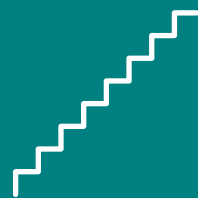




KẾT NỐI TRI THỨC

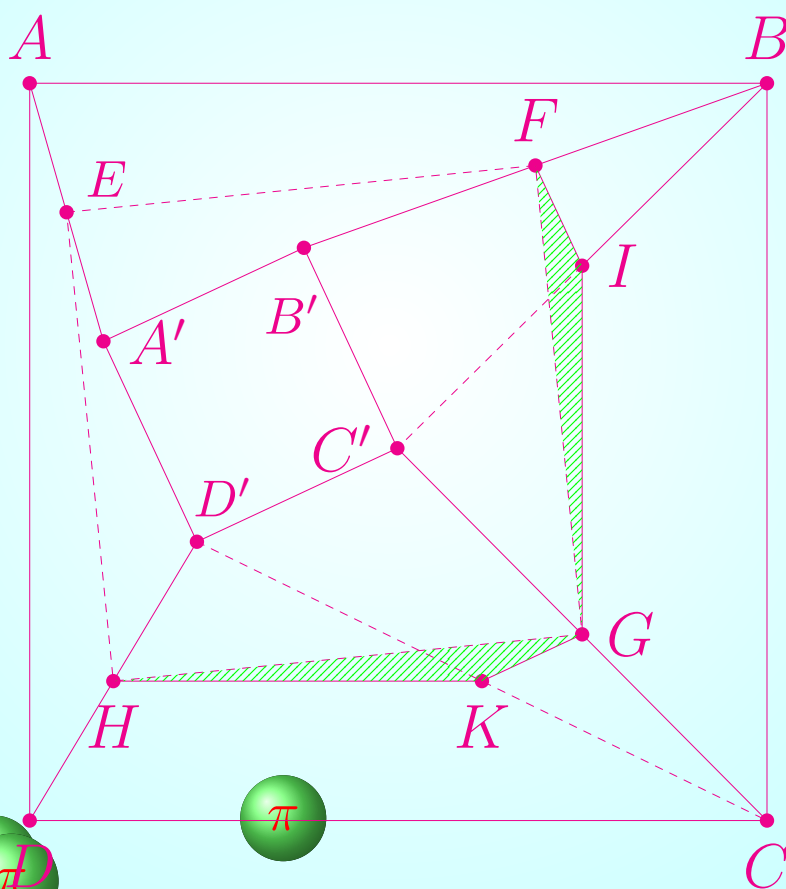
Thầy NGUYỄN BÌNH KHÔI



TOÁN

8

Năm học 2023-2024



LƯU HÀNH NỘI BỘ

§1 ĐƠN THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Đơn thức và đơn thức thu gọn

Ví dụ 1. Cho các biểu thức sau: $-2x^4y$, $\frac{1}{5}xy^2$, $-x - 5$, $x \cdot \frac{3}{-7}y^6$, $2x^2 - 3y$, 5 .

Kết luận: Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số hoặc một biến hoặc có dạng tích của những số và biến.

Ví dụ 2. Trong các biểu thức sau: $99x^{100}$, -1 , $1 - y$, $\frac{1}{x} - 2$, $\frac{5}{-9}x$, $2\sqrt{x}$, $4y(1 - x)$.
Biểu thức nào là đơn thức?

2 Đơn thức thu gọn, bậc của một đơn thức

Ví dụ 3. Cho đơn thức $A = 2x^2y \cdot (-3)xy^5z$.

3 Đơn thức đồng dạng.

Ví dụ 4. Cho hai đơn thức $A = 4x^2y^4$ và $B = \frac{-5}{2}x^2y^4$.

B LUYỆN TẬP

Luyện tập 1. Xác định hệ số, phần biến, bậc của đơn thức $\frac{-3}{4}x^2y \cdot \left(\frac{2}{3}xy^2z\right)$.

Luyện tập 2. Thực hiện phép tính:

a) $x^2y - 7x^2y + 5xy^2$.

b) $-5xy^3 - 7y^2(xy)$.

c) $3x^4 - (5x^2)^2$.

Luyện tập 3. Cho đơn thức $A = \left(\frac{2}{3}x^2y^2\right) \left(\frac{-6}{5}x^4y^3\right)$.

a) Thu gọn rồi tìm bậc của đơn thức A .

b) Tính giá trị của đơn thức A tại $x = -1$, $y = -2$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các biểu thức sau: x^2y , $-3x - 1$, $\frac{1}{5} - x^2y$, -13 , $\frac{1}{6-x}$, $(-2)^3xy^7$, biểu thức nào là đơn thức?

Bài 2. Trong các biểu thức sau: $\frac{6}{x^2}$, $\frac{x^2y}{2}$, $\frac{-1}{x}$, $\frac{x}{-5^2}$, $\frac{-4}{5}$, $\frac{-x^2y}{xy^2z}$, biểu thức nào là đơn thức?

Bài 3. Trong các biểu thức sau: $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)x^2$, $\frac{1}{2}(x^2 - 1)$, $x^2 \cdot \frac{7}{2}$, $6\sqrt{y}$, $\frac{1 - \sqrt{5}}{x}$, $\frac{x - y^2}{4}$, biểu thức nào là đơn thức?

Bài 4. Thu gọn, chỉ ra phần hệ số và tìm bậc của các đơn thức sau

- | | | |
|--|---|--|
| a) $5x^23xy^2$. | b) $4x^2 \cdot (-4xy^2)$. | c) $-x^2y^5 \cdot (-xy)$. |
| d) $-3xy^2zy^2z$. | e) $-x^3y^4z^5 \cdot (-2)$. | f) $2x^3y^5x^2y^4x$. |
| g) $-2xy^2xy^2z \cdot 3^2$. | h) $6xyxy^3 \cdot (-6)$. | i) $-xy^2z \cdot (-5)x^2yz^2$. |
| j) $\frac{2}{3}xyz \cdot (-3xy^2z)$. | k) $\frac{1}{2}x^2y \cdot \left(\frac{-2}{3}xy^2\right)$. | l) $\frac{1}{4}x^3y \cdot (-2)x^3y^4$. |
| m) $\left(\frac{-1}{3}x^2y\right)(2xy^3)$. | n) $\left(\frac{-3}{4}x^2y\right)(-xy^3)$. | o) $\frac{3}{5}x^2y^5x^3y^2 \cdot \frac{-2}{3}$. |
| p) $\left(\frac{3}{4}x^2y^3\right)\left(\frac{2}{5}x^4\right)$. | q) $\left(\frac{12}{15}x^4y^5\right)\left(\frac{5}{9}x^2y\right)$. | r) $\left(-\frac{1}{7}x^2y\right)\left(\frac{-14}{5}x^4y^5\right)$. |

Bài 5. Thu gọn, chỉ ra phần hệ số và tìm bậc của các đơn thức sau

- | | | |
|--|---|--|
| a) $5xy^2 \cdot (-3y)^2$. | b) $x^2yz \cdot (-2xy)^3$. | c) $(-2x^2y)^2 \cdot 8x^3yz^3$. |
| d) $(-2xy^3)^2 \cdot (-2xyz)^3$. | e) $(-5xy^3z) \cdot (-4x^2)^2$. | f) $(2x^2y^3)^2 \cdot (-2xy)$. |
| g) $\frac{-2}{3}xy^2z \cdot (-3x^2y)^2$. | h) $(-2xy^3) \cdot \frac{3}{8} \cdot (xz^2)^2$. | i) $\frac{1}{4} \cdot (x^2y^3)^2 \cdot (-2xy)$. |
| j) $\frac{1}{6}x \cdot (-2y^5)^3 \cdot (-9x^5y)$. | k) $(-3x^4y^5z^6)^3 \cdot \frac{1}{9}x^5 \cdot y^4$. | l) $2xy^2 \cdot \left(\frac{-1}{3}x^2y^3\right)^2$. |

Bài 6. Thu gọn, chỉ ra phần hệ số và tìm bậc của các đơn thức sau

- | | |
|---|--|
| a) $A = \frac{3}{4}x^{n-1} \cdot \frac{4}{5}x^{2n+1}y^{2n+1} \cdot \frac{5}{6}xy^{n+1}$. | b) $B = \frac{6}{4}x^{3-n} \cdot \frac{4}{2}x^{4-n}y^{5-n} \cdot \frac{2}{6}y^{6-n}$. |
| c) $C = \frac{-4}{3}x^{2-n}y \cdot \frac{6}{7}x^{2n-3}y^{n-1} \cdot \frac{-1}{2}xy$. | d) $D = \frac{1}{5}xy^{n+1} \cdot \frac{4}{3}x^{n+1}y \cdot \frac{15}{7}x^ny^n$. |

Bài 7. Phân thành các nhóm đơn thức đồng dạng trong các đơn thức sau:

$$-12x^2y, \quad -\frac{3}{8}xyz, \quad -100, \quad -3yxz, \quad -2xy \cdot x, \quad y \cdot \left(-\frac{1}{3}xy\right).$$

Bài 8. Phân thành các nhóm đơn thức đồng dạng trong các đơn thức sau:

$$3x^3y^2, \quad \frac{x^5y^4z^2}{11}, \quad \frac{-x^3y^3}{6}, \quad -11x^3y^3, \quad -6x^5y^4z^2, \quad \frac{1}{2}x^3y^2.$$

Bài 9. Thực hiện phép tính:

- a) $xy - (-xy) + 5xy$. b) $6xy^2 - 3xy^2 - 12xy^2$. c) $3x^2y^3z^4 + (-4x^2y^3z^4)$.
 d) $4x^2y + (-8x^2y)$. e) $25x^2y + (-55x^2y)$. f) $3x^2y + 4x^2y - x^2y$.
 g) $xy^2 + x^2y + (-2xy^2)$. h) $12x^2y^3z^4 + (-7x^2y^3z^4)$. i) $-6xy^3 - (-6xy^3) + 6x^3y$.
 j) $-\frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}x^2 + x$. k) $2x^3 + 3x^3 - \frac{1}{3}x^3$. l) $5xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{4}xy^2$.
 m) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3$. n) $\frac{3}{4}xyz^2 + \frac{2}{4}xyz^2 + \frac{1}{4}xyz^2$. o) $\frac{5}{8}x^2y^3 + \frac{1}{2}y^3x^2 - 3x^2y^3$.

 **Bài 10.** Thực hiện phép tính:

- a) $-xyz^2 - 3xz \cdot yz$. b) $-8x^2y - x \cdot (xy)$. c) $4xy^2 \cdot x - (-12x^2y^2)$.
 d) $\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{1}{3}x^2y \cdot y^2$. e) $3xy(x^2y) - \frac{5}{6}x^3y^2$. f) $\frac{3}{4}x^4y - \frac{1}{6}xy \cdot x^3$.
 g) $\frac{4}{5}y^2x^5 - x^3 \cdot x^2y^2$. h) $-xy^3 - \frac{2}{7}y^2 \cdot xy$. i) $\frac{5}{6}xy^2z - \frac{1}{4}xyz \cdot y$.
 j) $15x^4 + 7x^4 - 20x^2 \cdot x^2$. k) $\frac{1}{2}x^5y - \frac{3}{4}x^5y + xy \cdot x^4$. l) $13x^2y^5 - 2x^2y^5 + x^6$.

 **Bài 11.** Tìm hiệu $A - B$ biết

- a) $-x^2y + A + 2xy^2 - B = 3x^2y - 4xy^2$. b) $5xy^2 - A - 6yx^2 + B = -7xy^2 + 8x^2y$.
 c) $3x^2y^3 - A - 5x^3y^2 + B = 8x^2y^3 - 4x^3y^2$. d) $-6x^2y^3 + A - 3x^3y^2 - B = 2x^2y^3 - 7x^3y^2$.
 e) $A - \frac{3}{8}xy^2 - B + \frac{5}{6}x^2y = \frac{3}{4}x^2y - \frac{5}{8}xy^2$. f) $5xy^3 - A - \frac{5}{8}yx^3 + B = 2\frac{1}{4}xy^3 - \frac{7}{6}x^3y$.

 **Bài 12.** Cho đơn thức: $A = \frac{8}{3}x^2y^2 \cdot \left(\frac{-1}{4}x^2y\right)$.

- a) Thu gọn đơn thức A rồi xác định hệ số và tìm bậc của đơn thức.
 b) Tính giá trị của A tại $x = -1, y = 1$.

 **Bài 13.** Cho đơn thức $B = \left(\frac{-2}{3}xy^2\right) \left(-\frac{1}{4}x^2y^3\right)$.

- a) Thu gọn đơn thức B .
 b) Tính giá trị của đơn thức B khi $x = 1, y = -1$.

 **Bài 14.** Cho đơn thức: $C = \frac{1}{3} \cdot (-6x^2y^2)^2 \left(\frac{1}{2}x^3y\right)$.

- a) Thu gọn C
 b) Tính giá trị của C tại $x = 1, y = -1$.

 **Bài 15.** Cho đơn thức $D = \left(\frac{-3}{7}x^2y\right) \left(\frac{7}{9}x^2y^2\right)$.

- a) Thu gọn đơn thức D rồi xác định hệ số và phần biến của đơn thức.
 b) Tính giá trị của đơn thức D tại $x = -1, y = 2$.

 **Bài 16.** Cho đơn thức $F = \left(\frac{-3}{5}xy^2\right)^2 \cdot \left(\frac{20}{27}x^3y\right)$

- Thu gọn đơn thức và tìm bậc của đơn thức F
- Tính giá trị của biểu thức F biết $y = \frac{-x}{3}$ và $x + y = 2$.

 **Bài 17.** Cho 3 đơn thức $\frac{-3}{8}x^2z$, $\frac{2}{3}xy^2z^2$, $\frac{4}{5}x^3y$.

- Tính tích của 3 đơn thức trên.
- Tính giá trị của mỗi đơn thức và giá trị của tích ba đơn thức tại $x = -1$, $y = -2$, $z = 3$.

 **Bài 18.** Cho hai đơn thức $\frac{-3}{2}x^3y^2z$ và $(-6xy^3z^5)$.

- Tính tích hai đơn thức trên.
- Chỉ ra hệ số, phần biến và bậc của đơn thức tích.

 **Bài 19.** Cho đơn thức: $A = \frac{1}{18}x^2y \cdot \frac{-9}{7}xy^2$.

- Thu gọn đơn thức.
- Tính giá trị của đơn thức tại $x = 2$, $y = -1$.

 **Bài 20.** Cho đơn thức $B = \left(\frac{-1}{2}xy^3\right)(2x^3y)^2$.

- Thu gọn đơn thức B .
- Tính giá trị của B khi $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$.

 **Bài 21.** Cho hai đơn thức: $A = -18x^3y^4z^5$ và $B = \frac{2}{9}x^5(yz^2)^2$.

- Đơn thức C là tích của đơn thức A và B . Xác định phần biến, phần hệ số, bậc của C .
- Tính giá trị của đơn thức C khi $x = -1$, $y = 1$, $|z| = -1$.

§2 ĐA THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Đa thức

 **Ví dụ 1.** Cho các biểu thức sau: $A = x^2y + x^3 - 4x + 1$ và $B = x^5 - 4xy^3$.

Kết luận:

- Đa thức là tổng của những đơn thức, mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.
- Mỗi đơn thức cũng được gọi là một đa thức.

2 Thu gọn đa thức

 **Ví dụ 2.** Cho đa thức $A = x^2y^3 - 5x^4 - 6x^2y^3 + 1 + 6x^4$.

Kết luận:

- Đa thức thu gọn là đa thức không có hai hạng tử nào đồng dạng.
- Bậc của một đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.
- Một số khác 0 cũng được coi là một đa thức bậc 0
- Số 0 cũng là một đa thức, gọi là đa thức 0 và không có bậc xác định.

B LUYỆN TẬP

 **Bài 1.** Thu gọn rồi tìm bậc của mỗi đa thức $A = x^3y^4 - 5y^8 + x^3y^4 + xy^4 - xy^4 + 5y^8$

 **Bài 2.** Thu gọn $B = 3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 - 3x^5y^3$ rồi tính giá trị tại $x = 1$; $y = -2$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 1.** Trong các biểu thức sau, đâu là đa thức

$$x^2y, x + 2y, \frac{1}{x}, 6 - \frac{1}{x^2 + y^2}, -5, \frac{x + 2y}{z^2}.$$

 **Bài 2.** Trong các biểu thức sau, đâu là đa thức

$$\frac{1}{2}xy^2 - \frac{x}{3}, \frac{x + 2y}{5}, 6 - 2xy + \frac{1}{x^2}, 0, \frac{-4x^3}{y^4}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

 **Bài 3.** Trong các biểu thức sau, đâu là đa thức

$$(1 - x^2)^2, 1 - x^2 + y^2, \frac{x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}, \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}, \frac{-1}{7}.$$

 **Bài 4.** Thu gọn rồi tìm bậc của các đa thức sau

- a) $A = x^6 + y^5 + x^4y^4 + 1 - x^4y^4.$
- b) $B = 7x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 1 + (-7x^5) - 2.$
- c) $C = x^4 - 2x^2y^2 + 3xy - 4y + 5 - x^4.$
- d) $D = x^2 - 2x^2y + 5x^2 + 2x^2.$
- e) $E = x^6 + x^2y^5 + xy^6 + x^2y^5 - xy^6.$
- f) $F = x^3y^4 - 5xy^8 + x^3y^4 + xy^4 + 5y^8.$

 **Bài 5.** Thu gọn rồi tìm bậc của các đa thức sau

- a) $A = 5x^2 \cdot 2y^2 - 5x \cdot 3xy - x^2y + 6x^2y^2.$
- b) $B = 3x \cdot x^4 + 4x \cdot x^3 - 5x^2x^3 - 5x^2 \cdot x^2.$
- c) $C = 2x^2yz + 4xy^2z - 5x^2yz + xy^2z - xyz.$
- d) $D = 5x^3y^2 + 4x^2y^2 - x^3 + 8x^2y^2 - 5x^3y^2.$
- e) $E = 3x^2y - \frac{1}{4}xy + 1 - 3x^2y + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}xy.$
- f) $F = 3x^5 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{3}{4}xy^2 - 3x^5 - \frac{3}{4}x^2y.$
- g) $G = x^3 - 5xy + 3x^3 + xy - x^2 + \frac{1}{2}xy - x^2$
- h) $H = 3xy^5 - 3x^6y^7 + \frac{1}{2}x^2y - 3xy^5 + 3x^6y^7.$

 **Bài 6.** Thu gọn rồi tính giá trị của các đa thức sau

- a) $A = \frac{1}{3}x^2y + xy^2 - xy + \frac{1}{2}xy^2 - 5xy - \frac{1}{3}x^2y$ tại $x = \frac{1}{2}, y = 1.$
- b) $B = \frac{1}{2}xy^2 + \frac{2}{3}x^2y - xy + xy^2 - \frac{1}{3}x^2y + 2xy$ tại $x = \frac{1}{2}, y = 1.$
- c) $C = 2x^2y^4 + 4xyz - 2x^2 - 5 + 3x^2y^4 - 4xyz + 3 - y^9$ tại $x = 1, y = -1.$

§3 CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Cộng, trừ hai đa thức

 **Ví dụ 1.** Cho hai đa thức $A = 3x + y - z$ và $B = 4x - 2y + 6z$. Tính tổng $A + B$ và hiệu $A - B$.

2 Kết luận

- a) Cộng hay trừ hai đa thức là thu gọn đa thức nhận được sau khi nối hai đa thức đã cho bởi dấu cộng “+” hay dấu trừ “-”.
- b) Phép cộng đa thức cũng có các tính chất như giao hoán, kết hợp như phép cộng các số.

 **Ví dụ 2.** Thực hiện phép tính $(-5x^2y + 3xy^2 + 7) + (-6x^3y + 4xy^2 - 5)$.

 **Ví dụ 3.** Thực hiện phép tính $(4x^2 + x^2y - 5y^2) - (x^3 - 6xy^2 - x^2y)$.

 **Ví dụ 4.** Cho đa thức $A = x^5y + 3x^4 + 5x^2y$ và $B = 2xy - 3x^4 - 2xy + 9 + 2x^2y$.

- a) Tính $C = A + B$.
- b) Tính giá trị của C tại $x = -1, y = 2$.

B Bài tập tự luận

Bài 1. Thực hiện phép tính

- | | |
|---|--|
| a) $(x^2 - 2yz + z^2) - (3yz - z^2 + 5x^2)$. | b) $(x^2 - 2yz + z^2) + (3yz - z^2 + 5x^2)$. |
| c) $(x^3 + 6x^2 + 5y^3) - (2x^3 - 5x + 7y^3)$. | d) $(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 + 2xy + x^2 + 1)$. |
| e) $(x^2 - 2xy + y^2) - (y^2 + 2xy + x^2 + 1)$. | f) $(4x^2 - 5xy + 3y^2) + (3x^2 + 2xy - y^2)$. |
| g) $(4x^2 - 5xy + 3y^2) - (3x^2 + 2xy - y^2)$. | h) $(5x^3 - 10x^2y) + (7x^2y - 5x^3 + 3xy^2)$. |
| i) $(-3x^2y - 2xy^2 + 6) + (-x^2y + 5xy^2 - 1)$. | j) $(15x^2y - 7xy^2 - 6y^2) + (-12x^2y + 7xy^2)$. |

Bài 2. Thực hiện phép tính

- | | |
|--|--|
| a) $(3x^3 - xy^2 + 4x) + (-2x^3 + xy^2 + 3x)$. | b) $(3x^3 - xy^2 + 4x) - (-2x^3 + xy^2 + 3x)$. |
| c) $(x^2 + y - x^2y^2 - 1) + (x^2 - 2y + xy + 1)$. | d) $(x^2 + y - x^2y^2 - 1) - (x^2 - 2y + xy + 1)$. |
| e) $(5x^2y + 5x + 3) + (xyz - 4x^2y + 5x - 2)$. | f) $(xyz - 4x^2y + 5x - 2) - (5x^2y + 5x + 3)$. |
| g) $(5x^2y - 5xy^2 + xy) + (xy - x^2y^2 + 5x^2y)$. | h) $(5x^2y - 5xy^2 + xy) - (xy - x^2y^2 + 5x^2y)$. |
| i) $(x^2y + x^3 - xy^2 + 3) + (x^3 + xy^2 - xy - 6)$. | j) $(x^3 + xy^2 - xy - 6) - (x^2y + x^3 - xy^2 + 3)$. |
| k) $(xy + y^2 - x^2y^2 - 2) + (x^2y^2 + 5 - y^2)$. | l) $(xy + y^2 - x^2y^2 - 2) - (x^2y^2 + 5 - y^2)$. |

Bài 3. Tìm đa thức A biết

- | | |
|---|---|
| a) $A - (xy + x^2 - y^2) = x^2 + y^2.$ | b) $(6x^2 - 3xy^2) + A = x^2 + y^2 - 2xy^2.$ |
| c) $A + (x^2 + y^2) = 5x^2 + 3y^2 - xy.$ | d) $A + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2.$ |
| e) $A + (3x^2y - 2xy^3) = 2x^2y - 4xy^3.$ | f) $A + (x^2 - 2y^2) = x^2 - y^2 + 3y^2 - 1.$ |
| g) $A - (2xy - 4y^2) = 5xy + x^2 - 7y^2.$ | h) $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2.$ |
| i) $A - (5x^2 - xyz) = xy + 2x^2 - 3xyz + 5.$ | j) $(25x^2y - 13xy^2 + y^3) - A = 11x^2y - 2y^3.$ |
| k) $A - (12x^4 - 15x^2y + 2xy^2 + 7) = 0.$ | l) $2yz^2 - 4y^2z + 5yz - A = 0.$ |
| m) $A - (4xy - 3y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2.$ | n) $A + (5x - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2.$ |
| o) $A - x^3 + 5x^2y = x^3 + y^3.$ | p) $(25x^2y - 13xy^2 + x^3) - A = 11x^2y - 2x^3.$ |

Bài 4. Cho hai đa thức $A = \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) - (a - 2b)$ và $B = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b - (a - b)$. Tính $A + B$ và $A - B$.

Bài 5. Cho hai đa thức $C = x - [b - (c - a - b)]$ và $D = b + [a - (c - b - a)]$. Tính $C + D$ và $C - D$.

Bài 6. Cho hai đa thức $E = y - [y - (y + 2x - x)]$ và $F = y - [y - x + 2(x - y)]$. Tính $E + F$ và $E - F$.

Bài 7. Cho hai đa thức $G = \left[\frac{1}{2}ax - 2(ax + 3)\right] - (ax + 1)$ và $H = ax - 2 - [-(ax - 1) + 3] - 4$. Tính $G + H$ và $G - H$.

Bài 8. Cho hai đa thức $M = [x + (y - z) - 2x] + y + z - (2 - x - y)$ và $N = x - [x - (y - z) - x]$. Tính $M + N$ và $M - N$.

Bài 9. Cho hai đa thức $P = a^2 - 2ab + 3b^2$ và $Q = 2a^2 - 3ab - b^2 + (-3a^2 + 2ab - b^2)$. Tính $P + Q$ và $P - Q$.

Bài 10. Cho hai đa thức $I = 3a^2 + b^2 - (ab - a^2)$ và $K = 2a^2 + ab - b^2 - (-a^2 + b^2 - ab)$. Tính $I + K$ và $I - K$.

Bài 11. Cho $A = 2x^4 - x + 3x^2 - 6$, $B = -x^4 + 2 - 3x^2 - 5x$ và $C = -2x^3 + 1 - 3x + x^2$.

- Tính $M = A - B + C$.
- Tính $N = B - C - A$.
- Tính $P = C - A - B$.

Bài 12. Cho $A = 5x^3y - 4xy^2 - 6x^2y^2$, $B = -8xy^3 + xy^2 - 4x^2y^2$ và $C = x^3 + 4x^3y - 6xy^3 - 4xy^2 + 5x^2y^2$.

- Tính $A - B - C$.
- Tính $B + A - C$.
- Tính $C - A - B$.

Bài 13. Cho $A = 16x^4 - 8x^3y + 7x^2y^2 - 9y^4$, $B = -15x^4 + 3x^3y - 5x^2y^2 - 6y^4$ và $C = 5x^3y + 3x^2y^2 + 17y^4 + 1$.

a) Tính $A + B - C$.

b) Tính $A - C + B$.

 **Bài 14.** Cho $A = 4x^2 - 5xy + 3y^2$, $B = 3x^2 + 2xy + y^2$ và $C = -x^2 + 3xy + 2y^2$.

a) Tính $A + B + C$.

b) Tính $B - C - A$.

c) Tính $2A - 3B - C$.

 **Bài 15.** Cho $A = x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1$, $B = -2x^2 + xy + 2y^3 - 3 - 5x + 2y$ và $C = 7y^2 + 3x^2 - 4xy - 6x + 4y + 5$.

a) Tính $A + B + C$.

b) Tính $7A - B - C - 9$.

c) Tính $A - 4B - 3C$.

 **Bài 16.** Cho $A = 5xy^2 - 4x^2y - 6x^2$, $B = 8yx^2 - 4y^2x + 3y^2$ và $C = -2xy^2 + 3yx^2 + 5x^2$.

a) Tính $A - B + C$.

b) Tính $2(A + B) + C$.

 **Bài 17.** Cho hai đa thức $A = x^2 - 3xy - y^2 + 1$ và $B = 2x^2 + y^2 - 7xy - 5$.

a) Tính $A + B$.

b) Tìm đa thức C biết $C + A - B = 0$.

c) Tính giá trị của đa thức C với $x = 2$, $y = \frac{-1}{2}$.

 **Bài 18.** Cho $P(x) = 5x^2 + 5x - 4$ và $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$ và $R(x) = 4x^2 - x + 3$.
Tính $P(x) + Q(x) - R(x)$ rồi tính giá trị của đa thức tại $x = \frac{-1}{2}$.

§4 PHÉP NHÂN ĐA THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Nhân đơn thức với đơn thức

Ví dụ 1. Nhân hai đơn thức $3x^2y$ và $-2xy^3$.

2 Nhân đơn thức với đa thức

Ví dụ 2. Nhân đơn thức $3x^2$ với đa thức $x^3y - 4yz^2$.

Ví dụ 3. Tính $-4x^2y(x^2 - xy + 2y^2)$.

3 Nhân đa thức với đa thức

Ví dụ 4. Nhân đa thức $x + y$ với đa thức $x^2 + 2xy - 3y^3$.

Ví dụ 5. Tính $(x^2 - y^2 - xy)(x - 2y)$

● Luyện tập 4. Thực hiện phép tính

a) $2x(1 - x) - (2x - 1)(x + 1);$

b) $x^2y(xy + 1) - (xy - 1)(x^2y + 1).$

● **Luyện tập 5.** Tính giá trị của biểu thức $A = x^6 - 20x^5 + 20x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 20x + 3$ tại $x = 19$.

● **Luyện tập 6.** Tìm x biết $(2x - 1)(x - 5) - 2x^2 + 10x - 25 = 0$.

B BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Thực hiện phép tính (nhân đơn thức với đa thức)

a) $2xy(x + 3y^2).$

f) $-xy(x^2 + 2xy - 3).$

k) $x^2y(2xy + x^2 - xy^2).$

b) $-7x^2(3x - 4y).$

g) $3x^2y(x^2 - 3y + 2xy^2).$

l) $-2xy^2(x^2 - x^3y + 3).$

c) $3x^2y(-3x^2 - y^2).$

h) $-xy(x^2 + xy + y^2).$

m) $-2x^2y(3xy^2 - y^2 + xy).$

d) $2x(2xy - 5x^2 + 4).$

i) $xy^2(x^2y - 5x + 10y).$

n) $9x^2y(xy - 2y + 7xy^2).$

e) $-4x(x^2 - xy^3 + y).$

j) $-3y(4x^2y - 2xy^2 - 5).$

o) $6xy^3(3x^3y - 2x^2 + 3xy^3).$

Bài 2. Thực hiện phép tính (nhân đơn thức với đa thức)

- a) $5(x^2 - 3x + 1) + x(5x + 15) + 5$ g) $(x^2 + xy + y^2)(-2xy) + xy(x^2 - xy + y^2)$.
 b) $x^2(2x - y + y^2) + y^2(-2y + x - x^2)$. h) $-4x(3x^2 - x + 4) - 3x(-4x^2 + x - 5)$.
 c) $-4x^2(x - 7) + 4x(x^2 - 5) - 28x^2$ i) $5x\left(\frac{1}{5}x - 2\right) - 3\left(6 - \frac{1}{3}x^2\right)$.
 d) $2x^2(x - 1) + 3x(x^2 - x - 2) + 5x^2$ j) $3x\left(\frac{4}{3}x - 1\right) - 4x\left(\frac{-1}{2}x + 3\right) + 15x$
 e) $-4x^2y^3(2x - 3y) - 2xy(-4x^2y^2 - 4xy^3)$
 f) $xy(x^2 - 3x + 4) - x^2y(x + 3) + 6xy$

 Bài 3. Thực hiện phép tính (Nhân đa thức với đa thức)

- a) $(3x^2 - 4)(x + 3y)$. h) $(x + 2y)(x - 2y + 3)$. o) $-(x^2 - 2y)(x + y^2 - 1)$.
 b) $(x + 3)(x^2 + 3x)$. i) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.
 c) $(xy - 1)(xy + 5)$. j) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$. p) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)(2x - 3)$.
 d) $(3x + 5y)(2x - 7y)$. k) $(5x - 2y)(x^2 - xy + 1)$.
 e) $-(x - 1)(-x^2 + 2y)$. l) $(x^2y^2 - xy + y)(x - y)$. q) $\left(x - \frac{1}{2}y\right)\left(x - \frac{1}{2}y\right)$.
 f) $(-x^2 + 2y)(x^2 + 2y)$. m) $(x^2 - 2xy + y^2)(x - y)$.
 g) $(x + 3y)(x - 3y + 2)$. n) $-(x - y)(x^2 + xy - 1)$. r) $(x^2 - 2x + 3)\left(\frac{1}{2}x - 5\right)$.

 Bài 4. Thực hiện phép tính (nhân đa thức với đa thức)

- a) $x^2(x - 1) - (x^2 + 1)(x + 2)$. e) $(3x - 2)(2x - 1) + (-5x - 1)(3x + 2)$.
 b) $x(x - y^2) - (x^2 - y)(y + 1)$. f) $(3x - 5)(2x + 11) - (2x + 3)(3x + 7)$.
 c) $(x - 5)(x^2 + 26) + (5 - x)(1 - 5x)$. g) $(2x + 3)(x - 4) + (x - 5)(x - 2)$.
 d) $(x - y)(x^2 + y) - (x - 1)(x^2 + y^2)$. h) $(12x - 5)(4x - 1) + (3x - 7)(1 - 16x)$.

 Bài 5. Thực hiện phép tính (nhân đa thức với đa thức)

- a) $3(x - y)(2x^2 - 1)$. g) $3(2x - 1)(3x - 1) - (2x - 3)(9x - 1)$.
 b) $3(x^2 + 1)(x + y^2)$. h) $4(x - 2)(x + 1) + 2(x - 2)(x + 2)$.
 c) $-2(x^2y - 1)(x - 1)$. i) $2(3x - 1)(2x + 5) - 6(2x - 1)(x + 2)$.
 d) $-5(x^2 - 1)(y^2 - 1)$. j) $(3x + 2)(2x + 9) - 6(x + 2)(x + 1)$.
 e) $\frac{1}{2}(x - 6y)(-x - y)$. k) $\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)(16x - 1)$.
 f) $\frac{-2}{5}(3x - y)(x - 2y)$. l) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(4x - 1)$.

 Bài 6. Tính giá trị của biểu thức

- a) $A = 5x(x^2 - 3) + x^2(7 - 5x) - 7x^2$ tại $x = -5$.
 b) $B = x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$ tại $x = 10, y = -1$.

c) $C = x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$ tại $x = \frac{1}{2}; y = -1$.

d) $D = x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$ tại $x = \frac{1}{2}; y = -100$.

 Bài 7. Tính giá trị của biểu thức

a) $A = (x - 2)(x - 2) - (x - 1)(x + 1)$ tại $x = 21$.

b) $B = (x - 1)(x - 7) - (2x - 6)(x - 1)$ tại $x = 0$.

c) $C = (2x + y)(2 + y) + (2x + y)(y - 2)$ tại $x = 1; y = -1$.

d) $D = (x - 1)(x + 2) - x(x - 2) - 3x$ tại $x = 100$.

 Bài 8. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = x^3 - 30x^2 - 31x + 1$ tại $x = 31$.

b) $B = x^3 - 17x^2 - 18x + 2$ tại $x = 18$.

c) $C = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ tại $x = 16$.

d) $D = x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 10x + 10$ tại $x = -9$.

e) $E = x^5 - 8x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 6x + 1$ tại $x = 7$.

f) $F = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$ tại $x = 14$.

g) $G = x^5 - 100x^4 + 100x^3 - 100x^2 + 100x - 9$ tại $x = 99$.

 Bài 9. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

a) $A = x(x^2 + x + 1) - x^2(x + 1) - x + 5$.

b) $B = 2x(x - 1) - x(2x + 1) - (3 - 3x)$.

c) $C = 2x(6x - 4) - 5x^2(8 + 3x) + 2(5x^2 + 4x + 1) + 3x^2(5x + 6)$.

d) $D = -2(x - 7)(x + 3) + (5x - 1)(x + 4) - 3x^2 - 27x$.

e) $E = (x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 3) - (2x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 2) - (3x - 5) - 3$.

 Bài 10. Tìm x biết

a) $3(5x - 1) - x(x - 2) + x^2 - 13x = 7$.

d) $3x(x - 2) - 3(x^2 + 1) = x^2 + 1 - x(x - 2)$.

b) $4(x + 2) - 7(2x - 1) + 9(3x - 4) = 30$.

e) $5(3x + 5) - 4(2x - 3) = 5x + 3(2x + 12)$.

c) $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11$.

f) $(7x + 7) + 3x(2x - 1) - 2x(3x + 15) = -42$

 Bài 11. Tìm x biết

a) $(3x - 1)(2x + 7) - (x + 1)(6x - 5) = 7$.

b) $(3x + 2)(2x + 9) - (x + 2)(6x + 1) = 7$.

c) $(12x - 5)(4x - 1) + (3x - 7)(1 - 16x) = 81$.

d) $2(3x - 1)(2x + 5) - 6(2x - 1)(x + 2) = -6.$

e) $(2x - 1)(3 - x) + (x - 2)(x + 3) = (1 - x)(x - 2).$

f) $(2x + 3)(x - 4) + (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4).$

g) $(8x - 3)(3x + 2) - (4x + 7)(x + 4) = (2x + 1)(5x - 1) - 33.$

 Bài 12. Chứng minh rằng

a) $A = [n(3n - 1) - 3n(n - 2)] : 5, (\forall n \in \mathbb{R}).$

b) $B = [n(n + 5) - (n - 3)(n + 2)] : 6, (\forall n \in \mathbb{Z}).$

c) $C = [(n^2 + 3n - 1)(n + 2) - n^3 + 2] : 5, (\forall n \in \mathbb{Z}).$

d) $D = [(2n + 1)(n^2 - 3n - 1) - 2n^3 + 1] : 5, (\forall n \in \mathbb{Z}).$

e) $E = [(n - 1)(n + 1) - (n - 7)(n - 5)] : 12, (\forall n \in \mathbb{Z}).$

f) $F = [(6n + 1)(n + 5) - (3n + 5)(2n - 1)] : 2, (\forall n \in \mathbb{Z}).$

g) $G = [(5a - 3)(3b - 5) - (3a - 5)(5b - 3)] : 16, (\forall a, b \in \mathbb{R}).$

 **Bài 13.** Cho a, b là hai số tự nhiên. Biết rằng a chia cho 3 dư 1, b chia 3 dư 2. Chứng minh ab chia 3 dư 2.

 **Bài 14.** Cho a, b là hai số tự nhiên. Biết rằng a chia cho 5 dư 1, b chia 5 dư 2. Hỏi ab chia 5 dư bao nhiêu?

§5 PHÉP CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Chia đơn thức cho đơn thức

Ví dụ 1. Nhận thấy $(2x^3y) \cdot (3x^2y^5) = 6x^5y^6$.
 Khi đó $(6x^5y^6) : (2x^3y) = 3x^2y^5$.

Kết luận:

- Để đơn thức A chia hết cho đơn thức B thì mỗi biến của B đều là biến của A và có số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A .
- Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B ta chia hệ số với nhau và chia phần biến với nhau.

Ví dụ 2. Tính $15x^2y^2 : 5xy^2$.

2 Chia đa thức cho đơn thức

Ví dụ 3. Khi tính $(4x^4 - 8x^2y^2 + 12x^5y)$ chia cho đơn thức $-4x^2$.
 Ta làm như sau

$$\begin{aligned} & (4x^4 - 8x^2y^2 + 12x^5y) : (-4x^2) \\ &= 4x^4 : (-4x^2) - 8x^2y^2 : (-4x^2) + 12x^5y : (-4x^2) \\ &= -x^2 + 2y^2 - 3x^3y. \end{aligned}$$

Kết luận:

- Đa thức A chia hết cho đơn thức B nếu mọi hạng tử của A đều chia hết cho B .
- Muốn chia đa thức A cho đơn thức B ta chia từng hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả.

Ví dụ 4. Tính $(5xy^2 + 9xy - x^2y^2) : (-xy)$.

B LUYỆN TẬP

Luyện tập 7. Thực hiện phép tính:

a) $-8x^2y^3 : (-6xy^2)$.

b) $(3xy^2 - x^2y + 2x^2y^2) : (-4xy)$.

Luyện tập 8. Tìm đa thức A biết

a) $A \cdot (2xy^2) = -6(xy^2)^2$.

b) $-A \cdot (3x^2y)^2 = 2x^5y^4 + 4x^4y^5$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Thực hiện phép tính

- | | | |
|---|---|---|
| a) $10x^2y^4 : 5x^2y.$ | b) $-6x^4y^2 : 3xy^2.$ | c) $-8xy^5 : (-4y^5).$ |
| d) $x^3y^2 : (-7x^3y^2).$ | e) $2xy^7 : (-3xy^2).$ | f) $-5x^2y^2 : (-6xy).$ |
| g) $(-xy)^{10} : (-2xy)^5.$ | h) $12x^4y^7 : (-3xy^2)^2.$ | i) $(3x^3y^4)^2 : (-2x^5y^6).$ |
| j) $\frac{5}{4}x^4y^3 : \frac{1}{3}x^3y^3.$ | k) $\frac{3}{4}x^3y^3 : \left(\frac{-1}{2}x^2y^2\right).$ | l) $\frac{3}{4}(x^2y)^2 : \frac{1}{8}xy^2.$ |

Bài 2. Thực hiện phép tính

- | | |
|--|---|
| a) $(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : 3xy.$ | b) $(15x^3y^2 - 6x^2y - 3x^2y^2) : 6x^2y.$ |
| c) $(9x^2y^2 + 18x^2y^2 - 3xy^2) : 9xy^2.$ | d) $(6x^3y^2 - 8x^2y^3 + 4x^3y^3) : 2x^2y^2.$ |
| e) $(20x^2y^2 - 5x^2y + 15x^2y^3) : 5x^2y.$ | f) $(5x^3y^2 - 10x^4y + 20x^2y^2) : 5x^2y.$ |
| g) $(15x^2y^2 + 12x^3y^2 - 10xy^3) : 3xy^2.$ | h) $(27x^4y^2 - 18x^3y^2 + 12x^2y) : 3x^2y.$ |
| i) $(16x^5y^6 - 12x^3y^4 - 6x^3y^2) : 4x^2y^2.$ | j) $(30x^4y^3 - 25x^2y^3 - 3x^4y^4) : 5x^2y^3.$ |
| k) $\left(x^3y^3 - \frac{1}{2}x^2y^3 - x^3y^2\right) : \frac{1}{3}x^2y^2.$ | l) $\left(\frac{2}{3}x^3y^2 - x^2y + 6x^3\right) : \left(-\frac{1}{4}x^2\right).$ |

Bài 3. Tìm đơn thức A biết

- | | | |
|---|---|--|
| a) $3x^2y^5 : A = \frac{4}{5}y^3.$ | b) $4x^5y^2 : A = -\frac{1}{2}x^2y.$ | c) $\frac{-2}{5}xy^5 : A = \frac{15}{4}y^4.$ |
| d) $3x^2y^3 \cdot A = \frac{4}{5}x^4y^5.$ | e) $-xy^3 \cdot A = \frac{7}{5}x^2y^6.$ | f) $\frac{3}{4}x^2y^2 \cdot A = \frac{-5}{6}x^7y^3.$ |
| g) $A \cdot \frac{4}{3}x^2y = \frac{6}{5}x^3y^5.$ | h) $-A \cdot \frac{1}{2}xy^3 = \frac{-7}{8}x^3y^6.$ | i) $-A \cdot (-4xy)^2 = \frac{6}{7}x^6y^6.$ |

Bài 4. Tìm đơn thức B biết

- | | |
|---|---|
| a) $(B + 2x^2y^3) \cdot (-3xy) = -3x^2y^2 - 6x^3y^4.$ | b) $2xy^2(B - x^3y) = 2x^3y^2 - 2x^4y^3.$ |
| c) $(-B - 3y) \cdot (-3x^2y) = 9x^2y^2 + 6x^5y^7.$ | d) $-5x^5y(-xy^4 + B) = -10x^5y^5 + 5x^6y^5.$ |
| e) $(2x^3y - 5xy^3) : 3xy = B - \frac{5}{3}y^2.$ | f) $\left(4x^4y^4 - \frac{5}{4}x^5y^5\right) : 3x^2y^2 = B - \frac{5}{12}x^3y^3.$ |

§1 HIỆU HAI BÌNH PHƯƠNG, BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Hằng đẳng thức

Ví dụ 1. Khi thực hiện phép nhân $a \cdot (a + b)$ ta được $a \cdot (a + b) = a^2 + ab$

Như vậy đẳng thức $a \cdot (a + b) = a^2 + ab$ là đẳng thức đúng và khi thay a, b bởi các giá trị khác nhau thì hai vế của đẳng thức luôn nhận giá trị bằng nhau.

Kết luận: Hằng đẳng thức là đẳng thức mà hai vế luôn cùng nhận một giá trị khi thay các chữ trong hằng đẳng thức bằng các số tùy ý.

2 Hiệu hai bình phương.

Ví dụ 2. Thực hiện phép nhân $(a - b)(a + b)$ ta được $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Như vậy $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ gọi là hằng đẳng thức hiệu hai bình phương.

Tổng quát: Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

Ví dụ 3. Tính nhanh $50^2 - 48^2 = (50 - 48)(50 + 48) = 2 \cdot 98 = 196$.

Ví dụ 4. Viết thành tích $4x^2 - 25y^2 = (2x - 5y)(2x + 5y)$

3 Bình phương của một tổng

Ví dụ 5. Khi ta thực hiện phép tính $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Như vậy $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gọi là hằng đẳng thức bình phương của một tổng.

Tổng quát: Với A, B là hai biểu thức tùy ý ta có $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Ví dụ 6. Tính nhanh $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + 9y^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

Ví dụ 7. Viết gọn $9x^2 + 12x + 4$ thành bình phương của một tổng $9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = (3x + 2)^2$

4 Bình phương của một hiệu.

Ví dụ 8. Khi ta thực hiện phép tính $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

Như vậy $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ gọi là hằng đẳng thức bình phương của một hiệu.

Ví dụ 9. Tính nhanh $(2x^2 - 1)^2 = 4x^4 - 2.2x^2 + 1 = 4x^4 - 4x^2 + 1$

Ví dụ 10. Viết gọn $9x^2 - 24xy + 16y^2$ thành bình phương của một hiệu $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x)^2 - 2.3x.4y + (4y)^2 = (3x - 4y)^2$

B BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Triển khai các biểu thức sau theo hằng đẳng thức

- | | | | |
|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $(x + 1)^2$ | b) $(4 + x)^2$ | c) $(6 - x)^2$ | d) $(x - 5)^2$ |
| e) $(5x + 1)^2$ | f) $(2x + 3)^2$ | g) $(2x - 1)^2$ | h) $(3x - 2)^2$ |
| i) $(x + 2y)^2$ | j) $(x + 5y)^2$ | k) $(x - 2y)^2$ | l) $(2x - y)^2$ |
| m) $(3x + 5y)^2$ | n) $(2x + 3y)^2$ | o) $(2x - 3y)^2$ | p) $(2x - 5y)^2$ |
| q) $(x^2 + 9)^2$ | r) $(2x^2 + 1)^2$ | s) $(x^2 - y^2)^2$ | t) $(3x - y^2)^2$ |
| u) $(x + 2y^2)^2$ | v) $(2x + 3y^2)^2$ | w) $(4x - 2y^2)^2$ | x) $(4x^2 - 2y)^2$ |

Bài 2. Triển khai các biểu thức sau theo hằng đẳng thức

- | | | |
|---|---|---|
| a) $x^2 - 4$ | b) $1 - 4x^2$ | c) $4x^2 - 9$ |
| d) $9 - 25x^2$ | e) $4x^2 - 25$ | f) $9x^2 - 36$ |
| g) $(3x)^2 - y^2$ | h) $x^2 - (2y)^2$ | i) $(2x)^2 - y^2$ |
| j) $(3x)^2 - 9y^4$ | k) $16x^2 - (y^2)^2$ | l) $x^4 - (3y^2)^2$ |
| m) $(x - 1)(x + 1)$ | n) $(x - 5)(x + 5)$ | o) $(x - 6)(6 + x)$ |
| p) $(2x + 1)(2x - 1)$ | q) $(x - 2y)(2y + x)$ | r) $(5x - 3y)(3y + 5x)$ |
| s) $\left(\frac{1}{x} - 5\right)\left(\frac{1}{x} + 5\right)$ | t) $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$ | u) $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$ |
| v) $\left(\frac{x}{y} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{2}{3}\right)$ | w) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)$ | x) $\left(2x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3} + 2x\right)$ |
| y) $\left(2x + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5} - 2x\right)$ | z) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}x\right)$ | |

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau:

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2$ | b) $-(x + 1)^2 - (x - 1)^2$ | c) $(x + 2y)^2 - (x - 2y)^2$ |
| d) $(3x + y)^2 + (x - y)^2$ | e) $-(x + 5)^2 - (x - 3)^2$ | f) $(3x - 2)^2 - (3x - 1)^2$ |
| g) $(x - 4y)^2 + (x + 4y)^2$ | h) $-(-2x + 3)^2 - (5x - 3)^2$ | i) $(-2x + 3)^2 - (5x - 3)^2$ |
| j) $(2x + 1)^2 + (-3x - 1)^2$ | k) $-(x - y)^2 - (2x + y)^2$ | l) $-(x + 1)^2 + (x - 1)^2$ |
| m) $(2x + 7)^2 + (-2x - 3)^2$ | n) $-(2x - y)^2 - (x + 3y)^2$ | o) $-(2x + 7)^2 + (-2x - 3)^2$ |

 Bài 4. Thực hiện phép tính

- | | |
|--|---|
| a) $x(1 - x) + (x - 1)^2$ | b) $(x - 3)^2 - x^2 + 10x - 7$ |
| c) $(x + 2)^2 - (x - 3)(x + 1)$ | d) $(x + 4)(x - 2) - (x - 3)^2$ |
| e) $(x - 2)^2 + (x - 1)(x + 5)$ | f) $(x + 3)(x - 3) - x(23 + x)$ |
| g) $(1 - 2x)(5 - 3x) + (4 - x)^2$ | h) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 1)$ |
| i) $(x + 1)^2 + (x - 2)(x + 2) - 4x$ | j) $(x + 2)^2 - (x + 3)(x - 3) + 10$ |
| k) $(x + 4)^2 + (x + 5)(x - 5) - 2x(x + 1)$ | l) $(x - 1)^2 - (x - 4)(x + 4) + (x + 3)^2$ |
| m) $(x - 1)^2 - 2(x + 3)(x - 3) + 4x(x - 4)$ | n) $(y - 3)(y + 3)(y^2 + 9) - (y^2 + 2)(y^2 - 2)$ |

 Bài 5. Thu gọn về hằng đẳng thức:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $4x^4 - 4x^2 + 1$ | b) $4x^2 - 12x + 9$ | c) $36 + x^2 - 12x$ |
| d) $1 - 10x + 25x^2$ | e) $x^4 + 81 + 18x^2$ | f) $4x^2 - 20x + 25$ |
| g) $x^2 + 4y^4 - 4xy^2$ | h) $x^2 + 10xy + 25y^2$ | i) $9y^2 - 24xy + 16x^2$ |

 Bài 6. Thu gọn về hằng đẳng thức:

- | | |
|---|--|
| a) $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1) + 1$ | b) $(3x - 2y)^2 + 4(3x - 2y) + 4$ |
| c) $(x + 3)^2 + (x - 2)^2 - 2(x + 3)(x - 2)$ | d) $(3x - 5)^2 - 2(3x - 5)(3x + 5) + (3x + 5)^2$ |
| e) $(x - y)^2 + (x + y)^2 - 2(x + y)(x - y)$ | f) $(5 - x)^2 + (x + 5)^2 - (2x + 10)(x - 5)$ |
| g) $(x - 2)^2 + (x + 1)^2 + 2(x - 2)(-1 - x)$ | h) $(2x + 3y)^2 + (2x - 3y)^2 - 2(4x^2 - 9y^2)$ |

 Bài 7. Tính

- a) $A = 8(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1)$
- b) $B = (1 - 3)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{16} + 1)$
- c) $C = (5 - 1)(5 + 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1) \dots (5^{16} + 1)$
- d) $D = 15(4^2 + 1)(4^4 + 1) \dots (4^{64} + 1)$
- e) $E = 24(5^2 + 1)(5^4 + 1)(5^8 + 1) \dots (5^{128} + 1) + (5^{256} - 1)$

 Bài 8. Tính giá trị của các biểu thức sau

- a) $A = (2x + 3)^2 - (2x - 1)^2 - 6x$ tại $x = 201$

b) $B = (2x + 5)^2 - 4(x + 3)(x - 3)$ tại $x = \frac{1}{20}$

c) $C = x^2 - 8xy + 16y^2$ tại $x - 4y = 5$

d) $D = 9x^2 + 1620 - 12xy + 4y^2$ tại $3x - 2y = 20$

 Bài 9. Tìm x biết

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $25 - x^2 = 0$

c) $-x^2 + 36 = 0$

d) $4x^2 - 4 = 0$

e) $4x^2 - 36 = 0$

f) $4x^2 - 36 = 0$

g) $(3x + 1)^2 - 16 = 0$

h) $(2x - 3)^2 - 49 = 0$

i) $(2x - 5)^2 - x^2 = 0$

j) $(x + 3)^2 - x^2 = 45$

k) $(5x - 4)^2 - 49x^2 = 0$

l) $16(x - 1)^2 - 25 = 0$

 Bài 10. Tìm x biết

a) $(2x - 3)^2 - (x - 1)^2 = 0$

b) $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 0$

c) $(3x - 5)^2 - (x + 1)^2 = 0$

d) $(x + 2)^2 - (2x - 5)^2 = 0$

e) $(3x - 1)^2 - (x + 5)^2 = 0$

f) $(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 = 0$

g) $(3x - 4)^2 - (x + 2)^2 = 0$

h) $(2x - 1)^2 - (3 - x)^2 = 0$

i) $(5x - 1)^2 - (x + 1)^2 = 0$

 Bài 11. Tìm x biết

a) $(2x - 1)^2 - (4x^2 - 1) = 0$

b) $(x + 2)^2 - x(x - 3) = 2$

c) $(x - 5)^2 - x(x + 2) = 5$

d) $(x - 1)^2 + x(4 - x) = 11$

e) $(x - 3)(x + 3) = (x - 5)^2$

f) $(2x + 1)^2 - 4x(x - 1) = 17$

g) $(3x + 1)^2 - 9x(x - 2) = 25$

h) $(3x - 2)(3x + 2) - 9(x - 1)x = 0$

i) $(x + 2)^2 - (x - 2)(x + 2) = 0$

j) $(x + 2)^2 - (x - 3)(x + 3) = -3$

k) $(3x + 2)^2 - (3x - 5)(3x + 2) = 0$

l) $(x + 3)^2 - (x + 2)(x - 2) = 4x + 17$

m) $3(x - 1)^2 + (x + 5)(2 - 3x) = -25$

n) $(x + 3)^2 + (x - 2)^2 = 2x^2$

 Bài 12. Tìm x, y biết

a) $x^2 + y^2 + 4y + 13 = 6x$

b) $x^2 + y^2 + 17 = 2x - 8y$

c) $x^2 + y^2 + 45 = 12y - 6x$

d) $4x^2 + 9y^2 + 2 = 4x + 6y$

e) $9x^2 + 4y^2 + 26 + 4y = 30x$

f) $9x^2 + y^2 + 20 = 12x + 8y$

g) $x^2 + 49y^2 + 5 + 14y = 4x$

h) $16x^2 + 25y^2 + 13 = 20y + 24x$

 **Bài 13.** Chứng minh rằng với mọi x thì

a) $A = x^2 - x + 1 > 0$

b) $B = x^2 + x + 1 > 0$

c) $C = x^2 + 2x + 2 > 0$

d) $A = x^2 - 5x + 10 > 0$

e) $B = x^2 - 8x + 20 > 0$

f) $C = x^2 - 8x + 17 > 0$

g) $A = x^2 - 6x + 10 > 0$

h) $B = 9x^2 - 6x + 2 > 0$

i) $C = 2x^2 + 8x + 15 > 0$

 **Bài 14.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a) $A = x^2 - x + 3$

b) $B = x^2 + x + 1$

c) $C = x^2 - 4x + 1$

d) $D = x^2 - 5x + 7$

e) $E = x^2 + 2x + 2$

f) $F = x^2 - 3x + 1$

g) $G = 3 + x^2 + 3x$

h) $H = 3x^2 + 3 - 5x$

i) $I = 4x + 2x^2 + 3$

j) $K = 4x^2 + 3x + 2$

k) $M = (x - 1)(x - 3) + 11$

l) $N = (x - 3)^2 + (x - 2)^2$

 **Bài 15.** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

a) $A = 4x - x^2 + 1$

b) $B = 3 - 4x - x^2$

c) $C = 8 - x^2 - 5x$

d) $D = -4 - x^2 + 6x$

e) $E = -10 - x^2 - 6x$

f) $F = -x^2 + 13x + 1$

g) $G = -7 - 4x^2 + 8x$

h) $H = -4x^2 - 12x$

i) $I = 3x - 9x^2 - 1$

j) $K = 7 - 9x^2 - 8x$

k) $M = 2x - 4x^2 - 7$

l) $N = -4x^2 + 4x + 3$

 **Bài 16.** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

a) $A = -3x^2 + 12x - 1$

b) $B = 9 + 4x - 2x^2$

c) $C = 9x + 2 - 3x^2$

d) $D = 2x - 2 - 3x^2$

e) $E = 7x - 3x^2 + 5$

f) $F = 2 - 2x^2 - 9x$

g) $G = 15 + 7x - 5x^2$

h) $H = 10x - 6x^2 + 5$

i) $I = 11 - 5x^2 + 10x$

j) $K = -3x^2 - 6x - 12$

 **Bài 17.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a) $A = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$

b) $B = 7 + x^2 + y^2 - 2(x + y)$

c) $C = 2 + x^2 + y^2 + 2(x + y)$

d) $D = x^2 - 4x + y^2 + 2y - 10$

e) $E = 2x - 2xy + 2x^2 + y^2$

f) $F = x^2 + 2y^2 + 2xy + 5 - 2y$

g) $G = x^2 - x + 2y^2 - 4y + 3$

 **Bài 18.** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

a) $A = -x^2 - 4x - y^2 + 2y$

b) $B = 1 - 5x^2 - y^2 - 4xy + x$

c) $C = -x^2 + 2x - y^2 - 4y + 6$

d) $D = -x^2 - 2x - y^2 + 4y + 6$

e) $E = -x^2 - y^2 - 2(x + y) + 3$

f) $-F = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1$

§2 LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

A Lý thuyết

1 Lập phương của một tổng

Ví dụ 1. Khi tính $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
 Hằng thức $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ gọi là hằng đẳng thức lập phương của một tổng.

Ví dụ 2. Khai triển hằng thức $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 4 + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Ví dụ 3. Thu gọn $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = x^3 + 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 + 4^3 = (x + 4)^3$.

Kết luận

- Với hai biểu thức A và B tùy ý, ta có $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.
- Hằng đẳng thức trên còn được viết dưới dạng $(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$.

2 Lập phương của một hiệu

Ví dụ 4. Khi tính $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
 Hằng thức $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ gọi là hằng đẳng thức lập phương của một hiệu.

Ví dụ 5. Khai triển hằng thức $(x - 3)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 9 - 27 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$.

Ví dụ 6. Thu gọn $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3$.

Kết luận

- Với hai biểu thức A và B tùy ý, ta có $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.
- Hằng đẳng thức trên còn được viết dưới dạng $(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$.

B Bài tập tự luyện

Bài 1. Triển khai các biểu thức sau theo hằng đẳng thức:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|-------------------|
| a) $(x + 3)^3$. | b) $(1 + x)^3$. | c) $(2 - x)^3$. | d) $(x - 3)^3$. |
| e) $(2x + 1)^3$. | f) $(3x + 2)^3$. | g) $(2x - 3)^3$. | h) $(3x - 1)^3$. |
| i) $(x + 2y)^3$. | j) $(2x + y)^3$. | k) $(3x - y)^3$. | l) $(x - 3y)^3$. |
| m) $(2x + 3y)^3$. | n) $(3x + 2y)^3$. | o) $(3x - 2y)^3$. | p) $(4x - y)^3$. |

 **Bài 2.** Viết gọn lại thành lập phương của một tổng hoặc một hiệu.

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. | b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. | c) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. |
| d) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. | e) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$. | f) $-x^3 + 9x^2 - 27x + 27$. |
| g) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$. | h) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. | i) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$. |

 **Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau:

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $(x - 2)^3 + (x + 2)^3$. | b) $(x - 1)^3 - (x + 1)^3$. | c) $(1 - x)^3 + (x + 3)^3$. |
| d) $(x + 2y)^3 - (x - 2y)^3$. | e) $(y - x)^3 - (2x - y)^3$. | f) $(2x + y)^3 - 2(y - x)^3$. |
| g) $(2x - 3)^3 - 2x(2x + 1)^2$. | h) $(3x - 1)^3 - 27x^2(x + 1)$. | i) $(2x + 1)^3 - 8x(x - 1)^2$. |

 **Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau:

- | | |
|--|--|
| a) $(x + 1)^3 - (x - 4)(x + 4) - x^3$. | b) $(x + 2)^3 - x(x + 3)(x - 3) - 12x^2 - 8$. |
| c) $(x - 2)^3 - x(x - 2)(x + 2) + 6x(x - 3)$. | d) $x(x - 5)(x + 5) - (x - 5)^3 + 100x$. |
| e) $(x - 3y)^3 - (x - 2y)(2y + x)$. | f) $(-x - 2y)^3 + x(2y - x)(x + 2y)$. |
| g) $-(2x - y)^3 - x(2x - y)^2 - y^3$. | h) $-x(x - y)^2 + (x - y)^3 + y^2(y - 2x)$. |

 **Bài 5.** Tính giá trị của biểu thức.

- | | |
|--|--|
| a) $A = x^3 - 3x^2 + 3x + 1\ 012$ tại $x = 11$. | b) $B = x^3 - 6x^2 + 12x - 108$ tại $x = 12$. |
| c) $C = x^3 + 9x^2 + 27x + 2\ 027$ tại $x = -23$. | d) $D = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ tại $x = -2y$. |

 **Bài 6.** Tìm x biết:

- | | |
|---|--|
| a) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$. | b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27$. |
| c) $x^2 - 8x + 16 = 5(4 - x)^3$. | d) $(2 - x)^3 = 6x(x - 2)$. |
| e) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x - 1)^2 = -10$. | f) $(3 - x)^3 - (x + 3)^3 = 36x^2 - 54x$. |

§3 TỔNG VÀ HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG.

A LÝ THUYẾT

1 Tổng hai lập phương.

Ví dụ 1. Khi ta tính tích $a+b$ với a^2-ab+b^2 ta được $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$; Đẳng thức $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ gọi là hằng đẳng thức tổng hai lập phương.

- ⚠ Với A, B là hai biểu thức tùy ý, ta có $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$;
 • Biểu thức A^2-AB+B^2 còn gọi là bình phương thiếu của một hiệu.

Ví dụ 2. Khai triển theo hằng đẳng thức $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$.

2 Hiệu hai lập phương.

Ví dụ 3. Khi ta tính tích $a-b$ với a^2+ab+b^2 ta được $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$; Đẳng thức $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ gọi là hằng đẳng thức hiệu hai lập phương.

- ⚠ Với A, B là hai biểu thức tùy ý, ta có $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$;
 • Biểu thức A^2+AB+B^2 còn gọi là bình phương thiếu của một tổng.

Ví dụ 4. Khai triển theo hằng đẳng thức $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

B BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Khai triển theo hằng đẳng thức

- | | | | |
|--------------|-----------------|-----------------|----------------|
| a) x^3+1 ; | d) x^3-27 ; | g) x^3-y^3 ; | j) $1+27y^3$; |
| b) x^3+8 ; | e) x^3+y^3 ; | h) x^3-8y^3 ; | k) $1-8x^3$; |
| c) x^3-8 ; | f) x^3+8y^3 ; | i) $1+8x^3$; | l) $27x^3-1$. |

Bài 2. Viết thành vế kia của hằng đẳng thức

- | | | |
|------------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $(x+1)(x^2-x+1)$; | e) $(x-3)(x^2+3x+9)$; | i) $(3x+2)(9x^2-6x+4)$; |
| b) $(x-1)(x^2+x+1)$; | f) $(x-4)(x^2+4x+16)$; | j) $(x^2+3)(x^4-3x^2+9)$; |
| c) $(x-2)(x^2+2x+4)$; | g) $(x-5)(x^2+5x+25)$; | k) $(x^2+2)(x^4-2x^2+4)$; |
| d) $(x+2)(x^2-2x+4)$; | h) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$; | l) $(x^3-2)(x^6+2x^3+4)$. |

Bài 3. Viết thành vế kia của hằng đẳng thức

- a) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$; e) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$;
 b) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$; f) $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$;
 c) $(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$; g) $(4x - 3y)(16x^2 + 9y^2 + 12xy)$;
 d) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$; h) $(3x - 4y)(9x^2 + 16y^2 + 12xy)$.

 Bài 4. Thực hiện phép tính

- a) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^3 - 9)$; f) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 1)(x + 1)$;
 b) $x(x - 1)^2 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; g) $-(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + x(x + 4)(x - 4)$;
 c) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) - (x + 5)^3$; h) $(x + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)(x^2 - x + 1)$;
 d) $(x + 5) \cdot (x^2 - 5x + 25) - x(x - 4)^2 + 16x$;
 e) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + (1 - x)(1 + x + x^2)$; i) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

 Bài 5. Thực hiện phép tính:

- a) $(-x - 2)^3 + (2x - 4)(x^2 + 2x + 4) - x^2(x - 6)$;
 b) $(x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4)$;
 c) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 3(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$;
 d) $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) + (3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$.

 Bài 6. Cho biểu thức $A = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 7(x^3 + 1)$.

- a) Rút gọn biểu thức A ;
 b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = \frac{-1}{2}$.

 Bài 7. Cho biểu thức $A = (x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) + 3y(x + 3y)(x - 3y) - x(3xy + 7x - 7)$.

- a) Chứng minh rằng biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến y ;
 b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = -1$.

 Bài 8. Cho biểu thức $A = (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2) - 3y(x + 3y)(x - 3y) + x(3xy - 7x + 7)$.

- a) Chứng minh rằng biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến y ;
 b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = -1$.

 Bài 9. Tìm x biết:

- a) $(x - 1)(x^2 + x + 1) + x(x + 2)(2 - x) = 5$;
 b) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 8x(x^2 + 2) = 17$;
 c) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - x(x - 2)(x + 2) = 21$;
 d) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x(x^2 - 8)$;
 e) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 2$.

§4 PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A Lý thuyết

1 Phân tích bằng cách đặt nhân tử chung

Phân tích đa thức thành nhân tử là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

Ví dụ 1. Với đa thức $x^3 + x^2$ ta thấy có chung x^2 nên ta làm như sau

$$x^3 + x^2 = x^2(x + 1).$$

Khi đó x^2 gọi là nhân tử chung.

Ví dụ 2. Phân tích đa thức $2(x + y) - 3x(x + y) = (x + y)(2 - 3x)$.

! Đưa dấu “-” ra ngoài để có nhân tử chung $a - b = -(b - a)$.

2 Phân tích bằng cách nhóm hạng tử

Ví dụ 3. Với đa thức $ax + bx + cx + a + b + c$ ta có thể làm như sau

$$ax + bx + cx + a + b + c = x(a + b + c) + a + b + c = (a + b + c)(x + 1).$$

Ví dụ 4. Với đa thức $xy + 1 + x + y$ ta sẽ nhóm hai hạng tử xy và x lại với nhau, y và 1 lại với nhau.

$$(xy + x) + (y + 1) = x(y + 1) + (y + 1) = (y + 1)(x + 1).$$

3 Phân tích bằng cách dùng hằng đẳng thức

Ví dụ 5. Với đa thức $x^2 - 8x + 16$ ta thấy nó là một hằng đẳng thức nên ta sẽ làm như sau $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$.

Ví dụ 6. Với đa thức $x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$.

B Bài tập tự luyện

Bài 1. Phân tích thành nhân tử (Đặt nhân tử chung)

1) $x^2 - x$;

3) $x^2 + 12x$;

5) $3x^2 - x$;

7) $x^2 - xy$;

2) $x^2 - 8x$;

4) $x^3 - 4x$;

6) $2xy + y^2$;

8) $x^3 - x^2y$;

- | | | | |
|-------------------|---------------------|-----------------------|------------------------|
| 9) $3x - 3y$; | 16) $3x^2 + 6x$; | 23) $6x^3 + 9x^2$; | 30) $3xy - 9x^2$; |
| 10) $10x + 15y$; | 17) $4x^2 + 6x$; | 24) $9x - 16x^2$; | 31) $6x^2 - 3xy$; |
| 11) $3x - 12y$; | 18) $2x^2 + 6x$; | 25) $yx^3 + 8y$; | 32) $3xy^2 - 3x^3$; |
| 12) $4x - 20$; | 19) $2x^3 - 8x$; | 26) $x^3y + 5x^2y$; | 33) $3xy + 6xz$; |
| 13) $6x - 2x^2$; | 20) $2x^3 - 3x^2$; | 27) $xy^2 - 25x$; | 34) $18x^2y - 12x^3$; |
| 14) $2x - 4x^2$; | 21) $3x^4 - 24x$; | 28) $7x^2 + 14xy$; | 35) $8xy^2 - 2x^2y$; |
| 15) $3x^2 - 6x$; | 22) $4x^2 - 12x$; | 29) $4x^2y - 6xy^2$; | 36) $3xy^2 + 6xyz$. |

 Bài 2. Phân tích thành nhân tử (Đặt nhân tử chung)

- | | | |
|---------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $x^3 + 2x^2 + x$; | 6) $5x^2y - 35xy + 60y$; | 11) $2x^2y - 3xy^2 + 4x^2y^2$; |
| 2) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$; | 7) $2x^2 + 5x^3 + x^2y$; | 12) $-3x^2y + 6x^2y^2 - 9xy^2$; |
| 3) $5x^3 - 10x^2 + 5x$; | 8) $2x^3y - 8x^2y + 8xy$; | 13) $2x^3y^4 - 4x^5y^6 + 6y^7x^8$; |
| 4) $2x^3 - 12x^2 + 18x$; | 9) $4x^2y - 8xy^2 + 18x^2y^2$; | 14) $2x^4y^3 - 3x^2y^4 + 5x^3y^4$. |
| 5) $8x^2y - 8xy + 2x$; | 10) $6x^2y^2 + 4xy^2 - 12x^3y$; | |

 Bài 3. Phân tích thành nhân tử (Đặt nhân tử chung)

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $5(x - y) - y(x - y)$; | 11) $3x(x - 2) + 5(2 - x)$; | 21) $5x(x - 1) - 15x(1 - x)$; |
| 2) $x(y + 1) + 8(y + 1)$; | 12) $7x(x - y) - (y - x)$; | 22) $10x(x - y) - 6y(y - x)$; |
| 3) $5(x - y) - x(x - y)$; | 13) $3x(x - 1) - 2y(1 - x)$; | 23) $3x(x - 2y) + 6y(2y - x)$; |
| 4) $z(x + y) - 5(x + y)$; | 14) $3(x - y) - 5x(y - x)$; | 24) $20x(x + y) - 8y(y + x)$; |
| 5) $3x(x + 5) - 2(5 + x)$; | 15) $x(x - y) + y(y - x)$; | 25) $xy^2(x - 3) + 4x(3 - x)$; |
| 6) $x^2(x - 1) + 4(x - 1)$; | 16) $x(y^2 - 1) + 4(1 - y^2)$; | 26) $2x(x + y) - 6x^2(x + y)$; |
| 7) $5x(x - 1) - (1 - x)$; | 17) $x(2y - 1) - 5(2y - 1)$; | 27) $9x^2(y + z) + 3x(y + z)$; |
| 8) $x(y - 1) - y(1 - y)$; | 18) $9(x - 2y) + x(2y - x)$; | 28) $2x^2(y - 1) - 2x(y - 1)$; |
| 9) $y(x - 2) - 3(2 - x)$; | 19) $10x(x - y) - 8y(y - x)$; | 29) $10xy(x - y) - 6y(y - x)$. |
| 10) $3(x - y) - y(y - x)$; | 20) $3x(x - y) + 6(y - x)$; | |

 Bài 4. Phân tích thành nhân tử (Đặt nhân tử chung)

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 1) $x(x - 1) + (1 - x)^2$; | 3) $2x(x - 2) - (x - 2)^2$; | 5) $3x(x + 2) - 5(x + 2)^2$; |
| 2) $(x + 1)^2 - 3(x + 1)$; | 4) $3x(x - 1)^2 - (1 - x)^3$; | 6) $4x(x - y) + 3(y - x)^2$. |

 Bài 5. Phân tích thành nhân tử (Nhóm hạng tử)

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 1) $2y(x + 2) - 3x - 6$; | 3) $2(x + 5) - x^2 - 5x$; | 5) $x(x + y) - 5x - 5y$; |
| 2) $3(x + 4) - x^2 - 4x$; | 4) $x^2 + 6x - 3(x + 6)$; | 6) $x(x - y) + 2x - 2y$; |

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 7) $2x - 6 + 5x(x - 3);$ | 11) $x^2(x - y) + 2x - 2y;$ | 15) $xz + yz - 5(x + y);$ |
| 8) $3x(x - 2) - 4x + 8;$ | 12) $x(x + y) + ax + ay;$ | 16) $5(x - y) + ax - ay.$ |
| 9) $x(x + y) - 3x - 3y;$ | 13) $a(x + y) - 4x - 4y;$ | |
| 10) $x(x + y) - 7x - 7y;$ | 14) $a(x - y) + bx - by;$ | |

 Bài 6. Phân tích thành nhân tử (Nhóm hạng tử)

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1) $x^2 + 3x - x - 3;$ | 13) $x^2 + 5xy + x + 5y;$ | 25) $x^3 + 6x^2 + x + 6;$ |
| 2) $x^2 - xy + x - y;$ | 14) $(x + 1)y - 2x - 2;$ | 26) $9x^3 - 9x^2y - 4x + 4y;$ |
| 3) $xy + y^2 - x - y;$ | 15) $x^2 - 2xy + x - 2y;$ | 27) $2x^2 - 6xy + 5x - 15y;$ |
| 4) $xy + y - 2x - 2;$ | 16) $x^2 - 2x + 2y - xy;$ | 28) $x^2y - x^3 - 9y + 9x;$ |
| 5) $x^3 - 2x^2 + x - 2;$ | 17) $x^2 + xy - 2x - 2y;$ | 29) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8;$ |
| 6) $x^4 + x^3y - x - y;$ | 18) $x^2 - xy - 6x + 6y;$ | 30) $5xy^2 - 5x + y^2 - 1;$ |
| 7) $x^2 + xy - xz - yz;$ | 19) $2xy + 3z + 6y + xz;$ | 31) $4x^3 - 4x^2 - 9x + 9;$ |
| 8) $xy + xz + 3y + 3z;$ | 20) $3x^2 - 3xy - 5x + 5y;$ | 32) $10ax - 5ay - 2x + y;$ |
| 9) $x^2 - 3x + xy - 3y;$ | 21) $x^2 - 6x - 2xy + 12y;$ | 33) $a^3 - a^2x - ay + xy;$ |
| 10) $xy - 3x - y^2 + 3y;$ | 22) $x^2 + 3xy - 5x - 15y;$ | 34) $x^2 + ab + ax + bx;$ |
| 11) $x^2 + 2x - xy - 2y;$ | 23) $3x^2 - 2x - 3xy + 2y;$ | 35) $ax - bx + ab - x^2.$ |
| 12) $3x^2 - x - 3xy + y;$ | 24) $3x^2 - 3xy - 5x + 5y;$ | |

 Bài 7. Phân tích thành nhân tử (Nhóm hạng tử)

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1) $ax^2 - 3axy + bx - 3by;$ | 6) $2ax - bx + 3cx - 2a + b - 3c;$ |
| 2) $5x^2y + 5xy^2 - a^2x - a^2y;$ | 7) $ax - bx - 2cx - 2a + 2b + 4c;$ |
| 3) $2ax^3 + 6ax^2 + 6ax + 18a;$ | 8) $3ax^2 + 3bx^2 + ax + bx + 5a + 5b;$ |
| 4) $10xy^2 - 5by^2 + 2ax - ab;$ | 9) $ax^2 - bx^2 - 2ax + 2bx - 3a + 3b.$ |
| 5) $ax - bx + cx - 3a + 3b - 3c;$ | |

 Bài 8. Phân tích thành nhân tử (Hằng đẳng thức)

- | | | |
|------------------|-----------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 - 9;$ | 7) $4x^2 - 25;$ | 13) $9x^2 + 6xy + y^2;$ |
| 2) $49 - x^2;$ | 8) $x^2 - 16y^2;$ | 14) $4x^2 - 12xy + 9y^2;$ |
| 3) $4y^4 - 1;$ | 9) $9x^2 - 1;$ | 15) $x^2 + 4y^2 + 4xy;$ |
| 4) $4x^2 - 1;$ | 10) $x^2 + 6x + 9;$ | 16) $x^4 + 4 - 4x^2;$ |
| 5) $x^2 - 9y^2;$ | 11) $4x^2 + 4x + 1;$ | 17) $x^4 + 2x^2 + 1;$ |
| 6) $25x^2 - 9;$ | 12) $10x - x^2 - 25;$ | 18) $x^4 - 2x^2 + 1;$ |

19) $1 - 8x^3$;

21) $8x^3 - y^3$;

23) $x^3 + \frac{1}{27}$;

20) $x^3 + 27$;

22) $8x^3 - \frac{1}{8}$;

24) $x^3 - \frac{8}{125}$.

Câu 1. Phân tích thành nhân tử (Hằng đẳng thức)

a) $9 - (x - y)^2$

f) $16x^2 - (x + 1)^2$

k) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

b) $(x - y)^2 - 4$

g) $(4x - 5)^2 - 25$

l) $(2xy + 1)^2 - (2x + y)^2$

c) $(x + 2)^2 - y^2$

h) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$

m) $9(x - y)^2 - 4(x + y)^2$

d) $(x + 5)^2 - y^2$

i) $(2x - 3)^2 - 25y^2$

n) $(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2$

e) $(x + y)^2 - 9x^2$

j) $(3x + 1)^2 - (x + 1)^2$

o) $(4x^2 - 4x + 1) - (x + 1)^2$

Câu 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - x - y^2 - y$

g) $x^2 - 4y^2 + x + 2y$

m) $4x^2 - 9y^2 - 4x - 6y$

b) $x^2 - y^2 + x - y$

h) $x^2 - y^2 - 2x - 2y$

n) $x^3 - y^3 + 7x^2 - 7y^2$

c) $3x - 3y + x^2 - y^2$

i) $x^2 - 4y^2 + 2x + 4y$

o) $x^3 + 4x - (y^3 + 4y)$

d) $5x - 5y + x^2 - y^2$

j) $x(x - y) + x^2 - y^2$

p) $x^3 + y^3 + 2x + 2y$

e) $x^2 - 5x - y^2 - 5y$

k) $x^2 - y^2 + 10x - 10y$

q) $x^3 - y^3 - 2x^2y + 2xy^2$

f) $x^2 - y^2 + 2x - 2y$

l) $x^2 - y^2 + 20x + 20y$

r) $x^3 - 4x^2 + 4x - xy^2$

Câu 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - 2x + 1 - y^2$

h) $x^2 - 6x + 9 - y^2$

o) $x^2 - y^2 + 14x + 49$

b) $x^2 + 6x + 9 - y^2$

i) $x^2 + 8x + 16 - y^2$

p) $1 - 8x + 16x^2 - y^2$

c) $x^2 + 2x - y^2 + 1$

j) $4x^2 - y^2 + 4x + 1$

q) $x^2 - 16y^2 + 4x + 4$

d) $x^2 - y^2 + 4x + 4$

k) $4x^2 + 6y - y^2 - 9$

r) $x^2 + 10x - 16y^2 + 25$

e) $4a^2 - 4a + 1 - b^2$

l) $x^2 - 6x - 4y^2 + 9$

s) $y^2 - 14y - 25x^2 + 49$

f) $x^2 + 4x - y^2 + 4$

m) $y^2 - x^2 - 12y + 36$

t) $x^2 - 4y^2 + 16x + 64$

g) $x^2 - y^2 - 6y - 9$

n) $x^2 - y^2 - 2y - 1$

u) $16y^2 - 4x^2 - 12x - 9$

Câu 4. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - 2xy - 4 + y^2$

f) $x^2 + 2xy - 9 + y^2$

k) $x^2 - 16 - 4xy + 4y^2$

b) $4 - x^2 - 2xy - y^2$

g) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$

l) $25 - x^2 + 2xy - y^2$

c) $x^2 + 4y^2 - 4xy - 4$

h) $x^2 - 2xy + y^2 - 4$

m) $25 - x^2 + 4xy - 4y^2$

d) $x^2 - 2xy - 25 + y^2$

i) $x^2 - 2xy + y^2 - 49$

n) $4x^2 + 4xy + y^2 - 9$

e) $9 - x^2 - 2xy - y^2$

j) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$

o) $x^2 + 4xy - 16 + 4y^2$

- p) $a^2 - 9 - 8ab + 16b^2$ s) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$ v) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2$
 q) $x^2 - 36 + 4xy + 4y^2$ t) $x^2 - 2xy + y^2 - 9z^2$
 r) $4(x^2 - y^2) + 4x + 1$ u) $x^2 + y^2 - 2xy - 4z^2$ w) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 12$

Câu 5. Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2$ d) $x^2 - 2xy + 2x + y^2 - 2y$
 b) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$
 c) $x^4 - x^2 + 2xy - y^2$ e) $x^2 + y^2 + 2xy + yz + zx$

Câu 6. Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $x^2 - 2x + 1 - y^2 + 2x - 1$ g) $(x + y)^2 - 8(x + y) + 12$
 b) $x^2 - 4x + 4 - y^2 - 6y - 9$ h) $(x^2 + 2x)^2 - 2x^2 - 4x - 3$
 c) $4x^2 - 4x + 1 - y^2 - 8y - 16$ i) $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$
 d) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2$ j) $(x^2 + 2x)^2 + 9x^2 + 18x + 20$
 e) $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1$ k) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$
 f) $(x^2 + x + 1)^2 + 2x(x^2 + x + 1) + x^2$ l) $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15$

Câu 7. Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $x^3 - 2x^2 + x$ h) $3x^3 - 6x^2 + 3x$ o) $27x^5 + x^2$
 b) $x^3 - 6x^2 + 9x$ i) $x^3 - 7x^2 + 10x$ p) $(x + y)^3 - x^3 - y^3$
 c) $x^3 - 2x^2 - 8x$ j) $2x^3 - 12x^2 + 18x$ q) $(x + y)^3 - (x - y)^3$
 d) $x^3 - 4x^2 + 4x$ k) $2x^3 - 20x^2 + 18x$ r) $(x + y)^3 + (x - y)^3$
 e) $2x^3 + 3x^2 - 2x$ l) $a^3 - 8a^2 + 16a$ s) $x^3 - y^3 + 2x^2 - 2y^2$
 f) $2x^3 - 8x^2 + 8x$ m) $x^8 - x^2$ t) $x^3 - y^3 - 4x + 4y$
 g) $4x^3 + 4x^2 + x$ n) $x^4 - 27x$ u) $x^3 - 8y^3 + x^2 - 4y^2$

Câu 8. Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $x^2 - 4xy + 3y^2$ e) $2x^2 + 3xy - 5y^2$ i) $4x^2 + 4xy - 15y^2$
 b) $4x^2 - 5xy + y^2$ f) $x^2 - 35y^2 - 2xy$ j) $2x^2 + 10xy + 8y^2$
 c) $x^2 + 4xy + 3y^2$ g) $x^2 - 10xy + 16y^2$ k) $5x^2 + 10xy + 5y^2$
 d) $9x^2 + 6xy - 8y^2$ h) $3x^2 - 10xy + 8y^2$ l) $-7xy + 3x^2 + 2y^2$

 DẠNG 1. Tìm x

Câu 9. Tìm x biết:

- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| a) $x^2 - x = 0$ | h) $7x^2 + 2x = 0$ | o) $3x^2 - 7x = 0$ |
| b) $x^2 - 4x = 0$ | i) $x^2 + 6x = 0$ | p) $4x^3 - x = 0$ |
| c) $x^2 + 3x = 0$ | j) $2x^2 - 5x = 0$ | q) $x^3 - 4x = 0$ |
| d) $x + 5x^2 = 0$ | k) $3x^2 + 7x = 0$ | r) $x^3 - 9x = 0$ |
| e) $x^2 - 7x = 0$ | l) $5x - 3x^2 = 0$ | s) $x^3 - 16x = 0$ |
| f) $3x^2 - 6x = 0$ | m) $5x^2 - 13x = 0$ | t) $x^3 - 25x = 0$ |
| g) $x^2 + 7x = 0$ | n) $-3x^2 + 5x = 0$ | u) $4x^3 - 36x = 0$ |

Câu 10. Tìm x biết:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $4x(x + 1) = 8(x + 1)$ | i) $x(3x + 2) - x(2x + 3) = 0$ |
| b) $5x(x - 2) - (2 - x) = 0$ | j) $5x(x - 1) = x - 1$ |
| c) $x(x - 1) - 2(1 - x) = 0$ | k) $x(x + 2) - x - 2 = 0$ |
| d) $x(x + 2) - 3(x + 2) = 0$ | l) $x(x - 2) + x - 2 = 0$ |
| e) $2x(x + 1) - 3(x + 1) = 0$ | m) $x(x - 3) - x + 3 = 0$ |
| f) $x^2(x - 2) + 3(x - 2) = 0$ | n) $2x(x - 1) - x + 1 = 0$ |
| g) $2x(x - 5) - 7(5 - x) = 0$ | o) $x(x + 3) - 2x - 6 = 0$ |
| h) $3x(x - 2) + 2(x - 2) = 0$ | |

Câu 11. Tìm x biết:

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a) $2x(x + 5) - x - 5 = 0$ | f) $2(x + 3) - x^2 - 3x = 0$ | k) $2(x + 5) - x^2 - 5x = 0$ |
| b) $x(x - 3) + 2x - 6 = 0$ | g) $x(2x - 1) + 4x - 2 = 0$ | l) $3x(x - 5) - x^2 + 25 = 0$ |
| c) $x(x - 1) + 2x - 2 = 0$ | h) $x(x - 4) + 3x - 12 = 0$ | m) $8x(x - 5) - 3x + 15 = 0$ |
| d) $5x(x - 3) - x + 3 = 0$ | i) $4x(x - 2) - 6 + 3x = 0$ | n) $3x(x - 5) - 2x + 10 = 0$ |
| e) $x(x - 3) - 2x + 6 = 0$ | j) $x(x - 20) - x + 20 = 0$ | o) $8x(x - 5) - 2x + 10 = 0$ |

Câu 12. Tìm x biết:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| a) $x^2 + 2x - 3x - 6 = 0$ | i) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ | q) $x(x + 1) - x^2 + 1 = 0$ |
| b) $x^2 - 8x + 3x - 24 = 0$ | j) $2x^2 - 2x = (x - 1)^2$ | r) $4x^2 - 25 + (2x + 5)^2 = 0$ |
| c) $x^2 + 4x - 5x - 20 = 0$ | k) $(x - 3)^2 + 3 - x = 0$ | s) $x^2 - 4 + (x + 2)(x - 3) = 0$ |
| d) $x^2 + 20x - x - 20 = 0$ | l) $(x - 2)^2 - 4x + 8 = 0$ | t) $2x(x - 1) - (1 - x)^2 = 0$ |
| e) $x^2 + 10x - 2x - 20 = 0$ | m) $3(x - 6)^2 = 60 - 10x$ | u) $x^2 - 1 + (x + 1)(x - 3) = 0$ |
| f) $x^2 + 12x + 2x + 24 = 0$ | n) $(x + 3)^2 - 6x - 18 = 0$ | |
| g) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ | o) $(x - 4)^2 - 4x + 16 = 0$ | |
| h) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ | p) $2(x - 5) - x^2 + 25 = 0$ | |

Câu 13. Tìm x biết:

a) $x^2 + x - 12 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

m) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $x^2 - 8x + 7 = 0$

h) $x^2 - 4x + 3 = 0$

n) $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $x^2 - 4x - 5 = 0$

i) $x^2 + 3x - 18 = 0$

o) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

j) $x^2 - 3x - 10 = 0$

p) $8x^2 + 30x + 7 = 0$

e) $x^2 - 4x + 3 = 0$

k) $x^2 + 3x - 10 = 0$

q) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

f) $x^2 + 5x + 4 = 0$

l) $x^2 - 2x - 35 = 0$

r) $9x^2 - 30x + 24 = 0$

§1 THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Thu thập dữ liệu

Ví dụ 1. Một số bạn trong tổ một đã thu thập dữ liệu như sau:

Bạn Nam: Lập bảng hỏi các bạn về điểm kiểm tra giữa học kì 2 của các bạn trong lớp.

Bạn Nam: Lập bảng hỏi các bạn về điểm kiểm tra giữa học kì 2 của các bạn trong lớp.

Bạn Ánh: Kiểm tra số km đi được của xe máy các thầy cô ở trong trường.

Kết luận:

- Thu thập dữ liệu có thể là trực tiếp hoặc gián tiếp.
- Thu thập dữ liệu trực tiếp là việc thu thập dữ liệu thông qua quan sát, làm thí nghiệm, lập bảng hỏi, phỏng vấn, ...
- Thu thập dữ liệu gián tiếp là việc thu thập dữ liệu từ những nguồn có sẵn như sách, báo, mạng internet, ...
- Để có thể đưa ra các kết luận hợp lí, dữ liệu thu thập được phải đảm bảo tính đại diện cho toàn bộ đối tượng đang được quan tâm.

Ví dụ 2. Để thu thập các dữ liệu sau, ta nên làm như thế nào? Và cách đó là thu thập dữ liệu trực tiếp hay gián tiếp?

- Dữ liệu về số người trong mỗi nhà của các nhà gần nhà em.
- Dữ liệu thông tin dự báo thời tiết trong 7 ngày tới.

2 Phân loại dữ liệu

Ví dụ 3. Cho hai dãy dữ liệu về số liệu như sau:

- Cân nặng của 4 bạn trong một nhóm: 49,2 kg; 48,9 kg; 50,3 kg; 51,1 kg.
- Số bút của 4 bạn trong nhóm trên mang để trong cặp: 2; 3; 1; 3.

Kết luận:

- Số liệu nhận giá trị tùy ý trong một khoảng nào đó gọi là số liệu liên tục (dạng số liệu hay gặp là: chiều cao, cân nặng, nhiệt độ, ...)
- Số liệu không phải là số liệu liên tục gọi là số liệu rời rạc (dạng số liệu hay gặp là số học sinh trong lớp, số sản phẩm của công nhân, ...)

Ví dụ 4. Hãy cho biết trong các câu sau, đâu là dữ liệu liên tục, đâu là dữ liệu rời rạc.

- Số đồng hồ có trong nhà của các bạn tổ 1 là: 3; 4; 2; 1.
- Thời gian hoàn thành một bài tập về nhà: 4,5 phút; 5,1 phút; 9,2 phút

B BÀI TẬP ĐỒNG DẠNG

Luyện tập 9. Em hãy thu thập các dữ liệu sau và cho biết dữ liệu mà em thu thập được là trực tiếp hay gián tiếp.

- Họ và tên các bạn tổ của mình.
- Số trang của mỗi chương trong sách Toán 8 mà em đang học.

Luyện tập 10. Em muốn ước lượng thời gian tự học của các bạn ở nhà.

- Em muốn thu thập dữ liệu này em sẽ làm gì? Đó là cách thu thập gián tiếp hay trực tiếp.
- Dữ liệu mà em thu thập được là số liệu hay không, nếu có thì nó có phải là liên tục không?

Luyện tập 11. Cô Hải giao cho cả lớp một bài toán tìm x để về nhà làm

- Để thu thập kết quả của bài toán đó, cô Hải có thể sử dụng phương pháp thu thập nào?
- Dữ liệu thu thập được có phải là số liệu hay không? Đây là dữ liệu liên tục hay rời rạc.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Dữ liệu thu thập được ở mỗi câu sau thuộc loại dữ liệu nào?

- Tên các hãng điện thoại.
- Số tiền có trong túi.
- Số điểm trong túi kiểm tra của một học sinh.

Bài 2. Dữ liệu thu thập được ở mỗi câu sau thuộc loại dữ liệu nào?

- Tên các môn học mà em đang học.
- Thời gian ngủ trưa của các thành viên trong gia đình em.
- Số sản phẩm bán được của một cửa hàng bán quần áo.

 **Bài 3.** Nên sử dụng phương pháp thu thập dữ liệu nào để có được dữ liệu ở mỗi câu sau?

- a) Tên của các loại chim đẹp nhất.
- b) Tên món ăn mà mẹ em hay nấu.
- c) Số lần bố mẹ cho đi chơi trong một tháng của bản thân.

 **Bài 4.** Theo WHO khuyến cáo, thuốc lá điện tử (làm nóng) tạo ra chất khí độc hại, có nhiều chất độc giống như trong khói thuốc lá điều thông thường.

- a) Em thu thập dữ liệu các chất độc hại đó bằng cách nào? Cách thu thập đó là trực tiếp hay gián tiếp?
- b) Em hãy thu thập thêm các dữ liệu về tác hại của thuốc lá điện tử và cho biết các dữ liệu đó có phải là số liệu hay không, hay là loại dữ liệu gì?

 **Bài 5.** Cho các dãy dữ liệu là số liệu sau, em hãy cho biết đâu là dữ liệu liên tục, đâu là dữ liệu rời rạc?

- a) Nhiệt độ không khí trung bình 5 ngày trong tháng 1/2023 là $17,3^{\circ}\text{C}$; $17,5^{\circ}\text{C}$; $18,1^{\circ}\text{C}$; $17,9^{\circ}\text{C}$; $16,9^{\circ}\text{C}$.
- b) Số đôi giày của các thành viên trong một gia đình: 2; 4; 6; 3.
- c) Số công tơ điện của một hộ gia đình trong 5 giờ liên tiếp là 133,4 kW.h; 134,1 kW.h; 135,0 kW.h; 137,7 kW.h; 140,2 kW.h.
- d) Số học sinh vi phạm nội quy của lớp 8A trong 4 tuần của tháng 3 là: 6; 3; 7; 6.

 **Bài 6.** Để mừng thọ các cụ vào đầu xuân. Bác tổ trưởng hội người cao tuổi trong thôn cần lên danh sách các cụ năm nay tròn 70 tuổi, 80 tuổi và 90 tuổi để mừng thọ.

- a) Bác tổ trưởng có cách nào để thu thập dữ liệu trên? Cách đó là trực tiếp hay gián tiếp?
- b) Trong các dữ liệu bác tổ trưởng thu được, dữ liệu nào không phải là số, dữ liệu nào là số? Dữ liệu là số có phải là dữ liệu liên tục hay không? Dữ liệu không phải là số có thể sắp thứ tự hay không?

 **Bài 7.** Để khen thưởng cho các con cháu trong họ có thành tích xuất sắc trong năm học, bác trưởng họ đã kêu gọi các gia đình trong họ có con em có giấy khen mang bản photo đến nộp để nhận phần thưởng?

- a) Các làm của bác trưởng họ là phương pháp thu thập dữ liệu gián tiếp hay trực tiếp?
- b) Nếu các cháu được giấy khen tiên tiến thì thưởng 200000 đồng, còn giấy khen học sinh giỏi là 300000 đồng, học sinh đỗ giải Huyện, TP là 500000 đồng. Vậy dữ liệu mà bác trưởng họ thu được gồm những dữ liệu gì?

§2 BIỂU DIỄN DỮ LIỆU BẰNG BẢNG, BIỂU ĐỒ.

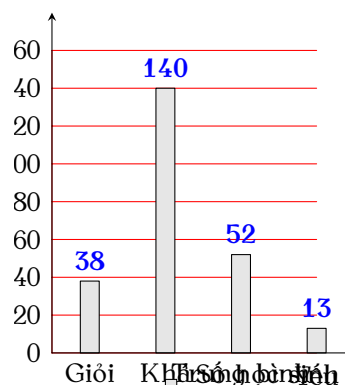
A LÝ THUYẾT

1 Lựa chọn biểu đồ tranh hay biểu đồ cột

Ví dụ 1. Cho hai biểu đồ như hình bên

Toán	
Ngữ Văn	
Tin Học	
Lịch sử và Địa lí	
Khoa học tự nhiên	

: 9 quyển sách



Nhận xét:

Ở biểu đồ tranh thì các giá trị của mỗi đối tượng phải có mối quan hệ nhất định và các biểu tượng phải vẽ là rất nhiều.

Kết luận:

Có thể dùng biểu đồ tranh hay biểu đồ cột để biểu diễn số lượng các đối tượng khác nhau. Tuy nhiên khi dùng biểu đồ tranh mà phải vẽ rất nhiều biểu tượng thì ta nên dùng biểu đồ cột.

Ví dụ 2. Cho bảng số liệu về sự lựa chọn trái cây yêu thích của 12 bạn.

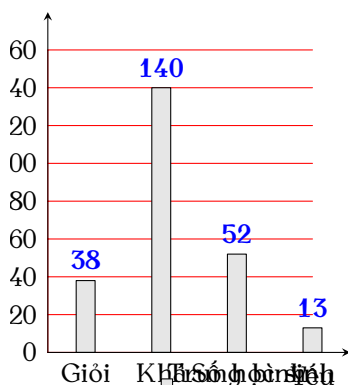
Trái cây	Đu đủ	Chuối	Thanh long	Dưa đỏ
Học sinh	2	3	2	5

a) Với bảng trên em sẽ dùng biểu đồ nào để thể hiện thông tin trong bảng? Giải thích?

b) Vẽ biểu đồ mà em lựa chọn ở câu a.

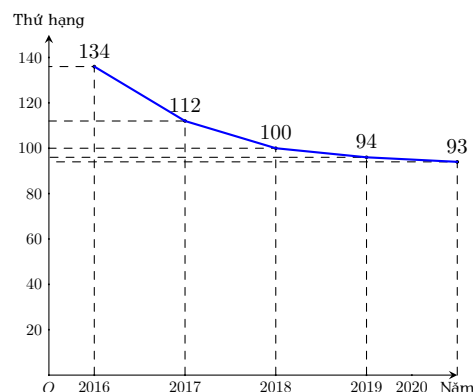
2 Lựa chọn biểu đồ cột hay biểu đồ đoạn thẳng

Ví dụ 3. Cho hai biểu đồ sau



Hình 1

Hình 1: Biểu đồ thể hiện học lực của học sinh khối 8 trong học kì 1 của một trường THCS.



Hình 2

Hình 2: Biểu đồ thể hiện thứ hạng bóng đá của Việt Nam trong 5 năm từ 2016 – 2020

Nhận xét:

Đối với biểu đồ cột, do chứa các cột để thể hiện giá trị của mỗi đối tượng nên ta thể hiện được ít các đối tượng hơn so với biểu đồ đường.

Kết luận:

Nếu muốn biểu diễn sự thay đổi của một đại lượng theo thời gian ta dùng biểu đồ đoạn thẳng. Khi số lượng thời điểm quan sát ít ta có thể biểu diễn bằng biểu đồ cột.

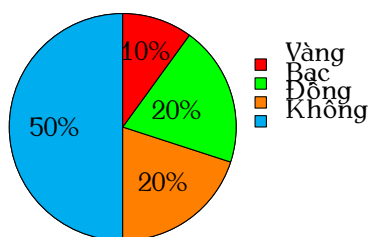
 **Ví dụ 4.** Cho bảng dữ liệu về doanh số trong 6 tháng đầu năm của một doanh nghiệp.

Tháng	Tháng 1	Tháng 2	Tháng 3	Tháng 4	Tháng 5	Tháng 6
Doanh số (sản phẩm)	100	120	130	90	85	140

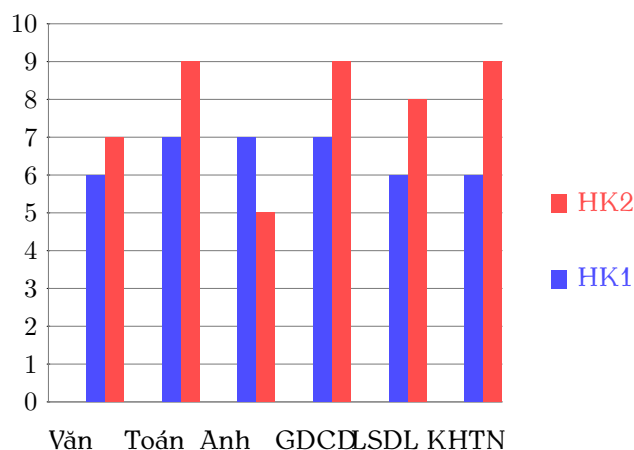
- Với thông tin ở bảng trên, theo em ta nên dùng biểu đồ nào là hợp lí, giải thích vì sao lại chọn biểu đồ đó.
- Vẽ biểu đồ mà em đã lựa chọn.

Lựa chọn biểu đồ cột kép hay biểu đồ quạt tròn

 **Ví dụ 5.** Cho hai biểu đồ sau



Hình 3



Hình 4

Hình 3: Tỷ lệ phần trăm các loại huy chương được trao trong một cuộc thi.

Hình 4: Biểu đồ về Điểm thi các môn HK1 và HK2.

Nhận xét:

Ở biểu đồ hình quạt tròn thì tổng các thành phần là 100% nên ta phải đưa số liệu các đơn vị về phần trăm, còn biệt đồ hình cột kép chủ yếu để so sánh hai đối tượng theo cùng một thời gian.

Kết luận:

Khi muốn so sánh hai tập dữ liệu với nhau ta dùng biểu đồ cột kép. Khi muốn biểu diễn tỉ lệ các phần trong tổng thể ta dùng biểu đồ hình quạt tròn.

Ví dụ 6. Cho bảng số liệu về chất lượng đánh giá sản phẩm của khách hàng của một cửa hàng bán đồ điện tử.

Đánh giá	Rất tốt	Tốt	Trung bình	Không tốt
Số lượng	6	32	10	2

- Với bảng trên, ta nên dùng biểu đồ quạt tròn hay cột kép để biểu diễn thông tin trên.
- Hãy tính xem với đánh giá rất tốt, tốt hay trung bình chiếm bao nhiêu %

B Bài tập tự luyện

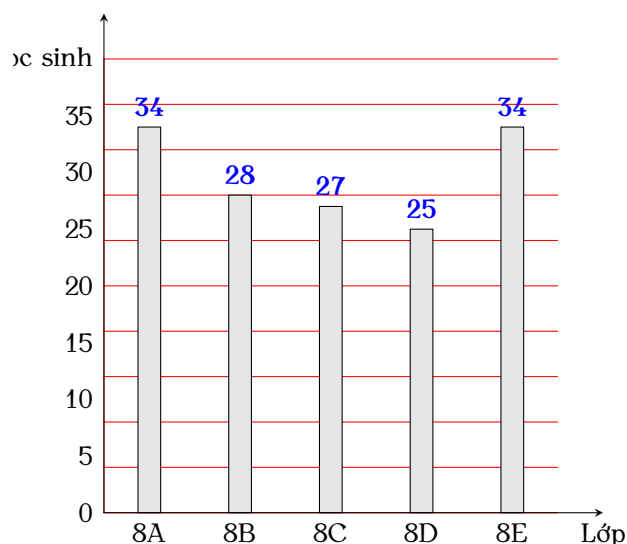
Bài 1. Cho biểu đồ thể hiện số điểm tốt đạt được của các tổ trong tuần.

Tổ 1	Tổ 2	Tổ 3	Tổ 4

|||: 5 điểm tốt

- Biểu đồ trên là biểu đồ gì? mỗi biểu tượng bông hoa ứng với bao nhiêu điểm tốt.
- Lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ khác thể hiện dữ liệu trong bảng thống kê.

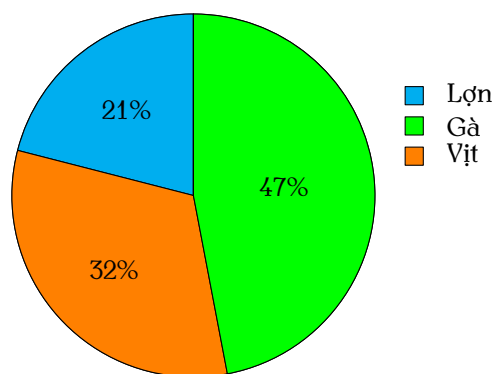
Bài 2. Cho biểu đồ ở Hình 1 thể hiện sĩ số học sinh khối lớp 8



a) Đây là biểu đồ gì?

b) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên và vẽ biểu đồ khác thể hiện bảng thống kê vừa lập.

 **Bài 3.** Cho biểu đồ ở Hình 2 thể hiện tỉ lệ phần trăm các loại gia cầm trong một trang trại.



Hình 2

a) Đây là biểu đồ gì? có bao nhiêu loại gia cầm trong trang trại này.

b) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

 **Bài 4.** Cho bảng thống kê về thời gian tự học của bạn Tiến như sau

Thứ	2	3	4	5	6	7	CN
Thời gian (phút)	80	100	60	70	90	60	0

a) Vẽ biểu đồ thích hợp cho bảng thống kê trên.

b) Với bảng thống kê trên, có thể vẽ được những biểu đồ nào thì phù hợp.

 **Bài 5.** Cho bảng thống kê thể hiện điểm cộng và trừ về thành tích thi đua của khối 8 trong 1 tuần.

Lớp	$8A_1$	$8A_2$	$8A_3$	$8A_4$
Điểm cộng	25	28	19	15
Điểm trừ	8	10	8	6

Vẽ biểu đồ thích hợp cho bảng thống kê trên.

 **Bài 6.** Cho bảng thống kê thể hiện tỉ lệ phần trăm xếp loại học lực của lớp 8B trong học kì 1

Học lực	Giỏi	Khá	Trung bình
Tỉ lệ phần trăm	25%	60%	15%

Vẽ biểu đồ thích hợp thể hiện bảng thống kê trên.

 **Bài 7.** Cho bảng thống kê về tỉ lệ phần trăm yêu thích môn học của lớp 8C.

Môn học yêu thích	Toán	Văn	Anh	Khoa học
Tỉ lệ phần trăm	30%	25%	20%	25%

- Vẽ biểu đồ cột thể hiện bảng thống kê trên.
- Vẽ biểu đồ quạt tròn thể hiện bảng thống kê trên
- Có nhận xét gì về việc so sánh hai biểu đồ trên và việc bảng thống kê cho tỉ lệ phần trăm nhưng lại được biểu thị trên biểu đồ cột.

 **Bài 8.** Cho bảng thống kê về số học sinh đạt học sinh giỏi cấp huyện môn Toán của bốn trong trường.

Khối lớp	6	7	8	9
Số học sinh	16	24	20	25

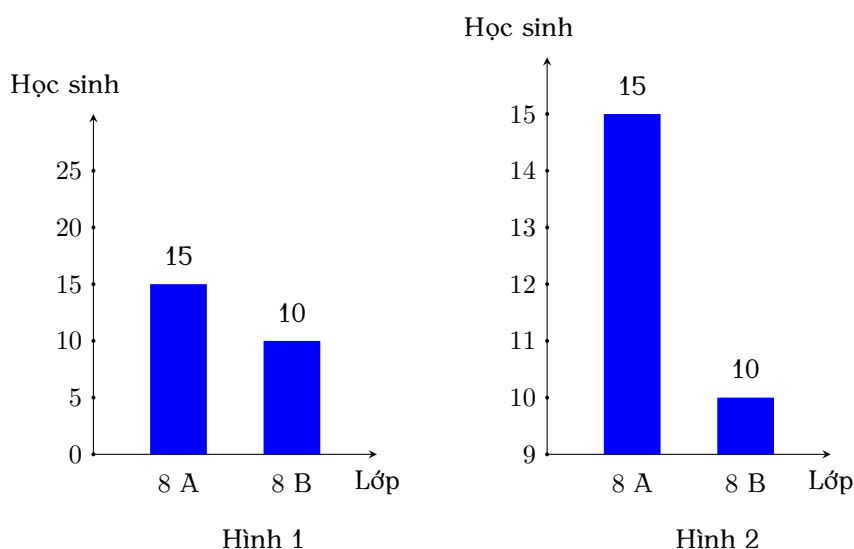
- Vẽ biểu đồ đoạn thẳng thể hiện bảng thống kê trên.
- Hãy tính toán và vẽ biểu đồ hình quạt tròn thể hiện biểu đồ trên.

§3 PHÂN TÍCH SỐ LIỆU THỐNG KÊ DỰA VÀO BIỂU ĐỒ

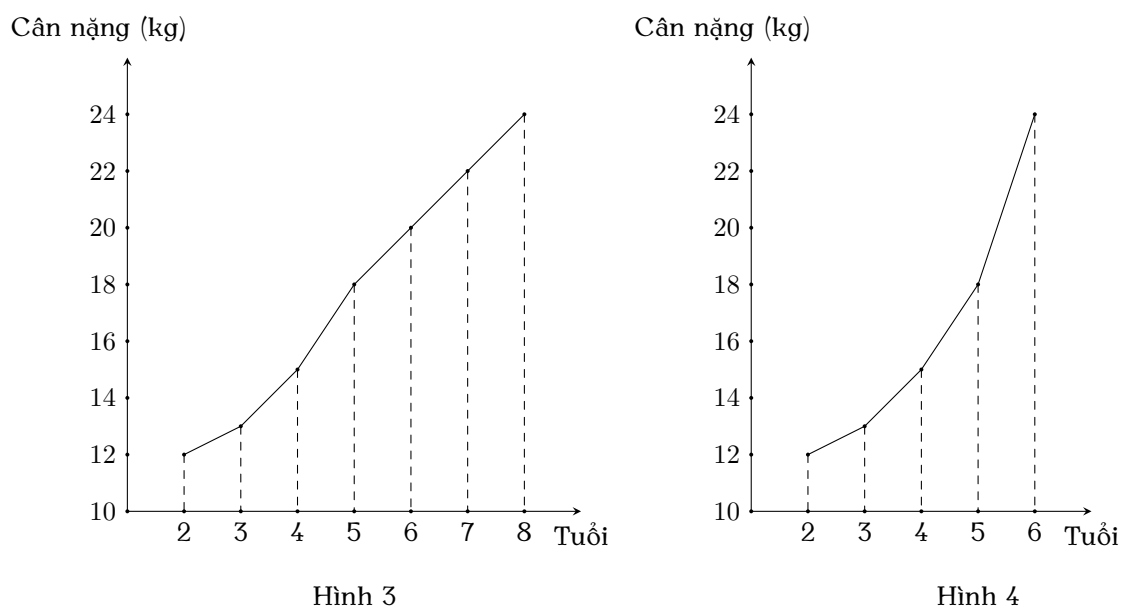
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Các lưu ý khi đọc và diễn giải biểu đồ

 **Ví dụ 1.** Cho hai biểu đồ thể hiện số học sinh nam của hai lớp 8A, 8B.

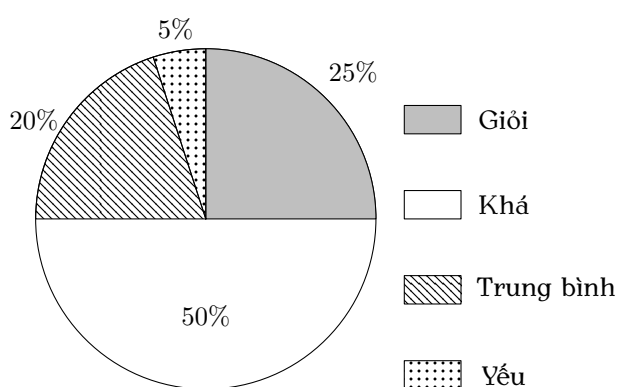


 **Ví dụ 2.** Cho hai biểu đồ ở Hình 3 và Hình 4.

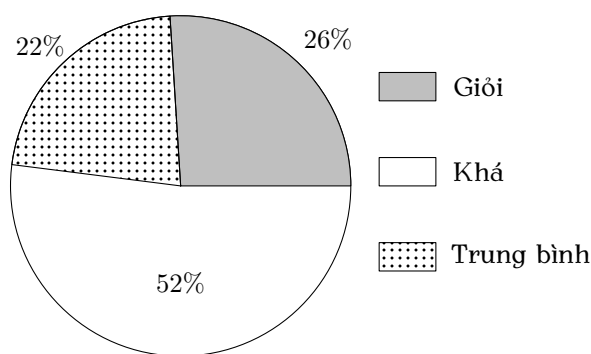


2 Đọc và phân tích số liệu từ biểu đồ

Ví dụ 3. Cho biểu đồ về học lực của hai lớp 8A (Hình 5) và lớp 8D (Hình 6) trong học kì 1.



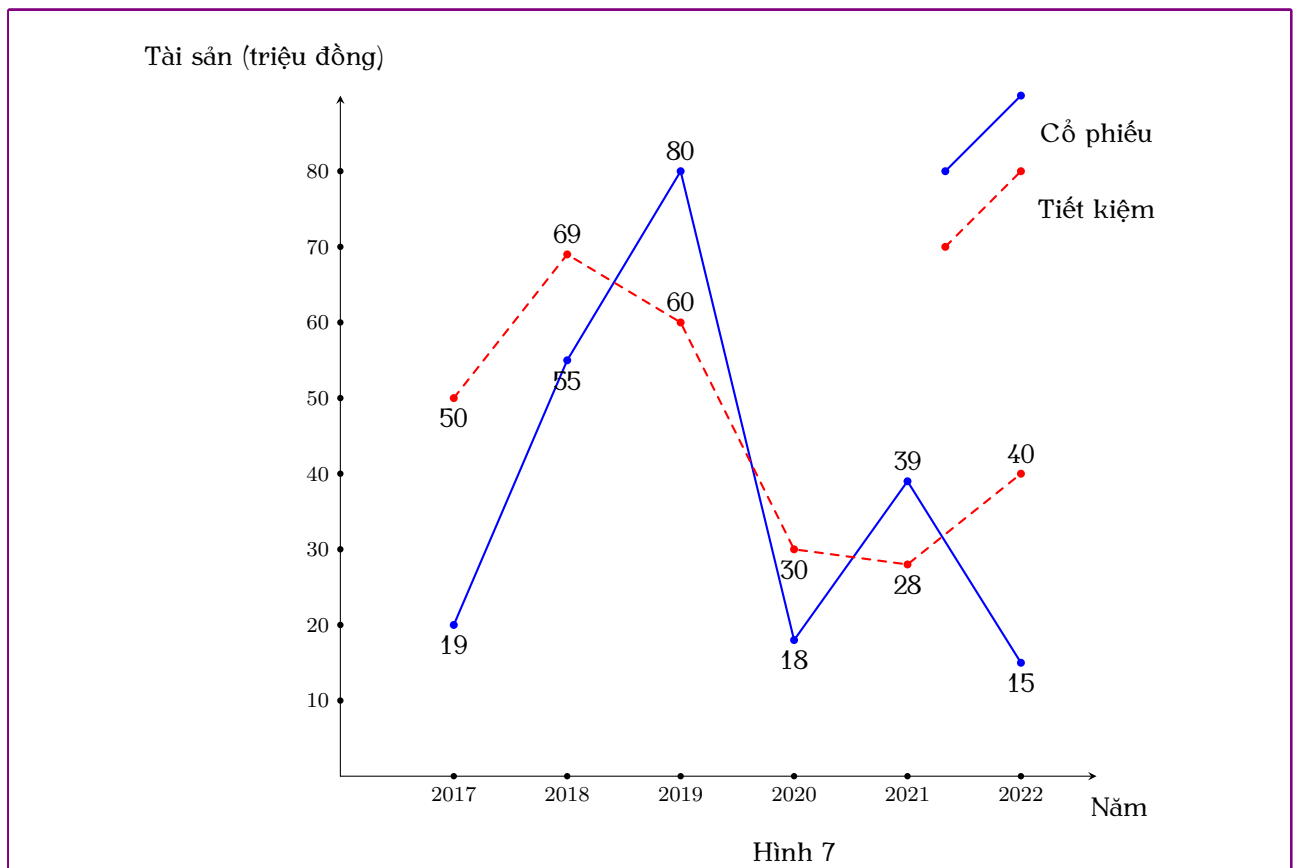
Hình 5



Hình 6

- Hãy so sánh về số học sinh giỏi ở hai lớp 8A và 8D.
- Ở Học kì 1 lớp 8A có 40 học sinh và lớp 8D có 50 học sinh. Tính số học sinh trung bình của lớp 8A và lớp 8B.
- Em có nhận xét gì về số học sinh yếu ở hai lớp này.

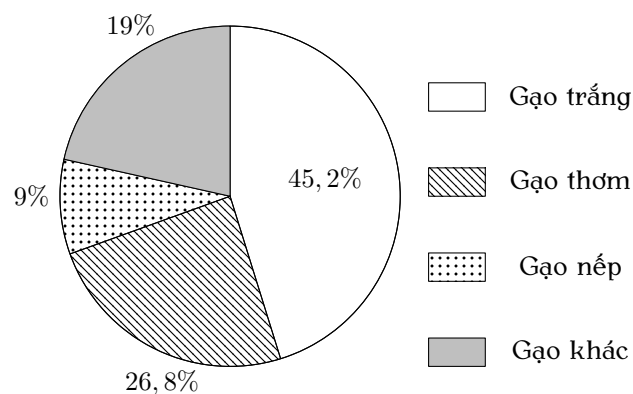
Ví dụ 4. Cho biểu đồ phân bố tài sản của nước ta ở mảng tiết kiệm và cổ phiếu từ năm 2017 – 2022. (Hình 7)



- Lập bảng thống kê cho số liệu ở biểu đồ trên.
- Tại thời điểm nào thì tài sản ở mảng cổ phiếu có giá trị cao nhất và thấp nhất.
- Tại thời điểm nào thì tài sản ở mảng tiết kiệm có giá trị thấp nhất và cao nhất.

§4 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 1.** Cho biểu đồ xuất khẩu các loại gạo của nước ta trong năm 2020.

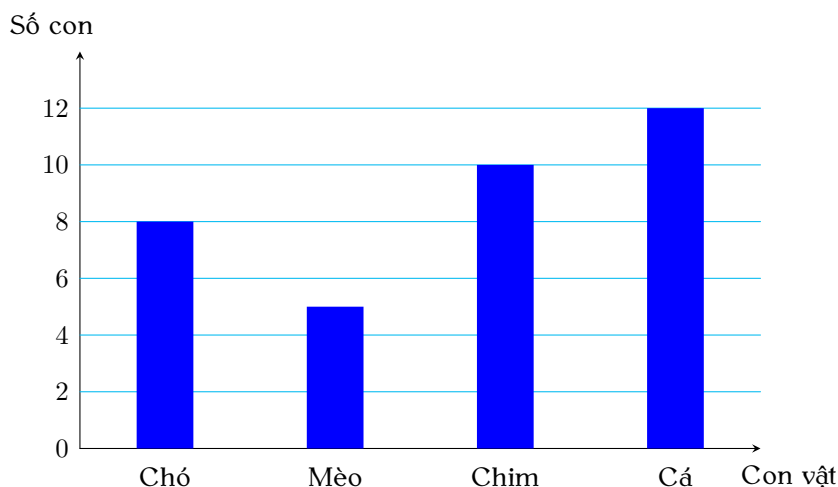


Hình 5

- Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên. Loại gạo nào nước ta xuất khẩu nhiều nhất và ít nhất chiếm bao nhiêu phần trăm.

b) Biết rằng tổng lượng gạo xuất khẩu là 6,15 triệu tấn gạo. Hãy tính xem số lượng gạo thơm nước ta xuất khẩu trong năm 2020.

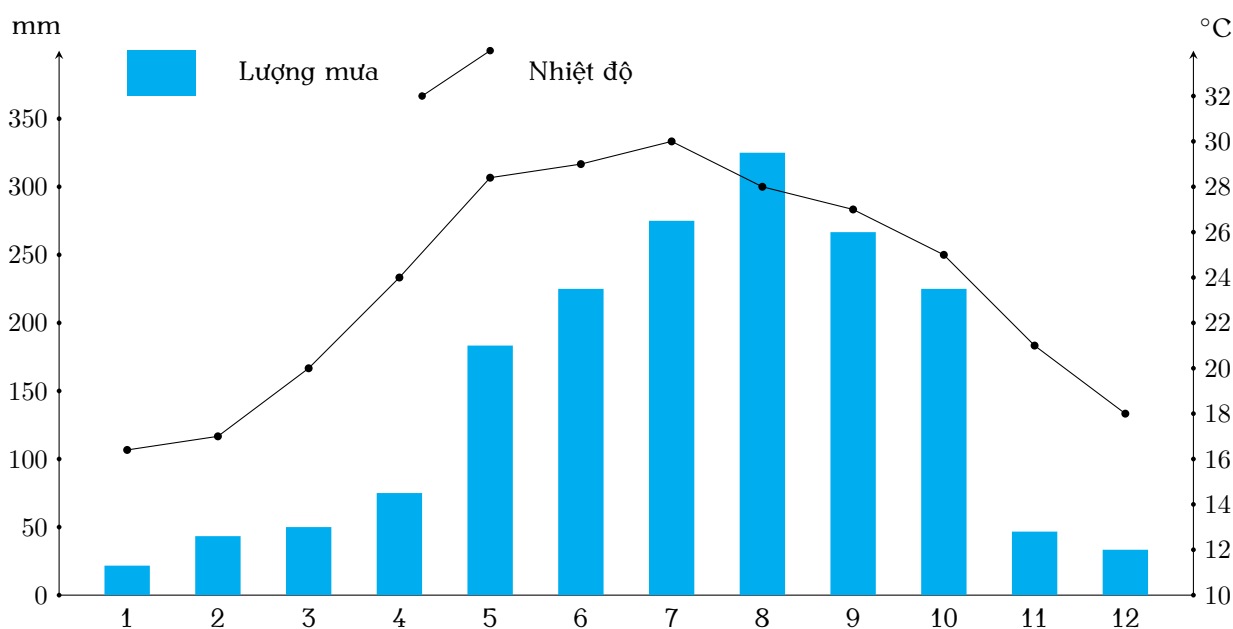
Bài 2. Biểu đồ ở Hình 2 thể hiện số các con vật nuôi của các bạn trong lớp 8B.



Hình 2

- Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.
- Con vật nào được nuôi nhiều nhất, ít nhất, là bao nhiêu?
- Trong các con vật nuôi trên, số con vật nào nhiều gấp đôi con vật nào?

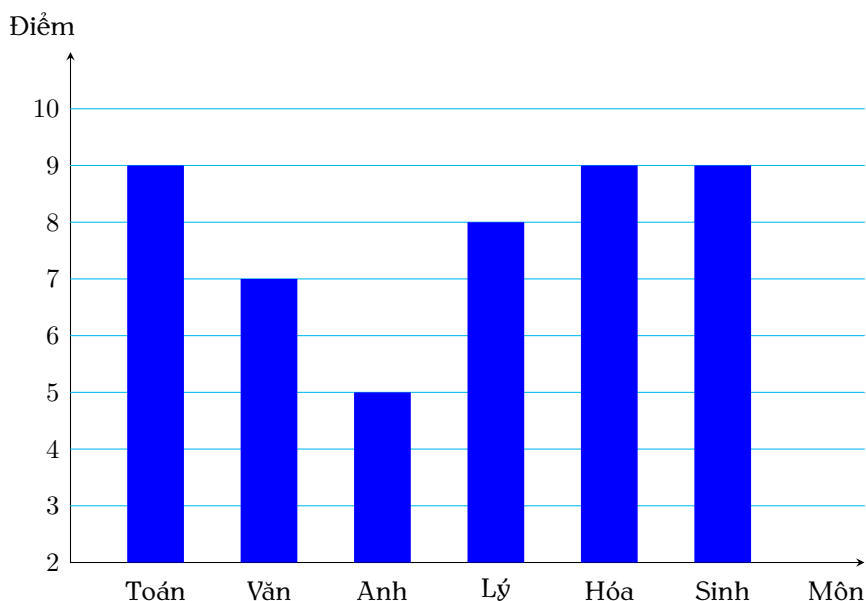
Bài 3. Cho biểu đồ về lượng mưa và nhiệt độ trong năm 2022 của Hà Nội (Hình 3).



Hình 3

- Tháng nào có nhiệt độ cao nhất, thấp nhất? Vì sao lại có sự khác biệt này?
- Tháng nào có lượng mưa nhiều nhất, ít nhất?
- Em thích tháng nào nhất trong năm và tháng đó có nhiệt độ và lượng mưa như thế nào?

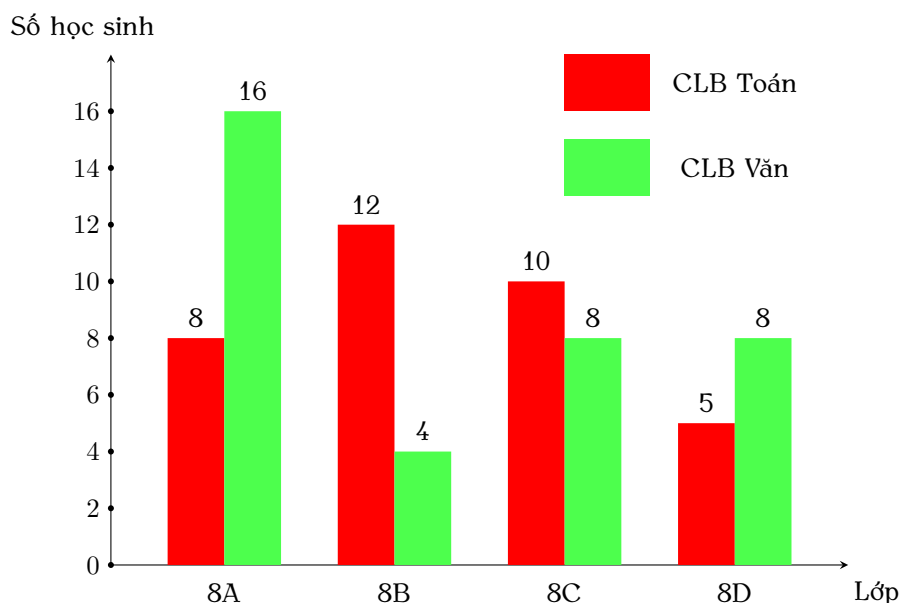
 **Bài 4.** Biểu đồ Hình 4 về số điểm đạt được của một số môn trong đợt kiểm tra giữa học kì 2 của bạn Hòa.



Hình 4

- Bạn Hòa có điểm môn nào cao nhất, thấp nhất? Là bao nhiêu điểm?
- Bạn Hòa có bị môn nào dưới trung bình không? Có môn nào được điểm suất xác không?
- Lập bảng thống kê bảng điểm cho bạn Hòa và chỉ ra điểm giống và khác nhau giữa điểm của bản thân với điểm của bạn Hòa?

 **Bài 5.** Biểu đồ ở Hình 5 thể hiện số lượng học sinh khối lớp 8 tham gia hai câu lạc bộ Toán và Văn của trường.

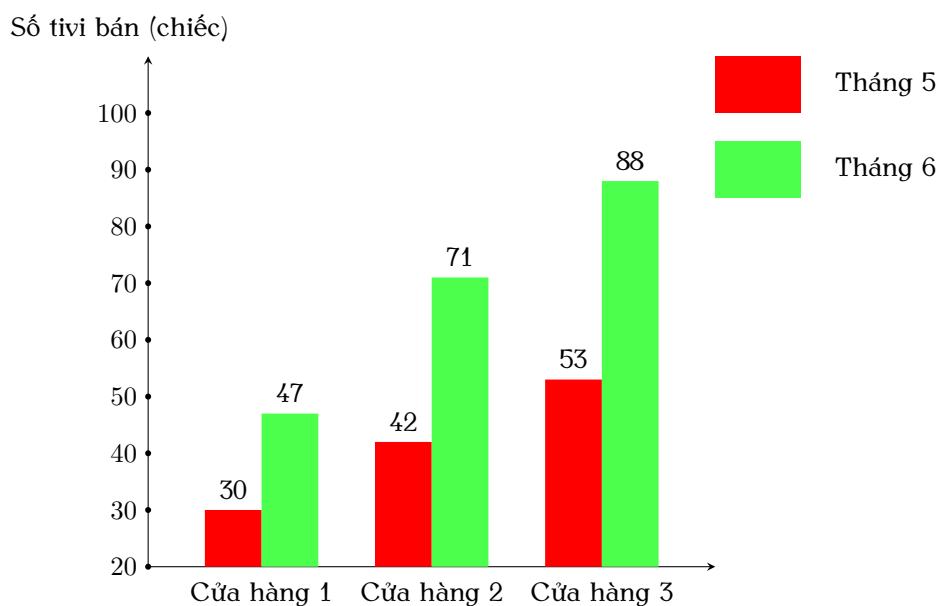


Hình 5

- Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

- b) Cho biết về sự khác nhau về việc tham gia đăng kí hai câu lạc bộ Toán và Văn của hai lớp 8A và 8B.
- c) Nếu lớp 8A có số lượng tham gia câu lạc bộ môn Toán chiếm 20% tổng số học sinh cả lớp. Hãy tính xem lớp 8A có bao nhiêu học sinh.
- d) Hãy so sánh tỉ số học sinh tham gia CLB Toán và CLB Văn của hai lớp 8A và 8B.

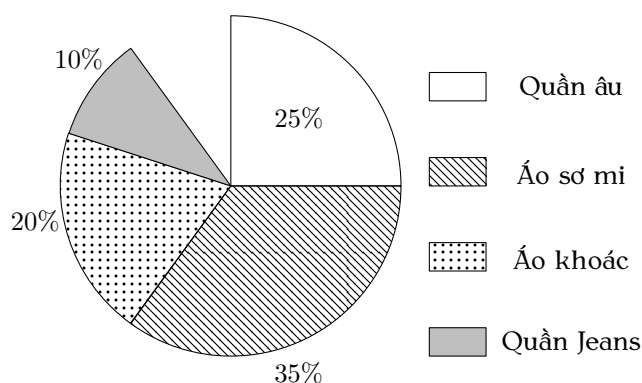
Bài 6. Biểu đồ ở Hình 6 thống kê số lượng tivi bán được của ba cửa hàng trong tháng 5 và tháng 6 của năm 2018.



Hình 5

- a) So sánh số lượng tivi bán được của mỗi cửa hàng trong tháng 5 và tháng 6.
- b) Cửa hàng 3 bán được nhiều tivi nhất trong cả tháng 5 và tháng 6. Em có thể đưa ra một lí do phù hợp nhất để giải thích cho kết quả này được không?
Em đồng ý với những nhận xét nào sau đây:
- Cửa hàng 3 bán tivi với giá rẻ nhất.
 - Cửa hàng 3 chăm sóc khách hàng tốt nhất.
 - Cửa hàng 3 có nhiều loại tivi cho người mua hàng lựa chọn.
 - Cửa hàng 3 ở vị trí thuận lợi cho việc đi lại mua bán của người mua hàng?
- c) Số lượng tivi mà cả ba cửa hàng bán được trong tháng 6 nhiều hơn số lượng tivi mà cả ba cửa hàng bán được trong tháng 5 là bao nhiêu chiếc? Em có biết giải bóng đá World Cup 2018 diễn ra vào tháng nào không? Sự kiện đó có liên quan đến việc mua bán tivi trong tháng 6 hay không?
- d) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

Bài 7. Một cửa hàng bán quần áo đưa ra chương trình khuyến mại giảm giá như biểu đồ ở Hình 6.



Hình 7

- Trong các mặt hàng trên, sản phẩm nào được giảm giá nhiều nhất, ít nhất với mức giảm bao nhiêu phần trăm?
- Hãy giải thích vì sao trong biểu đồ trên tổng các thành phần lại không phải 100%. Với các số liệu ở biểu đồ ta có thể biểu diễn bằng biểu đồ nào?
- Cô Hải đã mua 2 chiếc áo sơ mi với giá mỗi chiếc sau khi giảm giá là 325 000 đồng và 4 chiếc quần âu. Khi đó tổng số tiền hóa đơn cô Hải thanh toán tại quầy là 1 850 000 đồng. Em hãy tính xem mỗi chiếc áo sơ mi và mỗi chiếc quần âu cô Hải mua trị giá bao nhiêu tiền nếu chưa được giảm giá?

§1 PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A Lí thuyết

0.1 Phân thức đại số

 **Ví dụ 1.** Các biểu thức như $\frac{36}{x}$; $\frac{2x-1}{3x+1}$; $\frac{x^2-x+1}{2x+1}$; ... được gọi là những phân thức đại số.

 • Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là hai đa thức và B khác đa thức 0.

- A được gọi là tử thức (hoặc tử) và B được gọi là mẫu thức (hoặc mẫu).
- Mỗi đa thức cũng được coi là một phân thức với mẫu thức bằng 1. Đặc biệt, số 0 và số 1 cũng được coi là những phân thức đại số.

 **Ví dụ 2.**

- a) Trong các biểu thức: $\frac{x+y}{2}$; $\frac{-x}{3^2-y}$; $\frac{0}{x^2-y^2}$; -6 ; $\frac{x^2+1}{0}$ biểu thức nào không cho ta một phân thức?
- b) Viết mẫu thức của các phân thức ở câu a.

 **Ví dụ 3.** Cho biểu thức $\frac{x}{1+\frac{1}{x}}$. Đây có là phân thức không? Vì sao?

0.2 Hai phân thức bằng nhau

 Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu $A \cdot D = B \cdot C$. Kí hiệu $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

 **Ví dụ 4.** Hai phân thức $\frac{x(1+x)}{1-x^2}$ và $\frac{x}{1-x}$ có bằng nhau hay không?

 **Ví dụ 5.** Cho $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1-x}{1-x^3}$. Khẳng định trên đúng hay sai? Vì sao?

0.3 Điều kiện xác định và giá trị của phân thức tại một giá trị đã cho của biến

Ví dụ 6. Cho phân thức $\frac{x-1}{x^2+y}$. Tính giá trị của phân thức tại $x=2, y=3$.

Ví dụ 7. Cho phân thức $\frac{4}{x^2-9}$. Tính giá trị của phân thức tại $x=3$.

! • Điều kiện của phân thức $\frac{A}{B}$ là điều kiện của biến để giá trị của mẫu thức B khác 0.

- Để tính giá trị của phân thức tại những giá trị cho trước của biến ta thay giá trị cho trước của biến vào phân thức đó rồi tính giá trị của biểu thức số nhận được.
- Ta chỉ cần quan tâm tới điều kiện xác định của biến khi tính giá trị của phân thức.

Ví dụ 8. Viết điều kiện xác định của phân thức $\frac{x^2-5}{6-x}$ và tính giá trị của phân thức tại $x=2$.

B Luyện tập

Bài 1. Viết tử thức và mẫu thức của phân thức $\frac{5x-2}{3}$.

Bài 2. Trong các cặp phân thức sau, cặp phân thức nào có mẫu giống nhau?

- a) $\frac{-20x}{3y^2}$ và $\frac{4x}{5y^2}$. b) $\frac{3x-1}{x^2+1}$ và $\frac{3x-1}{x+1}$. c) $\frac{x-1}{3x+6}$ và $\frac{x+1}{3(x+2)}$.

Bài 3. Vì sao các kết luận sau đúng?

- a) $\frac{-6}{-4y} = \frac{3y}{2y^2}$. b) $\frac{x+3}{5} = \frac{x^2+3x}{5x}$. c) $\frac{3x(4x+1)}{16x^2-1} = \frac{-3x}{1-4x}$.

Bài 4. Viết điều kiện xác định của phân thức $\frac{x^2+x-2}{x^3+2}$. Tính giá trị của phân thức trên lần lượt tại $x=0; x=1; x=2$.

Bài 5. Một ô tô chạy với vận tốc trung bình là x (km/h).

- a) Viết biểu thức biểu thị thời gian ô tô (tính bằng giờ) chạy hết quãng đường 120 km.
b) Tính thời gian ô tô đi được 120 km trong trường hợp vận tốc trung bình của ô tô là 60 km/h.

C Bài tập tự luyện

0.1 Trắc nghiệm

Câu 1. Trong các biểu thức sau, đâu không phải là phân thức?

- A. $\frac{6}{x^2}$. B. $\frac{-0}{x-y}$. C. -7 . D. $\frac{x^2+1}{0}$.

Câu 2. Mẫu thức của phân thức $\frac{x^2(1+x)}{(x-y) \cdot y^2}$ là

- A. $x^2(1+x)$. B. $(x-y) \cdot y^2$. C. $(1+x)$. D. $(x-y)$.

Câu 3. Để hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{M}{N}$ bằng nhau thì

- A. $A \cdot M = B \cdot N$. B. $A \cdot B = M \cdot N$. C. $A \cdot N = M \cdot B$. D. $A \cdot N = A \cdot M$.

Câu 4. Để tìm điều kiện xác định của một phân thức ta cần làm gì?

- A. Cho mẫu thức bằng 0 rồi tìm x . B. Cho tử thức bằng 0 rồi tìm x .
C. Cho mẫu thức khác 0 rồi tìm x . D. Cho tử thức khác 0 rồi tìm x .

Câu 5. Một phân thức có điều kiện xác định của biến x là $x \neq 5$. Giá trị của phân thức tại $x = 5$ là

- A. 5. B. 0.
C. Là một giá trị khác 5. D. Không có giá trị.

Câu 6. Trong các khẳng định sau (các phân thức đều có nghĩa), đâu là khẳng định sai?

- A. $\frac{x}{y} = \frac{x^2}{xy}$. B. $\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$. C. $\frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}$. D. $\frac{1}{x} = \frac{x}{1}$.

Câu 7. Điều kiện xác định của phân thức $\frac{x - 5}{x^2 - 4}$ là

- A. $x \neq 4$. B. $x \neq 2$. C. $x \neq -2$. D. $x \neq \pm 2$.

Câu 8. Giá trị của phân thức $\frac{x^2 - 100}{x^{100} - y}$ tại $x = 10$ là

- A. 0. B. 10000.
C. 10^{100} . D. Không tính được vì thiếu giá trị của y .

Câu 9. Để giá trị của phân thức $\frac{1}{x^2 - 5}$ có giá trị bằng 5 thì giá trị của x là

- A. $x = \frac{\sqrt{26}}{5}$. B. $x = \frac{26}{\sqrt{5}}$. C. $x = \sqrt{\frac{26}{5}}$. D. $x = \sqrt{\frac{5}{26}}$.

Câu 10. Để phân thức $\frac{x + 4}{x^2 - 16}$ nhận giá trị là một số tự nhiên thì giá trị của x là

- A. $x \in \{0; 1\}$. B. $x \in \{2; 4\}$. C. $x \in \{3; 5\}$. D. $x \in \{4; 16\}$.

0.2 Tự luận

 **Bài 6.** Hãy giải thích vì sao các phân thức sau lại bằng nhau?

- a) $\frac{5y}{7} = \frac{20xy}{28x}$. b) $\frac{x^2y}{5} = \frac{3x^3y}{15x}$. c) $\frac{1}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)}{(x-y)^3}$.
d) $\frac{(x+5)}{2x(x+5)} = \frac{3}{6x}$. e) $\frac{x^2(x+2)}{x(x+2)^2} = \frac{x}{x+2}$. f) $\frac{x(x^2-1)}{x+1} = x^2 - x$.
g) $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4} = x+2$. h) $\frac{3-x}{3+x} = \frac{x^2-6x+9}{9-x^2}$. i) $\frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

 **Bài 7.** Các phân thức sau có bằng nhau hay không?

- a) $\frac{x+3}{2x-5}$ và $\frac{x^2+3x}{2x^2-5x}$. b) $\frac{(x+1)^2}{x^2+x}$ và $x+1$. c) $\frac{(x-9)^3}{2(9-x)}$ và $\frac{(9-x)^2}{2}$.

 **Bài 8.** Tìm điều kiện xác định của các phân thức sau:

- a) $\frac{x-2}{x+3}$. b) $\frac{5x}{2x+4}$. c) $\frac{4x}{3x-7}$. d) $\frac{8}{x+2024}$.
- e) $\frac{x-1}{x^2-1}$. f) $\frac{5}{x^2-3}$. g) $\frac{x^2}{x^2-y^2}$. h) $\frac{3}{x^2-9y^2}$.
- i) $\frac{x^2-2}{(x-3)^2}$. j) $\frac{x}{(4+x)^3}$. k) $\frac{x^2-2}{4x^2+4x+1}$. l) $\frac{x}{x^2-x+1}$.
- m) $\frac{3x-2}{2x^2-6x}$. n) $\frac{5}{2x-3x^2}$. o) $\frac{x+y-2}{9x^2-4y^2}$. p) $\frac{(x-2)^2}{4x^2-1}$.
- q) $\frac{x+y}{(x-2)(x+y)}$. r) $\frac{3-x}{x(x^2-1)}$. s) $\frac{x}{(x^2-4)(x+1)}$. t) $\frac{x-y}{(x+y)(x+2y)}$.

Bài 9. Tính giá trị của các phân thức sau:

- a) $\frac{3x^2-x}{x+1}$ tại $x = -2$. b) $\frac{1}{x^2-4x}$ tại $x = -3$.
- c) $\frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2}$ tại $x = 5$. d) $\frac{x^2-4}{x(x-2)}$ tại $x = 0$.

Bài 10. Cho phân thức $A = \frac{x^2-4}{4x+8}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của A .
- b) Tính giá trị phân thức A tại $x = 3$.
- c) Tìm giá trị của x để phân thức A có giá trị bằng 0.

Bài 11. Cho phân thức $B = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của B .
- b) Tìm giá trị của x để phân thức có giá trị bằng 2.

Bài 12. Cho phân thức $C = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của C .
- b) Tính giá trị của phân thức C tại $x = 1$.
- c) Tìm giá trị của x để phân thức C nhận giá trị bằng 1.

Bài 13. Cho phân thức $D = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của D .
- b) Tìm giá trị của x để phân thức D nhận giá trị bằng 0. Tính giá trị của phân thức D tại $x = 0$.

Bài 14. Tìm các giá trị của x để các phân thức sau nhận giá trị bằng 0.

- a) $A = \frac{x^2-4}{x^2+2x}$ b) $B = \frac{x^2-4}{x-3}$ c) $C = \frac{x^2-2x+1}{2x+1}$
- d) $D = \frac{3x^2+5x-2}{3x^2-7x+2}$ e) $E = \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x-5}$ f) $G = \frac{2x^2+10x+12}{x^3-4x}$

§2 TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A Lí thuyết

0.1 Tính chất cơ bản của phân thức

 **Ví dụ 1.** Cho phân thức $\frac{x}{x-y}$. Nhân cả tử và mẫu của phân thức với $2x$ ta được phân thức mới nào? Phân thức mới này có bằng với phân thức $\frac{x}{x-y}$ hay không?

 **Ví dụ 2.** Với phân thức $\frac{2x^2(x+1)}{3y(x+1)}$ thì tử và mẫu đều có chung nhân tử là $(x+1)$. Viết kết quả của biểu thức sau $\frac{2x^2(x+1) : (x+1)}{3y(x+1) : (x+1)}$. So sánh phân thức nhận được với phân thức ban đầu.

 • Nếu nhân của tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì ta được một phân thức mới bằng phân thức đã cho.

Cụ thể: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}$ với $M \neq 0$.

• Nếu tử và mẫu của một phân thức có nhân tử chung thì khi chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó ta được một phân thức bằng phân thức đã cho.

Cụ thể: $\frac{A : N}{B : N} = \frac{A}{B}$ (N là một nhân tử chung).

• Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$ hoặc $\frac{A}{-B} = \frac{-A}{B}$.

 **Ví dụ 3.** Dùng tính chất cơ bản của phân thức giải thích vì sao $\frac{2x+2}{x^2-1} = \frac{2}{x-1}$?

 **Ví dụ 4.** Giải thích vì sao $\frac{3}{1-x^2} = \frac{-3}{x^2-1}$?

 Muốn rút gọn một phân thức đại số ta làm như sau:

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.
- Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó.

0.2 Vận dụng

 **Ví dụ 5.** Rút gọn phân thức $\frac{x^2 - xy}{3(xy^2 - y^3)}$.

! Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức là làm cho các phân thức đã cho thành những phân thức mới có cùng mẫu thức và lần lượt bằng các phân thức đã cho.

- Phân tích các mẫu thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung.
- Tìm nhân tử phụ bằng cách chia mẫu thức chung cho các mẫu.
- Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

Ví dụ 6. Quy đồng mẫu hai phân thức sau $\frac{1}{2x^2 + 2x}$ và $\frac{1}{3x^2 - 6x}$.

Ví dụ 7. Quy đồng mẫu thức hai phân thức sau: $\frac{1}{3x^2 - 3}$ và $\frac{1}{x^3 - 1}$.

B Luyện tập

Bài 1. Dùng tính chất cơ bản của phân thức, giải thích vì sao các kết luận sau là đúng?

a) $\frac{(x-2)^3}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x}$. b) $\frac{1-x}{-5x+1} = \frac{x-1}{5x-1}$.

Bài 2. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{5x+10}{25x^2+50}$. b) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^2}$. c) $\frac{(x^2-1)^2}{(x+1)(x^3+1)}$.

Bài 3. Cho phân thức $P = \frac{x+1}{x^2-1}$.

- a) Rút gọn phân thức đã cho, kí hiệu Q là phân thức nhận được.
b) Tính giá trị của P và Q tại $x = 11$. So sánh hai kết quả đó.

Bài 4. Tìm a sao cho hai phân thức sau bằng nhau $\frac{5x}{x+1}$ và $\frac{ax(x-1)}{(1-x)(x+1)}$.

Bài 5. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{1}{x^3-8}$ và $\frac{3}{4-2x}$. b) $\frac{x}{x^2-1}$ và $\frac{1}{x^2+2x+1}$

Bài 6. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{1}{x+2}$; $\frac{x+1}{x^2-4x+4}$ và $\frac{5}{2-x}$. b) $\frac{1}{3x+3y}$; $\frac{2x}{x^2-y^2}$ và $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$.

Bài 7. Cho hai phân thức $\frac{9x^2+3x+1}{27x^3-1}$ và $\frac{x^2-4x}{16-x^2}$.

- a) Rút gọn hai phân thức đã cho.
b) Quy đồng mẫu thức hai phân thức nhận được ở câu a.

Trắc nghiệm

Câu 1. Trong các câu sau, đâu là tính chất cơ bản của phân số?

- A. $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot N} (N \neq 0)$.
 B. $\frac{A}{B} = \frac{A + M}{B + M}$.
 C. $\frac{A}{B} = \frac{A - M}{B - M}$.
 D. $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} (M \neq 0)$.

Câu 2. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Đổi dấu tử của một phân thức, ta được phân thức mới bằng phân thức đã cho.
 B. Đổi dấu mẫu của một phân thức, ta được phân thức mới bằng phân thức đã cho.
 C. Đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức, ta được phân thức mới bằng phân thức đã cho.
 D. Cả ba ý trên đều đúng.

Câu 3. Chọn câu đúng thể hiện cách rút gọn của một phân thức.

- A. $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} (M \neq 0)$.
 B. $\frac{A}{B} = \frac{A : M}{B : M} (M \text{ là nhân tử chung của } A, B)$.
 C. $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B : M} (M \neq 0)$.
 D. $\frac{A}{B} = \frac{A : M}{B \cdot M} (M \text{ là nhân tử chung của } A, B)$.

Câu 4. Nhân tử chung của tử và mẫu của phân thức $\frac{x(x-1)}{(x-1)^3}$ là

- A. $x(x-1)$.
 B. $(x-1)^3$.
 C. $(x-1)$.
 D. x .

Câu 5. Mẫu thức chung của hai phân thức $\frac{1}{x-y}$ và $\frac{1}{x+y}$ là

- A. $(x-y)$.
 B. $(x+y)$.
 C. $(x-y)(x+y)$.
 D. $\frac{x-y}{x+y}$.

Câu 6. Để đổi dấu mẫu phân thức $\frac{x-1}{-5}$ về phân thức có mẫu dương ta được phân thức

- A. $\frac{x-1}{5}$.
 B. $\frac{1-x}{5}$.
 C. $\frac{1-x}{-5}$.
 D. $-\frac{x-1}{-5}$.

Câu 7. Quy đồng mẫu hai phân thức $\frac{1}{x}$ và $\frac{3}{x-y}$ ta được hai phân thức lần lượt là

- A. $\frac{x-y}{x}$ và $\frac{3}{x-y}$.
 B. $\frac{x-y}{x(x-y)}$ và $\frac{3x}{x(x-y)}$.
 C. $\frac{x-y}{x(x-y)}$ và $\frac{3}{x(x-y)}$.
 D. $\frac{1}{x(x-y)}$ và $\frac{3}{x(x-y)}$.

Câu 8. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A. Để chứng minh hai phân thức bằng nhau ta có thể quy đồng mẫu hai phân thức đó.
 B. Để chứng minh hai phân thức bằng nhau ta có thể rút gọn hai phân thức đó.
 C. Để chứng minh hai phân thức bằng nhau ta có thể dùng tích chéo.
 D. Cả ba câu trên đều sai.

Câu 9. Rút gọn phân thức $\frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c}$ ta được phân thức nào?

- A. $a+b+c$.
 B. $a+b-c$.
 C. $(a+b+c)^2$.
 D. $(a+b-c)^2$.

D Tự luận

 **Bài 8.** Dùng tính chất cơ bản của phân thức, rút gọn các phân thức sau:

- | | | | |
|------------------------------------|--|------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\frac{3xy}{9y}$ | 8) $\frac{xy(3x-1)^3}{x^3(1-3x)}$ | 15) $\frac{x^2-3x}{x^3-9x}$ | 22) $\frac{x^2-xy}{5y^2-5xy}$ |
| 2) $\frac{6x^2y^2}{8xy^5}$ | 9) $\frac{4x(3x-1)^3}{8x^3(1-3x)}$ | 16) $\frac{x^2-9}{3x-x^2}$ | 23) $\frac{10xy-5x^2}{2x^2-8y^2}$ |
| 3) $\frac{12x^3y^2}{18xy^5}$ | 10) $\frac{7x^5y(x-y)^2}{14xy^3(x-y)}$ | 17) $\frac{x^2-xy}{y^2-x^2}$ | 24) $\frac{x^2-xy}{3x^2-3xy}$ |
| 4) $\frac{15x^2y^3}{9x^3y^3}$ | 11) $\frac{10xy^2(x+y)}{15xy(x+y)^3}$ | 18) $\frac{2x-4y}{x^2-4y^2}$ | 25) $\frac{3(x-3)}{x^3-9x}$ |
| 5) $\frac{x(x+2)}{x^2(2+x)}$ | 12) $\frac{8x^3y^4(x-y)^2}{12x^2y^5(y-x)}$ | 19) $\frac{3xy+3}{9y+3}$ | 26) $\frac{3x^2y-3x^2}{2x(y-1)}$ |
| 6) $\frac{15x(x+5)^3}{20x^2(x+5)}$ | 13) $\frac{x-x^2}{x^2-1}$ | 20) $\frac{2x^2+2x}{x+1}$ | 27) $\frac{5x^2-10xy}{2(2y-x)^3}$ |
| 7) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3}$ | 14) $\frac{x^2-3x}{9-x^2}$ | 21) $\frac{3xy+3x}{9y+9}$ | 28) $\frac{36(x-2)^3}{32-16x}$ |

 **Bài 9.** Dùng tính chất cơ bản của phân thức, rút gọn các phân thức sau:

- | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------|
| a) $\frac{x^2+2x+1}{5x^3+5x^2}$ | b) $\frac{x^2-6x+9}{4x^2-12x}$ | c) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$ | d) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-8x+15}$ |
| e) $\frac{3x^2+5x-2}{x^2-3x-10}$ | f) $\frac{x^2-8x+12}{x^2-2x-24}$ | g) $\frac{x^2+7x+12}{4x^2+12x}$ | h) $\frac{7x^2+14x+7}{3x^2+3x}$ |
| i) $\frac{2x^2-3x-20}{x^2-16}$ | j) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$ | k) $\frac{x^3-x^2-x+1}{1-x^3}$ | l) $\frac{x^3-x^2-x+1}{1+x^3}$ |
| m) $\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}$ | n) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{4x^3+4x^2}$ | o) $\frac{7x^2-7x^3}{x^3-3x^2+3x-1}$ | |

 **Bài 10.** Tìm đa thức A để:

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\frac{3x^2y}{9xy^2} = \frac{A}{3y}$ | b) $\frac{x-x^2}{5x^2-x} = \frac{x}{A}$ | c) $\frac{A}{2x-1} = \frac{6x^2+3x}{4x^2-1}$ |
| d) $\frac{A}{2x+1} = \frac{6x^2-3x}{4x^2-1}$ | e) $\frac{5(y-x)^2}{5x^2-5xy} = \frac{x-y}{A}$ | f) $\frac{x^2+8}{2x-1} = \frac{3x^3+24x}{A}$ |
| g) $\frac{3(x+y)}{2} = \frac{5x^2-5y^2}{A}$ | h) $\frac{x^3+x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}$ | i) $\frac{5x^2-13x+6}{A} = \frac{5x-3}{2x+5}$ |
| j) $\frac{x^2-2x}{2x^2-3x-2} = \frac{x^2+2x}{A}$ | k) $\frac{x^2-2x-8}{2x^2-8} = \frac{x-4}{A}$ | l) $\frac{A}{7x^2+9x+2} = \frac{4x-3}{7x+2}$ |

 **Bài 4.** Quy đồng các phân thức sau:

- a) $\frac{11}{x^4y}$ và $\frac{3}{xy^3}$ b) $\frac{2}{3x^3y^2}$ và $\frac{3}{4x^7y}$ c) $\frac{25}{14x^2y}$ và $\frac{14}{21xy^5}$
- d) $\frac{5}{x^5y^3}$ và $\frac{7}{12x^3y^4}$ e) $\frac{5}{6xy^2}$ và $\frac{4}{9x^3y}$ f) $\frac{4}{15x^3y^5}$ và $\frac{11}{12x^4y^2}$
- g) $\frac{3x}{2x+4}$ và $\frac{x+3}{x^2-4}$ h) $\frac{5}{2x+6}$ và $\frac{3}{x^2-9}$ i) $\frac{1}{x+2}$ và $\frac{8}{2x-x^2}$
- j) $\frac{3}{x^2-5x}$ và $\frac{5}{2x-10}$ k) $\frac{7x-1}{2x^2+6x}$ và $\frac{5-3x}{x^2-9}$ l) $\frac{2x}{(x+2)^3}$ và $\frac{x-2}{2x \cdot (x+2)^2}$
- m) $\frac{4x-4}{2x(x+3)}$ và $\frac{x-3}{3x(x+1)}$

 **Bài 5.** Quy đồng các phân thức sau:

- a) $\frac{x+5}{x^2+4x+4}$ và $\frac{x}{3x+6}$ b) $\frac{x+1}{x-x^2}$ và $\frac{x+2}{2-4x+2x^2}$
- c) $\frac{2x}{x-8x+16}$ và $\frac{x}{3x^2-12x}$ d) $\frac{1}{4x^2-8x+4}$ và $\frac{5}{6x^2-6x}$
- e) $\frac{4x^2-2x+5}{x^3-1}$ và $\frac{1-2x}{x^2+x+1}$ f) $\frac{1}{2x+2y}$ và $\frac{y}{x^2+2xy+y^2}$
- g) $\frac{x}{x^2-2xy+y^2}$ và $\frac{x+y}{y^2-xy}$ h) $\frac{1}{x^2-x+1}$ và $\frac{x}{x^3+1}$

 **Bài 6.** Quy đồng các phân thức sau:

- a) $\frac{x}{x+1}$; $\frac{x^2}{1-x}$ và $\frac{1}{x^2-1}$ b) $\frac{10}{x+2}$; $\frac{5}{2x-4}$ và $\frac{1}{6-3x}$
- c) $\frac{x-1}{2x+2}$; $\frac{x+1}{2x-2}$ và $\frac{1}{1-x^2}$ d) $\frac{x}{2x-4}$; $\frac{1}{2x+4}$ và $\frac{3}{4-x^2}$
- e) $\frac{7}{x+2y}$; $\frac{4}{x-2y}$ và $\frac{x-y}{8y^2-2x^2}$ f) $\frac{1}{3x+3y}$; $\frac{1}{2y+2x}$ và $\frac{1}{x^2+2xy+y^2}$
- g) $\frac{2}{x+3}$; $\frac{5}{3x^3-12x}$ và $\frac{3}{(2x+4)(x+3)}$ h) $\frac{3x+6}{x^2-4}$; $\frac{5x}{x^2-2x}$ và $\frac{1-x}{x^2-3x+2}$
- i) $\frac{4x^2-3x+5}{x^3-1}$; $\frac{6}{x-1}$ và $\frac{2x}{x^2+x+1}$ j) $\frac{1}{x^3+1}$; $\frac{3}{2x+2}$ và $\frac{2}{x^2-x+1}$

 **Bài 7.** Chứng minh các phân thức sau bằng nhau

- a) $\frac{9x^2-1}{12x^2+4x}$ và $\frac{9x^2-6x+1}{12x^2-4x}$ b) $\frac{5x^2+5x}{x^2+2x+1}$ và $\frac{5x^3-5x^2+5x}{x^3+1}$
- c) $\frac{2x^2-7x+6}{x^2-4}$ và $\frac{2x^2+x-6}{x^2+4x+4}$ d) $\frac{3x^3-12x^2-15x}{6x^3+9x^2+3x}$ và $\frac{4x^2-12x-40}{8x^2+20x+8}$

 **Bài 8.** Rút gọn rồi tính giá trị của

a) $A = \frac{x^4 - 2x^3}{2x^2 - x^3}$ tại $x = \frac{1}{5}$

b) $B = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 8}$ tại $x = \frac{1}{5}$

c) $C = \frac{2y - 2x}{x^2 - 2xy + y^2}$ tại $x - y = \frac{-1}{2}$

 **Bài 9.** Rút gọn rồi tính giá trị của

a) $\frac{y^2 - x^2}{x^2 - 3xy + 2y^2}$

b) $\frac{x^2y + 2xy^2 + y^3}{2x^2 + xy - y^2}$

c) $\frac{x^2 + y^2 - 1 + 2xy}{x^2 - y^2 + 1 + 2x}$

d) $\frac{x^2 + y^2 - 4 + 2xy}{x^2 - y^2 + 4 + 4x}$

e) $\frac{5x^2 + 10xy + 5y^2}{3y^2 - 3x^2}$

f) $\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$

g) $\frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3}$

h) $\frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$

§3 **PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ**

A LÝ THUYẾT

1 Cộng hai phân thức cùng mẫu

 **Ví dụ 1.** Nhắc lại quy tắc cộng hai phân số cùng mẫu.

 **Ví dụ 2.** Tương tự quy tắc ở ví dụ 1 tính phép cộng sau $\frac{2x + y}{x - y} + \frac{-x + 3y}{x - y}$

Ghi nhớ

- Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức. Cụ thể $\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A + B}{M}$
- Kết quả của phép cộng hai phân thức được gọi là tổng của hai phân thức đó, thường sẽ được viết dưới dạng rút gọn.

 **Ví dụ 3.** Cộng các phân thức sau:

a) $\frac{x^2}{3x + 6} + \frac{4x + 4}{3x + 6}$

b) $\frac{3x + 1}{7xy} - \frac{2x + 1}{7xy}$

2 Cộng hai phân thức khác mẫu

 **Ví dụ 4.** Thực hiện các bước sau để làm phép cộng: $\frac{1}{x} + \frac{-2}{y}$.

- *Bước 1.* Quy đồng mẫu thức hai phân thức trên.
- *Bước 2.* Cộng hai phân thức trên bằng cách cộng hai phân thức mới quy đồng.

Ghi nhớ

Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu vừa tìm được.

 **Ví dụ 5.** Tính tổng $\frac{x + 1}{2x - 2} + \frac{-2x}{x^2 - 1}$

3 Trừ hai phân thức

Ghi nhớ

- Muốn trừ hai phân thức có cùng mẫu ta trừ các tử thức và giữ nguyên mẫu thức.
- Muốn trừ hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi trừ các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.
- Cũng như phép trừ phân số, ta có thể chuyển phép trừ phân thức thành phép cộng phân thức như sau $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D}$

Ví dụ 6. Tính $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x+3}{x+1}$.

Ví dụ 7. Tính $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$.

4 Cộng, trừ nhiều phân thức đại số

Ghi nhớ

- Vì trừ một phân thức cũng là cộng với phân thức đối của phân thức đó nên biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ phân thức cũng có thể xem là chỉ gồm các phép cộng phân thức. Cụ thể $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} + \frac{M}{N} = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D} + \frac{M}{N}$
- Trong các biểu thức ta có thể đổi chỗ các số hạng kèm theo dấu của nó.
- Khi rút gọn một biểu thức có dấu ngoặc, ta có thể bỏ các dấu ngoặc bằng cách sử dụng quy tắc dấu ngoặc.

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức $P = \frac{3}{2x+1} + \left[\frac{5}{4x-1} - \left(\frac{5}{4x-1} + \frac{3}{2x+1} \right) \right]$

B LUYỆN TẬP

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2} + \frac{5x - 1 - x^2}{2x^2}$

b) $\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x+y}$

c) $\frac{x}{2x-6} + \frac{9}{2x(3-x)}$

Bài 2. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{5-3x}{x+1} - \frac{-2+5x}{x+1}$

b) $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$

c) $\frac{3}{x+1} - \frac{2+3x}{x^3+1}$

 **Bài 3.** Thực hiện phép tính:

a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}$

b) $\frac{2x-1}{x} + \frac{1-x}{2x+1} + \frac{3}{x^2-9} + \frac{1-2x}{x} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{3}{x+3}$

 **Bài 4.** Thực hiện phép tính:

a) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} + \frac{x}{2-x} + \frac{4-x}{5x-10}$

b) $\frac{x}{x^2+1} - \left(\frac{3}{x+6} + \frac{2-x}{x+4} \right) + \left[\frac{3}{x+6} - \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x-2}{x+4} \right) \right]$

 **Bài 5.** Thực hiện phép tính:

a) $\frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx}$

b) $\frac{x}{(x-y)^2} + \frac{y}{y^2-x^2}$

 **Bài 6.** Một tàu du lịch chạy xuôi dòng 15 (km), sau đó quay ngược lại để trở về điểm xuất phát và kết thúc chuyến du lịch. Biết rằng vận tốc của tàu khi nước yên lặng là 10 (km/h) và vận tốc của dòng nước là x (km/h)

a) Hãy viết các phân thức biểu thị theo x thời gian xuôi dòng, thời gian ngược dòng và tổng thời gian tàu chạy.

b) Tính tổng thời gian tàu chạy khi vận tốc dòng nước là 2 (km).

 **Bài 7.** Cho biểu thức $P = \frac{x^2-6x+9}{9-x^2} + \frac{4x+8}{x+3}$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P tại $x = 7$

c) Chứng tỏ $P = 3 + \frac{2}{x+3}$. Từ đó tìm tất cả giá trị nguyên của x sao cho biểu thức đã cho nhận giá trị nguyên.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Trắc nghiệm

Câu 1. Công thức nào sau đây thể hiện phép cộng hai phân thức cùng mẫu.

A. $\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A+B}{2M}$.

B. $\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A+B}{M}$.

C. $\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A \cdot M + B \cdot M}{M}$.

D. $\frac{A}{M} - \frac{B}{M} = \frac{A-B}{M}$.

Câu 2. Chọn phát biểu **sai** trong các phát biểu sau.

A. Có thể đổi chỗ các phân thức trong một biểu thức chứa phép cộng trừ phân thức.

B. Có thể chuyển phép trừ phân thức thành phép cộng với phân thức đối.

C. Có thể dùng quy tắc dấu ngoặc để rút gọn một biểu thức có các phân thức.

D. Cả ba phát biểu trên đều sai.

Câu 3. Trong các phép tính sau, đâu là phép cộng hai phân thức cùng mẫu.

- A. $\frac{1}{x+y} + \frac{-3}{x}$. B. $\frac{1}{x+y} + \frac{-3}{y}$. C. $\frac{1}{x+y} + \frac{-3}{x+y}$. D. $\frac{1}{x+y} + \frac{x+y}{3}$.

Câu 4. Kết quả của phép tính $\frac{3x^2}{2x^2y} - \frac{x^2}{2x^2y}$ là

- A. $\frac{x^2}{2x^2y}$. B. $\frac{1}{2x^2y}$. C. $\frac{2x^2}{y}$. D. $\frac{1}{y}$.

Câu 5. Phép tính nào cho kết quả $\frac{-2y}{(x+y)(x-y)}$?

- A. $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$. B. $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}$. C. $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y}$. D. $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$.

Câu 6. $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ là kết quả của phép tính nào sau đây?

- A. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$. B. $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$. C. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$. D. $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$.

Câu 7. Ta không nên quy đồng cho phép tính nào dưới đây?

- A. $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{1-x}$. B. $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y}$. C. $x - \frac{1}{x+y}$. D. $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1}$.

Câu 8. Nếu lựa chọn mẫu chung là $4 - x^2$ khi tính biểu thức $\frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{5x-6}{4-x^2}$ thì phân thức nào cần đổi dấu?

- A. $\frac{4}{x+2}$. B. $\frac{2}{x-2}$. C. $\frac{5x-6}{4-x^2}$. D. Cả A và B.

2 Tự luận

Bài 1. Thực hiện phép tính (cùng mẫu):

- a) $\frac{2x}{5} + \frac{2}{5}$ b) $\frac{2x+5}{3} + \frac{x-2}{3}$
 c) $\frac{3x-5}{7} + \frac{4x+5}{7}$ d) $\frac{x^2+4}{x} - \frac{3x+4}{x}$
 e) $\frac{5x+y^2}{x^2y} - \frac{5y-x^2}{x^2y}$ f) $\frac{4xy-5}{2xy} - \frac{6y^2-5}{2xy}$

Bài 2. Thực hiện phép tính (đổi dấu):

- a) $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{1-x}$ b) $\frac{11x}{2x-3} - \frac{x-18}{3-2x}$
 c) $\frac{4x+5}{2x-1} + \frac{5-9x}{1-2x}$ d) $\frac{2x-7}{10x-4} - \frac{3x+5}{4-10x}$
 e) $\frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{x^2}{y^2-x^2}$ f) $\frac{4x+13}{5x(x-7)} - \frac{x-48}{5x(7-x)}$
 g) $\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-9}{1-x} - \frac{x-9}{1-x}$ h) $\frac{2x^2-x}{x-1} + \frac{x+1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x-1}$
 i) $\frac{4-x^2}{x-3} + \frac{2x-x^2}{3-x} + \frac{5-4x}{x-3}$ j) $\frac{x+1}{x-5} + \frac{x-18}{5-x} + \frac{x+2}{x-5}$

 **Bài 3.** Thực hiện phép tính (quy đồng):

a) $\frac{1}{y(x-y)} - \frac{1}{x(x-y)}$

b) $\frac{x+6}{2x+6} + \frac{2x+3}{x(x+3)}$

c) $\frac{x}{5x+5} - \frac{x}{10x-10}$

d) $\frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy}$

e) $\frac{1}{y^2-xy} + \frac{1}{x^2-xy}$

f) $\frac{x}{y^2-xy} - \frac{y}{xy-x^2}$

g) $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-x}$

h) $\frac{x+9}{x^2-9} - \frac{3}{x^2+3x}$

i) $\frac{x-12}{6x-36} + \frac{6}{x^2-6x}$

j) $\frac{3x+5}{x^2-5x} + \frac{25-x}{25-5x}$

k) $\frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x}$

l) $\frac{y}{2x^2-xy} + \frac{4x}{y^2-2xy}$

m) $\frac{1}{x-5x^2} - \frac{25x-15}{25x^2-1}$

n) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{x^2+3}{2-2x^2}$

o) $\frac{7}{x} - \frac{x}{x+6} + \frac{36}{x^2+6x}$

p) $\frac{3}{2x} + \frac{3x-3}{2x-1} + \frac{2x^2+1}{4x^2-2x}$

q) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} + \frac{x-5}{x^2+5x}$

r) $\frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{2}{2-x} + \frac{x}{x-3}$

s) $\frac{x-4}{x^2-2x} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}$

t) $\frac{1-3x}{2x} + \frac{3x-2}{2x-1} + \frac{3x-2}{2x-4x^2}$

 **Bài 4.** Thực hiện phép tính (quy đồng):

a) $\frac{2}{x+3} + \frac{x}{3-x} - \frac{x-x^2}{x^2-9}$

b) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{4x-4}{x^2-4}$

c) $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2} - \frac{18-5x}{x^2-4}$

d) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{x-1}{3-x} + \frac{2x-2x^2}{x^2-9}$

e) $\frac{4}{x+2} + \frac{3}{2-x} + \frac{12}{x^2-4}$

f) $\frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{5x-6}{4-x^2}$

g) $\frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{2-x}$

h) $\frac{a^2}{a+1} + \frac{1}{a-1} - \frac{2a}{a^2-1}$

i) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{x}{x^2-4}$

j) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2}$

k) $\frac{1}{x-y} + \frac{2}{x+y} + \frac{3x}{y^2-x^2}$

l) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} + \frac{2xy}{y^2-x^2}$

 **Bài 5.** Thực hiện phép tính (quy đồng):

a) $\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2}$

c) $\frac{2}{2x+3} + \frac{5}{2x-3} - \frac{2x-33}{9-4x^2}$

e) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{4x-4}{x^2-4} - \frac{x+1}{2-x}$

g) $\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x+3} - \frac{10x+9}{9-4x^2}$

i) $\frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2}$

k) $\frac{x}{2x-2} + \frac{3x}{2x+2} - \frac{2x^2}{x^2-1}$

m) $\frac{1}{6x-4y} - \frac{1}{6x+4y} - \frac{3x}{4y^2-9x^2}$

b) $\frac{x}{x-2y} + \frac{x}{x+2y} + \frac{4xy}{4y^2-x^2}$

d) $\frac{6x}{x^2-9} + \frac{5x}{x-3} + \frac{x}{x+3}$

f) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1}$

h) $\frac{2x+1}{2x^2-x} + \frac{32x^2}{1-4x^2} + \frac{1-2x}{2x^2+x}$

j) $\frac{1}{2x-2y} - \frac{1}{2x+2y} + \frac{y}{y^2-x^2}$

l) $\frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2}$

n) $\frac{2x}{x^2+2xy} + \frac{y}{xy-2y^2} + \frac{4}{x^2-4y^2}$

 **Bài 6.** Thực hiện phép tính (quy đồng):

a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^3+1} + \frac{1}{x^2-x+1}$

c) $\frac{x^3+2x}{x^3+1} + \frac{2x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x+1}$

e) $\frac{1}{x-y} - \frac{3xy}{x^3-y^3} + \frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$

g) $\frac{4x^2-3x+17}{x^3-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{6}{1-x}$

i) $\frac{-x^2-2}{x^3-1} + \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x-1}$

b) $\frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x}$

d) $\frac{3(x+1)^2}{x^3-1} - \frac{1-x}{x^2+x+1} + \frac{3}{1-x}$

f) $\frac{1}{x-y} + \frac{3xy}{y^3-x^3} + \frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$

h) $\frac{3x^2+5x+1}{x^3-1} - \frac{1-x}{x^2+x+1} - \frac{3}{x-1}$

j) $\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x} + \frac{2x}{1-x^3}$

 **Bài 7.** Thực hiện phép tính (quy đồng):

a) $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} + \frac{x-14}{(x^2+4x+4)(x-2)}$

b) $\frac{18}{(x-3)(x^2-9)} - \frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{x}{x^2-9}$

c) $\frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{2x}{x^3+4x^2+4x} + \frac{1}{x^2+5x+6}$

d) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+3)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(4x+7)}$

 **Bài 8.** Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$

b) $A = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$

$$c) A = \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{3}{(x-3)(x-1)}$$

$$d) A = \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{a^2+3a+2} + \dots + \frac{1}{a^2+19a+90}$$

$$e) A = \frac{4 \cdot (x+3)^2}{(3x+5)^2 - 4x^2} - \frac{x^2 - 25}{9x^2 - (2x+5)^2} - \frac{(2x+3)^2 - x^2}{(4x+15)^2 - x^2}$$

$$f) A = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$g) A = \frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}$$

$$h) A = \frac{4}{(y-x)(z-x)} + \frac{3}{(y-x)(y-z)} + \frac{3}{(y-z)(x-z)}$$

$$i) A = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} + \frac{8a^7}{a^8+b^8}$$

$$j) A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} + \frac{32}{1+x^{32}}$$

 **Bài 9.** Cho biểu thức $A = \frac{x+15}{x^2-9} + \frac{2}{x+3}$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để A có giá trị bằng $-\frac{1}{2}$

c) Tìm số tự nhiên x để A đạt giá trị nguyên.

 **Bài 10.** Cho biểu thức $A = \frac{x}{x+2} + \frac{x+1}{x}$.

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A

b) Tìm giá trị của x để $A = 2$

 **Bài 11.** Cho biểu thức $A = \frac{2x}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} + \frac{3-11x}{9-x^2}$

a) Rút gọn biểu thức A với $x \neq \pm 3$

b) Tính giá trị của A khi $x = 5$

c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị nguyên

 **Bài 12.** Cho biểu thức $A = \frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{2-x} + \frac{8}{x^2-4}$

a) Rút gọn biểu thức A với $x \neq \pm 2$

b) Tìm x để A luôn có giá trị âm.

 **Bài 13.** Cho biểu thức $A = \frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x}$

a) Tìm điều kiện xác định rồi rút gọn A

b) Tìm x để $A = -3$.

Bài 14. Cho biểu thức $A = \frac{3+x}{3-x} - \frac{4x^2}{x^2-9} - \frac{3-x}{3+x}$

a) Tìm điều kiện xác định rồi rút gọn A

b) Tìm x để $A = -3$.

Bài 15. Cho biểu thức $A = \frac{x}{x-2} + \frac{2-x}{x+2} + \frac{12-10x}{x^2-4}$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 16. Cho biểu thức $A = \frac{2x}{x+3} + \frac{2}{x-3} + \frac{x^2-x+6}{9-x^2}$

a) Rút gọn A với $x \neq \pm 3$

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 17. Cho $A = \frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x-2} - \frac{9x+2}{4-x^2} (x \neq \pm 2)$

a) Chứng minh rằng $A = \frac{3}{x-2}$.

b) Tính giá trị của A khi $3x(2x+1) - 6(2x+1) = 0$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 18. Cho $P = \frac{5x-2}{x^2-4} - \frac{3}{x+2} + \frac{x}{x-2} (x \neq \pm 2)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P với x thỏa mãn $|x+3| = 5$.

c) Tìm các số nguyên x để giá trị của P là số nguyên.

Bài 19. Cho phân thức $A = \frac{x^2-3x-4}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$.

a) Rút gọn A

b) Tìm số nguyên x để A là một số nguyên.

Bài 20. Cho $A = \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} + \frac{x^2+4x}{4-x^2}$ với $(x \neq \pm 2)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên dương.

Bài 21. Cho $M = \frac{x+3}{x-2} + \frac{x-3}{x+2} - \frac{2x^2+3x+6}{x^2-4}$.

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M
- b) Tính giá trị của M khi $x = 3$
- c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để M nhận giá trị nguyên

 **Bài 22.** Cho biểu thức $B = \frac{x}{x+3} + \frac{2x}{x-3} - \frac{9-3x^2}{9-x^2}$.

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn B
- b) Tìm x để $B > 0, B < 0$
- c) Tính giá trị của B khi x thỏa mãn $|2x+1| = 5$.
- d) Tìm x nguyên để B nhận giá trị nguyên.
- e) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = B \cdot \frac{x-3}{x^2-2x+3}$.

§4 PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A Nhân hai phân thức

- Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử với nhau, các mẫu thức với nhau. Tổng quát: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$.
- Kết quả của phép nhân hai phân thức được gọi là tích, thường viết dưới dạng rút gọn.

Ví dụ 1. Nhân hai phân thức $\frac{x}{x+y} \cdot \frac{2x+2y}{3xy} = \frac{x}{x+y} \cdot \frac{2(x+y)}{3xy} = \frac{2}{3y}$

Ví dụ 2. Nhân hai phân thức $\frac{3x}{4x^2-1} \cdot \frac{-2x+1}{2x^2} = \frac{3x}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{-(2x-1)}{2x^2} = \frac{-3}{2x(2x+1)}$

Cũng như phép nhân phân số, phép nhân phân thức có các tính chất sau:

- Giao hoán $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B}$
- Kết hợp $\left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}\right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}\right)$
- Phân phối đối với phép cộng $\frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$

Ví dụ 3. Tính:

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x+2} : \left(\frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1} \right) \\ &= \frac{x+1}{x+2} : \left(\frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+1}{x+3} \right) \\ &= \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{(x+3)^2}{(x+2) \cdot (x+1)} \\ &= \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{3x+2}{x+1} - \frac{2x+1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{x^2-1}{x} \cdot \left(\frac{3x+2}{x+1} - \frac{2x+1}{x+1} \right) \\ &= \frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{x+1}{x+1} \\ &= \frac{x^2-1}{x} \end{aligned}$$

B Chia hai phân thức

Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức $\frac{D}{C}$.

Cụ thể $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$ với $\frac{C}{D} \neq 0$ **Chú ý:** $\frac{C}{D} \cdot \frac{D}{C} = 1$. Ta nói $\frac{D}{C}$ là phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$.

 **Ví dụ 5.** Làm phép chia:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{x^2 - 1} : \frac{3}{x^2 - x} \\ &= \frac{5}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - x}{3} \\ &= \frac{5x(x - 1)}{3(x - 1)(x + 1)} \\ &= \frac{5x}{3(x + 1)} \end{aligned}$$

C Luyện tập

 **Bài 1.** Làm tính nhân phân thức:

a) $\left(-\frac{3x}{5xy^2}\right) \cdot \left(-\frac{5y^2}{12xy}\right)$

b) $\frac{x^2 - x}{2x + 1} \cdot \frac{4x^2 - 1}{x^3 - 1}$

 **Bài 2.** Làm tính chia phân thức:

a) $\left(-\frac{3x}{5xy^2}\right) : \left(-\frac{5y^2}{12xy}\right)$

b) $\frac{4x^2 - 1}{8x^3 - 1} : \frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^2 + 2x + 1}$

 **Bài 3.** Tìm hai phân thức P và Q thỏa mãn:

a) $P \cdot \frac{x + 1}{2x + 1} = \frac{x^2 + x}{4x^2 - 1}$

b) $Q : \frac{x^2}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{x^2 - 2x}$

 **Bài 4.** Cho hai phân thức $P = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$ và $Q = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$

a) Rút gọn P và Q

b) Sử dụng kết quả của câu a. Tính $P \cdot Q$ và $P : Q$

D BÀI TẬP TƯ LUYỆN.

E Trắc nghiệm

Câu 1. Phép nhân hai phân thức có những tính chất gì?

- A. Giao hoán. B. Kết hợp.
C. Phân phối phép nhân với phép cộng. D. Cả ba đáp án trên.

Câu 2. Khi chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ thì điều kiện là gì?

- A. $\frac{C}{D} \neq 0$. B. $\frac{C}{D} = 0$. C. $\frac{A}{B} \neq 0$. D. $\frac{A}{B} = 0$.

Câu 3. Phép chia phân thức 1 cho phân thức $\frac{A}{B}$ ta được kết quả là

- A. $\frac{A}{B}$. B. $\frac{B}{A}$. C. $\frac{1}{A}$. D. $\frac{1}{B}$.

Câu 4. Kết quả khi tính phép nhân $\frac{x-2}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x-4}$ là

- A. $\frac{x-2}{x-4}$. B. $\frac{x-4}{x-2}$. C. $\frac{x-2}{x-3}$. D. $\frac{x-3}{x-4}$.

Câu 5. Kết quả của phép chia $\frac{1}{x-3} : \frac{1}{x^2-9}$ là

- A. $\frac{1}{x+3}$. B. $\frac{x+3}{1}$. C. $\frac{1}{x-3}$. D. $\frac{x-3}{x+3}$.

Câu 6. Để phép nhân hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ có kết quả là 0 thì

- A. $A = C$. B. $B = 0$.
C. $D = 0$. D. $A = 0$ hoặc $C = 0$.

Câu 7. Phép chia $1 : \frac{A}{B}$ có giá trị nguyên khi nào?

- A. $1:A$. B. $1:B$. C. $B:A$. D. $A:B$.

Câu 8. Phân thức $\frac{3}{x^2+1}$ với $x \in \mathbb{Z}$ đạt giá trị lớn nhất khi nào?

- A. $x = 0$. B. $x = -1$. C. $x = -2$. D. $x \neq 0$.

Câu 9. Giá trị của x để phân thức $-\frac{x-2}{x^2+5} < 0$ thì

- A. $x = 2$. B. $x \neq 2$. C. $x > 2$. D. $x < 2$.

 **Bài 5.** Thực hiện phép tính:

1) $\frac{15x}{7y^3} \cdot \frac{2y^2}{x^2}$

2) $\frac{6x^3}{7y^4} \cdot \frac{35y^2}{24x}$

3) $\frac{4y^2}{x^4} \cdot \frac{(-3x^2)}{8y}$

4) $\frac{-18y^3}{25x^4} : \frac{9y^3}{-15x^2}$

5) $\frac{8y^2}{9x^2} : \frac{4y}{3x^2}$

6) $\frac{(-20x)}{3y^2} : \frac{(-4x^3)}{5y}$

7) $\frac{(x+4)^2}{4x+12} : \frac{x+4}{3x+9}$

8) $\frac{5x+10}{4x-8} \cdot \frac{4-2x}{x+2}$

9) $\frac{x^2-36}{2x+10} \cdot \frac{3}{6-x}$

10) $\frac{x^2-4}{x^2-x} : \frac{x^2+2x}{x-1}$

11) $\frac{4(x+3)}{3x^2-x} : \frac{x^2+3x}{1-3x}$

12) $\frac{4x+12}{(x+4)^2} : \frac{3(x+3)}{x+4}$

13) $(x^2-25) : \frac{2x+10}{3x-7}$

14) $\frac{5x-10}{x^2+7} : (2x-4)$

15) $(4x^2-16) : \frac{3x+6}{7x-2}$

16) $\frac{x-y}{y-1} : \frac{x-y}{x-1} \cdot \frac{x-1}{y-1}$

17) $\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1}$

18) $\frac{x+1}{x+2} : \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+1}$

19) $\frac{x+1}{x+2} : \frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1}$

20) $\frac{x^2+x}{x+2} : \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+1}$

21) $\frac{x+1}{x+2} \cdot \left(\frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1} \right)$

22) $\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$

23) $\frac{x+1}{x^2-2x-8} \cdot \frac{4-x}{x^2+x}$

24) $\frac{x^2+2}{4x+24} \cdot \frac{x^2-36}{x^2+x-2}$

25) $\frac{x^3-8}{5x+20} \cdot \frac{x^2+4x}{x^2+2x+4}$

$$26) \frac{(x-3)^3}{3x^2} : \frac{x^2-6x+9}{6x}$$

$$27) \frac{x^2+x}{5x^2-10x+5} : \frac{3x+3}{5x-5}$$

$$28) \frac{6x-3}{5x^2+x} : \frac{1-8x^3}{25x^2+10x+1}$$

$$29) \frac{x^2+2x+1}{x^3-1} : \frac{x+1}{2x^2+2x+2}$$

$$30) \frac{x+2}{x^2-5x+6} : \frac{x^2+3x+2}{x-2}$$

 **Bài 6.** Rút gọn các biểu thức sau

$$a) \left(\frac{1}{x+4} + \frac{8}{x^2-16} \right) : \frac{x+1}{x-4}$$

$$b) \frac{x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left(\frac{x+3}{x^2-3x} - \frac{x}{x^2-9} \right)$$

$$c) \frac{x^2-6}{x-3} + \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left(\frac{x}{x^2-9} - \frac{x+3}{x^2-3x} \right)$$

$$d) \left(\frac{x}{x^2-36} - \frac{x-6}{x^2+6x} \right) : \frac{2x-6}{x^2+6x} + \frac{x}{6-x}$$

 **Bài 7.** Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của các biểu thức sau nhận giá trị nguyên

$$a) A = \frac{3}{2x-1}$$

$$b) A = \frac{5}{x^2+1}$$

$$c) A = \frac{10}{x^2+1}$$

$$d) A = \frac{7}{x^2-x+1}$$

$$e) A = \frac{2x-1}{x+2}$$

$$f) A = \frac{x^2+3x+5}{x-1}$$

$$g) A = \frac{3x^2-x+1}{3x+2}$$

$$h) A = \frac{3x^2-8x+1}{x-3}$$

$$i) A = \frac{3x^2-x+3}{3x+2}$$

j) $A = \frac{x^2 - 59}{x + 8}$

 **Bài 8.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} + \frac{1}{x - 3} \right) : \frac{x}{x + 3}$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị của x để $A = 3$

 **Bài 9.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \frac{x + 1}{x}$ với $x \neq 0, x \neq -2, x \neq -1$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm x để $P = \frac{5}{2}$

c) Tìm giá trị x nguyên để P nhận giá trị nguyên.

 **Bài 10.** Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2} - \frac{2}{x - 2} \right) : \left(1 - \frac{x}{x + 2} \right)$ với $x \neq \pm 2$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = -4$

c) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

 **Bài 11.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{4x}{x^2 + 2x} + \frac{2}{x - 2} - \frac{6 - 5x}{4 - x^2} \right) : \frac{x + 1}{x - 2}$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A khi x thỏa mãn $x^2 - 2x = 8$

c) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

 **Bài 12.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x}{x - 3} + \frac{x}{x + 3} + \frac{2x^2 + 3x + 1}{9 - x^2} \right) : \frac{x - 1}{x + 3}$.

a) Tìm điều kiện xác định và thu gọn A

b) Tìm x để $A = 3$

c) Tìm x để $A < 1$

 **Bài 13.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x + 3} - \frac{2x}{3 - x} + \frac{3x^2 + 9}{9 - x^2} \right) : \frac{3}{x - 3}$.

a) Tìm điều kiện và rút gọn A

b) Tìm x là số nguyên để A nhận giá trị nguyên.

 **Bài 14.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{5}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right) : \frac{6}{x + 3}$.

a) Tìm điều kiện xác định và thu gọn A

b) Tìm số x có giá trị nguyên để A nhận giá trị nguyên.

 **Bài 15.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{x-4}{4-x^2} \right) : \frac{1}{x^2-4}$.

- a) Tìm điều kiện và thu gọn A
- b) Tìm các giá trị của x để $A = 14$

 **Bài 16.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{2-2x} + \frac{3}{2x+2} - \frac{2x^2}{x^2-1} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$ với $x \neq \frac{1}{2}, x \neq \pm 1$.

- a) Thu gọn A
- b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

 **Bài 17.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{7-2x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} \right) : \frac{3x+9}{x^2-1}$.

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn A
- b) Tính giá trị của A biết $|x-2| = 1$
- c) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

 **Bài 18.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x-1}{x+3} - \frac{x}{3-x} - \frac{3-10x}{x^2-9} \right) : \frac{x+2}{x-3}$.

- a) Tìm điều kiện và rút gọn P
- b) Tính giá trị của P khi $x^2 - 7x + 12 = 0$
- c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

 **Bài 19.** Cho biểu thức $M = \left(\frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} + \frac{2}{3-x} \right) : \frac{3}{x+3}$.

- a) Tìm điều kiện của x để M được xác định
- b) Rút gọn biểu thức M
- c) Tính giá trị của M khi $x = -7$
- d) Tìm giá trị nguyên của x để M nhận giá trị nguyên.

 **Bài 20.** Cho biểu thức $A = \frac{x-3}{x+1}$ và $B = \frac{3}{x-3} - \frac{6x}{9-x^2} + \frac{x}{x+3}$ với $x \neq \pm 3, x \neq -1$.

- a) Tính giá trị của A tại x thỏa mãn $x^2 + x = 0$
- b) Chứng minh rằng $B = \frac{x+3}{x-3}$
- c) Tìm các số nguyên x sao cho biểu thức $Q = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

 **Bài 21.** Cho hai biểu thức $A = \frac{x^2+x}{3x+9}$ và $B = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2-1}$ với $(x \neq -3, x \neq \pm 1)$.

- a) Tìm giá trị của biểu thức A khi $x = 2$
- b) Rút gọn biểu thức B

c) Đặt $P = A \cdot B$. Tìm x để $P < 1$

 **Bài 22.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{a+2}{a+1} - \frac{a-2}{a-1} \right) \cdot \frac{a+1}{a}$ và $B = \frac{3}{a^2-1}$ với $a \neq 0, a \neq \pm 1$.

a) Tìm a để biểu thức B có giá trị bằng 1

b) Rút gọn biểu thức A

c) Tìm giá trị của a để $A = 2 \cdot B$

 **Bài 23.** Cho hai biểu thức: $A = \frac{4}{x+1} - 1$ và $B = \frac{9-x^2}{x^2+2x+1}$ với $(x \neq \pm 3, x \neq -1)$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 1$

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{A}{B}$

c) Tìm x nguyên để P nhận giá trị nguyên

 **Bài 24.** Cho biểu thức $A = \frac{x-3}{x+2}$ và $B = \frac{6-7x}{x^2-4} + \frac{3}{x+2} - \frac{x}{2-x}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn B

b) Cho $A = \frac{1}{2}$. Khi đó tính giá trị của biểu thức B

c) Đặt $M = \frac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $|M| = -M$

 **Bài 25.** Bài 19: Cho hai biểu thức: $A = \frac{4}{x+1} - 1$ và $B = \frac{9-x^2}{x^2+2x+1}$ với $(x \neq \pm 3, x \neq -1)$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 1$

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{A}{B}$

c) Tìm x nguyên để P nhận giá trị nguyên

 **Bài 26.** Bài 20: Cho biểu thức $A = \frac{x-3}{x+2}$ và $B = \frac{6-7x}{x^2-4} + \frac{3}{x+2} - \frac{x}{2-x}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn B

b) Cho $A = \frac{1}{2}$. Khi đó tính giá trị của biểu thức B

c) Đặt $M = \frac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $|M| = -M$

 **Bài 27.** Bài 21: Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}$ và $B = \frac{-16}{x^2-4}$ với $(x \neq \pm 2)$.

a) Tìm x để $A = B$

b) Tìm x để $\frac{A}{B} < 0$

 **Bài 28.** Bài 28: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x}{x^3 + x - x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) : \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để $A = \frac{2}{7}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{A}{1 - x}$

 **Bài 29.** Bài 29: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{2 + x}{2 - x} - \frac{4x^2}{x^2 - 4} - \frac{2 - x}{2 + x} \right) : \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - x^3}$.

a) Rút gọn biểu thức Q

b) Khi $x > 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của Q

MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC

§1 HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Hình chóp tam giác đều

- Hình chóp tam giác đều có đáy là một tam giác đều, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau, chung một đỉnh. Đỉnh chung này gọi là đỉnh của hình chóp tam giác.
- Trong Hình 1. $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều.
 - Đoạn thẳng nối từ đỉnh và trọng tâm của tam giác đáy gọi là đường cao của hình chóp tam giác đều.
 - Đường cao vẽ từ đỉnh của mỗi mặt bên gọi là trung đoạn của tam giác đều.

 **Ví dụ 1.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ như Hình 1.

- Kể tên các mặt bên, cạnh đáy.
- Kể tên đường cao và trung đoạn.

 **Hình chóp tam giác đều có**

- Đáy là tam giác đều.
- Mặt bên là các tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.
- Chân đường cao kẻ từ đỉnh tới mặt đáy là điểm các đều các đỉnh của tam giác đáy.

 **Ví dụ 2.** Hình 2 là hình khai triển một hình chóp tam giác đều

- Cho biết các mặt bên là hình gì, mặt đáy là hình gì?
- Các mặt bên có bằng nhau hay không?

2 Diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tam giác đều

Ví dụ 3. Cho hình chóp tam giác đều có kích thước như Hình 3.

- Hãy tính diện tích một mặt bên.
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều.

Ví dụ 4. Cho Hình 4. Tìm công thức tính diện tích xung quanh hình chóp tam giác đều.

Ví dụ 5. Cho hình chóp tam giác đều có kích thước như Hình 5. Tính diện tích xung quanh hình chóp đó.

3 Thể tích của hình chóp tam giác đều

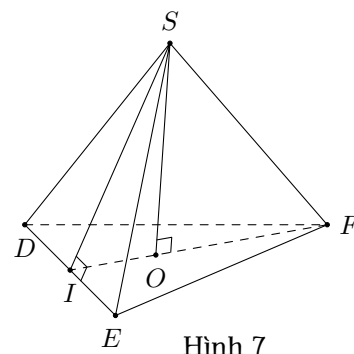
Thể tích của hình chóp tam giác đều bằng $\frac{1}{3}$ diện tích mặt đáy nhân với chiều cao.

$V = \frac{1}{3} \cdot S_d \cdot h$. Trong đó S_d là diện tích đáy và h là chiều cao của hình chóp.

Ví dụ 6. Cho hình chóp tam giác đều có kích thước như Hình 6. Tính thể tích của hình chóp tam giác đều $S.ABC$.

Bài 1.

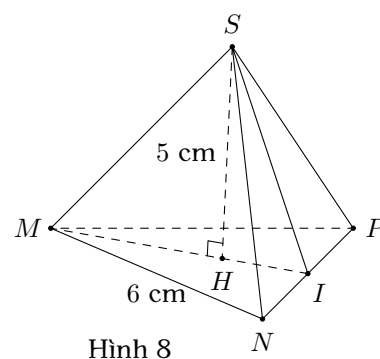
Gọi tên đỉnh, cạnh bên, mặt bên, mặt đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tam giác đều tròn Hình 7



Bài 2.

Cho hình chóp tam giác đều $S.MNP$ như Hình 8.

- Tính diện tích tam giác MNP .
- Tính thể tích hình chóp $S.MNP$ biết $\sqrt{27} \approx 5,19$.



B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hình chóp tam giác đều có đáy là hình gì?

- A. Hình thoi. B. Hình vuông. C. Tam giác đều. D. Tam giác.
C

Câu 2. Thể tích của hình chóp tam giác đều bằng

- A. Diện tích đáy nhân với chiều cao. B. $\frac{1}{3}$ diện tích đáy nhân với chiều cao.
C. $\frac{1}{2}$ chiều cao nhân với diện tích đáy. D. $\frac{3}{2}$ diện tích đáy nhân với chiều cao.
B

Câu 3. Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều bằng

- A. Nửa chu vi đáy nhân với đường cao. B. Chu vi đáy nhân với trung đoạn.
C. Nửa chu vi đáy nhân với trung đoạn. D. Chu vi đáy nhân với chiều cao.
C

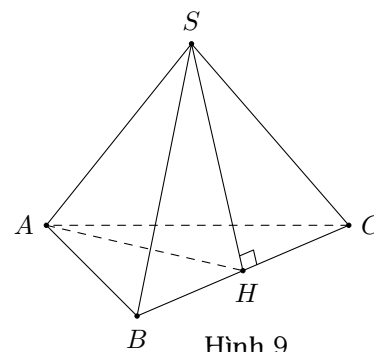
Câu 4. Các mặt bên của hình chóp tam giác đều có diện tích như thế nào?

- A. Bằng nhau. B. Khác nhau.
C. Đều bằng 3. D. Cả A, B, C đều sai.
A

Câu 5.

Cho hình chóp tam giác đều như Hình 9

- A. SH là đường cao. B. SH là trung đoạn.
C. AH là đường cao. D. AH là trung đoạn.



Hình 9

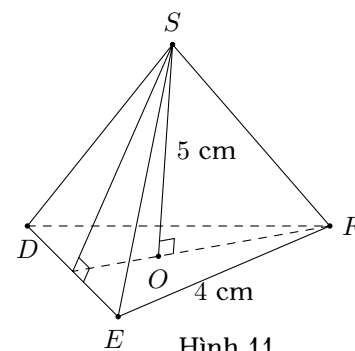
B

Câu 6.

Hình chóp tam giác đều $S.DEF$ có kích thước như Hình 11.

Thể tích của hình chóp $S.DEF$ là

- A. $V = \frac{20}{3} \text{ cm}^3$. B. $\frac{10}{3} \text{ cm}^3$.
C. 20 cm^3 . D. 10 cm^3 .



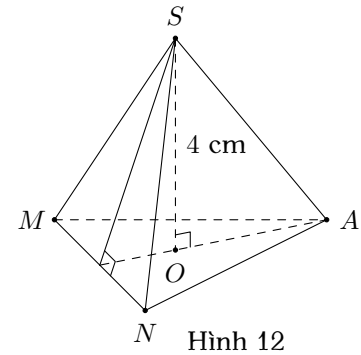
Hình 11

A

Câu 7.

Cho hình chóp tam giác đều như Hình 12. Biết thể tích là 12 lít. Diện tích $\triangle AMN$ bằng

- A. 3 dm^2 . B. 9 dm^2 . C. 6 dm^2 . D. 12 dm^3 .



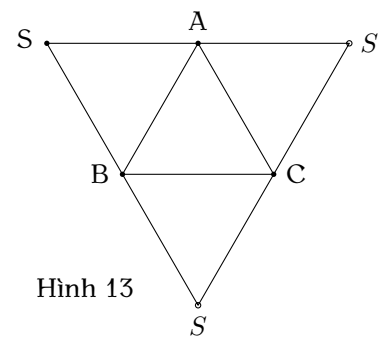
Hình 12

B

Câu 8.

Một hình chóp tam giác đều có các mặt bên cũng là các tam giác đều với cạnh bằng 6 cm. Vậy khi ghép lại thành hình chóp tam giác thì thể tích là bao nhiêu? (Hình 13)

- A. $\frac{\sqrt{27} \cdot \sqrt{24}}{2} \text{ cm}^3$. B. $\frac{\sqrt{27}}{3} \text{ cm}^3$.
C. $\frac{\sqrt{24}}{2} \text{ cm}^3$. D. $\frac{\sqrt{27} \cdot \sqrt{24}}{3} \text{ cm}^3$.



Hình 13

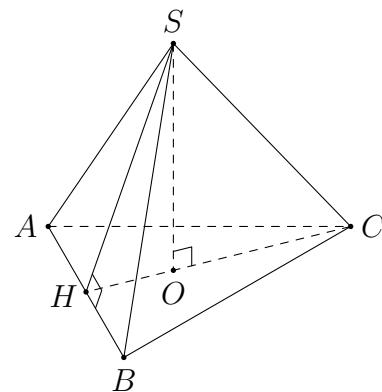
A

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 3.

Cho hình chóp tam giác đều như Hình 14.

- Kể tên các mặt bên và cho biết mặt bên là hình gì?
- Kể tên đường cao và trung đoạn.
- Viết công thức tính diện tích xung quanh, thể tích theo tên các cạnh có trong hình.

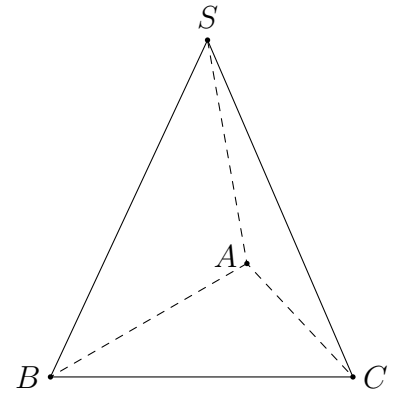


Hình 14

Bài 4.

Hình chóp tam giác đều như Hình 15.

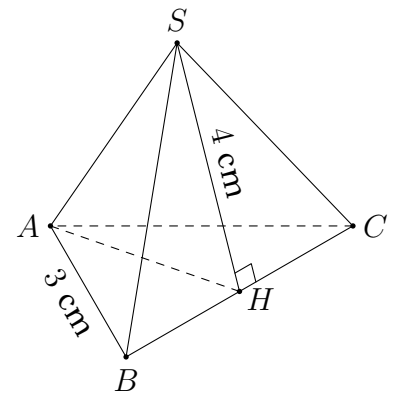
- Vẽ thêm trung đoạn SH ở mặt SAB của hình chóp.
- Vẽ thêm đường cao SO của hình chóp tam giác đều.



Hình 15

 Bài 5.

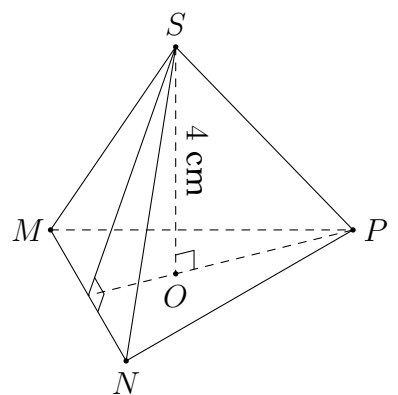
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy dưới là 3 cm và trung đoạn là 4 cm (Hình 16). Tính diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABC$.



Hình 16

 Bài 6.

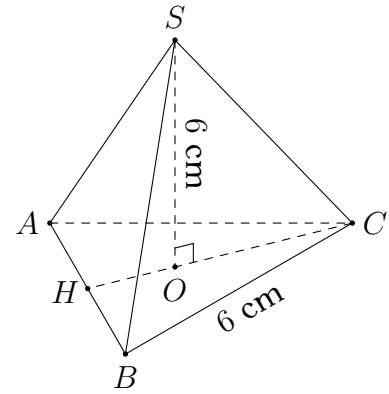
Cho hình chóp tam giác đều có diện tích đáy là 12 m^2 và chiều cao là 4 cm (Hình 17). Tính thể tích của hình chóp tam giác đều đó.



Hình 17

 Bài 7.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ như Hình 18 có $BC = 6$ cm và chiều cao $SO = 6$ cm. Tính thể tích của hình chóp tam giác đều.

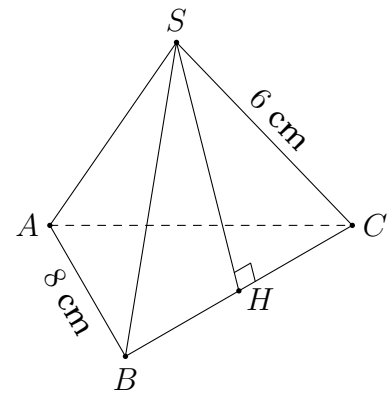


Hình 18

Bài 8.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên $SC = 6$ cm, cạnh đáy $AB = 8$ cm.

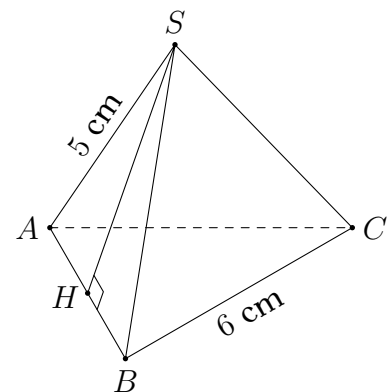
- Tính trung đoạn của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ (Hình 19).
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều.



Hình 19

Bài 9.

Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 6 cm, độ dài các cạnh bên là 5 cm. Tính diện tích xung quanh của hình chóp đó.

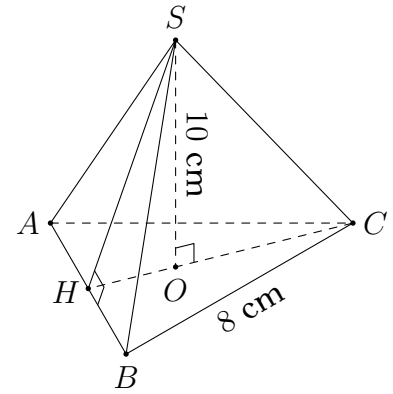


Hình 20

Bài 10.

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ như Hình 21 có cạnh đáy $AC = 8$ cm và chiều cao $SO = 10$ cm.

- Tính diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$.
- Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$.

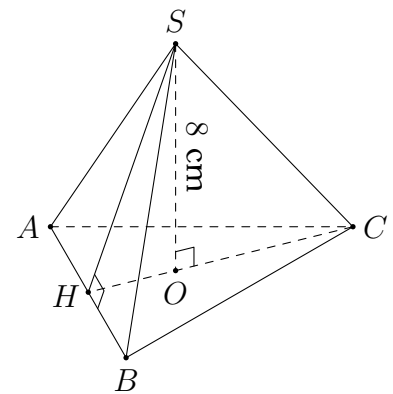


Hình 21

 Bài 11.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ như Hình 22. Có diện tích đáy là $5\sqrt{75}$ cm² và chiều cao là $SO = 8$ cm.

- Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$.
- Tính cạnh đáy của hình chóp tam giác đều.

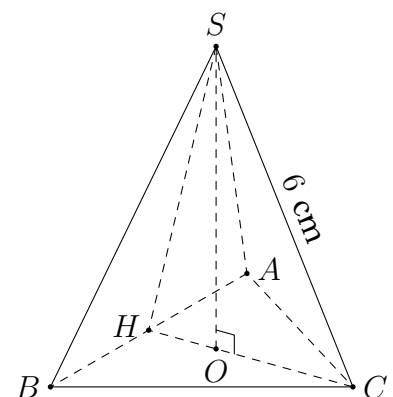


Hình 22

 Bài 12.

Cho hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng với cạnh đáy và đều bằng 6 cm (Hình 23).

- Tính trung đoạn của hình chóp.
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp.
- Tính chiều cao SO của hình chóp.
- Tính thể tích của hình chóp.

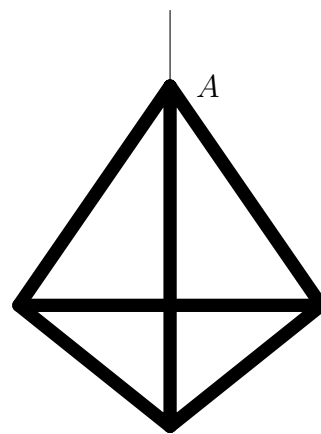


Hình 23

 Bài 13.

Một chiếc đèn thả trang trí như Hình 24. Bạn Nam đo và nhận thấy các cạnh đều có cùng độ dài là 20 cm.

- Tính diện tích xung quanh của chiếc đèn.
- Bạn Nam đọc và thấy rằng khi treo đèn thì khoảng cách từ đáy của đèn cách mặt trần là 1 m là tốt nhất. Vậy bạn Nam cần đưa đoạn dây điện từ đầu đèn (Vị trí A) tới mặt trần là bao nhiêu?



Hình 24

§2 HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU

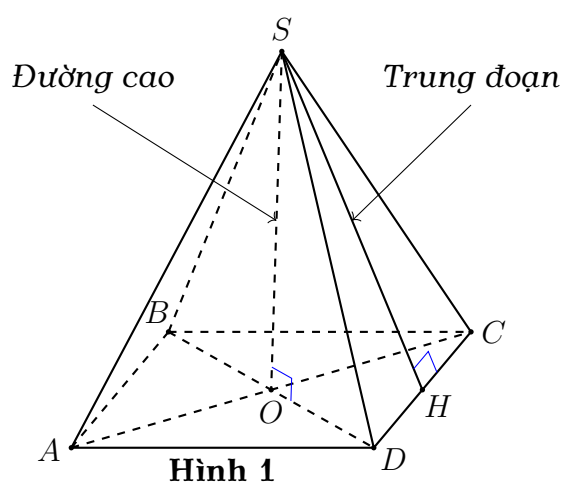
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Hình chóp tứ giác đều

- Hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh. Đỉnh chung này là đỉnh của hình chóp tứ giác.
- Hình 1. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$

 **Ví dụ 1.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ ở Hình 1.

- Kể tên các cạnh bên của hình chóp tứ giác đều.
- Cho biết đường cao, trung đoạn.
- Gọi tên các mặt bên và mặt đáy.

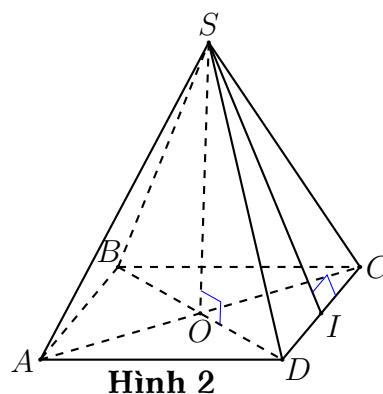


 **Chú ý:** Hình chóp tứ giác đều có:

- Mặt đáy là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.
- Chân đường cao kẻ từ đỉnh đến mặt đáy là điểm cách đều các đỉnh của mặt đáy (giao điểm của hai đường chéo).

 **Ví dụ 2.** Cho hình chóp tứ giác đều ở Hình 2.

- Kể tên các cạnh bên, mặt bên.
- Cho biết mặt đáy là hình gì?
- Chỉ ra đường cao, trung đoạn.



2 Diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tứ giác đều

- Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều bằng nửa chu vi đáy nhân với trung đoạn.

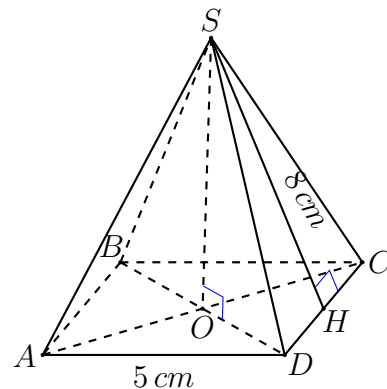
$S_{xq} = p \cdot d$ Trong đó p là nửa chu vi đáy, d là trung đoạn.

- Thể tích của hình chóp tứ giác đều bằng $\frac{1}{3}$ diện tích đáy nhân với chiều cao.

$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$ Trong đó S là diện tích đáy, h là chiều cao.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ như Hình 3. Biết $SO = 6$ cm, $AD = 5$ cm, $SH = 8$ cm.

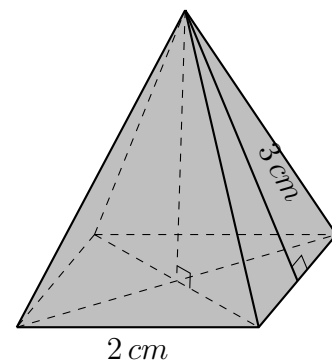
- Tính diện tích xung quanh.
- Tính thể tích.



Hình 3

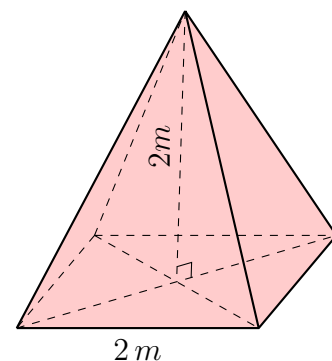
Ví dụ 4.

Bác Khôi làm một chiếc hộp gỗ có dạng hình chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy hình chóp là $2m$, trung đoạn của hình chóp là $3m$. Bác Khôi muốn sơn bốn mặt xung quanh của hộp gỗ. Cứ mỗi mét vuông sơn cần trả 30 000 đồng (tiền sơn và tiền công). Hỏi bác Khôi phải trả chi phí là bao nhiêu?



Ví dụ 5. Một chiếc lều có dạng hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy bằng $2m$, chiều cao bằng $2m$.

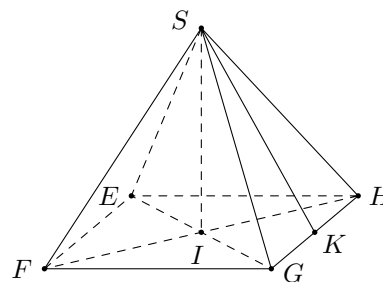
- Thể tích không khí bên trong lều là bao nhiêu?
- Biết lều phủ vải bốn phía và cả mặt tiếp đất. Tính diện tích vải bạt cần dùng (coi mép nối không đáng kể). Biết $\sqrt{5} \approx 2,24$.
(làm trong kết quả tới hàng phần mười)



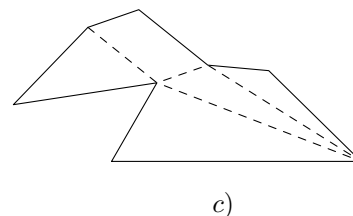
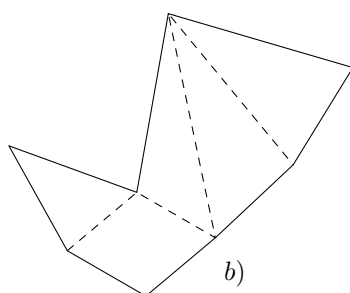
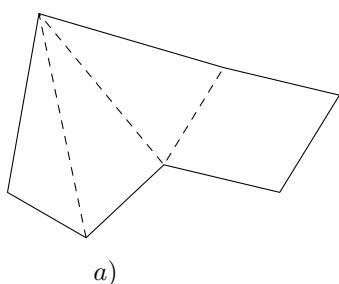
B BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

Hãy cho biết đỉnh, cạnh bên, mặt bên, mặt đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tứ giác đều $S.EFGH$ như hình vẽ.



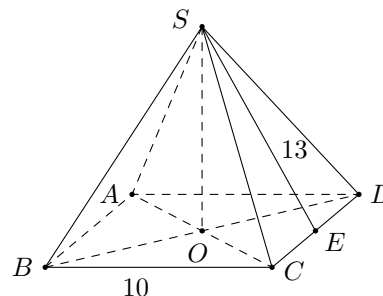
 Bài 2. Trong các miếng bìa ở hình vẽ. Hình nào gấp lại cho ta một hình chóp tứ giác đều?



Bài 3.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ như hình vẽ

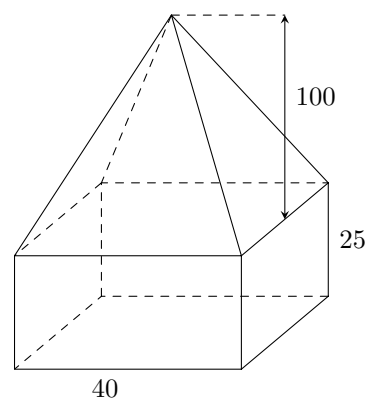
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp.
- Tính diện tích toàn phần của hình chóp.



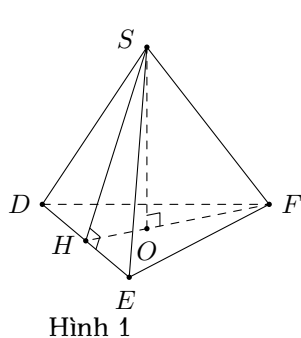
 Bài 4. Bánh ít có dạng hình chóp tứ giác đều, cạnh 3 cm, cao 3 cm. Tính thể tích một chiếc bánh ít.

Bài 5.

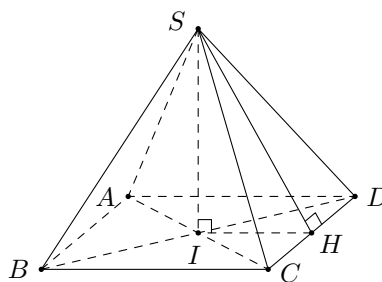
Một khối bê tông có dạng như hình vẽ. Phần đáy dưới của khối bê tông có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh 40 cm, chiều cao 25 cm. Phần trên của khối bê tông có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao 100 cm. Tính thể tích của khối bê tông đó.



 Bài 6. Gọi tên đỉnh, cạnh bên, cạnh đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều trong hình vẽ.

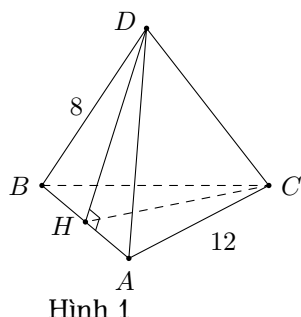


Hình 1

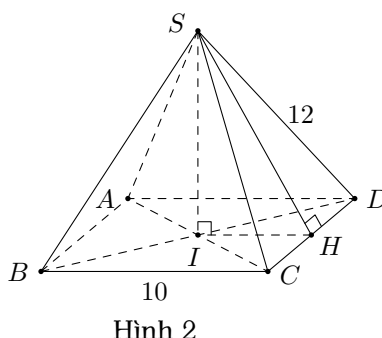


Hình 2

Bài 7. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều trong hình vẽ



Hình 1

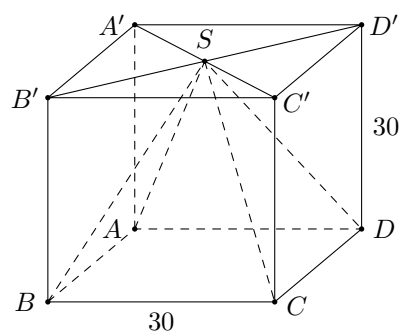


Hình 2

Bài 8. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều, biết chiều cao bằng 9 cm và chu vi đáy bằng 12 cm.

Bài 9.

Từ một khúc gỗ hình lập phương cạnh 30 cm. Người ta cắt đi một phần gỗ để được phần còn lại là một hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh 30 cm và chiều cao của hình chóp cũng bằng 30 cm. Tính thể tích của phần gỗ bị cắt đi.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Trắc nghiệm

Câu 1. Hình chóp tứ giác đều có đáy là hình gì?

- A. Hình vuông. B. Tam giác đều. C. Hình thoi. D. Hình bình hành.

A

Câu 2. Thể tích của hình chóp tứ giác đều được tính như thế nào?

- A. Bằng ba lần diện tích đáy nhân với chiều cao.
B. Bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.
C. Bằng $\frac{1}{3}$ diện tích đáy nhân với chiều cao.
D. Cả ba câu trên đều sai.

C

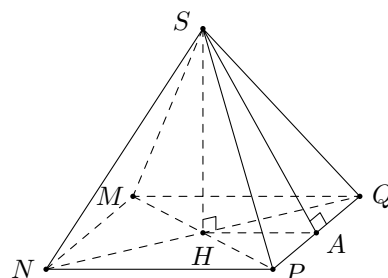
Câu 3. Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là $S_{xq} = pd$. Trong đó d là gì?

- A. Chiều cao. B. Nửa chu vi đáy. C. Cạnh đáy. D. Trung đoạn.

Câu 4.

Trung đoạn của hình chóp tứ giác đều $S.MNPQ$ là

- A. SH . B. SA .
C. HA . D. NQ hoặc MP .

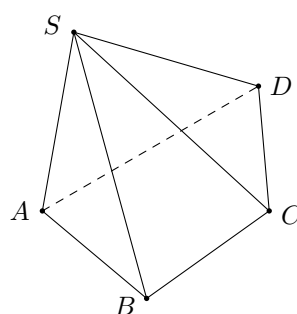


B

Câu 5.

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác $S.ABCD$ ở hình bên gồm diện tích của những mặt nào?

- A. Mặt $SBC, ABCD, SAB$.
B. Mặt SAB, SBC, SCD, SDA .
C. Mặt $SAB, SAD, SBC, ABCD$.
D. Mặt $ABCD$.

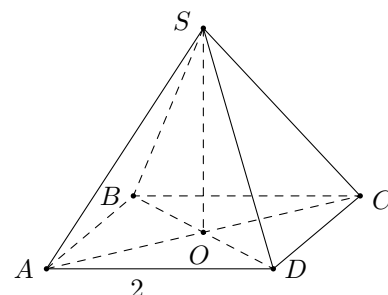


B

Câu 6.

Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ như hình vẽ, có $SO = 3$ cm, $AD = 2$ cm. Thể tích của hình chóp này là

- A. 12 cm^3 . B. 4 cm^3 . C. 3 cm^3 . D. 6 cm^3 .



B

Câu 7. Một hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh là 20 cm^2 , chu vi đáy là 6 cm. Khi đó trung đoạn của hình chóp là

- A. $\frac{20}{3} \text{ cm}$. B. $\frac{10}{3} \text{ cm}$. C. $\frac{3}{20} \text{ cm}$. D. $\frac{3}{10} \text{ cm}$.

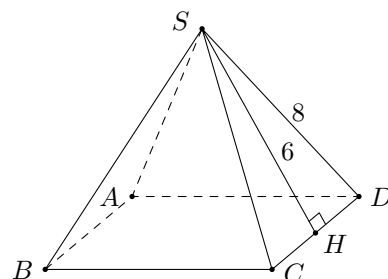
A

Câu 8.

Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có kích thước như vẽ.

Diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều là

- A. $12\sqrt{28}$. B. $28\sqrt{24}$. C. $28\sqrt{12}$. D. $24\sqrt{28}$.



D

Câu 9. Hình chóp tứ giác đều và hình chóp tam giác đều có chiều cao bằng nhau. Biết rằng đáy của hình chóp tứ giác đều có cạnh là 4 cm và đáy của hình chóp tam giác đều có cạnh là 3 cm. Khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ là bao nhiêu? Với S_1 là diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều, S_2 là diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều.

A. $\frac{16}{9}$.

B. $\frac{9}{16}$.

C. $\frac{8}{9}$.

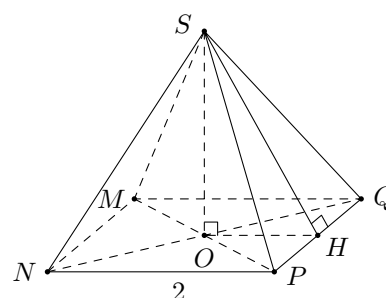
D. Cả A, B, C đều sai.

2 Tự luận

Bài 1.

Cho hình chóp tứ giác đều có kích thước như hình vẽ

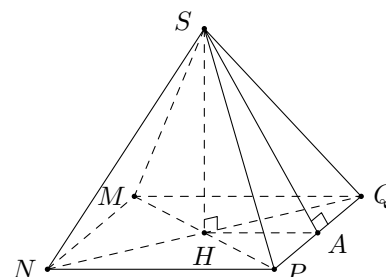
- Chỉ ra trung đoạn, chiều cao của hình chóp tứ giác đều
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$. Biết $SH = 4$ cm.



Bài 2.

Hình chóp tứ giác đều như hình vẽ có cạnh đáy là 8 cm và trung đoạn là 10 cm.

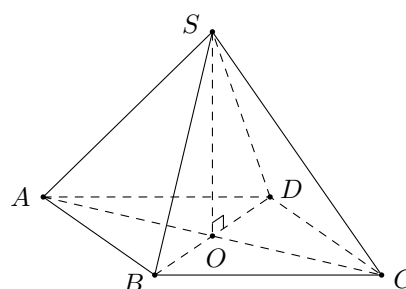
- Tính chu vi đáy của hình chóp tứ giác đều.
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều.



Bài 3.

Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là 10 cm, chiều cao là 8 cm như hình vẽ.

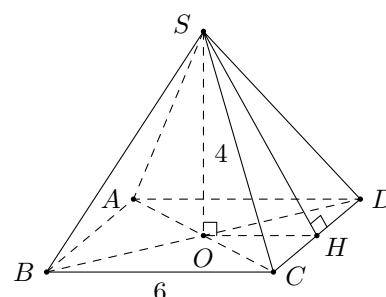
- Tính diện tích đáy của hình chóp tứ giác đều.
- Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều.



Bài 4.

Hình chóp tứ giác đều như hình vẽ có cạnh đáy $BC = 6$ cm, chiều cao $SO = 4$ cm.

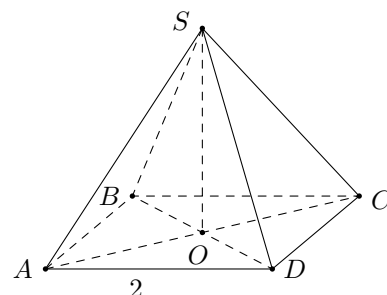
- Tính trung đoạn SH của hình chóp $S.ABCD$.
- Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp.



Bài 5.

Cho hình chóp tứ giác đều như hình vẽ. Biết $AB = 5$ cm, $SO = 4$ cm.

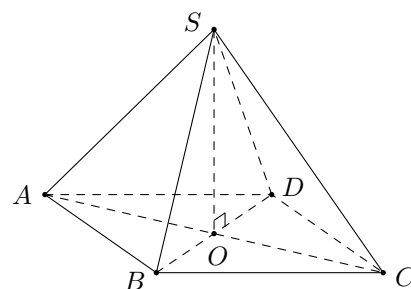
- Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều.



Bài 6.

Hình chóp tứ giác đều như hình vẽ. Biết diện tích xung quanh là $12\sqrt{34}$ cm², trung đoạn $d = \sqrt{34}$ cm.

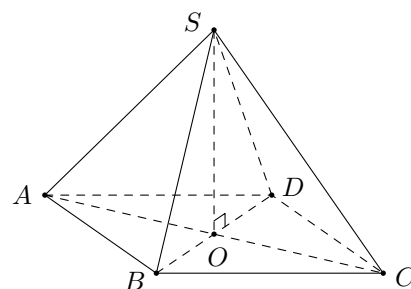
- Tính cạnh đáy của hình chóp tứ giác $S.ABCD$
- Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều.



Bài 7.

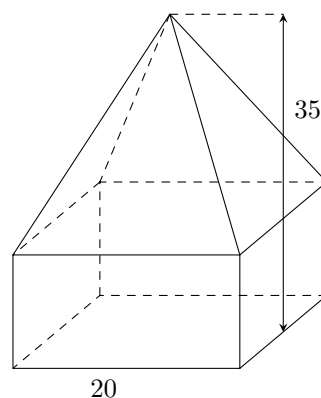
Hình chóp tứ giác đều ở hình vẽ có thể tích là $\frac{64}{3}$ cm³. Chiều cao bằng cạnh đáy.

- Tính chiều cao SO của hình chóp tứ giác đều.
- Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều.



Bài 8.

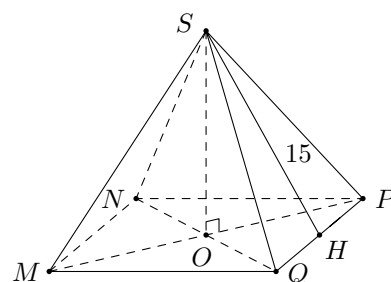
Tính thể tích của khối gỗ như hình bên, biết rằng khối gỗ gồm một hình lập phương cạnh 20 cm và một hình chóp tứ giác đều. Biết chiều cao của cả khối gỗ là 35 cm.



Bài 9.

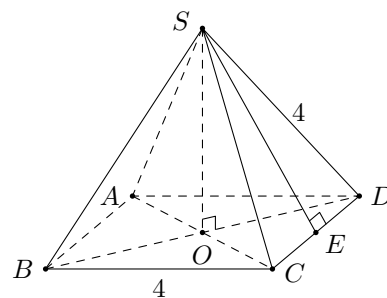
Hình chóp tứ giác đều $S.MNPQ$ như hình vẽ có diện tích đáy là 100 cm². Trung đoạn $SH = 15$ cm.

- Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều.
- Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều



Bài 10.

Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng 4 cm.



MỤC LỤC

CHƯƠNG 1	ĐA THỨC	1
1	ĐƠN THỨC	1
2	ĐA THỨC	5
3	CỘNG, TRỪ ĐA THỨC	7
4	PHÉP NHÂN ĐA THỨC	10
5	PHÉP CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC	14
CHƯƠNG 2	HÀNG ĐẲNG THỨC	17
1	HIỆU HAI BÌNH PHƯƠNG, BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU	17
2	Lập phương của một tổng hay một hiệu	22
3	TỔNG VÀ HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG	24
4	Phân tích đa thức thành nhân tử	26
CHƯƠNG 3	DỮ LIỆU VÀ BIỂU ĐỒ	33
1	THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU	33
2	BIỂU DIỄN DỮ LIỆU BẰNG BẢNG, BIỂU ĐỒ	36
3	PHÂN TÍCH SỐ LIỆU THỐNG KÊ DỰA VÀO BIỂU ĐỒ	41
4	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	43
CHƯƠNG 4	PHÂN THỨC ĐẠI SỐ	49
1	Phân thức đại số	49
2	Tính chất cơ bản của phân thức đại số	53
3	PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ	59
4	Phép nhân và phép chia phân thức đại số	68
CHƯƠNG 5	MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN	77
1	HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU	77
2	HÌNH CHÓP TỨ GIÁC ĐỀU	85