



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### I. Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$4. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$5. (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$6. a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$7. a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

### II. Phương trình bậc hai:

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

#### 1. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

✓  $\Delta < 0$ : Phương trình vô nghiệm.

✓  $\Delta = 0$ : Phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

✓  $\Delta > 0$ : Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

#### 2. Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai:

Nếu "b chẵn" (ví dụ  $b = 4; 2\sqrt{3}; 2m; -2(m+1); \dots$ ) ta dùng công thức nghiệm thu gọn.

$$\Delta' = b'^2 - ac \left( b' = \frac{b}{2} \right)$$

✓  $\Delta' < 0$ : Phương trình vô nghiệm.

✓  $\Delta' = 0$ : Phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$$

✓  $\Delta' > 0$ : Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

#### Chú ý:

$$ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$$

với  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình bậc 2:  $ax^2 + bx + c = 0$

#### 3. Định lý Viet:

Nếu phương trình bậc 2

$ax^2 + bx + c = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad \text{☛ "Tổng bù, tích ca"}$$

#### 4. Các trường hợp đặc biệt của phương trình bậc 2:

✓ Nếu  $a+b+c=0$  thì phương trình có

$$\text{nghiệm: } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

✓ Nếu  $a-b+c=0$  thì phương trình có

$$\text{nghiệm: } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

5. Dấu của nghiệm số:

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

✓ Phương trình có 2 nghiệm trái dấu

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$$

✓ Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt  $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

✓ Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt

$$x_1 < x_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

### III. Dấu của đa thức:

1. Dấu của nhị thức bậc nhất:

$$f(x) = ax + b (a \neq 0)$$

|          |              |                |              |
|----------|--------------|----------------|--------------|
| $x$      | $-\infty$    | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$    |
| $ax + b$ | trái dấu $a$ | $0$            | cùng dấu $a$ |

"Phải cùng, trái trái"

2. Dấu của tam thức bậc hai:

$$f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

|              |        |              |           |
|--------------|--------|--------------|-----------|
| $\Delta < 0$ | $x$    | $-\infty$    | $+\infty$ |
|              | $f(x)$ | cùng dấu $a$ |           |

|              |        |            |                 |            |           |
|--------------|--------|------------|-----------------|------------|-----------|
| $\Delta = 0$ | $x$    | $-\infty$  | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$  |           |
|              | $f(x)$ | cùng dấu a | 0               | cùng dấu a |           |
| $\Delta > 0$ | $x$    | $-\infty$  | $x_1$           | $x_2$      | $+\infty$ |
|              | $f(x)$ | cùng dấu a | 0               | trái dấu a | 0 cùng    |

"Trong trái, ngoài cùng"

"Trong trái, ngoài cùng"

3. Dấu của đa thức bậc  $\geq 3$ :

Bắt đầu từ ô bên phải cùng dấu với hệ số  $a$  của số mũ cao nhất, qua nghiệm đơn đổi dấu, qua nghiệm kép không đổi dấu.

### IV. Điều kiện để tam thức

không đổi dấu trên  $\mathbb{R}$

Cho tam thức bậc hai:

$$f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

$$f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### V. Phương trình và bất

phương trình chứa trị tuyệt đối

#### 1. Phương trình

$$|A| = \begin{cases} A, & \text{ khi } A \geq 0 \\ -A, & \text{ khi } A < 0 \end{cases}$$

$$\checkmark |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \\ A < 0 \\ -A = B \end{cases}$$

$$\checkmark |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$$

$$\checkmark |A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

#### 2. Bất phương trình

$$\checkmark |A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < B \\ A > -B \end{cases}$$

$$|A| \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B \\ A \geq -B \end{cases}$$

$$\checkmark |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}$$

$$|A| \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq -B \\ A \geq B \end{cases}$$

$$\checkmark |A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (A - B)(A + B) < 0$$

$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow A^2 \leq B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 \leq 0$$

### VI. Phương trình và bất phương trình

chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai

#### 1. Phương trình

$$\checkmark \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$\checkmark \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 (B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

#### 2. Bất phương trình

$$\checkmark \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$$

$$\checkmark \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$$

$$\checkmark \sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \end{cases}$$

$$\sqrt{A} \leq \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A \leq B \end{cases}$$

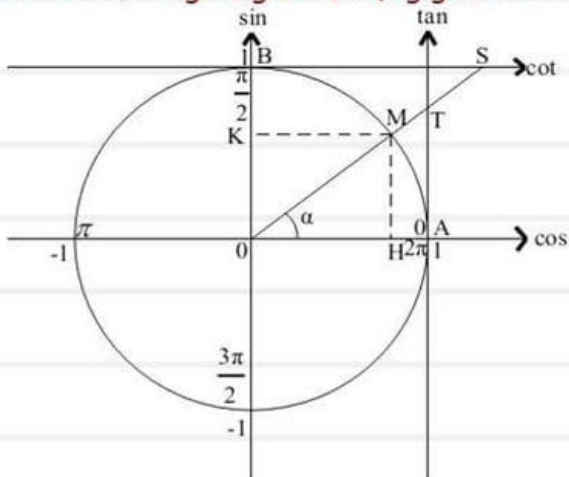


# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### VII. LƯỢNG GIÁC

#### 1. Định nghĩa giá trị lượng giác:



$$\sin \alpha = \overline{OK}$$

$$\cos \alpha = \overline{OH}$$

$$\tan \alpha = \overline{AT}$$

$$\cot \alpha = \overline{BS}$$

#### 3. Các giá trị lượng giác đặc biệt:

|               | $0^\circ$   | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      |
|---------------|-------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
|               | 0           | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$ | 0           | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \alpha$ | 1           | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan \alpha$ | 0           | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\parallel$     |
| $\cot \alpha$ | $\parallel$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

#### 2. Các công thức lượng giác cơ bản:

$$1) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$2) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$4) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$5) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$6) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

#### 4. Công thức cộng:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

5. Công thức nhân đôi:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

**Hệ quả:**  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

6. Công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

7. Công thức nhân ba:

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

8. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

9. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

10. Cung liên kết:

✓ Hai cung bù nhau:  $\alpha$  và  $\pi - \alpha$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

✓ Hai cung đối nhau:  $\alpha$  và  $-\alpha$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

✓ Hai cung phụ nhau:  $\alpha$  và  $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

✓ Hai cung hơn kém  $\pi$ :  $\alpha$  và  $\alpha \pm \pi$

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\alpha \pm \pi) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha \pm \pi) = \cot \alpha$$

Hệ quả:

$$\sin(x + k\pi) = \begin{cases} \sin x & , k \text{ chẵn} \\ -\sin x & , k \text{ lẻ} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x + k\pi) = \begin{cases} \cos x & , k \text{ chẵn} \\ -\cos x & , k \text{ lẻ} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot(x + k\pi) = \cot x \quad k \in \mathbb{Z}$$

✓ Hai cung hơn kém  $\frac{\pi}{2}$ :  $\alpha$  và  $\alpha + \frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan \alpha$$

"Sin góc lớn = cos góc nhỏ - Cos góc lớn = trừ sin góc nhỏ"

11. Công thức tính  $\sin x, \cos x, \tan x$  theo  $\tan \frac{x}{2}$

Nếu đặt  $t = \tan \frac{x}{2}$  thì:  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

12. Một số công thức khác:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\checkmark \cot x + \tan x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\checkmark \cot x - \tan x = 2 \cot 2x$$

$$\checkmark 1 \pm \sin 2x = (\sin x \pm \cos x)^2$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x$$

$$\checkmark = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$\checkmark \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### 13. Phương trình lượng giác cơ bản

|                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin u = \sin v$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}$ | $\sin u = a$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \arcsin a + k2\pi \\ u = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}$<br><b>Đặc biệt:</b><br>$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi$<br>$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$<br>$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ |
| $\cos u = \cos v$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}$      | $\cos u = a$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \arccos a + k2\pi \\ u = -\arccos a + k2\pi \end{cases}$<br><b>Đặc biệt:</b><br>$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$<br>$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$<br>$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$                 |
| $\tan u = \tan v$<br>$\Leftrightarrow u = v + k\pi$                                                   | $\tan u = a \Leftrightarrow u = \arctan a + k\pi$                                                                                                                                                                                                                                                   |
| $\cot u = \cot v$<br>$\Leftrightarrow u = v + k\pi$                                                   | $\cot u = a \Leftrightarrow u = \text{arccot} a + k\pi$                                                                                                                                                                                                                                             |

**Lưu ý:**

a) Khi giải phương trình lượng giác ta phải đặt điều kiện nếu gặp một trong hai trường hợp sau:

**TH1:** Phương trình có chứa hàm số tang hoặc cotang (trừ phương trình bậc nhất và bậc hai theo 1 hàm số tang hoặc cotang)

- Phương trình có chứa  $\tan x$ : Điều kiện  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

- Phương trình có chứa  $\cot x$ : Điều kiện  $x \neq k\pi$
- Phương trình có chứa cả  $\tan x$  và  $\cot x$ : Điều kiện  $x \neq k\frac{\pi}{2}$

**TH2:** Phương trình có chứa ẩn ở mẫu  $\rightarrow$  Điều kiện: mẫu  $\neq 0$

- $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$
- $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\tan x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$
- $\cot x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

b) Cách chuyển hàm:

$$\sin \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\cos \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\tan \alpha = \cot \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\cot \alpha = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

c) Cách loại dấu trừ:

$$-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$$

$$-\tan \alpha = \tan(-\alpha)$$

$$-\cot \alpha = \cot(-\alpha)$$

$$\text{Ngoại lệ: } -\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### 14. Phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác:

Là phương trình có dạng

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

$$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$$

Đặt:

$$t = \sin x (t = \cos x) \rightarrow \text{Điều kiện } -1 \leq t \leq 1$$

$$t = \tan x (t = \cot x) \rightarrow \text{Không có điều kiện } t.$$

Các công thức cần nhớ:

$$\checkmark \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$\checkmark \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\sin x \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\checkmark \text{Điều kiện có nghiệm: } \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

✓ Công thức cần nhớ:

$$\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha \pm \beta)$$

### 16. Phương trình thuần nhất bậc hai:

Là phương trình có dạng

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0 (*)$$

TH1:  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $\sin^2 x = 1$ ) thế vào (\*)

TH2:  $\cos x \neq 0$ . Chia 2 vế (\*) cho  $\cos^2 x$  ta được phương trình bậc 2 theo  $\tan x$

Lưu ý: Phương trình

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d \text{ với } d \neq 0$$

có thể đưa về dạng (\*) bằng cách:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d$$

$$\Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x$$

$$= d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

### 15. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Là phương trình có dạng  $a \sin x + b \cos x = c$ .

Chia 2 vế của phương trình cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$  ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vì  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$  nên tồn tại 1

cung  $\alpha$  sao cho 
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### 17. Phương trình đối xứng và phản xứng

Là phương trình có dạng

$$a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$$

Đặt :

$$\checkmark \quad t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$$

Điều kiện  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\checkmark \quad t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$$

Điều kiện  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

### VIII. Công thức tính đạo hàm:

|                                                     |                                                       |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $(c)' = 0$                                          | $(x)' = 1$                                            |
| $(ku)' = k \cdot u'$                                |                                                       |
| $(u \pm v)' = u' \pm v'$                            | $(uv)' = u'v + uv'$                                   |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |                                                       |
| $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$                       |                                                       |
| $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$                          | $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$                   |
| $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$        | $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2} \cdot v'$ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$       |
| $(\sin x)' = \cos x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$              |
| $(\cos x)' = -\sin x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$             |
| $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $(\tan u)' = (1 + \tan^2 u) \cdot u'$      |
| $= \frac{1}{\cos^2 x}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $= \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$            |
| $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | $(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ |
| $= -\frac{1}{\sin^2 x}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $= -(1 + \cot^2 u) \cdot u'$               |
| $(e^x)' = e^x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $(e^u)' = e^u \cdot u'$                    |
| $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$        |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$          |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ |
| $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ $\left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}$ <p>"anh bạn ăn cơm bằng chén"</p> |                                            |



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### IX. Các dạng toán về hàm số:

1. Các bước chung khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

\* Tập xác định:

\* Giới hạn (và tiệm cận đối với hàm phân

thức  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ )

\* Đạo hàm:  $y'$

✓ Đối với hàm bậc 3, bậc 4: Giải phương trình  $y' = 0$  tìm nghiệm.

✓ Đối với hàm phân thức  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0 \text{ (hoặc } < 0) \forall x \in D$$

\* Bảng biến thiên:

Nhận xét về chiều biến thiên và cực trị.

\* Bảng giá trị: (5 điểm đối với hàm bậc 3, bậc 4; 6 điểm đối với hàm phân thức

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ )

\* Vẽ đồ thị:

Các dạng đồ thị của hàm số bậc ba

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$$

| Số nghiệm của phương trình $y' = 0$ | $a > 0$ | $a < 0$ |
|-------------------------------------|---------|---------|
| 2 nghiệm phân biệt                  |         |         |
| 1 nghiệm kép                        |         |         |
| 1 nghiệm vô nghiệm                  |         |         |

Các dạng đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương  $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

|                                | $a > 0$ | $a < 0$ |
|--------------------------------|---------|---------|
| $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt |         |         |



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

|                                                                                                   |  |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----------|
| $y' = 0$<br>có 1<br>nghiệ<br>m<br>duy<br>nhất                                                     |  |          |
| <b>Các dạng đồ thị của hàm số phân thức</b><br>$y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ |  |          |
| $y' > 0$                                                                                          |  | $y' < 0$ |
|                                                                                                   |  |          |

### 2. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định:

**a. Hàm bậc 3:**  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Đạo hàm  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$  là 1 tam thức bậc 2.

✓ Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} \leq 0 \\ a_{y'} > 0 \end{cases}$$

✓ Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} \leq 0 \\ a_{y'} < 0 \end{cases}$$

**b. Hàm nhất biến:**  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

Đạo hàm  $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$  có dấu phụ thuộc vào dấu của tử.

✓ Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad-bc > 0 \quad (\text{Không có dấu "="})$$

✓ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad-bc < 0 \quad (\text{Không có dấu "="})$$

### 3. Cực trị của hàm số:

✓ Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

✓ Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$$

✓ Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$$

**a. Hàm bậc 3:**  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

$$\Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

✓ Hàm số có 2 cực trị (cực đại và cực tiểu)  $\Leftrightarrow$  phương trình  $y' = 0$  có 2

$$\text{nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ a_{y'} \neq 0 \end{cases}$$

✓ Hàm số không có cực trị  $\Leftrightarrow$  Phương trình  $y' = 0$  vô nghiệm hoặc có nghiệm

$$\text{kép} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} \leq 0 \\ a_{y'} \neq 0 \end{cases}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### b. Hàm bậc 4 trùng phương:

$$y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow y' = 4ax^3 + 2bx$$

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow 4ax^3 + 2bx = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (1) \\ x^2 = \frac{-b}{2a} & (2) \end{cases}$$

- ✓ Hàm số có 3 cực trị  $\Leftrightarrow$  Phương trình  $y' = 0$  có 3 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow$  Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0  $\Leftrightarrow \frac{-b}{2a} > 0$ .

- ✓ Hàm số có 1 cực trị  $\Leftrightarrow$  Phương trình  $y' = 0$  có 1 nghiệm  $\Leftrightarrow$  Phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 0  $\Leftrightarrow \frac{-b}{2a} \leq 0$ .

### 4. Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

#### a. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ xác định trên 1 đoạn $[a; b]$

- ✓ Hàm số liên tục trên đoạn  $[a; b]$
- ✓ Tính đạo hàm  $y'$ .
- ✓ Giải phương trình  $y' = 0$ . Tìm các nghiệm  $x_i \in [a; b] (i = 1, 2, 3, \dots)$
- ✓ Tính  $y(a)$ ,  $y(b)$ ,  $y(x_i)$
- ✓ So sánh và kết luận.

#### b. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên 1 khoảng hoặc nửa khoảng $(a; b), (a; +\infty), (-\infty; b), [a; b), (a; b] \dots$

- ✓ Tìm tập xác định.
- ✓ Tính đạo hàm  $y'$
- ✓ Lập bảng biến thiên
- ✓ Dựa vào bảng biến thiên, so sánh và kết luận.

### 5. Tìm giao điểm của hai đường.

- ✓ Cho hai đồ thị  $(C_1): y = f_1(x)$  và  $(C_2): y = f_2(x)$ .
- ✓ Phương trình hoành độ giao điểm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$  là:  $f_1(x) = f_2(x) (*)$
- ✓ Giải phương trình  $(*)$  ta được hoành độ giao điểm, thế vào 1 trong 2 hàm số  $y = f_1(x)$  hoặc  $y = f_2(x)$  được tung độ giao điểm.

### 6. Tìm điều kiện của tham số m để hai đường cong cắt nhau với số điểm cho trước.

- ✓ Cho hai đồ thị  $(C_1): y = f_1(x)$  và  $(C_2): y = f_2(x)$ .
- ✓ Phương trình hoành độ giao điểm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$  là:  $f_1(x) = f_2(x) (*)$
- ✓  $(C_1)$  và  $(C_2)$  cắt nhau tại  $n$  điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình  $(*)$  có  $n$  nghiệm phân biệt.

**Lưu ý:** Trục hoành có phương trình  $y = 0$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

-7. Dùng đồ thị biện luận theo tham số  $m$  số nghiệm của phương trình.

Cho đồ thị  $(C): y = f(x)$ . Dùng đồ thị  $(C)$ , biện luận theo  $m$  số nghiệm của phương trình  $h(x, m) = 0$ .

- ✓ Biến đổi phương trình  $h(x, m) = 0$  về dạng  $f(x) = g(m)$  (\*).
- ✓ Số nghiệm của phương trình (\*) là số giao điểm của hai đồ thị:
 
$$\begin{cases} y = f(x) & (C) \\ y = g(m) & (d) \end{cases}$$
- ✓ Bảng kết quả:

| $g(m)$ | $m$ | Số giao điểm | Số nghiệm |
|--------|-----|--------------|-----------|
| ...    | ... | ...          | ...       |

**Lưu ý:** Nếu bài toán chỉ yêu cầu tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có đúng 3 nghiệm, 4 nghiệm, ... ta không cần lập bảng kết quả như trên mà chỉ cần chỉ rõ các trường hợp thỏa đề (**Dựa vào đồ thị ta thấy (C) và (d) cắt nhau tại đúng 3 điểm, đúng 4 điểm ...**)

-8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong  $(C)$ . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm  $M_0(x_0; y_0)$  là:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

**Lưu ý:** Ta phải tìm được 3 đại lượng:

$$\begin{cases} x_0 \\ y_0 = f(x_0) \\ f'(x_0) \end{cases}$$

**Dạng 1:** Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hoành độ tiếp điểm  $x_0$

- ✓ Tính đạo hàm  $y'$
- ✓ Thay  $x_0$  vào  $y$  tính  $y_0$
- ✓ Thay  $x_0$  vào  $y'$  tính  $f'(x_0)$
- ✓ Phương trình tiếp tuyến:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

**Dạng 2:** Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tung độ tiếp điểm  $y_0$ .

- ✓ Giải phương trình  $f(x_0) = y_0$  tìm  $x_0$ .
- ✓ Thay  $x_0$  vào  $y'$  tính  $f'(x_0)$
- ✓ Phương trình tiếp tuyến:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

**Dạng 3:** Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc  $k$ .

- ✓ Giả sử tiếp điểm là  $M_0(x_0; y_0)$
- ✓ Giải phương trình  $f'(x_0) = k$  tìm  $x_0$ .
- ✓ Thay  $x_0$  vào  $y$  ta tìm được  $y_0$ .
- ✓ Phương trình tiếp tuyến:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

**Lưu ý:**

- ✓ Nếu tiếp tuyến song song với đường thẳng  $y = ax + b$  thì  $f'(x_0) = a$ .
- ✓ Nếu tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = ax + b (a \neq 0)$  thì  $f'(x_0) \cdot a = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ .



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### X. Các công thức về lũy thừa và lôgarit:

#### 1. Công thức lũy thừa:

$$a^0 = 1 \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

#### Các tính chất quan trọng:

- ✓ Nếu  $a > 1$  thì  $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
- ✓ Nếu  $0 < a < 1$  thì  $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

#### 2. Công thức lôgarit:

- 1)  $\log_a 1 = 0$
- 2)  $\log_a a = 1$
- 3)  $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$   
Đặc biệt:  $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
- 4)  $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$
- 5)  $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$  (lôgarit của tích bằng tổng các lôgarit)
- 6)  $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$   
(lôgarit của thương bằng hiệu các lôgarit)
- 7)  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  (đổi cơ số)

$$8) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$9) \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$10) a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \quad \text{Đặc biệt: } a^{\log_a b} = b$$

#### Các tính chất quan trọng:

- ✓ Nếu  $a > 1$  thì  $\log_a \alpha > \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
- ✓ Nếu  $0 < a < 1$  thì  $\log_a \alpha > \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

### XI. Phương trình và bất

#### phương trình mũ:

##### 1. Phương trình mũ:

- ✓  $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$
- ✓  $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$
- ✓  $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

##### 2. Bất phương trình mũ:

- ✓  $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$  nếu  $a > 1$   
 $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$  nếu  $a > 1$
- ✓  $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$  nếu  $0 < a < 1$   
 $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$  nếu  $0 < a < 1$
- ✓  $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$  nếu  $a > 1$
- ✓  $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$  nếu  $0 < a < 1$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

### XII. Phương trình và bất

phương trình lôgarit:

#### 1. Phương trình lôgarit:

- ✓  $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$
- ✓  $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$
- ✓  $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

#### 2. Bất phương trình lôgarit:

- ✓  $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$  nếu  $a > 1$   
 $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow f(x) > a^b$  nếu  $a > 1$
- ✓  $\log_a x > b \Leftrightarrow x < a^b$  nếu  $0 < a < 1$   
 $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow f(x) < a^b$  nếu  $0 < a < 1$
- ✓  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$   
 nếu  $a > 1$
- ✓  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$   
 nếu  $0 < a < 1$

Lưu ý đặt điều kiện cho phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit:

- ✓  $a^{f(x)} \rightarrow$  Không có điều kiện.
- ✓  $\log_{f(x)} g(x) \rightarrow$  Điều kiện:  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- ✓ Đặt  $t = a^x \rightarrow$  Điều kiện:  $t > 0$
- ✓ Đặt  $t = \log_a x \rightarrow$  Không có điều kiện  $t$

### XIII. Công thức nguyên hàm

tích phân

➤ Công thức nguyên hàm:

| Nguyên hàm cơ bản                                      | Nguyên hàm mở rộng                                                                 |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int 1 dx = x + C$                                    | $\int a dx = ax + C$                                                               |
| $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$                     | $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b  + C$                         |
| $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$           | $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax+b} + C$               |
| $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$             | $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$               |
| $\int \cos x dx = \sin x + C$                          | $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$                            |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$                         | $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$                           |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$              | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$                |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$             | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$               |



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

|                                                      |                                                                                                   |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int e^x dx = e^x + C$                              | $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$<br>$\Rightarrow \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$ |
| $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C$ | $\int \alpha^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{\alpha^{ax+b}}{\ln \alpha} + C$                  |

### ➤ Phương pháp đổi biến số dạng 1

$$I = \int_a^b f[t(x)] \cdot t'(x) dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) dt$$

**Một số cách đổi biến thường gặp:**

✓  $\int f(\ln x) \frac{1}{x} dx \rightarrow$  Đặt  $t = \ln x$

✓  $\int f(e^x) e^x dx \rightarrow$  Đặt  $t = e^x$

✓  $\int f(\sin x) \cos x dx \rightarrow$  Đặt  $t = \sin x$

✓  $\int f(\cos x) \sin x dx \rightarrow$  Đặt  $t = \cos x$

✓  $\int f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx \rightarrow$  Đặt  $t = \tan x$

✓  $\int f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} dx \rightarrow$  Đặt  $t = \cot x$

✓ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có chứa  $\sqrt[n]{A}$  thì đặt  $t = \sqrt[n]{A}$

✓ Khi tính tích phân dạng  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ :

- Nếu m và n chẵn ta dùng công thức hạ bậc.
- Nếu m chẵn, n lẻ ta đặt  $t = \sin x$ .
- Nếu m lẻ, n chẵn ta đặt  $t = \cos x$ .

### ➤ Phương pháp đổi biến số dạng 2:

✓ Hàm có chứa  $\sqrt{a^2 - x^2}$  thì đặt  $x = a \sin t$

✓ Hàm có chứa  $\sqrt{x^2 - a^2}$  thì đặt  $x = \frac{a}{\sin t}$

✓ Hàm có chứa  $\sqrt{a^2 + x^2}$  hay  $a^2 + x^2$  thì đặt  $x = a \tan t$

➤ Tích phân từng phần:  $\int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$

Thứ tự ưu tiên:  $\ln x \rightarrow P(x) \rightarrow \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{bmatrix}$

### ➤ Phương pháp tính tích phân của hàm hữu tỉ:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

✓ Bậc của  $P(x) \geq$  Bậc của  $Q(x)$ : Chia đa thức tử cho mẫu.

✓ Bậc của  $P(x) <$  Bậc của  $Q(x)$ :  $\rightarrow$  Phân tích mẫu thành tích và biến đổi theo cách sau:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^2(x-b)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}$$

**Đặc biệt:**

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right)$$

### ➤ Tính diện tích hình phẳng

✓ **Loại 1:** Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành, hai đường thẳng  $x = a, x = b$ .

**Công thức:**  $S = \int_a^b |f(x)| dx$

✓ **Loại 2:** Hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  $y = f(x), y = g(x)$ , hai đường thẳng  $x = a, x = b$

**Công thức:**  $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Đại số và Giải tích

- **Tính thể tích vật thể tròn xoay:** Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quay quanh trục hoành tạo thành vật thể tròn xoay có thể tích là:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

### XIV. Số Phức

#### 1. Định nghĩa số phức:

Số phức là 1 biểu thức có dạng  $z = a + bi$ , trong đó  $a, b$  là các số thực,  $i^2 = -1$ .

$a$ : được gọi là **phần thực**

$b$ : được gọi là **phần ảo**

- ✓ Tập hợp các số phức được ký hiệu là  $\mathbb{C}$
- ✓ Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là số **thuần ảo**.
- ✓ Hai số phức bằng nhau: khi và chỉ khi có phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau.  $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

**"Thực bằng thực, ảo bằng ảo"**

- ✓ **Môđun của số phức**  $z = a + bi$ :  
 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ✓ **Số phức liên hợp**: của số phức  $z = a + bi$  là  $\bar{z} = a - bi$
- ✓ **Phép cộng hai số phức**:  
 $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- ✓ **Phép trừ hai số phức**:  
 $(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$

- ✓ **Phép nhân hai số phức**:

$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

- ✓ **Phép chia hai số phức**:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{z_2 \cdot \bar{z_2}} \text{ (nhân cả tử và mẫu cho } \bar{z_2} \text{)}.$$

- ✓ **Số phức nghịch đảo của  $z$  là:**  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$

#### 2. Giải phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức:

Cho phương trình bậc hai  $az^2 + bz + c = 0$   
( $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a \neq 0$ )

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- ✓  $\Delta < 0$ : Phương trình có 2 nghiệm phức phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}i}{2a}$$

- ✓  $\Delta = 0$ : Phương trình có nghiệm kép thực:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- ✓  $\Delta > 0$ : Phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

**Chú ý:**

- ✓ Khi giải phương trình trùng phương  $az^4 + bz^2 + c = 0$  trên tập số phức  $\mathbb{C}$ , ta đặt  $t = z^2$  (không cần điều kiện cho  $t$ )
- ✓  $z^2 = -a(a > 0) \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{ai}$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Tổ hợp - Xác suất

### I. Quy tắc đếm

#### 1. Quy tắc cộng:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai phương án A hoặc B. Nếu có m cách thực hiện phương án A, n cách thực hiện phương án B thì sẽ có m+n cách hoàn thành công việc.

#### 2. Quy tắc nhân:

Một công việc được thực hiện qua hai hành động liên tiếp A và B. Nếu có m cách thực hiện hành động A, n cách thực hiện hành động B thì sẽ có m.n cách hoàn thành công việc.

**Lưu ý:** Đối với bài toán thành lập số ta phải xét hai trường hợp nếu thỏa mãn 3 điều kiện sau:

- ✓ Để cho có chữ số 0.
- ✓ Số cần tìm có các chữ số khác nhau.
- ✓ Số cần tìm là số chia hết cho 2 (số chẵn) hoặc số chia hết cho 5.

### II. Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp

#### 1. Hoán vị: Từ n phần tử $\rightarrow$ sắp thứ tự

- ✓ **Định nghĩa:** Cho tập hợp A gồm n phần tử ( $n \geq 1$ ). Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của tập A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

- ✓ **Số hoán vị của n phần tử:**  
 $P_n = n! = n(n-1) \dots 2.1$

nl: đọc là "n giai thừa"

#### 2. Chỉnh hợp: Từ n $\rightarrow$ lấy k $\rightarrow$ sắp thứ tự

- ✓ **Định nghĩa:** Cho tập hợp A gồm n phần tử ( $n \geq 1$ ). Lấy ra k phần tử và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó, mỗi kết quả thu được được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

- ✓ **Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \dots (n-k+1) \quad (0 \leq k \leq n)$$

#### 3. Tổ hợp: Từ n $\rightarrow$ lấy k

- ✓ **Định nghĩa:** Cho tập hợp A gồm n phần tử ( $n \geq 1$ ). Lấy ra k phần tử, mỗi kết quả thu được được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

- ✓ **Số các tổ hợp chập k của n phần tử:**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

### III. Nhị thức Niu-tơn

- ✓ **Công thức nhị thức Niu - tơn:**

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + \\ &C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \left( = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \right) \end{aligned}$$

- ✓ **Số hạng tổng quát:**  $C_n^k a^{n-k} b^k$  hoặc  $C_n^k a^k b^{n-k}$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Tổ hợp - Xác suất

### IV. Xác suất

✓ **Phép thử ngẫu nhiên** (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm, một phép đo hay một sự quan sát hiện tượng nào đó mà:

- Kết quả của nó không đoán trước được.
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

✓ **Không gian mẫu**: Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu  $\Omega$  (ô-mê-ga).

✓ **Biến cố**: Là một tập con của không gian mẫu.

- Biến cố không  $\emptyset$  là biến cố không bao giờ xảy ra.
- Biến cố chắc chắn  $\Omega$  là biến cố luôn xảy ra

✓ **Phép toán trên các biến cố**:

- $A \cup B$ : Hợp của các biến cố  $A$  và  $B$  ( $A \cup B$  xảy ra  $\Leftrightarrow A$  xảy ra hoặc  $B$  xảy ra).
- $A \cap B$  (hay  $A.B$ ): Giao của các biến cố  $A$  và  $B$  ( $A \cap B$  xảy ra  $\Leftrightarrow A$  và  $B$  đồng thời xảy ra).
- $A \cap B = \emptyset$  thì ta nói  $A$  và  $B$  là 2 biến cố **xung khắc** (không đồng thời xảy ra).
- $\bar{A} = \Omega \setminus A$  được gọi là biến cố đối của biến cố  $A$ . ( $A$  và  $\bar{A}$  xung khắc và  $A \cup \bar{A} = \Omega$ )

✓ **Xác suất của biến cố**:  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

Trong đó:

- $n(A)$ : Số kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ .
- $n(\Omega)$ : Số phần tử của không gian mẫu.

✓ **Tính chất của xác suất**:

- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ , với mọi biến cố  $A$ .
- Nếu  $A$  và  $B$  xung khắc thì:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  (công thức cộng xác suất)
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ , với mọi biến cố  $A$ .



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học phẳng

### I. Một số công thức thường

dùng trong hình học phẳng:

#### 1. Hệ thức lượng trong tam giác

Cho  $\triangle ABC$ , ký hiệu

-  $a, b, c$ : độ dài 3 cạnh

-  $R$ : bán kính đường tròn ngoại tiếp

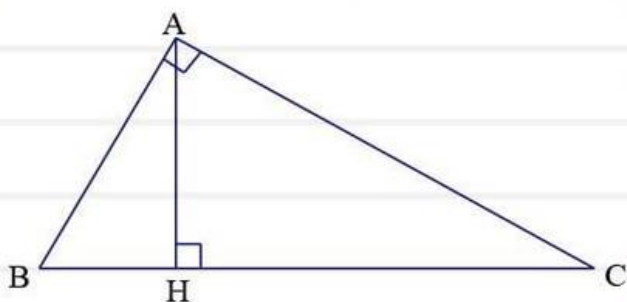
✓ Định lí côsin: 
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

✓ Định lí sin: 
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

✓ Công thức tính độ dài trung tuyến:

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \end{cases}$$

#### 2. Hệ thức lượng trong tam giác vuông



①  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (Pitago)

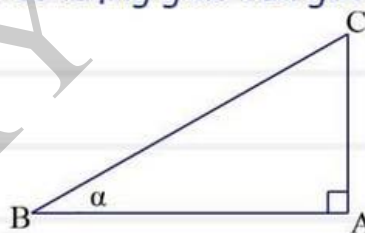
②  $AB^2 = BH \cdot BC$   $AC^2 = CH \cdot BC$

③  $AH^2 = BH \cdot CH$

④  $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

⑤  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

#### 3. Tỷ số lượng giác của góc nhọn:



$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} \quad \tan \alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC} \quad \cot \alpha = \frac{AB}{AC}$$

#### 4. Lưu ý:

- ✓ Trong tam giác vuông, đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông có độ dài bằng  $\frac{1}{2}$  cạnh huyền
- ✓ Hình vuông có độ dài đường chéo bằng  $\boxed{\text{cạnh} \times \sqrt{2}}$ .
- ✓ Cạnh huyền của tam giác vuông cân có độ dài bằng  $\boxed{\text{cạnh góc vuông} \times \sqrt{2}}$ .
- ✓ Đường cao của tam giác đều có độ dài bằng  $\frac{\text{cạnh} \times \sqrt{3}}{2}$ .



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học phẳng

### 5. Các công thức tính diện tích:

#### ✓ Tam giác thường:

$$\textcircled{1} S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \quad (h_a, h_b, h_c: \text{độ dài}$$

3 đường cao)

$$\textcircled{2} S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$\textcircled{3} S = \frac{abc}{4R}$$

$$\textcircled{4} S = pr \quad (r: \text{bán kính đường tròn nội tiếp,}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}: \text{nửa chu vi)}$$

$$\textcircled{5} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{Công thức Hê-rông})$$

#### ✓ Tam giác vuông: $S = \frac{1}{2} \times \text{tích 2 cạnh góc vuông}$

#### ✓ Tam giác đều: $S = \frac{ca \cdot nh^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

#### ✓ Hình vuông: $S = Ca \cdot nh^2$

#### ✓ Hình chữ nhật: $S = da \cdot i \times r \cdot o \cdot n \cdot g$

#### ✓ Hình bình hành: $S = a \cdot u \cdot y \times c \cdot a \cdot o$ hoặc $S = AB \cdot AD \cdot \sin A$

#### ✓ Hình thoi: $S = a \cdot u \cdot y \times c \cdot a \cdot o$ hoặc $S = AB \cdot AD \cdot \sin A$ hoặc

$$S = \frac{1}{2} \times \text{tích 2 đường chéo}$$

#### ✓ Hình thang: $S = \frac{(\text{cạnh lớn} + \text{cạnh bé}) \times \text{cao}}{2}$

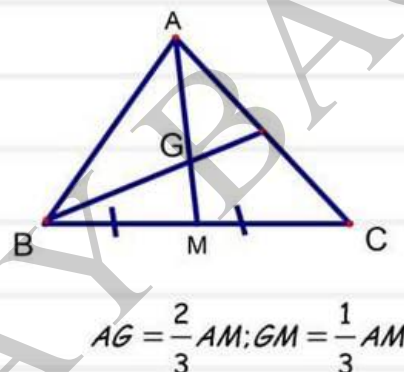
#### ✓ Hình tròn: $S = \pi R^2$

### II. Các đường trong tam giác:

#### 1. Đường trung tuyến\_ Trọng tâm

##### ✓ Xuất phát từ đỉnh

##### ✓ Qua trung điểm cạnh đối diện



#### \* Tính chất:

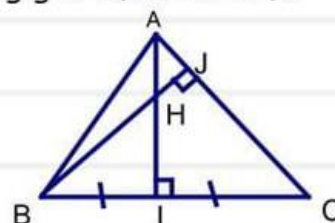
##### ✓ Ba đường trung tuyến trong tam giác cắt nhau tại một điểm và điểm này được gọi là trọng tâm của tam giác.

##### ✓ Khoảng cách từ trọng tâm đến đỉnh bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến.

#### 2. Đường cao\_ Trực tâm

##### ✓ Xuất phát từ đỉnh

##### ✓ Vuông góc cạnh đối diện



#### \* Tính chất:

##### ✓ Ba đường cao trong tam giác cắt nhau tại một điểm và điểm này được gọi là trực tâm của tam giác.



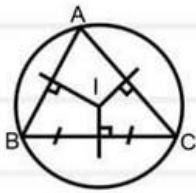
# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học phẳng

### 3. Đường trung trực

Tâm đường tròn ngoại tiếp

- ✓ Qua trung điểm một cạnh
- ✓ Vuông góc với cạnh đó



#### \* Tính chất:

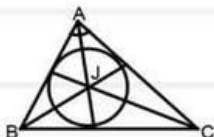
- ✓ Ba đường trung trực trong tam giác cắt nhau tại một điểm, điểm này cách đều 3 đỉnh của tam giác và đó là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

### 4. Đường phân giác\_Tâm đường tròn nội tiếp

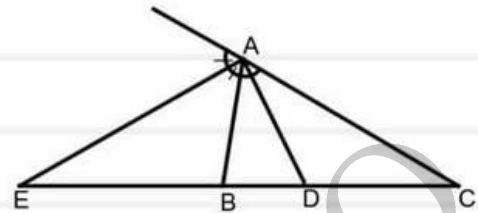
- ✓ Xuất phát từ một đỉnh
- ✓ Chia góc ứng với đỉnh đó thành 2 góc bằng nhau

#### \* Tính chất:

- ✓ Ba đường phân giác trong tam giác cắt nhau tại một điểm, điểm này cách đều 3 cạnh của tam giác và đó là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.



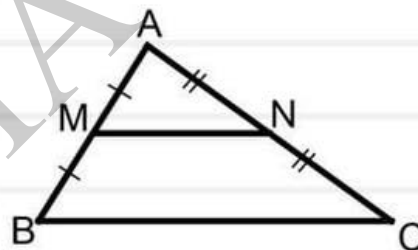
- ✓ Đường phân giác của tam giác chia cạnh đối diện thành 2 đoạn tỉ lệ với 2 cạnh kề 2 đoạn ấy



$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

### 5. Đường trung bình

- ✓ Qua trung điểm hai cạnh



$$\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \frac{1}{2}BC \end{cases}$$

#### \* Tính chất:

- ✓ Song song với cạnh đáy
- ✓ Có độ dài bằng  $\frac{1}{2}$  cạnh đáy

## III. Các trường hợp bằng nhau

của hai tam giác

- ✓ Cạnh - Góc - Cạnh
  - ✓ Góc - Cạnh - Góc
  - ✓ Cạnh - Cạnh - Cạnh
- Nếu là tam giác vuông:
- ✓ Cạnh huyền - Góc nhọn
  - ✓ Cạnh huyền - Cạnh góc vuông



# Tổng hợp kiến thức Toán

## IV. Các trường hợp đồng dạng

của hai tam giác

- ✓ 2 góc bằng nhau
- ✓ 1 góc bằng nhau xen giữa hai cạnh tỉ lệ
- ✓ 3 cạnh tỉ lệ

Nếu là tam giác vuông:

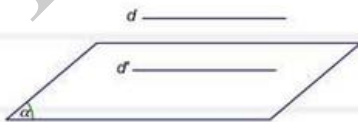
- ✓ 1 góc nhọn bằng nhau
- ✓ 2 cạnh tỉ lệ

## Hình học không gian

### I. Quan hệ song song:

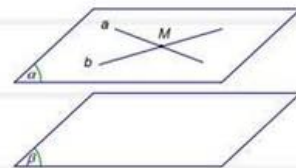
- 1) Hai đường thẳng song song với nhau nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

- 2) Đường thẳng  $d$  song song với mặt phẳng  $(\alpha)$  nếu  $d$  không nằm trong  $(\alpha)$  và  $d$  song song với một đường thẳng  $d'$  nằm trong  $(\alpha)$ .



$$\left. \begin{array}{l} d \not\subset (\alpha) \\ d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel (\alpha)$$

- 3) Hai mặt phẳng song song với nhau nếu mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.



$$\left. \begin{array}{l} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ a, b \parallel (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

### II. Quan hệ vuông góc:

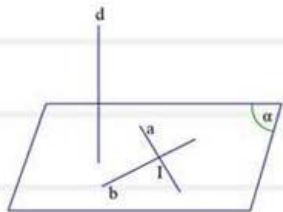
- 1) Hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học không gian

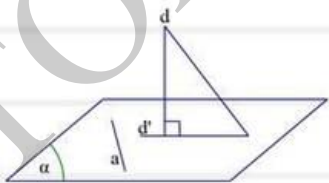
- 2) Đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  nếu  $d$  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ .



$$\left. \begin{array}{l} d \perp a \\ d \perp b \\ a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$

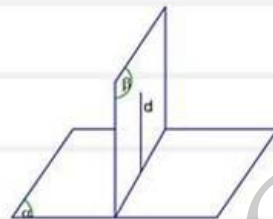
### Tính chất:

- ✓ Đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  thì  $d$  sẽ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ .
- ✓ **(Định lý 3 đường vuông góc)** Cho đường thẳng  $d$  không vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$  và đường thẳng  $a$  nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$ . Khi đó, điều kiện cần và đủ để  $a$  vuông góc với  $d$  là  $a$  vuông góc với hình chiếu  $d'$  của  $d$  trên  $(\alpha)$ .



$$a \perp d \Leftrightarrow a \perp d'$$

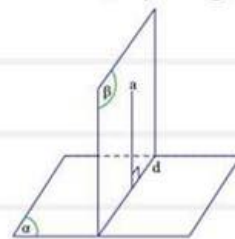
- 3) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt kia.



$$\left. \begin{array}{l} d \perp (\alpha) \\ d \subset (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

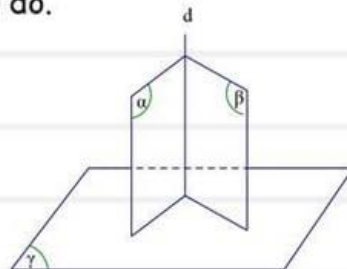
### Tính chất:

- ✓ Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì cũng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.



$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\beta), a \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$

- ✓ Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.



$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (\gamma)$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học không gian

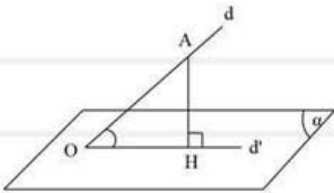
### III. Góc:

1) **Góc giữa hai đường thẳng:** Góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  là góc giữa hai đường thẳng cắt nhau  $a'$  và  $b'$  lần lượt song song (hoặc trùng) với  $a$  và  $b$ .



$$(a, b) = (a', b')$$

2) **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:** Góc giữa đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  là góc giữa  $d$  và hình **chiếu**  $d'$  của  $d$  trên  $(\alpha)$ .



$$(d, (\alpha)) = (d, d')$$

**Cách tìm góc giữa đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(\alpha)$ :**

- ✓ Tìm hình chiếu  $d'$  của  $d$  trên  $(\alpha)$ .
- ✓ Khi đó góc giữa  $d$  và  $(\alpha)$  bằng góc giữa  $d$  và  $d'$ .

Ta có thể trình bày như sau:

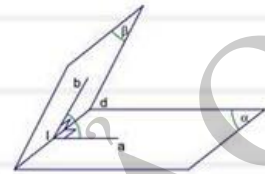
- Vì  $O \in (\alpha)$  nên hình chiếu của  $O$  trên  $(\alpha)$  là  $O$ .

- Vì  $AH \perp (\alpha)$  nên hình chiếu của  $A$  trên  $(\alpha)$  là  $H$ .

$\Rightarrow$  Hình chiếu của  $AO$  trên là  $HO$

$$\Rightarrow (\widehat{AO, (\alpha)}) = (\widehat{AO, HO}) = \widehat{AOH}$$

3) **Góc giữa hai mặt phẳng:** Là góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong 2 mặt phẳng, cùng vuông góc với giao tuyến.



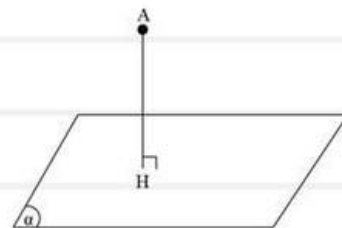
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha), a \perp d \\ b \subset (\beta), b \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = (a, b)$$

**Cách tìm góc giữa hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ :**

- ✓ Tìm giao tuyến  $d$  của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$
- ✓ Tìm 2 đường thẳng  $a$  và  $b$  lần lượt nằm trong hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  mà cùng vuông góc với giao tuyến  $d$ .
- ✓ Khi đó góc giữa hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$ .

### IV. Khoảng cách:

1) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:



$$\text{Từ } A \text{ kẻ } AH \perp (\alpha) \Rightarrow d(A, (\alpha)) = AH$$

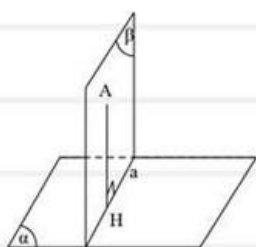


# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học không gian

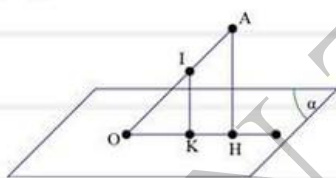
### Phương pháp tìm đoạn AH:

- Chọn (hoặc dựng) mặt phẳng phụ ( $\beta$ ) chứa A và vuông góc với mặt phẳng ( $\alpha$ ) theo giao tuyến là đường thẳng a.
- Trong mặt phẳng ( $\beta$ ), kẻ  $AH \perp a$   
 $\Rightarrow AH \perp (\alpha) \Rightarrow d(A, (\alpha)) = AH$



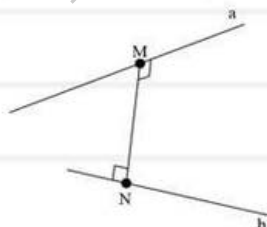
✓ Lưu ý: Nếu  $AO \cap (\alpha) = O$  thì

$$\frac{d(A, (\alpha))}{d(I, (\alpha))} = \frac{AO}{IO}$$



### 2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

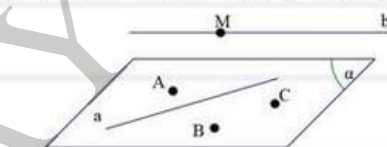
- ✓ Cách 1: Bằng độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.



MN được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu

$$\begin{cases} M \in a \\ N \in b \\ MN \perp a, MN \perp b \end{cases}$$

- ✓ Cách 2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa đường thẳng này với mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.



$$d(a, b) = d(b, (\alpha)) = d(M, (\alpha))$$

$$= d(M, (ABC)) = \frac{3V_{M.ABC}}{S_{ABC}}$$

Trong đó ( $\alpha$ ) là mặt phẳng chứa đường thẳng a và song song với đường thẳng b và M là điểm tùy ý trên đường thẳng b.

### V. Hình chóp - khối chóp:

Thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \times \text{cao}$$



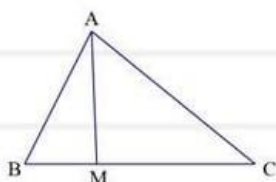
# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học không gian

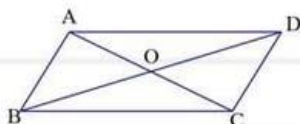
**Một số lưu ý khi tính diện tích đa giác:**

- ✓ Trong tam giác ABC, nếu M là điểm tùy ý trên cạnh BC ta có:

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BC}$$



- ✓ Đường trung tuyến của tam giác chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.
- ✓ Hai đường chéo hình bình hành chia hình bình hành thành 4 phần có diện tích bằng nhau.

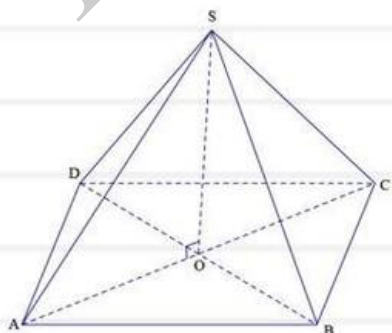


### VI. Các khối hình chóp

thường gặp:

#### 1. Hình chóp đều

Là hình chóp có đáy là đa giác đều và tất cả các cạnh bên đều bằng nhau.



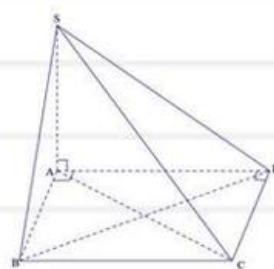
**Tính chất của hình chóp đều:**

- ✓ Đường cao đi qua tâm của đáy.
- ✓ Các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau và hợp với đáy các góc bằng nhau.
- ✓ Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

**Chú ý:**

- ✓ Tứ giác đều là hình vuông, ta thường vẽ là hình bình hành có tâm là giao điểm của 2 đường chéo.
- ✓ Đối với tam giác đều ta vẽ tam giác thường có tâm là giao điểm hai đường trung tuyến.
- ✓ Tứ diện đều là tứ diện có tất cả các cạnh đều bằng nhau.

#### 2. Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy:



**Chú ý:** Giả thiết bài toán có thể cho một trong hai dạng sau:

- ✓  $SA \perp (ABCD)$
- ✓  $(SAB)$  và  $(SAD)$  cùng vuông góc với  $(ABCD)$

Ta có:

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$$

$$(SAB) \cap (SAD) = SA$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

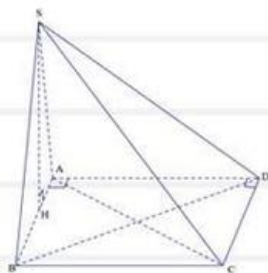
## Hình học không gian

Cơ sở là định lý: "Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó"

### 3. Hình chóp có một mặt bên

vuông góc với đáy:

thì đường cao của mặt bên đó sẽ là đường cao của hình chóp.



#### Chú ý:

- ✓ Cơ sở là định lý: "Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì cũng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia"
- ✓ Đường cao SH của  $\triangle SAB$  chính là đường cao của hình chóp nên vẽ SH thẳng đứng.
- ✓ Thường bài toán cho " $\triangle SAB$  là tam giác đều là nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy" ta trình bày như sau:
  - Gọi H là trung điểm AB
  - Vì  $\triangle SAB$  đều  $\Rightarrow SH$  là đường cao của  $\triangle SAB \Rightarrow SH \perp AB$

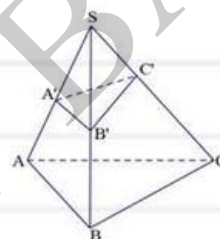
$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

## VII. Tỷ số thể tích

của khối chóp

Cho khối chóp

tam giác S.ABC. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy 3 điểm A', B', C' khác với S.

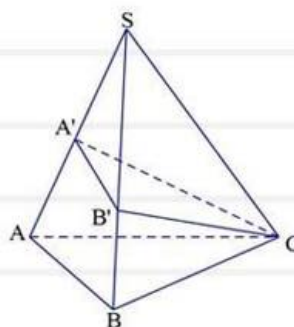


$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \quad (\text{Công thức})$$

này chỉ được dùng cho khối chóp tam giác)

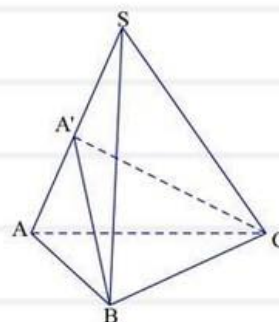
Các trường hợp đặc biệt:

$$\checkmark C \equiv C'$$



$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB}$$

$$\checkmark C \equiv C'; B \equiv B'$$



$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học không gian

### VIII. Ứng dụng công thức

thể tích để tìm khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng:

Ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot cao = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot d(S, (ABC))$$

$$\Rightarrow d(S, (ABC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}}$$

Tương tự:

$$d(A, (SBC)) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{SBC}}$$

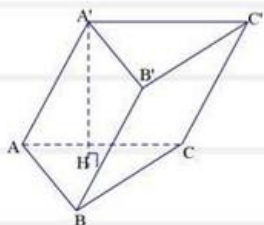
$$d(B, (SAC)) = \frac{3V_{B.SAC}}{S_{SAC}}$$

$$d(C, (SAB)) = \frac{3V_{C.SAB}}{S_{SAB}}$$

Trong đó:  $V_{A.SBC} = V_{B.SAC} = V_{C.SAB} = V_{S.ABC}$

### IX. Hình lăng trụ - khối lăng trụ:

Thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đa giác đáy nhân với chiều cao



$$V = S_{\text{áy}} \times \text{cao}$$

**Tính chất của hình lăng trụ:**

- ✓ Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- ✓ Các mặt bên và mặt chéo là các hình bình hành.
- ✓ Hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song, là hai đa giác bằng nhau, có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

**1) Lăng trụ đứng:** Là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy.

Đối với hình lăng trụ đứng:

- ✓ Các cạnh bên cũng là đường cao.
- ✓ Các mặt bên là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

**2) Lăng trụ đều:** Là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều

Đối với lăng trụ đều, các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.

**3) Hình hộp:**

- ✓ Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.
- ✓ Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với đáy.
- ✓ Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Thể tích hình hộp chữ nhật  $V = abc$  ( $a, b, c$ : 3 kích thước)

- ✓ Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Thể tích hình lập phương  $V = a^3$  ( $a$ : độ dài cạnh)



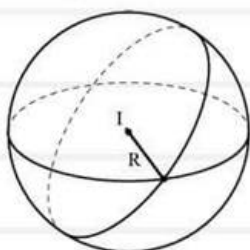
# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học không gian

### X. Mặt cầu - Khối cầu:

- 1) **Định nghĩa:** Mặt cầu tâm I bán kính R được ký hiệu  $S(I;R)$  là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I cố định một khoảng R không đổi.

Mặt cầu cùng với phần không gian bên trong của nó được gọi là **khối cầu**.

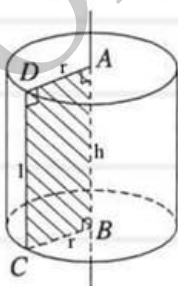


### 2) Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu:

- ✓ Diện tích mặt cầu:  $S = 4\pi R^2$
- ✓ Thể tích khối cầu:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

### XI. Mặt trụ - Hình trụ - Khối trụ:

- 1) **Định nghĩa:** Cho hình chữ nhật ABCD quay quanh cạnh AB khi đó cạnh CD vạch thành một mặt tròn xoay được gọi là **mặt trụ**.

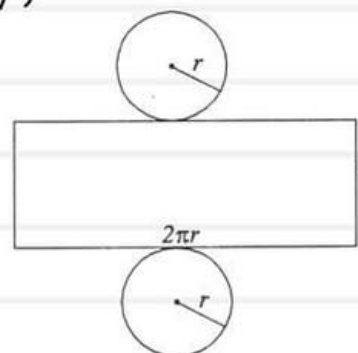


- ✓ Hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau, hình tạo thành bởi mặt trụ và hai hình tròn này được gọi **hình trụ**. Hai hình tròn này được gọi là hai đáy của hình trụ.

- ✓ Cạnh CD được gọi là **đường sinh** của hình trụ.
- ✓ Cạnh AB được gọi là **trục** của hình trụ.
- ✓ Khoảng cách giữa hai đáy được gọi là **chiều cao** của hình trụ.
- ✓ Hình trụ cùng với phần không gian bên trong của nó được gọi là **khối trụ**.

### 2) Diện tích mặt trụ và thể tích khối trụ:

- ✓ Diện tích xung quanh mặt trụ:  $S_{xq} = 2\pi rl$  ( $l$ : độ dài đường sinh,  $r$ : bán kính đáy)



- ✓ Diện tích toàn phần hình trụ:  $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi rl + 2\pi r^2$
- ✓ Thể tích khối trụ:  $V = S_{\text{đáy}} \cdot \text{cao} = \pi r^2 h$  ( $h$ : chiều cao)

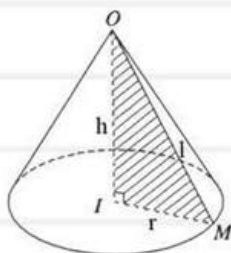
### XII. Mặt nón - Hình nón - Khối nón:

- 1) **Định nghĩa:** Cho tam giác OIM vuông tại I quay quanh cạnh IO khi đó cạnh OM vạch thành một mặt tròn xoay được gọi là **mặt nón**.



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học không gian



- ✓ Cạnh IM vạch ra một hình tròn, hình tạo thành bởi mặt nón và hình tròn này được gọi là **hình nón**. Hình tròn này được gọi là **mặt đáy** của hình nón.
- ✓ Cạnh OM được gọi là **đường sinh** của hình nón.
- ✓ Cạnh OI được gọi là **trục** của hình nón. Độ dài đoạn OI được gọi là **chiều cao** của hình nón.
- ✓ Điểm O được gọi là **đỉnh** của hình nón.

### 2) Diện tích mặt nón và thể tích khối nón:

- ✓ Diện tích xung quanh mặt nón:  

$$S_{xq} = \pi r l$$
*(l: độ dài đường sinh, r: bán kính đáy)*
- ✓ Diện tích toàn phần hình nón:  

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{áy} = \pi r l + \pi r^2$$
- ✓ Thể tích khối nón:  

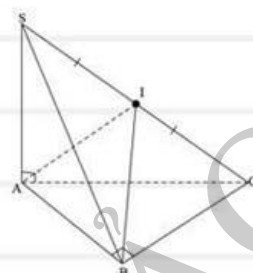
$$V = \frac{1}{3} S_{áy} \cdot \text{cao} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$
*(h: chiều cao)*

### XIII. Cách xác định tâm

và bán kính mặt cầu ngoại tiếp một số hình chóp thường gặp

**Hình 1: Hình chóp  $S.ABC$  có  $\triangle ABC$  vuông tại B,  $SA \perp (ABC)$ .**

### Cách đặc biệt



Gọi I là trung điểm của SC.

$$\triangle SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow IA = IS = IC \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

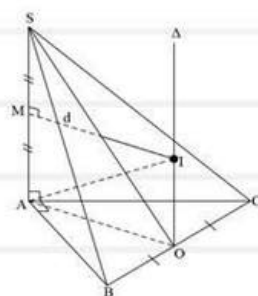
$$\Rightarrow \triangle SBC \text{ vuông tại } B \Rightarrow IB = IS = IC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

Suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$$\text{Bán kính: } R = IS = \frac{1}{2} SC$$

**Hình 2: Hình chóp  $S.ABC$  có  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $SA \perp (ABC)$ .**



Gọi O là trung điểm của BC  $\Rightarrow$  O là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

Qua O dựng đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mp(ABC)  $\Rightarrow \Delta$  là trục của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

Trong mp(SAO), dựng đường thẳng d là trung trực của SA.



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học không gian

Gọi  $I = d \cap \Delta$

Ta có:  $\begin{cases} I \in d \Rightarrow IA = IS \\ I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IC \end{cases}$

$\Rightarrow IA = IB = IC = IS$

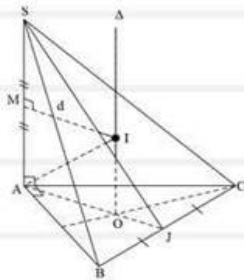
Suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bán

kính:

$$R = IA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + AM^2}$$

**Hình 3: Hình chóp  $S.ABC$  có  $\Delta ABC$  là tam giác đều,  $SA \perp (ABC)$ .**



Gọi J là trung điểm BC.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$

Qua O dựng đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mp(ABC)  $\Rightarrow \Delta$  là trục của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

Trong mp(SAJ), dựng đường thẳng d là trung trực của SA.

Gọi  $I = d \cap \Delta$

Ta có:  $\begin{cases} I \in d \Rightarrow IA = IS \\ I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IC \end{cases}$

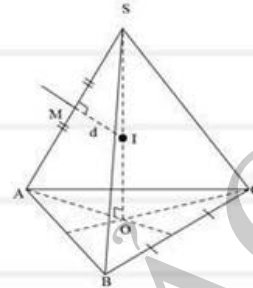
$\Rightarrow IA = IB = IC = IS$

Suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bán kính:

$$R = IA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}AJ\right)^2 + AM^2}$$

**Hình 4: Hình chóp đều  $S.ABC$ .**



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC \Rightarrow SO$  là trục của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$

Trong mp(SAO), dựng đường thẳng d là trung trực của SA.

Gọi  $I = d \cap SO$

Ta có:  $\begin{cases} I \in d \Rightarrow IA = IS \\ I \in SO \Rightarrow IA = IB = IC \end{cases}$

$\Rightarrow IA = IB = IC = IS$

Suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bán kính:  $R = IS$

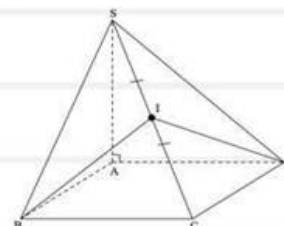
**Cách tính bán kính:**

$\Delta SMI \sim \Delta SOA$  (Vì là 2 tam giác vuông có chung góc S)

$$\Rightarrow \frac{IS}{SA} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow IS = \frac{SA \cdot SM}{SO}$$

**Hình 5: Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông (hoặc hình chữ nhật),  $SA \perp (ABCD)$**

**Cách đặc biệt**





# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học không gian

Gọi I là trung điểm của SC.

$\triangle SAC$  vuông tại A  $\Rightarrow IA = IS = IC$  (1)

$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow \triangle SBC$  vuông tại B  $\Rightarrow IB = IS = IC$  (2)

$\left. \begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

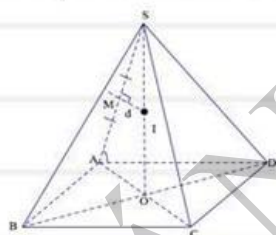
$\Rightarrow \triangle SCD$  vuông tại D  $\Rightarrow ID = IS = IC$  (3)

Từ (1), (2) và (3)  $\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$

Suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bán kính:  $R = IS = \frac{1}{2}SC$

**Hình 6: Hình chóp đều S.ABCD.**



Gọi O là giao điểm 2 đường chéo  $\Rightarrow SO$  là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Trong mp(SAO), dựng đường thẳng d là trung trực của SA.

Gọi  $I = d \cap SO$

Ta có:  $\begin{cases} I \in d \Rightarrow IA = IS \\ I \in SO \Rightarrow IA = IB = IC = ID \end{cases}$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$

Suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bán kính:  $R = IS$

**Cách tính bán kính:**

$\triangle SMI \sim \triangle SOA$  (Vì là 2 tam giác vuông có chung góc S)

$$\Rightarrow \frac{IS}{SA} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow IS = \frac{SA \cdot SM}{SO}$$

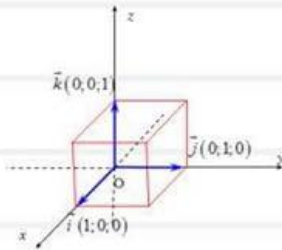


# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

### I. Hệ tọa độ Oxyz:

Hệ tọa độ Oxyz: Gồm 3 trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau có vectơ đơn vị lần lượt là:  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



### II. Tọa độ của vectơ:

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Đặc biệt:

$$\vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$$

### III. Tọa độ của điểm

Tọa độ của điểm:  $M(x; y; z)$

$$\Leftrightarrow \vec{OM} = (x; y; z)$$

(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)

Đặc biệt:

$$\checkmark M \in (Oxy) \Leftrightarrow z_M = 0$$

$$\checkmark M \in (Oyz) \Leftrightarrow x_M = 0$$

$$\checkmark M \in (Oxz) \Leftrightarrow y_M = 0$$

$$\checkmark M \in Ox \Leftrightarrow y_M = z_M = 0$$

$$\checkmark M \in Oy \Leftrightarrow x_M = z_M = 0$$

$$\checkmark M \in Oz \Leftrightarrow x_M = y_M = 0$$

### Hình chiếu vuông góc của điểm

$M(x_M; y_M; z_M)$  lên:

$$\checkmark \text{Trục Ox là: } M_1(x_M; 0; 0)$$

$$\checkmark \text{Trục Oy là: } M_2(0; y_M; 0)$$

$$\checkmark \text{Trục Oz là: } M_3(0; 0; z_M)$$

$$\checkmark \text{mp(Oxy) là: } M_{12}(x_M; y_M; 0)$$

$$\checkmark \text{mp(Oxz) là: } M_{13}(x_M; 0; z_M)$$

$$\checkmark \text{mp(Oyz) là: } M_{23}(0; y_M; z_M)$$

### IV. Các công thức về tọa độ:

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  thì:

$$\checkmark \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$$

$$\checkmark k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3), k \in \mathbb{R}$$

$$\checkmark \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

**"Hoành bằng hoành, tung bằng tung, cao bằng cao"**

$$\checkmark \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \text{tồn tại một số } k \text{ sao cho: } \vec{a} = k\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

Tọa độ vectơ

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

✓ Tọa độ trọng tâm G của

$$\text{tam giác ABC: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

V.Tích vô hướng của

hai vectơ:

➤ **Biểu thức tọa độ của tích vô hướng:** Nếu

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \text{ thì:}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

"Hoành nhân hoành +

tung nhân tung + cao nhân cao"

➤ **Ứng dụng:**

✓ **Độ dài vectơ:** Nếu

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \text{ thì } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

✓ **Độ dài đoạn thẳng AB:**

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

✓ **Góc giữa hai vectơ:**

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

✓ **Điều kiện hai vectơ vuông góc:**

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

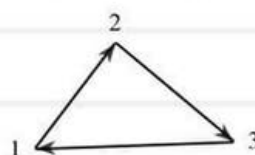
V.Tích có hướng của

hai vectơ:

➤ **Định nghĩa:** Cho hai vectơ  $\begin{cases} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{cases}$

Tích có hướng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là 1 vectơ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned}$$



Quy tắc: 23-31-12



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

Cách tính tích có hướng của hai vectơ bằng máy tính

### 1. Máy 570VN PLUS

- ✓ ON → MODE → 8 → 1 → 1:  
Nhập tọa độ Vectơ  $\vec{a}$
- ✓ AC → MODE → 8 → 2 → 1:  
Nhập tọa độ Vectơ  $\vec{b}$
- ✓ AC → SHIFT → 5 → 3 → X  
→ SHIFT → 5 → 4 → =

### 2. Máy 570ES PLUS

- ✓ ON → MODE → 8 → 1 → 1:  
Nhập tọa độ Vectơ  $\vec{a}$
- ✓ AC → SHIFT → 5 → 2 → 2 →  
1: Nhập tọa độ Vectơ  $\vec{b}$
- ✓ AC → SHIFT → 5 → 3 → X  
→ SHIFT → 5 → 4 → =

### 3. Máy 570MS

- ✓ ON → SHIFT → 5 → 1 → 1  
→ 3: Nhập tọa độ Vectơ  $\vec{a}$
- ✓ AC → SHIFT → 5 → 1 → 2  
→ 3: Nhập tọa độ Vectơ  $\vec{b}$
- ✓ AC → SHIFT → 5 → 3 → 1 →  
X → SHIFT → 5 → 3 → 2 → =

Tính chất của tích có hướng:

- ✓ Nếu  $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$  thì  $\vec{n} \perp \vec{a}$  và  $\vec{n} \perp \vec{b}$
- ✓ Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương với nhau  
 $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$
- ✓ Ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  đồng phẳng với nhau  
 $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$   
( $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$  được gọi là tích hỗn tạp của ba vectơ)

Ứng dụng của tích có hướng:

- ✓  $A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = \vec{0}$
- ✓  $A, B, C, D$  đồng phẳng  
 $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 0$   
Suy ra  $A, B, C, D$  tạo thành tứ diện  
(không đồng phẳng)  $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$
- ✓ Diện tích hình bình hành ABCD:  
 $S_{\square ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$
- ✓ Diện tích tam giác ABC:  
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$
- ✓ Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D':  
 $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$
- ✓ Thể tích tứ diện ABCD:  
 $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$

## VII. Phương trình

tổng quát của mặt phẳng:

Phương trình mặt phẳng đi qua

$M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có VTPT  $\vec{n} = (A; B; C)$  là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

- ✓ Nếu  $(\alpha)$  có phương trình

$Ax + By + Cz + D = 0$  thì  $(\alpha)$  có VTPT là

$$\vec{n} = (A; B; C)$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

- ✓ Hai mặt phẳng song song với nhau thì VTPT của mặt này cũng là VTPT của mặt kia, hai mặt phẳng vuông góc nhau thì VTPT của mặt này là VTCP của mặt kia.
- ✓ Khoảng cách từ điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  đến mặt phẳng  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ :

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- ✓ Đặc biệt: 
$$\begin{cases} mp(Oxy): z = 0 \\ mp(Oxz): y = 0 \\ mp(Oyz): x = 0 \end{cases}$$

Các dạng toán viết phương trình

mặt phẳng: Để viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  ta cần xác định một điểm thuộc  $(\alpha)$  và một VTPT của nó.

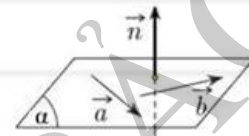
**Dạng 1:**

$(\alpha)$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  có VTPT  $\vec{n} = (A; B; C)$ :

$$(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

**Dạng 2:**

$(\alpha)$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  có cặp VTCP  $\vec{a}, \vec{b}$ :

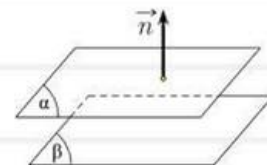


☞ Khi đó VTPT của  $(\alpha)$  là  $\vec{n}_\alpha = [\vec{a}, \vec{b}]$ .

**Dạng 3:**

$(\alpha)$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và song song với mặt phẳng

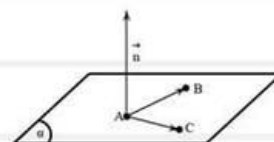
$$(\beta): Ax + By + Cz + D = 0.$$



☞ Khi đó VTPT  $\vec{n}_\alpha = \text{VTPT } \vec{n}_\beta = (A; B; C)$ .

**Dạng 4:**

$(\alpha)$  đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C:



☞ Khi đó VTPT của  $(\alpha)$  là  $\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{AC}]$

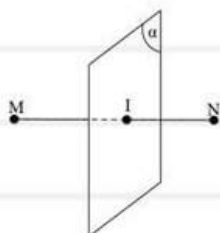


# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

Dạng 5:

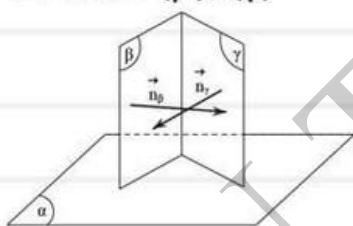
$(\alpha)$  là mặt phẳng trung trực của  $MN$ :



$$(\alpha): \begin{cases} \text{Qua trung điểm } I \text{ của } MN \\ \text{VTPT } \vec{n}_\alpha = \overrightarrow{MN} \end{cases}$$

Dạng 6:

$(\alpha)$  đi qua điểm  $M$  và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau  $(\beta), (\gamma)$ :

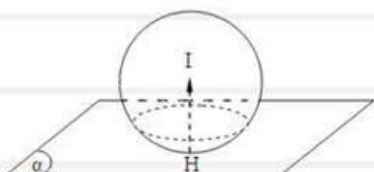


☞ Khi đó VTPT của  $(\alpha)$  là

$$\vec{n}_{(\alpha)} = [\text{VTPT } \vec{n}_\beta, \text{VTPT } \vec{n}_\gamma]$$

Dạng 7:

$(\alpha)$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  tại điểm  $H$   
 $(\alpha)$  là tiếp diện của mặt cầu  $(S)$  tại  $H$ :

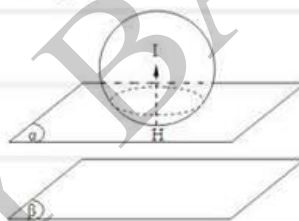


- Tìm tâm  $I$  của mặt cầu  $(S)$

$$-(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } H \\ \text{VTPT } \vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{IH} \end{cases}$$

Dạng 8:

$(\alpha)$  song song với mặt phẳng  $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$  và tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$ :



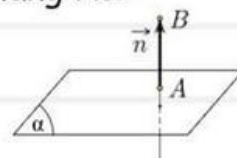
- Vì  $(\alpha)$  song song với  $(\beta)$  nên phương trình mp  $(\alpha)$  có dạng

$$Ax + By + Cz + m = 0 (m \neq D)$$

- Vì  $(\alpha)$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  nên  $d(I, (\alpha)) = R \rightarrow$  Giải phương trình này ta tìm được  $m$ .

Dạng 9:

$(\alpha)$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$ :



☞ Khi đó VTPT của  $(\alpha)$  là  $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB}$



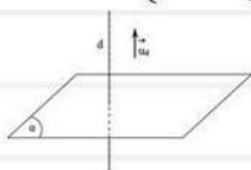
# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

### Dạng 10:

$(\alpha)$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và vuông

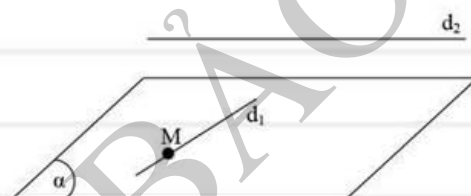
góc với đường thẳng  $d$ : 
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$



☞ Khi đó VTPT của  $(\alpha)$  là  
 $\vec{n}_\alpha = VTCP \vec{u}_d = (a; b; c)$

### Dạng 12:

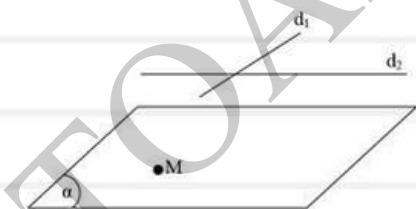
$(\alpha)$  chứa đường thẳng  $d_1$  và song song với đường thẳng  $d_2$  ( $d_1, d_2$  chéo nhau).



$(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \in d_1 \\ VTPT \vec{n}_\alpha = [VTCP \vec{u}_{d_1}, VTCP \vec{u}_{d_2}] \end{cases}$

### Dạng 11:

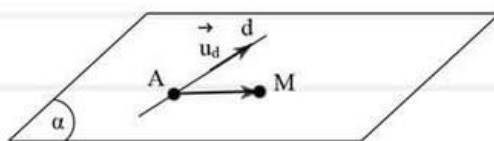
$(\alpha)$  đi qua điểm  $M$  và song song với hai đường thẳng  $d_1, d_2$  chéo nhau (hoặc cắt nhau):



$(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } M \\ VTPT \vec{n}_\alpha = [VTCP \vec{u}_{d_1}, VTCP \vec{u}_{d_2}] \end{cases}$

### Dạng 13:

$(\alpha)$  chứa đường thẳng  $d$  và 1 điểm  $M$  không nằm trên  $d$ :



- Trên  $d$  lấy 1 điểm  $A$

-  $(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } M \\ VTPT \vec{n}_\alpha = [\vec{AM}, VTCP \vec{u}_d] \end{cases}$

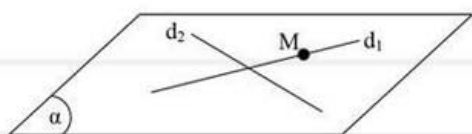


# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

### Dạng 14:

$(\alpha)$  chứa 2 đường thẳng cắt nhau  $d_1, d_2$ :

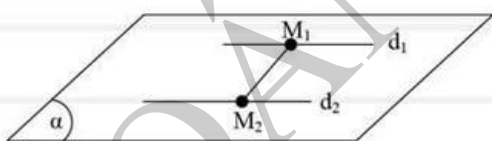


- Lấy một điểm  $M$  thuộc  $d_1$  hoặc  $d_2$   
 $\Rightarrow M \in (\alpha)$ .

$$-(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } M \\ VTPT \vec{n}_\alpha = [VTCP \vec{u}_{d_1}, VTCP \vec{u}_{d_2}] \end{cases}$$

### Dạng 15:

$(\alpha)$  chứa 2 đường thẳng song song  $d_1, d_2$ :

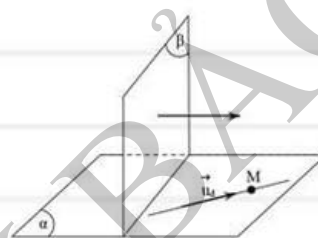


- Lấy  $M_1$  thuộc  $d_1$  và  $M_2$  thuộc  $d_2$

$$-(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ VTPT \vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{M_1 M_2}, VTCP \vec{u}_{d_1}] \end{cases}$$

### Dạng 16:

$(\alpha)$  chứa đường thẳng  $d$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\beta)$ :



- Lấy một điểm  $M$  thuộc  $d \Rightarrow M \in (\alpha)$ .

$$-(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } M \\ VTPT \vec{n}_\alpha = [VTCP \vec{u}_d, VTPT \vec{n}_\beta] \end{cases}$$

## VIII. Phương trình mặt cầu:

✓ Dạng 1: Phương trình mặt cầu  $(S)$  tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R$ :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

✓ Dạng 2: Phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad \text{với}$$

điều kiện  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$  là phương trình mặt cầu tâm  $I(a; b; c)$  và bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

✓ Điều kiện mặt cầu  $S(I, R)$  tiếp xúc với mặt phẳng  $(P)$  là:  $d(I, (P)) = R$

Các dạng toán viết phương trình mặt cầu: Để viết phương trình mặt cầu  $(S)$ , ta cần xác định tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu.



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

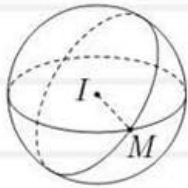
### Dạng 1:

Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(a; b; c)$  và bán kính  $R$ :

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

### Dạng 2:

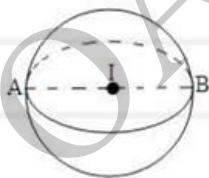
Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(a; b; c)$  và đi qua điểm  $M$ :



- Bán kính  $R = IM$

### Dạng 3:

Mặt cầu  $(S)$  có đường kính  $AB$ :



- Tâm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ :

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

- Bán kính  $R = IA = \frac{AB}{2}$ .

### Dạng 4:

Mặt cầu  $(S)$  đi qua bốn điểm  $A, B, C, D$  (mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ ):

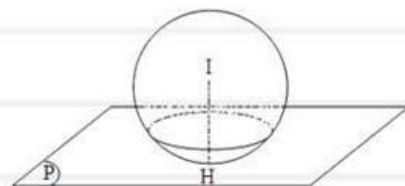
- Giả sử phương trình mặt cầu có dạng:  
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$   $(S)$ .

- Thay lần lượt tọa độ của các điểm  $A, B, C, D$  vào  $(S)$ , ta được 4 phương trình.

- Giải hệ phương trình đó, ta tìm được  $a, b, c, d \Rightarrow$  Phương trình mặt cầu  $(S)$ .

### Dạng 5:

Mặt cầu tâm  $I(a; b; c)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ :



- Bán kính:

$$R = d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

### IX. Phương trình của đường thẳng:

Cho đường thẳng  $d$  đi qua điểm

$M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có VTCP

$\vec{u} = (a; b; c)$  thì  $d$  có

✓ Phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

✓ Phương trình chính là:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

(nếu  $a, b, c$  đều khác 0)

**Các dạng toán viết phương trình đường thẳng:** Để lập phương trình đường thẳng  $d$  ta cần xác định một điểm thuộc  $d$  và một VTCP của nó.

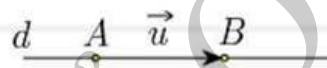
#### Dạng 1:

$d$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có VTCP

$$\vec{u} = (a; b; c): d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

#### Dạng 2:

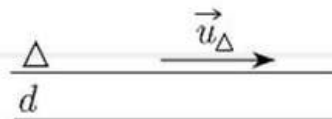
$d$  đi qua hai điểm  $A, B$ :



$$d: \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{VTCP } \vec{u}_d = \vec{AB} \end{cases}$$

#### Dạng 3:

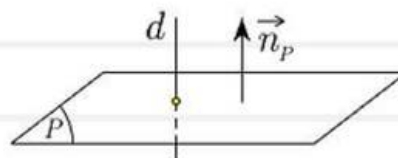
$d$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và song song với đường thẳng  $\Delta$  cho trước:



$$d: \begin{cases} \text{Qua } M_0 \\ \text{VTCP } \vec{u}_d = \text{VTCP } \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

#### Dạng 4:

$d$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  cho trước:



$$d: \begin{cases} \text{Qua } M_0 \\ \text{VTCP } \vec{u}_d = \text{VTPT } \vec{n}_P \end{cases}$$

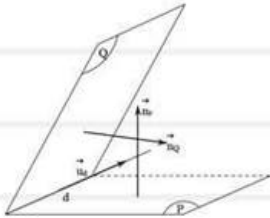


# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

### Dạng 5:

$d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(P), (Q)$ :

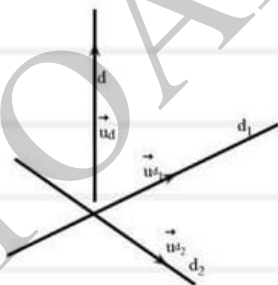


- Tìm tọa độ một điểm  $M \in d$ : bằng cách giải hệ phương trình  $\begin{cases} (P) \\ (Q) \end{cases}$  (với việc chọn giá trị cho một ẩn, thường cho  $x = 0$ )

$$d: \begin{cases} \text{Qua } M \\ VTCP \vec{u}_d = [VTPT \vec{n}_P, VTPT \vec{n}_Q] \end{cases}$$

### Dạng 6:

$d$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và vuông góc với hai đường thẳng  $d_1, d_2$ :



$$d: \begin{cases} \text{Qua } M_0 \\ VTCP \vec{u}_d = [VTCP \vec{u}_{d_1}, VTCP \vec{u}_{d_2}] \end{cases}$$

### Dạng 7:

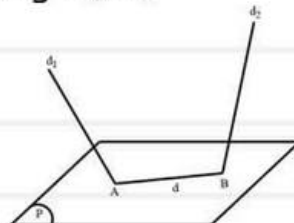
$d$  qua  $M$ , song song (hoặc nằm trong  $mp(P)$ ) và vuông góc với đường thẳng  $\Delta$ :



$$d: \begin{cases} \text{Qua } M \\ VTCP \vec{u}_d = [VTPT \vec{n}_P, VTCP \vec{u}_\Delta] \end{cases}$$

### Dạng 8:

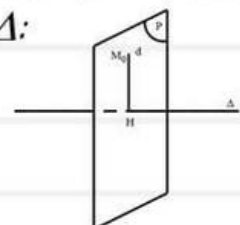
$d$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  và cắt cả hai đường thẳng  $d_1, d_2$ :



- Tìm các giao điểm  $A = d_1 \cap (P)$ ,  $B = d_2 \cap (P)$ .
- Khi đó  $d$  chính là đường thẳng  $AB$ .

### Dạng 9:

$d$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , vuông góc và cắt đường thẳng  $\Delta$ :



$\Rightarrow d$  qua  $M_0$  và hình chiếu  $H$  của  $M_0$  trên đường thẳng  $\Delta$

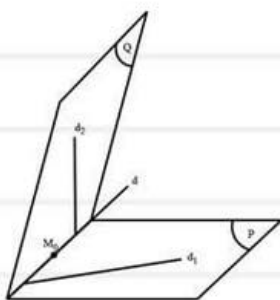


# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

### Dạng 10:

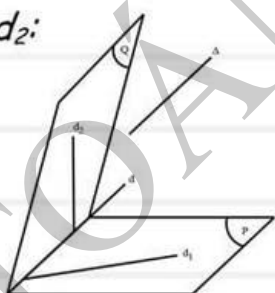
$d$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và cắt hai đường thẳng  $d_1, d_2$ :



- Gọi  $(P) = (M_0, d_1)$ ,  $(Q) = (M_0, d_2)$ .
- Khi đó  $d = (P) \cap (Q)$ . Do đó, VTCP của  $d$  là  $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$ .

### Dạng 11:

$d$  song song với  $\Delta$  và cắt cả hai đường thẳng  $d_1, d_2$ :



- Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $d_1$  song song  $\Delta$ :  

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \in d_1 \\ \text{VTPT } \vec{n}_P = [\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{d_1}] \end{cases}$$
- Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng chứa  $d_2$  song song  $\Delta$ :  

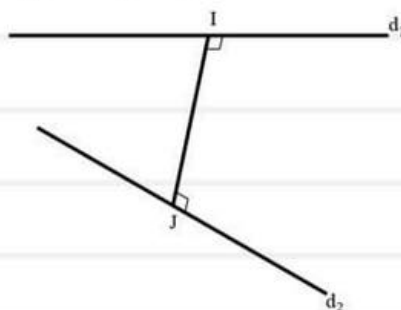
$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M_2 \in d_2 \\ \text{VTPT } \vec{n}_Q = [\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{d_2}] \end{cases}$$
- Khi đó  $d = (P) \cap (Q)$ .

### Dạng 12:

$d$  là đường vuông góc chung của hai

$$\text{đường thẳng } d_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \\ z = z_1 + c_1t \end{cases}$$

$$\text{và } d_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2t \\ y = y_2 + b_2t \\ z = z_2 + c_2t \end{cases} \text{ chéo nhau:}$$



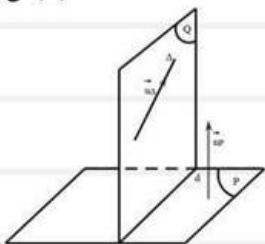
- Giả sử  $d$  cắt  $d_1$  tại  $I$ ,  $d$  cắt  $d_2$  tại  $J$ .
- Vì  $\begin{cases} I \in d_1 \Rightarrow I(x_1 + a_1t_1; y_1 + a_1t_1; z_1 + c_1t_1) \\ J \in d_2 \Rightarrow J(x_2 + a_2t_2; y_2 + a_2t_2; z_2 + c_2t_2) \end{cases}$
- Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{IJ} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases} \text{ ta tìm}$$
 được  $t_1, t_2$  từ đó suy ra tọa độ  $I, J$ .
- $d$  chính là đường thẳng qua 2 điểm  $I, J$ .



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

**Dạng 13:**  $d$  là hình chiếu của đường thẳng  $\Delta$  lên mặt phẳng (P):

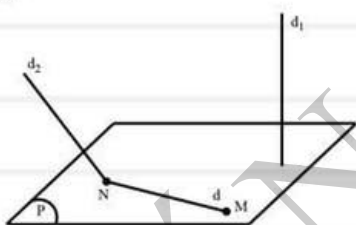


- Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa  $\Delta$  và vuông góc với mặt phẳng (P) bằng cách:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M \in \Delta \\ VTPT \vec{n}_Q = [\vec{n}_P, \vec{u}_\Delta] \end{cases}$$

- Khi đó  $d = (P) \cap (Q)$ .

**Dạng 14:**  $d$  đi qua điểm M, vuông góc với  $d_1$  và cắt  $d_2$ :

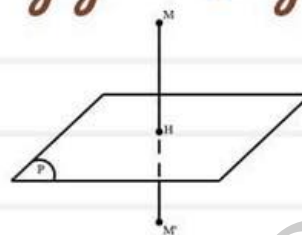


- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với  $d_1$ .
- Tìm giao điểm N của (P) và  $d_2$
- Khi đó  $d$  chính là đường thẳng qua 2 điểm MN

### X. Cách tìm hình chiếu,

điểm đối xứng.

- ✓ Tìm hình chiếu H của điểm M trên mặt phẳng (P):



- Viết phương trình đường thẳng  $d$  qua M và vuông góc với  $mp(P)$  bằng cách:

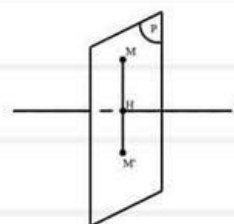
$$d: \begin{cases} \text{Qua } M \\ VTCP \vec{u}_d = VTPT \vec{n}_P \end{cases}$$

- Khi đó:  $H = d \cap (P)$

Nếu bài toán yêu cầu tìm  $M'$  đối xứng với M qua  $mp(P)$ , ta có H là trung điểm của  $MM'$  nên:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$$

- ✓ Tìm hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng  $d$ :



- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với  $d$  bằng cách:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M \\ VTPT \vec{n}_P = VTCP \vec{u}_d \end{cases}$$

- Khi đó:  $H = d \cap (P)$

Nếu bài toán yêu cầu tìm  $M'$  đối xứng với M qua  $d$ , ta có H là trung điểm của  $MM'$  nên:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

### XI. Vị trí tương đối giữa

hai mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng  $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

và  $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

✓  $(P), (Q)$  cắt nhau  $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

✓  $(P) // (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

✓  $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

**Đặc biệt:**  $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow$

$$\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

### XII. Vị trí tương đối giữa

một đường thẳng và một mặt phẳng:

Cho mặt phẳng  $(P): Ax + By + Cz + D = 0$  và

$$\text{đường thẳng } d: \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Thay phương trình đường thẳng  $d$  vào phương trình mặt phẳng  $(P)$  ta được 1 phương trình bậc nhất ẩn  $t$ :

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \quad (*)$$

✓ TH1:  $(*)$  có đúng một nghiệm thì  $d$  cắt  $(P)$

✓ TH2:  $(*)$  vô nghiệm thì  $d // (P)$

✓ TH3:  $(*)$  có vô số nghiệm thì  $d \subset (P)$

**Đặc biệt:**  $d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}_P$  cùng phương  $\vec{u}_d$

$$\Leftrightarrow [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = \vec{0}$$

### XIII. Vị trí tương đối

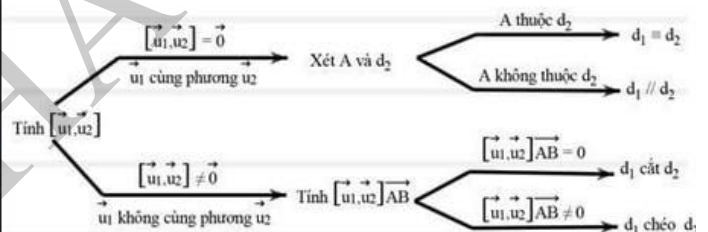
giữa hai đường thẳng:

$$\text{Cho hai đường thẳng } d_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \\ z = z_1 + c_1t \end{cases} \text{ và}$$

$$d_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2t \\ y = y_2 + b_2t \\ z = z_2 + c_2t \end{cases}$$

$d_1$  qua  $A(x_1; y_1; z_1)$  có VTCP  $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$

$d_2$  qua  $B(x_2; y_2; z_2)$  có VTCP  $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$



✓  $d_1$  chéo  $d_2 \Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} \neq 0$

✓  $d_1$  cắt  $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} = 0 \end{cases}$

$$\text{hoặc hệ phương trình } \begin{cases} x_1 + a_1t_1 = x_2 + a_2t_2 \\ y_1 + b_1t_1 = y_2 + b_2t_2 \\ z_1 + c_1t_1 = z_2 + c_2t_2 \end{cases} \text{ có 1}$$

nghiệm.

✓  $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ A \notin d_2 \end{cases}$

✓  $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ A \in d_2 \end{cases}$

**Đặc biệt:**  $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0$

$$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

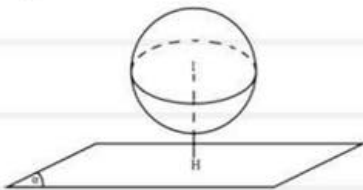
## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

### XIV. Vị trí tương đối

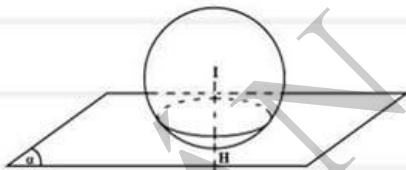
giữa mặt phẳng và mặt cầu:

Cho mặt phẳng  $(\alpha)$  và mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I$ , bán kính  $R$ .

- ✓  $d(I, (\alpha)) > R$  thì  $(\alpha)$  và  $(S)$  không có điểm chung.

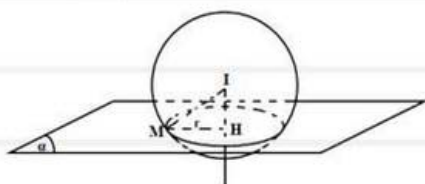


- ✓  $d(I, (\alpha)) = R$  thì  $(\alpha)$  và  $(S)$  có 1 điểm chung  $H$  duy nhất. Khi đó ta nói  $(\alpha)$  tiếp xúc với  $(S)$  tại  $H$ .  $H$  được gọi là tiếp điểm,  $(P)$  được gọi là tiếp diện của  $(S)$  tại  $H$ .



☞ Muốn tìm tọa độ điểm  $H$  ta tìm hình chiếu của  $I$  trên  $mp(\alpha)$ .

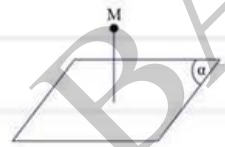
- ✓  $d(I, (\alpha)) < R$  thì  $(\alpha)$  và  $(S)$  cắt nhau theo giao tuyến là 1 đường tròn  $(C)$ . Tâm  $H$  của đường tròn  $(C)$  là hình chiếu của  $I$  trên  $mp(\alpha)$ , bán kính của  $(C)$  là  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$  với  $d = d(I, (\alpha))$ .



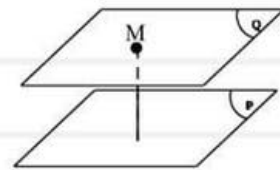
### XV. Khoảng cách:

- ✓ Khoảng cách từ điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  đến mặt phẳng  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

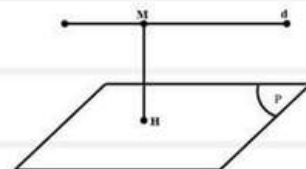
$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



- ✓ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: Bằng khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.



- ✓ Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song: Bằng khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.



- ✓ Khoảng cách từ một điểm  $M$  đến một đường thẳng  $\Delta$ :

- Cách 1: Giả sử đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M_0$  và có vectơ chỉ phương là  $\vec{u}$ . Ta có:

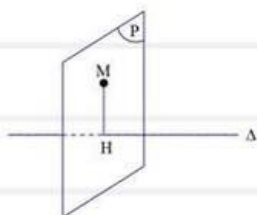
$$d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong không gian Oxyz

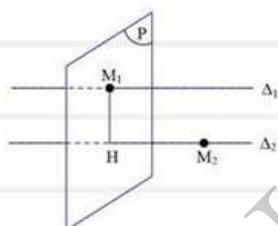
### ▪ Cách 2:



– Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên đường thẳng  $\Delta$ .

– Khi đó  $d(M, \Delta) = MH$

✓ **Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ :** Bằng khoảng cách từ 1 điểm tùy ý trên đường thẳng  $\Delta_1$  đến đường thẳng  $\Delta_2$



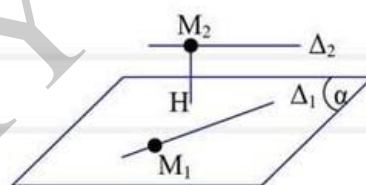
$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_1, \Delta_2) = MH$$

✓ **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ :**

– **Cách 1:** Giả sử đường thẳng  $\Delta_1$  qua điểm  $M_1$  và có vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1$ , đường thẳng  $\Delta_2$  qua điểm  $M_2$  và có vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_2$ . Ta có:

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\left[ \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{matrix} \right] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{\left| \left[ \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{matrix} \right] \right|}$$

– **Cách 2:** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  bằng khoảng cách giữa đường thẳng này đến mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng kia.



– Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $\Delta_1$  và song song với  $\Delta_2$  bằng cách:

$$(\alpha): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ VTPT \quad \vec{n}_{(\alpha)} = \left[ VTCP \vec{u}_{\Delta_1}, VTCP \vec{u}_{\Delta_2} \right] \end{cases}$$

– Khi đó:  $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_2, (\alpha))$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong mặt phẳng Oxyz

### I. Các công thức tọa độ:

Cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ;  $\vec{b} = (b_1; b_2)$

✓ Hai vectơ bằng nhau:  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

"hoành bằng hoành, tung bằng tung"

✓ Tọa độ của  $\vec{a} \pm \vec{b}, k\vec{a}$ :

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$$

✓ Công thức tính tọa độ của vectơ:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

✓ I là trung điểm AB  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

✓ G là trọng tâm  $\triangle ABC$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

✓ Tích vô hướng của hai vectơ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

"hoành x hoành + tung x tung"

✓ Điều kiện vuông góc giữa hai vectơ:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$$

✓ Độ dài của vectơ - khoảng cách giữa hai điểm:

$$\vec{a} = (a_1; a_2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

✓ Góc giữa hai vectơ:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

✓ Công thức tính diện tích tam giác:

$$\begin{cases} \vec{AB} = (x; y) \\ \vec{AC} = (x'; y') \end{cases}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |xy' - x'y|$$

### II. Phương trình đường

thẳng trong mặt phẳng

1. Phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng: Đường thẳng d qua điểm

$M_0(x_0; y_0)$ , nhận  $\vec{u} = (a; b)$  làm vectơ chỉ phương có:

✓ Phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

✓ Phương trình chính tắc:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} (a \neq 0, b \neq 0)$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong mặt phẳng Oxyz

### 2. Phương trình tổng quát của đường thẳng:

- ✓ Phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$ , nhận  $\vec{n} = (A; B)$  làm vectơ pháp tuyến là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

- ✓ Nếu đường thẳng  $d$  có phương trình tổng quát  $Ax + By + C = 0$ , thì vectơ pháp tuyến của  $(d)$  là  $\vec{n} = (A; B)$ .
- ✓ Nếu đường thẳng  $d$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (A; B)$  thì  $d$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = (-B; A)$  hay  $\vec{u} = (B; -A)$
- ✓ Nếu đường thẳng  $d$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (a; b)$  thì  $d$  có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (-b; a)$  hay  $\vec{n} = (b; -a)$
- ✓ Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tổng quát  $Ax + By + C = 0$ :
  - Nếu  $d'$  song song với  $d$  thì  $d'$  có phương trình là  $Ax + By + m = 0$  ( $m \neq C$ )
  - Nếu  $d'$  vuông góc với  $d$  thì  $d'$  có phương trình là  $-Bx + Ay + m = 0$

### 3. Phương trình đường thẳng qua 1 điểm và có hệ số góc cho trước: Phương trình đường thẳng $d$ qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ , có hệ số góc $k$ là:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

### 4. Các dạng toán viết phương trình đường thẳng:

- Để lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng  $\Delta$  ta cần xác định **một điểm**  $M_0(x_0; y_0) \in \Delta$  và **một VTCP**  $\vec{u} = (a; b)$  của  $\Delta$ .

$$\text{PTTS của } \Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

PTCT của  $\Delta$ :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (a, b \neq 0)$$

- Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  ta cần xác định **một điểm**  $M_0(x_0; y_0) \in \Delta$  và **một VTPT**  $\vec{n} = (A; B)$  của  $\Delta$ .

$$\text{PTTQ của } \Delta: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

#### Dạng 1:

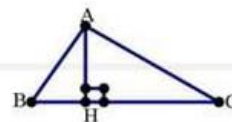
Phương trình đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A, B$ :



$$AB: \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{VTCP } \vec{u} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n} \end{cases}$$

#### Dạng 2:

Viết phương trình đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ .



$$AH: \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{VTPT } \vec{n} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong mặt phẳng Oxyz

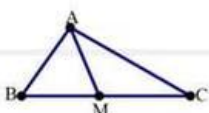
### Dạng 3:

Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

Vì M là trung điểm của BC nên

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$$

$$AM: \begin{cases} \text{Qua A} \\ VTCP \vec{u} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow VTPT \vec{n} \end{cases}$$



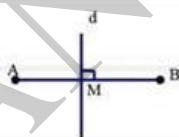
### Dạng 4:

Viết phương trình đường trung trực của AB.

Gọi M là trung điểm AB

$$\Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$d: \begin{cases} \text{Qua M} \\ VTPT \vec{n} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$$



### V. Vị trí tương đối giữa

hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ và}$$

$$\Delta_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Toạ độ giao điểm của  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

-  $\Delta_1$  cắt  $\Delta_2 \Leftrightarrow$  hệ (1) có một nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ (nếu } A_2, B_2, C_2 \neq 0)$$

-  $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow$  hệ (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ (nếu } A_2, B_2, C_2 \neq 0)$$

-  $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$  hệ (1) có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \text{ (nếu } A_2, B_2, C_2 \neq 0)$$

☞ **Đặc biệt:**  $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

### VI. Vị trí tương đối của

hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng  $\Delta: Ax + By + C = 0$

và hai điểm  $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N) \notin \Delta$ .

✓ M, N nằm cùng phía đối với  $\Delta$

$$\Leftrightarrow (Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) > 0.$$

✓ M, N nằm khác phía đối với  $\Delta$

$$\Leftrightarrow (Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) < 0.$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong mặt phẳng Oxyz

### VII. Góc giữa hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$\Delta_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

### VIII. Khoảng cách từ một

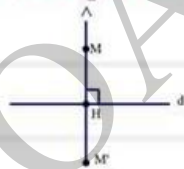
điểm đến một đường thẳng:

Cho  $M_0(x_0; y_0)$  và  $\Delta: Ax + By + C = 0$

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

### IX. Tìm hình chiếu và điểm đối

xứng của một điểm qua một đường thẳng



Để tìm điểm H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d, ta thực hiện như sau:

- ✓ Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua M và vuông góc với d, bằng cách:

$$\Delta: \begin{cases} \text{Qua } M \\ VTCP \vec{u}_\Delta = VTPT \vec{n}_d \end{cases}$$

- ✓ Khi đó  $H = d \cap \Delta$

Nếu bài toán yêu cầu tìm  $M'$  đối xứng với M qua d, ta có H là trung điểm của  $MM'$  nên:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \end{cases}$$

### X. Phương trình đường tròn

trong mặt phẳng

- ✓ **Dạng 1:** Đường tròn tâm I(a;b) bán kính

$$R: (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (*)$$

- ✓ **Dạng 2:** Cho phương trình

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (*)$$

Nếu  $a^2 + b^2 - c > 0$  thì (\*) là phương trình đường tròn tâm I(a;b) bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

### XI. Các dạng toán viết

phương trình đường tròn

Để lập phương trình đường tròn (C) ta thường cần phải xác định tâm I(a; b) và bán kính R của (C). Khi đó phương trình đường tròn (C) là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$



# Tổng hợp kiến thức Toán

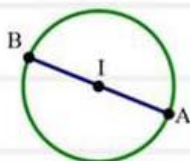
## Hình học giải tích trong mặt phẳng Oxyz

**Dạng 1:** (C) có tâm I và đi qua điểm A.



- Bán kính  $R = IA$ .

**Dạng 2:** (C) có đường kính AB.



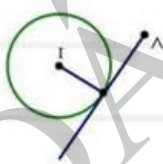
- Tâm I là trung điểm của AB

$$\Rightarrow I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

- Bán kính R

$$= \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2}$$

**Dạng 3:** (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta$ .



- Bán kính  $R = d(I, \Delta)$ .

**Dạng 4:** (C) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (đường tròn ngoại tiếp tam giác).

- Phương trình của (C) có dạng:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad (*)$$

- Lần lượt thay tọa độ của A, B, C vào (\*) ta được hệ phương trình.

- Giải hệ phương trình này ta tìm được a, b, c  $\Rightarrow$  phương trình của (C).

**Dạng 5:** (C) đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng  $\Delta$ .

- Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.

- Xác định tâm I là giao điểm của d và  $\Delta$ .

- Bán kính  $R = IA$ .

**Dạng 6:** (C) tiếp xúc với hai đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2$  và có tâm nằm trên đường thẳng d.

- Tâm I của (C) thỏa mãn:

$$\begin{cases} d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \\ I \in d \end{cases}$$

- Bán kính  $R = d(I, \Delta_1)$ .

**Dạng 7:** (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta$ .

- Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.

$$\begin{cases} I \in d \\ d(I, \Delta) = IA \end{cases}$$

- Bán kính  $R = IA$ .

**Dạng 8:** (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta$  tại điểm B.

- Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.

- Viết phương trình đường thẳng  $\Delta'$  đi qua B và vuông góc với  $\Delta$ .

- Xác định tâm I là giao điểm của d và  $\Delta'$ .

- Bán kính  $R = IA$ .



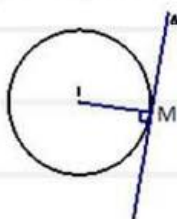
# Tổng hợp kiến thức Toán

## Hình học giải tích trong mặt phẳng Oxyz

### XII. Các dạng toán viết

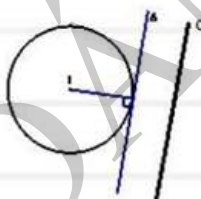
phương trình tiếp tuyến của đường tròn

**Dạng 1:** Tiếp tuyến của đường tròn tại 1 điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc đường tròn.



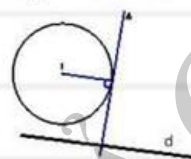
$$\Delta: \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{Vtpt } \vec{n}_\Delta = \overrightarrow{IM} \end{cases}$$

✓ **Dạng 2:** Tiếp tuyến song song với đường thẳng  $d: Ax + By + C = 0$



- Giả sử  $\Delta$  là tiếp tuyến của đường tròn.
- Vì  $\Delta // d$  nên phương trình của  $\Delta: Ax + By + m = 0 (m \neq C)$
- $\Delta$  là tiếp tuyến với  $(C) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \rightarrow$  Tìm m

✓ **Dạng 3:** Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $d: Ax + By + C = 0$



- Giả sử  $\Delta$  là tiếp tuyến của đường tròn.
- Vì  $\Delta \perp d$  nên phương trình của  $\Delta: -Bx + Ay + m = 0$
- $\Delta$  là tiếp tuyến với  $(C) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \rightarrow$  Tìm m

✓ **Dạng 4:** Tiếp tuyến đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$



- Giả sử  $\Delta$  là tiếp tuyến qua M và có hệ số góc k.
- $\Delta: y = k(x - x_0) + y_0$
- $\Delta$  là tiếp xúc với  $(C)$  nên  $d(I, \Delta) = R \rightarrow$  Tìm k

**Lưu ý:** Nếu không tìm được 2 tiếp tuyến thì phải xét đường thẳng  $\Delta: x = x_0$  (là đường thẳng qua M và không có hệ số góc)

Kiểm tra điều kiện tiếp xúc  $d(I, \Delta) = R$