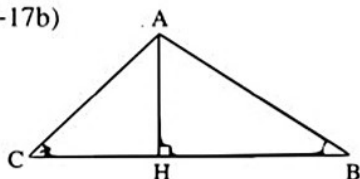
$$BC \approx 6,928 - 5,374 = 1,554 \text{ (cm).}$$

- Nếu  $\widehat{C} < 90^\circ$  thì H nằm giữa C và B (h.3-17b)

Tính như trên ta được :

$$AH = 4\text{cm} ; BH \approx 6,928\text{cm} ;$$

$$\widehat{ACB} \approx 35^\circ ; CH \approx 5,374\text{cm.}$$



Hình 3-17b

Từ đó ta có :

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} \approx 115^\circ ;$$

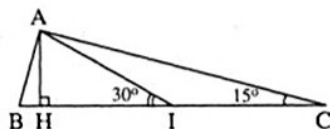
$$BC = BH + CH \approx 6,928 + 5,374$$

$$= 12,302 \text{ (cm).}$$

3.15.\*

a) Trước hết, ta chứng minh  $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ .

Thật vậy, xét tam giác ABC vuông tại A,  $\widehat{C} = 15^\circ$  (h.3-18). Đặt  $BC = 2a$ . Gọi I là trung điểm của BC thì  $IA = IB = IC = a$  và  $\widehat{AIB} = 2\widehat{ACB} = 30^\circ$ .



Hình 3-18

Kẻ  $AH \perp BC$ , ta có  $AH = \frac{1}{2} AI = \frac{a}{2}$ .

$$IH = AI \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ suy ra } CH = CI + IH = \frac{a(2 + \sqrt{3})}{2}.$$

$$\text{Vậy } \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} C = \frac{AH}{CH} = \frac{a}{2} : \frac{a(2 + \sqrt{3})}{2} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Trở lại bài toán.

b) Kẻ  $BH \perp AC$ . Đặt  $HB = x$ ,  $HC = y$ . Từ giả thiết suy ra  $\widehat{A} = 75^\circ$ , do đó  $\widehat{ABH} = 15^\circ$ . Xét hai trường hợp :

• Trường hợp 1 : Điểm H nằm giữa hai điểm A và C (h.3-19)

Ta có

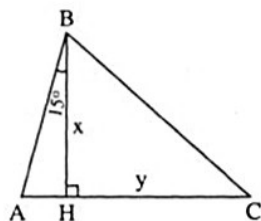
$$AH = BH \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = x(2 - \sqrt{3});$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\ &= x^2(2 - \sqrt{3})^2 + x^2 = 4x^2(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\text{suy ra } AB = x(\sqrt{6} - \sqrt{2}); \quad BC = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Theo giả thiết  $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$  nên

$$\begin{aligned} x(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \sqrt{2}[x(2 - \sqrt{3}) + y] &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}(x + y) &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 &= 0 \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$



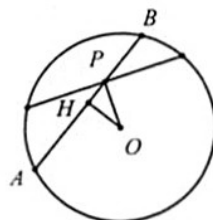
Hình 3-19



4.2. (H.4-18) Dây lớn nhất là đường kính qua P.

Dây ngắn nhất : Qua P kẻ dây AB bất kì, kẻ  $OH \perp AB$  ;

Ta có  $OH \leq OP \Rightarrow OH$  nhỏ nhất khi dây AB vuông góc với OP.



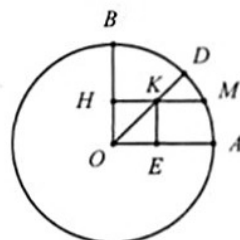
Hình 4-18

4.3. Từ K hạ  $KE \perp OA$  ;  $OA \perp OB$  và  $OA \perp OB$ , OD là phân giác của  $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{DOA} = 45^\circ$

$\Rightarrow$  tam giác OKE là tam giác vuông cân

$\Rightarrow HK \perp KE \perp HO$

$\Rightarrow HK^2 + HM^2 = HO^2 + HM^2 = OM^2$  (không đổi).



Hình 4-19

4.4. Giả sử BC là cạnh lớn nhất (H.4-20).

Dựng đường tròn tâm B bán kính BA cắt cạnh BC tại D ;

Dựng đường tròn tâm C bán kính CD cắt cạnh CA tại E  $\Rightarrow CD = CE$  ;

Dựng đường tròn tâm A bán kính AE cắt cạnh AB tại G  $\Rightarrow AE = AG$  ;

Dựng đường tròn tâm B bán kính BG cắt cạnh BC tại H  $\Rightarrow BH = BG$ .

Qua A dựng đường thẳng vuông góc với EG ;

Qua C dựng đường thẳng vuông góc DE  
hai đường này cắt nhau tại I  $\Rightarrow I$  là giao điểm của ba đường phân giác

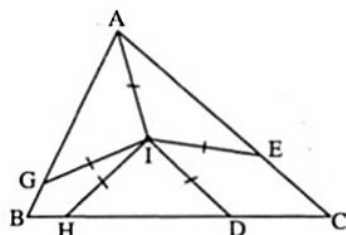
$\Rightarrow ID \perp IE, IE \perp IG, IG \perp IH$ .

Tam giác AEI và tam giác AGI có AI chung,  $AE = AG, IE \perp IG \Rightarrow$  hai tam giác bằng nhau  $\Rightarrow ID \perp IE \perp IG \perp IH$ .

Mặt khác,  $BD = BA$  và  $BH = BG \Rightarrow DAGH$  là hình thang cân

$\Rightarrow AG \perp DH$ , mà  $IG \perp IH \Rightarrow IA \perp ID$

$\Rightarrow \triangle IHD \cong \triangle IEA \cong \triangle IAG$  là ba tam giác cân bằng nhau ; ngoài ra bốn tam giác  $\triangle CDE, \triangle IED, \triangle IGH, \triangle BGH$  là các tam giác cân.



Hình 4-20

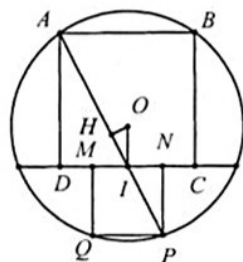
- 4.5. (H.4-21) Nối A với P cắt dây tại trung điểm I, gọi cạnh của hai hình vuông là x và y, ta có

$$\frac{x}{AI} = \frac{y}{PI} \quad \frac{HI}{OI} = k \Rightarrow x - y = k(AI - PI).$$

Tam giác vuông ADI có  $AD^2 + DI^2 = AI^2$

$$\Rightarrow AD^2 + \frac{AD^2}{4} = AI^2$$

$$\Rightarrow \frac{AD^2}{AI^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow k^2 = \frac{4}{5}.$$



Hình 4-21

Mặt khác, OH vuông góc với AP  $\Rightarrow HA = HP \Rightarrow HI = \frac{1}{2}(AI - PI)$

$$\Rightarrow AI - PI = 2HI \Rightarrow x - y = k(AI - PI) \quad 2HI \cdot k = 2k^2 OI = \frac{8}{5}d = 1,6d.$$

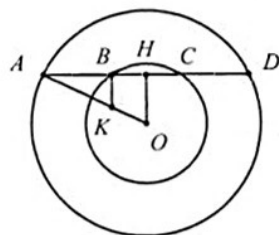
- 4.6. (H.4-22) Giả sử dây AB cắt hai đường tròn đồng tâm thứ tự tại A, B, C, D

thỏa mãn  $AB = BC = CD$ , Kẻ  $OH \perp AD \Rightarrow HA = HD, HB = HC$

$\Rightarrow AB = 2BH$ . Kẻ BK song song với OH, ta có  $BK \perp AB, AK = 2KO$ .

Cách dựng: Trên OA lấy điểm K sao cho

$$AK = \frac{2R}{3}.$$



Hình 4-22

Dựng đường tròn đường kính AK cắt đường tròn nhỏ tại B, nối A với B cắt hai đường tròn tại C, D.

Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

- 4.7. (H.4-23)  $AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}, AC = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

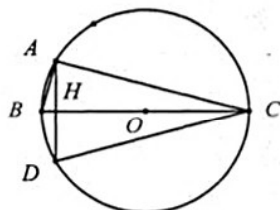
$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = R^2(2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}) = 4R^2.$$

Theo định lý đảo Pytago ta có  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ;

Từ A kẻ  $AH \perp BC$ , kéo dài cắt đường tròn tại D.

Tam giác vuông ABH có  $AC^2 = CH \cdot CB$

$$\Rightarrow R(2 + \sqrt{3}) = 2CH$$



Hình 4-23

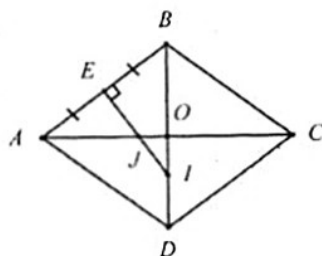
$$\Rightarrow CH = \frac{R(2+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow AH^2 = AC^2 - CH^2 = R^2 - \left(\frac{8+4\sqrt{3}}{4} - \frac{7}{4} - \frac{4\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{R^2}{4}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}R \Rightarrow \widehat{AOH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 75^\circ.$$

- 4.8. (H.4-24) Gọi E là trung điểm của AB, từ E kẻ đường vuông góc với AB, cắt AC tại J và BD tại I; ABCD là hình thoi  $\Rightarrow IA = IB = IC \Rightarrow I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC;

$JA = JB = JD \Rightarrow J$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Ta có  $\triangle ABO \sim \triangle IBE$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{IB} = \frac{BO}{BE} \Rightarrow BO = \frac{AB^2}{2R_1}.$$



Hình 4-24

Tương tự,  $\triangle AEJ \sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{AE}{AJ} = \frac{AO}{AB} \Rightarrow AO = \frac{AB^2}{2R_2}.$

Tam giác OAB vuông  $\Rightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$

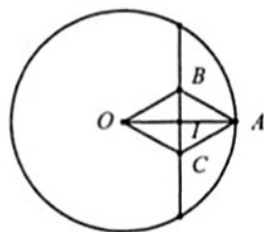
$$\Rightarrow \frac{AB^4}{4R_1^2} + \frac{AB^4}{4R_2^2} = AB^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{4} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) = 1 \Rightarrow AB^2 = \frac{4R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2R_1 R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

- 4.9. (H.4-25) Giả sử không tồn tại hai điểm nào cùng màu mà khoảng cách giữa chúng bằng 1. Đặt đường tròn  $(O, \sqrt{3})$ , A là điểm thuộc đường tròn  $(O, \sqrt{3})$ .

Đặt hình thoi OBAC có cạnh bằng 1, I là trung

điểm OA  $\Rightarrow OI = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OBC$  là tam giác đều



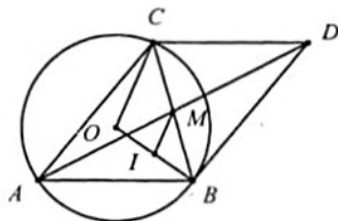
Hình 4-25

có cạnh bằng 1  $\Rightarrow O, B, C$  có khoảng cách giữa hai điểm bằng 1, và các điểm này không cùng màu.



Giả sử O màu đỏ. Khi đó A màu đỏ  $\Rightarrow$  mọi điểm trên đường tròn  $(O, \sqrt{3})$  là đỏ. Ta luôn tìm được hai điểm trên đường tròn thỏa mãn cùng màu (đỏ) và có khoảng cách bằng 1 (vô lí).

- 4.10. (H.4-26) Gọi I là trung điểm của OB, CABD là hình bình hành nên M là trung điểm của BC  $\Rightarrow$  IM là đường trung bình của tam giác BOC



Hình 4-26

$$\Rightarrow IM = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R;$$

Vậy M nằm trên đường tròn tâm I bán kính  $\frac{R}{2}$ .

### Chuyên đề 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

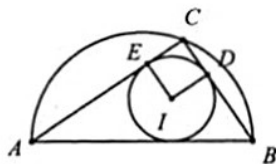
- 5.1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, D và E là các tiếp điểm với cạnh BC và CA ;

C nằm trên nửa đường tròn nên tam giác ABC vuông tại C. Đặt  $CA = b$ ,  $CB = a$ , ta có  $ab = 2R \cdot h$ ,  $a^2 + b^2 = AB^2 = 4R^2$ ;

$$r = CD = CE = \frac{CA + CB - AB}{2} = \frac{a + b - 2R}{2}$$

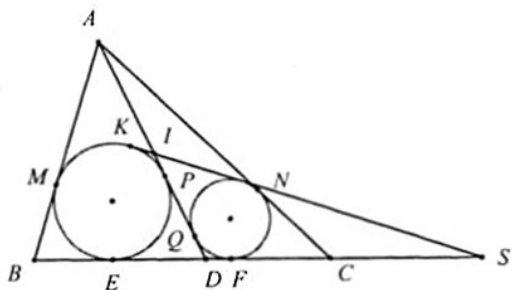
$$\Rightarrow 2r = a + b - 2R = \sqrt{(a+b)^2} - 2R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} - 2R$$

$$\sqrt{4R^2 + 4Rh} - 2R = 2\sqrt{R(R+h)} - 2R \Rightarrow r = \sqrt{R(R+h)} - R.$$



Hình 5-21

- 5.2. (H.5-22) Gọi các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABD$  là E, M và P, các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ADC$  là F, Q và N, tiếp tuyến d với hai đường tròn cắt cạnh BC tại S. Đặt  $SI + ID + DS = 2p$ . Để chứng minh  $SK = SE = p$



Hình 5-22

$$\Rightarrow DE = DP = SE \quad SD = p \quad SD \quad (1).$$

$$\text{Vì } IN = IQ, IQ + DF + FS = p$$

$$\text{nên } IQ = p - SD \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } DP = IQ \text{ và } IP = DQ = DF.$$

$$\text{Ta có } AI = AP - IP \text{ và } AI = AQ - IQ \text{ nên } 2AI = AP + AQ - IP - IQ$$

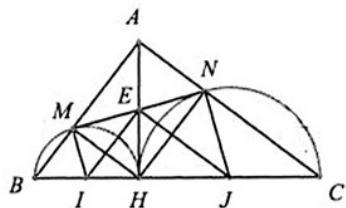
$$= AP + AQ - IP - DP = AP + AQ - DI$$

$$= AP + AQ - EF$$

$$\Rightarrow 2AI = AM + AN - EF = AB - BE + AC - CF \quad EF = AB + AC - BC$$

$$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

- 5.3. (H.5-23) Gọi I, J là trung điểm của BH và HC  $\Rightarrow$  I, J là tâm đường tròn đường kính BH và CH  $\Rightarrow$  tứ giác AMHN là hình chữ nhật.



Hình 5-23

Gọi giao điểm của AH và MN là E, ta có  $EM = EH$ ;

$AH \perp BC \Rightarrow AH$  là tiếp tuyến của đường tròn (I) và (J).

Xét  $\triangle IEM$  và  $\triangle IEH$  có  $EM = EH$ ,  $IM = IH$ ,  $EI$  chung

$\Rightarrow$  hai tam giác bằng nhau  $\Rightarrow \widehat{IME} = 90^\circ$ , tương tự  $\widehat{JNE} = 90^\circ$ .

Vậy MN là tiếp tuyến của hai đường tròn (I) và (J).

5.4. (H.5-24) Gọi O là trung điểm AH  $\Rightarrow$  O là tâm đường tròn đường kính AH

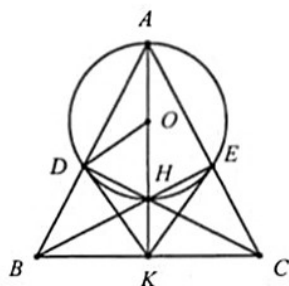
$\Rightarrow \widehat{ADH} = 90^\circ$ ,  $CH \perp AD \Rightarrow C, H, D$  thẳng hàng

$\Rightarrow KD = KB = KC$

$\Rightarrow \widehat{KDH} = \widehat{KCD} = \widehat{HBK}$ ,  $OA = OD = OH \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{OAD}$ ;

$AB = AC \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{HBK} \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{KDH}$ ;

$\widehat{ODK} = \widehat{ODH} + \widehat{KDH} = \widehat{ODH} + \widehat{ODA} = 90^\circ \Rightarrow OD \perp KD$ , do đó KD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH. Tương tự, KE cũng là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.



Hình 5-24

5.5. (H.5-25) Gọi giao điểm của MO và AB là I, ta có  $MO \perp AB$

$\Rightarrow 2CP = CP + PA > AC > AI \Rightarrow CP > \frac{1}{2} AI$ ;

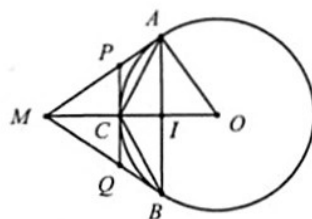
PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow PQ \parallel AB$

$\Rightarrow \frac{MC}{MI} = \frac{CP}{IA} > \frac{1}{2} \cdot \frac{AI}{IA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MC > \frac{1}{2} MI$

$\Rightarrow 2MC > MI = MC + CI$

$\Rightarrow MC > CI$ ,  $S_{MPQ} = MC \cdot CP > CI \cdot \frac{1}{2} AI = \frac{1}{2} S_{ABC}$ .



Hình 5-25

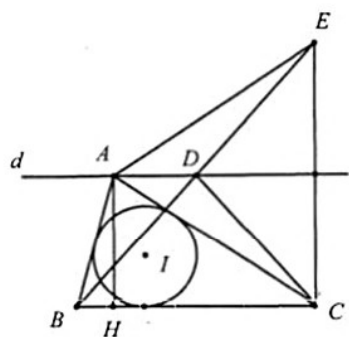
5.6. (H.5-26) Giả sử tam giác ABC có  $BC = a$ ,

$AH = h$ ;  $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$ . Theo giả thiết  $a, h$

không đổi  $\Rightarrow S_{ABC}$  không đổi.

Gọi  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} (AB + BC + CA) \cdot r \\ &= \frac{1}{2} (AB + CA + a) \cdot r \end{aligned}$$



Hình 5-26

$\Rightarrow a.h = (AB + AC + a).r \Rightarrow r = \frac{a.h}{AB + AC + a}$ , do đó  $r$  lớn nhất khi  $AB + AC + a$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow AB + AC$  nhỏ nhất. Kẻ qua A đường thẳng  $d \parallel BC$ . Gọi E là điểm đối xứng của C qua  $d \Rightarrow AE = AC$ . Gọi D là giao điểm của BE và  $d \Rightarrow AB + AC = AB + AE \geq BE \Rightarrow AB + AC$  nhỏ nhất khi  $A \equiv D$ . Vậy tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất là tam giác cân có đáy  $a$ .

**5.7** (H.5-27) I là tâm đường tròn nội tiếp nên AI là tia phân giác của  $\widehat{A}$  và tam giác ADE cân

$$\Rightarrow \widehat{BDI} = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{A} \text{ (góc ngoài tam giác).}$$

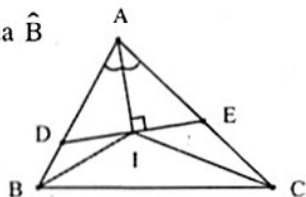
Mặt khác,  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{A}$ , BI là tia phân giác của  $\widehat{B}$

$\Rightarrow \triangle DBI$  đồng dạng với tam giác  $\triangle IBC$

$$\Rightarrow \frac{BD}{IB} = \frac{BI}{BC}.$$

Tương tự,  $\triangle ECI$  đồng dạng với  $\triangle ICB$

$$\Rightarrow \frac{CE}{IC} = \frac{IC}{BC} \Rightarrow \frac{BD}{CE} = \left( \frac{IB}{IC} \right)^2.$$

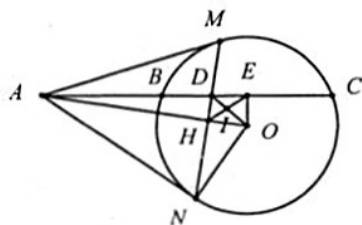


Hình 5-27

**5.8.** (H.5-28) AM và AN là tiếp tuyến

$\Rightarrow MN \perp AO$ ;

$EB = EC \Rightarrow OE \perp BC \Rightarrow$  bốn điểm D, E, O, H nằm trên đường tròn đường kính OD. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OHE \Rightarrow I$  là trung điểm của OD  $\Rightarrow ID = IE$ .



Hình 5-28

Xét hai tam giác vuông  $\triangle AHD$  và  $\triangle AEO$ , có góc nhọn chung nên đồng dạng

$\Rightarrow \frac{AD}{AO} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AD = \frac{AH \cdot AO}{AE} = \frac{AM^2}{AE} = \frac{AB \cdot AC}{AE} \Rightarrow D$  cố định  $\Rightarrow I$  nằm trên đường trung trực của  $DE$  cố định.

**5.9. (H.5-29)** Kẻ  $IP \perp AB$ ,  $ON \perp AC$ ,  $OM \perp AB$  và  $IH \perp AC$

Ta có  $CH = \frac{1}{2}(BC + CA - AB)$ ,  $CN = \frac{1}{2}AC$

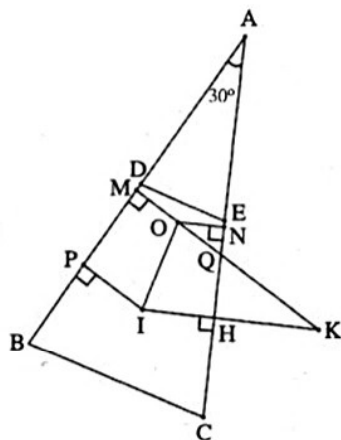
$\Rightarrow HN = CN - CH = \frac{1}{2}(AC - BC - CA + AB)$

$= \frac{1}{2}(AB - BC) = \frac{1}{2}AD$  ;

$BP = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$ ,  $BM = \frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow PM = BM - BP = \frac{1}{2}(AB - AB - BC + AC)$

$= \frac{1}{2}(AC - BC) = \frac{1}{2}AE$  .



Hình 5-29

Kéo dài  $MO$  cắt  $AC$  và  $IH$  tại  $Q$  và  $K \Rightarrow \widehat{OKI} = \widehat{A} = 30^\circ$

$\Rightarrow KI = \frac{MP}{\sin 30^\circ} = 2MP = AE$ ,

$ON \parallel HK \Rightarrow \frac{OQ}{QK} = \frac{NQ}{QH} \Rightarrow \frac{OQ}{OK} = \frac{NQ}{NH}$

$\Rightarrow OK = \frac{NH \cdot OQ}{NQ} = 2NH = AD$

$\Rightarrow \triangle IKO = \triangle EAD \Rightarrow OI = DE$ , Mặt khác,  $OK \perp AD$ ,  $IK \perp AE$  nên  $OI \perp DE$ .

**5.10. (H.5-30)**  $DE$  là tiếp tuyến của đường tròn và song song với  $BC$

$\Rightarrow \triangle ADE$  đồng dạng với  $\triangle ABC$ , gọi  $h_1$  là đường cao của tam giác  $ADE$  kẻ từ  $A$

$$\Rightarrow h_1 = h_a - 2r$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_1}{h_a}\right)^2 = \left(\frac{h_a - 2r}{h_a}\right)^2 = \left(1 - \frac{2r}{h_a}\right)^2; \text{ mặt}$$

$$\text{khác, } S = \frac{ah_a}{2} = pr \Rightarrow \frac{2r}{h_a} = \frac{a}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(1 - \frac{a}{p}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = 1 - \frac{a}{p}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1 - \frac{b}{p}; \quad \sqrt{\frac{S_3}{S}} = 1 - \frac{c}{p}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = 3 - \frac{a+b+c}{p} = 1. \text{ Khi đó:}$$

$$1 = \left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}}\right)^2 \leq 3\left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}\right) \Rightarrow \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} \geq \frac{1}{3},$$

$$\text{dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{p} = 1 - \frac{c}{p}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \text{tam giác ABC đều.}$$

**5.11. (H.5-31)** Nối D với A cắt đường tròn (I) tại N; kẻ  $IJ \perp AC$ ;

$I_A$  là tâm đường tròn bàng tiếp  $\Rightarrow A, I,$

$I_A$  thẳng hàng, hạ  $I_A K \perp AC$ ;

$IJ \parallel I_A K \Rightarrow \frac{IJ}{I_A K} = \frac{AI}{AI_A} = \frac{IN}{I_A D}$

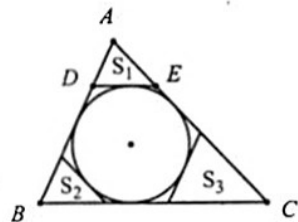
$$\Rightarrow I_A D \parallel IN \Rightarrow H, I, N \text{ thẳng hàng.}$$

Ta có  $BH = \frac{1}{2}(AB + BC - AC),$

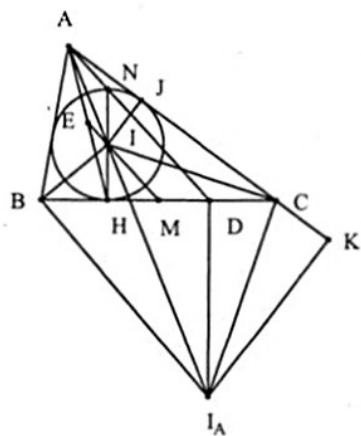
$$\text{mặt khác } CK = CD = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$$

$$\Rightarrow BH = CD \Rightarrow MH = MD. \text{ Lại có}$$

$IN = IH \Rightarrow IM \parallel AD \Rightarrow MI$  đi qua trung điểm của AH.

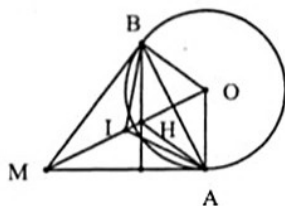


Hình 5-30



Hình 5-31

- 5.12. (H.5-32)  $OA \perp MA, OB \perp MB \Rightarrow$  bốn điểm A, O, B, M nằm trên đường tròn đường kính MO  $\Rightarrow$  tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM là trung điểm MO  $\Rightarrow IA = IO \Rightarrow I$  nằm trên trung trực của OA.

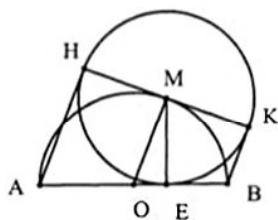


Hình 5-32

Gọi H là trực tâm tam giác ABM  $\Rightarrow$  tứ giác AOBH là hình bình hành ;  $OA = OB \Rightarrow$  AOBH là hình thoi  $\Rightarrow AH = OA \Rightarrow H$  nằm trên đường tròn (A, r).

- 5.13. (H.5-33) Tứ giác ABKH là hình thang vuông ,  $OM \parallel AH, OA = OB$

$\Rightarrow OM$  là đường trung bình  $\Rightarrow MH = MK$   
 $\Rightarrow AH + BK = 2OM = AB$   
 (phần còn lại bạn đọc tự chứng minh).



Hình 5-33

- 5.14. (H.5-34) Gọi ba cạnh  $\triangle ABC$  là a, b, c và  $MH = x, MD = y, ME = z$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$$

$$\Rightarrow 2S_{ABC} = (ax + by + cz)$$

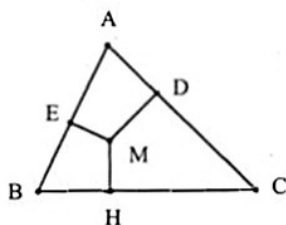
$$\Rightarrow 2S_{ABC} \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) = \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) (ax + by + cz)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + ab \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + bc \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + ca \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq$$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 \Rightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow \text{GTNN của } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \text{ là } \frac{(a + b + c)^2}{2S_{ABC}}, \text{ đạt được khi } MH = MD = ME, \text{ tức}$$

M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Hình 5-34

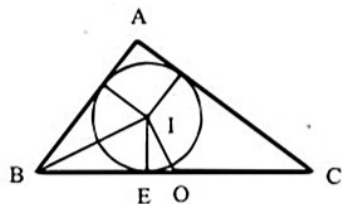
5.15. (H.5-35) Gọi ba cạnh  $BC = a, CA = b, AB = c, IE = r$ ;

Xét trường hợp  $b \geq c$  (còn lại tương tự).

$$BE = p - b \Rightarrow OE = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{b - c}{2},$$

và  $r = p - a$ ; Trong  $\triangle IEO$ :

$$\begin{aligned}OI^2 &= IE^2 + EO^2 = (p - a)^2 + \frac{(b - c)^2}{4} \\&= \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 + a^2 - 2ab - 2ac);\end{aligned}$$



Hình 5-35

Trong  $\triangle BIE$ :  $BI^2 = BE^2 + IE^2 = (p - b)^2 + (p - a)^2 = a^2 - ab$ ;  $\triangle BIO$  vuông tại I:  $BO^2 = BI^2 + IO^2 = a^2 - ab + \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 + a^2 - 2ab - 2ac) = \frac{1}{4}a^2$

$$\Rightarrow 3a = 3b + c. \text{ Đặt } \frac{b}{a} = x, \frac{c}{a} = y \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}. \text{ Giải phương trình tìm được}$$

$$x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}, \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BC}{5} = \frac{CA}{4} = \frac{AB}{3}.$$

### Chuyên đề 6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

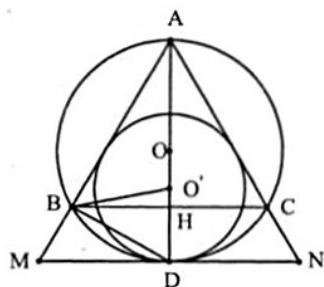
6.1. (H.6-22) Gọi D là tiếp điểm của (O) và (O'), H là giao điểm của AD và BC. Qua D dựng đường thẳng vuông góc với AD, cắt AB, AC kéo dài tại M và N

$\Rightarrow$  đường tròn (O') là đường tròn nội tiếp  $\triangle AMN$ ;  $\triangle ABD$  là tam giác vuông  $\Rightarrow AD = 2R, BD = R$

$$\Rightarrow HD = \frac{R}{2}, O'D = \frac{2R}{3}, BH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow O'H = O'D - HD = \frac{R}{6}$$

$$\Rightarrow O'B^2 = BH^2 + O'H^2 = \frac{3R^2}{4} + \frac{R^2}{36} = \frac{28R^2}{36} \Rightarrow BO' = \frac{R\sqrt{7}}{3}.$$



Hình 6-22



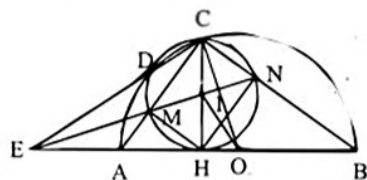
6.2. (H.6-23) CH là đường kính của đường

$$\text{tròn } \left( I; \frac{CH}{2} \right) \Rightarrow \widehat{CMH} = \widehat{CNH} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$  tứ giác CMHN là hình chữ nhật. Gọi O là trung điểm của AB, ta có

$$\widehat{OCB} = \widehat{CBO} = \widehat{ACH} = \widehat{MNH}$$

$\Rightarrow CO \perp MN$ . Dễ thấy  $OI \perp CD$ . Theo giả thiết  $CH \perp AB \Rightarrow I$  là trực tâm tam giác CEO  $\Rightarrow EI \perp OC \Rightarrow E, M, I, N$  thẳng hàng.



Hình 6-23

6.3. (H.6-24) Gọi giao điểm của  $(O_1)$

và  $(O_2)$  là A, của  $(O_2)$  và  $(O_3)$  là

B,  $(O_3)$  và  $(O_1)$  là C, ta có

$O_1O_2 \perp AO$ , theo giả thiết

$$OO_1 \perp OO_2$$

$\Rightarrow OA$  là trung trực của  $O_1O_2$ .

Tương tự,  $OB$  là trung trực của

$O_2O_3$ ,  $OC$  là trung trực  $O_1O_3$

$\Rightarrow (O; R)$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $O_1O_2O_3$ .

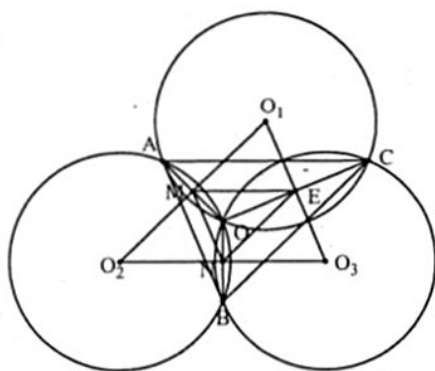
Gọi M là giao điểm của  $O_1O_2$  với AO, N là giao điểm của  $O_2O_3$  với OB và

E là giao điểm của  $O_1O_3$  với OC

$\Rightarrow MN, NE, EM$  là đường trung bình của tam giác  $O_1O_2O_3$ .

Dễ dàng nhận thấy  $AB = 2MN, BC = 2NE, AC = 2ME$

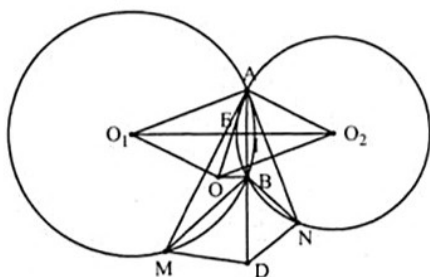
$\Rightarrow \triangle O_1O_2O_3 = \triangle BCA \Rightarrow$  đường tròn qua A, B, C có bán kính R.



Hình 6-24

6.4. Giải tương tự bài 6.3.

- 6.5. Qua  $O_1$  dựng đường vuông góc với  $AM$  và qua  $O_2$  dựng đường vuông góc với  $AN$ , hai đường này cắt nhau tại  $O$ ; gọi  $E$  là giao điểm của  $O_1O_2$  và  $OA$ ;  $O_2A \perp AM \Rightarrow O_2A \parallel O_1O$ , tương tự  $O_1A \parallel O_2O \Rightarrow AO_1OO_2$  là hình bình hành  $\Rightarrow E$  là trung điểm  $AO$ .



Hình 6-25

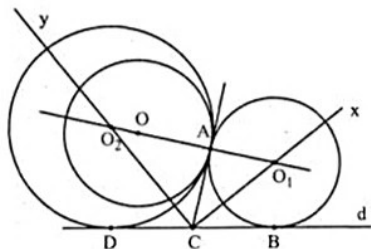
$I$  là trung điểm  $AB \Rightarrow EI$  là đường trung bình của tam giác  $AOB$

$\Rightarrow OB \perp AD$ , mà  $AB = BD \Rightarrow OB$  là đường trung trực của  $AD$ . Do  $OA = OD = OM = ON$  nên  $A, M, N, D$  nằm trên một đường tròn.

- 6.6. *Phân tích:* Giả sử đã dựng được đường tròn  $(O_1)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O; R)$  tại  $A$  và tiếp xúc với  $d$  tại điểm  $B$  (H.6-26)

$\Rightarrow O_1$  nằm trên  $OA$ , tiếp tuyến tại  $A$  với đường tròn  $(O; R)$  cắt  $d$  tại  $C \Rightarrow O_1$  nằm trên đường phân giác của  $\widehat{ACd}$ .

*Cách dựng:* Dựng tiếp tuyến với  $(O; R)$  tại điểm  $A$ , cắt  $d$  tại  $C$ .



Hình 6-26

Dựng đường phân giác của  $\widehat{ACd}$  cắt  $OA$  tại  $O_1$ . Dựng đường tròn  $(O_1; O_1A)$ .

*Chứng minh:* Đường tròn  $(O; R)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_1; O_1A)$  tại  $A$ ,  $O_1$  nằm trên đường phân giác  $\widehat{ACd} \Rightarrow$  đường tròn  $(O_1; O_1A)$  tiếp xúc với  $d$ .

*Biện luận:* Nếu tiếp tuyến tại  $A$  cắt đường thẳng  $d$ , dựng được hai phân giác  $\Rightarrow$  tồn tại hai đường tròn tâm  $O_1, O_2$ .

Nếu tiếp tuyến tại  $A$  song song với  $d$ : bài toán có một nghiệm;  
(bạn đọc tự vẽ hình).

6.7. (H.6-27) Đường tròn tâm I tiếp xúc với  
cung  $\widehat{OA}$ ,  $\widehat{AO'}$ ,  $OO'$

$\Rightarrow O, I, D$  thẳng hàng.

Đặt  $IH = r$ ,  $r > 0 \Rightarrow ID = r \Rightarrow OI = R - r$ ;

$OO' = R \Rightarrow OH = \frac{1}{2}R$ . Áp dụng định lí

Pythagor ta có

$$OI^2 = OH^2 + IH^2 \Rightarrow (R - r)^2 = \frac{R^2}{4} + r^2$$

$$\Rightarrow 2rR = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow r = \frac{3R}{8}.$$

6.8. Gọi ý: Trước hết chứng minh tứ giác OIMJ là hình bình hành và  $ON \perp NM$ , đường thẳng qua O và vuông góc với AB kéo dài cắt MN tại D. Bạn đọc tự chứng minh MN luôn đi qua D cố định.

6.9. (H.6-29)  $HE = AB - R - R'$ ,

đặt  $R + R' = x$ ;

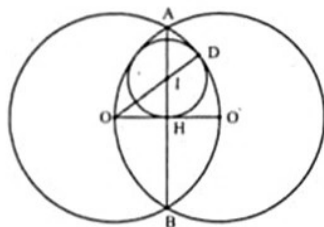
$$S_{HOO'E} = \frac{1}{2}(R + R')(AB - R - R')$$

$$= \frac{1}{2}x(AB - x) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(x + AB - x)^2}{4} = \frac{AB^2}{8}.$$

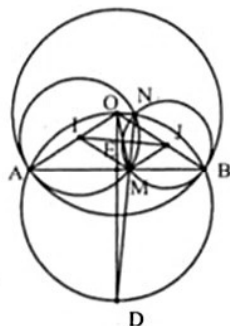
Như vậy,  $S_{HOO'E} \leq \frac{AB^2}{8}$ . Xảy ra dấu bằng  $\Leftrightarrow x = AB - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow$

$R + R' = \frac{1}{2}AB$ . Vậy diện tích hình thang HOO'E lớn nhất khi nó trở thành

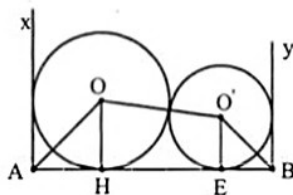
hình chữ nhật có kích thước  $\frac{AB}{2}, \frac{AB}{4}$ .



Hình 6-27



Hình 6-28



Hình 6-29

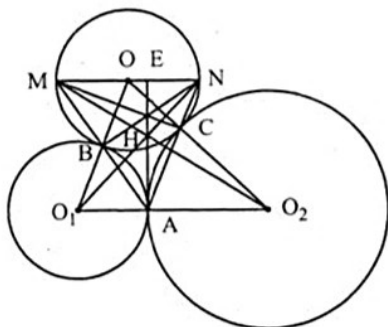
- 6.10.** (H.6-30) Gọi B, C là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O) với  $(O_1)$  và (O) với  $(O_2)$ .

Ta có  $O_1O_2 \parallel MN$

$$\Rightarrow \frac{O_2C}{CO} = \frac{R_2}{R} = \frac{O_2A}{ON}$$

$\Rightarrow N, A, C$  thẳng hàng và

$$\frac{NC}{CA} = \frac{ON}{O_2A} = \frac{R}{R_2}.$$



Hình 6-30

Tương tự, M, B, A thẳng hàng và  $\frac{AB}{BM} = \frac{O_1A}{OM} = \frac{R_1}{R}$ . Đường thẳng AH cắt

MN tại E  $\Rightarrow \frac{EM}{EN} = \frac{O_2A}{O_1A} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{EM}{EN} \cdot \frac{BA}{BM} \cdot \frac{CN}{CA} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1}{R} \cdot \frac{R}{R_2} = 1$ . Theo

định lí Ceva ta có MC, NB, AE đồng quy.

MN là đường kính  $\Rightarrow MC \perp AN, NB \perp AM \Rightarrow AE \perp MN \Rightarrow AE \perp O_1O_2$

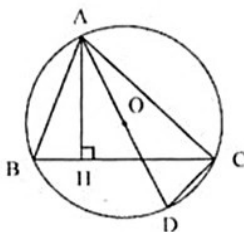
$\Rightarrow AE$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(O_1; R_1)$  và  $(O_2; R_2) \Rightarrow H$  nằm trên đường thẳng cố định.

### Chuyên đề 7. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY CUNG. GÓC NỘI TIẾP

- 7.1.** (h.7-21) Nối A với O cắt đường tròn ngoại tiếp tại D,

ta có  $\widehat{ACD} = 90^\circ$ . Kẻ  $AH \perp BC$ . Xét hai tam giác vuông  $\triangle AHB$  và  $\triangle ACD$ , có  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$  (cùng chắn cung  $\widehat{AC}$ ) nên hai tam giác này đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AH \cdot AD \Rightarrow b \cdot c = 2Rh_a.$$



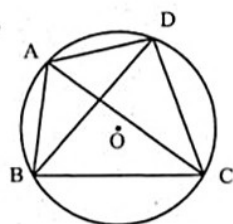
Hình 7-21

Từ  $h_a = \frac{bc}{2R}$ , thay vào công thức  $S = \frac{1}{2} ah_a$  được  $S = \frac{abc}{4R}$ .

7.2. Ta luôn có  $\frac{dt(ABD) + dt(CBD)}{dt(DAB) + dt(BAC)} = 1$ , theo kết quả Bài 1,

$$\begin{aligned}\frac{dt(ABD) + dt(CBD)}{dt(BAC) + dt(DAB)} &= \frac{\frac{AD \cdot AB \cdot BD}{4R} + \frac{CD \cdot CB \cdot BD}{4R}}{\frac{BA \cdot BC \cdot AC}{4R} + \frac{DA \cdot DC \cdot AC}{4R}} \\ &= \frac{BD(AD \cdot AB + CD \cdot CB)}{AC(BA \cdot BC + DA \cdot DC)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{BD(AD \cdot AB + CD \cdot CB)}{AC(BA \cdot BC + DA \cdot DC)} = 1 \Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$



Hình 7-22

7.3. (h.7-23) Gọi các cạnh tam giác là  $a, b, c$ . Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Đường phân giác AD cắt đường tròn ngoại tiếp tại E.

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BCE} \text{ (chắn cung } \widehat{BE}), \widehat{ABD} = \widehat{CEA} \text{ (chắn cung } \widehat{AC})$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \text{ đồng dạng với } \triangle CED \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BD}{ED} = \frac{AD}{CD}$$

$$\Rightarrow BD \cdot CD = AD \cdot ED$$

$$= AD(AE - AD) \Rightarrow AD^2 = AD \cdot AE - BD \cdot CD;$$

$$\triangle ABD \text{ và } \triangle AEC \text{ có } \widehat{BAE} = \widehat{EAC} \text{ và } \widehat{ABD} = \widehat{CEA} \text{ (chắn cung } \widehat{AC})$$

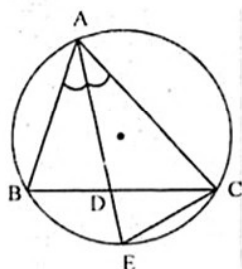
$$\text{nên chúng đồng dạng} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE, \text{ thay vào (1)}$$

$$\text{được } AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD; \quad (2)$$

$$AD \text{ là phân giác} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC + BD} = \frac{AB}{AC + AB}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{AB \cdot BC}{AC + AB} = \frac{ac}{b+c}, DC = \frac{AC \cdot BC}{AC + AB} = \frac{ab}{b+c}, \text{ thay vào (2) được}$$

$$AD^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$



Hình 7-23

7.4.  $AB \perp CD \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 90^\circ$

$\Rightarrow C, O, B$  thẳng hàng và

$D, O', B$  thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{NAB}$  (chấn cung  $\widehat{NB}$ ); (1)

$\widehat{MDB} = \widehat{MAB}$  (chấn cung  $\widehat{BM}$ ) (2)

$\triangle CNB$  và  $\triangle DMB$  là hai tam giác vuông

có  $\widehat{CBN} = \widehat{DMN}$  (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{MDB}$  (3). Từ (1), (2), (3) suy ra  $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ .

Vậy tia  $AB$  là phân giác của  $\widehat{MAN}$ .

7.5. Ta có  $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$  và  $\widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AO'B}$

(h.7-25). Vì  $\widehat{AOB}$ ,  $\widehat{AO'B}$  không đổi,

tam giác  $CBD$  luôn đồng dạng với

tam giác  $OAO'$

$\Rightarrow \frac{BD}{O'A} = \frac{BC}{OA} \leq 2$ , dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow BD$  và  $BC$  là đường kính  $\Leftrightarrow B, O, C$  thẳng hàng và  $D, O', B$  thẳng hàng

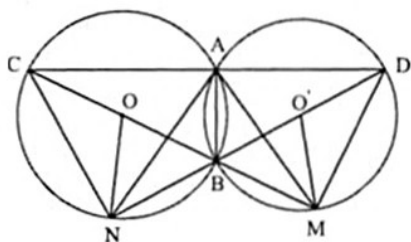
$\Leftrightarrow \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 90^\circ$

$\Leftrightarrow CD \perp AB$ .

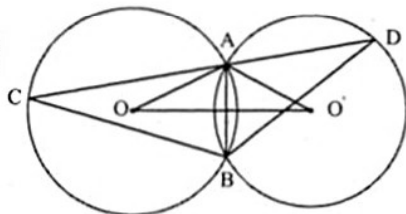
7.6.  $HD. \widehat{AFE} = \frac{1}{2} \widehat{B}$ ,  $\widehat{FAD} = \frac{1}{2} (\widehat{A} + \widehat{C})$

suy ra  $AD \perp FE$  (h.7-26).

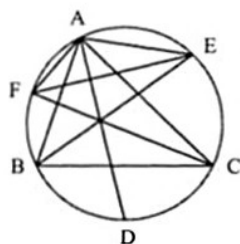
7.7. Tương tự Ví dụ 12.



Hình 7-24

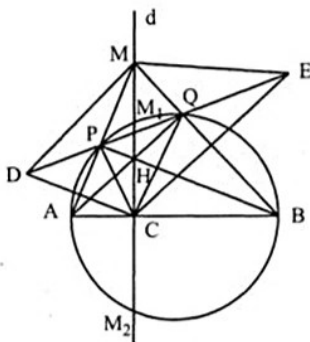


Hình 7-25



Hình 7-26

- 7.8. (h.7-27) C, D đối xứng nhau qua MA  $\Rightarrow MD = MC$ ; C, E đối xứng nhau qua MB  $\Rightarrow ME = MC \Rightarrow MD = ME \Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{MED}$ ;  $\widehat{MDP} = \widehat{MCP}$ ,  $\widehat{MEQ} = \widehat{MCQ}$   
 $\Rightarrow \widehat{MCP} = \widehat{MCQ} \Rightarrow CM$  là phân giác của  $\widehat{PCQ}$ ,  $MC \perp AB \Rightarrow AB$  là đường phân giác góc kề bù với góc PCQ  $\Rightarrow BP \perp MA$ ,  $AQ \perp MB \Rightarrow P, Q$  nằm trên đường tròn đường kính AB  $\Rightarrow$  trực tâm H của tam giác MAB nằm trên đường thẳng d  $\Rightarrow$  trực tâm H cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CPQ.



Hình 7-27

*Giới hạn:* H nằm trên đoạn  $M_1M_2$  (bạn đọc tự chứng minh).

- 7.9. Giải tương tự Ví dụ 16. Kết quả:  $75^\circ$ .

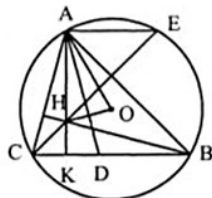
- 7.10. *Hướng dẫn:*  $AC = AD$ ,  $AK \perp BC$

$$\Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{KAD}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{KAD} = \widehat{DAO} = \widehat{OAB}$$

Từ đó dễ dàng tính được  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ ,

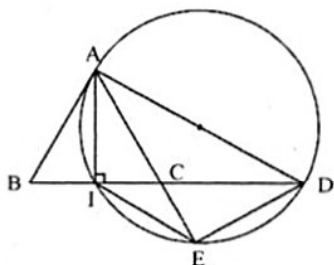
$$\hat{C} = 75^\circ.$$



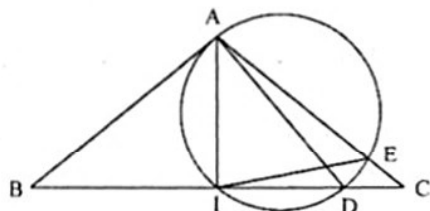
Hình 7-28

## Chuyên đề 8. GÓC TẠO BỞI HAI CÁT TUYẾN HOẶC TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

- 8.1. Trường hợp  $\widehat{A} < 90^\circ$ , tam giác ABC cân,  $IB = IC \Rightarrow AI \perp BC$  (h.8-22)  
 $\Rightarrow$  đường tròn ngoại tiếp tam giác AID nhận AD là đường kính,  $AB \perp AD$   
 $\Rightarrow AB$  là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác AID  $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{ADI}$  (chấn  
 cung  $\widehat{AI}$ ),  $\widehat{BAI} = \widehat{IAC} = \widehat{IDE} \Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{IEA} \Rightarrow$  tam giác AIE cân  $\Rightarrow IA = IE$ .



Hình 8-22



Hình 8-23

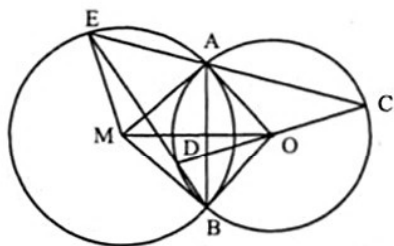
Trường hợp  $\widehat{A} \geq 90^\circ$  (h.8-23).

Hình vẽ thay đổi (bạn đọc tự chứng minh).

- 8.2. (h.8-24) MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O)  $\Rightarrow OA \perp MA \Rightarrow OA$  là  
 tiếp tuyến của đường tròn (M)  $\Rightarrow \widehat{AME} = 2\widehat{ABE} = \widehat{AOD}$  (1)

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác, } \widehat{AOC} &= 180^\circ - 2\widehat{OAC} \\ &= 2(90^\circ - \widehat{OAC}) = 2\widehat{MAE} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{AOC} + \widehat{AOD}$   
 $= 2\widehat{MAE} + \widehat{AME} = 180^\circ \Rightarrow CD$  là  
 đường kính của (O).



Hình 8-24



8.3. (h.8-25) MA là tiếp tuyến  $\Rightarrow \widehat{MAI} = \widehat{ADI} \Rightarrow \triangle MAI$  đồng dạng  $\triangle MDA$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{MI}{MA}, \text{ MB là tiếp tuyến } \Rightarrow$$

$$\widehat{MBI} = \widehat{BDI} \Rightarrow \triangle MBI \sim \triangle MDB.$$

Tương tự,  $\frac{BI}{BD} = \frac{MI}{MB}$ . Do  $MA = MB$  nên

$$\frac{AI}{AD} = \frac{BI}{BD} = \frac{MI}{DE} \text{ (do } AD = DE)$$

$\Rightarrow \triangle AIB$  đồng dạng với  $\triangle EDB \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{MBI} = \widehat{BED} \Rightarrow BI \parallel AD$ .

8.4. (h.8-26) Tiếp tuyến tại C và D cắt nhau tại M  $\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{CBA}$  (chắn cung  $\widehat{AC}$ ) và  $\widehat{MDA} = \widehat{DBA}$  (chắn cung  $\widehat{AD}$ ).

Mặt khác,  $\widehat{AOO'} = \widehat{ACB}$ ,  $\widehat{AO'O} = \widehat{ADB}$  nên  $\widehat{OAO'} = \widehat{CBD}$

$$\Rightarrow \widehat{CMD} = 180^\circ - \widehat{MCA} - \widehat{MDA} \\ = 180^\circ - \widehat{CBD} = 180^\circ - \widehat{OAO'}$$

$\Rightarrow \widehat{CMD}$  không phụ thuộc vào vị trí của C và D.

8.5. Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường tròn tại N (h. 8-27)

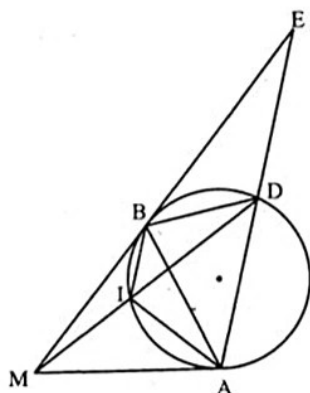
$\Rightarrow AB = NC \Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{AMC}$ . Gọi E là giao điểm của BC và MN ;  $\widehat{CBM} = \widehat{CAM}$ ,

$$\widehat{BEM} = \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{BM} + \widehat{CN})$$

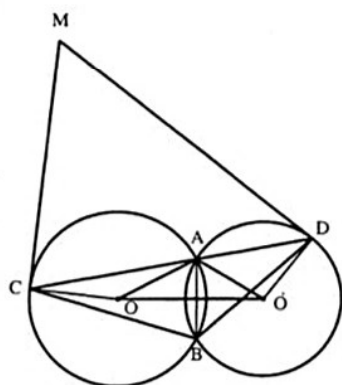
$$= \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{BM} + \widehat{AB}) = \widehat{ACM}$$

$\Rightarrow \triangle BME$  đồng dạng với  $\triangle AMC$ , MH và MD là hai đường cao tương ứng  $\Rightarrow$

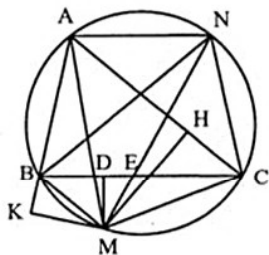
$$\frac{AC}{MH} = \frac{BE}{MD} \quad (1).$$



Hình 8-25



Hình 8-26



Hình 8-27

$\widehat{MCB} = \widehat{MAB}$  và  $\widehat{CMN} = \widehat{AMB}$  ( $\widehat{NC} = \widehat{AB}$ )  $\Rightarrow \Delta CME$  đồng dạng với  $\Delta AMB$ ;  $MD, MK$  là hai đường cao tương ứng  $\Rightarrow \frac{CE}{MD} = \frac{AB}{MK}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{AC}{MH} + \frac{AB}{MK} = \frac{BE}{MD} + \frac{CE}{MD} = \frac{BC}{MD}$ .

- 8.6. (h.8-28)  $CD \parallel MN \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{ENA}$ ,  
 $\widehat{CDA} = \widehat{DNA}$  (chấn cung  $\widehat{AD}$ )

Suy ra  $\widehat{EDC} = \widehat{CDA} \Rightarrow DC$  là phân giác của  $\widehat{EDA}$ .

Tương tự,  $CD$  là phân giác  $\widehat{ECA} \Rightarrow E$  và  $A$  đối xứng nhau qua  $CD \Rightarrow EA \perp CD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$ ;  $CD$  là tiếp tuyến của hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$   $\Rightarrow IC^2 = IB \cdot IA$  và  $ID^2 = IB \cdot IA \Rightarrow$

$IC = ID$ ;  $CD \parallel MN \Rightarrow \frac{ID}{AQ} = \frac{IC}{AP}$ , mà  $IC = ID$  nên  $AQ = AP$ ,  $EA \perp PQ \Rightarrow$

tam giác  $EPQ$  là tam giác cân.

- 8.7. (h.8-29) Gọi  $C$  là giao điểm của  $MA$  với  $(O')$ , ta có  $MD^2 = MA \cdot MC$ .

Chia hai vế cho  $MA \cdot MB$  ta được

$$\frac{MD^2}{MA \cdot MB} = \frac{MA \cdot MC}{MA \cdot MB} = \frac{MC}{MB}.$$

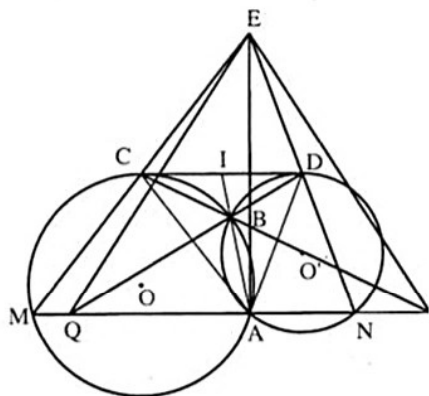
Dễ thấy  $\Delta MBC$  luôn đồng dạng với

$$\Delta OBO' \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{OO'}{OB}.$$

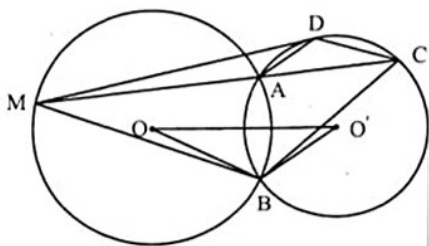
Thay vào

$$\frac{MD^2}{MA \cdot MB} = \frac{OO'}{OB},$$

tức giá trị biểu thức không phụ thuộc vào vị trí của  $M$ .



Hình 8-28



Hình 8-29

8.8. (h.8-30) Qua M kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt AB kéo dài tại D, ta có  $DM = DN \Rightarrow \widehat{DMN} = \widehat{DNM}$  (1);

$$\begin{aligned} \widehat{DME} &= \widehat{DMA} + \widehat{AME} \\ &= \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{MA} + \widehat{AE}) \end{aligned} \quad (2);$$

$$\widehat{DNM} = \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{AM} + \widehat{EB}) \quad (3).$$

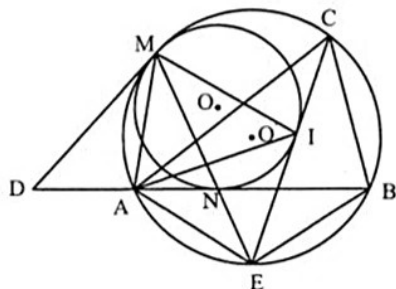
Từ (1), (2), (3) suy ra  $EA = EB$

$\Rightarrow CI$  là phân giác của góc  $\widehat{ACB}$ .

Xét hai tam giác  $\triangle MAE$  và  $\triangle ANE$ , có  $\widehat{BAE} = \widehat{AME}$  nên đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{AE}{NE} \Rightarrow AE^2 = ME \cdot NE. \text{ Tương tự, } \triangle ENI \text{ và } \triangle EIM \text{ đồng dạng}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow EI^2 &= ME \cdot NE \Rightarrow EA = EI \Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{AIE}. \text{ Mặt khác, } \widehat{CAI} = \widehat{AIE} - \widehat{ACE} \\ &= \widehat{IEA} - \widehat{EAB} = \widehat{IAB} \Rightarrow AI \text{ là phân giác góc } \widehat{CAB}. \text{ Vậy } I \text{ là tâm đường tròn} \\ &\text{nội tiếp tam giác } ABC. \end{aligned}$$

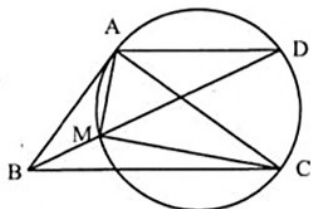


Hình 8-30

8.9. (h.8-31) Đây là trường hợp đặc biệt của Ví dụ 9.

Cách dựng đơn giản:

- Dựng đường tròn qua A, C, tiếp xúc với AB tại A;
- Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường tròn tại D. Đường thẳng BD cắt đường tròn tại M, M là điểm cần xác định (bạn đọc tự chứng minh).

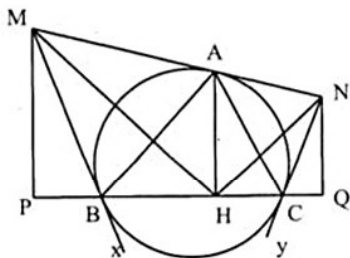


Hình 8-31

8.10. (h.8-32) Hạ  $MP \perp BC$ ,  $NQ \perp BC \Rightarrow MP, AH, NQ$  song với nhau

$$\Rightarrow \widehat{NCQ} = \widehat{yCH} = \widehat{A} = \widehat{MBP} \Rightarrow \triangle MPB \text{ và } \triangle NQC \text{ đồng dạng} \Rightarrow \frac{PB}{CQ} = \frac{MB}{NC} \quad (1).$$

Theo định lí Thalès  $\frac{HP}{HQ} = \frac{MA}{AN}$ , mà



Hình 8-32

$$MA \cdot MB, NA \cdot NC \text{ nên } \frac{HP}{HQ} = \frac{MB}{NC} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{HP}{HQ} = \frac{MB}{NC} = \frac{BP}{CQ} \Rightarrow \frac{MB}{NC} = \frac{HP-BP}{HQ-CQ} = \frac{HB}{HC};$$

$\widehat{MBC} = \widehat{NCB} \Rightarrow \triangle MBH$  và  $\triangle NCH$  đồng dạng  $\Rightarrow \widehat{MHB} = \widehat{NHC}$ . Ta lại có  $AH \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{NHA} \Rightarrow HA$  là đường phân giác của  $\widehat{MHN}$ .

**8.11.** (h.8-33) Xét C trên cung nhỏ  $\widehat{AB}$ , từ giả thiết suy ra  $AB \perp OM$ ;

$$\widehat{AEO} = \widehat{CEO} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{MEF},$$

$$\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AMB};$$

$$\triangle APE \text{ có } \widehat{APE} = 180^\circ - \widehat{MAB} - \widehat{AEO}$$

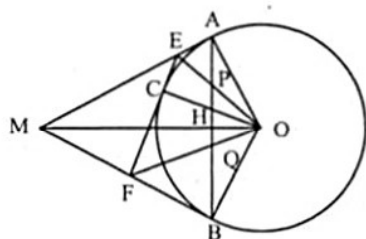
$$\Rightarrow \widehat{APE} = \frac{1}{2}(\widehat{MEF} + \widehat{AMB})$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{EFB} = \widehat{OFE}$$

$$\Rightarrow \widehat{OPQ} = \widehat{OFE} \Rightarrow \triangle OPQ \text{ và } \triangle OFE \text{ đồng dạng} \Rightarrow \frac{PQ}{FE} = \frac{OH}{OC};$$

M cố định  $\Rightarrow A, B$  cố định  $\Rightarrow OH$  không đổi,  $OC$  là bán kính đường tròn

$\Rightarrow \frac{OH}{OC}$  không đổi  $\Rightarrow$  tỉ số  $\frac{PQ}{EF}$  không đổi.



Hình 8-33

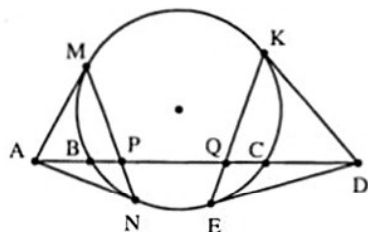
**8.12.** Trước hết ta chứng minh công thức

Stewart trong tam giác:

Cho D là điểm trên cạnh AC của tam giác ABC. Khi đó ta có:

$$AB^2 DC + BC^2 AD - BD^2 AC = AD \cdot CD \cdot CA.$$

Kẻ đường cao AH, giả sử H nằm giữa C và D (trường hợp còn lại chứng minh tương tự).



Hình 8-34

Áp dụng định lí Pytago với các tam giác HAB, HCB, HDB :

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2DC.DH ;$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD^2 + AD^2 + 2AD.DH \Rightarrow BC^2 AD + AB^2.CD \\ &= BD^2(AD + DC) + DC^2 AD + AD^2 DC \\ &= BD^2 AC + AD.DC.CA. \end{aligned}$$

Áp dụng vào bài : (h.8-34)

$$AP^2 MN = AM^2 NP + AN^2 MP - MP.PN.NM, \quad AM = AN$$

$$\Rightarrow AP^2 MN = (AM^2 - MP.PN)MN$$

$$\Rightarrow AP^2 = AM^2 - MP.PN = AB.AC - PB.PC$$

$$\Rightarrow AP^2 = AB.AC - (AP - AB)(AC - AP) = 2AB.AC - AP(AB + AC) + AP^2$$

$$\Rightarrow AP = \frac{2AB.AC}{AB + AC} . \text{ Tương tự, } DQ = \frac{2DB.DC}{DB + DC} \Rightarrow P \text{ và } Q \text{ không phụ thuộc vào đường tròn (O).}$$

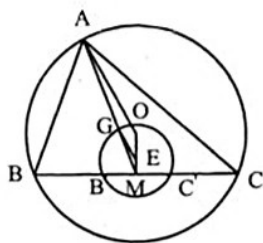
## Chuyên đề 9. CUNG CHỨA GÓC VÀ BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

### 9.1. – Quỹ tích trọng tâm G (h. 9-15)

*Phân thuận :* M là trung điểm của BC, qua G kẻ GE // OA

$$\Rightarrow ME = \frac{1}{3} OM \Rightarrow E \text{ cố định và } EG = \frac{1}{3} OA$$

$$\Rightarrow G \text{ thuộc đường tròn } (E, \frac{1}{3} R).$$



Hình 9-15

*Giới hạn:* Vì A thuộc cung chứa góc  $\alpha \Rightarrow G$  chỉ thuộc cung  $B'C'$ , nằm cùng phía với A đối với BC.

*Phân đảo:* Lấy  $G'$  thuộc cung  $B'C'$  của  $(E, \frac{1}{3} R)$ , trên tia  $MG'$  lấy điểm  $A'$  sao cho  $MA' = 3MG'$

$$\Rightarrow \frac{MA'}{MG'} = \frac{MO}{ME} = 3 \Rightarrow G'E // OA' \text{ và } OA' = 3EG' = R \Rightarrow A' \in (O, R).$$

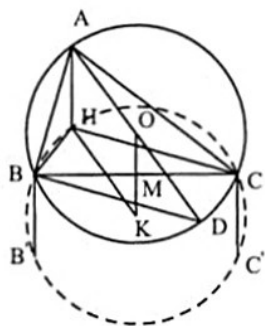
– Quỹ tích trục tâm H (h. 9-16)

*Phần thuận* : Để chứng minh  $AH = 2OM$ , gọi K là điểm đối xứng của O qua BC  $\Rightarrow AH = OK \Rightarrow AHKO$  là hình bình hành  $\Rightarrow KH = OA = R \Rightarrow H$  nằm trên đường tròn (K, R).

*Giới hạn*: H nằm trên cung  $\widehat{B'BC'}$ ,  $BB' \perp BC$ ,  $CC' \perp BC$ .

*Phần đảo*: Lấy  $H' \in \widehat{B'BC'}$ , qua O kẻ đường thẳng song song với  $KH'$  cắt (O) tại  $A' \Rightarrow A'H'KO$  là hình bình hành  $\Rightarrow A'H' = 2OM$ .

Gọi A'D là đường kính của (O)  $\Rightarrow H'BDC$  là hình bình hành  $\Rightarrow H'$  là trực tâm của tam giác A'BC.



Hình 9-16

– Quỹ tích tâm đường tròn nội tiếp I :  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{A}$ , vậy I nằm trên cung chứa góc  $90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{A}$  dựng trên cạnh BC (Bài toán cơ bản, bạn đọc tự giải tiếp).

9.2. Gọi D, E là giao điểm của AM, CM với BC và AB.

Theo giả thiết,  $\widehat{BAM} = \widehat{BCM} \Rightarrow A, E, D, C$  nằm trên một đường tròn (h.9-17)

$\Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{MAC}$ . Tương tự, B, E, D, M nằm trên một đường tròn,  $\widehat{MCA} = \widehat{MDE} = \widehat{MBE} = \widehat{MBA}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AEC} = 90^\circ$

$\Rightarrow M$  là trực tâm tam giác ABC.

9.3. (h.9-18)  $ND \parallel AB$ ,  $OP = OQ$

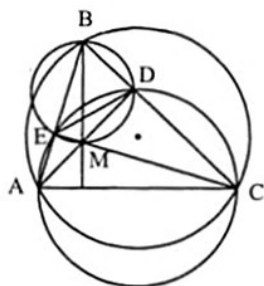
$\Rightarrow IN = ID$ .

Kẻ  $OH \perp CD \Rightarrow HC = HD$

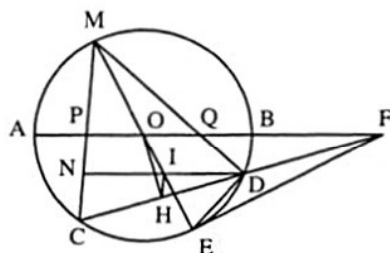
$\Rightarrow IH \parallel MC \Rightarrow \widehat{CME} = \widehat{HIE}$ ,

mà  $\widehat{CME} = \widehat{CDE}$

(chấn cung  $\widehat{CE}$ )



Hình 9-17



Hình 9-18

nên  $\widehat{HIE} = \widehat{HDE} \Rightarrow H, I, D, E$  nằm trên một đường tròn

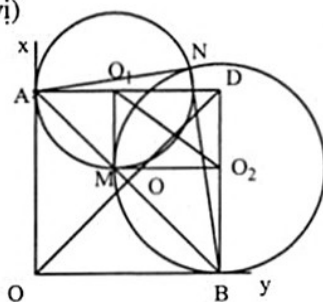
$\Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{OEH}$ , ta có  $\widehat{IDH} = \widehat{OFH}$  (đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{HEO} = \widehat{HFO} \Rightarrow H, O, F, E$  nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{OEF} = \widehat{OHF} = 90^\circ \Rightarrow EF$  là tiếp tuyến của đường tròn (O).

- 9.4. *Hướng dẫn:* N nằm trên đường tròn đường kính AB. Dựng hình vuông OADB.

Ta luôn có  $O_1O_2 = DM \Rightarrow O_1O_2$  nhỏ nhất khi MD nhỏ nhất. Khi đó M là trung điểm của AB (h. 9-19).



Hình 9-19

- 9.5. (h.9-20) Có  $AB \parallel CD$

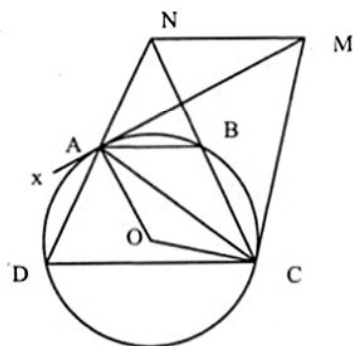
$\Rightarrow AD = BC$ ;

$\widehat{NAM} = \widehat{xAD}$  (đối đỉnh);

$\widehat{xAD} = \widehat{ACD}$  (chắn  $\widehat{AD}$ );

$\widehat{ACD} = \widehat{BAC}$  (so le);

$\widehat{BAC} = \widehat{NCM}$  (chắn  $\widehat{BC}$ ).



Hình 9-20

Vậy  $\widehat{NAM} = \widehat{NCM} \Rightarrow A, N, M, C$  nằm trên một đường tròn

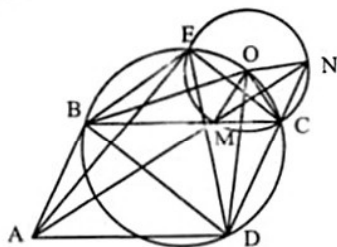
$\Rightarrow \widehat{NMA} = \widehat{NCA} = \widehat{MAB} \Rightarrow MN \parallel AB$ .

- 9.6. (h.9-21) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN, AM là phân giác góc  $\widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MAD}$ ,  $\widehat{BMA} = \widehat{MAD}$  so le  $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BMA} \Rightarrow BA = BM = CD$

$\Rightarrow CM = CN \Rightarrow MN \perp OC$ .

$\widehat{OCD} = \widehat{OCB} + \widehat{BCD} = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{BAD}$ ;

$\widehat{BMO} = 180^\circ - \widehat{OMC} = 180^\circ - \widehat{OCM}$   
 $= 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{BAD}$



Hình 9-21

$$\Rightarrow \Delta BMO = \Delta DCO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{ODC}$$

$\Rightarrow$  bốn điểm O, C, D, B nằm trên một đường tròn.

Từ chứng minh trên suy ra  $OB = OD$ ,  $OC = OE \Rightarrow EB = CD \Rightarrow EC \parallel BD$ .

Mặt khác,  $BA = BE$ ,  $\widehat{ABD} = \widehat{DBE}$ , do đó A và E đối xứng nhau qua BD  
 $\Rightarrow AE \perp BD$ . Vậy  $AE \perp EC$ .

9.7. (h.9-22) Ta có

$$\widehat{AMB} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{BDH}. \text{ Mặt khác, } \widehat{ANB} = \widehat{AHB}$$

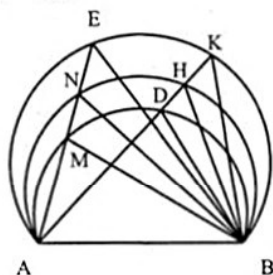
$\Rightarrow \Delta MNB$  và  $\Delta DHB$  đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MN}{DH} = \frac{NB}{HB} \quad (1)$$

Tương tự,  $\Delta NEB$  đồng dạng với  $\Delta HKB$

$$\Rightarrow \frac{NE}{HK} = \frac{NB}{HB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{MN}{DH} = \frac{NE}{HK}$ .



Hình 9-22

### Chuyên đề 10. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP ĐA GIÁC

10.1. Bài này yêu cầu phải xét cả hai trường hợp.

Trường hợp AC, AD cùng về một phía của AB :

ACDB nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{ABD}$ ,

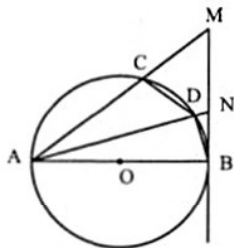
BM là tiếp tuyến  $\Rightarrow \Delta ABN$  là tam giác vuông,

AB là đường kính  $\Rightarrow BD \perp AN$ ,

$\widehat{ABD} = \widehat{ANB} \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{ANB}$

$\Rightarrow$  tứ giác MCDN nội tiếp

Trường hợp AC, AD nằm về hai phía của AB chứng minh tương tự.



Hình 10-27



**10.2.** M, N, A, B nằm trên một đường tròn

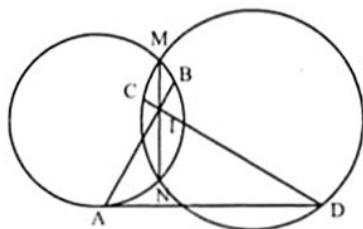
$$\Rightarrow IM.IN = IA.IB \quad (1)$$

M, N, C, D nằm trên một đường tròn

$$\Rightarrow IM.IN = IC.ID \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $IA.IB = IC.ID$

$\Rightarrow$  bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn (h.10-28).



Hình 10-28

**10.3.** (h.10-29) Tứ giác ABNM là tứ giác nội tiếp

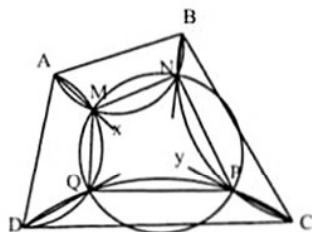
$$\Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{ABN}, \text{ tương tự có}$$

$$\widehat{xMQ} = \widehat{ADQ}, \widehat{yPQ} = \widehat{CDQ}, \widehat{yPN} = \widehat{CBN},$$

$$\widehat{M} + \widehat{P} = \widehat{xMN} + \widehat{xMQ} + \widehat{yPQ} + \widehat{yPN}$$

$$= \widehat{ABN} + \widehat{ADQ} + \widehat{CDQ} + \widehat{CBN}$$

$$= \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ \Rightarrow ABCD \text{ nội tiếp.}$$



Hình 10-29

**10.4.** (h.10-30) AMCQ là tứ giác nội

$$\text{tiếp} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MQC}, \widehat{APB} = \widehat{BPN}$$

$$\text{nội tiếp} \Rightarrow \widehat{BPN} = \widehat{BAN}. \text{ Vì}$$

AD là phân giác

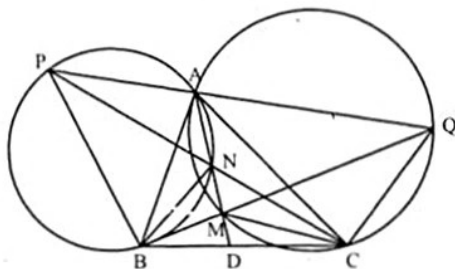
$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$$

$$\Rightarrow \widehat{BPN} = \widehat{MQC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BPC} = \widehat{BQC}$$

$$\Rightarrow PQCB \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{QPC} = \widehat{QBC}, \widehat{APN} = \widehat{ABN}.$$



Hình 10-30

Theo giả thiết  $\widehat{CBM} = \widehat{ABN} \Rightarrow \widehat{CBQ} = \widehat{CPA}$ ,  $\widehat{CPQ} = \widehat{CBQ} \Rightarrow P, A, Q$  thẳng hàng. Các tứ giác AQCM, PQCB nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{AQM} = \widehat{PCB} \Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{BCM}$ .

10.5. P nằm trong tam giác  $\Rightarrow \widehat{APB} > \widehat{ACB}$ .

Dựng góc  $\widehat{ACx} = \widehat{APB}$ , kéo dài AQ cắt Cx

tại E  $\Rightarrow$  E nằm phía ngoài tam giác ABC

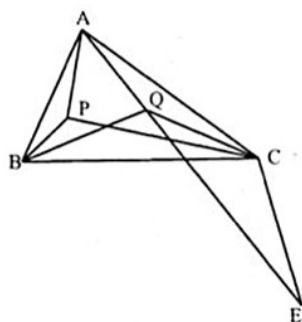
$\Rightarrow \triangle CAE$  đồng dạng với  $\triangle PAB$

$$\Rightarrow \frac{CA}{PA} = \frac{CE}{PB} = \frac{AE}{AB}, \widehat{PAB} = \widehat{QAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAQ} = \widehat{PAC}$$

$\Rightarrow \triangle ABE$  đồng dạng với  $\triangle APC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AE}{AC} = \frac{BE}{PC}, \widehat{AEC} = \widehat{PBA}.$$



Hình 10-31

Từ  $\widehat{PBA} = \widehat{QBC} \Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{QBC} \Rightarrow$  QBEC nội tiếp. Theo định lí Ptolômê

$$\Rightarrow BC \cdot QE = QB \cdot CE + QC \cdot BE \Rightarrow BC(AE - QA) = QB \cdot CE + QC \cdot BE$$

$$\Rightarrow BC \cdot AE = BC \cdot QA + QB \cdot CE + QC \cdot BE (*)$$

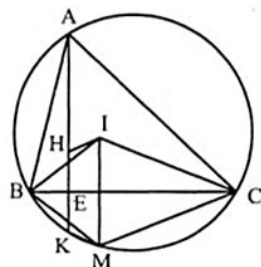
$$\text{Từ các đẳng thức trên} \Rightarrow CE = \frac{AC \cdot PB}{PA}, BE = \frac{AB \cdot PC}{PA}, AE = \frac{AC \cdot AB}{PA}$$

$$\text{Thay vào } (*) \Rightarrow \frac{PA \cdot QA}{AB \cdot AC} + \frac{PB \cdot QB}{AB \cdot BC} + \frac{PC \cdot QC}{BC \cdot AC} = 1.$$

10.6. Hướng dẫn : (h.10-32) Trước hết chứng minh tam giác có góc  $\widehat{A} = 60^\circ$ .

Kéo dài AH cắt cạnh BC tại E và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K  $\Rightarrow HE = EK$ .

Qua I kẻ đường vuông góc với BC kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tại M, tứ giác ABMC nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{BMC} = 120^\circ \Rightarrow$  M đối xứng của I qua BC, do K, H đối xứng nhau qua BC



Hình 10-32

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{IHK} &= \widehat{MKH}, \widehat{AHI} = 180^\circ - \widehat{IHK} \\ &= 180^\circ - \widehat{MKH} = \widehat{ACM} \end{aligned} \quad (1)$$

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và M, I đối xứng nhau qua BC nên

$$\widehat{ACI} = \widehat{ICB} = \widehat{MCB} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } \widehat{AHI} = \frac{3}{2} \widehat{ACB}.$$

10.7. (h.10-33) Qua M kẻ tiếp tuyến chung  $Mx \Rightarrow \widehat{DPM} \quad \widehat{PMx}, \widehat{DBM} \quad \widehat{DMx}$   
 $\Rightarrow \widehat{PMD} \quad \widehat{PMB}$

$\Rightarrow MP$  là phân giác góc  $\widehat{DMB}$ , gọi E là giao điểm MP với  $(O_1) \Rightarrow CE$  là phân giác  $\widehat{BCD}$ .

Gọi I là giao điểm CE và PQ

$$\Rightarrow \widehat{ICM} = \frac{1}{2}(\widehat{sd DM} + \widehat{sd DE})$$

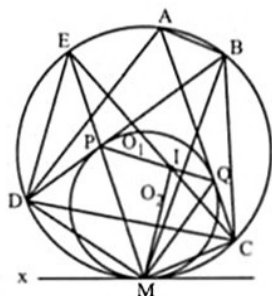
$$= \frac{1}{2}(\widehat{sd DM} + \widehat{sd EB}) = \widehat{DPM} = \widehat{IQM}$$

$\Rightarrow IQCM$  nội tiếp  $\Rightarrow \triangle EIM$  đồng dạng với  $\triangle EPI$

$\Rightarrow EI^2 = EP \cdot EM$ ;  $\triangle DEP$  và  $\triangle MDE$  đồng dạng  $\Rightarrow ED^2 = EP \cdot EM \Rightarrow ED = EI = EB$

$\Rightarrow \widehat{EDI} = \widehat{EID} \Rightarrow I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle BCD$

Tương tự, tâm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ACD$  nằm trên PQ.

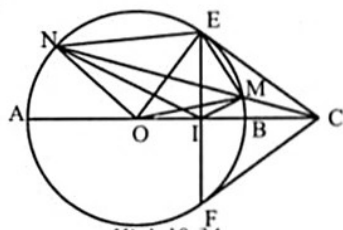


Hình 10-33

10.8. HD (h.10-34) : Chứng minh tứ giác MNOI

nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{OMN}$ ,  $\triangle OMN$  cân

$$\Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{ONM} = \widehat{BIM} \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{BIN}.$$



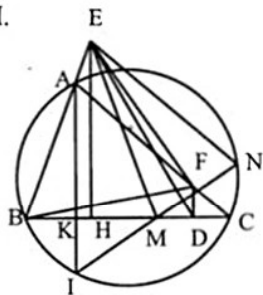
Hình 10-34

10.9. Hướng dẫn: Kẻ  $AK \perp BC$ ,  $HB \perp HM \Rightarrow AK \parallel EH$ .

Dựng N đối xứng của M qua EF, MN cắt AK tại I

$\Rightarrow E$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BMN$

$\Rightarrow$  tứ giác ABIN nội tiếp. Tương tự F là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle MNC \Rightarrow$  năm điểm A, B, C, I, N nằm trên đường tròn  $\Rightarrow I$  nằm trên đường tròn  $(O)$ , I là giao điểm AK với  $(O) \Rightarrow I$  cố định.

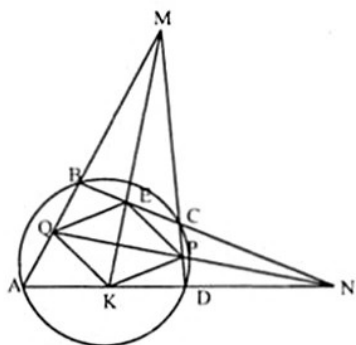


Hình 10-35

**10.10. Hướng dẫn:**  $\widehat{MQN} = \widehat{A} + \widehat{QNA}$  và  
 $\widehat{CPQ} = \widehat{PCN} + \widehat{CNP}$  (h.10-36).

Tứ giác ABCD nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{PCN}$ ,  
 $\widehat{QNA} = \widehat{CNP} \Rightarrow \widehat{MQP} = \widehat{MPQ} \Rightarrow$   
 $\Delta MQP$  cân  $\Rightarrow MK \perp PQ \Rightarrow MK$  là  
 trung trực của  $PQ \Rightarrow EQ = EP, KP = KQ$ .

Tương tự,  $NQ$  là trung trực  $EK \Rightarrow$   
 $PE = PK \Rightarrow QEPK$  là hình thoi.



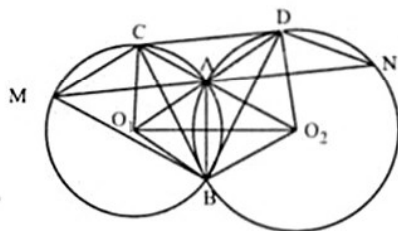
Hình 10-36

**10.11. Hướng dẫn :** (h.10-37)

Chứng minh các tứ giác  $BO_1CO_2$  và  
 $BO_1DO_2$  nội tiếp, suy ra năm điểm B, C,  
 D,  $O_1, O_2$  nằm trên một đường tròn.

Ta có  $\widehat{MAC} = \widehat{ACD} = \widehat{DCO_2} = \widehat{O_2CB}$

$\Rightarrow MC = AB \Rightarrow AC \parallel MB \Rightarrow AM = BC$ , tương tự  $BD = AN \Rightarrow$   
 $BC + BD = MN$ .



Hình 10-37

**10.12. Lấy trên AD điểm I sao cho  $KI = CE$ .**

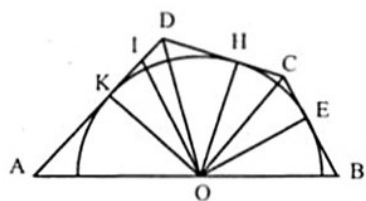
$\Rightarrow \Delta OKI = \Delta OEC, \widehat{A} = 180^\circ - \widehat{C}$ ,

$\widehat{AOK} = 90^\circ - \widehat{A} = 90^\circ - (180^\circ - \widehat{C})$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{C} + 90^\circ - \widehat{COE}$$

$\Rightarrow \widehat{AOK} + \widehat{IOK} = \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{OIA} \Rightarrow \Delta OAI$  cân  $\Rightarrow AO = AI \Rightarrow AK + CE = OA$ .

Tương tự,  $BE + DK = OB \Rightarrow AD + BC = AB$ .



Hình 10-38

**10.13.** (h.10-39) E là giao điểm AC và BD, từ P hạ  $PM \perp AC$ ,  $PN \perp BD$ . Ta có

$$\begin{aligned} 2dt(ABP) &= 2dt(ABE) - 2dt(PAE) - 2dt(PBE) \\ &= (AM + PN)(BN + PM) - (AM + PN)PM - (BN + PM)PN \\ &= AM \cdot BN - PM \cdot PN. \end{aligned}$$

Tương tự,  $2dt(CDP) = CM \cdot DN - PM \cdot PN$

$$\Rightarrow 2[dt(ABP) - dt(CDP)] = AM \cdot BN - CM \cdot DN \quad (*)$$

Giả sử ABCD nội tiếp  $\Rightarrow P$  là tâm đường

tròn ngoại tiếp  $\Rightarrow AM = CM, BN = DN$

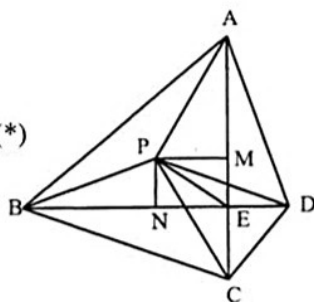
$$\Rightarrow dt(ABP) = dt(CDP).$$

Ngược lại, giả sử  $dt(ABP) = dt(CDP)$ ,

theo  $(*) \Rightarrow AM \cdot BN = CM \cdot DN$ .

Nếu  $PA \neq PC \Rightarrow PA > PC \Rightarrow AM > CM, BN > DN \Rightarrow AM \cdot BN > CM \cdot DN$

mâu thuẫn  $\Rightarrow PA = PC \Rightarrow P$  cách đều A, B, C, D  $\Rightarrow ABCD$  nội tiếp.



Hình 10-39

**10.14.** Gọi K là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BIN$  với cạnh BC.

$$\Rightarrow CM \cdot CA = CI \cdot CN, CI \cdot CN = CK \cdot CB$$

$$\Rightarrow CM \cdot CA = CK \cdot CB \Rightarrow AMKB \text{ nội tiếp,}$$

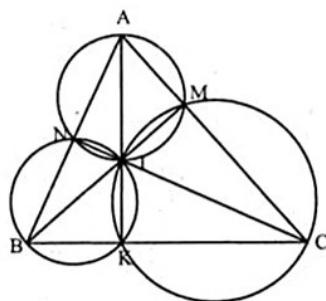
$$\Rightarrow CMIK \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow CM \cdot CA = CK \cdot BC \Rightarrow BN \cdot BA = BK \cdot BC$$

$$\Rightarrow CM \cdot CA + BN \cdot BA$$

$$= BC(CK + BK) = BC^2$$

$$\Rightarrow BN \cdot BA + CM \cdot CA \text{ không đổi.}$$



Hình 10-40

$$\begin{aligned} \text{Giả sử } AMIN \text{ và } BNMC \text{ nội tiếp} &\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{CNI}, \widehat{BMC} = \widehat{CNI} \Rightarrow \\ \widehat{BMC} &= \widehat{AMB} \text{ mà } \widehat{BMC} + \widehat{AMB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \\ \widehat{CNI} &= 90^\circ \end{aligned}$$

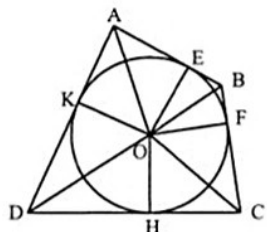
$\Rightarrow I$  là trực tâm của tam giác ABC.

10.15. Hướng dẫn (h.10-11). Chứng minh

$$\widehat{AOB} + \widehat{COD} = \widehat{AOD} + \widehat{BOC},$$

$$\text{mà } \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOA} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^\circ.$$



Hình 10-41

10.16. Giả sử  $\hat{B} = \hat{D}$ , M, N, P, Q là tiếp

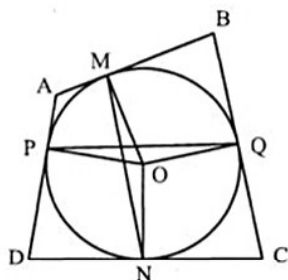
$$\text{điểm} \Rightarrow \widehat{MOQ} + \hat{B} = \widehat{NOP} + \hat{D} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MOQ} = \widehat{NOP}$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{POQ} \Rightarrow \triangle OMN = \triangle OPQ \Rightarrow MN = PQ.$$

$$\text{Ngược lại: } MN = PQ \Rightarrow \triangle OMN = \triangle OPQ \Rightarrow$$

$$\widehat{MON} = \widehat{POQ} \Rightarrow \widehat{MOQ} = \widehat{NOP} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}.$$

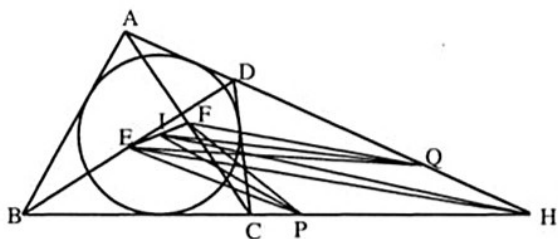


Hình 10-42

10.17. a) Nếu  $AD \parallel BC$ ,

trường hợp này đơn giản các bạn có thể tự chứng minh.

b) Giả sử AD và BC cắt nhau tại H. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD, E, F là trung điểm của BD và AC.



Hình 10-43

$\Rightarrow I$  cách đều các cạnh của tứ giác. Lấy điểm P trên BH sao cho  $PH = BC$ , Q trên AH sao cho  $QH = AD$ , ABCD ngoại tiếp đường tròn  $\Rightarrow AB + CD = BC + DA$ ;

$$S_{EAB} + S_{ECD} = S_{EBC} + S_{EAD} = \frac{1}{2} S_{ABCD},$$

$$S_{FAB} + S_{FCD} = S_{FBC} + S_{FAD} = \frac{1}{2} S_{ABCD},$$

$$S_{IAB} + S_{ICD} = S_{IBC} + S_{IAD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow S_{IPH} + S_{IQH} = S_{EPH} + S_{EQH}$$

$\Rightarrow S_{IPHQ} = S_{EPHQ} \Rightarrow S_{IPQ} = S_{EPQ} \Rightarrow EI \parallel PQ$ . Tương tự có  $IF \parallel PQ$ . Vậy I, E, F thẳng hàng.

- 10.18. (h.10-44) H là trực tâm  $\Delta AMB \Rightarrow AE \perp MB, BF \perp MA$ .

Theo giả thiết  $HD \perp MI$  nên

M, F, H, D, E nằm trên một đường tròn đường kính MH  $\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{MHE} = \widehat{MDE}$ .

Tứ giác AFEB là tứ giác nội tiếp

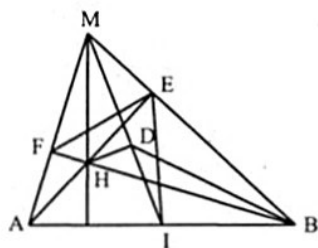
$$\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{EBA} \Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{EBA}$$

$\Rightarrow$  tứ giác IDEB là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{IEB}, \Delta AEB \text{ là tam giác vuông, } I \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow \widehat{IEB} = \widehat{EBI}$$

$$\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{EBI} \Rightarrow \Delta IBM \text{ đồng dạng với } \Delta IDB$$

$$\Rightarrow \frac{IB}{DI} = \frac{MI}{IB} \Rightarrow MI \cdot DI = IB^2 = \frac{AB^2}{4}.$$



Hình 10-44

- 10.19. (h.10-45) Gọi I là giao điểm của MO với AB, K là giao điểm của AB với DE, P và Q là giao điểm của OH với AB và DE,  $HD \perp MA, HE \perp MB$ ,

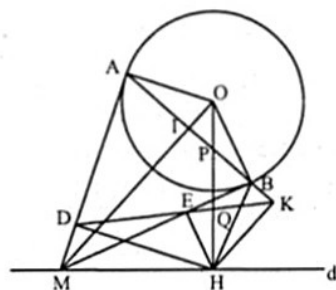
$OM \perp AB$ ,  $\Delta OIP$  và  $\Delta OHM$  đồng dạng

$$\Rightarrow OP \cdot OH = OI \cdot OM.$$

$\Delta MOA$  là tam giác vuông

$$\Rightarrow OI \cdot OM = OA^2 = R^2 \Rightarrow OP \cdot OH = R^2$$

$$\Rightarrow OP = \frac{R^2}{OH} \Rightarrow P \text{ cố định.}$$



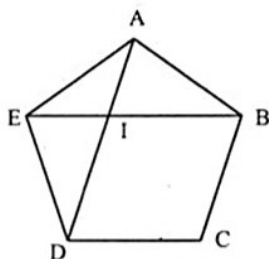
Hình 10-45

Năm điểm A, M, H, B, O nằm trên đường tròn đường kính MO  $\Rightarrow$  tứ giác MABH nội tiếp  $\Rightarrow D, E, K$  thẳng hàng.

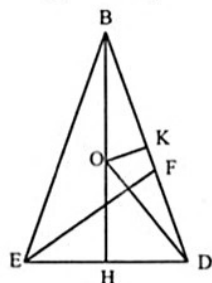
$$\text{Có } HK \parallel MO \Rightarrow \widehat{OHK} = \widehat{HOM}, HKBE \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{EBH} = \widehat{EKH},$$

MOBH nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{EBH} = \widehat{HOM} \Rightarrow \widehat{EKH} = \widehat{OHK}$ ,  $\Delta HKP$  là tam giác vuông  $\Rightarrow Q$  là trung điểm của HP.

- 10.20. Xét  $\triangle AEB$  và  $\triangle AED$ :  $\widehat{AED} = \widehat{EAB}$ ,  $\widehat{EAD} = \widehat{EBA} \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{AEB}$ ,  $AE$  chung  $\Rightarrow AB = DE$ . Tương tự đối với các cạnh còn lại (Cách chứng minh này chỉ đúng với  $n$  giác đều với số lẻ cạnh, không đúng với  $n$  chẵn). Kéo dài  $BO$  cắt  $ED$  tại  $H$ , hạ  $OK \perp BD \Rightarrow KB = KD$  (h.10-47)



Hình 10-46



Hình 10-47

$$\begin{aligned} \text{Có } \widehat{HBD} = 18^\circ &\Rightarrow BD = 2BK = 2\cos 18^\circ, DE = 4\cos 18^\circ \sin 18^\circ. \\ \text{Kẻ phân giác EF, } \triangle BDE \text{ và } \triangle EDF &\text{ đồng dạng} \Rightarrow \frac{BD}{ED} = \frac{DE}{DF} = \frac{DE}{BD - DE} \\ \Rightarrow \left(\frac{DE}{BD}\right)^2 + \frac{DE}{BD} - 1 &= 0 \Rightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \sin \widehat{DBH} = \sin 18^\circ \\ = \frac{DE}{2BD} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} &\Rightarrow \cos^2 18^\circ = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}{8} \Rightarrow AB \cdot AC = BD \cdot DE \\ = 8\cos^2 18^\circ \sin 18^\circ &= \frac{8\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{8 \cdot 4} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

### Chuyên đề 11. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

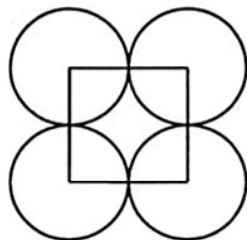
- 11.1. Diện tích phần còn lại trong hình vuông:

$$a^2 - \frac{a^2\pi}{4} = \frac{a^2(4-\pi)}{4}.$$

11.2.  $n = 3 \Rightarrow S_{\text{quat}} = \frac{\pi R^2}{3}, S_{\text{vph}} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}.$

$n = 4 \Rightarrow S_{\text{quat}} = \frac{\pi R^2}{4}, S_{\text{vph}} = \frac{(\pi - 2)R^2}{4}.$

$n = 6 \Rightarrow S_{\text{quat}} = \frac{\pi R^2}{6}, S_{\text{vph}} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}.$



Hình 11-16



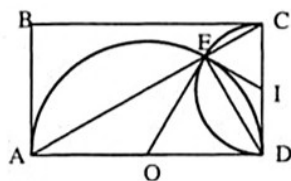
11.3. Cách tính như bài 11.2:  $S = \frac{1}{2}a^2(\pi - 2)$ .

11.4. (h.11-17)  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CAD} = 30^\circ$

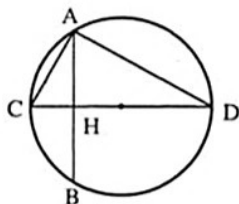
$\Rightarrow \widehat{EOD} = 60^\circ \Rightarrow$  tính được diện tích hình quạt OED  $\Rightarrow$  diện tích hình viên phân lớn.

$\widehat{EID} = 120^\circ \Rightarrow$  tính được diện tích hình quạt IED và hình viên phân nhỏ.

Diện tích S là tổng diện tích của hai hình viên phân  $\Rightarrow S = \frac{(5\pi - 6\sqrt{3})R^2}{24}$ .



Hình 11-17



Hình 11-18

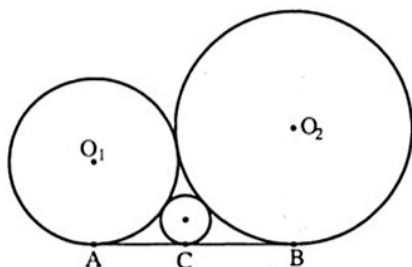
11.5. (h.11-18) Sử dụng  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$ .

$$a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

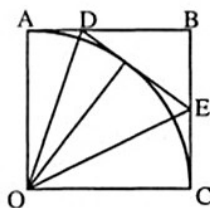
Bạn đọc có thể tính cạnh của đa giác đều  $2n$  cạnh theo cạnh đa giác đều  $n$  cạnh.

11.6. (h.11-19) Gọi bán kính đường tròn cần tính là  $x$ , áp dụng công thức (chuyên đề Vị trí tương đối của hai đường tròn)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{R_2} + \sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 R_2}} \Rightarrow x = \frac{R_1 R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}.$$



Hình 11-19



Hình 11-20

11.7. HD. (h.11-20) Chứng minh DE tiếp xúc với đường tròn  $(O, a)$   
(bài toán trong Ví dụ 3, chuyên đề Tiếp tuyến với đường tròn)

$$S_{\triangle ODE} = \frac{a^2}{6} \Rightarrow S = a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2(10 - 3\pi)}{12}.$$

## Chuyên đề 12. HÌNH TRỤ

**12.1.** Cần dùng 98 cm băng vải để buộc gói quà, do đó băng vải dài 1 m đủ dùng để buộc.

**12.2.** Đáp số:  $3100\pi \approx 9734 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

**12.3.** (h.12-7).

Gọi bán kính đáy là  $r$ , chiều cao là  $h$ .

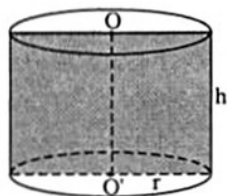
Ta có  $r = h$  và  $2rh = 72$ .

Suy ra  $r = h = 6 \text{ cm}$ .

Đáp số: Diện tích xung quanh bằng  $72\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ .

Diện tích toàn phần bằng  $144\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ .

Thể tích bằng  $216\pi \text{ (cm}^3\text{)}$ .



Hình 12-7

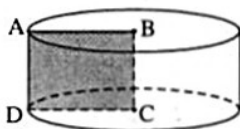
**12.4.** Đáp số:  $1, 152\pi \approx 3,6 \text{ dm}^3$ .

**12.5. a)** (h.12-8a)  $S_1 = 24\pi \text{ cm}^2$ ,

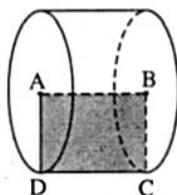
$$V_1 = 48\pi \text{ cm}^3.$$

**b)** (h.12-8b)  $S_2 = 24\pi \text{ cm}^2$ ,

$$V_2 = 36\pi \text{ cm}^3.$$



a)



b)

Hình 12-8

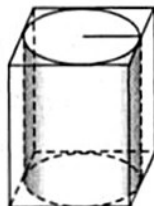
**12.6.** (h.12-9). Gọi  $r$  là bán kính đáy,  $h$  là chiều cao,  $V_1$  là thể tích của hình trụ.

Ta có  $V_1 = \pi r^2 h$ .

Gọi  $V_2$  là thể tích của hình hộp chữ nhật. Ta có

$$V_2 = 2r \cdot 2r \cdot h = 4r^2 h.$$

Do đó  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{4} \approx 78,5 \%$ .

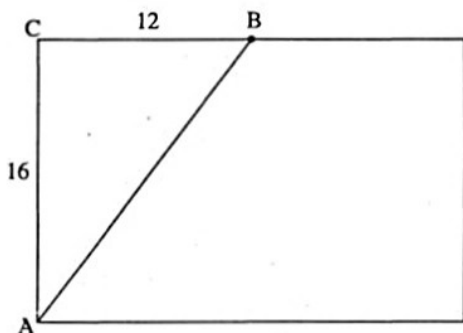


Hình 12-9

12.7. Cắt mặt xung quanh của hình trụ theo đường thẳng AC rồi trải phẳng, ta được hình 12.10.

Ta tính được  $BC = 12 \text{ cm}$ ,  $AC = 16 \text{ cm}$ ,  $AB = 20 \text{ cm}$ .

Con kiến bò từ A đến B mất ít nhất :  $20 : 5 = 4$  (giây).



Hình 12-10

### Chuyên đề 13. HÌNH NÓN

13.1. Đáp số :  $V = 2\pi \approx 6,28 \text{ (m}^3\text{)}$ .

13.2. Kí hiệu như trên hình 13-8

$$DM = BD \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$DH = \frac{2}{3} DM = \sqrt{3}.$$

$$AH^2 = AD^2 - DH^2 = 3^2 - 3 = 6,$$

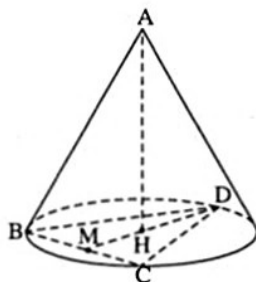
$$AH = \sqrt{6}.$$

Diện tích xung quanh :

$$S_{xq} = \pi \cdot HD \cdot AD = \pi \sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích hình nón :

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot HD^2 \cdot AH = \frac{1}{3} \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = \pi\sqrt{6} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Hình 13-8

13.3. (h.13-9)

a)  $S_{\text{đáy}} = \pi r^2. \quad (1)$

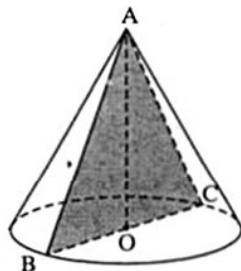
$S_{xq} = \pi r l$  mà  $l = 2r$  nên  $S_{xq} = 2\pi r^2.$

Do  $S_{xq} = 6$  nên  $2\pi r^2 = 6. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $S_{\text{đáy}} = 3\text{cm}^2.$

b) Từ (2) suy ra  $r = \sqrt{\frac{3}{\pi}}.$

$h = r \tan 60^\circ = r\sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \approx 1,69 \text{ (cm)}.$



Hình 13-9

13.4. (h.13-10)

Độ dài cung BC của hình quạt bằng

$$2\pi \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = 4\pi.$$

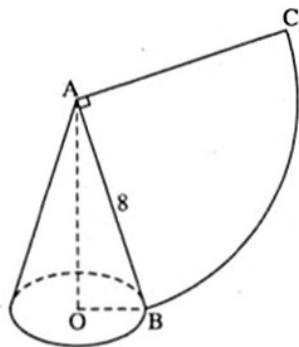
Chu vi đáy của hình nón bằng  $4\pi$  nên

$$OB = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \text{ (cm)}.$$

$$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15} \text{ (cm)}$$

Thể tích của hình nón bằng

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{15} = \frac{8\pi\sqrt{15}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

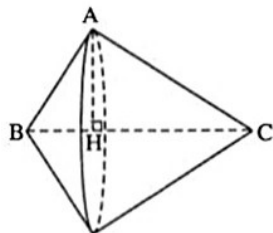


Hình 13-10

13.5. (h.13-11) Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC, hình tạo thành gồm hai hình nón đỉnh B và đỉnh C, đáy là hình tròn (H ; HA) với AH là đường cao của  $\Delta ABC$ .

Ta tính được  $AH = 12 \text{ cm}$ ,  $HB = 9 \text{ cm}$ ,  $HC = 16 \text{ cm}$ .

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 (9 + 16) = 1200\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



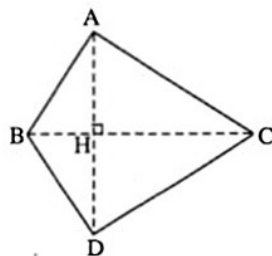
Hình 13-11

13.6. (h.13-12). Kẻ  $AH \perp BC$ .

Đặt  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ .

$S_1$  bằng tổng các diện tích xung quanh của hai hình nón đỉnh B và đỉnh C, bán kính đáy là AH nên

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi \cdot AH \cdot b + \pi \cdot AH \cdot c = \pi \cdot AH(b + c) \\ &= \pi \cdot \frac{bc}{a} (b + c). \end{aligned}$$



Hình 13-12

$S_2$  là diện tích toàn phần của hình nón đỉnh C, bán kính đáy là AB nên

$$S_2 = \pi ca + \pi c^2 = \pi c(a + c).$$

$$\text{Ta thấy } S_1 < S_2 \Leftrightarrow \frac{bc}{a}(b+c) < c(a+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}(b+c) < a+c$$

$$\Leftrightarrow b^2 + bc < a^2 + ac.$$

Bất đẳng thức trên đúng vì  $b < a$ . Vậy  $S_1 < S_2$ .

13.7. Đường sinh của hình nón cắt bằng 17 cm.

$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l = \pi(10 + 18).17 = 476\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

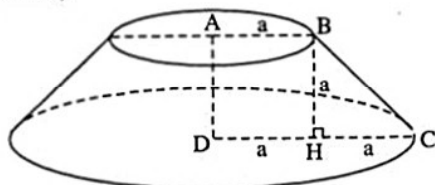
$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = \frac{1}{3}\pi.15(10^2 + 18^2 + 10.18) = 3020\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

13.8. Hình tạo thành là một hình nón cắt (h.13-13)

$$S_{xq} = \pi(a + 2a).a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\pi a^2.$$

$$\begin{aligned} S_{tp} &= 3\sqrt{2}\pi a^2 + 5\pi a^2 \\ &= (5 + 3\sqrt{2})\pi a^2. \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi a(a^2 + 4a^2 + 2a^2) = \frac{7}{3}\pi a^3.$$



Hình 13-13

13.9. (h.13-14).

Gọi A là đỉnh của hình nón. Bán kính của đường tròn phải tìm là  $O'B'$ .

Đặt  $O'B' = r$ ,  $AO' = h$ .

$$AO^2 = AB^2 - OB^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$$

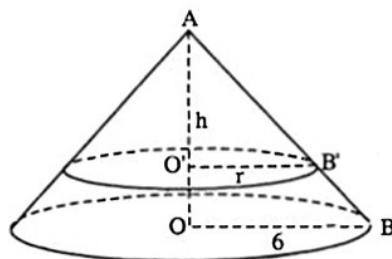
nên  $AO = 8$  cm.

Thể tích của hình nón nhỏ bằng

$$V' = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Thể tích của hình nón lớn bằng

$$V = \frac{1}{3}\pi.6^2.8 = \frac{1}{3}\pi.288.$$



Hình 13-14

Theo đề bài  $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$  nên  $\frac{r^2 h}{288} = \frac{1}{2}$ .

Suy ra  $h = \frac{144}{r^2}$ . (1)

Trong mặt phẳng AOB, ta có  $O'B' \parallel OB$  nên

$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{AO'}{AO} \Rightarrow \frac{r}{6} = \frac{h}{8} \Rightarrow h = \frac{4r}{3}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{144}{r^2} = \frac{4r}{3} \Rightarrow r^3 = 108 \Rightarrow r = 3\sqrt[3]{4}$ .

Bán kính của đường tròn ( $O'$ ) bằng  $3\sqrt[3]{4} \approx 4,76$  (cm).

### Chuyên đề 14. HÌNH CẦU

#### 14.1. Hộp gồm một hình trụ và hai nửa hình cầu.

Diện tích toàn phần của hộp bằng tổng của diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích mặt cầu nên bằng

$$2\pi \cdot 2 \cdot 12 + 4\pi \cdot 2^2 = 64\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích của hộp bằng tổng của thể tích hình trụ và thể tích hình cầu nên bằng

$$\pi \cdot 2^2 \cdot 12 + \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = 78\frac{2}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

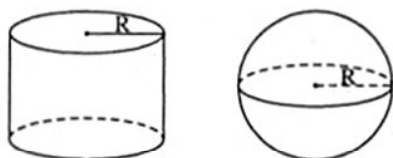
14.2. Từ  $\frac{4}{3} \pi R^3 = 4 \cdot 4\pi R^2$  ta được  $R = 12$  (cm).

#### 14.3. (h.14-8)

a) Gọi  $R$  là bán kính của hình cầu.

Diện tích toàn phần của hình trụ và diện tích mặt cầu đều bằng  $4\pi R^2$ .

b) Thể tích hình cầu bằng  $\frac{4}{3}$  thể tích hình trụ.



Hình 14-8

14.4. Đáp số: Diện tích lục địa và băng là 149 triệu  $\text{km}^2$ .

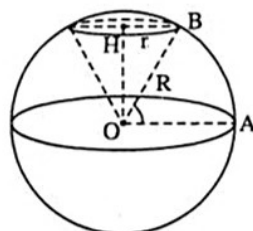
**14.5. (h.14-9).**

Gọi  $R$  là bán kính của Trái Đất,  $r$  là bán kính của vĩ tuyến phải tìm.

Theo đề bài  $\frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{1}{2}$  nên  $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$ , suy ra

$\widehat{BOH} = 30^\circ$ , do đó  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ .

Vậy vĩ tuyến  $60^\circ$  (Bắc hoặc Nam) có độ dài bằng nửa độ dài đường Xích đạo.



Hình 14-9

**14.6. Gọi  $h_1$  là chiều cao của hình trụ,  $h_2$  là chiều cao của hình nón.**

Từ  $\pi R^2 h_1 = \frac{4}{3} \pi R^3$  ta được  $h_1 = \frac{4}{3} R$ .

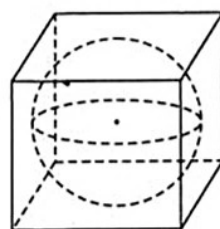
Từ  $\frac{1}{3} \pi R^2 h_2 = \frac{4}{3} \pi R^3$  ta được  $h_2 = 4R$ .

**14.7. (h.14-10)**

Gọi  $R$  là bán kính của hình cầu thì cạnh của hình lập phương bằng  $2R$ .

Tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình lập phương bằng

$$\frac{4\pi R^2}{4R^2 \cdot 4} = \frac{\pi}{4} = 78,5 \%$$



Hình 14-10

Tỉ số giữa thể tích hình cầu và thể tích của hình lập phương bằng

$$\frac{4}{3} \pi R^3 : (2R)^3 = \frac{\pi}{6} \approx 52 \%$$

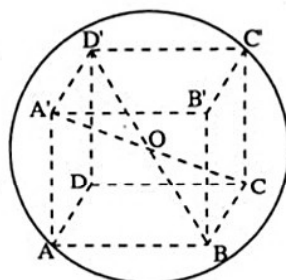
**14.8. (h.14-11)**

Đường chéo của hình lập phương chính là đường kính của hình cầu.

Đường chéo của hình lập phương  $A'C$  bằng

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Bán kính của hình cầu bằng  $\sqrt{3}$  cm.



Hình 14-11

14.9. (h.14-1 2)

$$HC = OC \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ nên}$$

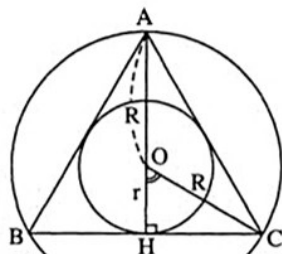
$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3}{8} \pi R^3,$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$V_3 = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{R}{2} \right)^3 = \frac{1}{6} \pi R^3.$$

Do đó

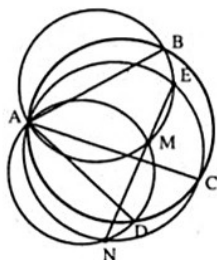
$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{3}{8} : \frac{4}{3} : \frac{1}{6} = \frac{9}{24} : \frac{32}{24} : \frac{4}{24} = 9 : 32 : 4.$$



Hình 14-12

### Chuyên đề 15. ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

- 15.1. *Hướng dẫn* : (H.15-1 8) AB, AC, AD là đường kính, E là giao điểm của đường tròn kính AB và đường tròn đường kính AC  $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AEC} = 90^\circ$   
 $\Rightarrow E, B, C$  thẳng hàng  $\Rightarrow AE \perp BC$ . Tương tự, C, D, N thẳng hàng; B, D, M thẳng hàng  $\Rightarrow E, M, N$  thuộc đường thẳng Simson của A đối với  $\Delta BCD$ .



Hình 15-18

- 15.2. Tương tự Ví dụ 2.

- 15.3. (Bạn đọc tự vẽ hình) D, E, F là các điểm đối xứng của A, B, C lần lượt qua BC, CA, AB.

Gọi H, G là trực tâm, trọng tâm  $\Delta ABC$ , qua A, B, C dựng các đường thẳng song song với BC, CA, AB, chúng cắt nhau tại M, N, P  $\Rightarrow A, B, C$  là trung điểm của NP, PM, MN  $\Rightarrow G, H$  là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta MNP$ . Gọi I, K, R là hình chiếu của O trên PM, MN, NP,  $\Delta ABC$  đồng dạng  $\Delta MNP \Rightarrow I, R, K$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow O$  thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\Delta MNP \Leftrightarrow OH = 2R$ .

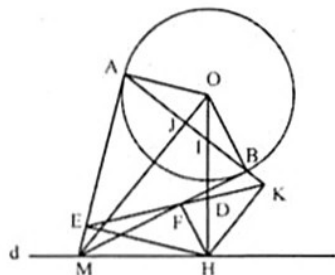


15.4. (H.15-19)

$OA \perp MA, OB \perp MB, OH \perp MH \Rightarrow$  năm điểm  $O, A, M, H, B$  nằm trên đường tròn đường kính  $MO$ . Giả sử  $AB$  cắt  $OH$  tại  $I, OM \perp AB$  tại  $J, JA = JB \Rightarrow OI.OH = OJ.OM = R^2$

$\Rightarrow I$  cố định. Kẻ  $HK \perp AB \Rightarrow E, F, K$  nằm trên đường thẳng Simson của  $H$  đối với  $\triangle AMB$ .

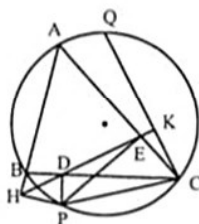
$\triangle IKD$  là tam giác cân  $\Rightarrow D$  là trung điểm của  $IH \Rightarrow D$  cố định  $\Rightarrow EF$  đi qua điểm cố định.



Hình 15-19

15.5. (H.15-20)

Kẻ  $PD \perp BC, PE \perp AC, PH \perp AB \Rightarrow E, D, H$  thẳng hàng.  $CP, CQ$  đối xứng nhau qua phân giác của  $\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{PB} = \widehat{AQ} \Rightarrow \widehat{BCP} = \widehat{ACQ}, DE$  cắt  $CQ$  tại  $K, PDEC$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{CEK} = \widehat{CPD} \Rightarrow \widehat{CEK} + \widehat{ACQ} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp CQ$ .



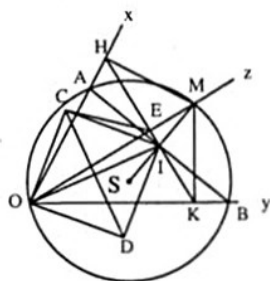
Hình 15-20

15.6. Phần thuận: (H.15-21)

Kẻ  $MH \perp OA, MK \perp OB, Oz$  là phân giác của  $\widehat{xOy}$  nên  $\widehat{MA} = \widehat{MB} \Rightarrow MI \perp AB \Rightarrow K, I, H$  thẳng hàng. Gọi  $E$  là giao điểm của  $OM$  và  $HK$ , có  $OM \perp HK$

$\Rightarrow 5$  điểm  $O, C, E, I, D$  nằm trên đường tròn đường kính  $OI, E$  cố định,  $\widehat{CEO} = 45^\circ \Rightarrow C$  nằm trên đường phân giác góc  $\widehat{OEH}$  (hoặc  $\widehat{OEK}$ ).

Phần giới hạn và phần đảo dành cho bạn đọc.



Hình 15-21

15.7. Cách giải như Ví dụ 10.

15.8. Tham khảo Ví dụ 10 và Ví dụ 14.

15.9. (H.15-22) Từ M kẻ  $MP \perp AB, MQ \perp BC$  và từ N kẻ  $NK \perp AC, NH \perp BC, PQ$  và  $HK$  cắt nhau tại E;

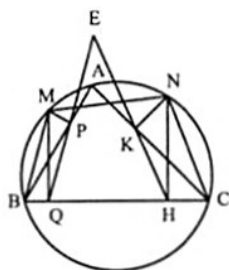
$$\widehat{EQC} = 90^\circ \quad \widehat{MQP} = 90^\circ \quad \widehat{MBA} = 90^\circ - \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{MA}$$

$$\text{Tương tự, } \widehat{EHB} = 90^\circ - \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AN}$$

$$\Rightarrow \widehat{EQC} + \widehat{EHB} = 180^\circ - \frac{1}{2} (\text{sd } \widehat{MA} + \text{sd } \widehat{AN})$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{MN}$$

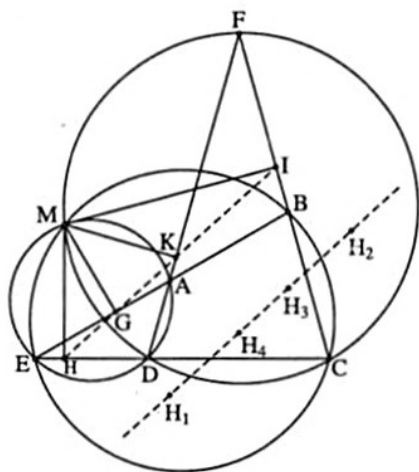
$$\Rightarrow \widehat{QEH} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{MN}.$$



Hình 15-22

15.10. (h.15-23) Gọi M là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BCE$  và  $\triangle CDF$ . Dễ dàng chứng minh được tứ giác ADEM nội tiếp  $\Rightarrow$  đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua M.

Tương tự, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF đi qua M. Gọi G, H, I, K là hình chiếu của M lần lượt trên AB, CD, BC, AD  $\Rightarrow G, H, I, K$  thẳng hàng. Gọi  $H_1, H_2, H_3, H_4$  lần



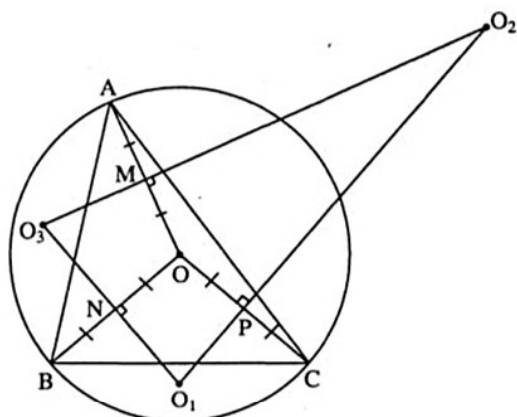
Hình 15-23

lượt là trực tâm của các tam giác ADE, ABF, BCE, DCF. Theo Ví dụ 4 ta có các trung điểm của  $MH_1, MH_2, MH_3, MH_4$  nằm trên đường thẳng Simson qua G, H, I, K  $\Rightarrow H_1, H_2, H_3, H_4$  thẳng hàng.

**Chuyên đề 16. BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL  
VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG**

**16.1. (H.16-12)**

Gọi  $O_1, O_2, O_3$  theo thứ tự là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BOC, COA, AOB$ . Khi đó  $O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2$  lần lượt là các đường trung trực của các đoạn thẳng  $OA, OB, OC$ . Giả sử  $M, N, P$  theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng  $(O_2O_3; OA), (O_3O_1; OB), (O_1O_2; OC)$ .



Hình 16-12

Sử dụng bất đẳng thức *Erdos – Mordell* cho điểm  $O$  trong tam giác  $O_1O_2O_3$  ta có

$$OO_1 + OO_2 + OO_3 \geq 2(OM + ON + OP) \quad (1)$$

Lưu ý rằng  $OO_1 = R_1; OO_2 = R_2; OO_3 = R_3$  và  $OM = ON = OP = \frac{R}{2}$  nên

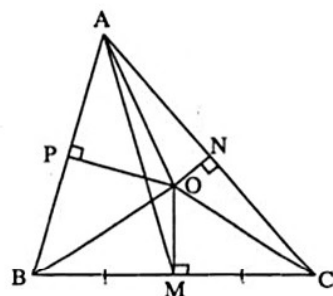
từ (1) suy ra  $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $O_1O_2O_3$  đều. Lúc đó dễ thấy  $\widehat{BOC} = \widehat{COA} = \widehat{AOB} = 120^\circ$ . Nghĩa là tam giác  $ABC$  đều.

**16.2. (H.16-13)**

Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khi đó ta có  $AM \leq OA + OM$ , hay  $m_a \leq R + OM$  (1). Tương tự,

$$m_b \leq R + ON \quad (2); \quad m_c \leq R + OP \quad (3)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được



Hình 16-13

$$m_a + m_b + m_c \leq 3R + (OM + ON + OP) \quad (4)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Erdos – Mordell* cho điểm O trong tam giác ABC ta có

$$OM + ON + OP \leq \frac{OA + OB + OC}{2} = \frac{3R}{2} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra  $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**16.3.** Gọi I, r thứ tự là tâm, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Còn H, J, K lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB (H.16-2).

Áp dụng bất đẳng thức *Erdos – Mordell* dạng căn thức ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} &\geq \sqrt{2}(\sqrt{IH} + \sqrt{IJ} + \sqrt{IK}) \text{ hay} \\ \sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} &\geq 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{r} \end{aligned} \quad (1)$$

Để ý rằng  $IA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$ ;  $IB = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}$ ;  $IC = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}$ . Nền từ (1) ta suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \frac{A}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{B}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{C}{2}}} \geq 3\sqrt{2} \quad (\text{đpcm}).$$
 Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

tam giác ABC đều.

**16.4.** Chúng ta xét một Bổ đề.

**Định lý Carnot.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) và ngoại tiếp đường tròn (I ; r). Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ O đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có hệ thức  $x + y + z = R + r$ .

**Chứng minh.** (H.16-14) Kẻ  $OO_1$  vuông góc với BC,  $OO_2$  vuông góc với AC,  $OO_3$  vuông góc với AB.

Đặt  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ , còn  $p$  là nửa chu vi tam giác  $ABC$ . Sử dụng định lý Ptolemy cho các tứ giác nội tiếp  $OO_3AO_2$ ;  $OO_3BO_1$ ;  $OO_1CO_2$  ta thấy

$OA \cdot O_2O_3 = OO_2 \cdot O_3A + OO_3 \cdot O_2A$ , hay

$$R \cdot \frac{a}{2} = y \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{b}{2} \quad (1)$$

Tương tự cũng có  $R \cdot \frac{b}{2} = x \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{a}{2} \quad (2)$

$$R \cdot \frac{c}{2} = y \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{b}{2} \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) theo vế ta được

$$p \cdot R = \left( \frac{b+c}{2} \right) x + \left( \frac{a+c}{2} \right) y + \left( \frac{a+b}{2} \right) z. \text{ Dẫn đến}$$

$$pR = p(x+y+z) \cdot \frac{ax+by+cz}{2}$$

$$= p(x+y+z) \cdot S_{ABC}$$

$$= p(x+y+z) \cdot pr.$$

Chia cả hai vế cho  $p$  ta được  $x+y+z$

$= R + r$ . Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán (H. 16-15)

a) Từ  $HA = 2x$ ;  $HB = 2y$ ;  $HC = 2z$ .

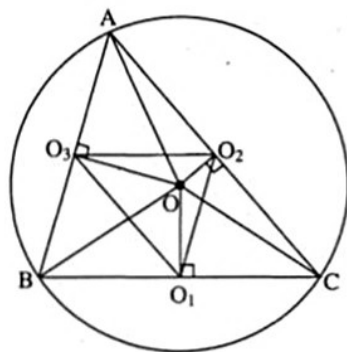
Sử dụng Bổ đề trên ta thấy ngay

$$HA + HB + HC = 2(R + r).$$

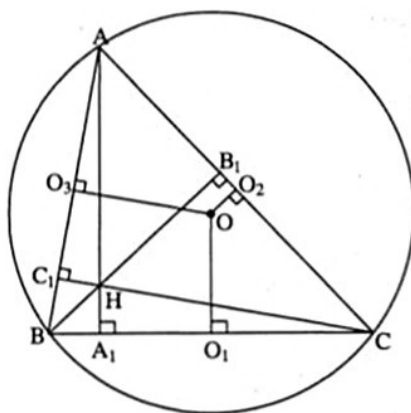
b) Áp dụng bất đẳng thức *Erdos – Mordell* cho điểm  $H$  trong tam giác  $ABC$  ta có

$$HA_1 + HB_1 + HC_1 \leq \frac{HA + HB + HC}{2}. \text{ Từ kết quả câu a) ta có}$$

$HA_1 + HB_1 + HC_1 \leq R + r$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $ABC$  đều.



Hình 16-14



Hình 16-15

c) Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm O trong tam giác ABC ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{x+y+z}{R} = \frac{R+r}{R} = 1 + \frac{r}{R} \quad (\text{Theo định lý Carnot})$$

(đpcm).

d) Áp dụng kết quả bài toán 3, ta thấy  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ . Từ câu c) ta có  $R \geq 2r$  (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

### Chuyên đề 17. ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ VÀ ĐẶC TRƯNG CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP

#### 17.1. (h.17-16)

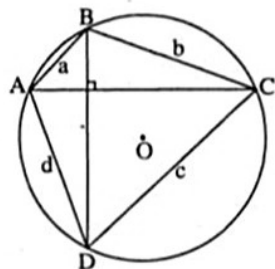
Ta có  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$  (1)

Theo định lý Ptolômê :

$$AC \cdot BD = ac + bd. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$S = \frac{1}{2}(ac + bd).$$



Hình 17-16

#### 17.2. (h.17-17)

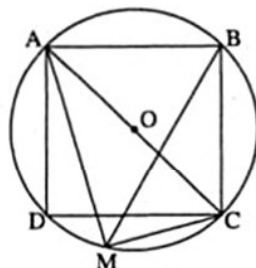
Gọi a là cạnh của hình vuông ABCD.

Áp dụng định lý Ptolômê vào tứ giác nội tiếp ABCM, ta có

$$AB \cdot CM + AM \cdot BC = AC \cdot MB$$

$$\Rightarrow a \cdot MC + a \cdot MA = a\sqrt{2} \cdot MB$$

$$\Rightarrow MA + MC = MB\sqrt{2}.$$



Hình 17-17

17.3. (h.17-18)

Ta có  $AM \leq OA + OM = R + OM$ ,

$$BN \leq R + ON ;$$

$$CP \leq R + OP.$$

Suy ra  $AM + BN + CP$

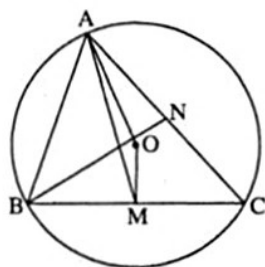
$$\leq 3R + (OM + ON + OP). \quad (1)$$

Theo Ví dụ 3, ta có

$$OM + ON + OP = R + r. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AM + BN + CP \leq 4R + r.$$



Hình 17-18

17.4. (h.17-19)

Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Đặt  $BC = a$ ,  $MB = MC = m$ .

Theo định lý Ptolômê, ta có

$$AB \cdot MC + AC \cdot MB = MA \cdot BC$$

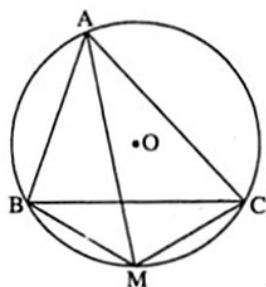
$$\Rightarrow AB \cdot m + AC \cdot m = MA \cdot a$$

$$\Rightarrow AB + AC = MA \cdot \frac{a}{m}.$$

Do đó  $AB + AC$  lớn nhất  $\Leftrightarrow MA$  lớn

nhất  $\Leftrightarrow MA$  là đường kính của (O)

$\Leftrightarrow A$  là điểm chính giữa của cung lớn BC.



Hình 17-19

17.5. Dễ thấy rằng nếu A góc vuông hay tù thì  $R > 2r$ . Khi tam giác ABC có ba góc nhọn thì theo kết quả Ví dụ 3, có  $x + y + z = R + r$ . Kết hợp bất đẳng

thức Erdos áp dụng cho điểm O trong tam giác ABC có  $2(x + y + z) \leq 3R$ .

Từ đó có điều phải chứng minh.

**17.6. Hướng dẫn.** Áp dụng Ví dụ 5 cho các tam giác đều  $A_1A_3A_5$  và  $A_2A_4A_6$ .

**17.7.** Sử dụng Ví dụ 6 với chú ý  $AB = BC = CA = a$ .

**17.8. Hướng dẫn.** Áp dụng công thức  $\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ .

**17.9. Hướng dẫn.** Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

để chứng minh Bất đẳng thức Mincopxki :

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức này để chứng minh Bất đẳng thức Ptôlê mê bằng cách đặt biến phụ thích hợp.



# MỤC LỤC

Trang

HD GIẢI  
ĐÁP SỐ

## CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN

### Chương I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

|                                                          |    |     |
|----------------------------------------------------------|----|-----|
| Chuyên đề 1. Hệ thức về cạnh và đường cao                | 5  | 164 |
| Chuyên đề 2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn               | 9  | 172 |
| Chuyên đề 3. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông | 14 | 179 |

### Chương II. ĐƯỜNG TRÒN

|                                                                         |    |     |
|-------------------------------------------------------------------------|----|-----|
| Chuyên đề 4. Sự xác định đường tròn<br>các tính chất về đường kính, dây | 19 | 187 |
| Chuyên đề 5. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn             | 27 | 191 |
| Chuyên đề 6. Vị trí tương đối của 2 đường tròn                          | 40 | 198 |

### Chương III. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

|                                                                          |     |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| Chuyên đề 7. Liên hệ giữa cung và dây cung. Góc nội tiếp                 | 52  | 202 |
| Chuyên đề 8. Góc tạo bởi hai cát tuyến hoặc tiếp tuyến<br>của đường tròn | 62  | 206 |
| Chuyên đề 9. Cung chứa góc và bài toán quỹ tích                          | 73  | 211 |
| Chuyên đề 10. Đường tròn ngoại tiếp,<br>đường tròn nội tiếp đa giác      | 81  | 214 |
| Chuyên đề 11. Độ dài đường tròn. Diện tích hình tròn                     | 104 | 222 |

### Chương IV. HÌNH TRỤ. HÌNH NÓN. HÌNH CẦU

|                        |     |     |
|------------------------|-----|-----|
| Chuyên đề 12. Hình trụ | 112 | 224 |
| Chuyên đề 13. Hình nón | 115 | 225 |
| Chuyên đề 14. Hình cầu | 121 | 228 |

## MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

|                                                                   |     |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| Chuyên đề 15. Đường thẳng Simson                                  | 126 | 230 |
| Chuyên đề 16. Bất đẳng thức Erdos - Mordell<br>và một vài áp dụng | 136 | 233 |
| Chuyên đề 17. Định lý Ptolèmê và đặc trưng của tứ giác nội tiếp   | 150 | 236 |

*Chịu trách nhiệm xuất bản :* Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**  
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **VŨ VĂN HÙNG**

*Tổ chức bản thảo*

*và chịu trách nhiệm nội dung :* Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**  
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

*Biên tập nội dung và sửa bản in :* **NGUYỄN XUÂN BÌNH**

*Trình bày bìa :* **LƯƠNG QUỐC HIỆP**

*Thiết kế sách :* **NGUYỄN THANH THUÝ - ĐINH XUÂN DUNG**

*Chế bản :* **PHÒNG CHẾ BẢN CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC  
HÀ NỘI**

---

Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –  
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

---

**TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ TOÁN 9**  
**TẬP HAI - HÌNH HỌC**  
**Mã số: T9T74h3 - SBE**

Số ĐKKH xuất bản: 124-2013/CXB/216-116/GD.  
In 3.000 bản (QĐ: 342), khổ 17 x 24 cm.  
In tại Công ty Cổ phần In & Bao bì Đồng Tháp: 212 Lê Lợi -  
Phường 3 - Thị xã Sa Đéc - Tỉnh Đồng Tháp.  
In xong và nộp lưu chiểu tháng 09 năm 2013.