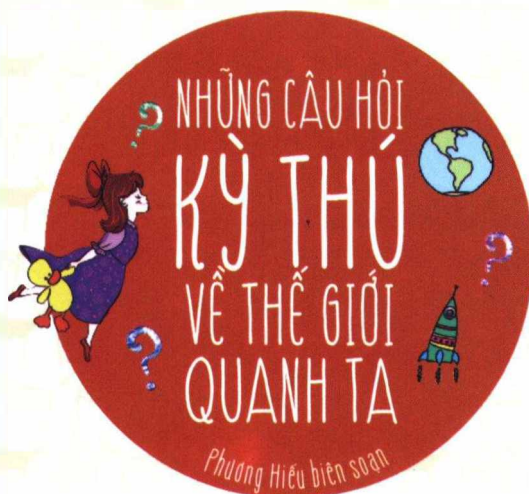


NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG

NHỮNG CÂU HỎI KỲ THÚ  
VỀ THẾ GIỚI QUANH TA  
BÍ MẬT TOÁN HỌC

---

**Biên mục trên xuất bản phẩm của Thư viện Quốc gia Việt Nam**

Phương Hiếu

Bí mật toán học / Phương Hiếu b.s. - Tái bản. - H. : Lao động, 2015.  
- 167tr. ; 23cm. - (Những câu hỏi kì thú về thế giới quanh ta)

1. Toán học 2. Khoa học thường thức 3. Sách thường thức  
510 - dc23

LDH0073p-CIP

NHỮNG CÂU HỎI KỲ THÚ  
VỀ THẾ GIỚI QUANH TA



BÍ MẬT TOÁN HỌC

*Phương Hiếu biên soạn*

NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG  
HÀ NỘI - 2015



## Lời mở đầu

*Thế kỉ XX là thế kỉ có rất nhiều phát hiện khoa học và phát minh kĩ thuật. Việc phát minh ra máy bay, công nghiệp sản xuất ô tô, phát triển trên quy mô lớn, việc xây dựng những con đường cao tốc... đã thu hẹp rất lớn khoảng cách giữa các quốc gia và khu vực. Việc phát minh ra thuốc kháng sinh, thuốc vắc xin tiêm chủng cho nhiều loại bệnh đã giúp con người loại bỏ những căn bệnh truyền nhiễm, đe dọa sinh mệnh con người từ hàng ngàn năm nay.*

*Việc phát minh và phổ cập máy điều hòa không khí, máy giặt, tủ lạnh, ti vi... đã cải thiện và đem lại rất nhiều thuận lợi cho cuộc sống vật chất của con người. Việc phát minh ra điện thoại, điện thoại di động, sự xuất hiện của mạng Internet đã giúp hiện thực hoá nguyện vọng tốt đẹp "bốn phương trời là bạn tri âm cùng kẻ vai sát cánh" của con người. Việc hoàn thành công trình bản đồ gen, sự xuất hiện của kĩ thuật nhân bản đã mở rộng hơn nữa kiến thức của con người về thân thể mình. Các chuyến bay của tàu vũ trụ, việc xây dựng trạm không gian đã giúp con người vươn rộng tầm mắt và xa hơn nữa trong vũ trụ bao la... Tất cả những điều ấy không những thay đổi phương thức sản xuất, thay đổi lối sống của loài người, thay đổi kết cấu nền kinh tế mà còn thay đổi toàn bộ nhận thức của con người về thế giới khách quan, xây dựng nên một nền tảng lí luận khoa học hoàn toàn mới. Xét trên một phương diện nào đó, quy mô sản xuất và sự phát triển của khoa học kĩ thuật trong 100 năm của thế kỉ XX đã vượt qua sự phát triển trong hàng ngàn năm lịch sử của con người, tính từ khi con người phát minh ra chữ viết. Nhưng đồng thời chúng cũng đem lại một hậu quả nghiêm trọng như mất cân bằng sinh thái, nhiều loài sinh vật bị diệt chủng, ô nhiễm môi trường... Cuối cùng loài người cũng đã nhận thức được rằng nếu khai thác vô độ, tàn phá tự*

*nhiên thì con người sẽ bị tự nhiên trừng phạt. Chỉ có thể cư xử hài hoà với tự nhiên con người mới đạt được mục tiêu phát triển lâu bền của mình, vừa không làm hại môi trường, vừa không gây nguy hiểm tới cuộc sống của mình và sự phát triển của các thế hệ sau này.*

*Thế kỉ XXI sẽ là thế kỉ khoa học kĩ thuật tiếp tục phát triển mạnh mẽ và nền kinh tế tri thức được toàn cầu hóa rộng rãi. Những ngành khoa học có kĩ thuật cao và là nền tảng cho khoa học hiện đại như kĩ thuật tin học, khoa học về tuổi thọ của con người và bản đồ gen sẽ có bước đột phá và sự phát triển mới.*

*Sau ba mươi năm cải cách đổi mới, nền khoa học kĩ thuật, quy mô nền kinh tế đã có những sự thay đổi và tiến bộ lớn lao; Lấy giáo dục để đưa đất nước đi lên, lấy khoa học kĩ thuật chấn hưng đất nước, đó là lí tưởng và sự nghiệp mà chúng ta luôn phấn đấu theo đuổi. Việc hiện thực hóa lí tưởng và phát triển sự nghiệp ấy không chỉ dựa vào sự nỗ lực của thế hệ hôm nay mà hơn nữa còn là trọng trách của thế hệ kế tiếp bởi vì chính họ mới là chủ nhân thực sự của đất nước, chủ nhân thực sự của thế giới trong thế kỉ XXI. Xét theo ý nghĩa này, dẫn dắt và bồi dưỡng thanh thiếu niên học tập các môn khoa học, yêu khoa học và có hứng thú với khoa học; phổ cập kịp thời những tri thức khoa học kĩ thuật mới, bồi dưỡng tinh thần khoa học, phương pháp nắm vững tri thức khoa học không chỉ là nhiệm vụ và nội dung quan trọng giảng dạy trong các nhà trường mà còn cần phải có sự quan tâm, coi trọng của toàn xã hội.*

*Bộ sách Những câu hỏi kì thú về thế giới quanh ta - dành cho thiếu niên đã cố gắng giới thiệu nhiều tri thức và nhiều kiến giải mới trong nghiên cứu khoa học của các ngành khoa học đương đại; lời văn trong sách giản dị, dễ hiểu. Chúng tôi tin chắc rằng cuốn sách này sẽ giành được sự yêu thích của các bạn đọc.*

# Bạn có biết nguồn gốc của cách đếm không?

Bạn có biết cách đếm 1, 2, 3.... như chúng ta hiện nay ra đời như thế nào không? Nó ra đời từ khi nào? Bởi vì thời kỳ nó ra đời đã rất lâu rồi, nên cơ bản không có cách nào khảo chứng chính xác được. Thế nhưng có một điểm có thể khẳng định, đó là: khái niệm về cách đếm và phương pháp đếm số đã ra đời và phát triển từ trước khi chữ viết ra đời. Các nhà khảo cổ đã chứng minh rằng, từ 5 vạn năm trước, con người đã sử dụng một số phương pháp đếm để thực hiện cách đếm số.

Con người ở thời kỳ nguyên thủy, hàng ngày phải đi săn bắn và hái lượm những quả dại để duy trì sự sinh tồn. Có khi họ thu hoạch được rất nhiều sau mỗi lần như vậy, thế nhưng nhiều khi cũng tay không trở về, thực phẩm mang về khi ăn không hết, khi lại không đủ no. Những thay đổi về số và lượng như vậy trong cuộc sống khiến cho con người dần dần sản sinh ý thức về sự đếm. Họ muốn hiểu được sự khác biệt giữa "có" và "không", giữa "nhiều" và "ít" và sự khác biệt giữa "một" và "nhiều". Hơn nữa cùng với sự phát triển của xã hội, phương pháp đếm giản đơn cũng không thể không ra đời, ví dụ một bộ lạc muốn biết họ có bao nhiêu thành viên, hoặc có bao nhiêu kẻ thù, ngay cả một cá nhân cũng muốn biết số dê trong chuồng có đủ hay thiếu...

Vậy con người của các dân tộc, các khu vực khác nhau đếm như thế nào? Khảo cổ học cho thấy, con người khi đếm, mặc dù không hề có liên hệ với nhau nhưng người ta đều dùng phương pháp "đối ứng một - một". Ví dụ, người Anh Diêng ở châu Mỹ tính số lượng kẻ thù họ giết được bằng cách thu thập từng cái đầu của kẻ bị giết; người nguyên thủy ở châu Phi đếm số lượng thú họ săn được bằng cách đếm số răng thú mà họ tích lũy được; có thiếu nữ ở những bộ lạc thì quen đeo thêm những chiếc vòng đồng trên cổ để tính tuổi mình. Các phương pháp này đều là dùng cái nọ để đếm cái kia "đối ứng một - một".

Cùng với nhu cầu giao lưu của xã hội, đã xuất hiện hiện tượng dùng ngôn ngữ để biểu đạt số lượng nhất định, người ta dùng ký hiệu để ghi lại kết quả tính toán, gọi là ghi số. Hơn 3000 năm trước vào thời Thương

ở Trung Quốc đã có các ký hiệu để ghi số, ví dụ số 1 dùng một vạch biểu thị, số 2 dùng hai vạch, số 3 dùng ba vạch, số 4 dùng bốn vạch... Những ký hiệu này về sau dần biến thành những chữ số trong tiếng Hán. Một ví dụ khác, người ở một bộ lạc Nam Mỹ dùng "ngón tay giữa" để biểu thị số 3, họ nói "ngày thứ ba" thành "ngày ngón giữa".

Ngày nay chúng ta sử dụng các số Ả Rập 1, 2, 3, 4.... do người Ấn Độ phát minh ra khoảng thế kỷ thứ 3 Trước Công Nguyên, những con số này truyền đến các nước Ả Rập, người Ả Rập lại truyền tới châu Âu. Trải qua quá trình thay đổi, cuối cùng có hình dạng như chúng ta sử dụng ngày nay.

## Ý nghĩa của số 0 có phải là không có?

Khi đi học, điều mà chúng ta học đầu tiên là những bài học về phép tính, làm quen với số 0. Và có lẽ nó là con số nhỏ nhất mà bạn biết được lúc đó. Số 0 có nghĩa là gì? Nếu như bạn dùng tay để đếm số bút trong hộp bút, 1 biểu thị có một chiếc bút, 2 là có hai chiếc bút, vậy 0 nghĩa là chẳng có chiếc bút nào. Ý nghĩa của 0 là không có. Nếu như bạn học phép tính trừ thì 10 trừ 10 sẽ bằng 0, cũng tức là nó trừ hết sạch rồi, giống như có 10 quả táo mà bị một cậu bạn ăn hết, cuối cùng chẳng còn một quả nào. Xem ra thì 0 đúng là chẳng có gì.

Thông thường 0 biểu thị không có, thế nhưng ý nghĩa của nó không chỉ biểu thị sự không có, mà nó còn có những ý nghĩa khác nữa.

Trong cuộc sống thường ngày, sự nóng lạnh của thời tiết sẽ được biểu thị bằng nhiệt độ, nó sẽ thay đổi cùng với sự chuyển đổi mùa. Và ta thấy 0 độ C (độ C là đơn vị của nhiệt độ) thì có nghĩa là gì? Nó biểu thị nhiệt độ của môi trường khi nước đóng băng. Từ 0 độ C trở lên gọi là độ dương, ví dụ 17 độ dương đến 22 độ dương là nhiệt độ thích hợp nhất cho cuộc sống của chúng ta. Còn từ 0 độ C trở xuống gọi là độ âm, càng xuống thấp thì càng lạnh.

Lại ví dụ như số 0 và 1 sử dụng trong lĩnh vực máy tính thì cũng không còn là 0 và 1 trong các phép tính toán thông thường nữa. Nó biểu thị trạng thái cao thấp của điện áp, 1 là mức điện áp cao, 0 là mức điện áp thấp, hoặc ngược lại. Lúc này 0 không phải mang nghĩa "không có", mà là một khái niệm trong điện tử học.

Còn có rất nhiều ví dụ khác nói lên số 0 mang rất nhiều ý nghĩa trong cuộc sống, không chỉ biểu thị sự không có trong phép tính toán. Kỳ thực, bản thân số 0 cũng chứa đầy mâu thuẫn. Ví dụ, bất kỳ số nào cộng với 0 thì đều giữ nguyên giá trị ban đầu, thế nhưng rất nhiều số nhân với nhau chỉ cần trong đó có một số 0, thì kết quả cũng chỉ là 0 mà thôi. Như vậy chúng ta có thể thấy số 0 lợi hại như thế nào. Để giải quyết những mâu thuẫn như vậy, chúng ta phải hiểu rằng những khái niệm trong số học chỉ là tương đối, không phải là bất biến, số 0 cũng như vậy.

Số 0 trong toán học là một con số rất quan trọng, sự chuyển từ 0 đến 1 thể hiện một quá trình từ "không" đến "có", trong khi từ 1 đến 100, 1000, 10000 thì chỉ thể hiện sự nhiều lên. Mặc dù 0 biểu thị "không có", nhưng nó lại làm nền, làm cơ sở cho "có". Trong cuộc sống thì số 0 biểu thị một kiểu trạng thái nhiều hơn là một con số, trạng thái từ 0 trở xuống và trạng thái từ 0 trở lên là một tiêu chuẩn để chúng ta đối chiếu, ý nghĩa của nó thì từ "không có" chưa thể giải thích hết được.

## Số nguyên tố là gì?

Chúng ta đều biết, một số nguyên lớn hơn một, nếu như ngoài bản thân nó và 1 ra, nó không chia hết cho số nào khác nữa thì nó là số nguyên tố. Ví dụ như 2, 3, 5, 7, 11...

Vậy làm sao chúng ta có thể tìm ra được các số nguyên tố trong số các số nguyên dương (hay số tự nhiên dương)? Trong tập hợp các số tự nhiên, có bao nhiêu số nguyên tố? Cho đến nay, người ta vẫn chưa biết được, bởi vì quy luật của nó rất khó tìm, giống như là một đứa trẻ bướng bỉnh vậy, nó nấp phía đông, chạy phía tây, treu tức các nhà toán học.

Có lẽ bạn cũng đã từng nghe đến phương pháp sàng lọc của nhà toán học Eratosthenes, dùng phương pháp này có thể tìm ra các số nguyên tố rất tiện lợi. Nó giống như là sàng lấy sỏi trong cát, sàng lọc lấy những số nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên, bằng các số nguyên tố chính là được làm theo phương pháp này.

Thế nhưng, các nhà toán học không hề thoả mãn với việc dùng phương pháp này để tìm ra số nguyên tố, bởi vì nó có chút mò mẫm nhất định, bạn không thể biết trước được số nguyên tố sẽ "sàng" ra là số nào.

Điều mà các nhà toán học cần là tìm ra quy luật của số nguyên tố, để tiện nghiên cứu về nó.

Từ trong bảng các số nguyên tố, chúng ta có thể thấy chúng được phân bố như sau: từ 1 đến 1000 có 168 số nguyên tố; từ 1000 đến 2000 có 135 số; từ 2000 đến 3000 có 127 số; từ 3000 đến 4000 có 120 số; từ 4000 đến 5000 có 119 số. Khi số các số tự nhiên càng lớn thì tỉ lệ phân bố các số nguyên tố càng thưa.

Số nguyên tố đã "hoá trang" cho mình rồi lẫn khuất trong các số tự nhiên, khiến cho chúng ta rất khó nhìn ra được. Ví dụ, 101, 401, 601, 701 đều là số nguyên tố, nhưng 301 và 901 thì lại không phải. Có người thử tính như thế này:  $1^2 + 1 + 41 = 43$ ,  $2^2 + 2 + 41 = 47$ ,  $3^2 + 3 + 41 = 53, \dots, 39^2 + 39 + 41 = 1601$ . Có 39 số từ 43 cho đến 1601 đều là số nguyên tố, thế nhưng tiếp sau đó:  $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41 \times 41$  thì lại là một hợp số.

Nhà toán học người Pháp Fercma từng nghiên cứu lâu dài về số nguyên tố, ông từng đưa ra một suy đoán thế này: số  $(2^{2^n} + 1)$  (với  $n$  là số nguyên) thì nhất định là số nguyên tố. Ferma đã thử 5 "số Ferma" đầu thì đều là số nguyên tố, nhưng đến số "ferma" thứ sáu thì lại là hợp số, hơn nữa từ số "Ferma thứ 6" trở đi, không thể phát hiện thấy số nguyên tố nào nữa, toàn là hợp số. Xem ra, số nguyên tố đã cố tình trêu đùa Ferma.

Năm 1644, nhà toán học người Pháp Mason đã đưa ra "số Mason", hình thức của nó là  $(2^p - 1)$ . Khi ông còn sống, ông tìm ra 11  $p$  để cho  $(2^p - 1)$  là số nguyên tố, người ta tiến hành kiểm chứng đối với 8  $p$ , chúng đều là số nguyên tố. 250 năm sau, năm 1903, các nhà toán học tìm ra số Mason thứ 9 không phải là số nguyên tố mà là hợp số. Mặc dù Mason cũng không thực sự tìm ra quy luật của số nguyên tố, nhưng dùng phương pháp của ông, người ta tìm được nhiều số nguyên tố hơn. Trong đó, số nguyên tố Mason thứ 33 được tìm ra nhờ máy tính điện tử, nó có 378632 số hạng, là số nguyên tố lớn nhất mà loài người tìm được đến nay.

## Số chẵn và số nguyên số nào nhiều hơn?

Đọc câu hỏi này, có lẽ bạn chẳng cần phải suy nghĩ nhiều mà trả lời ngay rằng số nguyên nhiều hơn số chẵn, cái bộ phận thì làm sao có thể lớn hơn cái toàn thể. Số chẵn là các số nguyên có thể chia hết cho 2, nó



chỉ là một bộ phận trong tập hợp các số tự nhiên, ngoài số chẵn ra, số tự nhiên còn bao gồm số lẻ. Xem ra như vậy thì số chẵn sẽ không thể nhiều hơn số tự nhiên được.

Tuy nhiên, thực chất của vấn đề là muốn hỏi mối quan hệ lớn nhỏ giữa hai tập hợp số tự nhiên và số chẵn. Tập hợp xét về mặt toán học là tên gọi chung của những cá thể cùng loại. Chúng ta gom mọi số tự nhiên lại thì gọi là tập hợp các số tự nhiên, mọi số chẵn thì gọi là tập hợp số chẵn. Vậy làm sao so sánh được sự lớn nhỏ của hai tập hợp? Đối với những tập hợp hữu hạn thì số lượng các phần tử trong tập hợp sẽ quyết định độ lớn nhỏ của tập hợp đó, ví dụ tập hợp học sinh của một trường sẽ lớn hơn tập hợp học sinh của một lớp. Chính thể luôn lớn hơn 1 bộ phận của nó. Thế nhưng đối với tập hợp vô hạn thì có như vậy không?

Số lượng các phần tử trong tập hợp vô hạn là vô hạn, không thể đếm hết được. Ví dụ tập hợp số tự nhiên, tập hợp số chẵn... là những tập hợp vô hạn. Với những tập hợp vô hạn, chúng ta không thể sử dụng các phương pháp tính toán đối với tập hợp hữu hạn để so sánh lớn nhỏ. Người ta cho rằng, nếu giữa hai tập hợp vô hạn có thể tìm được mối quan hệ đối ứng 1 - 1 (tức là ứng với mỗi phần tử ở tập hợp này, ta có thể tìm được một phần tử ở tập hợp kia) thì chúng ta nói hai tập hợp đó bằng nhau. Đó chính là "lý luận về độ lớn" đối với tập hợp vô hạn.

Với 2 tập hợp số tự nhiên và số chẵn, chúng ta có thể lập ra quan hệ đối ứng như sau:

Số nguyên: ... -n - 3 - 2 - 1 0 1 2 3m ...

Số chẵn: ... -2n - 6 - 4 - 2 0 2 4 6m ...

Bạn thấy rằng, bất kỳ một số k nào trong tập hợp số nguyên ta cũng tìm được một số 2k tương ứng trong tập hợp số chẵn. Như vậy ta có mối quan hệ đối ứng 1-1 giữa hai tập hợp này.

Vì thế theo nguyên tắc so sánh độ lớn giữa hai tập hợp vô hạn, hai tập hợp số nguyên và số chẵn là bằng nhau. Kết luận này có vẻ khó hiểu đối với thói quen của chúng ta, thế nhưng quả thật nó là như vậy.

Kỳ thực không chỉ có tập hợp số nguyên và tập hợp số chẵn là bằng nhau mà có nhiều tập hợp số khác nữa cũng bằng nhau.

## Số thân thiết là gì?

Giữa bạn bè với nhau có tình hữu nghị và bạn có biết rằng giữa các con số với nhau cũng có "sự thân thiết". Một nhà toán học từng nói: "Ai là bạn tốt của tôi thì chúng tôi sẽ giống như hai con số "220 và 284". Vậy tại sao 220 và 284 lại tượng trưng cho những người bạn thân thiết?

Thì ra, 220 ngoài bản thân nó ra, nó còn có 11 ước số là 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 44, 55 và 110. Tổng của 11 ước số này vừa đúng bằng 284. Cũng vậy, 284 ngoài bản thân nó, nó còn 5 ước số khác là: 1, 2, 4, 71, 142, tổng của chúng cũng vừa đúng bằng 220. Cụ thể,  $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$  và  $1 + 2 + 4 + 71 + 72 = 220$

Hai số này, trong anh có tôi, trong tôi có anh, gắn bó thân thiết, không tách rời nhau. Các nhà toán học cổ Hy Lạp gọi những cặp số có tính chất như vậy là "số thân thiết".

220 và 284 là cặp "số thân thiết" nhỏ nhất. Thế kỷ 17, nhà toán học Pháp Fecma tìm ra cặp "số thân thiết" thứ hai là: 17296 và 18416. Cùng thời điểm ấy, một nhà toán học Pháp khác tìm ra cặp số thứ ba là: 9363544 và 9437056. Điều khiến người ta kinh ngạc nhất là nhà toán học Thụy Sĩ nổi tiếng Ô-le vào năm 1750 đã công bố một lúc 60 cặp số thân thiết. Giới toán học được một phen kinh hoàng, họ cho rằng "Ô-le đã tìm ra hết cả rồi".

Nhưng không ngờ, một thế kỷ sau, một thanh niên nước Ý mới 16 tuổi tên là Baconi đã công bố một cặp số thân thiết vào năm 1866, nó chỉ lớn hơn 220 và 284 một chút, đó là cặp số 1184 và 1210.

Cùng với sự phát triển của khoa học kĩ thuật, các nhà toán học bằng máy tính đã kiểm tra tất cả các số trong phạm vi 1.000.000, tổng cộng tìm được 42 cặp số thân thiết.

Hiện nay, số lượng cặp số thân thiết được tìm thấy đã vượt quá con số 1000. Thế nhưng liệu có phải số thân thiết là nhiều vô hạn? Chúng phân bố có quy luật không? Những vấn đề này tới nay vẫn còn bỏ ngỏ.



## Làm sao đoán được một số có thể chia hết cho 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11?

Phán đoán một số có thể chia hết cho một số khác tức là xem xem hai số sau khi chia cho nhau có phải không còn dư không. Số dư bằng không tức là hai số chia hết cho nhau. Nếu như số chia là những số tự nhiên tương đối đơn giản như: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11... thì liệu có phương pháp nào để nhanh chóng phán đoán ra kết quả chia không còn dư hay không? Ở đây tôi chỉ cho bạn một phương pháp:

(1) Phán đoán một số có chia hết cho 2 không tức là phán đoán tính chẵn lẻ của số đó. Nếu như chữ số hàng đơn vị của số đó là: 0, 2, 4, 6, 8 thì chúng chia hết cho 2. Nếu là 1, 3, 5, 7, 9 thì không thể chia hết cho 2. Ví dụ: số 28589 là số lẻ, không thể chia hết cho 2.

(2) Nếu như chữ số hàng đơn vị của một số là 0 hoặc 5 thì nó chia hết cho 5. Nếu như hai số cuối của số đó (hàng đơn vị và hàng chục) là 00, 25, 50 hoặc 75 thì nó chia hết cho 25. Ví dụ: Số 17975 chia hết cho 25.

(3) Cách để suy đoán một số chia hết cho 3 là, tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Cũng vậy, nếu tổng các chữ số của nó chia hết cho 9, thì số đó chia hết cho 9. Ví dụ: Số 174534 có các tổng chữ số của nó là:  $1 + 7 + 4 + 5 + 3 + 4 = 24$ , chia hết cho 3 nhưng không thể chia hết cho 9.

(4) Nguyên tắc suy đoán một số chia hết cho 4 là, tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục chia hết cho 4. Một số chia hết cho 8 là tổng của chữ số hàng đơn vị cộng hai lần chữ số hàng chục cộng bốn lần chữ số hàng trăm chia hết cho 8. Ví dụ: Số 1390276 có  $7 \times 2 + 6 = 20$  chia hết cho 4, nhưng  $2 \times 4 + 7 \times 2 + 6 = 28$  không thể chia hết cho 8, vì vậy số này không chia hết cho 8.

(5) Để biết một số có chia hết cho 11 không, nguyên tắc suy đoán là, số chênh lệch giữa tổng các chữ số ở vị trí lẻ (tính từ phải sang trái) và tổng các chữ số ở vị trí chẵn của nó chia hết cho 11. Ví dụ: Số 882629 có tổng các chữ số hàng lẻ là  $9 + 6 + 8 = 23$ , tổng các chữ số hàng chẵn là:  $2 + 2 + 8 = 12$ . Độ chênh lệch giữa 23 và 12 là 11, vậy số 882629 chia hết cho 11.

(6) Để phán đoán một số có chia hết cho 7 hay không thì tương đối phức tạp, trước tiên ghi xuống thứ tự các số 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2,... Sau đó lần lượt nhân các chữ số của số cần đoán (bắt đầu từ hàng đơn vị) với các chữ số đối ứng như liệt kê ở trên, sau đó cộng lại, nếu như tổng đó chia hết cho 7 thì số đó chia hết cho 7. Ví dụ số 5125764, ta có  $4 \times 1 + 6 \times 3 + 7 \times 2 - 5 - 2 \times 3 - 1 \times 2 + 5 = 28$ , chia hết cho 7, vậy số này chia hết cho 7.

Trên đây chúng tôi đã giới thiệu các nguyên tắc tìm ra các số chia hết cho 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11. Vậy làm sao có thể suy đoán được một số có thể chia hết cho 6 hay không? Quy luật rất đơn giản, nếu như nó có thể đồng thời chia hết cho 2 và 3 thì nó sẽ chia hết cho 6.

## Đuôi của một cấp số nhân có bao nhiêu số 0?

Bạn có thể nói cho tôi biết đuôi của phép nhân  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 1999 \times 2000$  có bao nhiêu số 0 hay không? (các số 0 ở giữa không tính)

Nếu như cứ nhân lần lượt từ 1 cho đến 2000 thì con số này quá lớn, chúng ta sẽ khó có thể tính ra với cách tính thông thường như vậy. Ngay cả dùng máy tính cũng không được vì các chữ số ở máy tính là có hạn, một số lớn như vậy sẽ vượt quá giới hạn tính toán của nó. Vậy phải làm sao đây?

Xem ra thì biện pháp phải tìm chính xác đặc điểm trong dãy số đó mà thôi.

Trước tiên chúng ta hãy xem  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ , cuối của số này chỉ có một số 0. Quan sát kỹ hơn một chút ta thấy, trong nhóm số này chỉ có tích của 2 và 5 là làm xuất hiện số 0 mà thôi.

Có người sẽ hỏi rằng  $4 \times 25 = 100$  chẳng phải làm xuất hiện 2 số 0 hay sao? Đúng vậy, thế nhưng  $4 \times 25 = 2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2$ . Như vậy có thể thấy rằng chính  $2 \times 5$  là thủ phạm.

Chúng ta hãy sử dụng những phân tích trên để áp dụng giải quyết bài toán xem sao. Trong biểu thức nhân trên ta thấy, số nhân từ 2 nhiều hơn số nhân từ 5, vì vậy ta suy đoán vấn đề mấu chốt là ở số lượng số 5 trong dãy số.

Dưới đây chúng ta thử xem trong dãy số trên có bao nhiêu nhân tử 5.

Trước tiên hãy xét số 5 đơn nhất, ta có 2000 chia cho 5 bằng 400. Lại tiếp tục với số  $5^2 (= 25)$ , 2000 chia cho  $5^2$  bằng 80. Với  $5^3 (=125)$  và  $5^4 (=625)$ , kết quả lần lượt là 16 và 3. Như vậy chúng ta có thể lập tức đoán được trong dãy tích số rất dài này, tổng cộng đuôi của nó có:  $400 + 80 + 16 + 3 = 499$  con số 0

## Các cặp số nguyên tố sinh đôi có phải là nhiều vô cùng không?

Hai đứa trẻ sinh từ một bào thai, người ta gọi là anh em sinh đôi. Bạn có biết không, số nguyên tố cũng có anh em sinh đôi. Các nhà toán học gọi hai số nguyên tố hơn kém nhau hai đơn vị là "số nguyên tố sinh đôi", hoặc "số nguyên tố song sinh".

Vậy số nguyên tố sinh đôi có bao nhiêu cặp? Ví dụ: 3 và 5, 5 và 7, 11 và 13, 17 và 19, 29 và 31... đều là các cặp số nguyên tố sinh đôi, lớn hơn nữa còn có cặp 101 và 103, 10016957 và 10016959. Các nhà toán học thống kê trong phạm vi 1.000 có 35 cặp số sinh đôi, trong phạm vi 10.000 có 205 cặp trong phạm vi 100.000.000 có 440312 cặp. Xem ra thì các cặp số nguyên tố sinh đôi quá là không ít.

Vậy số lượng các cặp số nguyên tố sinh đôi liệu có nhiều vô cùng không? Vấn đề này đã thu hút rất nhiều người nghiên cứu, nhưng đến nay cũng chưa có kết luận cuối cùng.

Ngay từ thế đầu thế kỷ 20 nhà toán học người Đức Landau đã suy đoán rằng, số lượng số nguyên tố sinh đôi là nhiều vô cùng, thực tế cũng đã ủng hộ lời suy đoán của Landau, thế nhưng vẫn không chứng minh được về mặt toán học. Về sau một nhà toán học đã nghĩ ra một "tuyệt chiêu ". Ông lấy tổng của các số nghịch đảo của các cặp số nguyên tố sinh đôi, đặt tổng này là B, vậy  $B = (1/3 + 1/5) + (1/5 + 1/7) + (1/11 + 1/13) + \dots$ , nhà toán học nghĩ rằng, nếu như có thể chứng minh được B lớn hơn bất kỳ số nào thì cũng đồng nghĩa với việc chứng minh được rằng, các cặp số nguyên tố sinh đôi là vô cùng. Phương pháp nhà toán học rất tuyệt, thế nhưng đáng tiếc rằng B được chứng minh là một số hữu hạn.

"Có nhiều vô cùng các cặp số nguyên tố sinh đôi", giả thiết này cho đến nay vẫn là một bí mật, hơn nữa ngay cả quy luật phân bố của các cặp số nguyên tố này các nhà toán học cũng chưa tìm ra.

Ngoài số nguyên tố sinh đôi còn có số nguyên tố sinh 3, nếu như 3 số nguyên tố A, B, C, trong đó B lớn hơn A hai đơn vị, C lại lớn hơn B bốn đơn vị thì ta gọi 3 số nguyên tố đó là số nguyên tố sinh 3. Ví dụ: 5, 7, 11; 11, 13, 17 ; 17, 19, 23; 101, 103, 107 đều là các cặp số nguyên tố sinh 3.

Số nguyên tố sinh 3 liệu có phải là nhiều vô cùng hay không? Điều này còn cần sự nghiên cứu hơn nữa của các nhà toán học.

## Bạn có biết số ngược là gì không?

Thông thường đọc số chúng ta đều đọc số từ trái sang phải. Nếu như đọc từ phải sang trái chúng ta sẽ được một số mới. Ví dụ: Số 1281 nếu đọc từ phải sang trái sẽ được số 1821. Chúng ta gọi số 1821 là số phản trật tự hay số ngược của số 1281. Có những số, ví dụ như 72127 thì số ngược của nó chính là bản thân nó. Lại ví dụ số 2222 thì số ngược của nó cũng chính là nó. Trừ những tình huống đặc thù, thông thường một số và số ngược của nó không nhất định giống nhau. Thế nhưng số lượng các số hạng của chúng nhất định phải như nhau, Ví dụ số 4321 và số 1234 đều có 4 số hạng.

Có một số có 4 số hạng rất kỳ diệu, sau khi nhân với 9 thì kết quả chính là số ngược của nó. Bạn có biết làm thế nào để tìm số này không?

Trước tiên số hàng ngàn của số 4 chữ số này chỉ có thể là 1, bởi vì nếu nó lớn hơn 1 thì sau khi nhân với 9 nó có nhiều số hạng hơn. Vì vậy, dạng của số này sẽ là 1abc. Chúng ta có thể lập ra đẳng thức sau:

$$1abc \times 9 = 9ba1$$

Trong đó, 9ba1 là số ngược của 1abc, vì vậy  $c = 9$ . Số lúc đầu bây giờ là 1ab9, như vậy đẳng thức trên có thể chuyển thành:

$$(1 \times 10^3 + a \times 10^2 + b \times 10 + 9) \times 9 = 9 \times 10^3 + b \times 10^2 + a \times 10 + 1, \text{ rút gọn ta được: } 89a + 8 = b.$$

Bởi vì a, b chỉ có thể là các số trong phạm vi từ 0 đến 9, vì vậy a chỉ có thể là 0 tương ứng với b bằng 8.

Vì vậy số có bốn số hạng này là số 1089.

Nếu như có hùmg thú bạn có thể thử xem liệu có số ba chữ số nào hoặc số năm chữ số nào có đủ điều kiện như trên không.

Trong thực tế cuộc sống số ngược có rất nhiều ứng dụng. Ví dụ như trong việc lập các mật mã. Nếu như chúng ta cần phát đi một thông tin số, trong quá trình mã hoá có thể sử dụng nguyên tắc số ngược để giữ bí mật thông tin. Tất nhiên việc mã hoá trong thực tế sẽ phức tạp hơn nhiều, nhưng nguyên tắc số ngược cũng tạo ra nền tảng của khoa học mã hoá số liệu.

## **Bạn có biết "Số khuyết 8" kì diệu như thế nào không?**

Có một con số thần kỳ đó là số 12345679, số này khuyết mất số 8.

Con số này rất nhiều điều kỳ diệu, chúng ta hãy thử xem xem sự kì diệu này ra sao.

Nếu như lấy các bội số của 9 (như 9, 18, 27... cho đến 81) lần lượt nhân với số khuyết 8 thì các số 11111111, 22222222,... cho đến 99999999 sẽ lần lượt xuất hiện.

Nếu như lấy bội số của 3 nhân với số khuyết 8 thì tích số sẽ trùng lặp cứ ba số hạng một. Ví dụ:

$$12345679 \times 12 = 148148148$$

$$12345679 \times 21 = 259259259$$

$$12345679 \times 24 = 296296296$$

Khi số nhân không phải bội số của 3 chúng ta vẫn có thể thấy được những tính chất kỳ lạ. Các số hạng của tích số đều khác nhau, khuyết số gì đều có quy luật rõ ràng, nhưng khuyết 3, khuyết 6, khuyết 9 thì khẳng định không bao giờ xuất hiện.

Chúng ta hãy xem một chút tình hình khi số nhân nằm trong phạm vi từ 10 đến 17, trừ 2 số là bội số của 3 là 12 và 15.

$$12345679 \times 10 = 123456790 \text{ (khuyết 8)}$$

$$12345679 \times 11 = 135802469 \text{ (khuyết 7)}$$

$$12345679 \times 13 = 160493827 \text{ (khuyết 5)}$$

$$12345679 \times 14 = 172839506 \text{ (khuyết 4)}$$

$$12345679 \times 16 = 197530864 \text{ (khuyết 2)}$$

$$12345679 \times 17 = 209876543 \text{ (khuyết 1)}$$

Khi số nhân từ 19 đến 26 và nằm trong các khoảng khác (độ dài khoảng là 7) thì tình hình hoàn toàn tương tự như trên. Các bạn có thể tự mình tính ra.

Khi số nhân là bội số của 9 cộng 1, thì tích của nó sẽ xuất hiện hiện tượng "đèn kéo quân", các chữ số trong tích khác nhau, hơn nữa lại lặp lại mang tính chu kỳ. Ví dụ:

$$12345679 \times 28 = 345679012$$

$$12345679 \times 19 = 234567901$$

Còn rất nhiều điều kỳ diệu ở chữ số khuyết 8 mà không thể kể hết được và cũng chờ bạn khám phá.

## **Bạn có biết cách chuyển số thập phân vô hạn tuần hoàn thành phân số không?**

Bất kỳ số thập phân nào nếu như các số hạng đằng sau dấu phẩy là có hạn thì là số thập phân hữu hạn, ví dụ  $1/2 = 0,5$ ;  $1/4 = 0,25$ . Còn có một loại khác là số thập phân vô hạn, số lượng số hạng sau dấu phẩy của nó là vô hạn, ví dụ như  $1/3 = 0,3333\dots$ ;  $23/99 = 0,232323\dots$

Số pi = 3,141592625....

Trong các số thập phân vô hạn có một dạng đặc thù gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn. Ví dụ:  $23/99 = 0,232323$ , chữ số 23 liên tục xuất hiện nhiều lần theo kiểu tuần hoàn.

Để chuyển một số thập phân hữu hạn thành phân số là chuyện tương đối đơn giản, chỉ cần đem những số đằng sau dấu phẩy làm tử số. Mẫu số là 1 và n số 0 (với n là số lượng các chữ số đằng sau dấu phẩy). Ví dụ:  $0,9864 = 9864/10000$ ;  $0,76 = 76/100$ . Như vậy là tương đối đơn giản.

Vậy làm sao để chuyển một số thập phân vô hạn tuần hoàn thành phân số? Liệu có quy luật nào không? Quả thực cũng có một quy luật đơn giản. Trước tiên chúng ta xem một số ví dụ sau:

$$0,3333... = 1/3 = 3/9$$

$$0,212121... = 7/33 = 21/99$$

$$0,324324324... = 36/111 = 324/999$$

Bạn đã nhìn ra chưa khi 3 số thập phân vô hạn tuần hoàn này chuyển thành phân số thì đều là tử số mang tính tuần hoàn còn mẫu số là 9, 99 hoặc 999 trong đó số lượng con số 9 chính là số lượng của nhóm số tuần hoàn. Ví dụ: Số  $0,212121...$  nhóm số tuần hoàn là 21 như vậy tử số sẽ là 21, nhóm số tuần hoàn có 2 số. Vậy mẫu số sẽ có 2 số 9, tức là 99. Vì vậy, phân thức của  $0,212121...$  là  $21/99$ . Đó chính là quy luật chuyển số thập phân vô hạn tuần hoàn thành phân số.

Như vậy có phải là đơn giản không?

Số thập phân vô hạn tuần hoàn kiểu như  $0,212121...$  gọi là số thập phân tuần hoàn thuần, bởi vì nhóm số tuần hoàn của nó vừa nhìn là có thể thấy ngay.

Nhưng cũng có những số thập phân là hỗn hợp của một số thập phân hữu hạn và một số thập phân vô hạn tuần hoàn thuần, chúng ta không thể vừa nhìn là nhận ra được. Những số như vậy gọi là số thập phân tuần hoàn hỗn hợp. Gặp phải số thập phân này, trước tiên chúng ta cần tách phần thập phân hữu hạn và phần thập phân vô hạn tuần hoàn ra, sau đó lần lượt chuyển nó thành phân số rồi cộng chúng vào với nhau.

$$\text{Ví dụ: Số } 3,14212121... = 3,14 + 0,2121.../100$$

$$= 3,14 + 21/99 \times 1/100$$

$$= 314/100 + 7/3300$$

$$= 10369/3300$$

Bạn hãy thử chuyển các số thập phân dưới đây thành phân số, nhớ sử dụng các phương pháp kể trên xem kết quả có đúng không nhé.

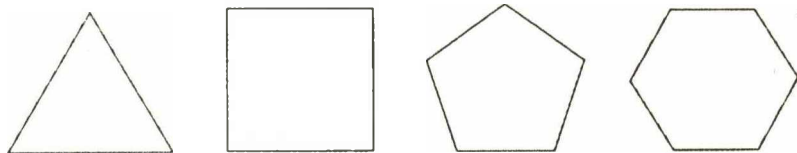
$1,42272727...; 0,00313131...; 2,043521521521...$  Đáp án của chúng là  $313/220; 31/9900; 1020739/499500$ . Cộng lại có đúng không nhé?



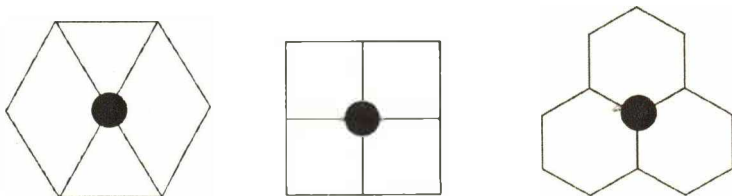
## Tại sao hình dạng của gạch đa phần là vuông hoặc lục giác đều?

Bạn đã bao giờ lưu tâm quan sát hình dạng của các viên gạch lát nhà hoặc lát hè phố chưa? Những viên gạch đó rất đẹp, chúng được làm từ xi măng, hoặc từ gốm sứ, với màu sắc sặc sỡ, nhiều hoa văn. Chúng không những che chắn đất bùn phía dưới mà còn làm đẹp đường phố, làm đẹp ngôi nhà của bạn và làm đẹp cuộc sống của chúng ta. Nhưng không biết đã bao giờ bạn để ý rằng, đa phần hình dạng các viên gạch đều là hình vuông hoặc hình lục giác đều. Vậy tại sao chúng lại không phải là hình tam giác đều, hình ngũ giác đều?

Trước tiên, chúng ta hãy làm quen một chút với những hình này.



Tại sao chúng ta lại gọi những hình như vậy là đều? Bởi vì các góc của những hình này đều bằng nhau, hay nói cách khác các cạnh của hình đều bằng nhau. Ví dụ, ba góc của tam giác đều đều bằng  $60^\circ$ , bốn góc của hình vuông đều là góc  $90^\circ$ , năm góc của hình ngũ giác đều đều là  $108^\circ$ , sáu góc của hình lục giác đều cùng là góc  $120^\circ$ .



Chúng ta hãy quan sát phương pháp mà người ta lát nền nhà. Lát gạch là phải lát kín cả bề mặt sao cho những chỗ tiếp giáp không có khe hở, nhìn phải ngay ngắn thẳng hàng. Nếu những khe hở quá rộng thì sẽ rất khó coi, có đúng không nào? Bởi vậy trong quá trình lựa chọn kiểu dáng gạch lát nền thì phải chọn loại gạch nào khi lát làm cho bề mặt kín nhất.

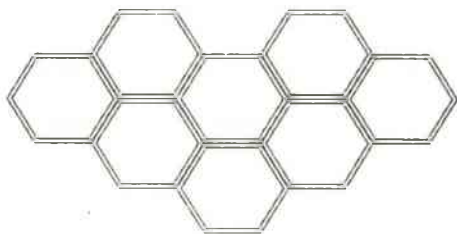
Từ những hình vẽ trên ta có thể nhận thấy bất kì một chỗ nào trên bề mặt (kể từ chỗ điểm tròn) dùng 6 viên gạch lát hình tam giác là có thể lát kín được rồi. Hãy nghĩ xem tại sao lại như vậy? Chính bởi vì tại chỗ này tổng 6 góc của 6 hình tam giác đều sẽ tương đương với  $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ , vừa đủ để lát hết chỗ này sao cho không có khe hở. Cũng với cách lí giải tương tự như vậy, khi ta dùng 4 miếng gạch lát hình vuông ghép lại với nhau tổng 4 góc ở đỉnh chung tương đương với  $90^\circ \times 4 = 360^\circ$ , đồng thời khi ta dùng 3 miếng gạch lát hình lục giác đều ghép lại với nhau thì tổng 3 góc ở đỉnh chung cũng vừa khéo  $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ . Như vậy số gạch lát nền hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều đều có thể lát kín cùng một bề mặt.

Vậy không hiểu gạch lát nền hình ngũ giác đều có thể lát kín một bề mặt hay không? Chúng ta cũng có thể dùng phương pháp như bên trên để thử tính toán xem sao. Một góc của hình ngũ giác đều là  $108^\circ$ , ghép 3 miếng gạch hình ngũ giác đều lại với nhau thì tổng của 3 góc chung đỉnh sẽ là  $108^\circ \times 3 = 324^\circ$ , nhỏ hơn  $360^\circ$ , như thế xem ra là sẽ có khe hở. Vậy dùng 4 miếng gạch hình ngũ giác đều có được hay không? Chắc chắn là không bởi vì tổng 4 góc chung đỉnh của 4 hình ngũ giác đều sẽ là  $108^\circ \times 4 = 432^\circ$ , lớn hơn  $360^\circ$ . Vậy nên gạch ngũ giác sẽ không được dùng để lát nền.

## Tại sao tổ ong có hình lục giác?

Nếu như bạn đã từng quan sát kĩ lỗ tổ ong của ong mật, bạn nhất định sẽ không khỏi ngạc nhiên mà thốt lên rằng kết cấu của chúng thật đáng là một kì tích của thế giới tự nhiên.

Nhìn từ mặt chính diện, tổ ong đều do vô vàn các hình lục giác giống nhau tạo thành và được sắp xếp vô cùng ngăn nắp, ngay ngắn. Nhìn từ mặt bên tổ ong được cấu thành từ rất nhiều hình lăng trụ xếp khít vào nhau. Nếu như bạn quan sát kĩ hơn nữa mặt đáy của các hình

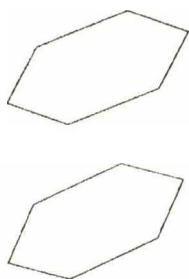


Hình vẽ mặt chính diện của tổ ong

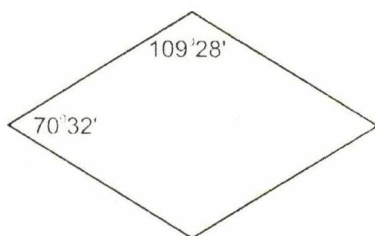
lăng trụ này bạn sẽ cảm thấy hết sức kinh ngạc vì chúng không là những hình lục giác nữa, cũng không phải mặt phẳng, cũng không phải hình tròn mà là hình nhọn, do ba hình thoi hoàn toàn giống nhau tạo thành.

Kiểu kết cấu hình lục giác kì

diệu của tổ ong từ lâu đã thu hút được sự chú ý của con người. Tại sao ong mật lại phải làm tổ của mình theo hình lục giác đều? Tại sao chúng không làm tổ theo hình tam giác hay hình vuông? Đây quả là một câu hỏi vô cùng lí thú.



Hình vẽ mặt bên của tổ ong



Hình thoi đáy nhọn

Có người đã từng nói, từ rất lâu ong mật đã biết làm tổ theo hình trụ rỗng, do ong mật cần phải làm rất nhiều các hình trụ rỗng nên khi không gian giữa các hình trụ rỗng này chịu áp lực đến từ bên phải, bên trái, đằng trước, đằng sau khiến cho hình trụ rỗng biến thành hình lục giác. Xét từ quan điểm cơ học vật lí thì kết cấu hình lục giác ổn định hơn hình trụ rỗng. Nhận định này nghe có vẻ rất có cơ sở nhưng bạn hãy thử quan sát kĩ lại một lần nữa hình dạng của tổ ong, bạn sẽ phát hiện ra một điều rằng, những hình lục giác của tổ ong liền thành một tấm. Ong mật ngay từ khi bắt đầu đã xây dựng tổ của mình theo hình lục giác rồi chứ không hề xây theo hình trụ rỗng.

Kết cấu theo kiểu hình lục giác của tổ ong rút cục là có những ưu điểm gì? Các nhà toán học cuối cùng cũng đã tìm ra được lời giải đáp hết sức mới mẻ. Đầu thế kỉ 18 Maralki người Pháp đã đo góc của đáy nhọn

hình thoi của tổ ong và đã phát hiện ra một quy luật hết sức thú vị. Đó chính là số đo mỗi góc tù của hình thoi đều là  $109^{\circ} 28'$  (đọc là 109 độ 28 phút) và số đo mỗi góc nhọn đều là  $70^{\circ} 32'$  (đọc là 70 độ 32 phút). Lẽ nào trong chuyện này có điều gì kì bí?

- Nhà vật lí người Pháp tài ba đã nghĩ rằng loại vật liệu để tạo ra tổ ong đều là sáp ong được tiết ra từ con ong mật, sáp ong vừa chịu được nhiệt lại vừa vững chắc. Bởi vì ong mật phải tiết ra rất nhiều sáp ong nên nó cũng phải ăn rất nhiều mật ong mới được. Chính bởi thế để làm nên được một tổ ong không phải là chuyện dễ dàng. Không biết có phải vì ong mật muốn tiết kiệm sáp ong nhưng lại muốn xây tổ ong của mình thật to hay không mà nó xây tổ ong thành hình lục giác như vậy.

Đây quả thực là một biện pháp tuyệt vời, anh đã hỏi ý kiến của nhà toán học Thụy Sĩ College thuộc Học viện khoa học Paris, kết quả tính toán của College đã chứng minh cho phỏng đoán của anh nhưng thật đáng tiếc góc tính ra lại là  $109^{\circ} 26'$  và  $70^{\circ} 34'$ , chênh lệch so với đo tổ ong là  $2'$ . Cho đến năm 1743, nhà toán học người Scotland Maklaughlin lại tiến hành tính toán một lần nữa, kết quả cuối cùng và góc của tổ ong hoàn toàn trùng khớp. Thì ra số liệu trên bảng Logarit mà College sử dụng đã bị in sai.

Từ cấu tạo của tổ ong mà con người đã có được kim chỉ nam. Ví dụ như nguyên liệu để sản xuất máy bay rất quý hiếm, làm thế nào để tiết kiệm được loại nguyên liệu này? Các kĩ sư ngành máy bay đã chế tạo tấm vách kiểu tổ ong của ong mật. Giữa tấm vách này có đầy các lỗ gọi là hai lớp kiểu tổ ong. Cũng tương tự như vậy, nguyên lí tổ ong được áp dụng vô cùng rộng rãi trong kiến trúc và xây dựng. Chiếc tổ ong thần kì đã tập trung biết bao trí tuệ của giới tự nhiên phong phú này.

## **Trong số tất cả các hình khép kín có chu vi tương đương, hình nào có diện tích lớn nhất?**

Trong tất cả các hình khép kín có chu vi tương đương, hình tam giác, hình vuông, hình tròn, hình nào có diện tích lớn nhất?

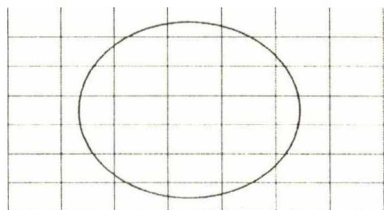
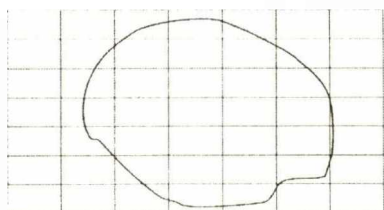
Đáp án là: Diện tích hình tròn lớn nhất.

Không biết trước đây bạn đã chú ý đến hay chưa, các chuồng bò, chuồng cừu ở trên thảo nguyên đều khoanh thành hình tròn, cũng giống như lều Mông Cổ của người dân du mục chẳng phải đều làm thành hình tròn đó hay sao? Các loại bình mà chúng ta thường dùng trong cuộc sống hàng ngày như bình nước nóng, bình xăng, ống khói lớn hay các loại bàn sử dụng trong các hội nghị thông thường cũng đều là hình tròn.

Để chứng minh "Trong tất cả các hình vẽ khép kín có chu vi bằng nhau, hình tròn có diện tích lớn nhất" thì khó hơn rất nhiều việc chứng minh "Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng nhau, hình vuông có diện tích lớn nhất". Bởi vì để tính diện tích của hình chữ nhật ta chỉ cần lấy chiều dài nhân với chiều rộng là được còn tính diện tích của hình vẽ khép kín bất kì thì không hề có một quy luật nhất định nào cả. Vậy làm thế nào để chứng minh được điều này đây?

Vào thế kỉ 19, nhà toán học người Đức Stana đã nghĩ ra một cách, ông bắn khoãn không hiểu lấy một hình vẽ bất kì không theo quy tắc sau đó chuyển thành một hình vẽ khác cùng chu vi mà có diện tích lớn hơn được hay không?

Trước tiên ông sử dụng phương pháp hình học chứng minh được trong tất cả các hình thang có chiều dài và chu vi bằng nhau, diện tích của hình thang cân luôn lớn nhất. Sau đó ông đem hình vẽ khép kín bất kì chia thành các hình thang có chiều cao bằng nhau và lại tiếp tục chia các hình thang này thành các hình thang cân nhỏ hơn cuối cùng biến chúng thành những hình tròn. Bằng cách này Stana đã từng bước biến các hình vẽ ngẫu nhiên không theo quy tắc nào thành hình tròn. Dựa vào tính toán Stana đã rút ra kết luận, trong các hình vẽ khép kín có chu vi bằng nhau thì diện tích hình tròn là lớn nhất. Phương pháp kì diệu này của ông về sau người ta gọi là "Phép biến đổi Stana". Sau này các nhà toán học trên thế giới đã dựa vào phương pháp biến đổi này để chứng minh một cách chính xác hơn.



Quả thật vấn đề này chứng minh bằng lí thuyết rất khó nhưng sử dụng phương pháp thực nghiệm thì lại vô cùng đơn giản. Bạn hãy thử lấy một sợi dây nhỏ, nối hai đầu lại với nhau tạo thành một vòng khép kín. Đây chính là một hình vẽ khép kín có chu vi xác định.

Lấy một tờ giấy và kẻ thật nhiều ô vuông ở trên đó. Đặt vòng dây lên trên tờ giấy đó sao cho vòng dây đó có hình dạng bất kì (phải là hình không theo bất kì một quy tắc nào cả). Sau đó tiến hành đếm số lượng ô vuông ở trong vòng dây. Những phần không phải là hình vuông thì ghép lại để tính. Sau đó chuyển vòng dây đó thành hình tròn và lại đếm số ô vuông có trong hình tròn xem có đúng là số lượng ô vuông có trong hình tròn nhiều hơn hay không. Số hình vuông nằm trong hình vẽ tương đương với diện tích của hình tròn. Bất kể là bạn thay đổi hình dạng của vòng dây như thế nào thì đều có thể nhận thấy rằng diện tích hình tròn là lớn nhất. Nếu còn hoài nghi bạn cũng có thể làm thử xem sao.

## **Tại sao các ống khói nhà máy đều được làm theo hình tháp tròn?**

Khi chúng ta vào các nhà máy, khu mỏ chúng ta có thể trông thấy rất nhiều ống khói, các ống khói này đều được làm theo hình trụ tròn nhưng không phải trên dưới hình trụ tròn đều to như nhau mà phía trên nhỏ hơn một chút và phía dưới sẽ to hơn một chút. Trong toán học người ta gọi hình như vậy là hình nón cụt. Vậy tại sao các ống khói đều được làm thành hình nón cụt mà không phải là hình vuông hay hình trụ? Câu hỏi này không biết đã bao giờ bạn để ý đến hay chưa?

Chúng ta cũng biết rằng, những ống khói tốt thì phải hút ra được nhiều bụi. Xét về mặt lí thuyết thì lẽ ra đường kính miệng ống khói phải làm to mới phải nhưng trên thực tế do những hạn chế của nguyên liệu làm ống khói nên chúng ta không thể làm đường kính miệng ống khói quá lớn được. Bởi thế mà con người đã nghĩ cách để làm ra những cái ống khói có miệng lớn bằng một lượng nguyên liệu nhất định.

Như vậy tại thời điểm nguyên liệu hiếm hoi như vậy thì làm ống khói theo kiểu nào để đạt được hiệu quả hút bụi cao nhất cũng tức là làm



sao cho diện tích miệng ống khói phải to nhất. Trước đây khi nghiên cứu việc "Tại sao bình nước nóng phải làm hình trụ tròn?" chúng ta cũng đã từng tìm hiểu mối quan hệ giữa chu vi và diện tích qua đó mà biết được rằng với những diện tích nhất định thì chu vi của hình tròn là nhỏ nhất, chu vi hình tam giác là lớn nhất, chu vi hình vuông là trung bình, ngược lại với những chu vi nhất định thì diện tích hình tròn có phải lớn nhất hay không thì phải xem xét thật kĩ.

Đây chính là đáp án của câu hỏi này. Khi lượng nguyên liệu cố định không thay đổi và phải dùng lượng nguyên liệu này để làm thành hình trụ tròn, hình tam giác và hình vuông có chiều cao như nhau, do diện tích hình tròn lớn hơn so với diện tích của hình tam giác và hình vuông thế nên lượng khói thải qua ống khói hình trụ tròn sẽ lớn nhất. Bởi thế các ống khói lớn đều được làm thành hình trụ tròn.

Sở dĩ phía trên của hình trụ tròn nhỏ hơn và phía dưới của hình trụ tròn lớn hơn là bởi nó có 3 ưu điểm sau đây: Thứ nhất hình trụ tròn kiểu này rất vững chắc, ống khói hình nón cụt vững chắc hơn hình trụ tròn bởi vì ống khói cao như vậy phần dưới của ống khói sẽ chịu lực rất lớn nên cần phải làm to hơn. Thứ hai, bởi vì ống khói vươn cao nên nửa trên của nó sẽ chịu sức gió rất lớn, sau khi làm thành hình nón cụt phía trên hơi nhỏ lại một chút sẽ làm giảm bớt ảnh hưởng do sức gió gây ra đối với ống khói. Thứ ba ống khói được làm thành hình nón cụt sẽ thuận tiện hơn trong việc làm sạch những mảng bám bên trên tường và trong ống khói.

Những gì chúng ta nói ở trên là nói về ống khói trong các nhà máy, nếu trong nhà bạn cũng muốn lắp một cái ống khói thì không phải cần nhắc nhiều như vậy bởi vì lượng khói thải qua các ống khói gia đình rất nhỏ nên làm thành hình tam giác hay hình vuông thì đều không có ảnh hưởng gì cả nhất là khi xây ống khói hình vuông lại thuận tiện biết bao.

## **Bóng người dưới ánh đèn đường biến hoá như thế nào?**

Chúng ta đều biết và cũng đều có kinh nghiệm về vấn đề này, đó chính là khi người đi dưới bóng đèn đường, bóng của anh ta sẽ thay đổi, có lúc to ra, có lúc nhỏ lại. Thông thường khi ta cách bóng đèn

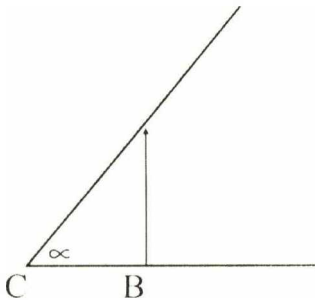


càng gần thì bóng của ta càng nhỏ và ngược lại khi cách bóng đèn càng xa thì bóng ta lại dài ra.

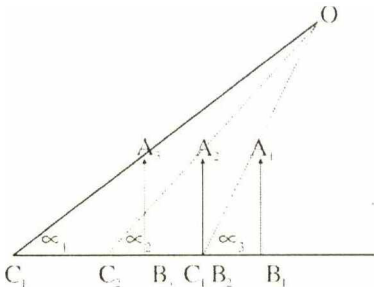
Hiện tượng mà chúng ta thường thấy trong cuộc sống hàng ngày này lại có liên quan đến toán học. Để chứng minh dễ dàng vấn đề này chúng ta hãy đơn giản hoá bóng đèn đường thành nguồn ánh sáng (nguồn ánh sáng là chỉ vật thể có thể phát quang được), lấy 1 đoạn dây AB để biểu thị người.

Hình vẽ số 1 đã biểu thị một cách rõ ràng quan hệ giữa bóng người, người và nguồn ánh sáng. Vào thời điểm mà ánh sáng do nguồn ánh sáng phát ra bị người chặn lại (bởi vì ánh sáng chỉ chiếu theo đường thẳng thế nên mới bị chặn lại) tại nơi mà bề mặt còn lưu lại một đoạn nguồn sáng chiếu không tới, đây chính là bóng của người, trong hình vẽ thì được thể hiện bằng đoạn BC, AC là đoạn ánh sáng thứ nhất bị chặn lại, chúng ta gọi là đoạn ánh sáng giới hạn. Góc giữa đoạn ánh sáng giới hạn và bề mặt  $\alpha$  (đọc là anpha) gọi là góc chiếu.

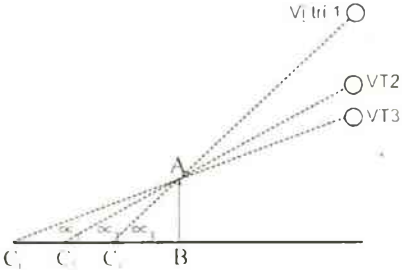
Bây giờ chúng ta hãy thử nhìn hình vẽ người khi đang di chuyển (hình vẽ số 2), bạn hãy quan sát khi AB đi từ vị trí 1 đến vị trí 2 và đi đến vị trí 3, bóng của nó cũng sẽ từ B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> di chuyển đến B<sub>3</sub>C<sub>3</sub>. Từ hình vẽ trên chúng ta có thể nhận thấy rằng B<sub>3</sub>C<sub>3</sub> là dài nhất và B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> là ngắn nhất. Có thể thấy khi nguồn ánh sáng đứng yên không chuyển động, người cách nguồn ánh sáng càng xa thì bóng người sẽ ngày một dài ra, góc chiếu  $\alpha$  càng ngày càng nhỏ. Có vẻ như là góc chiếu  $\alpha$  và sự biến đổi của bóng người có quan hệ rất mật thiết,  $\alpha$  càng nhỏ bóng người sẽ càng to và ngược lại  $\alpha$  càng to thì bóng người sẽ càng nhỏ.



Hình vẽ số 1



Hình vẽ số 2



Hình vẽ số 3

Nếu như người không chuyển động liệu nguồn ánh sáng có di động hay không? Điều này cũng giống như khi ta đứng dưới mặt trời nhìn sự chuyển động của mặt trời vậy. Nhìn hình vẽ số 3, nguồn ánh sáng đi từ vị trí 1 qua vị trí 2 rồi chuyển động đến vị trí 3. Lúc này bóng người sẽ từ BC1 biến thành BC3. Từ bản vẽ chúng ta có thể rõ ràng nhận ra BC1 lớn nhất, BC3 nhỏ nhất, điều đó cũng có nghĩa là bóng người chuyển từ lớn thành nhỏ. Khi đó sự thay đổi của góc chiếu sẽ như thế nào? Góc chiếu  $\alpha$  đang lớn dần. Đúng là góc chiếu và sự biến đổi lớn nhỏ của bóng người có quan hệ mật thiết với nhau, góc chiếu càng to thì bóng người càng nhỏ.

Trong toán học người ta sử dụng công thức tam giác để biểu thị quan hệ giữa người AB, bóng người BC và góc chiếu  $\alpha$ . Về sau dần dần các bạn sẽ học đến vấn đề này.

Công thức tam giác được sử dụng rất nhiều trong đo lường. Một cái cây to, một toà tháp cao không thể dùng thước mà đo được nên con người đã phải sử dụng công thức tam giác và từ bóng và góc chiếu của nó để tính toán ra chiều cao thực tế. Kim tự tháp cũng được đo bằng cách này.

## Khi tăng số điện thoại từ 7 con số lên 8 con số thì chúng ta đã tăng được bao nhiêu thuê bao?

Cùng với việc sử dụng điện thoại một cách phổ cập, con số của số điện thoại cũng ngày một tăng lên. Ví dụ như một trường học hay một cơ quan, mạng điện thoại nội bộ thường là có từ 3 đến 4 con số là đã đáp ứng được nhu cầu sử dụng rồi. Thông thường điện thoại cố định của mỗi gia đình đều là 7 đến 8 con số, còn số điện thoại di động là 11 con số. Bởi vì điện thoại di động có tính năng đường dài cho nên số của nó mới dài như vậy.

Ngày nay ở các thành phố lớn như Bắc Kinh, Thượng Hải, Thiên Tân, Quảng Châu ở Trung Quốc số điện thoại của cư dân đều từ 7 đến 8 chữ số. Bạn có thể nói cho tôi biết khi số điện thoại tăng thêm một chữ số thì sẽ có thêm bao nhiêu người sử dụng hay không?

Đây là một số điện thoại có 8 chữ số:

|                 |   |                |   |              |   |              |   |
|-----------------|---|----------------|---|--------------|---|--------------|---|
| 8               | 9 | 6              | 0 | 2            | 3 | 4            | 1 |
| Đơn vị thứ nhất |   | Đơn vị thứ hai |   | Đơn vị thứ 7 |   | Đơn vị thứ 8 |   |

Số điện thoại được tạo thành từ những số từ 0 đến 9. Tám vị trí điền 8 con số của số điện thoại sẽ là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 hoặc 9 nhưng trong đó con số thứ nhất (còn gọi là con số đầu tiên không thể bằng 0) bởi thế nên vị trí thứ nhất chỉ có thể điền một con số từ 1 đến 9, như vậy sẽ có 9 sự chọn lựa khác nhau. Từ vị trí thứ hai cho đến vị trí cuối cùng chúng ta không còn phải suy nghĩ đến yếu tố như của vị trí thứ nhất nữa. Bảy vị trí này có thể điền một số bất kì từ 0 đến 9 và có thể cho phép các con số này lặp lại. Như vậy mỗi vị trí đều có 10 sự chọn lựa. Vậy tổng cộng 8 vị trí này có bao nhiêu cách chọn lựa?

Chúng ta hãy thử tính toán xem:

Vị trí thứ nhất 9 cách chọn lựa, vị trí thứ hai có 10 cách chọn lựa, vị trí thứ ba 10 cách chọn lựa... và vị trí cuối cùng cũng 10 cách chọn lựa. Ta có

$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^7$ . Cùng với cách lí luận như vậy số điện thoại có 7 con số sẽ có  $9 \times 10^6$  cách chọn lựa khác nhau. Điều này có nghĩa là có  $9 \times 10^6$  số điện thoại có 7 con số.

Số khách hàng sử dụng điện thoại có 8 con số là  $9 \times 10^7$ , số khách hàng sử dụng điện thoại có 7 con số là  $9 \times 10^6$ . Như vậy chênh lệch giữa hai con số này chẳng phải chính là số người dùng tăng thêm hay sao.

Lấy  $9 \times 10^7 - 9 \times 10^6 = 81000000$ . Điều này có nghĩa là khi điện thoại từ 7 con số tăng lên 8 con số thì sẽ tăng thêm 81 triệu khách hàng.

Nhưng trên thực tế lại không phải như vậy. Có những số điện thoại được bắt đầu bằng những con số đặc biệt và được dùng vào mục đích đặc biệt, không thể sử dụng cho những khách hàng đơn thuần được. Ví dụ như 110 là số điện thoại của Công an bắt cướp, 119 là số điện thoại của Công an cứu hoả, 114 là để hỏi số điện thoại, 168 là dịch vụ giải đáp thông tin... Tuy những số điện thoại kiểu này không nhiều, chỉ dùng có 3 con số nhưng cũng khiến cho những số điện thoại khác bắt đầu bằng những con số này cũng không sử dụng được. Lấy ví dụ số 110. Khi số điện thoại là 7 chữ số, những số điện thoại bắt đầu bằng 110 sẽ có  $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$  vì con số 110 đặc biệt này mà không sử dụng được. Khi số điện thoại tăng lên làm 8 con số thì sẽ có  $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000$  số điện thoại bắt đầu bằng số 110 không sử dụng được vì cùng một nguyên nhân như trên. Bởi thế mà số điện thoại sau khi tăng thêm một chữ số trên thực tế lượng thuê bao cũng không tăng được 81 triệu.

## **Bạn có thể tính được các vận động viên chạy 200m ở điểm xuất phát vòng ngoài về trước điểm xuất phát vòng trong bao nhiêu không?**

Nếu như bạn đã từng tham gia vào giải chạy 200 m điền kinh bạn nhất định sẽ biết điểm xuất phát không nằm trên cùng một đường thẳng trong khi đó thì đích lại nằm trên một đường thẳng. Tại sao lại như vậy? Bạn có thể nói rằng điều đó là đương nhiên bởi vì trên đường chạy 200 m có một khúc quanh. Nếu như điểm xuất phát và điểm đích đều giống nhau vậy thì vận động viên chạy ở vòng ngoài chẳng phải bị thiệt hại sao? Đó chính là nguyên nhân. Các vận động viên muốn cạnh tranh công bằng, họ đều phải chạy đủ 200 m trên đường chạy. Do có khúc quanh nên đường chạy ngoài bao giờ cũng dài hơn đường chạy trong một chút nhưng để đánh giá được ai nhanh ai chậm vào phút cuối, để dễ dàng tính được thời gian đến đích nên người ta mới phải làm điểm xuất phát khác nhau như vậy. Vậy thì điểm xuất phát của vòng chạy ngoài sẽ vượt trước điểm xuất phát vòng chạy trong bao nhiêu đây?

Để trả lời cho câu hỏi này trước hết chúng ta phải hiểu rõ khái niệm thế nào là số "Pi" trong hình học. Vậy Pi là gì? Đó chính là tỉ lệ giữa chu vi và đường kính của đường tròn và tỉ lệ này là cố định không đổi, nó không hề biến đổi theo kích thước lớn nhỏ của đường tròn (những số như vậy được gọi là đại lượng bất biến). Giá trị của Pi xấp xỉ 3,14. Điều này cũng có nghĩa là chu vi của đường tròn thì bằng 3,14 lần đường kính của nó. Vì đường kính lại bằng 2 lần bán kính do vậy chu vi của nó chính là  $3,14 \times 2 = 6,28$  lần bán kính. Nếu bán kính tăng thêm 1 m thì chu vi của đường tròn sẽ tương ứng tăng thêm 6.28 m. Đường chạy hình tròn của sân vận động thường là mỗi đường chạy có chiều rộng 1,2 m vì vậy theo công thức chu vi bằng  $2 \times \text{bán kính} \times \text{Pi}$  thì đường chạy vòng ngoài sẽ dài hơn đường

chạy vòng trong  $2 \times 1,2 \times 3,14 = 7,54$  m. Đường chạy 200 m không phải tất cả đều là đường vòng mà khi bắt đầu mới có một đoạn đường vòng sau đó sẽ vào đoạn đường thẳng. Tại đoạn đường vòng bán kính đường tròn của vòng trong cùng là 36 m. Nếu xét đến vận động viên chạy ở đường chạy thứ nhất đứng tại điểm xuất phát cách đường chạy trong 0,3 m thì chiều dài của đoạn đường cong sẽ là:  $(36 + 0,3) \times 3,14 = 114$  m (Tại sao lại lấy bán kính nhân với Pi chứ không lấy đường kính? Bởi vì khúc cong đó chỉ là một nửa đường tròn). Phần đường chạy thẳng sẽ là 86 m.

Bây giờ bạn đã hiểu đặc điểm của đường chạy 200 m rồi chứ? Vậy bạn hãy thử tính xem đường chạy ngoài vượt trước đường chạy trong bao nhiêu? Bởi vì chênh lệch giữa bán kính của đường chạy ngoài và đường chạy trong là 1,2 m nên mỗi điểm xuất phát của mỗi vòng bên ngoài sẽ vượt trước điểm xuất phát của vòng bên trong khoảng  $1,2 \times 3,14 = 3,77$  m.

Giả thiết trong giải chạy cự li 200 m có 6 đường chạy thì vận động viên ở vòng ngoài cùng sẽ đứng trước  $3,77 \times 5 = 18,85$  m so với vận động viên ở vòng trong cùng. Chỉ với cách này mới đảm bảo cho mỗi vận động viên đều chạy đủ 200 m, để người vòng trong không được lợi hơn và người vòng ngoài cũng không bị thiệt.

Bây giờ chúng ta đã có thể hiểu được khi người ta đo đường chạy trước mỗi đại hội thể thao chỉ cần đo đủ 200 m chiều dài của đường chạy trong cùng, sau khi xác định được điểm xuất phát rồi dựa vào đó mà dịch chuyển điểm xuất phát của mỗi đường chạy ngoài 3,77 m chứ không cần đo lần lượt từng đường chạy cho đủ 200 m.

## Từ tấm bia mộ bạn có thể tính ra được tuổi của nhà toán học không?

Thời Hi Lạp cổ có một nhà toán học, ông tên là Deaufando. Tuổi tác của ông không hề được viết trên bất kì một tài liệu nào, ngay cả những sự tích liên quan đến thân thế của ông lại càng không ai biết đến. Thế nhưng ở trên bia mộ của ông (Bia mộ là vật mà dùng để khắc tên người chết sau khi họ qua đời) lại có những thông tin liên quan đến cuộc đời ông. Tấm bia mộ này rất đặc biệt, giống như một câu đố về toán học.

Chúng ta hãy cùng xem trên tấm bia mộ đó viết những gì?

1. Người qua đường! Đây này là nơi yên nghỉ của Deaufando. Những câu đố trên bia mộ có thể giúp bạn biết được tuổi thọ của ông là bao nhiêu.

2. Một phần sáu ( $1/6$ ) cuộc đời ông là những năm ấu thơ đầy hạnh phúc.

3. Tiếp tục sống một phần mười hai cuộc đời ( $1/12$ ), trên má bắt đầu xuất hiện những sợi lông tơ.

4. Deaufando lấy vợ nhưng vẫn chưa có con cứ như vậy sống thêm một phần bảy cuộc đời ( $1/7$ ).

5. Lại thêm 5 năm nữa, ông đã có con đầu lòng nên cảm thấy rất hạnh phúc.

6. Thế nhưng số phận đã khiến cho những ngày huy hoàng hạnh phúc của đứa con ở trên trần thế chỉ bằng được một nửa so với cha nó.

7. Từ sau khi con trai chết, ông lão sống thêm 4 năm đầy đau khổ sau đó cũng già từ trần thế.

Như vậy bạn có đoán được Deaufando sống được bao nhiêu tuổi không?

Nếu như bạn chỉ tìm đáp án từ những từ ngữ giống như câu đố có trên tấm bia mộ đó thì quả thật rất khó. Thế nhưng căn cứ vào những từ ngữ đó để lập ra phương trình đại số thì câu hỏi sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Chúng ta hãy giả thiết số tuổi của Deaufando là  $X$  thì phương trình này sẽ như sau:

$$X = X/6 + X/12 + X/7 + 5 + X/2 + 4$$

Từ đó chúng ta giải ra được  $X = 84$ , điều này cũng có nghĩa là Deaufando tổng cộng sống 84 tuổi.

Vậy ông đã lấy vợ năm bao nhiêu tuổi? Căn cứ vào ý 2 và ý 3 có thể biết được ông kết hôn năm  $84/6 + 84/12 = 14 + 7 = 21$  tuổi.

Sau khi Deaufando lấy vợ lại trải qua  $X/7$  năm và 5 năm nữa mới có con. Khi đó tuổi của ông là  $21 + 84/7 + 5 = 21 + 12 + 5 = 38$  tuổi. Nhưng thật bất hạnh là con trai lại qua đời trước bố. Bốn năm sau khi con trai ông chết, ông già 84 tuổi này cũng kết thúc cuộc đời. Bởi vậy khi con trai chết tuổi của Deaufando là  $84 - 4 = 80$  tuổi.

Xem ra sử dụng phương trình đại số trong việc giải thích các vấn đề mới thuận tiện làm sao. Nếu không như vậy thì đến nay tuổi của Deaufando vẫn là một bí mật.



## Quân trình sát đã làm như thế nào để đo được chiều cao của các cây lớn?

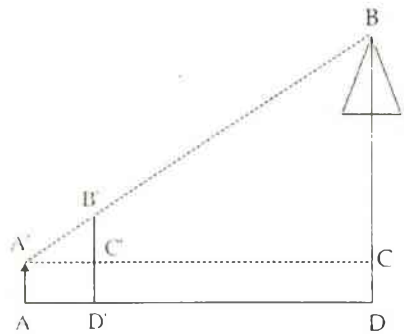
Trong một cuộc chiến tranh có một phân đội nhận được mệnh lệnh bắc một cây cầu qua khe núi nhưng phía đầu bên kia lại có quân địch trấn giữ. Để trinh sát địa điểm nơi phải bắc cầu, viên chỉ huy phân đội đã phái đi một tổ trinh sát. Họ đi vào khu rừng rậm gần đấy, chọn ra một cây gỗ lớn rồi tiến hành đo chiều dài và đường kính của nó và tính ra số gỗ cần dùng để làm cây cầu.

Trong khi không làm thế nào để leo lên ngọn cây, trực tiếp đo chiều cao của cây gỗ, bạn có biết các chiến sĩ trinh sát đã làm thế nào để đo được độ cao của cây đó không?

Các chiến sĩ đã dùng một thanh gỗ mà đo được chiều cao của cái cây giống như hình vẽ số 1. Trước tiên phải chuẩn bị một thanh gỗ cao hơn một chút so với chiều

cao của người chiến sĩ trinh sát, sau đó đóng thẳng xuống nơi cách cây gỗ cần đo một đoạn, bản thân người trinh sát đó lùi dọc theo đoạn  $DD'$  từ chỗ thanh gỗ, lùi đến chỗ  $A$  sao cho mắt người chiến sĩ đó có thể nhìn thấy đỉnh cây và đầu thanh gỗ  $B'$  nằm trên một đường thẳng. Sau đó giữ nguyên vị trí điểm đầu không đổi, đưa mắt nhìn thẳng theo đoạn thẳng  $A'C$ , xác định được tia nhìn của mình chia thành 2 điểm thanh gỗ và điểm giao với thân cây là  $C$  và  $C'$ . Đánh dấu 2 điểm này. Như vậy công việc đo đạc đã gần xong.

Căn cứ vào mối liên quan giữa hình tam giác  $A'B'C'$  và  $ABC$  (trong hai hình tam giác này, góc tương ứng là bằng nhau). Từ tỉ lệ thức:



Hình vẽ số 1

$BC/B'C' = AC/A'C'$  suy ra  $BC = B'C' \times AC/A'C'$  trong đó  $B'C'$ ,  $A'C'$ ,  $A'C'$  là những khoảng cách có thể đo trực tiếp được từ đó tính được đoạn  $BC$  sau đó cộng với chiều dài  $CD$  họ sẽ tính được đoạn  $BD$ . Đây chính là chiều cao của cây gỗ đó.

Để tính ra được số cây gỗ ở trong rừng, tổ trưởng tổ trinh sát đã cử người đi đo diện tích của khu rừng rậm đó sau đó anh đếm số cây trong một khoảng đất có diện tích  $50 \times 50$  mét vuông, sau đó sử dụng phép nhân đơn giản là có thể giải quyết được câu hỏi này rồi.

Bộ đội đã căn cứ vào những tư liệu mà quân trinh sát thu thập được để quyết định bắc cầu ở vị trí nào và nên bắc kiểu cầu như thế nào. Nhờ đó cây cầu đã hoàn tất đúng thời hạn và bộ đội cũng hoàn thành tốt nhiệm vụ của mình.

## Tại sao dựa vào mã vạch trên sản phẩm người ta lại có thể biết được giá của sản phẩm?

Bạn có biết mã vạch là gì không? Nếu như bạn đã từng đi mua đồ ở những siêu thị lớn bạn sẽ biết bởi trên mỗi sản phẩm đều có in hình chữ nhật có nhiều sọc đen trắng. Đó chính là mã vạch. Khi thanh toán nhân viên thu ngân dùng một thiết bị đặc biệt quét lên trên mã vạch của sản phẩm, những thông tin như tên, giá của sản phẩm đều được đọc trên máy tính, thật là vừa đơn giản lại vừa nhanh, tiện lợi biết bao. Không biết đã bao giờ bạn quan tâm xem tại sao trong mã vạch lại chứa thông tin về giá cả của sản phẩm chưa?

Mã vạch là những đường sọc được tạo thành từ màu trắng và màu đen nhưng trong đó chiều dài và chiều rộng của các đường sọc không giống nhau, có đường rộng, có đường hẹp lại có đường hơi dài một chút. Bạn hãy thử quan sát thật kĩ mã vạch của một vài sản phẩm khác nhau xem. Tuy mới nhìn thấy chúng có vẻ giống nhau nhưng thật ra chúng hoàn toàn khác biệt mà mắt thật của chúng ta không nhìn thấy được. Kì thực sự biến đổi về độ dài ngắn, to nhỏ và màu sắc của mã vạch là để nói lên những thông tin của sản phẩm. Cũng giống như trước đây chúng ta sử dụng chữ số biểu thị tên và giá của sản phẩm (Ví dụ C91 chỉ bút máy và giá của bút máy là 0. 50 đồng). Nhưng ngày nay do sự phát triển của

máy tính nên con người chuyển sang dùng mã vạch để biểu thị tất cả, xét về mặt bản chất là như nhau chỉ có điều cách thức thay đổi mà thôi.

Sự xuất hiện của mã vạch và sự phát triển của ngành khoa học máy tính có quan hệ rất mật thiết với nhau. Đây là một kĩ thuật mới ra đời nhờ sự phổ cập của máy tính và nó có tên gọi là kĩ thuật mã vạch. Những thông tin mã vạch thể hiện chỉ dùng máy tính mới đọc ra được. Thiết bị mà nhân viên thu ngân dùng để quét mã vạch chính là thiết bị đọc điện quang, còn gọi là bút quang. Khi ánh sáng chiếu lên mã vạch, đường sọc đen trắng sẽ sinh ra sự tương phản rõ rệt từ đó chuyển hoá thành dòng điện lớn nhỏ khác nhau. Độ to nhỏ của các đường sọc sẽ ảnh hưởng đến thời gian xuất hiện dài ngắn. Máy tính sẽ căn cứ vào sự khác nhau tín hiệu để tìm ra những con số được lưu trong máy từ đó mà có được thông tin về sản phẩm. Điều kì diệu là khi quét mã vạch, quét từ phải sang trái và từ trái sang phải đều được, những thông tin do máy đọc ra đều như nhau. Sự xuất hiện của mã vạch đã nâng cao hiệu quả công việc đồng thời quá trình truyền thông tin cũng chuẩn xác, không xảy ra sự cố.

Bạn hãy thử nhìn kĩ một vạch, bạn sẽ phát hiện ra bên dưới dãy mã vạch đó còn có một dãy kí hiệu số. Trên thực tế đây cũng là một bộ phận cấu thành nên mã vạch, mục đích của dãy số là khi thiết bị quét mã vạch có vấn đề thì còn có thể sử dụng được các kí hiệu số đấy. Chúng cũng là những thông tin ghi chép về sản phẩm.

Mã vạch có thể được in trực tiếp ngay trên bao bì của sản phẩm và ngày nay nó cũng không chỉ giới hạn ở màu đen và trắng nữa nhưng nhất định đó phải là hai màu tương phản rõ rệt mới được. Kĩ thuật mã vạch được áp dụng rộng rãi trong đời sống của chúng ta, hầu như tất cả các quyển sách, tranh ảnh xuất bản ra đều phải có in mã vạch, đến ngành công nghiệp ô tô cũng có mã vạch riêng của mình.

## **Làm thế nào để không qua sông mà biết được sông rộng bao nhiêu?**

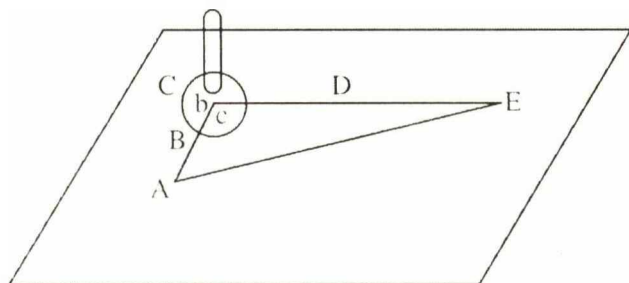
Không qua sông mà muốn đo chiều rộng của sông, đối với những người am hiểu về hình học thì cũng đơn giản như là không trèo lên ngọn cây mà đo được độ cao của cây vậy. Chúng ta có thể sử dụng cách giống

như đo độ cao mà không cần tiếp cận vật đó để đo những khoảng cách không thể tiếp cận được.

Hai phương pháp đo này đều dùng một vật có thể trực tiếp đo được khoảng cách để thay thế vật mà chúng ta cần phải đo khoảng cách.

Dưới đây giới thiệu một cách đo chiều rộng của mặt sông bằng máy 3 kim rất đơn giản.

Như thế nào là máy 3 kim? Chúng ta chỉ cần đóng một chiếc đinh lớn lên mỗi đỉnh của hình tam giác vuông cân ở trên một tấm gỗ thì đã có thể tạo ra một máy 3 kim rồi.



Hình vẽ trên thể hiện, chúng ta đứng tại điểm B trên bờ sông, định đo chiều rộng AB của mặt sông mà không cần qua sông.

Khi tiến hành đo, bạn hãy đứng ở điểm C trên bờ sông và đặt máy 3 kim trước mắt dùng một mắt để nhìn sao cho 2 điểm A, B thẳng hàng với hai chiếc đinh a và b trên máy 3 kim. Lúc này bạn đang đứng trên đường thẳng AB kéo dài. Giữ cho máy ba kim cố định một chỗ, đưa mắt nhìn theo hai chiếc đinh a, b đến điểm D thẳng hàng với 2 chiếc đinh a, b. Lúc này điểm D nằm trên đường cao vuông góc với AC, đóng một thanh gỗ lên điểm C.

Di chuyển máy 3 kim trên đường CD từ điểm C đến điểm E sao cho đồng thời đinh b thẳng hàng với thanh gỗ ở điểm C và đinh a thẳng hàng với điểm A. Như vậy trên hai bờ sông bạn đã lập được 3 đỉnh của tam giác ACE trong đó góc C là góc vuông, góc E bằng với 1 góc nhọn của máy ba kim và bằng  $1/2$  của góc vuông, đương nhiên góc A cũng phải bằng  $1/2$  góc vuông, bởi vậy tam giác ACE cũng là một tam giác vuông cân trong đó  $AC = CE$ .

Như vậy nếu bạn đo được khoảng cách đoạn CE (dùng bước chân đo cũng được) thì sẽ biết được khoảng cách đoạn AC, sau đó trừ đi đoạn BC (đoạn này chúng ta có thể dễ dàng tính được) là có thể đo được chiều rộng mặt sông AB rồi.

Chú ý khi kiểm tra phải đặt máy ba kim chắc chắn không được rung. Có như vậy kết quả đo được mới chuẩn xác.

## **Tại sao khi dòng nước chảy gọn sóng lại không bị biến dạng?**

Chắc chắn bạn không chỉ quan sát có một lần hiện tượng khi chúng ta ném một viên đá xuống mặt nước tĩnh lặng thấy nổi lên những gọn sóng hình tròn. Vì sao lại sinh ra những gọn sóng đó? Bởi vì sau khi mặt nước bị hòn đá ném xuống sóng tạo ra sẽ từ điểm này phát triển về 4 phía với cùng một vận tốc vì thế trong nháy mắt khoảng cách từ các điểm sóng đến nơi sóng phát sinh là bằng nhau và các điểm này lại nằm trên cùng một đường tròn nên sẽ gây ra gọn sóng tròn.

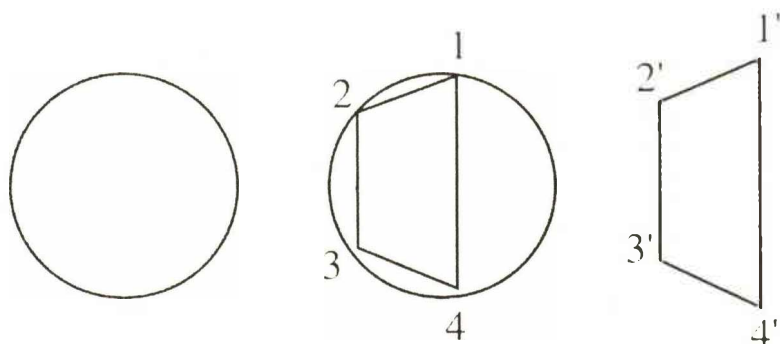
Hiện tượng này xảy ra khi mặt nước yên tĩnh. Vậy khi dòng nước chuyển động thì hiện tượng này sẽ thay đổi như thế nào. Ở những dòng sông nước chảy xiết sóng tạo ra từ những hòn đá ném xuống nước, hiện tượng khuếch tán từ phía vẫn là hình tròn, kéo ra vô tận.

Nếu như bạn chưa từng quan sát kĩ mà chỉ là suy đoán bạn cũng có thể nhận ra được sự phát triển của gọn sóng. Ở những nơi cùng hướng với dòng nước sẽ nhanh hơn những nơi ngược dòng và ở hai bên. Như vậy các điểm của gọn sóng ở trên bề mặt giống như một sợi dây đàn nổi kín cứ vươn dài ra mãi, trong bất cứ trường hợp nào nó cũng không phải hình tròn phẳng.

Tuy nhiên, thực tế lại không phải như vậy. Khi bạn ném một hòn đá xuống mặt hồ yên lặng và nhìn thấy xuất hiện gọn sóng tròn thì khi bạn ném một hòn đá xuống dòng sông chảy xiết bạn cũng thấy hiện tượng tương tự. Tại sao lại như vậy?

Như vậy dòng nước chảy có ảnh hưởng gì đến sự biến đổi của gọn sóng tròn? Dòng nước chảy đã tác dụng lên các điểm trên gọn sóng theo

hướng mũi tên như ở hình vẽ và sự chuyển động của các điểm đó đều theo hướng song song với nhau và tốc độ bằng nhau, di chuyển được những khoảng cách bằng nhau. Khi các điểm ở trạng thái chuyển động song song thì nó sẽ không thay đổi hình dạng ban đầu như hình vẽ thể hiện điểm 1 di chuyển đến điểm 1', điểm 2 di chuyển đến điểm 2'. Hình tứ giác 1234 ban đầu khi di chuyển đến vị trí mới đã chuyển thành hình tứ giác 1'2'3'4'. 4 cạnh của hình tứ giác này và 4 cạnh của hình tứ giác ban đầu hoàn toàn bằng nhau. Giả sử trên đường tròn đó lấy nhiều hơn 4 điểm thì ở vị trí mới chúng ta cũng được một hình đa giác có số đỉnh tương đương. Nếu như đó là một đường tròn thì sau khi chuyển động song song hình mà chúng ta thu được cũng là một hình tròn.



Bởi vậy khi dòng nước chuyển động, những gợn sóng hình tròn do hòn đá ném tạo ra cùng với tâm của nó sẽ chảy về hạ lưu với vận tốc của dòng nước và vẫn giữ được hình dạng tròn của nó.

## Trên bản vẽ hàng hải, tuyến đường thẳng có phải là tuyến đường ngắn nhất hay không?

Không biết bạn đã từng tham gia vào ngành hàng hải hay đã xem các bản vẽ hàng hải hay chưa? Đó chính là một loại bản đồ mà các nhà hàng hải thường sử dụng, trên bản đồ có vẽ rất nhiều các đường dọc,



ngang. Đường dọc gọi là kinh tuyến, đường ngang gọi là vĩ tuyến. Kinh tuyến và vĩ tuyến đều có toạ độ. Các cảng ở trên trái đất đều dùng kinh tuyến và vĩ tuyến để biểu thị.

Nếu như tàu của chúng ta đi từ mũi Hảo Vọng của cực Nam châu Phi đến phía Nam của Australia, nhìn trên bản đồ hàng hải, hai nơi này gần như nằm trên cùng một vĩ tuyến, mực nước cũng gần như nhau. Thầy giáo tôi trước đây từng nói: trên một bề mặt đoạn đường giữa hai điểm liên tiếp là ngắn nhất. Xem ra nếu như chúng ta căn cứ vào đường vĩ tuyến trên bản đồ hàng hải thì sẽ đi được từ mũi Hảo Vọng đến phía Nam của Australia. Nhưng thực tế không phải như vậy bởi vì con tàu không đi dọc theo con đường thẳng này mà đi theo đường vòng. Như thế chẳng phải càng đi nhiều đường càng xa hay sao. Vậy tại sao tàu thủy lại đi theo đường vòng như vậy?

Thực ra nguyên nhân rất đơn giản, bởi vì bạn đã bỏ qua một vấn đề đó là trái đất có hình cầu chứ không phải là mặt phẳng. Những kết luận chúng ta có được trên mặt phẳng không thể áp dụng đối với mặt cầu được. Như vậy khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm trên mặt cầu sẽ là thế nào?

Chúng ta hãy thử coi trái đất như một quả dưa hấu, trên quả dưa khắc hai điểm bất kì và coi đó là hai cảng, qua hai điểm cắt một nhát dao nhưng như vậy rất khó tính toán bởi vì có rất nhiều cách cắt quả dưa đó, rút cục chúng ta chọn cách nào đây? Nhưng yêu cầu của tôi lại là nhát cắt qua hai điểm đó phải chia quả dưa ra thành hai nửa bằng nhau thì bạn sẽ biết phải cắt như thế nào rồi chứ? Nhát cắt này không chỉ phải chạy qua hai điểm đã xác định mà còn chạy qua tâm của quả dưa, xác định một mặt phẳng duy nhất chạy qua 3 điểm không nằm trên cùng một đường thẳng, vì vậy sẽ chỉ có một cách cắt này mà thôi.

Trong toán học người ta gọi đường tròn qua tâm hình cầu là đường tròn lớn, bạn cắt quả dưa chính là đã cắt ra đường tròn lớn đó. Giữa hai điểm trên đường tròn lớn đó có hai vòng cung, vòng cung ngắn hơn chính là khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm đó, khoảng cách này cũng chính là khoảng cách ngắn nhất giữa hai cảng. Tàu muốn đi ngắn nhất phải đi theo con đường vòng này.

Đường xích đạo của trái đất chính là đường tròn lớn, nếu như hai cảng này lại nằm trên chính đường xích đạo thì con tàu chỉ cần đi dọc theo đường vĩ tuyến trên bản đồ hàng hải là có thể đến được. Nhưng đối

với những cảng không cùng nằm trên đường xích đạo thì chúng ta không thể áp dụng khoảng cách trên đường thẳng giữa hai điểm của bản đồ hàng hải được. Cách thông thường là phải đi theo vòng cung ngắn nhất của đường tròn lớn chạy qua hai điểm.

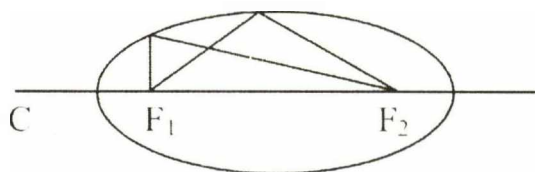
Không chỉ có riêng tàu thủy, máy bay bay trong không trung cũng là bay theo đường vòng cung của hình tròn lớn. Ví dụ như máy bay từ Bắc Kinh đến Chicagô, Mỹ sẽ bay từ Bắc Kinh bay thẳng hướng Đông Bắc, sau đó bay đến Alasca tròn vẹn một vòng cung lớn.

Có thể bạn sẽ thắc mắc tại sao bản đồ hàng hải tuy không thể phản ánh một cách chân thực quả địa cầu mà chúng ta lại vẫn sử dụng nó. Bởi làm thế sẽ định hướng tàu bè đi lại một cách đơn giản. Nếu như tàu bè đi theo những con đường trên bản đồ hàng hải, tuy phải đi dài hơn một chút nhưng sẽ không phải thay đổi tuyến đường thường xuyên để đảm bảo đi được vòng cung ngắn nhất của đường tròn lớn.

## Tại sao trần nhà hát lại có hình Elip?

Có những lúc bạn ngồi trong nhà hát để thưởng thức âm nhạc tuyệt diệu, không biết có khi nào bạn để ý đến hình dạng kiến trúc của nhà hát hay không? Thông thường trần của nhà hát không hề bằng phẳng mà là hình mặt cầu hay hình Elip. Tại sao lại như vậy bạn có biết hay không?

Trước tiên chúng ta hãy cùng nghiên cứu xem hình Elip là hình như thế nào? Dưới đây là một Elip, trục của nó tương đối dài được gọi là trục đối xứng. Giả sử chúng ta giữ chặt trục này sau đó cho Elip chuyển động quay quanh trục như vậy chẳng phải là đã tạo được một hình Elip hay sao? Hình Elip này cũng giống như quả bóng mà người ta sử dụng trong môn bóng bầu dục vậy.



Hình Elip có hai giao điểm là  $F_1$  và  $F_2$ , nếu như  $F_1$  và  $F_2$  ngày một tiến gần nhau thì bạn hãy thử suy nghĩ xem hình bầu dục sẽ thay đổi như thế nào? Nếu như hai giao điểm trùng nhau khi đó hình

Elip sẽ tròn dần và cuối cùng biến thành một hình tròn, hai giao điểm trùng nhau khi này sẽ trở thành tâm đường tròn.

Giao điểm F1 của hình Elip có tính chất rất đặc biệt. Nếu như tại F1 ta đặt một ngọn đèn, ánh sáng đèn sẽ phản xạ qua bề mặt của hình Elip và tập trung tại giao điểm F2, và ngược lại, ánh sáng phát ra từ điểm F2 cũng tập trung tại điểm F1 làm cho hai điểm này sáng bừng lên giống như ở vị trí của hai giao điểm này cũng có đèn vậy.

Âm thanh cũng như vậy, khi diễn viên đứng hát tại một giao điểm, âm thanh mà anh ta phát ra cũng phản xạ qua bề mặt của hình Elip cuối cùng cũng tập trung tại giao điểm kia làm cho khán giả ngồi ở đó cũng nghe thấy rất rõ. Hiện tượng này làm cho nhà hát giống như là có hai sân khấu vậy. Thính giả ngồi ở hai bên đều có thể đồng thời nghe được buổi biểu diễn.

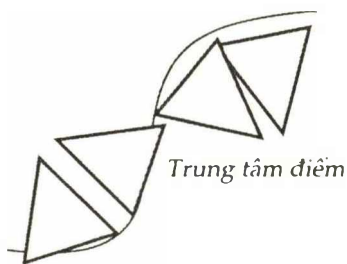
Thời cổ đại, người Hi Lạp thông thái ngay từ ban đầu đã hiểu được tính chất toán học của hình Elip và ứng dụng vào trong cuộc sống. Từ những hình vẽ còn được giữ gìn cho đến ngày nay chúng ta có thể nhận thấy trần nhà hát của họ cũng được đắp thành hình Elip, tường trong của trần nhà hát nhẵn bóng vô cùng, gần như liền thành một khối với bức tường. Làm như vậy không những có thể làm nhà hát lớn hơn mà còn có thể lợi dụng tính chất của hình Elip để xử lí hiệu quả âm thanh trong nhà hát.

Lần sau khi bạn đi nghe nhạc ở nhà hát hay viện ca kịch thì khi nghe nhạc hãy nhớ để ý quan sát trần nhà hát ở đó xem có giống như bài viết này nói đến hay không nhé.

## Cánh của máy bay có đối xứng không?

Từ nhỏ chúng ta đã thích xem những chiếc máy bay trên bầu trời, với tiếng động cơ âm ỉ, chúng bay khỏi tầm mắt của chúng ta, biến thành chấm nhỏ trên bầu trời. Chiếc máy bay nào cũng mang một đôi cánh, vậy chúng có đối xứng nhau hay không?

Có thể, bạn cũng chưa biết thế nào là hình đối xứng. Hãy xem những chú bướm thật là đẹp, hai bên cánh của chúng hoàn toàn giống nhau, khi chúng xếp lại sau lưng, lại biến thành một; dạng hình mà kích



Hình đối xứng trung tâm

thước, vị trí, đường nét hai bên giống nhau này là hình đối xứng; vậy nên thân bướm chính là trục đối xứng, nếu nhìn từ trục đối xứng này sang hai bên thì hai bên hình vừa là đối nhau vừa là tương xứng. Dưới góc độ Toán học ta gọi nó là hình đối xứng qua trục, nếu quay quanh trục đối xứng  $180^\circ$  thì hình hai bên phải trùng

khít với nhau. Hình đối xứng có rất nhiều, ví dụ như hình tròn, hoa tuyết, lá phong, mặt người, cả công trình kiến trúc như Thiên An Môn (Trung Quốc), rất nhiều hành tinh... không thể kể hết.

Ngoài hình đối xứng qua trục ra, ta còn có hình đối xứng qua tâm, nó không có dạng đối xứng qua một trục mà thể hiện tính đối xứng qua một tâm điểm. Ví dụ như hình vẽ dưới đây, xem ra không phải hình đối xứng, thế nhưng nếu ta cho nó xoay  $180^\circ$  trên mặt phẳng quanh tâm điểm, sẽ được một hình mới trùng hợp với hình cũ. Trên phương diện Toán học thì có rất nhiều đường cong là đối xứng tâm.

Trong cuộc sống chúng ta dùng đến rất nhiều hình đối xứng qua trục. Dễ thấy nhất là mặt người và tứ chi, là điển hình của đối xứng trục, trục đối xứng chính là cột sống của chúng ta. Phần lớn các công trình xây dựng của Trung Quốc cũng là hình đối xứng trục, như cửa đền chùa, lầu gác ... hình dạng đối xứng này làm ta có cảm giác rất hài hoà, tạo hiệu quả thăng bằng, vững chắc, thật là phóng khoáng đẹp mắt.

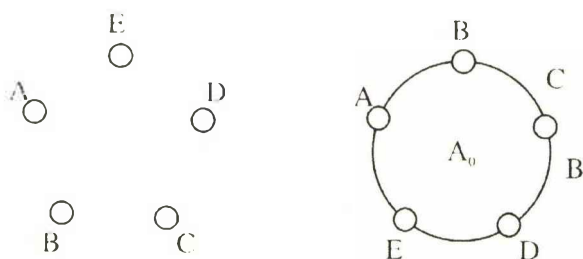
Hai cánh của máy bay cũng là hình đối xứng trục, thân của nó là trục đối xứng. Vì sao cánh máy bay phải làm đối xứng nhau? Chỉ để đẹp mắt thôi sao? Đương nhiên là không phải, khi máy bay bay trên bầu trời, phải chịu sự tác động của luồng không khí, cánh máy bay đối xứng đảm bảo cho máy bay nhận lực tác động của không khí ở hai bên bằng nhau, mới có thể giữ được thăng bằng.

Ngoài những hình chúng ta nhìn thấy đối xứng trong cuộc sống ra, còn rất nhiều hình đối xứng mà ta không thể nhìn thấy bên ngoài, như cấu tạo của phân tử muối ăn và thạch cao cũng là hình đối xứng.

## Mỗi người đi một đường, phải đi thế nào mới không giao nhau hoặc trùng nhau?

Có 5 ngư dân A, B, C, D, E, hàng ngày đều đến một bờ hồ để đánh cá.

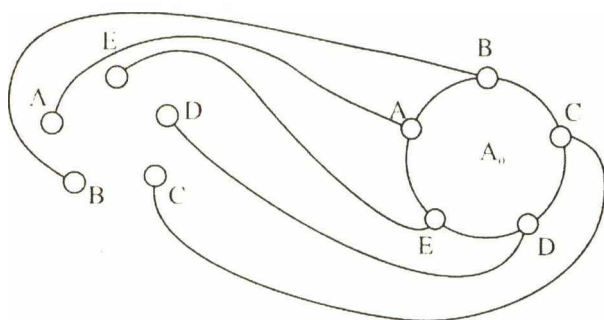
Khi đánh cá, mỗi người đều có điểm đánh bắt của riêng mình. Vị trí nơi ở và điểm đánh cá của 5 người này như trong hình 1.



Hình 1

Một hôm, họ thoả thuận với nhau, mỗi người trên đường đi từ nhà đến nơi đánh cá của mình sẽ không trùng nhau, cũng không cắt nhau. Điều này có thể làm được không? Nếu làm được, thì phải đi thế nào?

Yêu cầu này có thể làm được. Chỉ cần A, B, C, D, E khi rời khỏi nhà đi cùng một hướng vòng qua 5 ngôi nhà là được, hình 2 bên dưới vẽ ra con đường 5 người đi không cắt nhau.



Hình 2

Vấn đề này liên quan đến phần địa hình học của Toán hiện đại. Cũng giống như một số vấn đề của thuật thất và cỏi nút, thoát khỏi khoá dây... đều dùng đến kiến thức địa hình học, địa hình học là một phần rất lí thú.

## Vì sao khi tính điểm hát Karaoke phải bỏ đi điểm cao nhất và thấp nhất?

Khi hát Karaoke tính điểm, điểm số hiện ra bao giờ cũng theo quy tắc là loại đi số điểm cao nhất và thấp nhất, sau đó lấy bình quân của các điểm còn lại sẽ ra số điểm cuối cùng. Không biết các em đã bao giờ nghĩ xem vì sao phải loại đi số điểm cao nhất và thấp nhất chưa?

Ví dụ, một bạn hát hết một bài xong, ban giám khảo có sáu người cho điểm đánh giá là 9,00; 9,50; 9,55; 9,60; 9,75; 9,90 (điểm 10 là cao nhất). Sau khi loại đi điểm cao nhất 9,90 và điểm thấp nhất 9,00, lấy bình quân của 4 số điểm còn lại thì bạn nhỏ này đạt số điểm là  $(9,50 + 9,55 + 9,60 + 9,75)/4 = 9,60$

Vì sao phải loại đi điểm cao nhất và điểm thấp nhất? Đây là sự loại bỏ số dị thường. Số dị thường là chỉ điểm số quá cao hoặc quá thấp, thường là do sự sơ xuất của giám khảo hoặc cảm tình đặc biệt, thậm chí là có ý xấu hoặc ý tốt gây ra. Để giảm bớt sự ảnh hưởng của điểm dị thường đến tính chính xác của kết quả, việc loại bỏ điểm cao nhất và thấp nhất là hợp lí.

Trong Toán học, có những lúc số giữa lại phản ánh chính xác tính bình quân hơn cả số trung bình. Số giữa là số nào? Ta xem ví dụ ở trên, trong 6 con số lần lượt sắp xếp ở trên số trung bình của con số thứ 3 và thứ 4 là số giữa, tức là  $(9,55 + 9,60)/2 = 9,575$ . Nếu số giám khảo là 5 người, vậy lấy 5 số đầu tiên, thì số giữa là 9.55. Vậy nên, số giữa cũng như tên gọi của nó là chữ số nằm ở giữa. Nếu số chữ số là lẻ, thì số giữa là số nằm ở giữa; nếu số chữ số là chẵn, thì số giữa là giá trị bình quân của hai số ở giữa.

Chẳng hạn có 10 người tham gia một cuộc thi, nhưng 2 người bỏ thi nên bị 0 điểm, số điểm của 10 người là 0, 0, 65, 69, 70, 72, 78, 81, 85 và 89. Số điểm bình quân sẽ là  $(0 + 0 + 69 + 70 + 78 + 81 + 85 + 89)/10 = 60,9$ . Về lí mà nói người được 65 điểm, số điểm hơn mức trung bình này được coi là điểm khá. Nhưng thực ra không phải vậy, nếu loại đi 2 người bỏ thi,



người này lại ở vị trí thấp nhất. Lúc này, số trung bình đã không phản ánh đúng trình độ bình quân.

Thế nhưng, điểm 0 của hai người bỏ thi lại không thể không tính, cho nên lúc này chỉ có cách lấy số giữa là tương đối hợp lí. Số giữa của 10 điểm trên là  $(70 + 72)/2 = 71$ . Số điểm này mới là đại diện của "trình độ trung bình".

Dương nhiên, số trung bình cũng có ưu điểm, nó tính đến tác dụng của mỗi con số; mà phương pháp loại đi điểm cao nhất và thấp nhất chính là lợi dụng ưu điểm của cả số trung bình và số giữa, vừa loại bỏ số dị thường, lại phát huy được tác dụng của đại đa số điểm đánh giá, là phương pháp tương đối hợp lí.

## Em có thể cắt được hình sao chỉ bằng một đường kéo không?

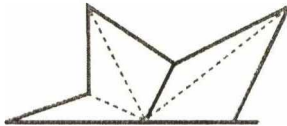
Lá Quốc kỳ của chúng ta được gọi là cờ đỏ sao vàng, trên nền đỏ có một ngôi sao màu vàng. Hình sao trong cuộc sống thường ngày ta rất hay gặp, nó có hình dạng rất đối xứng, bất kể là nhìn từ góc nào đều rất đẹp.

Em hãy lấy 1 tờ giấy màu và cho biết làm thế nào để cắt được hình sao chỉ bằng một đường kéo? Có thể em cũng biết nếu hình vuông thì sẽ cắt như thế nào, thế nhưng nếu tờ giấy này không phải là hình vuông mà là hình chữ nhật, hình tròn thậm chí là một hình bất kỳ không có quy tắc thì sẽ phải cắt ra sao?



Ngôi sao

H 1



Ngôi sao  
sau khi gấp đôi

H 2



Sau khi gấp theo  
đường nét mờ

H 3

Chúng ta hãy phân tích hình dạng của ngôi sao, đây là một hình sao H 1 sau khi gấp lại ta được H 2. Chúng ta sẽ thấy rằng nếu vẽ lên hình đã gấp đôi đường nét đứt như trên, thực tế là ngôi sao này đã chia hình được

gấp đôi thành 5 phần bằng nhau, nếu em đã học qua kiến thức về góc thì có thể hiểu là chia một góc phẳng  $180^0$  thành 5 góc  $36^0$  bằng nhau. Chúng ta lại gấp tiếp H2 theo đường nét đứt sẽ được H 3, tất cả các góc đều được gấp lại thành 1 góc. Chính vì ngôi sao 5 cánh cuối cùng có thể gấp thành 1 cánh nên chúng ta mới có thể cắt được ngôi sao chỉ bằng một đường kéo.

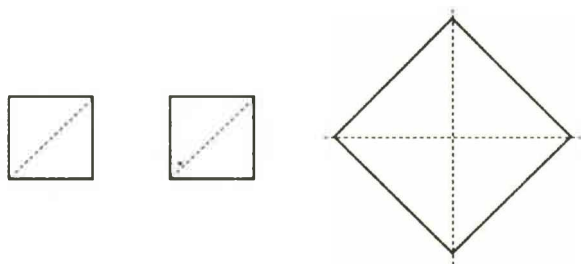
Chúng ta sẽ cắt như sau, đầu tiên là dùng 1 tờ giấy hình dạng bất kỳ gấp đôi lại, sau đó chia nó thành 5 phần bằng nhau. Sau đó theo đường nét đứt chia đó ta gấp lại thành 1 góc; cuối cùng là cắt chéo phần đuôi của hình đó, giờ tờ giấy ra ta đã được một hình ngôi sao.

Xem ra phương pháp để cắt 1 ngôi sao bằng một đường kéo này rất đơn giản. Thế nhưng, cắt được ngôi sao có đẹp mắt cũng không phải dễ đâu. Khi tờ giấy được gấp thành 1 góc, ta dùng kéo cắt góc chéo lớn thì ngôi sao được cắt sẽ đẹp hơn, nếu đường cắt chéo này hơi bằng, không đủ chéo thì cánh sao sẽ ngắn, ngôi sao không được đẹp. Không tin các em thử xem. Nếu ta cắt đường chéo nghiêng đó thành đường thẳng thì ngôi sao đó không những không đẹp mà có thể nói là không phải là ngôi sao, đó là hình thập giác lồi. Thật là ngôi sao kỳ diệu phải không em?

## Làm thế nào để ghép 2 hoặc 3 hình vuông bằng nhau thành một hình vuông lớn?

Em có biết cách ghép 2 hình vuông bằng nhau thành một hình vuông lớn không? Em có thể cắt mỗi hình ra thành 2 hình vuông bằng nhau, sau đó thử xem sao, thật ra cách làm rất dễ dàng.

Hình 1 dưới đây chỉ ra cách ghép 2 hình vuông bằng nhau thành 1 hình vuông lớn. Vậy em có thể ghép 3 hình vuông thành 1 hình vuông lớn không?



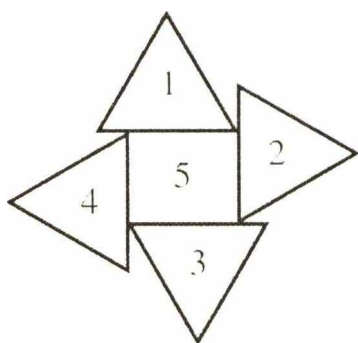
Hình 1

Ban đầu, ta cắt theo đường chéo của 2 hình vuông trong 3 hình (xem H. 2) sau đó ghép lại như H. 3

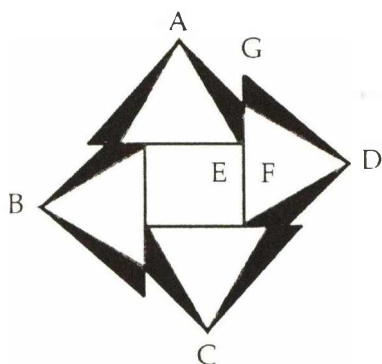


Hình 2

Cuối cùng, theo H. 4, ta nối tiếp AB, BC, CD và DA; cắt đi 4 tam giác nhỏ tối màu bên ngoài, bù sang phần đen bên cạnh; ta được 1 hình vuông lớn.



Hình 3



Hình 4

Vì sao có thể lấy phần tam giác nhỏ tối màu bên ngoài bù sang phần đen? Nguyên nhân ở chỗ  $DG \parallel$  và bằng  $AE$ ,  $AEDG$  là hình bình hành; vì vậy 2 đường chéo  $AD$  và  $EG$  cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, tức là:

$$EF = FG, AF = FD$$

Vậy nên  $AEF = FGD$ , nói cách khác, 2 tam giác này hoàn toàn giống nhau, cho nên phần  $FGD$  tối màu được cắt ra hoàn toàn bù được sang phần tam giác màu đen  $AEF$ .

Phương pháp cắt ghép kỳ diệu này được nhà Toán học Ả-rập Abu Weifas tìm ra đầu tiên vào thế kỷ X sau Công nguyên.

## Em có tính được số trận đấu của một giải bóng đá loại vòng tròn không?

Những người yêu thích thể thao, xem đấu bóng có lẽ đều hiểu phương thức đấu bóng thường dùng; ví dụ như đấu loại trực tiếp, đấu vòng tròn. Vậy chúng có nghĩa là gì?

Đấu loại trực tiếp là 2 đội thi đấu với nhau, đội thắng sẽ tiếp tục vào vòng trong, còn đội kia bị loại ngay. Phương pháp này rất phù hợp với những trường hợp thời gian ngắn mà số đội tham gia lại nhiều. Thế nhưng có một khuyết điểm là nếu muốn giành vị trí quán quân thì không được thua một trận nào; hơn nữa nếu hai đội mạnh gặp nhau quá sớm thì có thể nảy sinh việc đội á quân và các vị trí khác không tương xứng với trình độ thực tế. Vì vậy, trong trường hợp các đội tham gia không nhiều người ta không bao giờ áp dụng phương pháp loại trực tiếp mà sử dụng đấu loại vòng tròn.

Đấu loại vòng tròn tức là một đội sẽ lần lượt thi đấu với các đội còn lại, còn đấu loại vòng tròn đơn là hai đội sẽ chỉ gặp nhau một lần. Ví dụ, tại một trường học nào đó tổng cộng có 15 lớp tham gia giải bóng đá, mỗi lớp một đội; nếu áp dụng đấu loại vòng tròn thì mỗi đội sẽ lần lượt đấu 1 trận với 14 đội kia; như vậy, tất cả sẽ thi đấu  $14 \times 15 = 210$  trận. Còn áp dụng đấu vòng tròn đơn sẽ là  $(14 \times 15)/2 = 105$  trận. Vì 2 đội chỉ gặp nhau một lần, mà trong đấu vòng tròn thì 2 đội sẽ gặp nhau 2 lần nên ta chia cho 2.

Nói chung, giả thiết có một số đội bóng đấu vòng tròn đơn thì số trận đấu sẽ là: mỗi đội sẽ đấu với  $n-1$  đội còn lại;  $n$  đội sẽ đấu  $n \times (n-1)$  trận, vì đấu vòng tròn đơn nên cuối cùng phải chia cho 2. Đây là công thức phổ biến tính số trận trong đấu vòng tròn đơn, chỉ cần các em nhớ công thức là có thể sắp xếp các trận đấu.

Chúng ta hãy xét ví dụ giải Bóng đá Vô địch Thế giới, nếu có 32 đội tham gia, áp dụng đấu vòng tròn đơn thì sẽ tiến hành tổng cộng

$$(32 \times 31)/2 = 496 \text{ trận đấu.}$$

Thế nhưng, trên thực tế không phải áp dụng phương thức đấu vòng tròn đơn từ đầu đến cuối, như vậy sẽ mất rất nhiều thời gian. Nếu giải Bóng đá Thế giới phải thi đấu 496 trận thì cầu thủ không có sức mà người hâm mộ cũng không theo dõi nổi. Vậy nên, bao giờ cũng áp dụng đồng thời đấu loại trực tiếp và đấu vòng tròn đơn theo bảng.

Ví dụ, chia 32 đội thành 8 bảng, áp dụng đấu vòng tròn đơn ở mỗi bảng [ $8(4 \times 3)/2 = 48$  trận] để quyết định đội nhất và nhì của mỗi bảng, tổng cộng ta chọn được 16 đội. Tiếp theo, 16 đội sẽ áp dụng đấu loại trực tiếp, tức là tiến hành 8 trận đấu, chọn ra 8 đội mạnh; sau đó lại có 4 trận loại trực tiếp, chọn ra 4 đội và 2 trận đấu loại trực tiếp, chọn ra 2 đội. Cuối cùng 2 đội mạnh nhất sẽ quyết đấu 1 trận giành vị trí nhất, nhì; đội ba, tư cũng đấu 1 trận. Tổng số trận đấu như vậy sẽ là  $48 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 64$  trận.

## Tỉ lệ tăng thể tích khi nước đóng băng lớn hơn tỉ lệ giảm thể tích khi băng tan?

Đọc câu hỏi này có lẽ các em sẽ nghi hoặc, tỉ lệ tăng thể tích khi nước đóng băng và tỉ lệ giảm thể tích khi băng tan là như nhau chứ, không thể không bằng nhau được!

Thế nhưng, đúng là có chuyện hai tỉ lệ này không bằng nhau đấy. Giả thiết sau khi nước đóng băng tỉ lệ thể tích tăng lên  $1/11$ , vậy khi băng tan thành nước, thể tích sẽ giảm bao nhiêu đây?

Có người cho rằng vẫn là  $1/11$ , nhưng cũng có người cho là  $1/12$ , các em nói xem, ai đúng ai sai?

Đáng lẽ khi nước đóng băng và khi băng tan không có sự thay đổi về mặt thể tích. Nhưng đáp án lại không phải là  $1/11$  mà là  $1/12$ .

Ta hãy làm một phép tính nhỏ, giả sử thể tích của nước là  $11\text{m}^3$ , sau khi đóng băng tỉ lệ thể tích tăng  $1/11$ , tức là  $11 \times 1/11 = 1$ , nói cách khác là tăng thêm  $1\text{m}^3$ , thể tích của băng sẽ là  $12\text{m}^3$ . Vậy khi băng tan sẽ khôi phục thể tích ban đầu của nước, tỉ lệ thể tích sẽ giảm đi bao nhiêu đây? Ta có  $(12 - 11)/12 = 1/12$ . Tức là thể tích băng giảm  $1/12$  thì mới về thể tích ban đầu.

Vì sao lại có hiện tượng hai tỉ lệ trên không bằng nhau như vậy? Nguyên nhân là vật tham gia của 2 phân số trong phép tính trước sau

không giống nhau; phân số thứ nhất là chỉ thể tích tăng lên của nước khi đóng băng, phân số thứ hai là chỉ thể tích băng giảm khi băng tan thành nước.

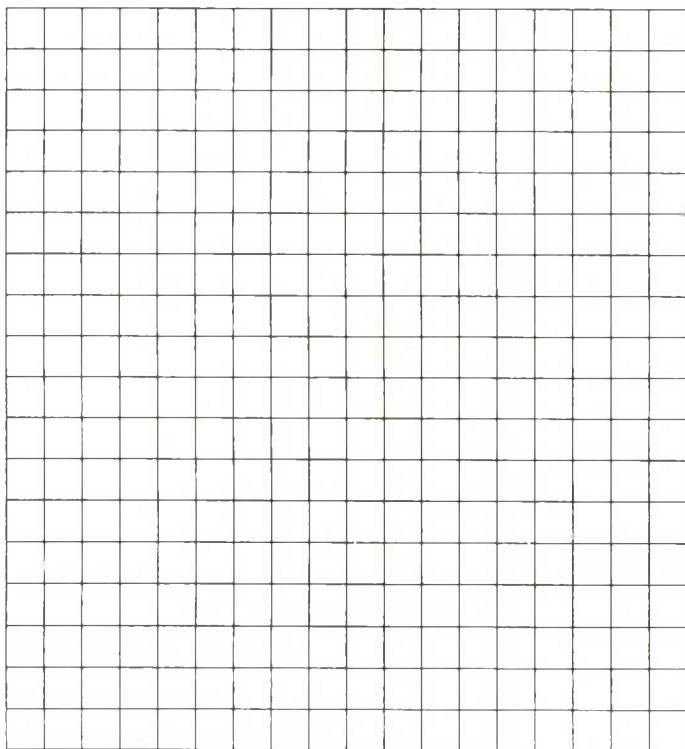
Có thể thấy 2 phân số này không phải chỉ một phần mấy của cùng sự vật, mà là 2 sự vật là băng và nước, đương nhiên chúng sẽ không giống nhau.

Đây đúng là vấn đề rất thú vị, xem ra đối với phân số nhất định phải xét đến đơn vị của phân số, chứ không thể chỉ xem giá trị của phân số.

## Trên bàn cờ vây có bao nhiêu hình vuông?

Bàn cờ vây do 19 đường ngang dọc tạo thành. Em có biết trên bàn cờ có bao nhiêu hình vuông không?

Nếu đếm số hình vuông trên bàn cờ mà không có phương pháp nhất định thì không thể làm được. Dưới đây chúng ta hãy xem phương pháp đếm số hình vuông to nhỏ khác nhau trên bàn cờ:





Đầu tiên, ta đặt cho độ dài cạnh bên của 1 hình vuông nhỏ là 1 đơn vị. Đếm số hình vuông có độ dài cạnh bên 10 đơn vị.

Đặt hình vuông có cạnh bên 10 đơn vị vào góc trái trên của bàn cờ như vị trí ABCD trong hình vẽ. Nếu dịch chuyển nó xuống góc phải dưới của bàn cờ, thì điểm đỉnh A sẽ nằm ở vị trí O; nếu chuyển nó đến góc trái dưới và góc phải trên, thì điểm A sẽ lần lượt nằm ở vị trí P và Q trong hình. Lúc này, chúng ta quan sát được các khả năng vị trí của điểm A chỉ có thể nằm trong các điểm hình vuông trong APOQ; điều này có nghĩa là mọi điểm trong hình vuông APOQ đều có khả năng làm điểm A của hình vuông có độ dài cạnh là 10. Vậy thì, chỉ cần ta đếm các điểm trong hình vuông APOQ là có thể biết số hình vuông có cạnh là 10:

$$(19-10) \times (19-10) = 9^2$$

Theo phương pháp này, ta sẽ biết:

$$\text{Số hình vuông có độ dài cạnh 18 là: } (19-18) \times (19-18) = 1^2$$

$$\text{Số hình vuông có độ dài cạnh 17 là: } (19-17) \times (19-17) = 2^2$$

$$\text{Số hình vuông có độ dài cạnh 16 là: } (19-16) \times (19-16) = 3^2$$

\*\*\*\*\*

$$\text{Số hình vuông có độ dài cạnh 12 là: } (19-2) \times (19-2) = 17^2$$

$$\text{Số hình vuông có độ dài cạnh 18 là: } (19-1) \times (19-1) = 18^2$$

Cộng các số lại ta được tổng số hình vuông:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 17^2 + 18^2 = 2109$$

Phương pháp đếm số hình vuông có cạnh bằng 10 giới thiệu ở trên là sử dụng kiến thức quan hệ đối ứng của nguyên tố trong tập hợp. Có nghĩa là, trong hình vuông APOQ, mỗi điểm trên thực tế sẽ đối ứng với 1 hình vuông có cạnh bằng 10, vì vậy sẽ có quan hệ đối ứng giữa điểm (nguyên tố) và hình vuông có cạnh bằng 10 (tập hợp). Đối ứng là một khái niệm quan trọng trong Toán học và có thể ứng dụng cho nhiều phương diện khác nhau.

## **Khi đánh cờ, liệu có xuất hiện cuộc cờ hoàn toàn giống nhau?**

Nhất định em đã từng chơi cờ! Vậy trong khi đánh cờ, trong hàng triệu triệu ván cờ có bao giờ xuất hiện những thế cờ giống nhau từ đầu

đến cuối không? Chúng ta thử phân tích từ góc độ Toán học xem sao.

Trước tiên hãy lấy cờ vây làm ví dụ. Trên bàn cờ vây có tất cả 361 vị trí, vì vậy trên lý thuyết, quân cờ đầu tiên có 361 cách đặt (quân cờ này có thể đặt một trong 361 vị trí bất kì). Nếu xét rằng trước đó đã đặt 4 quân thì vẫn còn  $361 - 4 = 357$  cách đặt. Vì quân cờ đầu tiên không đặt ở rìa ngoài cùng nên trong thực tế vị trí có thể đặt không nhiều như vậy. Ta cứ tính rằng quân cờ đầu tiên có 50 cách đặt. Cho nên, vị trí có thể đặt của quân cờ thứ hai chắc chắn không chỉ là 50. Sẽ là  $357 - 2 = 355$ , ta cũng lại giả thiết rằng quân cờ thứ hai có 50 cách đặt, theo cách đó, mỗi quân cờ đều có 50 cách đặt. 50 là số ước đoán bình quân.

Như vậy, sự biến hóa trong cách đặt của hai loại quân cờ trắng đen là  $50 \times 50 = 2500$  cách. Đây mới chỉ là những biến hoá trong thế cờ thứ nhất. Nếu như hai bên cờ trắng đen mỗi bên hạ 50 quân, mà ta đã giả định mỗi quân có 50 cách đặt, vậy thì tổng số biến hoá của cuộc cờ này là  $2500 \times 2500 \times \dots \times 2500$ , tất cả có 50 lần 2500 nhân với nhau, tức là  $2500^{50} = 50^{100}$ . Con số có khoảng 170 chữ số, ta dùng đơn vị đếm hàng triệu, trăm triệu cũng không thể đếm được. Thật là một con số quá lớn! Chúng ta lấy một ví dụ xem con số này cuối cùng lớn bao nhiêu. Ví dụ bình thường khi ta đếm, với tốc độ bình thường đếm từ 1 đến 100 cần 50 giây. Những số từ 100 trở lên, vì chữ số tăng thêm nên thời gian đếm càng nhiều, đếm 1000 cần 500 giây, đếm 1 trăm triệu cần 14000 giờ. Một ngày có 24 giờ, đếm liên tục không ăn không ngủ cũng phải mất 500 ngày. Một người 100 tuổi, từ lúc sinh ra đã bắt đầu đếm, đếm đến 100 tuổi, cũng chỉ có 36525 ngày, vẫn chưa đếm đến 10 tỷ, mà cũng chỉ là 11 chữ số! Một con số lớn như vậy, xem ra khả năng ván cờ vây có thể cờ hoàn toàn giống nhau là không thể xảy ra.

Tiếp theo, ta hãy xét cờ tướng của Trung Quốc. Thế của cờ tướng xem ra có vẻ ít hơn, nhất là khi mới khai cuộc, biến hoá của thế cờ cũng không nhiều. Thế nhưng càng đánh về sau biến hoá càng nhiều, một quân xe có trước sau phải trái hơn 10 cách đi, cho nên nước tiếp theo có 10 đến 20 cách biến hoá là hoàn toàn có thể. Nếu mỗi bên đi 30 nước, thì sự biến hoá sẽ có  $10^{60}$  cách. Con số có 61 chữ số này thì một người 100 tuổi đếm cả đời cũng không hết.

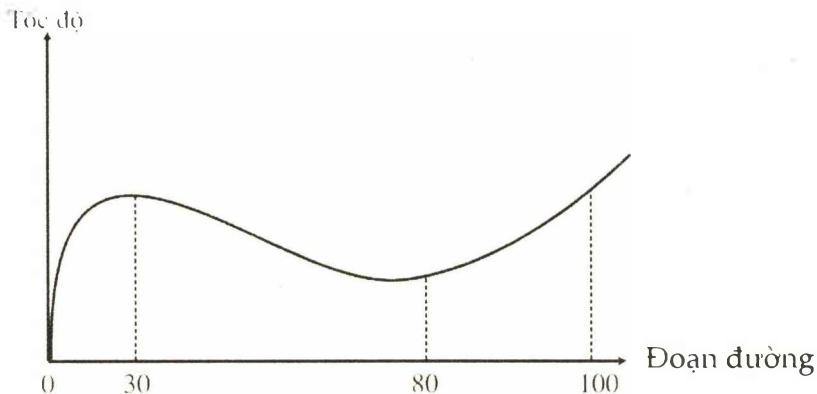
Tổng hợp những phân tích trên ta rút ra kết luận: trong chơi cờ, khả năng xảy ra thế cờ giống nhau từ đến cuối là vô cùng nhỏ.

## Làm thế nào để đạt thành tích tốt trong chạy tiếp sức?

Các em đã từng tham gia chạy tiếp sức trong các cuộc thi thể thao bao giờ chưa? Những cuộc chạy tiếp sức diễn ra rất quyết liệt luôn là nội dung quan trọng nhất của các giải thi đấu, các bạn học sinh không ngừng hò hét cổ vũ cho đội của lớp mình, nội dung thi đấu tập thể này thể hiện tinh thần đoàn kết của bốn người, so với thi đấu 100 m thì hấp dẫn hơn nhiều. Kì thực, thành tích thi đấu của chạy tiếp sức còn tốt hơn so với chạy 100 m.

Trong Olympic Mexico 1968 đội chạy tiếp sức  $4 \times 100$  m của Mỹ đã đạt thành tích  $38''2$ , bình quân mỗi 100 m là  $9''6$ . Điều khiến mọi người ngạc nhiên là cũng trong giải này nam vận động Mỹ Hynes lần đầu tiên đã phá kỉ lục ở nội dung 100m 10 giây, đạt thành tích  $9''9$ .

Điều này thật là khó hiểu! Nội dung thi đấu tiếp sức  $4 \times 100$  m do bốn người lần lượt chạy 100 m hoàn thành, kể cả mỗi người đều đạt thành tích như của Hynes là  $9''9$  thì thời gian bốn người chạy cộng lại ít nhất cũng phải là  $39''6$ , tại sao lại có thể đạt được thành tích  $38''2$  như vậy? Cuối cùng lí do là ở đâu?



Để trả lời câu hỏi này phải sử dụng lí lẽ toán học. Năm 1973 nhà toán học Mỹ Keller đã vẽ mô hình toán học cho nội dung chạy 100 m. Trong mô hình này trục hoành thể hiện đoạn đường, từ 0 đến 100 m; trục tung thể hiện tốc độ. Từ đồ thị có thể thấy vận động viên trong khoảng từ 0 đến 30 m là giai đoạn tăng tốc ; từ 30 m đến 80 m vận động viên duy trì tốc độ tương đối cao, lúc này mặc dù tốc độ có thay đổi nhưng phạm vi thay đổi không lớn; từ 80 m trở đi vì thể lực của vận động viên bị giảm sút nên tốc độ hơi giảm một chút, thế nhưng khi sắp đến đích tốc độ lại tăng lên một lần nữa, hoàn thành quá trình mà người ta gọi là "bút phá".

Mô hình Toán học trên đây đã cho chúng ta thấy, bất kỳ một vận động viên nào khi chạy 100m, tốc độ cao nhất không thể nào đạt được ngay khi xuất phát, anh ta cần phải có đoạn tăng tốc trên dưới 30 m thì mới hoàn thành quá trình tăng tốc, từ đó mà đạt được tốc độ cao nhất, mà điều này chính là nội dung chạy tiếp sức 4 x 100m có thể đáp ứng.

Trong nội dung chạy tiếp sức 4 x 100m, vận động ở vị trí số 2, 3, 4 đều có khoảng chạy lấy đà tiếp sức dài 30m. Nếu như, kĩ thuật chạy lấy đà và kĩ thuật tiếp gậy được thực hiện tốt thì bắt đầu từ vị trí thứ hai, mỗi vận động viên có thể đạt tốc độ cao nhất ở điểm xuất phát mà không giống như vận động viên thứ nhất phải trải qua một quá trình tăng tốc 30m. Bởi vậy, trừ thành tích của vận động viên thứ nhất không vượt qua thành tích cao nhất của vận động viên 100m, các vận động viên ở vị trí khác đều có thể vượt qua thành tích 100m của chính họ. Do đó, khi chạy tiếp sức cần tận dụng tốt khoảng chạy lấy đà tiếp sức 30m mới có thể đạt được thành tích tốt nhất.

## Em có thể ước tính được số cá trong ao không?

Ước tính là tính toán một cách khái quát. Có những lúc ta không thể tính toán một cách chính xác số lượng sự vật giống như là tính số cá đang bơi trong ao, sản lượng thóc trên đồng, số dân của một quốc gia .... Khi đó phải sử dụng ước tính để tìm ra con số tương đối.

Thế nhưng, tuy ước tính không phải là cách tính chuẩn xác nhưng cũng phải tìm phương pháp sao cho con số ước tính sát với con số thực tế nhất.

Chúng ta ước tính sản lượng thóc trên 1 mẫu ruộng, phương pháp thường dùng là thu hoạch phần thóc trên 1 sào ruộng (1 mẫu = 10 sào), tính sản lượng của nó rồi nhân với 10 thì sẽ tìm ra sản lượng của 1 mẫu ruộng. Có khi để giảm thiểu sai số (sai số là giá trị chênh lệch giữa giá trị ước tính được và giá trị thực tế, vì là ước tính nên không tránh khỏi có sai số, chỉ có điều là giảm bớt sai số một cách hợp lý), người ta thu hoạch đồng đều số thóc trên những mảnh đất khác nhau, sau khi tính sản lượng thì tìm được giá trị bình quân của chúng ; sau đó lại lấy giá trị bình quân nhân với 10 thì sẽ ước tính được sản lượng 1 mẫu. Phương pháp này có hiệu quả hơn so với phương pháp đầu, bởi vì có thể lúa không được trồng một cách đồng đều, chỗ thì thưa chỗ thì dày. Phép tính bình quân này chính là đã tính đến vấn đề này.

Vậy cũng dùng phương pháp này có tính được số cá ở trong ao không? Câu trả lời là không, bởi vì cá ở trong ao di chuyển không ngừng hơn nữa số cá những chỗ khác nhau là không giống nhau mà cũng không thể bắt tất cả cá trong ao lên để đếm được. Như vậy chúng ta nên làm như thế nào?

Có một cách rất hay. Trước hết hãy bắt một số cá bất kì trong ao ví dụ 100 con sau đó đánh dấu lên mình chúng rồi thả xuống ao. Một thời gian sau có thể nhận thấy số cá đã bị đánh dấu ấy đã di chuyển đến khắp mọi nơi trong ao, phân tán đều trong bầy cá. Lúc này chúng ta lại bắt thêm một số cá nữa, ví dụ 50 con, xem trong đó có bao nhiêu con đã được đánh dấu, có thể sẽ có 2 con là có kí hiệu trên mình. Vậy là trong số 50 con thì chỉ có 2 con là có kí hiệu, chiếm  $2/50$ , trong ao lại có 100 con có kí hiệu, do đó số cá sẽ là  $100/(2/50) = 2500$ . Con số này chính là số chúng ta ước tính được.

Cũng như vậy để giảm bớt sai số chúng ta cũng có thể bắt cá chia làm nhiều thời điểm khác nhau, địa điểm khác nhau, đếm ra số cá đánh dấu trong đó rồi tính tỉ lệ của chúng sau đó tìm ra giá trị bình quân của các tỉ lệ này và lấy 100 chia cho giá trị bình quân này sẽ ước tính được tổng số cá trong ao.

Tuy rằng, làm như vậy thì phức tạp một chút nhưng kết quả tính được chính xác hơn so với cách bên trên.

## Thời gian di chuyển qua lại của thuyền khi nước tĩnh và nước động có bằng nhau không?

Với tốc độ không đổi, thời gian khi thuyền máy di chuyển qua lại một lần trong nước tĩnh và trong nước động có như nhau không? Về vấn đề này, có người trả lời: "Thời gian di chuyển của hai lần này là như nhau. Bởi vì, khi nước chảy, thuyền lúc đi bị ngược dòng, tốc độ bị giảm; khi quay lại thì xuôi dòng, tốc độ sẽ tăng; vì vậy thời gian lâu khi thuyền ngược dòng và thời gian nhanh khi thuyền xuôi dòng sẽ bù trừ cho nhau, như vậy chẳng phải là bằng với thời gian khi thuyền đi và về trên mặt nước tĩnh hay sao?".

Nếu chúng ta không tính toán một cách kĩ càng, mà chỉ dựa vào kiến thức phổ thông và sự suy đoán thì ta sẽ có đáp án như trên. Thế nhưng đáp án chính xác lại không phải vậy. Chúng ta tính toán một chút là có thể biết.

Giả thiết, độ dài một chiều của mặt nước là 50 dặm, vận tốc của thuyền là 20 dặm/giờ.

Cũng với lộ trình như thế, khi nước chảy xiết, giả sử vận tốc của dòng nước là 5 dặm/1 giờ đồng hồ, vận tốc của thuyền máy vẫn là 20 dặm/ 1 giờ đồng hồ, vậy thì khi thuyền đi ngược dòng nước, thời gian cần tiêu hao là  $50/(20-5) = 3,3$  giờ đồng hồ, khi thuận chiều dòng nước thời gian cần để thuyền máy đi hết quãng đường là  $50/(20+5) = 2$  giờ đồng hồ.

Như vậy khi vận tốc dòng nước là 5 dặm/ 1 giờ đồng hồ, thời gian mà thuyền máy cần để cả đi và về là  $3,3 + 2 = 5,3$  giờ đồng hồ.

Từ kết quả tính toán nói trên cho thấy: khi nước chảy với một vận tốc nhất định, với một chiếc thuyền máy có tốc độ nhất định thì thời gian cần để thuyền đi và về phải nhiều hơn thời gian khi thuyền cũng đi một đoạn đường như vậy trong nước lặng.

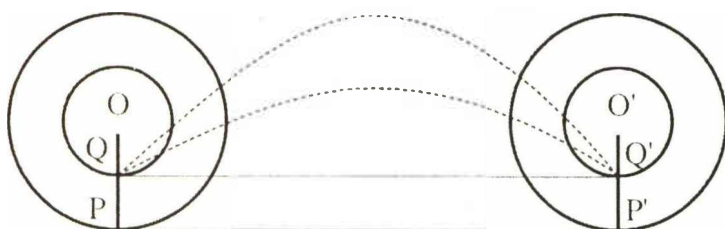
Hơn nữa qua tính toán cũng cho thấy nếu dòng nước chảy càng mạnh thì thời gian mà thuyền cần để đi và về càng nhiều.



## Khi đi xe đạp, vòng tròn trong và ngoài của bánh xe vận hành như thế nào?

Chúng ta hãy cùng xem chiếc bánh xe của xe đạp, do bên trong bánh xe có săm được bơm hơi nên chu vi của vòng mép ngoài và vòng mép trong bánh xe không giống nhau, bán kính của vòng mép ngoài dài nên chu vi cũng lớn hơn một chút.

Nhưng khi chúng ta đi xe đạp, vòng mép ngoài và vòng mép trong đồng thời chuyển động quanh trục, đoạn đường mà cả hai vòng cùng đi được là như nhau, giống như là một vòng đang chuyển động vậy. Chúng ta hãy cùng xem hình vẽ.



Chúng ta dùng hai vòng tròn đồng tâm (hai vòng tròn có cùng một tâm tròn được gọi là vòng tròn đồng tâm) để biểu thị vòng mép trong và vòng mép ngoài của bánh xe đạp. O là tâm tròn. Khi vòng ngoài bánh xe chuyển động một vòng theo đường thẳng từ điểm P tới điểm P', vòng trong bánh xe cũng đồng thời chuyển động một vòng. Bởi vì khoảng cách của PP' bằng với chu vi của vòng ngoài bánh xe, mà vòng trong bánh xe cũng chuyển động từ Q tới Q', vì vậy  $PP' = QQ'$ , vậy lẽ nào có thể suy ra rằng chu vi của vòng ngoài bánh xe bằng với chu vi của vòng trong?

Chúng ta biết rõ rằng bán kính của vòng tròn to và vòng tròn nhỏ trong hình vẽ không giống nhau, vậy thì theo công thức tính chu vi hình

tròn bằng 2 (nhân với bán kính) thì chu vi hình tròn to nhất định lớn hơn chu vi hình tròn nhỏ, mà hình vẽ ở trên của chúng ta cũng rất chính xác, vậy rốt cục là sai ở đâu?

Chúng ta hãy thử làm như sau: cắt hình tròn nhỏ ra khỏi hình tròn lớn và để cho điểm Q trùng với điểm P, vòng tròn nhỏ cũng chuyển động một vòng theo đường thẳng mà vòng tròn lớn chuyển động, chúng ta hãy xem xem điểm Q' có trùng với điểm P' không. Lúc này bạn sẽ thấy điểm Q' không trùng với P', QQ' sẽ nhỏ hơn PP'.

Vậy suy đoán của chúng ta theo hình vẽ là sai. Nguyên nhân là khi vòng tròn lớn chuyển động, vòng tròn nhỏ trong vòng tròn lớn ngoài việc tự chuyển động thì đồng thời một mặt khác cũng được vòng tròn lớn đẩy đi về trước. Điều này giống như một người lớn đang dắt một em bé đi bộ, mặc dù hai người đều "đi" một quãng đường như nhau, nhưng có một phần đoạn đường em bé đi là được người lớn kéo đi, không phải là em bé đã tự mình đi cả đoạn đường.

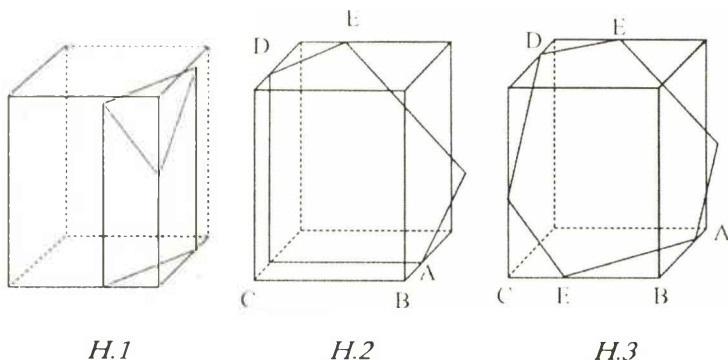
Do đó khi bánh xe chuyển động, điểm P chuyển động một vòng còn điểm Q chuyển động một vòng và đồng thời được kéo về phía trước. Trong toán học đoạn đường mà điểm P đi được gọi là "đường vòng", còn đoạn đường mà điểm Q đi được gọi là "đường lênh vòng".

## **Làm sao để cắt một bánh đậu phụ thành các hình ba cạnh, bốn cạnh, năm cạnh, sáu cạnh mà chỉ bằng một nhát cắt?**

Đưa cho bạn một bánh đậu phụ to hình vuông, yêu cầu bạn mỗi lần chỉ dùng một nhát cắt để lần lượt cắt các hình ba cạnh, bốn cạnh, năm cạnh, sáu cạnh, bạn có thể cắt được không?

Để cắt hình ba cạnh, tức là hình tam giác thì vô cùng đơn giản, bạn chỉ cần lấy dao cắt một góc đậu phụ nhỏ là được rồi.

Để cắt hình bốn cạnh: hãy tận dụng một cạnh của hình tam giác vừa cắt để cắt một nhát thẳng xuống phía đáy là ngay lập tức có được hình bốn cạnh, hơn nữa còn là một hình bình hành!



Để cắt hình năm cạnh: hình vẽ 2 chính là ví dụ thể hiện cách cắt hình năm cạnh. Chúng ta chọn một cạnh nhỏ DE từ một góc của bánh đậu phụ, từ DE cắt nghiêng một nhát, phải cắt sao cho nhát cắt này cắt đến cạnh AB, như thế là ta đã cắt được một hình năm cạnh rồi.

Để cắt hình sáu cạnh: cũng như khi cắt hình năm cạnh nhưng ta không chỉ cắt tới cạnh AB mà còn cắt đến cả cạnh BC là chúng ta đã có được một hình sáu cạnh.

Có còn cắt được hình bảy cạnh, hình tám cạnh không? Đáp án là không, bởi vì mỗi bánh đậu phụ là một khối lập phương chỉ có sáu mặt, mà một nhát cắt nhiều nhất chỉ cắt được một mặt có một cạnh đi qua, sáu mặt nhiều nhất chỉ có sáu cạnh, vì thế một nhát cắt nhiều nhất cũng chỉ cắt được sáu cạnh, không thể cắt được các hình bảy cạnh, tám cạnh nữa.

Do đó nếu bạn muốn cắt hình tam giác thì hãy dùng dao cắt ba mặt; cắt hình bốn cạnh thì hãy cắt bốn mặt... cứ tiếp tục như vậy theo nguyên tắc này bạn sẽ cắt được hình mà bạn muốn, vậy thì tại sao bạn lại không thử xem nhỉ?

## Làm thế nào để chia đều 8 lít dầu trong thùng dầu?

Có một câu đố như thế này: chúng tôi có một thùng dầu chứa 8 lít dầu, ngoài ra còn có hai bình nhỏ nữa, một bình chứa được 5 lít dầu, một bình chứa được 3 lít dầu; nếu phải dùng hai chiếc bình này để chia đều thùng dầu 8 lít thành hai phần 4 lít thì nên làm như thế nào?

Bạn có thể thử làm trước rồi hãy xem đáp án nhé.

Các bước chia đều 8 lít dầu như sau:

- (1) Trước tiên đổ 3 lít dầu từ thùng dầu vào chiếc bình nhỏ;
- (2) Sau đó đổ 3 lít dầu từ chiếc bình nhỏ vào chiếc bình lớn;
- (3) Tiếp đó lại đổ 3 lít dầu từ thùng dầu vào chiếc bình nhỏ;
- (4) Lại đổ dầu ở trong bình nhỏ vào đầy chiếc lớn. Do chiếc bình lớn chỉ chứa được 5 lít dầu nên trong bình nhỏ lúc này còn lại 1 lít dầu.
- (5) Đổ 5 lít dầu ở bình lớn vào lại thùng dầu, lúc này trong thùng dầu có tổng cộng 7 lít dầu;
- (6) Đổ 1 lít dầu ở trong bình nhỏ vào bình lớn;
- (7) Tiếp đó lại lần thứ 3 đổ 3 lít dầu từ thùng dầu vào đầy chiếc bình nhỏ, lúc này trong thùng dầu còn 4 lít dầu;
- (8) Đổ 3 lít dầu ở bình nhỏ vào lại bình lớn, cộng với 1 lít dầu đang có trong bình lớn thì vừa đúng 4 lít dầu.

Như vậy thông qua 8 bước nói trên, 8 lít dầu đã được chia đều. Không biết đáp án của bạn có giống như vậy không? Nếu không có đáp án, bạn hãy xem các bước nói trên, và hãy thử giải đáp câu hỏi sau:

Có một thùng chứa đầy 10 lít dầu, ngoài ra có 2 chiếc bình, một chiếc bình chứa vừa đúng được 3 lít dầu, một thùng khác chứa được 7 lít dầu. Xin hỏi làm thế nào để chia đều 10 lít dầu thành 2 phần 5 lít dầu bằng hai chiếc bình nói trên?

Đáp án của câu hỏi này cũng tương tự như cách làm ở trên, bạn hãy làm giống như các bước nói trên sẽ nhanh chóng có được đáp án chính xác. Có lẽ bạn cho rằng cách làm như vậy là một sự trùng hợp tình cờ, thực ra không phải như vậy mà ở đây có chứa đựng nguyên lý toán học của nó.

Số lít dầu mà hai chiếc bình chứa được là 5 và 3, đây là hai số hồ chất, các số hồ chất có tính chất như thế này: sau nhiều lần tính toán cộng, trừ sẽ có được kết quả là 1, nếu lại lặp lại nhiều lần nữa thì có thể có được bất kỳ số chẵn nào.

Ví dụ như  $3 + 3 - 5 = 1$ , mà  $4(3 + 3 - 5) = 3 \times 8 - 5 \times 4 = 4$ , đây chính là số mà chúng ta cần. Điều này có nghĩa là sau mấy lần đổ đi đổ lại, chúng ta nhất định có được 1 lít dầu, như vậy theo lí thuyết chúng ta lặp đi lặp lại 4 lần thao tác như trên thì sẽ được 4 lít dầu mà chúng ta cần. Nhưng trên thực tế, chúng ta không cần phải làm tới 4 lần, bởi vì có 1 chiếc bình 3 lít dầu mà  $3 + 1 = 4$ , cho nên chúng ta sẽ nhanh chóng chia đều được 8 lít dầu.

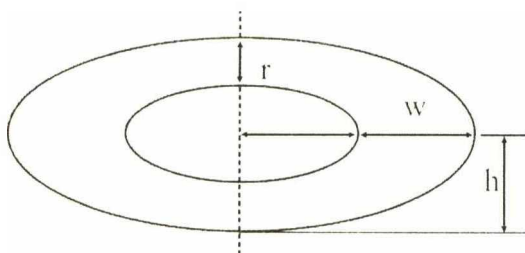
## Sức nâng của phao bơi lớn đến mức nào?

Hầu hết ai đã từng đi bơi cũng biết tới phao bơi, khi bạn vui chơi nô đùa trong nước với chiếc phao bơi đầy màu sắc, bạn có từng nghĩ rằng, sức nâng của phao bơi lớn đến mức nào, tại sao nó lại có thể giúp một người nổi trên mặt nước?

Vậy sức nâng của phao bơi được tính toán như thế nào? Các kiến thức toán học cho chúng ta biết rằng, lấy thể tích của phao bơi sau khi được bơm căng nhân với mật độ của nước rồi trừ đi độ nặng của chính phao bơi, ta sẽ có được kết quả về sức nâng của phao bơi.

Về mật độ của nước thường được tính bằng đơn vị  $1\text{kg}/1\text{m}^3$ , cũng có nghĩa là mật độ của nước trong mỗi một  $\text{cm}^3$  là  $1\text{g}$ . Sau đây chúng ta cùng xem thể tích của phao bơi được tính như thế nào?

Trước tiên hãy bơm căng hơi cho phao bơi, sau đó dùng thước có khắc vạch độ để đo 3 loại số liệu dưới đây: (1) độ rộng  $w$  của hình vòng, được biểu thị như hình vẽ, đây là độ rộng của vòng phao bơi sau khi được bơm căng hơi, chú ý là khi đo phải để thước qua đường trục trung tâm của phao bơi thì kết quả đo được mới tương đối chuẩn xác. (2) độ cao  $h$  của phao bơi: đặt phao bơi nằm trên mặt đất để đo độ cao của nó. (3) đường kính trong  $r$  của phao bơi sau khi bơm hơi.



Sau khi đo được 3 số liệu nói trên, thể tích của phao bơi sẽ được tính theo công thức sau:

$$V = 1/2 (\pi)^2 \times w \times h \times (r + 1/2w)$$

Trong đó,  $\pi = 3,14$ ,  $w$ ,  $h$ ,  $r$  lần lượt là độ rộng vòng, độ cao và độ dài đường kính trong của phao bơi.

Chúng ta hãy lấy một ví dụ cụ thể để tính toán. Có một loại phao bơi bằng nhựa khi chưa bơm hơi có đường kính tròn của mép ngoài cùng là 75 cm, sau khi bơm căng hơi đo được độ rộng là  $w = 17$  cm, độ cao  $h = 13$  cm, đường kính trong của hình vòng là  $r = 15,5$  cm, phao nặng 170g. Thay các số liệu này vào công thức tính ta có:

$$V = 1/2 \times 3,14^2 \times 17 \times 13 \times (15.5 + 17/2) = 26148 \text{ cm}^3$$

Như vậy sức nâng của chiếc phao bơi này khoảng chừng 254,5 Newton.

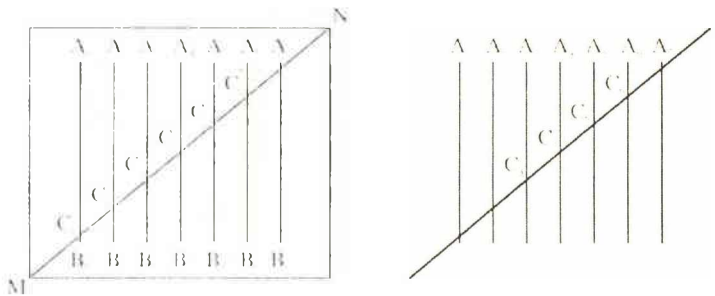
Do khi người ở trong nước cũng chịu sức nâng của nước, cộng thêm sức nâng của phao bơi nên hoàn toàn có thể nổi người trên mặt nước, vì vậy phao bơi còn có tên gọi là phao cứu sinh.

## Đoạn đường thẳng thực sự biến mất sao?

Đây là một thí nghiệm nhỏ rất thú vị, chúng ta hãy cùng làm xem nhé.

Hãy lấy ra một tờ giấy hình chữ nhật, trên đó vẽ lên 7 đường thẳng song song có khoảng cách đều nhau (như hình 1). Tiếp đó cắt tờ giấy thành hai nửa theo đường chéo MN, sau đó lấy mảnh giấy phía dưới chuyển động theo đường cắt thành như hình 2. Bạn sẽ ngạc nhiên thấy rằng, chỉ còn có 6 đoạn thẳng, vậy là làm sao nhỉ?

Thì ra, khi chúng ta cắt tờ giấy thành hai nửa theo đường chéo như hình 1, 7 đoạn thẳng trong hình đã được cắt thành 12 phần (lưu ý là không phải 14 phần). Khi ghép hình lại thành như hình 2, 12 phần tạo thành 6 đoạn thẳng, mỗi đoạn đều dài hơn lúc ban đầu là  $1/6$ .





Giả sử mỗi đoạn đường thẳng ở hình 1 có độ dài là 6 cm, vậy theo định lý đoạn cắt đường thẳng song song, ta có:

$$A1B1 = 6\text{cm}$$

$$A2B2 = A2C2 + C2B2 = (5 + 1) \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$A3B3 = A3C3 + C3B3 = (4 + 2) \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

.....

$$A6B6 = A6C6 + C6B6 = (1 + 5) \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$A7B7 = 6\text{cm}$$

Còn trong hình 2, đoạn thẳng đầu tiên bên trái là do đoạn A1B1 và C2B2 nối tiếp với nhau tạo thành, nó tương đương với  $(6 + 1) = 7$  cm, cũng như vậy, đoạn thẳng số hai là do đoạn A2C2 và A3C3 nối tiếp tạo thành, nó bằng  $(5 + 2) = 7$  cm.

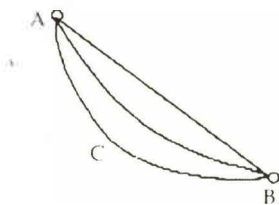
Tương tự như vậy, đoạn số ba, số bốn, số năm và số sáu cũng bằng 7 cm.

Tổng độ dài của 7 đoạn thẳng trong hình 1 là  $6 \text{ cm} \times 7 = 42 \text{ cm}$ , 6 đoạn thẳng ở hình 2 có tổng độ dài là  $7 \text{ cm} \times 6 = 42 \text{ cm}$ , như vậy tổng độ dài của các đoạn thẳng ở hai hình đều không biến đổi, chỉ có cách nối các đoạn thẳng là biến đổi, đây chính là sự thần kỳ của "trò ảo thuật" này.

## Quả cầu lăn từ máng nghiêng xuống theo đường nào mất ít thời gian nhất?

Muốn để một quả cầu kim loại lăn theo máng nghiêng tron từ điểm cao A xuống điểm B nên làm máng nghiêng thành hình gì để thời gian quả cầu rơi là ít nhất?

Câu hỏi này nghe qua có vẻ chẳng khó chút nào, khoảng cách đường thẳng giữa hai điểm ngắn nhất thì chỉ cần làm máng nghiêng thành hình thẳng, đường đi của quả cầu ngắn nhất thì cũng sẽ mất ít thời gian nhất? Nhưng thời gian để quả cầu rơi không chỉ có quan hệ tới đoạn đường cầu sẽ đi, mà còn có liên quan vận tốc của quả cầu. Đường đi thẳng của máng nghiêng là ngắn nhất nhưng nó không giúp cho quả cầu rơi với thời gian nhanh nhất.



Vậy nếu xét tới yếu tố tốc độ rơi của quả cầu, có thể làm máng nghiêng thành hình cung tròn. Như vậy đường đi của quả cầu khi rơi từ điểm A xuống sẽ tương đối dốc, tốc độ chắc chắn sẽ nhanh hơn máng thẳng. Quả thực là như vậy, đoạn cong của hình cung tròn khi rơi từ điểm A xuống sẽ có tốc độ khá nhanh nhưng sau khi đến điểm C, đoạn đường CB sẽ tương đối bằng phẳng cho nên ở nửa đoạn trước quả cầu mặc dù chạy nhanh nhưng đến nửa đoạn sau lại chạy chậm, thời gian mà quả cầu cần khi đến B vẫn chưa chắc nhanh hơn thời gian mà quả cầu lăn theo máng thẳng?

Vậy rốt cuộc nên làm chiếc máng theo hình dạng gì? Nhà vật lý học kiêm nhà thiên văn học người Italy Galilê đã từng cho rằng nên làm chiếc máng thành hình cung tròn. Nhưng 50 năm sau, anh em nhà toán học người Thụy Sĩ Bernoulli sau khi tính toán chính xác tỷ mỉ đã chứng minh không nên làm như vậy, chiếc máng này nên làm thành hình vòng cung cong gấp thành đường võng, chiếc máng hình dưới cùng như trong hình vẽ chính là hình vòng cung đường võng. Vì thế đường võng được gọi là "đường đi xuống với tốc độ nhanh nhất".

Thế nào là đường võng? Chúng ta lấy một hình vòng tròn (ví dụ như một cái bánh xe, một vòng chun...), trên vòng tròn đó đánh dấu một điểm (lấy phần đánh dấu điểm đó, hoặc đánh dấu bằng một sợi dây buộc nhỏ), để cho vòng tròn chuyển động một vòng trên mặt đất, lúc này đường mà điểm đánh dấu đi qua chính là đường võng, là một đường gấp khúc gần với cung tròn.

Phương pháp tính đường võng của anh em Bernoulli sau này phát triển thành một ngành toán học mới là biến phân học, có tác dụng to lớn trong lịch sử toán học.

## Bạn có vẽ được hình dạng của bông hoa tuyết không?

Ở những nước có tuyết rơi, vào mùa đông những bông tuyết bay khắp bầu trời, chúng trắng sáng lấp lánh, tô điểm cho không gian một

màu trắng bạc lấp lánh thật là đẹp. Bạn đã từng nhìn thấy bông tuyết bao giờ chưa? Bạn có biết hình dạng của bông tuyết như thế nào không?

Bạn có thể bảo rằng, hình dạng của bông tuyết là hình lục giác. Bạn nói đúng rồi, bông hoa tuyết quả thực là có hình lục giác. Nhưng nó không phải là hình lục giác thông thường mà là những đường gấp khúc hoa tuyết kỳ diệu.

Các bạn hãy xem những hình vẽ dưới đây, bạn thấy hình vẽ nào giống hình bông tuyết mà bạn đã nhìn thấy?

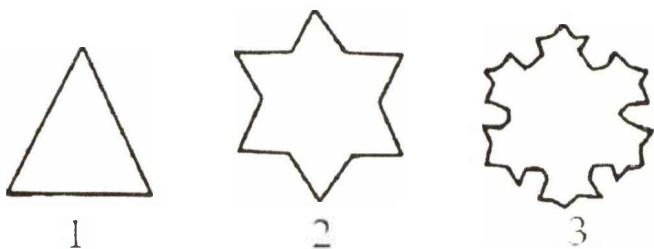
Đương nhiên chúng ta đều nhận ra rằng hình số 3 giống hình bông hoa tuyết nhất. Thực ra hình số 3 có được là dựa trên cơ sở của hình số 1 và hình số 2. Nhà toán học người Thụy Điển Von Korch đã tạo ra đường gấp khúc hoa tuyết trên mô hình hoa tuyết trong tự nhiên. Vậy đường gấp khúc hoa tuyết được vẽ như thế nào?

Bước 1 là vẽ một hình tam giác đều (tức là hình tam giác có 3 cạnh bằng nhau) như hình 1;

Bước 2: chia đều ba cạnh của hình tam giác này thành ba phần như nhau, sau đó xoá đi đoạn  $\frac{1}{3}$  ở giữa rồi từ hai đầu mép của đoạn giữa này kéo dài ra ngoài tạo nên một hình tam giác đều nữa, như hình vẽ số 2;

Bước 3: làm lại thao tác như bước 2, chia đều từng cạnh của hình 2 thành 3 đoạn, xoá đi đoạn ở giữa mỗi cạnh và lại tạo ra một hình tam giác đều ở chính đoạn giữa của mỗi cạnh này, như vậy sẽ tạo ra được hình vẽ như hình 3;

Bước 4: lại tiếp tục chia đoạn ở hình 3, cứ tiếp tục làm như vậy cho đến khi mỗi cạnh trở lên vô hạn nhỏ.



Vậy bạn tưởng tượng mà xem, khi đó răng cưa trên bông hoa tuyết sẽ càng ngày càng nhiều, càng lúc càng dày, quả thực là phức tạp đến không thể tưởng tượng được. Thực ra, vẽ đến vô hạn là bao nhiêu nhỉ?

Điều này không bao giờ thực hiện được, vì thế đường gấp khúc hoa tuyết cũng không bao giờ vẽ hết được, đó là một đường gấp khúc lý tưởng mà chúng ta tưởng tượng ra.

Cách làm này trong toán học gọi là "hình học phân hình" (hình học Fractal), đường gấp khúc hoa tuyết gọi là "đường gấp khúc phân hình". Độ dài của đường gấp khúc phân hình này không thể đo hết được, bởi vì đường gấp khúc kiểu hoa tuyết không thể vẽ hết ra được, do đó độ dài đường gấp khúc là vô hạn. Nó cũng giống như không thể đo được độ dài đường bờ biển của nước ta một cách chuẩn xác. Bởi vì nó thiên biến vạn hóa, bạn không thể biết được lúc nào lại có một tảng đá chồi lên thành lục địa, khi đó độ dài của đường bờ biển lại tăng thêm; đồng thời lại còn lục địa biến thành biển, nên không thể nào có được một kết luận chính xác.

Vậy nếu nhìn thấy bông hoa tuyết, hãy nhớ nó là đường gấp khúc phân hình kỳ diệu nhé!

## Làm sao tính nhanh ra một ngày bất kì là ngày thứ mấy?

Nếu tôi chọn ra một ngày bất kỳ trong quá khứ hoặc tương lai, cho bạn biết ngày, tháng, năm của hôm đó thì bạn có thể nhanh chóng tính ra xem ngày hôm đó là thứ mấy được không?

Có thể bạn cho rằng phải tìm trong lịch vạn niên, nhưng nếu dùng lịch vạn niên thì không thể gọi là tính nhanh nữa rồi. Chúng tôi sẽ cung cấp cho bạn một công thức tính nhanh mà không cần phải dùng tới lịch vạn niên.

$$S = X + [(X-1)/4] - [(X-1)/100] + [(X-1)/400] + C$$

Trong công thức này, X là số năm theo dương lịch, ví dụ năm 2004, năm 2005; C là số ngày tính từ ngày đầu tiên của năm đó tới ngày hôm đó (bao gồm cả ngày hôm đó). Phép chia trong ba dấu móc phải lấy kết quả chẵn tức là nếu chia ra có phần dư thì chúng ta sẽ bỏ qua mà chỉ lấy phần chẵn, ví dụ 501,5 thì lấy chẵn là 501. Sau khi có được kết quả S, lấy S chia cho 7, số dư của kết quả tìm được chính là thứ mấy mà chúng ta cần tìm, nếu dư 1 thì là chủ nhật, dư 2 là thứ 2,..... dư 7 là thứ 7.

Công thức này cũng khá đơn giản, dưới đây chúng ta thử tính xem ngày 1 tháng 6 năm 2000 là thứ mấy nhé?

Theo công thức trên chúng ta cùng tính giá trị S:

$$\begin{aligned} S &= 2000 + [(2000-1)/4] - [(2000-1)/100] + [(2000-1)/400] + 153 \\ &= 2000 + 499 - 19 + 4 + 153 \\ &= 2637 \end{aligned}$$

$$S/7 = 2637/7 = 376 \text{ dư ra } 5$$

Vì thế ngày mùng 1 tháng 6 năm 2000 là ngày thứ 5.

Các bạn thấy chưa, tính như vậy rất là đơn giản phải không! Nhưng khi tính chúng ta phải lưu ý tới năm nhuận, ví dụ năm 2000 là năm nhuận, tháng 2 của năm nhuận có 29 ngày chứ không phải là 28 ngày như năm thường, vì thế khi tính toán chúng ta không được quên điều này.

Bây giờ bạn có thể theo công thức nói trên tính xem ngày sinh nhật của bạn là thứ mấy nhé!

## Tại sao lại có năm nhuận và tháng nhuận?

Lấy ví dụ năm 2000, tháng 2 năm 2000 có 29 ngày, nếu như bạn giờ lịch ra xem sẽ thấy tháng 2 năm 1999 chỉ có 28 ngày, rồi tháng 2 năm 1998 cũng chỉ có 28 ngày. Chúng ta gọi những năm mà tháng 2 chỉ có 28 ngày là năm thường còn năm mà tháng 2 có 29 ngày là năm nhuận.

Vậy tại sao phải chia ra năm thường và năm nhuận?

Theo thiên văn học gọi thời gian mà trái đất quay quanh mặt trời từ điểm xuân phân trở về điểm xuân phân là chu kỳ 1 năm, độ dài của nó không phải là 365 ngày mà chính xác là 365,2422 ngày, vậy số thừa ra của mỗi năm thì làm thế nào? Trước đây người ta lấy 365,25 là chu kỳ 1 năm thì mỗi năm dài thêm 11 phút 14 giây. Xem ra sai số như vậy không lớn lắm nhưng tích lũy lại thì không nhỏ chút nào, tính từ năm 46 trước công nguyên tới thế kỷ 16 thì chênh ra tới 10 ngày, kết quả là ngày xuân phân là ngày 21 tháng 3 phải sớm thành ngày 11 tháng 3. Vì thế người ta đành phải quy định ngày 5 tháng 10 của năm 1582 thành ngày 15 tháng 10 để bù lại 10 ngày bị mất.

Để tránh sau này lại xuất hiện tích lũy sai số, người ta quy định như sau, tất cả những năm dương lịch chia hết cho 4 là năm nhuận; những

năm chẵn trăm thì phải chia hết cho 400 mới là năm nhuận. Ví dụ như năm 1996 là năm nhuận, năm 2000 chia hết cho 400 thì cũng là năm nhuận, nhưng năm 2200 không phải là năm nhuận.

Năm nhuận là năm dương lịch nhưng tháng nhuận lại là hiện tượng của năm âm lịch. Ví dụ năm 1998 có tháng 5 nhuận, năm này có 2 tháng 5, vậy là tại sao nhỉ?

Chúng ta đều biết, chỉ có một số nước như Việt Nam, Trung Quốc là có tính năm âm lịch, ví dụ như ngày 4 tháng 2 lập xuân, ngày 22 tháng 12 là ngày đông chí... ; âm lịch phản ánh sự biến đổi tròn khuyết của mặt trăng (cũng như sự lên xuống của nước biển) và thời tiết nóng lạnh. Âm lịch quy định tháng đủ có 30 ngày, tháng thiếu là 29 ngày. Bởi thời gian một chu kỳ thay đổi của mặt trăng là 29,5306 ngày, như vậy giá trị trung bình của vài tháng sẽ gần với thời gian một chu kỳ biến đổi của mặt trăng. Vì vậy người ta quy định năm thường có 12 tháng, cả năm là 364 hoặc 365 ngày; bình quân chênh lệch với năm dương lịch là 10 ngày 21 tiếng, để sửa đổi sai số này người ta quy định cứ 3 năm có một năm nhuận, 5 năm lại tái nhuận, 19 năm 7 nhuận để kết hợp được cả năm và tháng. Năm nhuận của âm lịch có 13 tháng, cả năm là 384 ngày. Chính sự sắp xếp như vậy mới tạo ra sự chênh lệch các ngày của mỗi tháng không quá lớn. Vì thế tháng nhuận của âm lịch thực chất là năm nhuận của năm âm lịch, nó được đặt ra để phù hợp với dương lịch.

Do việc ghi năm âm lịch về cơ bản không được cố định như dương lịch hơn nữa cách tính toán rất phức tạp, số ngày chênh lệch giữa năm thường và năm nhuận khá lớn nên dùng dương lịch sẽ phổ biến và thuận tiện hơn nhiều so với âm lịch.

## **Khi cửa hàng nhập hàng, để đảm bảo chất lượng của sản phẩm có phải kiểm tra tất cả các loại hàng hoá hay không?**

Khi chúng ta đi mua hàng đều mong muốn mua được hàng hoá có chất lượng tốt, chẳng hạn chúng ta đều phải xem các loại giấy tờ chứng minh chất lượng sản phẩm, hạn sử dụng của sản phẩm, ngày sản xuất...



Thực chất khi cửa hàng nhập hàng về cũng rất chú trọng tới chất lượng của hàng hoá, để duy trì uy tín của bản thân cửa hàng họ nhất định cũng rất nghiêm khắc trong khâu chất lượng này. Vậy khi cửa hàng một lúc phải nhập một số lượng lớn hàng hoá thì có phải kiểm tra từng sản phẩm một hay không? Họ làm thế nào để làm tốt việc kiểm tra chất lượng này?

Nói chung, nhà sản xuất sản phẩm cũng muốn đảm bảo uy tín cho bản thân nên tất cả các sản phẩm đều có dán tem sản phẩm đảm bảo chất lượng xuất xưởng, có giấy chứng minh chất lượng và các giấy tờ bảo hành, chế độ hậu mãi. Nhân viên đi nhập hàng không những phải xem xét cẩn thận các giấy tờ này mà còn phải kiểm tra trực tiếp các sản phẩm nhập về.

Lấy ví dụ một cửa hàng nhập một lô hàng bóng đèn điện từ một nhà sản xuất, sách hướng dẫn sử dụng sản phẩm của nhà sản xuất đảm bảo lô bóng đèn này có tuổi thọ sử dụng trung bình ít nhất là 2000 giờ đồng hồ, sai số tiêu chuẩn là 200 giờ đồng hồ. Cửa hàng khi kiểm tra hàng sẽ lấy ra bất kỳ 10 chiếc bóng đèn để kiểm tra xem chất lượng của lô bóng đèn này có đúng như nhà sản xuất nói hay không.

Giả sử tuổi thọ kiểm tra của 10 chiếc bóng đèn này là như sau: 2250, 1580, 1790, 3020, 1850, 2360, 1430, 2050, 1960, 1690 (giờ đồng hồ)

Lấy giá trị trung bình của 10 số nói trên, ta được là 1998 giờ đồng hồ. Vậy là ít hơn 2000 giờ đồng hồ, nhưng nằm trong phạm vi sai số tiêu chuẩn 200 giờ đồng hồ, điều này phải chăng cho thấy chất lượng của lô sản phẩm này không được như nhà sản xuất đảm bảo, vì thế cửa hàng không nên nhập lô hàng này về?

Thực ra cửa hàng nên nhập lô hàng này. Phía nhà sản xuất đảm bảo 2000 giờ đồng hồ là giá trị trung bình cho tuổi thọ sử dụng của tất cả số bóng đèn, còn cửa hàng chỉ lấy ra 10 chiếc để kiểm tra, kết quả kiểm tra này mang tính ngẫu nhiên nên không thể hoàn toàn thể hiện được tổng thể chất lượng của tất cả lô hàng bóng đèn. Do sai số tiêu chuẩn là 200 giờ đồng hồ mà sự chênh lệch giữa 1998 và 2000 là trong phạm vi 200 giờ đồng hồ cho nên cửa hàng có thể nhập lô hàng này.

Trong toán học dùng phương pháp thống kê để kiểm tra chất lượng của một lượng lớn sản phẩm, tức là chỉ khảo sát kết quả kiểm tra của một số sản phẩm, ví dụ như kiểm tra 10 chiếc bóng đèn trong ví dụ vừa này, từ đó để khảo sát chất lượng hay độ đảm bảo của toàn bộ lô hàng. Cửa hàng cũng có thể lấy thêm 10 chiếc bóng khác, làm lại việc kiểm tra với

10 chiếc bóng này để có được kết quả trung bình. Nếu kết quả kiểm tra nhiều lần đều nằm trong phạm vi sai số tiêu chuẩn thì có thể cho rằng lô hàng này là đảm bảo chất lượng.

Nếu nhà sản xuất sản xuất sản phẩm có chất lượng thực sự, thì tuyệt đại đa số các bóng đèn đều phải có tuổi thọ xấp xỉ với tuổi thọ trung bình, nhưng chiếc có tuổi thọ sử dụng chênh lệch quá lớn với tuổi thọ trung bình chỉ chiếm rất ít. Đường gấp khúc thống kê thể hiện ở dạng ở giữa, cao, hai bên thấp thì bất kỳ lấy như thế nào thì tuổi thọ sử dụng bình quân của 10 chiếc bóng đèn đều phải xấp xỉ 2000 giờ đồng hồ.

Ngược lại, nếu nhà sản xuất tạo ra sản phẩm giả mạo thì tỷ lệ đạt yêu cầu khi kiểm tra không thể cao như nhà sản xuất đã nêu ra. Nếu nhiều lần kiểm tra đều thấy tuổi thọ trung bình của bóng đèn đều chênh lệch quá 200 giờ đồng hồ so với 2000 giờ đồng hồ thì nên từ chối nhập lô hàng.

## **Găng tay sạch đảm bảo cho bác sĩ và bệnh nhân không truyền bệnh lẫn nhau nên có mấy chiếc?**

Trong một bệnh viện ở một nơi xa xôi có 3 vị bác sĩ: Kings, Smith và Robertson. Khi tù trưởng của bộ lạc bị nghi là mắc phải một căn bệnh rất dễ truyền nhiễm, ông ta yêu cầu ba vị bác sĩ mỗi người phải kiểm tra cho ông ta một lần.

Khi kiểm tra bệnh nhân, các bác sĩ nhất thiết phải đeo găng tay cao su. Nếu bác sĩ bị nhiễm căn bệnh kỳ quái này thì vi khuẩn sẽ truyền nhiễm vào bên trong của găng tay mà ông ta đeo; nếu tù trưởng mắc phải căn bệnh này thì sẽ truyền nhiễm vào bên ngoài găng tay mà bác sĩ kiểm tra cho ông ta đã đeo.

Trước khi kiểm tra, cô y tá Kerina nói với họ rằng chỉ còn có 2 đôi găng tay đã được khử trùng, một đôi màu xanh lam, một đôi màu trắng. Vậy ba vị bác sĩ phải đeo găng tay như thế nào để họ hoặc tù trưởng đều không có khả năng bị nhiễm bệnh?

Trong lúc các vị bác sĩ đang không biết làm thế nào thì cô y tá Kerina đã chỉ cho họ thấy một biện pháp hay.

Ông Smith sẽ kiểm tra cho tù trưởng trước, ông ta đeo cả hai đôi găng tay, trước tiên đeo đôi màu trắng, sau đó đeo đôi màu xanh lam; đôi màu trắng (bên trong) có khả năng bị nhiễm khuẩn bởi ông bác sĩ còn đôi màu xanh (bên ngoài) có khả năng bị nhiễm khuẩn bởi ông tù trưởng. Tiếp đó, bác sĩ Kings đeo đôi màu xanh tức là tay của ông ta tiếp xúc với mặt không bị nhiễm khuẩn (mặt bên trong găng tay màu xanh). Còn khi bác sĩ Robertson làm việc, ông ta dùng máy lật mặt trong của găng tay màu trắng ra sau đó đeo đôi găng tay này vào, vì thế tay ông ta tiếp xúc với bên ngoài của đôi găng tay màu trắng, sau đó lại đeo thêm đôi găng tay màu xanh ra ngoài đôi găng tay màu trắng nhưng găng tay màu xanh không lật ngược lại nên phần bên ngoài của đôi găng tay màu xanh vẫn ở bên ngoài.

Trong cả ba tình huống ba vị bác sĩ khám bệnh, phần tiếp xúc với ông tù trưởng vẫn chỉ là phần ngoài đôi găng tay màu xanh, trừ phi bản thân ông ta có bệnh còn nếu không ông ta không thể bị truyền nhiễm bệnh tật bởi các bác sĩ, các bác sĩ cũng không thể bị nhiễm bệnh bởi ông tù trưởng.

Sau này, mọi người đưa vấn đề này rộng ra, nếu có mấy người bác sĩ kiểm tra bệnh cho bệnh nhân tên K, để đảm bảo giữa họ và bệnh nhân không bị bất kỳ sự nhiễm khuẩn nào thì ít nhất phải dùng mấy đôi găng tay? Những nghiên cứu về vấn đề này rất có giá trị.

Vấn đề găng tay sạch được nhà toán học nổi tiếng Martin Jadera đưa ra đầu tiên, sau khi ông đưa vấn đề này ra lập tức có rất nhiều phản ứng. Mọi người đưa ra các biện pháp khác nhau, nhiều cuộc tranh luận cũng đã nổ ra, và cho đến ngày nay, vấn đề này nói chung vẫn chưa có được cách giải quyết mỹ mãn.

## Ý nghĩa của việc gieo đồng tiền xu

Bạn đã từng chơi trò gieo đồng tiền xu bao giờ chưa? Khi có một vấn đề gì không biết giải quyết như thế nào, người ta thường tung đồng tiền xu để dựa vào quyết định của ông trời.

Nếu bạn tỉ mỉ ghi lại kết quả mỗi lần tung đồng tiền xu, sau rất nhiều lần, bạn sẽ thấy số lần đồng tiền xu xuất hiện mặt phải lên trên và mặt trái lên trên đều gần như nhau, tại sao lại như vậy?

Chúng ta gọi một lần tung đồng xu là một lần thí nghiệm, trước khi tung gieo đồng xu, chúng ta không biết kết quả sẽ như thế nào, nhưng chúng ta có thể dùng toán học để giả thiết tất cả các kết quả có thể xuất hiện, sau đó tổng kết kết quả xem có tính quy luật hay không.

Giả sử "dương" thể hiện mặt phải đồng xu hướng lên trên, "âm" thể hiện mặt trái đồng xu hướng lên trên. P (dương) thể hiện khả năng mặt phải đồng xu hướng lên trên (toán học gọi là xác suất), P (âm) thể hiện khả năng mặt trái đồng xu hướng lên trên.

Khi làm một lần thí nghiệm:  $P(\text{dương}) = P(\text{âm}) = 0,5$  bởi vì một lần tung đồng xu chỉ có hai khả năng, mặt phải hướng lên trên hoặc mặt trái hướng lên trên, mỗi cái chiếm  $1/2$ .

Làm thí nghiệm 2 lần, có thể xuất hiện 4 khả năng, lần lượt là (dương, dương), (dương, âm), (âm, dương), (âm, âm)

Vậy thì  $P(\text{dương} = 2 \text{ lần}) = 0,25$  cho thấy khả năng mặt phải xuất hiện hai lần là  $1/4 = 0,25$ , tổng cộng có 4 kiểu tổ hợp.  $P(\text{dương} = 1 \text{ lần}) = 0,5$  khả năng mặt phải chỉ xuất hiện một lần là  $2/4 = 0,5$ .  $P(\text{dương} = 0 \text{ lần}) = 0,25$  tức (âm, âm), ở trường hợp này, mặt phải không xuất hiện lần nào.

Từ các số liệu trên cho thấy việc tung đồng xu 2 lần thì khả năng lớn nhất mà mỗi mặt đồng xu xuất hiện 1 lần là 0,5 còn những tình huống khác chỉ có 0,25. Tương tự như vậy, nếu làm thí nghiệm 10.000 lần, khả năng mặt phải xuất hiện 4800 lần đến 5200 lần là 99,54%, cũng tức là gần xấp xỉ 100% rồi, mặt phải xuất hiện khoảng 5000 lần, như vậy cơ hội mặt trái xuất hiện cũng gần như vậy.

Khi thí nghiệm đến 10.000 lần, chúng ta có thể có được quy luật tổng kết là, sau nhiều lần tung đồng xu, số lần xuất hiện mặt phải và mặt trái về cơ bản là như nhau.

Những bạn nhỏ thích bóng đá đều biết rằng trước khi thi đấu trọng tài có tung một đồng xu để quyết định xem đội bóng nào chọn sân bên nào và giao bóng trước, vậy với một đội bóng tham dự nhiều lần thi đấu thì số lần chọn mặt trước và mặt sau đồng tiền xu cũng gần như nhau, do đó cách tung đồng xu sẽ rất công bằng sau nhiều lần sử dụng.

## Có bao nhiêu cách kết hợp các đồng 1 xu, 2 xu, và 5 xu thành 1 hào?

Vấn đề này xem chừng không khó, chúng ta có thể thử dùng các đồng 1 xu, 2 xu và 5 xu kết hợp lại xem nhé:

(1) Tất cả đều dùng đồng 1 xu: cứ 10 đồng 1 xu kết hợp được thành 1 hào, đây là 1 cách;

(2) Dùng đồng 1 xu và đồng 2 xu: có thể dùng 1 đồng, 2 đồng, 3 đồng, 4 đồng và 5 đồng 2 xu, vì thế tổng cộng có 5 cách;

(3) Dùng 1 đồng 5 xu, còn lại 5 xu dùng 1 xu, 2 xu: có thể dùng 5 đồng 1 xu; 1 đồng 2 xu, 3 đồng 1 xu; 2 đồng 2 xu, 1 đồng 1 xu, tổng cộng có 3 cách;

(4) Tất cả đều dùng đồng 5 xu: 2 đồng 5 xu là sẽ thành 1 hào, như vậy là có 1 cách.

Vì thế khi dùng các đồng 1 xu, 2 xu, 5 xu để kết hợp thành 1 hào tổng cộng sẽ có  $1 + 5 + 3 + 1 = 10$  cách.

Nếu bạn muốn dùng đồng 1 xu, 2 xu, 5 xu, 1 hào, 2 hào, 5 hào kết hợp thành 1 đồng thì sẽ có bao nhiêu cách? Nếu như cứ tính toán như lúc trước thì không dễ dàng chút nào, vậy có cách tính nào đơn giản hơn không nhỉ?

Chắc chắn là có, nhà toán học Thụy Sĩ Euler đã đưa ra một phương pháp phổ biến, gọi là "toán pháp mẫu hàm".

Cách làm này như sau: lấy việc kết hợp thành 1 hào làm ví dụ:

Dùng 1 xu kết hợp thành 1 hào, nhiều nhất phải dùng 10 xu, ta có công thức liệt kê là  $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10})$ .

Dùng 2 xu kết hợp thành 1 hào, nhiều nhất phải dùng 5 đồng xu, ta có  $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})$ .

Dùng đồng 5 xu kết hợp thành 1 hào, nhiều nhất phải dùng 2 đồng, ta có  $(1 + x^5 + x^{10})$ .

Lấy ba phép tính trên nhân với nhau, ta có kết quả là giá trị hệ số  $x^{10}$ . Bạn hãy thử tính xem, hệ số của  $x^{10}$  chính là 10, vì thế có 10 cách.

Vậy thì với cách kết hợp các đồng xu thành đồng 1 đồng thì có bao nhiêu cách? Chúng ta dùng công thức liệt kê "toán pháp mẫu hàm":

$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})$  công thức liệt kê của 1 xu

$(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{100})$  công thức liệt kê của 2 xu

$(1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{100})$  công thức liệt kê của 5 xu

$(1 + x^{10} + x^{20} + \dots + x^{100})$  1 hào = 10 xu

$(1 + x^{20} + x^{40} + \dots + x^{100})$  2 hào = 20 xu

$(1 + x^{50} + x^{100})$  5 hào = 50 xu

Nhân triển khai dạng thức ta được hệ số của  $x^{100}$  (100 xu tương đương với 1 đồng), chính là đáp án của câu đố.

Có thể bạn cho rằng giải như vậy cũng rất là phiền phức. Đúng là như vậy, tính bằng tay để tính ra hệ số của  $x^{100}$  cũng rất khó khăn, nhưng Euler đã đưa ra được cho chúng ta một công thức chung, không cần mọi người phải tính toán máy móc nữa. Hơn nữa từ khi có công cụ máy tính thì những công thức tính toán phức tạp đến thế nào cũng đều trở lên dễ dàng rồi.

## Làm sao để 1000 chiếc đĩa vào trong 10 chiếc hộp?

Có một người muốn để 1000 chiếc đĩa vào trong 10 chiếc hộp. Anh ta chia những chiếc đĩa vào trong hộp rất giỏi, bất kể bạn muốn mượn bao nhiêu chiếc (đương nhiên không thể vượt quá 1000 chiếc), anh ta luôn luôn chỉ cần lấy vài chiếc hộp đưa cho bạn là được chứ không bao giờ cần phải mở hộp ra để đếm, mà số đĩa trong những chiếc hộp đó vừa khít với số lượng mà bạn muốn mượn. Bạn có biết anh ta sắp xếp những chiếc đĩa vào trong hộp như thế nào không?

Anh chàng này rất thông minh, anh ta đánh dấu 10 chiếc hộp lần lượt từ số (1) đến số (10), sau đó trong 10 chiếc hộp này lần lượt theo thứ tự để vào 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 489 chiếc đĩa, như vậy 1000 chiếc đĩa vừa đủ đặt vào 10 chiếc hộp. Bởi vì  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 489 = 1000$ .

Nếu bạn muốn mượn 1 chiếc, anh ta chỉ cần lấy hộp số 1 là được. Nếu bạn muốn mượn số lượng đĩa ít hơn 4 chiếc, anh ta sẽ chọn lấy giữa hộp số 1 và hộp số 2, ví dụ bạn mượn 2 chiếc, anh ta lấy cho bạn hộp số



2, mượn 3 chiếc, anh ta lấy ra hộp số 1 và số 2. Nếu bạn mượn số lượng ít hơn 8 chiếc, anh ta chỉ cần tính toán giữa hộp số 1 đến hộp số 3 rồi lấy ra được đúng số đĩa bạn cần mượn. Ví dụ bạn mượn 6 chiếc đĩa, anh ta lấy cho bạn hộp số 2 và 3, vì  $2 + 4 = 6$ ; bạn mượn 7 chiếc đĩa, anh ta lấy hộp số 1, số 2, số 3, vì  $1 + 2 + 4 = 7$ . Cứ suy lần lượt như vậy, nếu bạn cần số lượng đĩa ít hơn con số 512 chiếc, chỉ cần tính toán giữa các hộp số 1 đến số 9 là được, không tin bạn cứ thử tính mà xem.

Điều này quả là kỳ diệu. Tại sao dãy số liệt kê này lại có tính chất tuyệt vời như vậy nhỉ? Bởi vì mỗi một số tự nhiên đều có thể dùng các số trong dãy 1, 2, 4, 8, 16, 32... để biểu thị. Ví dụ:  $1 = 1$ ,  $2 = 2$ ,  $3 = 1 + 2$ ,  $4 = 4$ ,  $5 = 1 + 4$ ,  $6 = 2 + 4$ ,  $7 = 1 + 2 + 4$ ,  $8 = 8$ ,  $9 = 1 + 8$ ,  $10 = 2 + 8$ ,  $11 = 1 + 2 + 8$ ,.... hơn nữa, chắc bạn cũng thấy rằng, dãy số này có tính quy luật, đó là cứ hai số liền kề nhau thì số sau gấp hai lần số trước, chẳng hạn như 8 và 16, 16 và 32, 32 và 64, 64 và 128, 128 và 256.

Bạn cũng có lẽ sẽ thắc mắc: trong hộp số 10 có 489 chiếc đĩa, vậy là không phải gấp đôi của 256 trong hộp thứ 9? Bởi vì trong đề bài chỉ đề cập tới 1000 chiếc đĩa, cho nên trong hộp số 10 chỉ có thể là 489 chiếc mà không phải là 512 chiếc. Nếu theo như quy luật sắp xếp của tổ hợp số này thì hộp số 10 nên là 512 chiếc, nhưng nếu vậy thì tổng số lại là 1032 chiếc đĩa rồi.

Do số lượng yêu cầu là 1000 chiếc đĩa, chứ không phải là 1032 chiếc, nên đáp án chính xác của đề bài này không chỉ có một, nếu trong hộp số 9 bạn để vào 245 chiếc thì hộp số 10 sẽ đựng 500 chiếc, còn những hộp khác không thay đổi, đây cũng là một đáp án chính xác. Nếu tổng số lượng đĩa là 1032 chiếc thì chỉ có một đáp án duy nhất mà thôi.

## **Nhà thám hiểm đi theo hình vuông, tại sao lại biến thành hình tam giác?**

Một nhà thám hiểm nói rằng có một lần ông ta đi về phía nam 2000m, lại đi về phía đông 2000m, rồi đi về phía bắc 2000m, kết quả là ông ta lại trở về đúng chỗ cũ. Lúc đầu, mọi người đều không tin, cho rằng ông ta nhất định là phải đến phía đông của nơi xuất phát hơn nữa

phải cách điểm xuất phát 2000m. Nhưng khi nhà thám hiểm giải thích, mọi người mới biết điều ông ta nói là đúng sự thực. Bạn có biết nguyên do vì sao không?

Nếu chúng ta vẽ đường đi của nhà thám hiểm lên trên một tờ giấy, chúng ta sẽ có được một hình dạng  $\square$ , nếu nối điểm xuất phát với điểm đến thì sẽ có được một hình vuông. Nhưng do bề mặt trái đất không giống như bề mặt một tờ giấy, bề mặt trái đất không phải là một mặt phẳng mà nhìn nó gần như là mặt cầu, ở trên mặt cầu vẽ ra là hình bốn cạnh chứ không phải là hình vuông.

Vậy nếu như bề mặt trái đất không phải là mặt phẳng tuyệt đối thì tại sao nhà thám hiểm lại quay trở về vị trí xuất phát ban đầu? Thì ra, nhà thám hiểm này xuất phát từ bắc cực, vì thế đường đi của ông ta từ hình bốn cạnh co lại thành hình tam giác, kết quả là ông ta lại trở về vị trí ban đầu.

Chuyến đi thám hiểm Bắc cực của nhà thám hiểm này đã giúp chúng ta hiểu ra được rất nhiều điều. Do hình dạng trên mặt phẳng và hình dạng trên mặt cầu có tính chất khác nhau như vậy, hơn nữa trái đất lại rất lớn, vì thế chỉ khi đề cập tới phạm vi bề mặt trái đất không lớn lắm thì nó mới có thể gần như là mặt phẳng, lúc này cho dù có sai số thì cũng không lớn lắm, không ảnh hưởng tới đáp án chính xác, chúng ta bình thường vẫn làm như vậy.

Nhưng trong một số tình huống đặc biệt, chúng ta không thể bỏ qua việc bề mặt trái đất là vật thể hình cầu chứ không phải là mặt phẳng. Chẳng hạn như đường đi của đường không, đường biển không thể là đường thẳng, nếu tính theo các điều kiện của mặt phẳng thì chắc chắn sẽ có kết quả sai.

## **Một chồng ống thép xếp thành hình tam giác, tại sao chỉ cần đếm số lượng hàng cuối cùng là có thể tính ra được tổng số lượng?**

Trong công xưởng hoặc trong kho hàng, các loại vật liệu như ống thép hoặc các cây gỗ đều được xếp rất gọn gàng tạo thành một hình tam

giác rất là cao. Nhiều ống thép như vậy thì làm sao tính được tổng số lượng? Có phải là đếm từng chiếc ống một hay không? Không phải vậy, các công nhân thường chỉ cần đếm hàng ống thép sát cuối cùng là ngay lập tức tính ra được chồng ống thép đó có bao nhiêu chiếc? Bạn có muốn biết những người công nhân đã tính như thế nào không?

Giả sử hàng ống thép cuối cùng có 20 chiếc, vậy thì hàng số 2 có 19 chiếc, hàng số 3 là 18 chiếc..... hàng ở đỉnh trên cùng (tầng số 20) chỉ có 1 chiếc. Vì thế, không cần thiết phải đếm từng chiếc một, chỉ cần cộng số lượng ở hàng cuối cùng với số lượng ở đỉnh trên cùng, nhân với số lượng hàng ống thép rồi chia cho 2 là ta có được kết quả tổng số ống thép, tức là:  $[(20 + 1) \times 20] / 2 = (21 \times 20) / 2 = 210$  ống thép.

Nếu hàng cuối cùng là 50 ống thép (tổng cộng có 50 hàng) thì tổng số ống thép sẽ là:

$$[(50 + 1) \times 50] / 2 = 1275 \text{ ống thép.}$$

Vậy tại sao lại chỉ cần tính đơn giản như vậy là đúng nhỉ?

Thực ra nguyên lý trong đó rất đơn giản, chúng ta cộng số lượng ống thép ở từng hàng lại với nhau để kiểm tra xem nhé. Hàng thứ nhất (hàng sát mặt đất) là 20 chiếc, hàng thứ 20 chỉ có 1 chiếc, hai hàng này tổng cộng có 21 chiếc ống, hàng thứ 2 có 19 chiếc, hàng thứ 19 có 2 chiếc, hai hàng này cộng lại cũng là 21 chiếc; chúng ta cứ cộng số lượng ống thép ở các hàng đối ứng như vậy, cộng đến hàng thứ 11 có 10 chiếc ống với hàng thứ 10 có 11 chiếc cũng vẫn là 21 chiếc, tổng cộng có 10 hàng có 21 chiếc như vậy, cũng có nghĩa là:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 18 + 19 + 20 \\ &= (1 + 20) + (2 + 19) + (3 + 18) + \dots + (10 + 11) \\ &= 21 \times 10 \\ &= 210 \end{aligned}$$

Vẫn là 210 chiếc ống, như vậy thông qua kiểm chứng, chúng ta thấy là hai cách này ra được kết quả chính xác như nhau.

Nếu như số lượng ống thép ở hàng dưới cùng là số lẻ? Ví dụ như 19 ống thép thì công thức nói trên có chính xác nữa không? Chúng ta theo công thức:

$$\text{Tổng số ống thép} = [(19 + 1) \times 19] / 2 = 190 \text{ ống thép}$$

Như vậy vẫn áp dụng được theo công thức nói trên, bạn cứ thử mà xem, đảm bảo không có vấn đề gì cả.

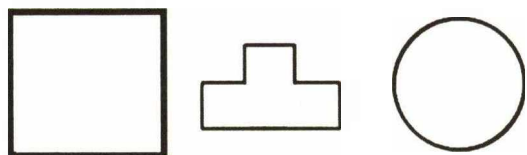
Có thể bạn lại nghĩ rằng, nếu hàng trên cùng của chồng ống thép này không phải là một chiếc mà là vài chiếc thì tính toán như thế nào? Ví dụ, hàng trên cùng có 7 ống thép mà hàng cuối cùng vẫn có 20 ống thép, mỗi hàng vẫn lần lượt giảm đi một ống thép, vậy thì tổng cộng chồng thép này có bao nhiêu ống?

Trong tình huống này chúng ta vẫn tính theo công thức nói trên, nhưng phải trừ đi phần không được xếp lên, chúng ta hãy cùng tính nhé:

$$[(20 + 1) \times 20] / 2 - [(6 + 1) \times 6] / 2 = 210 - 21 = 189 \text{ ống thép}$$

## Làm thế nào để có được một cái nút bình dùng được cho ba chiếc bình có các kiểu miệng bình khác nhau?

Có một người sưu tầm được 3 cái bình cổ kỳ quái. Những chiếc bình này có miệng bình khác nhau, chúng lần lượt được biểu thị như các hình (a), (b), (c) trong hình 1. Mà người này lại còn có ý nghĩ kỳ quái hơn, anh ta muốn làm một chiếc nút bình để sao cho ba chiếc bình này đều có thể dùng vừa, điều này liệu có làm được không? Nếu như làm được thì phải thiết kế chiếc nút như thế nào?



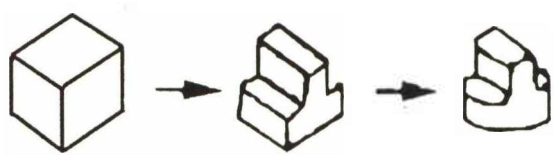
Hình 1

Điều này là hoàn toàn có khả năng làm được. Chúng ta hãy cùng xem anh ta làm như thế nào nhé, trước tiên anh ta tìm một miếng gỗ nhỏ hình lập phương có kích thước vừa đủ kết hợp với miệng bình (a).

Sau đó, cắt bỏ đi phần trên bên trái và phần trên bên phải để cho nó có hình dạng như miệng bình (b). Cuối cùng, gọt cho miếng gỗ thành hình tròn để có thể vừa khít với miệng bình (c). Thế là đã làm xong được cái nút bình rồi.

Hình số 2 mà chúng tôi vẽ chính là hình lập phương của cái nút bình cũng như quá trình tạo ra chiếc nút bình ba tác dụng này.

Nhìn vào hình số 2, chúng ta thấy chiếc nút bình này quả là kỳ diệu. Nếu nhìn từ chính diện, hình dạng của nó giống như với miệng bình (b); nếu nhìn từ bên trên, hình dạng của nó giống miệng bình (c); còn nếu nhìn từ bên trái, hình dạng của nó lại phù hợp với miệng bình (a). Hình vẽ số 3 cho chúng ta thấy các hình chiếu của chiếc nút bình khi nhìn từ ba hướng là chính diện, bên trái và bên trên (hình chiếu là thuật ngữ dùng khi đo lường, vẽ sơ đồ, tức là hình dạng mặt phẳng khi dùng mắt thường để nhìn hình vẽ). Chính vì chiếc nút bình dạng lập thể có 3 hình chiếu khác nhau nên nó mới có thể dùng cho 3 chiếc bình có 3 kiểu miệng bình khác nhau.



Hình 2



Hình 3

Trong hình học, hình chiếu của chiếc nút bình kiểu này gọi là hình tam chiếu. Nói một cách đơn giản, hình tam chiếu tức là hình dạng của một vật thể hình học có được khi nhìn từ chính diện, bên trên và bên trái. Hình số 3 là hình tam chiếu của chiếc nút bình. So sánh hình số 1 và hình số 3 có thể biết được hình dạng của miệng bình chính là hình dạng hình tam chiếu của chiếc nút bình, chỉ cần làm chiếc nút bình có các hình chiếu như vậy là ta đã giải quyết được vấn đề này rồi.

Trong vẽ sơ đồ công trình, hình tam chiếu được sử dụng rộng rãi để thể hiện hình dạng của các linh kiện máy móc. Bạn có thể thử bằng cách lấy một chiếc đinh ốc của nhà mình rồi vẽ ra hình tam chiếu của nó nhé.

## Số vô nghĩa được phát hiện như thế nào?

Số thực được chia ra làm hai loại, số có nghĩa và số vô nghĩa. Bạn có lẽ cũng sẽ thấy ngạc nhiên, số tại sao lại có sự phân chia ra loại có nghĩa và vô nghĩa nhỉ? Lại cũng giống như con người nói năng, làm việc có công bằng hay không, hợp lý hay không. Thế thì số vô nghĩa là gì, nó được phát hiện như thế nào, về vấn đề này còn có một câu chuyện rất thú vị!

Trong quá trình nhận thức của con người về số, trước tiên là con người tiếp xúc với số tự nhiên 1, 2, 3....., những số này được dùng để biểu thị các số. Nhưng trong cuộc sống thực tế, có những lúc không thể dùng cách đếm số để tính lượng. Ví dụ như đo độ dài là không thể đếm được, mà khi đo phải lấy độ dài một đơn vị, so sánh giữa độ dài cần đo và độ dài đơn vị, khi đó thì có thể sẽ xảy ra phân số. Chúng ta gọi các số chẵn và phân số là số có nghĩa. Nói chung, một số có nghĩa được biểu thị bằng hình thức là  $p/q$  ( $q \neq 0$ ), đây còn là "linh cảm" xảy ra trong đo lường!

Vào thế kỷ 6 trước công nguyên, ở Hy Lạp cổ có một nhà toán học nổi tiếng là Pitagoras, ông thành lập trường phái Pitagoras có ảnh hưởng rất sâu rộng. Trường phái này tâm niệm rằng: "Vạn vật trong vũ trụ đều là số", đương nhiên ở đây là nói tới số có nghĩa, tức là đều là những số được biểu thị dưới dạng  $p/q$ .

Một hôm, có người hỏi ông ta: đường chéo của một hình vuông có cạnh bằng 1 thì có thể biểu thị bằng sự so sánh giữa số chẵn với số chẵn không?

Căn cứ theo định lý Pitagores chúng ta đều biết độ dài đường chéo của hình vuông có cạnh bằng 1 là căn của 2. Giả sử căn của 2 là số có nghĩa, tức là căn của 2 có thể biểu thị theo công thức  $p/q$ , trong đó  $p, q$  hơn kém nhau một đơn vị, vì thế  $p/q = \text{căn của } 2$ , bình phương hai bên ta có:

$$p^2 = 2q^2 \dots\dots (1)$$

Bởi vì  $p^2$  bằng hai lần của số nguyên  $q^2$  cho nên có thể thấy  $p^2$  phải là số chẵn, từ đó  $p$  cũng phải là số chẵn (bởi vì bình phương của số chẵn là số chẵn). Thay  $p = 2dr$  vào trong công thức (1) ta có:  $4r^2 = 2q^2$  tức là  $2r^2 = q^2$



Có thể thấy  $q^2$  cũng là một số chẵn, từ đó suy ra  $q$  cũng là số chẵn. Bởi vì  $p$  và  $q$  đều là số chẵn, điều này mâu thuẫn với giả thiết  $p$  và  $q$  là hai số hơn kém nhau một đơn vị. Vì thế giả thiết  $p/q$  là số có nghĩa không thể thành hiện thực, có nghĩa là căn của 2 là một số vô nghĩa.

Sự xuất hiện của số vô nghĩa tức là số không thể viết được dưới dạng so sánh của số nguyên với số nguyên đã gây kinh ngạc và chấn động cho giới học giả, đây quả là một bước tiến mới trong nhận thức của con người về số.

## Thế nào là số ảo?

Chúng ta đều biết số có nghĩa và số vô nghĩa được gọi chung là số thực, nhưng còn một loại số nữa là số ảo, vậy số ảo là số như thế nào?

Chúng ta hãy cùng xem lai lịch của số ảo. Vào thế kỷ 16, giới toán học châu Âu xảy ra cuộc tranh luận về việc số âm có thể triển khai căn bình phương hay không. Chúng ta đều biết một số dương là có thể chia căn bậc hai, ví dụ căn của 2 là số vô nghĩa căn 2, căn của 4 là số có nghĩa 2, vậy thì có số nào có thể là căn của số âm hay không?

Cùng với sự phát triển của toán học, các nhà toán học phát hiện ra rằng chia căn số thực của một số phương trình 3 lần không thể không dùng chia căn của số âm để biểu thị. Hơn nữa, nếu thừa nhận có căn của số âm thì vấn đề có căn hay không của phương trình đại số cũng được giải quyết, đồng thời còn có được kết quả đầy mỹ mãn là phương trình  $n$  lần có  $n$  căn. Ngoài ra, tính căn của số âm theo nguyên tắc tính toán của số thì vẫn cho ra kết quả chính xác.

Năm 1545, nhà toán học người Italy Kardan lần đầu tiên đưa ra một cách biểu thị chiết trung, ông ta gọi căn bình phương của số âm là "số hư cấu", có nghĩa là cũng thừa nhận nó là số nhưng nó không giống số thực có thể biểu thị số lượng tồn tại thực tế mà là hư cấu. Tới năm 1632, nhà toán học người Pháp Dirael chính thức đưa ra một cách gọi căn của số âm khiến mọi người đều chấp nhận, đó là cách gọi "số ảo".

Chữ "ảo" trong số ảo biểu thị nó không đại diện cho số lượng thực tế mà chỉ tồn tại trong tưởng tượng. Cho dù số ảo là "ảo" nhưng các nhà toán học vẫn không ngừng nghiên cứu về nó, họ phát hiện ra rất nhiều

tính chất và ứng dụng về số ảo. Đặc biệt là vào năm 1777, nhà toán học Euler đưa ra khái niệm "đơn vị số hư", ông ta gọi căn của -1 là đơn vị số ảo, dùng ký hiệu  $i$  để biểu thị, tương đương với đơn vị của số thực là 1. Sau khi số ảo có đơn vị thì cũng giống như số thực sẽ có thể viết được theo kiểu bội số đơn vị số ảo, ví dụ như căn của  $-3 = (\text{căn của } 3) \times (\text{căn của } -1) = (\text{căn của } 3) i$ .

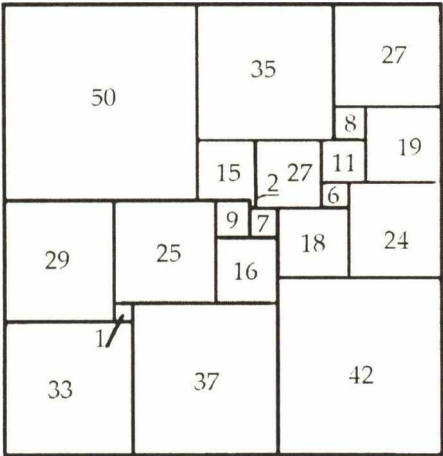
Từ đó, các nhà toán học đối xử bình đẳng với số ảo như số thực và cùng gọi tên chúng là số phức, vì thế, gia tộc của số được thống nhất về một mối. Bất kỳ một số phức nào cũng đều có thể viết dưới dạng  $a + bi$ , khi  $b = 0$  thì  $a + bi = a$ , đó chính là số thực, còn khi  $b \neq 0$  thì  $a + bi$  chính là số ảo.

Trong số phức, số ảo và số thực cùng hỗ trợ lẫn nhau, thiếu một cũng không được, vậy là cuối cùng số ảo đã có được một vị trí bình đẳng như số thực.

## Thế nào là hình vuông hoàn mỹ?

Một xưởng sản xuất đồ chơi sản xuất ra các kiểu loại mảnh ghép hình vuông. Một hôm, anh trai nhặt được 21 miếng ghép hình vuông từ trong đồng rác phế thải của xưởng đồ chơi. Độ dài của các mảnh hình vuông này lần lượt là: 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 42, 50.

Người em trai thấy 21 miếng gỗ hình vuông liền nghĩ: nếu ghép chúng thành một miếng hình vuông lớn thì hay biết bao! Thế là cậu ta liền tính toán diện tích của các mảnh hình vuông, thật tuyệt vời, tổng diện tích của chúng vừa đúng bằng 112. Mặc dù vậy nhưng liệu có thể xếp 21 miếng gỗ hình vuông thành một hình vuông lớn được không nhỉ? Nếu được thì xếp thế nào đây?



Vấn đề này cũng không đến nỗi quá khó: 21 miếng gỗ hình vuông này chắc chắn xếp được thành 1 hình vuông lớn, các bạn xem hình vẽ dưới đây:

Chúng ta gọi hình vuông có cạnh 112 này là 1 hình vuông hoàn mỹ. Tại sao lại gọi như vậy? Là bởi vì nó có thể dùng một số các hình vuông kích cỡ khác nhau, hơn nữa có thể dùng các hình vuông nhỏ có cạnh là số chẵn để tạo thành. Các hình vuông nhỏ này được gọi là các nấc thang của hình vuông hoàn mỹ. Hình vuông hoàn mỹ mà hình vẽ biểu diễn là do 21 hình vuông nhỏ lắp ghép thành, vì thế số nấc thang của nó là 21, hơn nữa cách ghép này là duy nhất, không thể có cách ghép thứ hai.

Lúc đầu khi người ta nghiên cứu hình vuông hoàn mỹ, người ta chỉ có thể nghiên cứu ra hình vuông hoàn mỹ có 26 nấc thang và 28 nấc thang; sang tới năm 1962, nhà toán học người Hà Lan Dufasiden đã chứng minh không tồn tại hình vuông hoàn mỹ có nấc thang nhỏ hơn hoặc bằng 19; năm 1970 người ta lại chứng minh được rằng hình vuông có 20 nấc thang cũng không tồn tại. Vì thế hình vuông 21 nấc thang là hình vuông nhỏ nhất.

Trong toán học, hình vuông hoàn mỹ được gọi là vấn đề toán học tổ hợp, bạn thấy không, 1 hình vuông lớn có 21 nấc thang là do 21 hình vuông kích cỡ khác nhau tạo thành, việc nghiên cứu cách sắp xếp theo thứ tự trên dưới trái phải của 21 hình vuông này quả là công phu và khoa học nhường nào!

## **Bạn có biết thế nào là xác suất?**

Đánh bạc là một hoạt động có từ xa xưa, sự ra đời của nó bắt nguồn từ thời đại La Mã cổ. Tương truyền rằng khi đó hoàng đế La Mã cổ và các vị đại thần trong triều nhân rồi đều thích đánh bạc. Nhưng các đệ tử của môn đó đen đều không ngờ được rằng, hoạt động đầu cơ mạo hiểm này có liên quan mật thiết tới sự ra đời của lí thuyết xác suất - một chi ngành toán học quan trọng.

Những nghiên cứu về lí thuyết xác suất bắt nguồn từ "vấn đề phân chia tiền vàng" sau cuộc chơi. Nếu 2 đệ tử cờ bạc trình độ tương đương như nhau sau khi kết thúc một trận chơi nên chia tiền bạc của họ như thế nào?

Giả sử một trận chơi bạc phải thắng được 6 ván mới là toàn thắng, nếu trong tình huống 1 người thắng 5 ván, người kia thắng 2 ván mà trận chơi dừng lại thì tiền bạc nên chia thế nào. Khi đó nhà toán học người Italy Pasiouli cho rằng nên chia số tiền theo tỷ lệ 5: 2 cho hai bên là công bằng ngay.

Nhưng người thắng nhiều lần số ván hơn luôn cảm thấy cách chia của Pasiouli không công bằng. Giả sử nếu trong 1 trận bạc phải thắng 11 ván mới là toàn thắng mà 1 người thắng 10 ván, 1 người chỉ thắng có 8 ván thì nên chia như thế nào? Người thắng 10 ván chỉ cần thắng 1 ván nữa là có được tất cả số tiền còn người kia còn phải thắng 3 ván nữa mới được, như này thì quả là khó khăn hơn rồi. Nếu làm theo cách chia của nhà toán học Pasiouli thì 2 người phải chia tiền bạc theo tỷ lệ 5: 4, như vậy sự khác biệt giữa hai người dường như chẳng là mấy, như này thì không công bằng hợp lý chút nào cả. Nhưng khi đó mọi người vẫn không tìm ra cách giải quyết nào tốt hơn cả.

Mãi tới 100 năm sau, hai nhà toán học thiên tài người Pháp là Pascal và Fermat mới giải quyết vấn đề này một cách ổn thoả. Mỗi nhà toán học đã có 1 phương pháp khác nhau, chúng ta hãy xem cách của Fermat trước.

Ví dụ 2 người chơi bạc có trình độ tương đương được gọi là A và B, nếu A còn phải thắng 2 ván là toàn thắng mà B còn phải thắng 3 ván mới là toàn thắng thì nên phân chia như thế nào số tiền bạc?

Trong ví dụ trên, chúng ta thấy một điều hiển nhiên rằng nhiều nhất là chơi 4 ván nữa thì có thể quyết định thắng thua. Fermat gọi a là biểu thị A thắng, b là biểu thị B thắng, vậy thì kết quả cuối cùng sau 4 vòng nằm trong 16 cách sắp xếp sau đây: aaaa, aaab, abba, bbab, baaa, bbaa, abab, baba, abaa, babb, aabb, abbb, aaba, baab, bbba, bbbb, trong đó a xuất hiện 2 lần hoặc trên 2 lần thì A thắng, tổng cộng có 11 tình huống; b xuất hiện 3 lần hoặc trên 3 lần thì B thắng, tổng cộng có 5 tình huống, vì vậy tiền bạc nên chia theo tỷ lệ 11: 5.

Còn Pascal dùng "tam giác toán thuật" của ông để giải quyết vấn đề này và cũng có đáp án là 11: 5.

Nhờ có đánh bạc mà xuất hiện ngành khoa học để giải quyết 1 số vấn đề của những tình huống ngẫu nhiên được gọi là lí thuyết xác suất. Mặc dù ngành toán học này "xuất thân không chính đáng" nhưng nó lại là một chi ngành vô cùng quan trọng trong toán học.

## Thế nào là mô hình toán học?

Bạn chắc chắn không còn lạ gì với từ mô hình phải không? Ví dụ như ở trong bảo tàng chúng ta nhìn thấy những mô hình máy bay, mô hình tàu thuỷ, mô hình xe hơi. Thực ra mô hình là một kiểu mô phỏng, bắt chước các sự vật khách quan, nó được chế tạo theo một tỷ lệ nhất định từ vật thực để cho con người hiểu rõ được về toàn bộ diện mạo của sự vật. Ngoài những mô hình máy móc, còn có mô hình sinh vật, mô hình địa chất..., có thể nói rằng các sự vật tồn tại trong cuộc sống đều có thể làm thành mô hình.

Trên đây chúng ta toàn đề cập đến các mô hình của các vật thực, vậy còn mô hình toán học là như thế nào? Mô hình toán học là chỉ mô hình được tạo nên bằng phương pháp toán học, cũng có nghĩa là các vấn đề thực tế phức tạp được biểu thị dưới dạng thức toán học, từ đó mô phỏng sự thay đổi phát triển của vấn đề.

Mô hình là một dạng đơn giản hoá của sự vật thực tế, mô hình vật thực và mô hình toán học đều là như vậy. Nếu không đơn giản hoá mà muốn biểu đạt rõ vấn đề thực tế bằng các dạng thức toán học thì gần như là không thể. Chẳng hạn như trong vật lí có nói đến quá trình vận động của tàu hoả, cho rằng tàu hoả vận động đều tức là vận tốc của nó giữ nguyên không thay đổi, từ đó tính ra quan hệ giữa quãng đường đi và thời gian. Nhưng trên thực tế tàu hoả không thể lúc nào cũng vận động đều về phía trước, sự khởi động ban đầu, lúc vào bến của tàu hoả đều có sự thay đổi về vận tốc. Với tiền đề cho rằng vận tốc của tàu hoả là tiến đều về phía trước, chúng ta có được một công thức như sau: Quãng đường đi = Vận tốc (V) x Thời gian (T).

Nếu chúng ta suy xét đến yếu tố tốc độ của tàu hoả sau khi khởi động cứ tăng dần lên một chút một chút, hơn nữa cho rằng việc tăng tốc độ này (a) là không đổi, thế thì chúng ta có thể chi tiết hoá hơn nữa công thức toán học nói trên, chúng ta sẽ có  $S = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ , trong đó  $v_0$  thể hiện tốc độ ban đầu, nếu tàu hoả lúc đầu là không chạy thì  $v_0$  bằng 0, t là thời gian, a là tốc độ tăng.

Có thể thấy 2 mô hình toán học nói trên mặc dù đều phản ánh vấn đề trong cuộc sống thực tế của việc tàu hoả chạy nhưng lại có sự khác biệt rất lớn. Mô hình thứ nhất đơn giản hơn, mô hình thứ hai kỹ lưỡng hơn. Đây là kết quả thể hiện trình độ đơn giản hoá khác nhau đối với vấn đề thực tế.

Vậy thì phải chăng suy xét càng kỹ càng thì mô hình càng tốt hơn? Cũng không hẳn như vậy! Mặc dù suy xét càng kỹ càng thì càng gần với thực tế hơn nhưng sự phức tạp của mô hình lại càng cao, việc sử dụng mô hình sẽ càng khó khăn hơn, mà cũng có thể là không thể sử dụng được. Vì thế một mô hình toán học tốt vừa phải phản ánh chính xác tình hình thực tế, lại vừa không nên quá phức tạp.

Xây dựng một mô hình toán học thích hợp sẽ đem lại nhiều thuận lợi đáng kể cho các mặt trong cuộc sống sản xuất, sinh hoạt, làm việc của chúng ta, hơn nữa muốn xây dựng được một mô hình toán học tốt cũng là một công việc không dễ dàng chút nào bởi vì ngoài việc phải nắm vững đầy đủ kiến thức toán học cơ bản, còn cần phải có hiểu biết sâu sắc về các vấn đề cần nghiên cứu.

## **Bạn có biết về giải thưởng Feirzi không?**

Giải thưởng Feirzi là giải thưởng toán học và có uy tín lớn nhất trên thế giới.

Cũng giống như các loại giải thưởng Nobel, giải Oscar, Feirzi cũng là tên một người. Ông là nhà toán học người Canada, sinh vào năm 1863, mất vào năm 1932. Mặc dù ông không có danh tiếng lừng lẫy như các nhà toán học Newton, Cauchy, Euler nhưng về phương diện nghiên cứu, tổ chức giao lưu giữa các nhà toán học ông lại có rất nhiều công lao. Năm 1924, trong hội nghị các nhà toán học quốc tế lần thứ 7 tổ chức tại Toronto, Feirzi đề nghị thiết lập một giải thưởng toán học lấy từ kinh phí còn lại của đại hội; ông cũng lập di chúc để lại di sản của mình cống hiến cho một phần của tiền thưởng. Để ghi nhớ và tán dương công lao của Feirzi, hội nghị các nhà toán học quốc tế đã đặt tên cho giải thưởng toán học này là "giải thưởng Feirzi".



Năm 1936, tại đại hội các nhà toán học quốc tế lần thứ 10 tổ chức tại Oslo, giải thưởng Feirzi lần đầu tiên được trao cho nhà toán học trẻ gốc Phần Lan quốc tịch Mỹ là Erfus và nhà toán học người Mỹ Dogerasi. Trong những lần tiếp theo của hội nghị toán học quốc tế, chương trình nghị sự đầu tiên của hội nghị chính là tuyên bố danh sách người được giải thưởng Feirzi, các nhà toán học cũng có thể thấy tự hào vì giành được giải thưởng này. Cho đến ngày nay, mọi người đều nhất trí công nhận rằng, giải Feirzi là một trong những giải thưởng có uy tín cao nhất trong ngành toán học, cũng có thể gọi là "giải Nobel của ngành toán học".

Giải thưởng Nobel là giải thưởng được cả thế giới công nhận và có uy tín cao, mặc dù có rất nhiều giải thưởng cho các lĩnh vực khác nhau nhưng lại không hề có giải thưởng dành cho toán học. Vậy thì ngoài giải thưởng Feirzi ra còn có giải thưởng toán học nào khác nữa không? Vẫn còn một giải thưởng nữa cũng rất có uy tín, đó là giải thưởng "Volfu", nhà toán học nổi tiếng người Mỹ gốc Hoa - giáo sư Trần Tĩnh Thân vào năm 1984 đã được nhận giải thưởng này.

## **Phương pháp toán học có thể thay thế thí nghiệm khoa học được không?**

Từ nhỏ chúng ta đã học toán học, nó là một môn học cơ bản cũng như vật lý, hoá học, hơn nữa toán học không chỉ là khoa học về đại số và hình học mà nó còn được ứng dụng ở nhiều mặt trong cuộc sống và có chức năng phán đoán suy luận. Chẳng hạn như chúng ta có thể dùng phương pháp toán học để dự báo thời tiết, ước tính sản lượng nông phẩm, thiết kế máy bay và xe hơi, thậm chí cả đạn đạo tầm xa dùng trong chiến tranh cũng không thể tách rời khỏi toán học. Vậy liệu có thể nói rằng toán học là cơ sở chính cho tất cả các ngành khoa học không, nó có thể thay thế cho thí nghiệm khoa học không?

Chúng ta hãy cùng xem xét quan hệ của phương pháp toán học và thí nghiệm khoa học.

Trước tiên, sự hình thành của phương pháp toán học là kết quả của quá trình thí nghiệm khoa học lâu dài. Chẳng hạn như để dự báo chính

xác nhật thực, nguyệt thực, mặt trời lặn mọc, thời tiết bốn mùa, chúng ta nhất thiết phải biết được quy luật thời gian và quỹ đạo vận động của trái đất quay xung quanh mặt trời, mặt trăng chuyển động quanh xung quanh trái đất, điều này cần phải có sự quan trắc và thí nghiệm ở phương diện thiên văn học mới có thể xác định được. Lại ví dụ như việc thiết kế máy bay kiểu mới trước tiên phải dựa vào lượng lớn kiến thức thí nghiệm trong quá khứ đã được tích lũy có liên quan tới thiết kế máy bay, mới có thể thiết lập mô hình toán học của máy bay kiểu mới, cuối cùng hình thành phương pháp toán học. Có thể thấy thí nghiệm khoa học là cơ sở của phương pháp toán học.

Thứ hai, phương pháp toán học đã được hình thành nhất định phải được kiểm nghiệm qua thí nghiệm khoa học. Do trong quá trình hình thành phương pháp toán học đã tiến hành đơn giản hoá và trừu tượng hoá đối với sự vật khách quan cho nên kết quả tính toán toán học và suy đoán luôn luôn có sự sai lệch so với thực tế, vì vậy chỉ có thông qua kiểm nghiệm thực tiễn mới có thể đảm bảo sự chính xác của phương pháp toán học. Chẳng hạn như máy bay được thiết kế theo hệ thống mô hình máy tính nếu không làm qua các thí nghiệm tổng thể và từng phần, không qua bay thử thì không thể đưa vào bay chính thức được.

Cuối cùng, phương pháp toán học không phải là một chìa khoá vạn năng, do nhận thức của nhân loại còn hạn chế, ở nhiều lĩnh vực vẫn chưa tìm ra được các mô hình toán học thật chuẩn xác. Chẳng hạn như sự thay đổi của thời tiết dựa vào rất nhiều yếu tố, vì thế cho đến nay vẫn chưa có một mô hình toán học chuẩn xác nào cho việc dự báo thời tiết. Cũng ví dụ như dự báo động đất thì tác dụng của toán học cũng là rất nhỏ. Trong những lĩnh vực này còn phải đợi thêm nhiều sự quan sát, phân tích và khám phá thực tiễn.

Ngoài ra, đối với một số vấn đề xã hội, do các kiểu yếu tố khác nhau mà không phải công thức toán học đơn giản nào cũng có thể phân tích rõ ràng, về cơ bản là khó có thể số hoá. Chẳng hạn như vấn đề tăng trưởng dân số, nó chịu sự ảnh hưởng của tổng hợp các yếu tố như môi trường, tài nguyên tự nhiên, tỷ lệ sinh đẻ, tỷ lệ tử vong... cho nên không phải chỉ dựa vào mô hình toán học là có thể vẽ ra rõ ràng được.

Nói tóm lại, phương pháp toán học có vai trò rất quan trọng nhưng vẫn không phải là "thuốc chữa bách bệnh" và không thể thay thế các thí nghiệm khoa học.

## Số Ảrập có phải là do người Ảrập sáng tạo ra?

Các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 là những số mà chúng ta đều quá quen thuộc, chúng là những ký hiệu số học cơ bản nhất, cả thế giới đều dùng chung, chúng ta gọi chúng là những số Ảrập. Liệu những số này là do người Ảrập sáng tạo ra?

Thực ra, số Ảrập hoàn toàn không phải là do người Ảrập sáng tạo ra mà là do người Ấn Độ sáng tạo ra.

Cách đây khoảng 1500 trước, người Ấn Độ đã dùng một kiểu chữ đặc biệt để biểu thị số. Những chữ số này tổng cộng là 10, hơn nữa rất đơn giản, chỉ cần vẽ 1 nét hoặc 2 nét là được, những chữ số này chính là ký hiệu nguyên thủy của chữ số Ảrập ngày nay.

1   |—   I'   Σ   Δ   7   √   ^   9

Sau đó, do sự đi lại buôn bán giữa phương Đông và phương Tây ngày càng gia tăng, nền kinh tế phát triển thúc đẩy sự giao lưu văn hoá cho nên chữ số của Ấn Độ cũng được du nhập vào Tây Ban Nha.

Vào thế kỷ 8, người Tây Ban Nha và người Ảrập xảy ra chiến tranh, người Ảrập thâm nhập vào Tây Ban Nha thấy kiểu chữ số này rất đơn giản dễ học nên đã học và đem về nước mình. Sau đó, nó lại được du nhập vào châu Âu. Vào thế kỷ 10, chữ số Ảrập xuất hiện ở châu Âu như thế này: ξ ζ δ √ < 1 2 7 9 0, như vậy có thể thấy lúc này người ta đã dùng đến ký hiệu số 0 rồi.

Trong quá trình sử dụng chữ số Ảrập, con người không ngừng cải tiến chúng, và đến thế kỷ thứ 14, chữ số mà ở châu Âu thường dùng đã gần giống với số ngày nay mà chúng ta sử dụng:

1 2 3 x 7 6 7 8 9 0

Bạn thấy không ngoại trừ số 4 và số 5, các số khác đều đầy đủ cả rồi.

Do số Ảrập đơn giản dễ học hơn số của La Mã cho nên chúng nhanh chóng được truyền bá rộng rãi và đến nay đã thông dụng trên toàn thế giới.

## **Ai là người đầu tiên tìm ra hệ đếm theo 60?**

Babylon cổ xưa nay thuộc địa phận của Iraq, cách Baghdad khoảng 100 km về phía Nam. Vào khoảng năm 2000 trước công nguyên, vương quốc Babylon ra đời với thủ đô là Babylon.

Người Babylon có rất nhiều nghiên cứu về thiên văn học, 1 tuần có 7 ngày là do người Babylon nêu ra; 1 giờ có 60 phút, một phút có 60 giây cũng là do người Babylon nêu ra; chia vòng tròn ra làm 360 độ, mỗi một độ lại chia ra làm 60 phút, mỗi một phút lại chia ra là 60 giây cũng là do người Babylon nêu ra đầu tiên.

Có lẽ bạn sẽ tò mò hỏi rằng, người Babylon tại sao lại thích 60 đến như vậy? Đây là bởi vì người Babylon sử dụng hệ tính theo 60. Rất nhiều nước trên thế giới đều sử dụng hệ đếm thập phân tức là tính theo 10. Việc sử dụng hệ đếm thập phân thì tương đối dễ hiểu, bởi vì con người có 10 ngón tay, công cụ tiện lợi nhất để con người nhớ số chính là 10 ngón tay, giống như chúng ta hay dạy trẻ em "xoè 10 ngón tay ra mà đếm". Nếu đếm hết 10 ngón tay rồi thì phải tính xem đếm tiếp như thế nào đây.

Người Indian ở Nam Mỹ sau khi đếm hết bằng 10 ngón tay thì họ tiếp tục đếm 10 ngón chân, họ chính là những người sử dụng hệ đếm 20.

## **Tại sao người Babylon lại sử dụng hệ đếm 60 nhỉ? Về vấn đề này có hai cách lí giải hoàn toàn khác nhau?**

Một ý kiến cho rằng, thừa ban đầu người Babylon tính một năm là 360 ngày, họ chia vòng tròn ra làm 360 góc, mặt trời mỗi ngày đi 1 độ, mà mỗi cạnh của hình sáu cạnh nội tiếp đường tròn đều bằng bán kính

của đường tròn, góc của tâm tròn đối diện với mỗi cạnh vừa đúng bằng 60 độ, chính vì thế mà có hệ đếm 60 ra đời.

Một cách lý giải khác cho rằng, từ những đồ khai quật được của người Babylon cho thấy rằng người Babylon từ lâu đã biết lịch mặt trời có 365 ngày. Họ chọn hệ đếm 60 là bởi vì 60 là số nhiều số thường dùng, ví dụ như 60 là bội số của 2, 3, 4, 5, 6, 12..... Đặc biệt là  $60 = 12 \times 5$ , trong đó 12 là số lượng tháng của một năm, 5 là số ngón tay trên một bàn tay.

Vấn đề này được nhà toán học người Hy Lạp cổ Swen nghiên cứu từ thế kỷ thứ 4, cho đến nay đã là hơn 1600 năm rồi nhưng vẫn chưa có một kết luận đáng tin cậy. Hai cách giải thích nói trên cũng đều là sự suy đoán của mọi người, sự thực chính xác vẫn còn đang đợi mọi người tìm kiếm phát hiện và khai thác các tài liệu lịch sử để tìm ra đáp án.

## Bạn có biết về "số 7 cô đơn" không?

Đây là biểu thức số học của "số 7 cô đơn". Bởi vì trong biểu thức này, chỉ biết được hàng nghìn là số 7, căn cứ theo hình dạng của biểu thức, bạn hãy tìm ra các số còn lại.

|                         |                 |
|-------------------------|-----------------|
| x 7 x x x               |                 |
| x x x / x x x x x x x x | ----- hàng số 1 |
| x x x x                 | ----- hàng số 2 |
| x x x                   | ----- hàng số 3 |
| x x x                   | ----- hàng số 4 |
| x x x x                 | ----- hàng số 5 |
| x x x                   | ----- hàng số 6 |
| x x x x                 | ----- hàng số 7 |
| x x x x                 | ----- hàng số 8 |

Số bị chia trong biểu thức nói trên là một số có 8 hàng đơn vị, số chia là một số có 3 hàng đơn vị, vừa đủ để chia hết, thương số là số có 5 hàng đơn vị. Trong biểu thức phép chia nói trên, số chưa biết lên tới con số 40,

bạn có lẽ sẽ nghi ngờ, chỉ dựa vào mỗi một số 7 cô đơn thì có thể suy ra được cả một biểu thức hay không?

Để suy ra được cả biểu thức này mà chỉ dựa vào mỗi một số 7, chúng ta phải động não phân tích cả biểu thức xem sao.

Trước tiên, số hàng chục của thương số phải là số 0. Bởi vì trong biểu thức khi chia đến đó hàng chục, hàng đơn vị của số bị chia đều cùng rời đi rồi.

Thứ hai, chữ số ở hàng chục nghìn và hàng đơn vị của thương số tích số của số chia có 4 đơn vị, mà số ở hàng trăm và tích số của số chia chỉ có 3 đơn vị; xem ra, chữ số ở hàng chục ngàn và hàng đơn vị của thương số đều lớn hơn chữ số ở hàng trăm.

Thứ 3 là, xem trong hàng số 3, hàng số 4 của biểu thức ta thấy số chia và tích số của số 7 là số có 3 hàng đơn vị. Mà trong hàng số 5, hàng số 6 của biểu thức, số bên phải số 7 (chữ số hàng trăm) và tích số của số chia cũng là số có 3 hàng đơn vị, mà hàng số 5 lại là số có 4 đơn vị, có thể thấy tích số của hàng số 6 phải lớn hơn số của hàng số 4, vì thế, số ở hàng trăm nhất định phải lớn hơn 7, là 8 hoặc là 9.

Căn cứ theo phân tích hàng số 2 và hàng số 3, có thể thấy, số ở hàng trăm của thương số là 8, số ở hàng chục nghìn và hàng đơn vị của thương số là 9, vì vậy, thương số nhất định sẽ là 97809.

Chúng ta lại xem tiếp hàng số 6, do số chia và tích số của 8 chỉ có thể là số có 3 hàng đơn vị, có thể thấy số chia nhất định nhỏ hơn 125. Đã như vậy thì chúng ta thử dùng 124 để thử xem. Vì thế lấy 124 nhân với 97809, sau khi có được số bị chia chúng ta lại làm lại phép chia, thế là có được các số còn thiếu của biểu thức. Chúng ta thử như vậy và quả nhiên đã thành công, các bạn hãy xem đáp án dưới đây:

Liệu còn có số nào nhỏ hơn số 124 không? Bạn có thể lấy 123 thử xem, bạn sẽ thấy không còn số nào nhỏ hơn 124 để có thể lập nên biểu thức này.

$$\begin{array}{r}
 97809 \\
 \times 124 \\
 \hline
 124 \\
 1956 \\
 97809 \\
 \hline
 1204316
 \end{array}$$



## Bạn có biết ý nghĩa của các chữ số La Mã I, II, III, IV, V, VI.... không?

Người La Mã cổ khi biểu thị từ 1 đến 10 họ dùng các số I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X. Mặc dù trong toán học cả thế giới đều sử dụng các con số Ả-rập là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.... nhưng trong những chiếc đồng hồ và trong sách cổ vẫn còn nhìn thấy những con số La Mã kiểu này.

Số La Mã là do người La Mã cổ sáng tạo ra, có tổng cộng 7 số: I (biểu thị số 1), V (biểu thị số 5), X (biểu thị số 10), L (biểu thị số 50), C (biểu thị số 100), D (biểu thị số 500), M (biểu thị số 1000). Chúng được kết hợp theo 3 cách để có thể biểu thị bất kỳ số nào:

(1) "lặp đi lặp lại mấy lần": một số La Mã lặp đi lặp lại mấy lần có thể biểu thị mấy lần của con số đó. Ví dụ như: II là 2 lần của I, tức là biểu thị 2; X X X là 3 lần của X, tức là biểu thị 30; M M là 2 lần của 1000, tức là biểu thị 2000.

(2) cách "phải cộng trái trừ": bên phải của một số viết kèm thêm một số nhỏ hơn để biểu thị số lớn cộng thêm số nhỏ, ví dụ: VI biểu thị 5 cộng 1 là 6; X XII biểu thị 20 cộng 2 là 22; DC biểu thị 500 cộng 100 là 600. Nếu bên trái của một số viết kèm thêm một số nhỏ hơn để biểu thị số lớn trừ đi số nhỏ, ví dụ như: IV biểu thị 5 trừ đi 1 tức là 4, IX biểu thị 10 trừ đi 1 tức là 9, XL biểu thị 50 trừ đi 10 tức là 40; VD biểu thị 500 trừ đi 5 tức là 495; vậy thì C D L X V II biểu thị bao nhiêu nhỉ? Chính là 467.

(3) Cách "thêm một gạch ngang": trên chữ số La Mã viết thêm một gạch ngang biểu thị 1000 lần của số này, ví dụ như: XV biểu thị  $15 \times 1000$  tức là 15000. Phía trên số đó thêm hai gạch ngang là để biểu thị triệu lần của số đó, ví dụ như XV biểu thị triệu lần của 15 tức là 15000000.

Xem ra sử dụng số La Mã thật là đặc biệt. Không biết bạn có để ý hay không, trong số La Mã không có số "0", tại sao vậy nhỉ?

Trong số La Mã vốn không có số 0, sang tới thế kỷ thứ 5, số "0" từ phương Đông chuyển đến La Mã. Nhưng La Mã khi đó dưới sự không

chế của giáo hội, giáo hoàng rất bảo thủ cho rằng số La Mã dùng để ghi số là quá đủ rồi, không cần thêm số 0 làm gì cả, và ra lệnh cấm tất cả mọi người dùng số 0. Nếu có người ghi chép và tuyên truyền về số 0 thì giáo hoàng sẽ trừng phạt anh ta với tội danh làm nhơ bản thân giáo. Vì vậy trong số La Mã không có số 0 cho đến ngày nay.

## Thỏ trắng nấp ở trong những cái hang nào thì cáo mới không tìm ra được?

Có một con cáo và một con thỏ sống trong những hang động ở trên đỉnh núi. Những cái hang này tổng cộng có 17 cái, dọc theo đỉnh núi tạo thành một vòng xuyên lớn, khoảng cách giữa mỗi cái hang là khá xa. Cáo luôn muốn tìm cách để ăn thịt thỏ trắng.

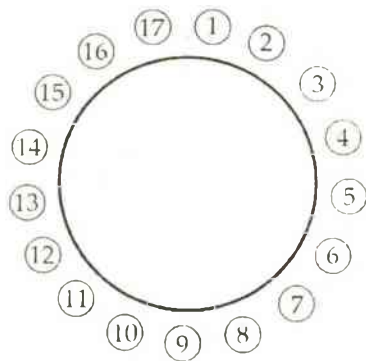
Một hôm, cáo và thỏ nhìn nhau từ xa, thỏ nói với cáo: "Anh không cần lúc nào cũng phải tìm cách đánh tôi, chúng ta đánh số thứ tự cho 17 cái hang lần lượt từ số 1 đến số 17, tôi chọn ba cái hang gần nhau, mỗi cái hang ở 10 ngày. Anh xuất phát từ cái hang số 17, lần thứ nhất đi cách một cái đến hang số 1 tìm tôi, lần thứ hai đi cách hai cái đến hang số 3 tìm tôi, lần thứ ba đi cách 3 cái đến hang số 6 tìm tôi. Cứ lần lượt như vậy, trong vòng 30 ngày, không quan trọng anh vào cái hang nào bao nhiêu lần, chỉ cần anh tìm thấy tôi thì anh có thể ăn thịt tôi ngay."

Cáo nghĩ: trong vòng một tháng, ta nhất định tìm được mi, ta sẽ ăn thịt mi. Vì thế cáo đồng ý ngay.

Nhưng con cáo giả hoạt tìm trong suốt cả một tháng mà vẫn không tìm thấy thỏ, bạn hãy nói cho chúng tôi biết, thỏ trắng thông minh đã ở trong 3 chiếc hang liên kế nào không?

Để giải được bài toán khá khó này, phải có phương pháp tư duy chính xác, nếu không thì quả là không dễ dàng gì.

Trước tiên, chúng ta hãy phân tích những lần cáo vào hang là những hang số



bao nhiêu. Lần thứ nhất, cáo vào hang số 1, đi cách một cái hang; lần thứ hai cáo đi cách hai cái hang, nó vào hang số 3; lần thứ ba nó đi cách 3 cái hang tức là vào hang số  $1 + 2 + 3 = 6$ ; lần thứ tư, cáo đi cách 4 hang, tức là nó vào hang số  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ;..., cứ tiếp tục theo cách như vậy, trên cơ sở của lần trước thì lần thứ  $n$  cáo phải đi cách  $n$  lần, vào hang số  $1 + 2 + 3 + (n-1) + n$ , đúng không?

Tiếp theo, điều cần lưu ý là do 17 cái hang tạo thành một hình vòng tròn, chẳng hạn như lần thứ 6 cáo đi là vào hang số  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ , đỉnh núi không có hang số 21, chúng ta thấy hang số 21 thực tế ra là hang số 4, bởi 4 là số dư của 21 chia cho 17. Vì thế khi số của chúng ta cần lớn hơn 17 thì phải chia cho 17 để lấy số dư thì mới được, đây chính là hang số bao nhiêu mà cáo cần phải vào.

Cứ làm theo cách phân tích trên, chúng ta có thể có được một cách rất thuận lợi: nếu thỏ nấp trong hang số 7, 8, 9 hoặc hang số 12, 13, 14 thì cáo không thể ăn thịt được thỏ.

Nếu không tin, bạn cứ thử kiểm tra lại mà xem!

## **Bạn có biết nhà toán học nào trong giới động vật không?**

Bạn có biết không trong giới tự nhiên có rất nhiều "nhà toán học động vật" kỳ diệu.

Bên trong hình chữ nhật vàng (hình chữ nhật có tỷ lệ dài rộng là 0,618) làm một hình vuông dựa vào ba cạnh, phần thừa còn lại lại là một hình chữ nhật vàng, lại có thể làm một hình vuông. Nối theo thứ tự các trung tâm của những hình vuông này chúng ta được một đường "ốc vàng". Các nhà hải dương học phát hiện ra rằng, trên thân của con ốc anh vũ, một số động vật thể sùng, và một số động vật thân mềm giáp xác đều phát hiện có "đường ốc vàng".

Các nhà khoa học còn phát hiện ra rằng, trên thân san hô còn có ghi "lich ngày" rất là tinh xảo: hàng năm chúng đều "khắc hoạ" trên thân mình 365 đường hoa văn, cũng chính là mỗi ngày vẽ một đường. Điều kỳ lạ là các nhà cổ sinh vật phát hiện thấy san hô của 350 triệu

năm trước vẽ số đường hoa vẫn là 400 đường. Tại sao lại vậy nhỉ? Các nhà thiên văn học cho chúng ta biết rằng, khi đó trái đất tự quay quanh mình một ngày chỉ có 21,9 giờ đồng hồ, một năm không phải là 365 ngày mà là 400 ngày. Có thể thấy san hô có thể căn cứ theo sự thay đổi biến hoá của hiện tượng thiên nhiên mà "tính toán", "ghi chép" khá là chính xác thời gian của một năm.

Kiến cũng là một "toán học gia" xuất sắc. Nhà khoa học người Anh Hunston đã từng làm một thí nghiệm thú vị như thế này: ông cắt một con châu chấu chết thành 3 mảnh, mảnh thứ hai lớn gấp đôi mảnh thứ nhất, mảnh thứ ba lớn gấp đôi mảnh thứ hai, sau khi kiến phát hiện ra ba mảnh châu chấu này 40 phút, số lượng con kiến tập trung ở mảnh châu chấu nhỏ nhất là 28 con, ở mảnh thứ hai là 44 con, mảnh thứ ba là 89 con, như vậy là số lượng kiến ở nhóm sau gần gấp đôi số lượng ở nhóm trước.

Còn ong thì có thể được coi là "nhà tính toán số học và thiết kế thiên tài". Tổ ong mà con ong kiến tạo vô cùng kỳ diệu. Tất cả những góc tù hình lăng trụ ở phần đáy tổ ong đều là  $109^{\circ} 28'$ , tất cả các góc nhọn đều là  $20^{\circ} 32'$ . Theo như tính toán trên lý thuyết của các nhà toán học, nếu phải tiêu hao một số nguyên liệu nhỏ nhất để tạo ra một dụng cụ đựng hình lăng trụ lớn nhất cũng chính là góc này.

Những con hạc trắng luôn luôn bay thành từng đàn từng đàn một, hơn nữa còn xếp thành hình chữ "nhân" trong chữ Hán, góc của hình chữ nhân này luôn luôn là 1100. Một nửa của góc kẹp hình chữ "nhân" vừa đúng là  $540^{\circ} 44' 8''$ , đây cũng chính là số đo góc của tinh thể đá kim cương.

## Bạn có biết về vòng Macbius kì diệu không?

Năm 1858, nhà toán học người Đức Macbius phát hiện ra rằng một dải giấy sau khi xoay chuyển  $180^{\circ}$  cho hai đầu nối tiếp nhau sẽ có một tính chất khác lạ. Sau này dải giấy này được mọi người gọi là "vòng Macbius".

Chúng ta hãy cùng làm một thí nghiệm thực tế để cùng cảm nhận sự thần kỳ của vòng giấy Macbius.

Bạn hãy lấy ra một tờ giấy có hai mặt trái phải, cắt thành một dải giấy dài, ở mặt phải chúng ta dán thành màu trắng, mặt trái dán thành màu đen. Sau đó dùng keo dán hai đầu của dải giấy lại, khi dán nhớ để cho mặt trắng quay ra ngoài, như vậy là ta đã có một vòng giấy, bên ngoài là màu

trắng, bên trong là màu đen. Nếu như bạn bắt một con kiến (hoặc dùng một chiếc bút giả như con kiến) đặt vào chỗ mặt trắng để cho nó đi lại, không cho phép con kiến bò đến phần màu đen mà chỉ có thể bò về phía trước; bạn sẽ thấy con kiến này cứ bò đi bò lại ở phần màu trắng mà vĩnh viễn không bò sang phần màu đen. Ngược lại nếu đặt nó vào phần màu đen nó cũng chỉ có thể bò ở phần màu đen mà thôi chứ không bò sang phần màu trắng.

Có lẽ bạn cho rằng đương nhiên là như vậy rồi có gì thần kì đâu? Nhưng nếu chúng ta bỏ chỗ dán trước và dán lại sao cho phần màu đen hướng ra ngoài cùng với một phần màu trắng vậy thì vòng tròn đấy không còn phân biệt mặt trái phải hay trong ngoài nữa. Chúng ta lại đặt con kiến vào bất kì chỗ nào trong vòng giấy để cho nó đi lại tự do, bạn sẽ thấy con kiến tự do chạy đi chạy lại tới tất cả mọi chỗ trên cả hai mặt đen trắng của vòng giấy. Điều này cũng có nghĩa là đường như vòng giấy đã biến thành chỉ có một mặt thôi.

Không chỉ như vậy, nếu chúng ta dùng kéo cắt vòng giấy này theo đường chính giữa trong vòng, vòng giấy không thể bị chia làm đôi mà lại thành một vòng giấy dài hơn. Nếu tiếp tục cắt theo đường chính giữa như vậy thì sẽ tạo thành hai vòng giấy lồng vào nhau. Điều này quả là kì diệu, bạn cứ thử mà xem.

Hiện tượng toán học kiểu này được gọi là "thác phốc học". Thác phốc học là ngành toán học nghiên cứu tính chất hình học của hình không vì kéo dài hay gấp cong mà thay đổi. Giống như vòng Macbius chính là một ví dụ điển hình, điều này quả là khó lí giải trong cuộc sống thường nhật.

## Làm thế nào để nhanh chóng thu hẹp phạm vi?

Bạn hãy nghĩ tới một số tự nhiên bất kì trong phạm vi 1000, tôi sẽ hỏi bạn 10 câu hỏi, chỉ cần bạn trả lời "có" hoặc "không" theo đúng sự thực thì tôi có thể đoán ra được số bạn nghĩ trong đầu là bao nhiêu.

Có thể bạn không tin lắm, bởi vì trong 1000 số thì số nào cũng có khả năng nghĩ tới, dường như việc đoán số là không có mục đích, nếu không may mắn thì có đoán tới 500 lần cũng không đúng được; còn nếu

may mắn thì đoán 10 lần cũng khó mà đoán ra nổi, vậy tại sao lại thông qua 10 câu hỏi là có thể đảm bảo đoán được số đang nghĩ nhỉ? Thì ra nhờ việc vận dụng một cách khéo léo phương pháp chia đôi sẽ giúp chúng ta nhanh chóng thu hẹp phạm vi mà chúng ta cần tìm kiếm.

Giả sử số mà bạn nghĩ là 872. Dưới đây chúng tôi sẽ hỏi bạn 10 câu hỏi để bạn trả lời.

1. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 500 phải không? (lấy số chia đôi 1000 là 500)

Đúng.

2. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 750 phải không? (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 500 tức là  $500 + 500/2 = 500 + 250$ )

Đúng.

3. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 875 có phải không? (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 250 tức là  $750 + 250/2 = 750 + 125$ )

Không phải.

4. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 812 có phải không? (lấy số lần trước hỏi trừ đi một nửa của 125 và trừ đi 0,5, tức là  $875 - 63$ )

Đúng.

5. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 844 có phải không? (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 63 và cộng thêm 0,5, tức là  $812 + 32$ )

Đúng.

6. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 860 có phải không? (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 32, tức là  $844 + 16$ )

Đúng.

7. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 868 có phải không? (lấy số lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 16, tức là  $860 + 8$ )

Đúng.

8. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 872 có phải không? (lấy số lần trước bạn hỏi cộng thêm một nửa của 8, tức là  $868 + 4$ )

Không phải.

9. Số mà bạn nghĩ lớn hơn 870 có phải không? (lấy số lần trước hỏi trừ đi một nửa của 4, tức là  $872 - 2$ )

Đúng.

Đến đây có thể đoán ra số mà bạn nghĩ lớn hơn 870 nhưng nhỏ hơn 872 rồi, vậy chỉ có thể là một trong hai số 871 và 872.

Đã hỏi được 9 câu hỏi, lại hỏi thêm lần nữa, chúng ta có thể hỏi là số



mà bạn nghĩ là 871 có phải không? (trên thực tế là số mà lần trước hỏi cộng thêm một nửa của 2, tức là  $870 + 1$ ).

Bạn đương nhiên sẽ phải trả lời là không, vậy thì tôi có thể có được kết luận, số của bạn nghĩ là 872, vậy là hỏi bạn đúng 10 câu hỏi là đã có được đáp án rồi.

Cách làm này thực ra là cứ lấy 1000 liên tiếp chia cho 2, cứ lần lượt cộng thêm vào số lần trước bạn hỏi hoặc trừ đi số lần trước bạn hỏi (số cộng thêm hoặc số trừ đi khi gặp phải số lẻ thì phải cộng hoặc trừ đi 0,5) để làm số hỏi cho câu hỏi lần này. Chỉ cần bạn linh hoạt vận dụng phương pháp cộng hoặc trừ thì nhiều nhất chỉ cần hỏi 10 lần là nhất định bạn sẽ đoán ra được số người ta nghĩ là số bao nhiêu.

## Sự kì diệu của đường gấp khúc bông hoa là ở đâu?

Có thể bạn cũng đã từng chơi một đồ chơi trí tuệ như thế này: đồ chơi này do một bộ bánh răng của nhựa màu sắc tạo thành. Bánh răng của đều là hình vòng tròn, bên trên đương nhiên là có các răng của; điều khác biệt là răng của bánh răng lớn nằm ở bên trong. Răng của của mấy bánh răng của nhỏ nằm ở bên ngoài, hơn nữa bên trong của bánh răng nhỏ còn có một số lỗ tròn nhỏ hoặc mấy cái lỗ hình dạng khác khá lớn.

Khi vẽ đường gấp khúc hình hoa, lấy tay trái giữ chặt bánh răng lớn để cho nó dính chặt trên mặt giấy, không để cho nó chuyển. Trong hình bánh răng lớn đặt một hình bánh răng nhỏ, lấy đầu bút cắm vào một cái lỗ nào đó trong hình bánh răng nhỏ rồi để cho hình bánh răng nhỏ chuyển động sát bên trong hình bánh răng lớn, lúc này, đầu bút sẽ vẽ lên rất nhiều hình hoa văn gấp khúc tuyệt đẹp trên giấy. Khi chúng ta dùng bút có nhiều màu khác nhau thì hoa văn sẽ càng đẹp hơn, giống như một bông hoa ngũ sắc đang nở rộ, vì vậy đường gấp khúc này được gọi là đường gấp khúc bông hoa, còn bộ bánh răng của vẽ lên hình gấp khúc bông hoa được gọi là bộ thước hình gấp khúc bông hoa (cũng giống như thước vẽ hình tròn được gọi là com-pa).

Vậy bạn có biết tại sao bộ thước hình gấp khúc bông hoa vẽ ra được những đường gấp khúc tinh xảo, đẹp đẽ như vậy không?

Bạn hãy đếm số răng cưa trên những bánh răng lớn, nhỏ để vẽ đường gấp khúc. Hãy lấy tỷ số chia số răng cưa của những bánh răng lớn, nhỏ đó rồi đơn giản hoá thành phân số nhỏ nhất, mẫu số của phân số này chính là số tự nhiên của bánh răng cưa nhỏ, tương đương với số cánh hoa trong hình vẽ; còn tử số chính là số lần bánh răng nhỏ quay xung quanh bánh răng lớn. Vì thế, khi nắm được phân số đơn giản hoá nhất này chúng ta sẽ biết được hình vẽ mà chúng ta vẽ ra là hình dạng gì.

Ngược lại, chúng ta cũng có thể giữ cho bánh răng nhỏ trong bánh răng lớn không động đậy, cắm đầu bút vào trong một cái lỗ nhỏ của bánh răng lớn, để cho răng cưa của bánh răng lớn và nhỏ cũng kết hợp chuyển động, như vậy cũng vẽ ra được các loại hình gấp khúc bông hoa.

Hơn nữa khi bạn dùng các bánh răng khác nhau và những cái lỗ kích thước khác nhau thì hình gấp khúc bông hoa cũng sẽ khác nhau, kiểu dáng sẽ vô cùng phong phú và kỳ diệu.

## **Bạn có biết về trò chơi ru-bíc không?**

Ru-bíc là một đồ chơi thường gặp trong cuộc sống của chúng ta, nó là một đồ chơi trí tuệ được kiến trúc sư người Hungari có tên là Arron Rubik phát minh vào năm 1973. Chính bởi sự kỳ diệu trò ru-bíc mà chỉ trong vài năm ngắn ngủi nó đã làm điên đảo toàn thế giới, vì vậy mà tại thành phố Isen của Đức vào năm 1980, Arron Rubik đã được nhận giải thưởng "giải phát minh trò chơi hấp dẫn nhất trong năm".

Trước tiên chúng ta hãy xem ru-bíc có hình dạng như thế nào. Nó là một hình lập phương, trên 6 bề mặt của nó lần lượt được vẽ 6 loại màu sắc khác nhau, mỗi một mặt lại được chia thành 9 miếng vuông nhỏ, màu sắc của 9 miếng vuông nhỏ này lúc đầu là như nhau. Bên trong của hình lập phương có một trục chữ thập có kết cấu rất khéo léo, 26 linh kiện nhỏ tạo nên hình lập phương cũng không hoàn toàn giống nhau, mà được chia thành ba loại: miếng ở trung tâm, miếng ở bên cạnh và miếng ở góc, bất kể bạn lắp đặt hay là gỡ ra đều rất tiện, giá thành sản xuất sản phẩm cũng rất rẻ.

Trung tâm xoay của ru-bíc có một đầu nối sáu hướng, mỗi một đầu lần lượt nối kết với 6 miếng trung tâm, 8 miếng ở góc và 12 miếng ở bên

cạnh. Chúng lần lượt được gắn vào trung tâm trục xoay, tạo thành một hình lập phương ru-bic hoàn chỉnh. Lúc này, bạn có thể xoay chuyển bất kỳ quanh miếng trung tâm theo hàng dọc hoặc hàng ngang và sẽ xuất hiện các hình kỳ ảo khác nhau.

Theo như tính toán, tổng số lượng các hình có màu sắc khác nhau mà hình ru-bic có thể biến hoá thành là:  $4325 \times 102^9$ , một số lượng lớn như vậy - gấp khoảng 70 lần tổng dân số thế giới (6 tỷ), bạn thấy có bất ngờ không?

Cách chơi ru-bic cực kỳ đơn giản, mỗi một động tác đều chỉ là xoay chuyển một mặt một góc  $90^\circ$  theo hướng thuận kim đồng hồ hoặc ngược kim đồng hồ, bất kỳ người nào cũng chỉ cần nhìn một cái là học được ngay, ngay cả một đứa trẻ 2, 3 tuổi cũng có thể tự nghịch được. Mặc dù như vậy, muốn sắp xếp một hình ru-bic đã bị đảo lộn lung tung trở lại hình ban đầu của nó thì quả là một việc không đơn giản chút nào. Hiện nay người ta tìm ra số bước ít nhất để khôi phục lại hình ban đầu của ru-bic là 52 bước, trong khi đó về mặt lí thuyết có người chứng minh rằng chỉ cần 23 bước là có thể khôi phục lại nguyên dạng ban đầu của một hình ru-bic đã bị đảo lộn. Vậy là còn một khoảng cách lớn để chúng ta vượt qua.

Ru-bic là một trò chơi trí tuệ cực kỳ có ý nghĩa khoa học, trong đó thể hiện ý nghĩa sâu sắc của "đại số tuyến tính" và "lí thuyết quần thể" về mặt toán học, hơn nữa nó còn có liên hệ bên trong với vấn đề vật lí lí thuyết. Ngày nay, mặc dù các trò chơi trí tuệ ngày càng nhiều nhưng trò ru-bic vẫn có vô số người yêu thích nó trên toàn thế giới.

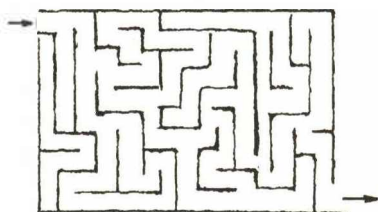
## Làm thế nào để đi ra khỏi mê cung?

Bạn có thích chơi trò đi vào mê cung không? Mê cung đã được lưu truyền từ rất lâu trong sự phát triển văn hoá của nhân loại, ngay từ trong các câu chuyện thần thoại truyền thuyết của Hy Lạp đã xuất hiện mê cung. Trung Quốc cổ đại cũng có mê cung, có mê cung còn được ứng dụng vào trong tác chiến quân sự, được gọi là "trận đồ". Chẳng hạn như "bát quái đồ" mà Gia Cát Lượng sắp đặt trong thời tam quốc, "bàn đồ lộ" được miêu tả trong phần "ba lần đánh Chúc gia trang" của "Thủy Hử" cũng chính là một số dạng mê cung.

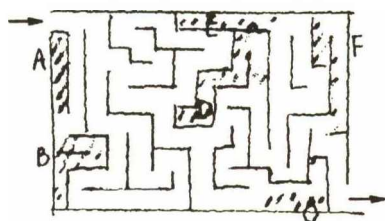
Trong cuộc sống của chúng ta cũng có mê cung. Ví dụ như ở Trung Quốc: "rừng sư tử" ở Tô Châu là một loại mê cung sân nhà điển hình của Trung Quốc; "vạn hoa trận" trong "viên minh viên" ở Bắc Kinh cũng là một loại mê cung, đi vào trong các mê cung này đều rất thú vị.

Nói chung mê cung dùng để kiểm tra khả năng định hướng không gian và năng lực thị giác của con người. Mê cung có rất nhiều chủng loại và các kiểu khác nhau, các cách để thoát ra khỏi mê cung cũng khác nhau, dưới đây chúng tôi sẽ giới thiệu một kiểu trong số đó - xoá đi những con đường không ra được.

Chúng ta hãy xem hình số 1, từ cổng mũi tên chỉ, đến cổng ra được chỉ bởi một mũi tên khác, bạn hãy tìm ra một con đường để đi.

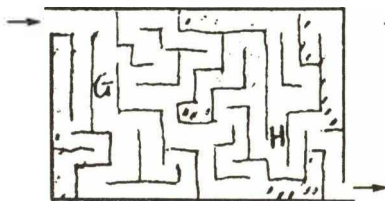


Hình 1

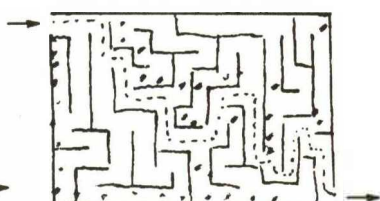


Hình 2

Trước tiên chúng ta hãy dùng các chữ cái đánh dấu những con đường chết, những ngõ không có lối ra, tổng cộng có sáu chỗ là A, B, C, D, E, F, sau đó vẽ nét gạch lên những con đường đó (như hình vẽ số 2). Chúng ta thấy điểm kết chia hai ngõ chết A, B tương đương với đáy giếng của một ngõ chết khác, chúng ta cũng giấu chúng đi (như hình vẽ số 3). Từ hình số 3 có thể nhìn thấy G và H, mặc dù không phải là ngõ chết nhưng sau khi đi vào bên trong quay một vòng vẫn đi ra chỗ ban đầu. Nó là một con đường khúc khuỷu quanh co, vì vậy không có tác dụng gì cho việc đi tới đích của chúng ta, cho nên cũng giấu nó đi, tạo ra được một hình như hình 4.

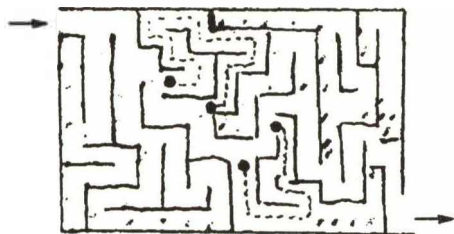


Hình 3



Hình 4

Trong hình 4 có hai đôi điểm đen, mỗi một đôi điểm đen là một đường quanh co. Che đi một phần đường quanh co như hình số 5.



Hình 5

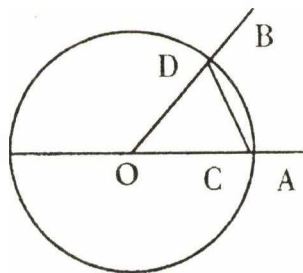
Cho đến lúc này, chúng ta dễ dàng có được một đoạn đường ngắn nhất để đi ra khỏi mê cung. Nếu không phải tìm ra con đường ngắn nhất, chúng ta còn có thể tìm ra hai con đường khác để ra khỏi mê cung, bạn hãy thử xem nhé.

## Không cần đo đạc liệu có thể tính ra góc trên mặt phẳng không?

Khi bạn cần đo 1 góc bất kỳ được vẽ trên giấy, trên hình mặt phẳng hoặc trên bản đồ, nếu trên tay chúng ta có một dụng cụ đo thì công việc đo đạc sẽ đơn giản hơn rất nhiều. Nhưng giả sử chúng ta không tìm thấy một dụng cụ đo nào cả, ví dụ như đang trên đường hành quân thì làm thế nào nhỉ? Dưới đây chúng tôi có một vấn đề như vậy, xem các bạn giải đáp thế nào nhé?

Trong hình vẽ ở bên có một góc AOB nhỏ hơn  $180^\circ$ , yêu cầu bạn không dùng bất kỳ dụng cụ đo nào để tính ra được giá trị của góc này.

Chúng ta có thể làm như sau để giải quyết câu hỏi này: lấy điểm đỉnh góc O làm tâm tròn, vẽ một đường tròn với bán kính bất kỳ, nối hai giao điểm C và D (đây là giao điểm của đường tròn với hai cạnh của góc) với nhau.



Sau đó, dùng một chiếc com pa bắt đầu từ điểm C dựa vào độ dài của CD để đo từng đoạn từng đoạn một theo một hướng trên đường tròn, cho đến khi một góc của com pa dừng ở điểm C thì mới thôi.

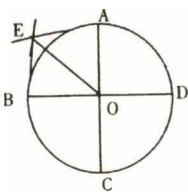
Khi phải đo từng đoạn từng đoạn độ dài theo cát tuyến, nhất thiết phải nhớ số lần vòng quanh đường tròn tổng cộng là  $n$  lần, và độ dài cát tuyến tổng cộng đo bao nhiêu lần trên đường tròn.

Giả sử chúng ta vòng quanh đường tròn tổng cộng mấy lần, và ở chính giữa này đo cát tuyến CD trên đường tròn tổng cộng  $S$  lần, vậy thì góc mà chúng ta có được sẽ là  $\angle AOB = (360^\circ \times n) / S$ .

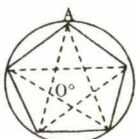
Trên thực tế, giả sử góc này là  $X^\circ$ . CD được đo  $S$  lần trên đường tròn, điều này tương đương với việc góc  $X^\circ$  được phóng đại lên  $S$  lần; nhưng cùng lúc đó đường tròn cũng bị vòng quanh  $n$  lần, vì thế góc này tương đương với  $360^\circ \times n$ ; vì vậy,  $S \cdot X^\circ = 360^\circ \times n$  cho nên  $X^\circ = (360^\circ \times n) / S$ .

Đối với góc mà hình vẽ trong bài biểu thị,  $nS = 2^\circ$  (bạn hãy lấy một chiếc compa ra để thử xem); vì vậy  $\angle AOB = 54^\circ$ . Khi không có com pa, có thể sử dụng một chiếc đinh to và một tờ giấy để vẽ ra hình tròn; cát tuyến trên đường tròn có thể dùng mảnh giấy vừa này để làm.

## Làm thế nào nhanh chóng vẽ ra hình ngôi sao năm cánh?



Hình 1



Hình 2

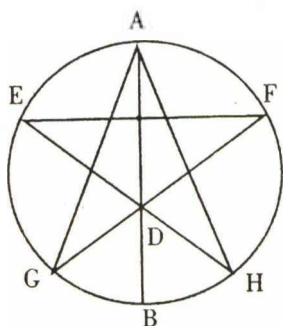
Chúng tôi sẽ giới thiệu 3 cách gần như nhau đều sử dụng thước thẳng và com pa để nhanh chóng vẽ ra hình ngôi sao 5 cánh. Như vậy để lần sau khi bạn vẽ ngôi sao 5 cánh trên giấy màu thì sẽ thuận tiện hơn rất nhiều.

Cách 1: trước tiên dùng com pa vẽ một hình tròn, rồi vẽ hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau; sau đó lần lượt lấy C, D làm tâm tròn, lấy đường kính BD làm bán kính để làm cung tròn, hai cung tròn giao nhau ở điểm E. Vậy thì OE gần như tương đương với cạnh của đường 5 cạnh nội tiếp đường tròn. Bắt đầu từ điểm A, lấy OE làm bán kính lần lượt cắt ra 4 điểm

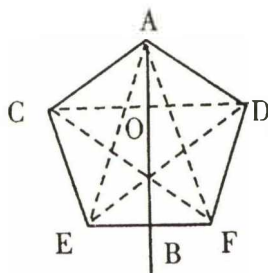


trên đường tròn, như hình vẽ số 2, theo hình vẽ các bạn hãy nối hai điểm liền kề nhau với nhau, hình 5 cạnh đều nhau mà chúng ta có được được gọi là hình 5 cạnh nội tiếp đường tròn (bởi vì 5 đỉnh của hình này đều ở trên đường tròn). Có được 5 điểm này thì rất nhanh chóng vẽ ra được hình ngôi sao năm cánh.

Cách 2: trước tiên vẽ một vòng tròn ra giấy, vẽ đường kính AB của đường tròn, như hình 3 biểu thị. Sau đó chia AB thành 3 đoạn đều nhau (khi làm điều này có thể dùng thước có khắc độ để làm), điểm chia đoạn trên AB gọi là C và D; qua điểm C vẽ EF vuông góc với AB, giao với đường tròn ở E và F; nối ED và kéo dài ED để nó giao với đường tròn tại H; nối FD và kéo dài FD để nó giao với đường tròn tại G; cuối cùng nối AH và AG, thế là hình ngôi sao năm cánh đã gần như được hoàn chỉnh rồi.



Hình 3



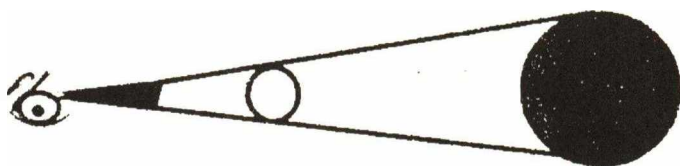
Hình 4

Cách 3: đây là cách vẽ hình ngôi sao đơn giản nhất. Chúng ta hãy cùng xem hình số 4: vẽ hai đoạn AB và CD vuông góc với nhau, điểm giao nhau của chúng là O. Dưới sự trợ giúp của thước khắc độ, bắt đầu từ điểm O, tạo ra  $OC = OD = 0.81$ ,  $OA = 0.59$ ,  $OB = 0.95$ ; qua điểm B vẽ EF vuông góc với AB, và tạo ra  $BE = BF = 0.5$ ; nối AB, AD, CE, DF, vậy thì ACEFD chính là một hình 5 cạnh đều rồi. Trong hình có 5 cạnh đều này nối các điểm đối với nhau chúng ta sẽ có được một hình ngôi sao 5 cánh. (các con số vừa đưa ra có thể phóng to tỷ lệ lên lên, ví dụ như số liệu trong hình vẽ 4 chính là gấp 1,5 lần các con số ban đầu).

Ba cách vẽ hình ngôi sao này rất dễ học dễ nhớ, nếu như bạn không cần phải vẽ ra một hình ngôi sao năm cánh chính xác hoàn toàn thì đây quả là những cách làm nhanh chóng và dễ dàng.

## Bạn có biết góc nhìn một độ lớn thế nào không?

Góc nhìn là gì? Khi chúng ta quan sát một vật thể, góc độ tạo bởi hai đường trực tiếp từ mắt chúng ta tới vật thể được quan sát gọi là góc nhìn. Ví dụ, chúng ta lấy một cái đĩa chiếu lên mặt trăng trên trời, sao cho mặt trăng có kích thước giống với chiếc đĩa trong tay chúng ta, góc  $\mu$  trong hình vẽ chính là góc nhìn.



Để đưa ra một ví dụ rõ nét nhất, giúp mọi người hiểu rõ về góc nhìn 1 độ rất cuộc lớn như thế nào, chúng ta hãy thử tính toán xem một người có chiều cao trung bình (1,7m) cần đi cách ta bao xa để góc nhìn của chúng ta đối với anh ta là 1 độ?

Dùng ngôn ngữ hình học để nói, tức là chúng ta cần tính ra bán kính của một vòng tròn, sao cho dây cung của góc tâm 1 độ dài vừa đúng 1,7m. Nói một cách chặt chẽ thì, 1,7m phải là đường thẳng chứ không phải là đường vòng cung. Nhưng đối với góc độ nhỏ như thế này, sự khác biệt giữa đường vòng cung và đường thẳng là không lớn.

Ví dụ chiều dài đường vòng cung của 1 độ tương đương với 1,7m; thế thì độ dài chu vi của 360 độ là  $1,7\text{m} \times 360 = 610\text{m}$ , bán kính là  $\frac{1}{2}\pi$  của chu vi, nếu  $\pi$  tính theo  $22/7$ , thì bán kính sẽ là:  $610 \cdot \frac{7}{22} = 98\text{m}$ . Xem ra người này bắt buộc phải bước ra xa cách ta khoảng 100m, thì góc nhìn của chúng ta đối với anh ta mới tương đương với 1 độ.

Cũng như thế, chẳng mấy khó khăn gì, chúng ta có thể tính ra thước đo dài 1m, khi góc nhìn về nó là 1 độ thì sẽ cách chúng ta là  $360 \cdot \frac{7}{22} = 57\text{m}$ ; đối với thước đo dài 1cm thì khoảng cách này khoảng 57cm;

đối với vật thể lớn 1000m thì khoảng cách có lẽ là 57000m. Tóm lại, mọi vật thể được nhìn ở khoảng cách tương đương 57 lần chiều dài của nó thì góc nhìn sẽ là 1 độ. Nếu bạn nhớ con số 57 này thì có thể nhanh chóng và giản đơn làm ra mọi bài toán có liên quan đến góc độ của vật thể.

Ví dụ: Để cho cái đĩa có đường kính 25cm khi nhìn lên có góc nhìn tương đồng với mặt trăng trên trời thì nên đưa nó cách ra xa khoảng bao nhiêu?

Đáp án là  $0,25 \times 57 \times 2 = 28.5\text{m}$ . Bởi vì  $0,25 \times 57$  là khoảng cách giữa người và đĩa khi người nhìn đĩa ở góc nhìn 1 độ. Thế nhưng góc nhìn của mặt trăng chỉ là nửa độ, vì vậy, chiếc đĩa cần dịch ra xa thêm khoảng cách gấp đôi, thì góc nhìn của chúng ta đối với đĩa mới là nửa độ và chiếc đĩa sẽ che vừa kín mặt trăng.

Như vậy có thể thấy, khi chúng ta tay cầm đĩa hướng lên mặt trăng trên trời với khoảng cách phải gần 30m thì cái đĩa mới có thể che lấp hoàn toàn mặt trăng. Kết luận này lần đầu nghe thấy khiến cho người ta khó tin được, nhưng nó chính là sự thực, chính ảo giác của chúng ta đánh lừa chúng ta.

## Bạn đã từng chơi trò 15 điểm chưa, làm thế nào để thắng?

Có một loại trò chơi 15 điểm, với hai người chơi. Cách chơi là hai người mỗi người giữ một trong hai loại quân cờ trắng hoặc đen, mỗi loại cờ có 5 quân, Đặt quân cờ trên các ô của bảng có viết số lần lượt từ 1 đến 9, mỗi người mỗi lần chỉ được đặt 1 quân, mỗi một ô đã đặt quân cờ rồi thì không được đặt lại nữa. Ai mà cộng năm số được 15 trước thì người đó thắng.

Giả thiết hai người A, B đánh một ván cờ với nhau, A lấy quân đen, B lấy quân trắng, A đi trước.

(1) A đặt quân cờ vào ô số 9, (2) B đặt quân cờ vào ô số 6, (3) A đặt quân cờ

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|   |   |   | ● |   | ○ |   |   | ● |

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|   | ○ |   | ● |   | ○ | ● |   | ● |

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ○ | ○ |   | ● | ● | ○ | ● | ○ | ● |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 6 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

vào ô số 4, (4) B bắt buộc phải đặt quân cờ vào ô số 2, nếu không A sẽ thắng; (5) A bắt buộc phải đặt quân cờ vào ô số 7, nếu không B sẽ thắng; (6) B đặt quân cờ vào ô số 8, (7) A đặt quân cờ vào ô số 5, (8) B đặt quân cờ vào ô số 1.

A đặt quân cờ vào các chữ số 9,7,5,4, mà trong bốn số đó cộng 3 số bất kỳ đều không bằng 15. B đặt quân cờ vào các chữ số 8,6,2,1, trong đó  $8+6+1=15$ , cho nên B đã thắng.

Chơi trò này có phương pháp nào làm cho bạn chắc chắn thắng không? Có, hơn nữa rất tiện lợi.

Chúng ta nghiên cứu trước một chút việc xếp ô vuông các chữ số; ba chữ số ở mỗi hàng, mỗi cột của nó cũng như ở hai đường chéo cộng lại đều bằng 15. Phép tính này tất cả có 8 cách, 8 phép tính này lại đúng là việc cộng ba chữ số trong khoảng từ 1 đến 9 trong trò chơi 15 điểm mà chúng ta muốn chơi.

Ví dụ:  $1+5+9=15$ ,  $1+6+8=15$ ,  $2+4+9=15$ ,  $2+5+8=15$ ,  $2+6+7=15$ ,  $3+4+8=15$ ,  $3+5+7=15$ ,  $4+5+6=15$ .

Dựa vào việc xếp ô vuông chữ số này, chúng tôi thiết kế một trò chơi chữ "thăng". Trong trò chơi này, hai người lần lượt đặt quân cờ vào các ô trong "thăng", ba quân cờ của ai liên kết thành một hàng, một cột, một đường chéo trước thì người đó thắng.

Thay đổi hình thức trò chơi 15 điểm đi một chút, sửa thành ô chữ "thăng", đồng thời lấy các chữ số trong ô vuông xếp số viết vào ô chữ "thăng".

Từ bốn hình dưới đây có thể thấy, trong bước (6) hình 3 (tức là B đặt quân cờ vào ô số 8), B đã đưa quân mai phục, bất luận A đi nước nào thì ở bước (7), B đều thắng cả.

|   |   |   |
|---|---|---|
| ○ |   |   |
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |
|   | ● |   |

Hình 1

|   |   |   |
|---|---|---|
| ○ |   |   |
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |
| ○ | ● | ● |

Hình 2

|   |   |   |
|---|---|---|
| ○ |   | ○ |
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| ● | 9 | 4 |
| ○ | ● | ● |

Hình 3

|   |   |   |
|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ |
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| ● | 9 | ● |
| ○ | ● | ● |

Hình 4

## Câu chuyện về người thông minh vì sao có thể chia bò tròn số?

Ngày xưa có một ông già người Ấn Độ trước khi chết muốn chia 19 con bò cho 3 người con trai. Phương pháp chia bò rất đặc biệt, di chúc của ông viết thế này: tổng cộng là 19 con bò, chia cho anh cả  $\frac{1}{2}$  tổng số bò; chia cho anh hai  $\frac{1}{4}$  của tổng số bò, chia cho anh thứ ba  $\frac{1}{5}$  của tổng số bò. Nội dung di chúc của ông phải được thi hành. Nhưng đối với người Ấn Độ cổ, bò được coi như thần linh, không được giết, chỉ có thể chia cả con, thế thì với 19 con bò nên chia thế nào đây? Điều này thật khó cho 3 người con trai.

Ba người con trai quyết định hỏi ý kiến quan toà, nhưng quan toà cũng không có biện pháp, ông đành nói: Toà án khó xử vụ việc gia đình, các anh hãy trở về thương lượng giải quyết đi!

Thế rồi sau đó, sự việc đến tai một người thông minh, người thông minh đã giúp họ giải quyết được vấn đề khó khăn này.

Người thông minh nói với ba anh em : Tôi có 1 con bò thêm vào cho các anh, chia cho các anh xong thì trả lại cho tôi. Quả nhiên sau khi 19 con bò biến thành 20 con thì rất dễ chia. Người anh cả được chia  $\frac{1}{2}$  của 20 con, tức là được 10 con; anh hai được chia  $\frac{1}{4}$  của 20 con, tức là được 5 con; anh thứ 3 được chia  $\frac{1}{5}$  của 20 con, được 4 con.  $20-10-5-4=1$ , còn lại 1 con bò trả lại cho người thông minh. Sau khi chia xong, người thông minh vẫn dắt con bò của mình trở về, mọi người đều khen anh ta có phương pháp hay.

Nhưng có người nói, nếu người cha để lại 15 con, lại qui định anh cả được  $\frac{1}{8}$ , thế thì người thông minh chẳng phải là kiếm lời được một con bò sao?

Chúng ta tính toán một chút:  $15+1=16$  con; người anh cả được  $\frac{1}{2}$  của 16 là 8 con; anh thứ hai được  $\frac{1}{4}$  của 16 con là 4 con; anh thứ ba được  $\frac{1}{8}$  của 16 con là 2 con.  $16-8-4-2=2$ , như vậy người thông minh dắt 2 con bò về, quả thật kiếm thêm được một con bò.

Người này hỏi rất có lý. Vấn đề quan trọng khi chia bò tỷ lệ số bò cho ba anh em phải đúng theo di chúc của người cha,  $10:5:4=20 \times 1/2 : 20 \times 1/4 : 20 \times 1/5$ .

Mà 20 là bội số nhỏ nhất của 2,4,5 ; tỉ lệ tròn số 10:5:4, vừa đủ để có thể chia tròn số 19, đây mới là diệu kế trong đó.

Nếu di chúc của người cha là anh cả chia  $1/2$ , anh hai chia  $1/4$ , anh ba chia  $1/8$ , thế thì tỉ lệ số bò mà ba anh em được là  $4:2:1=8 \times 1/2 : 8 \times 1/4 : 8 \times 1/8$ , lúc đó người cha không thể để lại 15 con được, ông sẽ để lại 14 con. Bởi vì  $4+2+1=7$ . Số 14 là 2 lần 7, như vậy cũng không xảy ra chuyện người thông minh kiếm lời được một con bò nữa.

## Làm sao để lấy được vòng bạc?

Ba-Y là kẻ nhỏ nhen nổi tiếng. Ông ta thuê La-đin làm công một tuần (7 ngày), sau đó ông ta lấy ra một chuỗi vòng bạc có 7 chiếc vòng nhỏ móc xích với nhau mà nói với La-đin: Mỗi ngày sẽ trả công cho anh bằng một chiếc vòng bạc nhỏ. "Kẻ hà tiện cũng chịu đưa ra tiền công giá trị thế này ư?" La-đin có chút nghi ngờ.

Sự rộng rãi của Ba-Y tất nhiên là có điều kiện, ông ta nói: Chuỗi vòng bạc này chiếc nọ lồng vào chiếc kia, anh chỉ được rút ra một chiếc vòng trong đó, phải nghĩ cách làm sao mỗi ngày lấy ra được một vòng, nếu anh không làm được thì coi như công toi. La-đin cảm thấy rất khó chịu nhưng anh ta vẫn ở lại thử xem sao.

La-đin làm xong ngày thứ nhất, đã đến lúc đi một chiếc vòng bạc nhỏ rồi. Nhưng nên rút chiếc vòng thứ mấy trước, mới có thể đảm bảo về sau mỗi ngày lấy đi được một vòng? La-đin quyết định tìm A-pa-tin nhờ giúp, A-pa-tin nói: Anh nên rút chiếc vòng thứ 3 trước để lấy tiền công của ngày thứ nhất La-đin làm theo lời của A pha tin rút lấy đi chiếc vòng thứ ba.

Buổi tối ngày thứ hai, sau khi làm xong việc, La-đin mang chiếc vòng đơn đến chỗ Ba-Y đổi lấy hai vòng. Buổi tối ngày thứ ba, La-đin lại lấy lại chiếc vòng đơn đó về. Bốn ngày sau đó, La-đin làm theo lời của A-pa-tin, chia thành bảy ngày mà lấy đi bảy chiếc vòng. Anh đã lấy vòng như thế này:



Ngày thứ tư: một vòng đơn, hai vòng dính liền đối lấy bốn vòng dính liền

Ngày thứ năm: lấy thêm một vòng đơn

Ngày thứ sáu: một vòng đơn đối lấy hai vòng dính liền

Ngày thứ bảy: lấy nốt vòng đơn còn lại

Tham lam như Ba Y cũng đành mở to mắt mà nhìn La-đin lấy đi cả vòng bạc, Apatin thông minh lại thắng.

Vấn đề này trong toán học gọi là vấn đề phân chia trong hình học, khéo lấy vòng đơn là vấn đề đơn giản nhất trong phân chia hình học.

## Lấy đồng xu có mẹo không?

Có một đề ra trò chơi khéo léo lấy đồng xu như thế này:

Trên bàn để 15 đồng xu, hai người chơi lần lượt lấy đi một số đồng xu. Quy định là mỗi người mỗi lần lấy đi ít nhất một, nhiều nhất 5 đồng, ai lấy được đồng xu cuối cùng người đó thắng. Có cách nào chắc chắn thắng không? Nếu có, thì cách đó như thế nào?

Mẹo lấy đồng xu là như thế này, tuy quy tắc trò chơi không hoàn toàn như nhau, thông thường mà nói là hai người chơi, mỗi người tham gia lần lượt lấy đi một số đồng xu, ai lấy đi đồng xu cuối cùng (hoặc nhiều đồng) người đó thắng, hoặc ai lấy đến đồng xu cuối cùng người đó thua. Giống như vấn đề này, sử dụng phép suy đảo có thể giúp bạn tìm ra được chiến lược hay nhất.

Ý nghĩa của phép suy đảo là lí luận suy từ sau ra trước, hoặc là nói bước cuối cùng suy ra bước đầu tiên. Lấy đề bài trên làm ví dụ, sử dụng suy đảo phân tích như sau:

Nếu bạn muốn thắng, đồng xu cuối cùng do bạn lấy, hơn nữa số đồng xu trên bàn không vượt quá 5 đồng, lúc này bạn có thể lấy đi một lần tất cả số đồng xu trên bàn, trở thành người chiến thắng. Từ trạng thái ở điểm cuối này suy lên trước, đối thủ của bạn trước lần lấy đồng xu cuối cùng thì trên bàn, bạn nên để lại mấy đồng xu cho anh ta thì thích hợp?

Trên bàn chỉ nên để lại cho anh ta 6 đồng, nhiều hơn không được mà ít hơn cũng không được. Lần này, bất luận anh ta lấy mấy đồng (từ 1 đến

5 đồng), trên bàn đều còn thừa lại từ 1 đến 5 đồng. Thắng lợi nhất định sẽ thuộc về bạn. Cho nên đến phiên mình lấy bạn nên nghĩ cách lấy số xu sao cho còn để lại cho đối thủ 6 đồng, thế nhưng làm thế nào để chỉ còn lại 6 đồng xu, Cần phải suy lên trước thêm một bước nữa. Dễ thấy, nếu bạn để lại đối thủ 12 đồng trước, thì bất luận anh ta lấy đi bao nhiêu (từ 1 đến 5), bạn đều có thể để lại cho anh ta 6 đồng xu. Điều này thật dễ dàng, chỉ cần bạn đi trước, và lấy đi 3 đồng xu là được rồi.

Vậy nếu trên bàn không phải chỉ 15 đồng, mà là 100 đồng, 150 đồng, thì số bước suy đảo cần thiết sẽ rất nhiều? Thực tế không cần phải suy đảo mãi, bạn chỉ tính sao để số đồng xu để lại cho đối thủ là bội số chẵn của 6, thì bạn nhất định sẽ thắng. Nếu trên bàn đặt 100 đồng xu,  $100(6=16 \text{ dư } 4)$ , bạn muốn thắng thì bạn nên lấy đi trước 4 đồng, rồi lần lượt để lại cho đối thủ 96, 90, 84,..., 12, 6 đồng, bạn sẽ chiến thắng. Nếu trên bàn để 150 đồng,  $150(6=25)$ , không có số dư, bạn muốn thắng thì nên để đối thủ đi trước, rồi lần lượt để lại cho đối thủ 150, 144, 138,...12, 6 đồng, bạn nhất định thắng.

Đây chính là bí quyết dùng phép suy đảo để lấy đồng xu, bây giờ bạn có thể thử chơi với các bạn khác và dùng phương pháp lấy mero đồng xu này.

## Lễ duyệt binh ở Prussia đã gây ra vấn đề gì?

Thế kỷ 18, Quốc vương Prussia ở châu Âu muốn cử hành một lễ duyệt binh. Ông muốn chọn ra một đội binh hình vuông gồm 36 sỹ quan, làm đội dẫn tiên phong cho lễ duyệt binh.

Prussia lúc đó có 6 đội quân (ví dụ như đội kỵ binh, đội bắn cung...). Quốc vương yêu cầu chọn ra từ mỗi đội 6 sỹ quan không cùng cấp bậc, mỗi cấp bậc một người, tổng cộng có 36 người. 6 cấp bậc không giống nhau là: thiếu úy, trung úy, thượng úy, thiếu tá, trung tá, thượng tá. Sau đó ông yêu cầu 36 sỹ quan này xếp thành một hình vuông 6 hàng dọc và 6 hàng ngang, sao cho mỗi hàng dọc, mỗi hàng ngang đều có đủ đại diện các đội quân, các cấp bậc.

Lệnh của Quốc vương ban xuống, làm quan tư lệnh cuống lên, ông triệu tập 36 sỹ quan, theo lời nhà vua lập tức bắt đầu sắp xếp đội ngũ

hình vuông. Nhưng xếp trái xếp phải khiến cho 36 sỹ quan mệt mỏi người mà vẫn chưa xếp ra được đội ngũ hình vuông theo yêu cầu của quốc vương.

Không có cách nào, quan tư lệnh đành phải đi hỏi nhà toán học nổi tiếng O-le.

Thói quen nghiên cứu vấn đề của nhà toán học vẫn thường là từ đơn giản đến phức tạp, từ dễ đến khó. Nhà toán học O-le bắt tay nghiên cứu đội ngũ hình vuông 4 hàng dọc 4 hàng ngang do 16 sỹ quan tổ thành, mỗi hàng, mỗi cột đều đủ các đại diện. Ông phát hiện có thể xếp được đội ngũ hình vuông  $4 \times 4$  này.

Tiếp đó, O-le lại xếp ra một đội ngũ hình vuông 5 dọc 5 ngang do 25 sỹ quan hợp thành. Ông rất tin tưởng tiếp tục nghiên cứu, muốn giải quyết đội ngũ hình vuông 6 dọc 6 ngang do 36 sỹ quan hợp thành. Nhưng dù cố gắng thế nào ông đều không tìm ra phương pháp giải bài toán này.

Một năm trước khi nhà toán học O-le qua đời, ông đã viết một cuốn luận văn, đưa vấn đề đội ngũ hình vuông này thành câu hỏi toán học. Ông cho rằng, hình vuông 6 hàng 6 cột này không thể xếp ra được; ông muốn tìm và chứng minh, đội ngũ hình vuông do bao nhiêu người hợp thành mới có thể xếp ra được với đủ đại diện, cấp bậc ở mỗi hàng, mỗi cột, đội ngũ hình vuông do bao nhiêu người hợp thành thì không thể xếp ra được với điều kiện như vậy. Nhưng quy luật này O-le vẫn không tìm ra được.

Sau đó, người ta gọi hình vuông này là hình vuông O-le. Lại thêm, do khi xếp hình vuông O-le, ông dùng phiên âm chữ la tinh, cho nên cũng gọi là hình vuông la tinh.

Trong một hai trăm năm sau đó, các nhà toán học lại tiếp tục phát hiện, hình vuông la tinh 7 dọc 7 ngang và 8 dọc 8 ngang có tồn tại. Lại thêm một bước suy đoán, hình vuông la tinh của số lẻ đều có thể xếp ra được, nhưng hình vuông la tinh của số chẵn (số chỉ là bội số của 2, nhưng không phải là bội số của 4 như 6, 10, 14...) là không tồn tại. Nhưng sự suy đoán này đã bị lật đổ trong thời hiện đại, bởi vì các nhà toán học đã tiếp tục xếp được hình vuông O-le của 10, 14 và 22, 26. Cho đến nay, chỉ có hình vuông O-le cấp 2 và cấp 6 là chưa xếp ra được.

## Sói, dê, rau bắp cải qua sông thế nào?

Câu hỏi thế này: có một người dắt một con sói, một con dê và mang theo một chiếc bắp cải đến bên bờ sông (chúng ta giả thiết sói không ăn thịt người). Bên sông vừa may có một chiếc thuyền nhỏ trống, khi qua sông, thuyền rất nhỏ chỉ cho phép người chủ và thêm một vật nữa, nếu mang theo hai vật lên thuyền, thuyền sẽ chìm. Mặt khác, nếu không có ai trông quản thì sói sẽ ăn thịt dê, dê sẽ ăn bắp cải, cho nên sói và dê, dê và bắp cải trong lúc người chủ không có mặt thì không thể để chúng cùng với nhau được. Hỏi người chủ nên áp dụng phương án qua sông nào mới có thể mang sói, dê, bắp cải an toàn sang đến bờ bên kia?

Câu hỏi này gọi là câu hỏi trí tuệ cổ xưa được lưu truyền rất rộng rãi. Nó xuất phát từ một nhà thần học Anh quốc. Ông cũng là một nhà giáo, về phương diện lôgic học, thần học, toán học, thiên văn học ông đều có rất nhiều tác phẩm nổi tiếng.

Đáp án chính xác của câu hỏi này như sau: Người chủ đưa dê qua sông trước, bởi vì sói không ăn bắp cải; sau đó đi thuyền không trở lại. Lần thứ 2 đưa sói qua sông, đến bờ bên kia, sau khi thả sói xuống người chủ lại mang dê trở lại bên này. Bỏ dê xuống xong, ông ta bèn đem bắp cải sang sông; sau đó mang thuyền không trở lại, lần thứ tư đem dê sang. Lần này, người chủ đem được cả sói, dê, bắp cải qua sông, có thể tiếp tục hành trình.

Đây quả là một câu hỏi hết sức thú vị, đúng không? Nếu bạn không xét đến vấn đề quay trở lại và mang theo một vật thì có lẽ bạn không thể giải ra được câu đố này. Đây chính là mấu chốt để giải câu hỏi này. Khi người chủ qua sông lần 1, bắt buộc phải mang dê theo, bởi vì sói và bắp cải có thể ở cùng nhau, không nguy hiểm gì; lần thứ 2 người chủ mang sói sang, sói lên bờ nếu không mang dê trở lại thì sói sẽ ăn thịt dê, cho nên người chủ phải mang dê trở lại; lần thứ 3 người chủ mang bắp cải sang sông, khiến cho bờ sông bên kia có sói và bắp cải trong tình trạng an toàn; lần cuối cùng mang dê qua sông ; ba vật đã được mang sang bờ sông bên kia như thế, mà không có tổn thất gì.

Kỳ thực, câu đố này còn có một cách giải khác, là những độc giả thông minh, các bạn có nghĩ ra không?

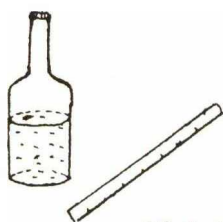
Đó là người chủ khi qua sông lần 2 mang bắp cải qua, đổi vị trí với sói một chút. Do sói và bắp cải đối với dê mà nói, có vị trí giống nhau (một loại ăn dê, một loại dê ăn), cho nên mới có phương án thứ 2. Câu đố dê, sói và bắp cải có hai phương án giải bạn đều biết rồi.

Nếu người chủ phải mang nhiều vật hơn, thế thì khi phân tích câu đố này sẽ phức tạp hơn rất nhiều.

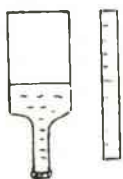
## Bí quyết gì để giải vấn đề thực tế bằng tri thức toán học?

Học toán học phải động não, có lúc trước một sự việc xem ra không có cách nào giải quyết, nhưng chỉ cần dùng mẹo, linh hoạt sử dụng tri thức toán học, khó khăn sẽ lần lượt được giải quyết.

Ví dụ: bạn có thể dùng một cái thước để đo dung tích của một chai đã đổ một phần nước bên trong?



Hình 1



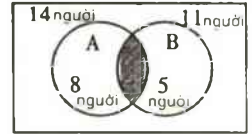
Hình 2

Câu đố này xem ra không khó. Chai nước nửa phần dưới là hình trụ tròn, phần đã đổ nước hiển nhiên là một thể trụ tròn. Chúng ta đều biết, thể tích của thể trụ tròn là lấy diện tích đáy nhân với chiều cao. Vậy thì chúng ta hãy đo độ cao ( $h$ ) của mặt nước bên trong chai trước, tiếp đến đo đường kính ( $d$ ) của vòng tròn đáy chai, có thể tính ra thể tích của phần đã đổ nước của chai là  $(\pi)(d/2)^2h = 1/4 (\pi)d^2h$ .

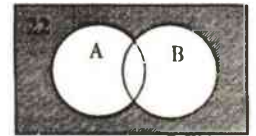
Tính ra được thể tích của phần đổ nước của chai rồi, nhưng làm sao tìm ra được dung tích của phần trống còn lại của chai? Đây mới là mấu chốt của vấn đề. Bởi vì phần cổ chai có thể tích là bao nhiêu thì không có quy tắc, không có công thức hiện có nào có thể dùng để tính toán ra dung tích của nó.

Trước trận đấu cờ, lớp trưởng thống kê số người chơi cờ tướng và cờ vây, khi thống kê số người chơi cờ tướng có 14 người giờ tay, khi thống kê số người sẽ chơi cờ vây có 11 người giờ tay. Sau đó lớp trưởng phát hiện, biết chơi cờ tướng và chơi cờ vây chỉ có 19 người. Theo thống kê ban đầu thì có  $14 + 11 = 25$  người, làm sao lại thiếu mất 6 người? Là vì có một số bạn vừa biết chơi cờ tướng vừa biết chơi cờ vây, họ đã giờ tay hai lần, cho nên phát sinh ảo giác rằng số người thống kê ban đầu nhiều hơn.

Bên trên nói nhiều, kỳ thực dùng phương pháp vòng tròn biểu thị câu hỏi này sẽ tiện lợi hơn nhiều. Chúng ta dùng vòng tròn A biểu thị số người biết chơi cờ tướng (14 người), dùng vòng tròn B biểu thị số người biết chơi cờ vây (11 người), tô đậm phần giao giữa hai vòng tròn, biểu thị số người vừa biết chơi cờ tướng vừa biết chơi cờ vây.

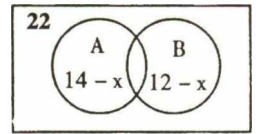


Hình 1



Hình 2

Không khó nhìn ra, nếu chúng ta đơn giản cộng 14 với 11, thì số người thể hiện ở phần tô đậm sẽ tăng hai lần, cho nên số người biết chơi cờ tướng, cờ vây theo thống kê ban đầu so với số người về sau phát hiện nhiều hơn  $(14 + 11) - 19 = 6$  người, số 6 người này chính là thể hiện ở phần tô đậm, điền số 6 vào phần tô đậm. Có thể thấy số người chỉ biết chơi cờ tướng mà không biết chơi cờ vây là  $14 - 6 = 8$  người, số người chỉ biết chơi cờ vây mà không biết chơi cờ tướng là  $11 - 6 = 5$  người.



Hình 3

Dưới đây, chúng tôi sẽ dùng vòng tròn để giải đáp câu hỏi.

Một lớp 5 có tất cả 42 học sinh, có 14 người tham gia nhóm nhỏ hoạt động ngoại khoá Mỹ thuật, có 12 người tham gia nhóm nhỏ ngoại khoá Âm nhạc, nhóm học sinh không tham gia cả hai nhóm ngoại khoá có 22 người, hỏi tham gia cả hai nhóm ngoại khoá có bao nhiêu học sinh?

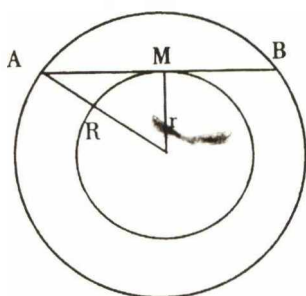
Trước tiên chúng ta hãy vẽ hai đường tròn giao nhau A, B; A biểu thị số người tham gia nhóm ngoại khoá Mỹ thuật, B thể hiện số người tham gia nhóm ngoại khoá Âm nhạc. Hiển nhiên hai hình tròn không bao gồm người không tham gia cả hai nhóm ngoại khoá. Chúng ta hãy vẽ một cái khung bên ngoài hai vòng tròn biểu thị toán học sinh của cả lớp, thể thị phần tô đậm trong khung, ngoài hình tròn biểu thị số người không tham gia cả hai nhóm ngoại khoá, xem hình 2, theo ý câu hỏi, phần này có 22 người.



Nếu chúng ta lật ngược cái chai lại, câu đổ khó sẽ không khó nữa. Như hình 2 đã thể hiện, nước sẽ tập trung lại ở phần cổ chai, khoảng trống bên trên lại xuất hiện hình trụ tròn. Chỉ cần đo được chiều cao  $h$  của trụ tròn khoảng không đó, vẫn dùng phương pháp tính toán lấy diện tích đáy nhân với chiều cao, không khó tìm ra dung tích của khoảng không:

$$\frac{1}{4}(\pi)d^2h'.$$

Như vậy thể tích của nước trong chai cộng thêm dung tích của khoảng không trong chai sẽ được dung tích của cả chiếc chai:  $\frac{1}{4}(\pi)d^2(h+h')$ , (chú ý là nước trong chai không được quá ít, nếu không sau khi lật ngược chai nước, nước lại không vượt quá phần cổ chai, làm cho phương pháp này tiến hành không thông được.)



Hình 3

Bên dưới, bạn xem câu hỏi như thế này, thử nghĩ nên làm thế nào.

Có một linh kiện hình vòng tròn, làm thế nào để đo lường diện tích của nó? Quy định chỉ dùng thước đo độ dài của các đường trên linh kiện, như hình 3 đã thể hiện.

Chúng ta biết, phương pháp đo thông thường đều là đo đường kính ngoài  $R$  và đường kính trong  $r$  của vòng tròn, tìm ra diện tích của đường tròn ngoài và đường tròn trong, sự sai khác giữa hai diện tích,  $(\pi)(R^2-r^2)$  chính là diện tích của vòng tròn. Nhưng ở đây chỉ cho phép đo độ dài của các đoạn thẳng, thế thì nên đo đoạn nào? Mời bạn động não nghĩ nào!

(Đáp án: Đo độ dài của  $AB$ , đặt là  $d$ , do định lý tam giác vuông  $(\pi)(R^2-r^2) = (\pi)(d/2)^2 = \frac{1}{4}(\pi)d^2$

## Vẽ đường tròn có giúp bạn giải câu hỏi nhanh không?

Chắc bạn chẳng còn lạ lẫm gì đối với đường tròn, nhưng bạn có biết rằng dùng đường tròn có thể giúp chúng ta giải câu hỏi nhanh chóng hơn không? Chúng ta hãy xem ví dụ dưới đây:

Dùng  $x$  thể hiện số người tham gia cả hai nhóm trên, thế thì số người chỉ tham gia nhóm ngoại khóa mỹ thuật mà không tham gia nhóm âm nhạc là  $14-x$ , số người chỉ tham gia nhóm ngoại khóa âm nhạc mà không tham gia nhóm mỹ thuật là  $12-x$ , xem hình 3. Giải phương trình  $(14-x)+x+(12-x)+22=42$ , giải ra được  $x=6$ , tất cả có 6 người tham gia cả hai nhóm ngoại khóa.

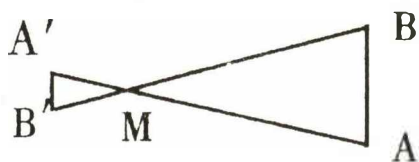
Giải câu hỏi theo phương pháp vẽ hình tròn có phải là rất tiện lợi không?

## Trong tình huống không có bất kì một thiết bị đo nào trong tay, bạn có thể đoán ra khoảng cách giữa bạn và người đi trên bờ bên kia?

Có một câu hỏi như thế này: Có một người đi dọc theo bờ bên kia sông, chúng ta có thể thấy rõ được bước đi của anh ta. Bây giờ muốn bạn đứng ở bờ bên này để đo được khoảng cách giữa hai người (giá trị gần đúng cũng được), mà trong tay không có bất kỳ một thước đo nào, bạn có làm được không?

Bạn tuy không có thiết bị đo, nhưng có tay và mắt, thế đã đủ rồi.

Đưa thẳng cánh tay của bạn hướng về phía người đi bộ ở bờ bên kia, giả định người đó đi theo hướng tay phải của bạn, nhắm mắt trái lại, chỉ dùng một mắt bên phải, Ngược lại thì dùng mắt trái, nhìn qua đầu ngón tay cái giờ lên. Đúng lúc người kia đi vào chỗ bị ngón tay cái che mất, lập tức nhắm con mắt vừa nhìn theo ngón cái lại, mở con mắt bên kia ra, bạn sẽ thấy người kia dường như bước lùi lại một đoạn; lúc này cần chú ý đếm số bước mà người đó đi, đợi đến khi anh ta bước vào chỗ bị ngón cái che mất lần thứ hai, bạn có thể dùng các số liệu có giá trị tương đối để đo của khoảng cách giữa bạn và anh ta.



Bây giờ nói rõ một chút làm thế nào để dùng những số liệu này? Như hình biểu thị, giả định A và B là hai con mắt của bạn, M là điểm dựng lên của ngón tay mà cánh tay duỗi thẳng,

điểm A là vị trí thứ nhất của người bộ hành, điểm B là vị trí thứ hai. Thế thì tam giác A'B'M và ABM đồng dạng (bạn nên đứng đối mặt với người kia, cố gắng khiến cho A'B' và phương hướng người bên bờ bên kia đi theo hình bình hành).

Vì vậy  $BM/B'M = AB/A'B'$ ; trong đó B'M là chiều dài cánh tay bạn duỗi ra, A'B' là khoảng cách giữa hai con người mắt của bạn, AB cũng có thể tính ra được từ số bước chân của người đi bộ bạn đã đếm được (bình quân mỗi bước khoảng 3/4 m), từ đó chúng ta được giá trị của MB.

Giả thiết khoảng cách giữa hai con người mắt là  $A'B' = 6\text{cm}$ , BM là chiều dài cánh tay 60cm, người đi bộ đi từ A sang B tổng cộng 14 bước, thế thì khoảng cách giữa bạn và anh ta sẽ là:  $MB = AB \times B'M/A'B' = 14 \times 60/6 = 140 \text{ bước} = 105\text{m}$ .

Tốt nhất là nên đo ra khoảng cách con người mắt và khoảng cách từ mắt đến điểm đầu ngón tay cái dựng lên khi duỗi cánh tay, như vậy, ghi chắc lại tỉ lệ giữa hai người, thì luôn luôn có thể đoán biết được khoảng cách của vật thể mà ta không phải đến gần. Lúc đó chỉ cần lấy AB nhân với tỉ lệ của khoảng cách này là được. Thông thường mà nói, đại đa số  $B'M/A'B'$  của người bằng khoảng trên dưới 10.

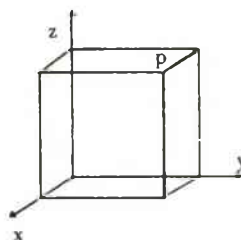
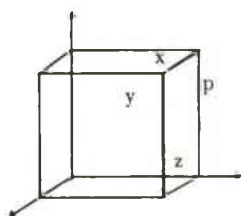
## Sáng tạo toán học từ con nhện giăng tơ

Đề-các là nhà triết học và nhà toán học của Pháp thế kỷ 17, ông đã cống hiến rất nhiều cho lĩnh vực triết học và toán học. Ông có năng lực quan sát rất nhạy bén, giỏi tư duy, rất chú trọng những vấn đề trong cuộc sống có liên quan tới toán học.

Có một lần, ông lâm bệnh, nằm trên giường, nhìn lên trần nhà. Ông thấy một con nhện đang bận rộn đan mạng ở một góc. Chỉ trong chốc lát, nó leo lên leo xuống trên tám hoa văn trần nhà, một lúc lại nhả ra tơ treo lơ lửng trong không trung. Cứ nhìn như thế, ông đã bị cuốn theo, và chìm vào suy tư.

Ông đang nghĩ gì? Một câu hỏi xuất hiện trong đầu ông- Làm thế nào để xác định vị trí của nhện trong không trung?

Suy nghĩ một lúc, ông nhận ra, trong không gian của căn phòng, tường và mặt đất là không chuyển động, duy chỉ có con nhện là chuyển



động, có thể coi tường và mặt đất là bề mặt tham chiếu cố định, dùng đường giao của hai mặt tường và đường giao giữa tường và mặt đất để xác định vị trí của nhện trong không trung không?

Ông vội vàng yêu cầu người nhà mang giấy bút đến, thử vẽ một hình vẽ. P biểu thị cho con nhện trong không trung, X, Y là khoảng cách từ P đến hai mặt tường, Z là khoảng cách từ P đến mặt đất. Như vậy, thông qua giá trị của ba khoảng cách thì đánh giá ra được chính xác vị trí của con nhện P.

Sau khi khỏi bệnh, ông tiếp tục nghiên cứu một thời gian dài, từ đó sáng kiến ra một bộ môn toán học mới, gọi là hình học giải tích. Trong hình học giải tích không gian, dùng ba đường thẳng vuông góc với nhau  $(x,y,z)$  tạo thành một toạ độ không gian, ba đường vuông góc với nhau gọi là trục, trục x, trục y, trục z; hai trong ba trục tạo nên một mặt phẳng, như mặt phẳng XY, XZ, YZ, mỗi một trục đều vuông góc với mặt phẳng tạo thành bởi hai trục còn lại. Một điểm bất kỳ trong hệ toạ độ này đều có thể được thể hiện bằng giá trị toạ độ của ba trục  $(x,y,z)$ , ví dụ P(2,2,1) là biểu thị vị trí của điểm P. Toạ độ này gọi là toạ độ Đề-các.

Có toạ độ Đề-các rồi, người ta có thể tiến hành nghiên cứu các vấn đề trong hình học bằng cách dùng phương trình đại số, nhiều vấn đề trở lên dễ giải quyết hơn rất nhiều.

Giáo trình môn hình học giải tích, các em học sinh lên trung học sẽ được học. Các em hãy học theo Đề-các, để ý quan sát các hiện tượng xung quanh, rèn luyện khả năng quan sát, tư duy của mình, như vậy các em sẽ phát hiện thấy trong cuộc sống có rất nhiều vấn đề khoa học kỳ diệu.

## Chia đất thế nào?

Ngày xưa ngày xưa, trên thảo nguyên mênh mông của Mông Cổ, có hai bộ lạc du mục, cùng một lúc tìm thấy một vùng đất. Dựa theo thoả thuận trong bộ lạc, vùng đất này nên do hai bộ lạc, mỗi bộ lạc chiếm một nửa sử dụng (hình vẽ như sau).

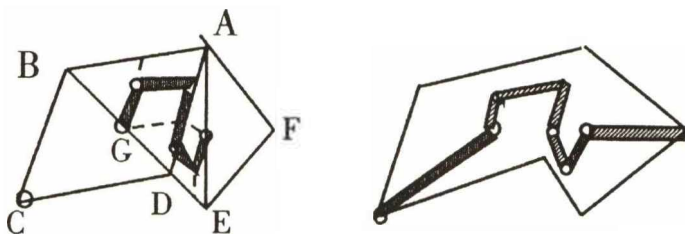
Thế là họ tìm về một số dây thừng và cọc gỗ, chôn cọc gỗ vào vị trí thích hợp, buộc dây thừng vào cọc gỗ. Như vậy, những dây thừng này sẽ chia đều diện tích của mảnh đất thành hai phần, hơn nữa hai miếng đất sau khi chia đều có thể liền thành một mảnh.

Trong điều kiện thiếu công cụ tính toán lúc bấy giờ, bạn có biết họ chia đất như thế nào không?

Trước tiên họ dùng phương pháp kéo thừng để chia miếng đất thành bốn hình tam giác (biểu thị đường thẳng trên hình vẽ). Dùng thừng đo độ dài của AE và BD, gấp một nửa chiều dài dây thừng đo được, tìm ra điểm giữa của mỗi một đầu thừng, gắn trên cọc trang, dây thừng trên vị trí từ C đến G, F đến H, như vậy dựa vào định lí chiều cao đáy tương đương, diện tích cũng tương đương của hình tam giác, tam giác BCD và tam giác AEF bằng nhau.

Chúng ta lại xem hai tam giác ở giữa.

Từ điểm G, H dùng dây thừng kéo thành một đường thẳng, vạch chia mỗi một tam giác thành hai tam giác có diện tích bằng nhau và một hình bình hành bốn cạnh (dùng đường cắt đứt biểu thị). Điểm giữa của hai bên hình bình hành bốn cạnh gắn trên cọc trang, như hình vẽ thể hiện, tam giác ABD và tam giác ADE ở giữa đều được dây thừng vạch chia thành hai mảnh, mỗi mảnh là một hình tam giác và  $\frac{1}{2}$  hình bình hành bốn cạnh.



Tổng hợp lại, mảnh đất này được dây thừng vạch chia ra thành hai miếng đất có diện tích như nhau mà lại nối liền nhau (như hình vẽ).

## Dùng kiến thức hình học bắt trộm như thế nào?

Trong 6 chàng lãng tử, chắc chắn có 2 kẻ, mỗi kẻ lấy trộm một chiếc xe đạp

Hary nói: " kẻ trộm là Sác-lơ và Giooc."

Jêm nói: " Đôn-nát và Tôm là kẻ cắp"

Đôn-nát nói: " Kẻ gian tặc là Tôm và Sác-lơ."

Giooc nói: "Ha-ry và Sác-lơ đã thông đồng ăn cắp."

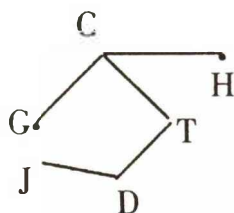
Sác-lơ nói: " Đôn-nát và Jêm là kẻ gây án."

Lúc truy hỏi Tôm, anh ta trốn; về cơ bản tìm không ra được anh ta, vì vậy cũng không biết anh ta sẽ nói những gì.

Trong câu trả lời của những người ở trên, có bốn người mà câu trả lời của họ nửa đúng nửa sai. Họ đều nói đúng một người là ăn cắp và người khác thì không đúng. Nhưng có một người nói dối cả hai.

Vậy, cuối cùng ai đã lấy cắp chiếc xe đạp?

Chúng ta có thể vẽ một hình vẽ, mỗi một điểm đỉnh trên hình vẽ biểu thị một người, dùng các chữ cái C,G,H,T,D,J lần lượt biểu thị cho Sác-lơ, Giooc, Ha-ry, Tôm, Đôn-nát, và Jêm. Cứ hai người bị nhắc đến tên, thì dùng một đoạn thẳng để nối, ví dụ CG biểu thị lời nói của Hary.



Để bắt được kẻ trộm, chỉ cần kiểm tra các điểm đỉnh trên hình vẽ: Nếu hai điểm nào có tổng số đầu đoạn thẳng hội tụ tới là 4 thì đó là hai kẻ ăn cắp. Ví dụ điểm C, số đoạn thẳng hội tụ tới nó là 3, của T,D là 2; của H,G,J là 1.

Vì trong lời nói của năm người thì có 4 người là trả lời nửa đúng nửa sai, vì vậy chúng ta phải tìm ra hai điểm đỉnh có tổng số đầu đoạn thẳng bằng 4.

Cần chú ý là, giữa hai điểm biểu thị hai kẻ ăn cắp sẽ không có đoạn thẳng nối liền, nếu không sẽ có nghĩa là một người trong đó nói đúng sự



thật hoàn toàn, chứ không phải là "nửa đúng, nửa sai". Tóm mặc dù trốn mất, nhưng chúng ta đã tìm được đáp án từ hình vẽ, anh ta nói hay không nói đều không quan trọng.

Từ hình vẽ, bạn đã có thể nhìn ra được hai kẻ cắp. Chỉ có thể là C và J, là Sác-lơ và Jem.

## Ai là gián điệp quốc tế

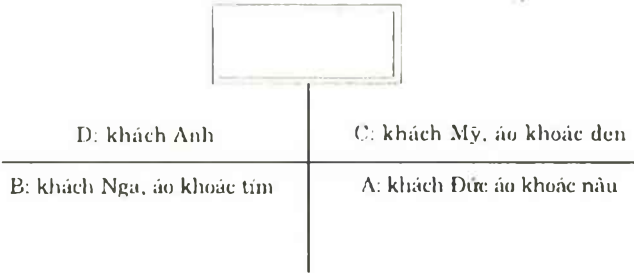
Trong một toa tàu của đoàn tàu Quốc tế, có bốn hành khách có quốc tịch khác nhau A,B,C,D. Họ mặc áo khoác có màu sắc không giống nhau, cùng ngồi bên cạnh một chiếc bàn, trong đó hai người ngồi gần cửa sổ, hai người ngồi gần lối đi. Đã biết người mặc áo khoác màu xanh lam là gián điệp quốc tế, lại biết:

- 1. Lữ khách Anh ngồi bên trái của ông B
- 2. Ông A mặc áo khoác màu nâu
- 3. Người mặc áo khoác màu đen ngồi bên phải khách người Đức
- 4. Khách người Mỹ ngồi đối diện với ông D
- 5. Khách người Nga mặc áo khoác màu tím
- 6. Khách người Anh quay đầu về bên trái, nhìn ra ngoài cửa sổ.

Bạn có biết trong bốn người này, ai là gián điệp mặc áo khoác màu xanh lam?

Trước tiên chúng ta lấy điều kiện 6 làm nút đột phá giải đề, biết người nước Anh ngồi một bên gần cửa sổ; từ (1) lại biết ông B ngồi gần lối đi.

Từ điều kiện (3) có thể suy ra khách người Đức ngồi một bên cạnh lối đi đối diện với ông B, mà người mặc áo khoác màu đen chắc chắn ngồi đối diện người nước Anh, cùng ngồi gần cửa sổ, như hình vẽ.



Điều kiện (4) chỉ ra rõ người nước Mỹ ngồi đối diện ông D, do vị trí ngồi của khách người Anh và khách người Đức trong bốn người đã rõ ràng, cho nên khách ngồi đối diện với họ nhất thiết không thể là ông D, mà ông D chỉ có thể là một trong hai người nước Anh, nước Đức. Bước suy luận này là rất quan trọng.

Lại đi tiếp chúng ta dùng phương pháp thăm dò, giả thiết người Đức là ông D, thế thì ông B sẽ là người Mỹ, người mặc áo khoác đen ngồi bên cạnh ông D sẽ là người Nga, nhưng điều này mâu thuẫn với điều kiện (5), vì điều kiện (5) nói người Nga mặc áo khoác tím, xem ra giả thiết sai, ông D không thể là người Đức, mà là người Anh.

Ông D là người Anh, từ đó biết được người mặc áo khoác đen đối diện ông ta là người Mỹ, mà ông B bên cạnh ông D chỉ có thể là người Nga. Từ điều kiện (2) lại biết, ông A mặc áo khoác nâu, vậy ông ta chỉ có thể là người Đức, còn lại người Mỹ chính là ông C.

Lúc này, điều kiện trong hình vẽ đều đã được điền tương đối rồi, không còn sự lựa chọn nào khác, bạn nhìn là thấy ngay người mặc áo khoác màu xanh là người Anh, và ông ta chính là gián điệp quốc tế.

Nhìn lên trên, vấn đề dò tìm đầu mối đã được phân tích chính xác bằng phương pháp suy luận từng bước tìm ra đáp án.

## Vì sao quốc vương không đủ gạo để thưởng?

Ngày trước, ở Ấn Độ cổ có một quốc vương bản tính thích chơi bời tiêu khiển, có một lần ông hạ lệnh dán cáo thị trên toàn quốc, thông báo rằng: nếu ai có thể tìm ra được một trò chơi thoả mãn niềm ham thích của quốc vương thì sẽ được trọng thưởng.

Có một vị thuật sĩ (thuật sĩ là chỉ người có mưu lược có trí tuệ) đọc được bảng cáo thị. Ông đã phát minh ra một loại cờ có thể làm cho quốc vương ham thích, chơi không biết mệt. Thế là ông bèn tìm đến quốc vương. Quốc vương vui vẻ hỏi thuật sĩ: "Nhà ngươi có yêu cầu gì về phần thưởng không?" Thuật sĩ nói: "muôn tâu bệ hạ, thuật sĩ nhỏ bé không có yêu cầu gì đặc biệt, chỉ mong đại vương cho thần một chút phần thưởng nhỏ mọn là một số gạo, số gạo đó được tính như sau: đặt một hạt gạo ở ô cờ thứ nhất của bàn cờ, đặt 2 hạt gạo ở ô cờ thứ hai, đặt 4

hạt gạo ở ô cờ thứ 3, sau đó ở mỗi một ô cờ tiếp theo đặt số hạt gạo gấp đôi số hạt gạo ở ô cờ trước, đặt đủ gạo trong 64 ô cờ, đó chính là phần thưởng mà thần mong muốn."

Quốc vương mới nghe, nghĩ với cả một quốc gia lớn thế này thì một ít gạo thấm vào đâu, thế là đồng ý ngay. Thế nhưng, khi toán sư của quốc vương tính toán số gạo trên bàn cờ, thì bất thần giật mình kinh ngạc. Cho dù lấy tất cả số gạo của cả nước, cũng không thể điền kín hết 64 ô cờ theo yêu cầu của thuật sỹ.

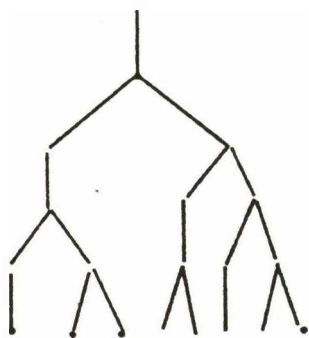
Tại sao vậy? Quốc vương cuối cùng nên thưởng cho thuật sỹ bao nhiêu gạo?

Chúng ta cùng tính toán nhé: ô thứ nhất là 1 hạt gạo, ô thứ hai là 2 hạt, tổng cộng có 3 hạt, dùng công thức biểu thị như sau:  $1+2=3=2^2-1$ , trong ô thứ 3 có 4 hạt, thế là trong ô 1, 2, 3, có tất cả 7 hạt gạo,  $1+2+4=7=2^3-1$ . lại thêm vào ô thứ tư 8 hạt gạo, tổng cộng là 15 hạt,  $1+2+4+8=2^4-1$ ,... cứ tiếp tục thêm vào như thế, có thể suy ra trong 64 ô cờ có tất cả  $2^{64}-1$  hạt gạo, con số này là bao nhiêu? Nó bằng 18.446.744.073.709.551.615, một con số gồm 20 chữ số. Chà! Quá là không tính thì không biết, vừa tính ra thì thấy giật mình. Con số này lớn đến mức không thể tưởng tượng được, giả dụ có dành kho chứa chỗ gạo này thì cần một cái kho cao 4m, rộng 10m, còn chiều dài thì dài từ trái đất đến mặt trời và lại từ mặt trời trở xuống trái đất!

Vì sao mà con số này làm người ta kinh ngạc đến vậy? Thực chất thuật sỹ thông minh đã vận dụng kiến thức cấp số nhân, khiến cho các con số nhỏ bé 1 hạt, 2 hạt rất nhanh chóng biến thành con số lớn không thể tưởng tượng được. Quốc vương thiếu kiến thức toán học làm sao có thể lí giải được cái uyên thâm kỳ diệu của cấp số nhân được.

## **Bạn có biết dãy số sinh ra từ việc sinh sôi nảy nở của một cặp thỏ là gì không?**

Có một cặp thỏ vừa mới chào đời, sau một tháng, chúng lớn thành thỏ trưởng thành; lại sau một tháng nữa, sinh ra một cặp thỏ con, ba tháng sau, thỏ lớn lại sinh ra một đôi thỏ con nữa... Tóm lại, cứ qua



một tháng, thỏ con có thể trưởng thành thành thỏ lớn, mà một cặp thỏ lớn, mỗi một tháng lại sinh ra một cặp thỏ con. Nếu không có con thỏ nào bị chết, cứ như thế qua một năm, thì sẽ có tất cả bao nhiêu cặp thỏ con?

Chúng ta vẽ hình biểu thị sự sinh sôi của thỏ, để tiện tìm ra quy luật của số thỏ. Điểm đỏ trên hình vẽ biểu thị thỏ con, điểm đen biểu thị thỏ lớn.

Từ hình vẽ có thể thấy, sau mỗi tháng, tổng số thỏ do hai bộ phận tổ thành: Số thỏ con và số thỏ lớn. Mà số thỏ con tháng bấy giờ chính là số thỏ lớn của tháng trước, bởi vì tháng trước có bao nhiêu cặp thỏ lớn, tháng sau sẽ có bấy nhiêu cặp thỏ con; hơn nữa, số thỏ lớn tháng bấy giờ lại là tổng số thỏ của tháng trước, bởi vì số thỏ con, sau một tháng đều là thỏ lớn. Căn cứ vào kết luận này, lại có thể biết được số thỏ lớn của tháng trước là tổng số thỏ tháng trước. Cho nên, số thỏ của tháng đó bằng với số thỏ của tháng trước cộng thêm số thỏ lớn của những tháng trước, cũng là bằng với số thỏ của tháng trước cộng thêm số thỏ của những tháng trước.

Thế là, không khó viết ra số cặp thỏ sau tháng 1, 2, ..., 12 tháng: ta có 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. Vì vậy, đáp án của câu hỏi này là 233 cặp.

## Sao gọi là "điều luật cắt tóc" sai?

Ở một quốc gia châu Âu cổ đại có một thị trấn nhỏ, cư dân của thị trấn không nhiều, nên thợ cắt tóc cũng chỉ có một người. Trong thị trấn có một điều luật bất thành văn: Bất kể người nào mà không tự cắt tóc được thì thợ cắt tóc sẽ cắt; đồng thời cũng quy định: thợ cắt tóc chỉ có thể cắt tóc cho những người không tự cắt được tóc.

Quy định đã rõ ràng như vậy, tuyệt đối không thể sai sót được. Nhưng rồi đã nảy sinh vấn đề, tóc của thợ cắt tóc do ai cắt? Nếu ông ta không tự cắt cho mình, thì theo luật, ông ta sẽ được thợ cắt tóc cắt cho (chính là ông ta). Kết quả cắt cũng không phải, mà không cắt cũng không phải. Điều này thật khó xử cho ông thợ cắt tóc.

Vấn đề nảy sinh bởi vì bản thân luật không hợp lí. Điều luật này đã chia toàn thể số cư dân trong thị trấn nhỏ thành hai lớp, một lớp là những người tự cắt tóc, một lớp là những người không tự cắt tóc được. Kết quả khiến cho bản thân ông thợ cắt tóc không biết quy về lớp nào.

Việc này đã gây ra chấn động rất lớn cho giới toán học đương thời. Bởi vì nền móng cơ bản cho toán học là luận tập hợp, nếu luận tập hợp có vấn đề, thì cơ sở của toán học sẽ nảy sinh dao động, điều này trên lịch sử gọi là "nguy cơ toán học lần thứ ba".

Để giải quyết mâu thuẫn, xây dựng lại cơ sở toán học, các nhà toán học đã nỗ lực gian khổ, khiến cho định nghĩa tập hợp mà người ta biết đến buộc phải có hạn chế.

## **Bạn có biết kiến thức số học từ việc con kiến mang được vật nặng không?**

Bạn đã từng nhìn thấy dáng vẻ của một con kiến khi đang làm việc chưa? Nó mang theo một hạt đại mạch không tương xứng với thân hình nhỏ bé của nó nhanh nhẹn leo xuống dưới theo các cọng thực vật. Điều này thật không thể tưởng tượng được, một con kiến nhỏ nhoi lấy đầu ra sức lực lớn như vậy, có thể bê một vật nặng gấp 10 lần trọng lượng của nó như vậy, như bê một chiếc đàn thép lớn leo lên cầu thang, lẽ nào con kiến còn có sức lực hơn con người?

Quả thật như vậy không? vấn đề này không có sự giúp đỡ của hình học, cũng không có cách nào giải đáp.

Để chúng tôi phân tích một chút về bắp thịt của động vật trước. Cắt lấy bắp thịt trên thân của một con ếch đã bị giết, làm thí nghiệm liên kết thịt bắp đùi, xương chân và vai của con ếch với nhau và treo lên, lấy một cái móc xuyên qua vai, trên móc treo một quả cân. Giả dụ lấy hai sợi dây điện liên kết hai đầu của bắp thịt, đồng thời nối dòng điện vào, thế thì bắp thịt này lập tức co lại và kéo quả cân lên. Tăng dần quả cân để đo được khả năng nâng vật nặng lớn nhất miếng thịt này có thể mang, bây giờ lần lượt hai, ba, hoặc bốn bắp thịt giống nhau liên kết lại, nối dòng điện, thế là quả cân nâng lên đến bội số tương ứng của số bắp thịt. Thiết

tương, nếu những bắp thịt này đều sinh trưởng cùng nhau, cũng có thể đạt được kết quả giống nhau. Vì vậy chúng ta biết độ lớn nhỏ của năng lực nâng của bắp thịt không quyết định ở độ dài hay độ nặng của bắp thịt, mà quyết định ở sự thô mảnh của nó, cũng chính là quyết định ở tiết diện lớn nhỏ của nó.

Giả thiết có hai động vật, kích cỡ thẳng của động vật thứ 2 gấp hai lần động vật thứ nhất, như vậy thể tích, thể trọng của động vật thứ hai gấp 8 lần động vật thứ nhất; nhưng trên độ đo bề mặt, tiết diện của bắp thịt động vật thứ hai lại chỉ gấp 4 lần động vật thứ nhất. Như vậy, tuy thân thể của một động vật đã lớn gấp 2 lần trước, thể trọng đã gấp 8 lần trước, nhưng sức lực cơ bắp của nó chỉ tăng 4 lần trước. Cũng vậy, so sánh thể lực và thể trọng của động vật ngược lại yếu đi một nửa. Căn cứ vào lí do đó, độ lớn của một động vật gấp 3 lần động vật khác thì thể lực lại yếu hơn 1/3 lần.

Điều này giải thích vì sao các loại côn trùng như kiến ...có thể mang vác được vật nặng gấp 30, 40 lần cơ thể, mà con người trong tình trạng bình thường - ngoài vận động viên và công nhân vận chuyển vật nặng, chỉ có thể chịu được 9/10 trọng lượng cơ thể. Ngay cả ngựa cũng chỉ chịu được 7/10 trọng lượng so với cơ thể.

## Tháp Phật và "ngày cuối cùng của thế giới" có quan hệ không?

Truyền thuyết trong miếu thần nước Thiên Trúc (Ấn độ ngày nay), có để một tấm phản đồng màu vàng, trên tấm phản cắm ba chiếc kim đá quý. Thiên vương Đại Phạm khi tạo nên thế giới đã đặt 64 phiến vàng trên một trong những chiếc kim, những phiến vàng này từ nhỏ đến lớn, miếng lớn nhất đặt ở dưới đáy. Giữa phiến vàng có lỗ, có thể thuận tiện lấy ra hay cho vào, đó chính là "tháp Phật".

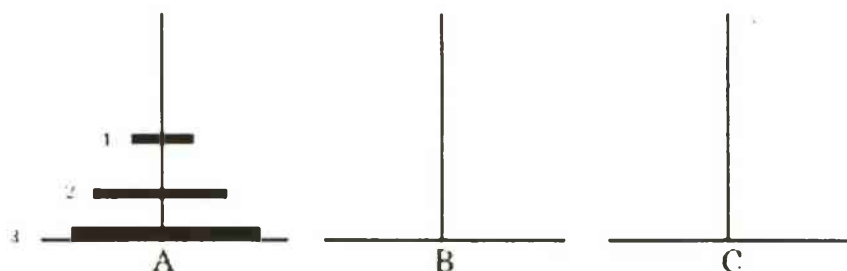
Bất luận ban ngày hay tối, đều có một tầng lữ trực để di chuyển những phiến vàng này trên ba chiếc kim theo một kiểu quy tắc nào đó. Quy định mỗi lần chỉ di chuyển một phiến, chỉ có thể đặt phiến nhỏ trên phiến to, không được đảo lại. Khi di chuyển hết 64 phiến vàng từ một



chiếc kim này sang chiếc kim khác, thành một tháp Phất khác, thế giới sẽ bị huỷ diệt trong một tiếng sét.

Đó là câu chuyện lưu truyền của "ngày cuối của thế giới" truyền trong Ấn Độ giáo.

"Ngày cuối của thế giới" là khi nào? Các nhà toán học tính toán được rằng, tất cả phải dịch chuyển 1844674407370951615 lần, nếu chuyển dịch một lần cần một giây, thì sẽ cần dùng hết 5845 trăm triệu năm, mà theo suy tính của nhà thiên văn học, tuổi thọ của hệ mặt trời không vượt quá 150 trăm triệu năm. Xem ra, chúng ta không phải âu sầu lo lắng cho ngày cuối cùng của thế giới nữa.



Bên dưới, chúng tôi làm một chiếc tháp phất nhỏ với 3 cái khay, hãy xem xem ta phải dịch chuyển thế nào?

Ba chiếc kim trong hình vẽ thể hiện lần lượt là A, B, C, kim A có ba cái khay, dùng mã số 1, 2, 3; khay to ở bên dưới, nhỏ ở bên trên, yêu cầu chuyển dịch ba chiếc khay trên chiếc kim A đến trên chiếc kim C. Trong quá trình di chuyển dùng kim B làm trung gian, mỗi khi chuyển dịch cần 7 bước:

A->C: chuyển khay số 1 trên A sang C

A-> B: chuyển khay số 2 trên A sang B

C->B: chuyển khay số 1 trên C sang B, kim C không

A->C: chuyển khay số 3 trên A sang C, kim A không

B->A: chuyển khay số 1 trên B sang A

B->C: chuyển khay số 2 trên B sang C, kim B không

A->C: chuyển khay số 1 trên A sang C, kim A không

## Thực nghiệm ném kim

### thế nào để tìm ra được giá trị của $\pi$ ?

Tính toán giá trị gần đúng của pi có một phương pháp lý thú mà bạn không có thể chưa từng nghĩ tới. Thực nghiệm như thế này, chuẩn bị một số chiếc kim khâu (dài khoảng 2cm) tốt nhất bỏ đi phần mũi kim, làm cho toàn bộ độ dài của kim có sự to nhỏ khác nhau, lại vẽ ra thật nhiều đường thẳng trên một trang giấy trắng, khoảng cách giữa các đường phải gấp hai lần độ dài kim. Sau đó, dần dần thả kim xuống mặt giấy từ một độ cao bất kỳ, nhìn xem kim có giao với đường thẳng nào không. Để khiến cho kim thả xuống mặt giấy không bị đàn hồi nảy lên, tốt nhất đệm dưới đáy giấy một tờ giấy dày hoặc một vật tương tự như nhung. Ném kim phải tiến hành nhiều lần trùng lặp, như 100 lần, thậm chí đến 1000 lần càng tốt; mỗi lần đều phải ghi chép lại xem kim và đường thẳng có giao nhau không. Sau khi hoàn thành ném kim, nếu lấy tổng số lần ném trừ đi số lần giao nhau, thì sẽ được giá trị gần đúng của pi.

Vì sao vậy? Giả thiết số lần có khả năng giao nhau nhất của kim và đường thẳng là  $k$ , mà độ dài của  $k$  là 20mm. Điểm giao nhau này nhất định là một chỗ trong 20 mm, vậy thì do mọi chỗ của kim đều to nhỏ đều nhau, nên số lần mỗi một mm có khả năng giao nhau với đường thẳng nhiều nhất là  $k/20$ . Đối với một đoạn 3mm trên chiếc kim, số lần nó có thể giao nhau là  $3k/20$ .

Giá trị so sánh này, khiến cho kim ném có hình dạng uốn cong. Bây giờ, giả định chúng ta lấy kim ném uốn thành hình tròn, đường kính của nó vừa tương đương với khoảng cách giữa hai đường thẳng (tức là, đường kính của hình tròn bằng 2 lần độ dài kim). Mỗi lần ném xuống, phải giao với hai đường thẳng. Giả định tổng số ném là  $N$ , thế thì số giao nhau là  $2N$ . Vì giá trị so sánh giữa độ dài kim và độ dài vòng tròn bằng với bán kính của vòng tròn này và giá trị so sánh  $1/2$  pi của độ dài chu vi đường tròn, mà bán kính của đường tròn là chiều dài kim, chúng ta lại

biết so sánh giữa số lần giao nhau có khả năng nhất và chiều dài kim. Vì vậy, tỉ lệ của số lần giao nhau  $k$  có khả năng nhất của kim này là  $k = N/\pi$ . Cho nên

$$\pi = N/k = \text{số lần ném} / \text{số lần giao nhau}$$

Số lần ném càng nhiều, giá trị  $\pi$  nhận được càng chính xác. Một nhà thiên văn học người Thụy Sĩ vào giữa thế kỷ trước đã từng quan sát 5000 lần ném kim, kết quả đạt được  $\pi$  là 3.159.

Bạn bây giờ có thể thấy,  $\pi$  có thể dùng phương pháp thực nghiệm tìm ra, mà lý thú ở chỗ, không cần vẽ ra hình, cũng không cần vẽ ra đường kính, ngay cả compa cũng không dùng. Người dù không hiểu về hình học, thậm chí không có chút kiến thức liên quan đến đường tròn, chỉ cần anh ta nhẫn nại tiến hành thực nghiệm ném kim nhiều lần, cũng có thể tìm ra giá trị gần của  $\pi$ .

## "Nguyên tắc ngăn kéo" là gì?

Bây giờ có 6 quyển sách, cần đặt vào trong 5 ngăn kéo, đặt thế nào? Cách đặt rất nhiều, có ngăn kéo có thể đặt, có ngăn kéo cũng có thể không đặt sách; ngăn kéo đặt sách có thể đặt 1 quyển, 2 quyển.... cho đến 6 quyển tất cả đều đặt vào. Nhưng tùy ý bạn thế nào, ít nhất có thể tìm thấy một ngăn kéo bên trong đặt ít nhất 2 quyển sách.

Nếu lấy một ngăn kéo biểu thị cho một tập hợp, mỗi một quyển sách biểu thị cho một phần tử. Giả dụ có  $n+1$ , hoặc nhiều hơn  $n+1$  phần tử đặt vào  $n$  tập hợp, vậy thì không còn nghi ngờ gì nữa, trong đó nhất định ít nhất có một tập hợp đặt ít nhất hai phần tử. Đó chính là hàm nghĩa trừu tượng của toán học trong "nguyên tắc ngăn kéo".

Lại lấy ví dụ, một lớp có 54 học sinh, nếu 54 học sinh này đều sinh cùng một năm, thế thì ít nhất có 2 người sinh cùng một tuần. Vì sao lại như vậy? Vận dụng nguyên tắc ngăn kéo, chúng ta thật dễ dàng giải thích. Do trong một năm chỉ có 53 tuần, thế thì coi tuần như ngăn kéo, coi học sinh như sách, vậy thì trong 53 ngăn kéo, ít nhất có một ngăn kéo đặt ít nhất hai quyển sách, cũng chính là, ít nhất có 2 học sinh là sinh cùng một tuần.

Số lượng quyển sách nhất định nhiều hơn 1 so với ngăn kéo phải không? nhưng không nhất định thế, số lượng quyển sách có thể nhiều hơn. Ví dụ, khi 31 quyển sách đặt vào 5 ngăn kéo, bất luận là phương pháp gì, ít nhất có thể tìm thấy một ngăn kéo, bên trong ít nhất đặt 7 quyển sách. Cũng tức là, nếu lấy  $(m \times n + 1)$  hoặc nhiều hơn  $(m \times n + 1)$  phần tử đặt vào  $n$  tập hợp, bất luận là phương pháp như thế nào, trong đó nhất định ít nhất có 1 tập hợp đặt ít nhất  $m + 1$  phần tử. Bởi vì trong  $n$  ngăn kéo đặt  $m \times n$  quyển sách, thế thì bình quân mỗi ngăn kéo đặt  $m$  quyển, mà  $(m \times n + 1)$  quyển sách nhiều hơn 1 quyển so với  $m \times n$  quyển, cho nên quyển này phải đặt vào trong một ngăn kéo, thế là nhất định ít nhất có một ngăn kéo đặt ít nhất  $m + 1$  quyển sách.

## "Câu hỏi mười lăm nữ sinh héc man" là gì?

Câu hỏi này do Héc-man, nhà toán học nước Anh đề ra vào năm 1850, cho nên được gọi là " Câu hỏi mười lăm nữ sinh Héc-man".

Câu hỏi là thế này:

Một cô giáo dẫn đầu 15 em học sinh nữ, mỗi ngày đều đi bộ một lần. Mỗi lần đi bộ, cô thường chia đều toán học sinh thành năm tổ, thử hỏi: có thể lập ra một kế hoạch phân tổ, khiến cho trong vòng một tuần (7 ngày), mỗi một học sinh nữ và một bạn học sinh bất kỳ khác có một lần ở cùng tổ?

Chúng ta đặt mã số cho 15 em học sinh nữ là 1,2,3.....14,15. Một lời giải cho câu hỏi mười lăm nữ sinh Héc-man có bảng như sau:

| Thứ nhất  | Thứ hai   | Thứ ba    | Thứ năm   |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1, 2, 3   | 4, 1, 5   | 1, 6, 7   | 1, 8, 9   |
| 4, 8, 12  | 2, 8, 10  | 2, 9, 11  | 2, 12, 14 |
| 5, 10, 15 | 3, 13, 14 | 3, 12, 15 | 3, 5, 6   |
| 6, 11, 13 | 6, 9, 15  | 4, 10, 14 | 4, 11, 15 |
| 7, 9, 14  | 7, 11, 12 | 5, 8, 13  | 7, 10, 13 |
| 1, 10, 11 | 1, 12, 13 | 1, 14, 15 |           |
| 2, 13, 15 | 2, 4, 6   | 2, 5, 7   |           |
| 3, 4, 7   | 3, 9, 10  | 3, 8, 11  |           |
| 5, 9, 12  | 5, 11, 14 | 4, 9, 13  |           |
| 6, 8, 14  | 7, 8, 15  | 6, 10, 12 |           |

Sau này, mọi người tổng quát hoá câu hỏi này: Sắp đặt tập hợp  $Z$  của  $V$  phần tử, cứ 3 phần tử một tập hợp, phân thành  $b$  tập hợp, nếu yêu cầu mỗi một cặp phần tử  $Z$  đều phải ở trong cùng một tập hợp 3 phần tử (như ba số 6, 8, 14 trong hình đặt cùng nhau, gọi là tập 3 phần tử), có thể làm được không? Đây chính là câu hỏi nữ sinh Héc-man như bây giờ vẫn gọi, với  $V=15$ ,  $b=7 \times 5=35$ .

Câu hỏi 15 nữ sinh Héc-man là một bài tập trong toán học tập hợp cận đại. Bản thân nó không khó lắm, nhưng mở rộng ra cho điều kiện bình thường thì vô cùng khó mà hơn một trăm năm nay trước sau vẫn chưa tìm ra được kết quả thoả mãn.

## Sự kỳ diệu của tỉ thức vàng là ở đâu?

Một nhà mỹ học nước Anh thế kỷ 17 từng nói: "Phàm là đẹp thì đều hài hoà và có tỉ lệ thích hợp", vậy trong mắt của mọi người, sự vật như thế nào mới là đẹp?

Mọi người trong quá trình tìm kiếm cái đẹp, có những phát hiện sau: chiều dài từ rốn đến bàn chân so với chiều cao cả thân người là 0,618. Trong tác phẩm của họa sĩ nổi tiếng Đơ-vanh-xi, có rất nhiều quan hệ tỉ lệ là 0,618.

Căn cứ điều tra của chuyên gia, diễn viên múa Balê tuy thân hình nhỏ cao, nhưng tỉ lệ bình quân giữa chân eo và chiều cao thân khoảng 0,58; chỉ có khi múa uyển chuyển nhịp nhàng, nhón mũi chân lên, mới thể hiện được vẻ hấp dẫn của 0,618.

Vì sao mọi người lại thích số 0,618 đến vậy? nó là một số thế nào? E rằng điều này xuất phát từ lời nói nổi tiếng của nhà toán học Hi Lạp cổ Pi-ta-go: "những thứ là đẹp đều có đặc trưng giống nhau, đó là tính hài hoà thống nhất giữa bộ phận và bộ phận và giữa bộ phận với chính thể." Mà 0,618 chính là tỉ lệ của một thứ hài hoà như vậy.



$$AB/AC = AC/CB$$

Như hình vẽ biểu thị, giả thiết C là điểm nằm giữa hai điểm A, B của đoạn thẳng AB, để thực hiện "hài hoà thống nhất" thì theo công thức trên biến ta có  $1/x = x/(1-x)$  biến đổi ta được  $x^2 + x - 1 = 0$ , giải ra được

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$$

Thì ra con số 0,618 thần bí này là nghiệm của phương trình  $x^2 + x - 1 = 0$ . Thông thường chúng ta chỉ lấy giá trị gần đúng của nó, lại gọi là "tỷ lệ vàng". Trong ví dụ này, điểm C gọi là "điểm chia tỷ lệ vàng" của đoạn thẳng AB.

Từ phát hiện về tỷ lệ vàng này, nó đã dần biến thành một quy luật được mỹ học công nhận. Các nhà kiến trúc thường coi nó như tỉ lệ của chiều dài và chiều rộng của cửa sổ; người dẫn chương trình thường không đứng ở giữa sân khấu mà đứng ở điểm chia tỷ thức vàng của sân khấu khi dẫn chương trình, để khán giả có ấn tượng tốt đẹp.

"Vàng" cách gọi đẹp này là do nhà khoa học kiêm họa sĩ nổi tiếng Ý Do-vanh-xi đưa ra lần đầu, và cứ thế kéo đến ngày này. "Vàng" có tác dụng hết sức to lớn trong toán học, mỹ học, nghệ thuật, trong cuộc sống cũng luôn thấy hình bóng của nó.

## Bạn có biết quá trình chứng minh "định lí Féc-ma" không?

Định lí Féc-ma là định lí nổi tiếng trong giới toán học, vậy nội dung của nó là gì?

Nhà toán học nước Pháp thế kỷ 17 Féc-ma cho rằng: khi n lớn hơn hoặc bằng 3, phương trình  $x^n + y^n = z^n$  không có nghiệm nguyên khác 0.

"Khác 0" ở đây tức là bất kỳ nghiệm nào trong các nghiệm x, y, z đều không thể là 0. Nếu không, giả sử  $x = 0$ ,  $y = z$ , như vậy là lập được phương trình. Định lí Pitago mà chúng ta đã học,  $x^2 + y^2 = z^2$ , khi x, y, z lần lượt là 3, 4, 5, như vậy là lập được phương trình, lúc này phương trình có nghiệm khác không. Vậy thì, khi  $n > 2$ , phương trình sẽ không thể có nghiệm nguyên khác 0 phải không?



Quá trình Féc-ma đưa ra định lí này là vô cùng thú vị. Ông có thói quen khi đọc thường viết tóm tắt những điều tâm đắc và điều cần chú ý vào phần trắng bên lề của cuốn sách. Sau khi Féc-ma qua đời 5 năm, con trai ông khi sắp xếp lại bút ký và thư từ của cha đã phát hiện ra chú thích của Féc-ma trên phần lề của quyển 2 "toán thuật"; trên đó viết định lí của Féc-ma: tôi đã tìm ra được cách chứng minh hết sức kỳ diệu định lí này, đáng tiếc lề nhỏ quá không thể viết ra được.

Định lí của Féc-ma để lại cho hậu thế một vấn đề về toán học, hơn 300 năm nay, đề toán tưởng đơn giản rõ ràng này đã thu hút rất nhiều nhà toán học ưu tú nghiên cứu, nhưng vẫn chưa chứng minh được, viện khoa học nước Pháp đã từng hai lần treo giải thưởng vào năm 1816 và năm 1850 cho ai tìm ra cách giải; nước Đức cũng treo giải thưởng 100 ngàn Mác tìm lời giải năm 1908. Người ứng giải tấp nập không ngớt, nhưng giải pháp đưa ra đều sai. Một số nhà toán học kiệt xuất cũng suy ngẫm khổ sở vấn đề này.

Một thời kỳ dài trở lại đây, mọi người đã không thể chứng minh nó, cũng không thể phủ định nó, chỉ có thể chứng minh với một số số  $n$  cụ thể. Năm 1770, O-le đã chứng minh khi  $n$  bằng 3, 4, định lí Féc-ma là đúng, năm 1825 Dirichlet chứng minh khi  $n = 5$  kết luận chính xác; năm 1839 Lame chứng minh khi  $n=7$  kết luận chính xác; ....đến năm 1976, có người dùng máy tính điện tử chứng minh khi  $n < 125000$ , định lí Féc-ma là đúng. Nhưng, do  $n$  không thể lấy tất cả những số tự nhiên, kiểu chứng minh này của mọi người là vô cùng vô tận, định lí Féc-ma có lẽ mãi mãi không thể trở thành định lí chân chính được.

Đến năm 1994 nhà toán học Anh Wairs cuối cùng qua phương pháp gián tiếp đã chứng minh trọn vẹn định lí Féc-ma, khiến nó trở thành định lí chân chính trước thế kỷ 21.

Câu chuyện định lí Féc-ma đã tạo nên những trào lưu nghiên cứu toán học, trong quá trình chứng minh nó, đã nảy sinh rất nhiều tư tưởng toán học và thành quả toán học mới, góp phần thúc đẩy sự phát triển của toán học.

## Từ màu sắc của bản đồ đã gây ra vấn đề gì?

Khi vẽ màu sắc cho bản đồ, chúng ta thường tô những màu không giống nhau lên những khu vực khác nhau của các vùng gần kề, khiến cho giữa những khu vực này có sự khác biệt. Vậy thì, vẽ một bản đồ, cần dùng bao nhiêu loại màu sắc khác nhau? Nếu vẽ một bản đồ cần 4 loại màu sắc, chúng ta gọi là "bản đồ bốn màu"; nếu cần 5 loại màu thì gọi là "bản đồ 5 màu"; cứ thế suy ra.

Năm 1852, Phnrenxi Gesli vừa tốt nghiệp đại học Luân Đôn về màu cho bản đồ nước Anh, ông phát hiện ra một hiện tượng vô cùng lí thú: Bất luận bản đồ phức tạp thế nào, các nước khác vùng chỉ cần 4 loại màu tô là đủ rồi. Cũng tức là, chỉ cần 4 loại màu sắc là có thể giúp mắt ta phân biệt được bất kỳ các nước nào lân cận nhau.

Thế là, ông thông báo tin này cho anh em của ông là Phedrech Gesli. Trình độ toán học của Phedrech sâu sắc, nhưng đối với câu hỏi này lại không giải được, đành đi hỏi thầy giáo của mình - giáo sư nổi tiếng Mogan. Sau một hồi chau mày suy nghĩ cũng đành bó tay, thế là ông nói lại câu hỏi này cho nhà toán học nổi tiếng Haminton, Haminton tài hoa đã khổ sở suy nghĩ vấn đề này 3 năm, cho đến khi qua đời không có bất cứ kết quả nào.

Năm 1878, trong đại hội hàng năm toán học Luân Đôn, nhà toán học người Anh Carry đã quy vấn đề này về "phỏng đoán bốn màu": mỗi một bản đồ vẽ trên giấy chỉ cần dùng bốn màu không giống nhau là có thể khiến cho các quốc gia lân cận có thể phân biệt. Thời đó, nó cùng với định lí Féc-ma, phỏng đoán Gotebathe được gọi là ba vấn đề khó nhất của toán học cận đại.

Năm 1879, một nhà toán học nổi tiếng là Hen Pu đã phát biểu một chứng minh "phỏng đoán bốn màu". Sau 11 năm, một nhà toán học đã chỉ ra sai sót trong chứng minh của ông, sau đó ông này lại sử dụng phương pháp này, chứng minh được thành công dùng 5 màu sắc có thể phân biệt được các quốc gia lân cận trên bản đồ. Đó chính là "định lí năm màu".

Nhưng giảm từ 5 màu xuống còn 4 màu, điều này lại làm đau đầu nhiều nhà toán học. Năm 1920, Franklin đã chứng minh khi số nước nhỏ hơn 26 thì định lý 4 màu có thể thực hiện được. Sau đó, khi số nước tăng thêm 20, người ta lại phải mất đúng 47 năm mới chứng minh được. Bởi vì mỗi khi số nước tăng lên 1, 2 nước, thì quan hệ biên giới của các nước khác nhau sẽ trở nên phức tạp hơn rất nhiều, mà khi chứng minh vẫn phải xem xét đến những khả năng có thể xảy ra mà không được để bất cứ sai sót gì.

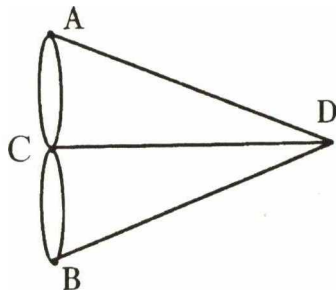
Năm 1976, nhà toán học nước Anh Hagen dùng phương pháp vô cùng phức tạp, bằng trợ giúp của máy tính đã chứng minh "phỏng đoán bốn màu". Chứng minh của họ phải viết thành mấy trăm trang, dùng ba chiếc máy tính siêu lớn, tiêu tốn hơn 1200 tiếng đồng hồ. Từ đó, "phỏng đoán 4 màu" kéo dài 124 năm này trở thành "định lý 4 màu"

Toàn bộ giới toán học náo động. Để kỷ niệm thời khắc mang tính lịch sử này, Bưu điện Trường đại học Illinois, nơi hai nhà toán học làm việc đã đóng dấu lên mỗi một bưu kiện bằng con dấu như thế này: "4 loại màu là đủ rồi".

## Bạn có biết "câu hỏi 7 chiếc cầu" nổi tiếng trong lịch sử không?

Đầu thế kỷ 18, một thành phố cổ ở Brucxen có một dòng sông bao bọc, hai dòng chảy của nó hội tụ lại ở trung tâm thành phố thành một đoạn sông lớn, giữa sông có hai đảo, thế là thành phố chia thành 4 phần; như hình vẽ.

Các phần đất được liên kết với nhau thông qua 7 chiếc cầu, do phong cảnh trên đảo rất đẹp, môi trường yên tĩnh, nên mọi người thích đến đây tản bộ. Thời gian qua đi, có người đưa ra một câu đố thú vị: làm thế nào để đi hết 7 chiếc cầu và trở về điểm xuất phát mà



không bị trùng lặp? Câu hỏi này đã dấy lên một cuộc thảo luận sôi nổi trong dân cư toàn thành phố, đó chính là "câu hỏi 7 chiếc cầu" nổi tiếng trong lịch sử.

Tuy câu hỏi thoát đầu tưởng dễ, nhưng không người nào giải được. Thế là mọi người mời nhà toán học Thụy Sĩ nổi tiếng đương thời Ô-le tìm cách giải.

Ô-le dùng dấu chấm biểu thị lục địa, dùng đoạn thẳng nối hai điểm biểu thị cầu, thế là câu hỏi 7 chiếc cầu của cuộc sống hiện thực qua trừu tượng toán học của Ô-le đã biến thành hình vẽ này.

Do hứng thú của mọi người tập trung ở chỗ qua cầu, cho nên có thể lấy A,B,C,D tượng tượng thành điểm, mà lấy cầu tượng tượng thành đoạn thẳng. Như vậy câu hỏi 7 chiếc cầu sẽ chuyển thành dạng câu hỏi: liệu có thể xuất phát từ một điểm nào đó trong hình vẽ, đi hết các cạnh vừa đúng một lượt, rồi lại trở về điểm xuất phát ban đầu? Kỳ thực, đây chính là vấn đề "một nét vẽ" mà chúng ta thường nói.

Qua quá trình nghiên cứu nghiêm túc, Ô-le chỉ ra, vấn đề này không thể thực hiện được, không thể một nét vẽ thành bảy đường qua bốn điểm.

Trong quá trình giải câu hỏi 7 chiếc cầu, trước tiên, Ô-le dẫn dụ khái niệm của hình đồ. Hình đồ là gì? Nó là hình vẽ được tạo nên bởi các đoạn giữa một số điểm và đoạn liên kết (hoặc gọi là cạnh). Trong cuộc sống hiện thực có rất nhiều sự việc đều có thể dùng hình đồ để miêu tả, ví dụ dùng điểm biểu thị quốc gia, quan hệ ngoại giao giữa hai quốc gia thì dùng đoạn liên kết điểm biểu thị, đây chính là hình vẽ ngoại giao; còn có liên hệ giao thông, liên hệ thông tin giữa các thành phố ... đều có thể dùng hình vẽ sinh động, trực quan để biểu thị ra.

Lĩnh vực toán học mới này do Ô-le khởi xướng gọi là luận đồ, chuyên về nghiên cứu lí luận và ứng dụng của hình học. Nó không giống với hình tam giác, hình vuông mà chúng ta học trong hình học, chúng ta không thảo luận câu hỏi hình học góc kẹp của cạnh và diện tích... trong luận đồ. Để kỷ niệm Ô-le, mọi người gọi hình vẽ một nét từ điểm đầu đến điểm cuối là hình vẽ Ô-le.

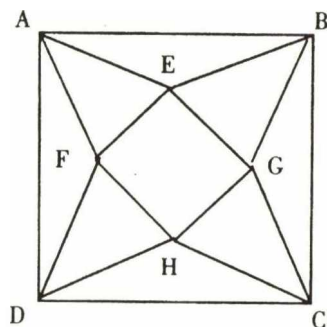
## Hình như thế nào có thể vẽ một nét bút?

Bạn đã chơi trò chơi đi mê cung chưa? Có một mê cung như thế này, chỉ có một lối ra, phía trong bị bịt kín hoàn toàn, hỏi bạn có thể từ lối đi đó đi qua tất cả các đường thông mà không bị trùng lặp, và lại đi ra từ lối đi đó? Điều này thực tế là một trò chơi toán học rất cổ xưa - "câu hỏi vẽ một nét". Lấy tất cả các lối đi trong mê cung làm điểm kết trong hình vẽ, lối đi giữa các cửa gọi là cạnh, câu hỏi đi mê cung trên thực tế là tìm cách có thể dùng một nét bút vẽ ra tất cả các cạnh mà không trùng lặp trong hình vẽ được tạo thành bởi các điểm và các đoạn như vậy.

Chúng ta xem hình vẽ này, nó có 8 điểm, 16 cạnh.

Hình vẽ này có thể dùng một nét bút để vẽ ra không? Chúng ta thử vẽ xem, xuất phát từ điểm A, bạn xem ABCDHCGBEAFEGHFDA, theo thứ tự này có thể vẽ ra tất cả các cạnh, hơn nữa đáp án không chỉ có một cách, lại xem ADFABGCHGEFHDCBA, có phải là cũng có thể dùng một nét bút để vẽ! Xem ra hình vẽ này là hình một nét, thế thì nó có đặc điểm gì?

Đầu tiên, giữa 2 điểm bất kỳ trong hình vẽ này đều có một đoạn hoặc nhiều đoạn liên kết chúng lại với nhau, cũng tức là những điểm này đều nối thông với nhau. Đây là cơ sở để một hình vẽ dùng một nét vẽ thành. Nếu hình vẽ chia thành hai bộ phận không liên hoàn, thế thì dù vẽ kiểu gì cũng không thể vẽ một nét ra hai phần không nối liền đó.



Thứ hai, bạn sẽ phát hiện ra số cạnh xuất phát từ 8 điểm trong hình vẽ toàn là số chẵn, ví dụ đoạn có điểm đầu A có 4 đoạn, 4 đoạn có điểm đầu là E. Chúng ta gọi những điểm như vậy là điểm chẵn, ngược lại, nếu số đoạn của một điểm xuất phát là số lẻ, thì sẽ gọi điểm đó là điểm lẻ. Bạn xem, những điểm trong hình vẽ có thể vẽ một nét đều là điểm lẻ.

Hai nhân tố trên chính là điều kiện để một hình vẽ có thể vẽ bằng một nét hay không. Mà trên thực tế, khi một hình vẽ chỉ có hai điểm lẻ mà các điểm còn lại đều là điểm chẵn, cũng có thể vẽ bằng một nét, thông thường xuất phát từ một điểm lẻ trong đó đến một điểm lẻ khác thì kết thúc.

Một hình vẽ có thể có mấy cách vẽ một nét, điều này có thể lí giải được, bởi vì một nét vẽ giống như một vòng, lấy tất cả các cạnh trong hình vẽ xuyên lại thành vòng, thế thì điểm chúng ta bắt đầu vẽ khác nhau, hoặc thứ tự đi trước, đi sau khác nhau, đều cho ta đáp án không giống nhau. Nhưng điều này không quan trọng, chúng ta chỉ cần tìm cách dùng một nét vẽ ra hình, chứ không quan trọng nét bút nào vẽ trước.

Vì sao hình vẽ có hai điểm lẻ còn lại là điểm chẵn lại có thể vẽ bằng một nét? Bạn thử nghĩ xem, nếu nối hai điểm lẻ thành một đoạn đứt đoạn, thế thì hai điểm lẻ chẳng phải là đã thành điểm chẵn đấy sao? Hình vẽ này sẽ có thể vẽ bằng một nét. Cho nên chúng ta xuất phát từ một điểm lẻ, có thể vẽ bằng một nét tất cả các cạnh mà kết thúc tại một điểm lẻ khác. Bỏ đi một cạnh bất kỳ trong hình vẽ trên, bạn có ngại thử không?

## **Làm thế nào để tìm ra mạng lưới đường sắt nối 5 thành phố có giá xây dựng thấp nhất?**

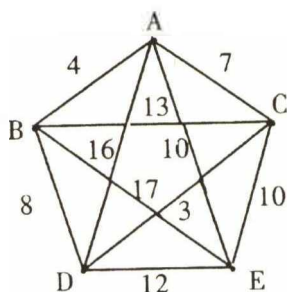
Chúng ta giả thiết cần xây dựng một mạng đường sắt nối liền một số thành phố, hơn nữa chúng ta cũng biết phí xây dựng đoạn đường sắt nối giữa hai thành phố bất kỳ, mời bạn tính ra một mạng đường sắt, với điều kiện tổng chi phí xây dựng đạt nhỏ nhất.

Làm thế nào? Trước tiên vẽ một hình biểu thị câu hỏi này. Chúng ta coi thành phố là một điểm trong hình vẽ, viết chi phí xây dựng đường sắt giữa hai thành phố trên cạnh giữa hai điểm liên kết.

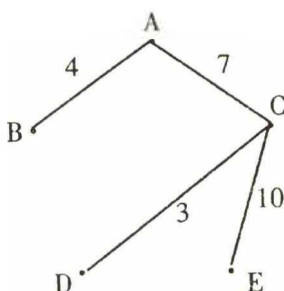
Hình 1 biểu thị có 5 thành phố A, B, C, D, E, chi phí xây dựng của đường sắt giữa hai thành phố bất kỳ đều ở trên cạnh tương ứng, ví dụ, chi phí sửa đường sắt giữa hai thành phố AB là 4 triệu đồng, giữa BE là 17 triệu đồng...

Các bước tìm ra mạng đường sắt nối liền các thành phố đồng thời có giá xây dựng thấp nhất trong hình vẽ này là như sau:





Hình 1



Hình 2

1. Chọn một cạnh có chi phí nhỏ nhất trong hình vẽ. Bởi vì phí của DC là 3 trăm đồng, nhỏ nhất trong tất cả các chi phí, cho nên chọn cạnh DC, xem hình 2.

2. Trong hình 1 bỏ đi cạnh còn lại của cạnh đã chọn, chọn một cạnh đáp ứng hai điều kiện dưới đây, cho vào trong hình 2:

- (1) Là cạnh sau khi thêm vào hình 2 không sinh ra đường quay lại;
- (2) Cạnh này là cạnh có chi phí nhỏ nhất trong những cạnh còn lại.

Do hình 2 lúc này chỉ có một cạnh, thêm vào bất kỳ cạnh nào cũng không sinh ra đường quay lại, chúng ta chọn cạnh có chi phí nhỏ nhất trong những cạnh còn lại, tức là chọn AB thêm vào hình 2. Cạnh thêm vào tiếp theo là AC, chi phí của nó là 7, lại cũng không khiến cho hình 2 nảy sinh đường quay lui. Do cạnh BD không đáp ứng được 2 yêu cầu trên nên ta loại, xét cạnh CE, chi phí của nó nhỏ nhất, lại không làm nảy sinh đường quay lui, thêm CE vào trong hình 2. Kỳ thực chi phí của cạnh AE cũng là 10, cho nên cũng có thể thêm cạnh AE, vậy trong AE và EC chỉ có thể chọn một cạnh thêm vào, nếu đồng thời thêm vào thì không được, sẽ khiến cho hình 2 nảy sinh đường quay lui.

Nếu thêm các cạnh còn lại AE, BC, AD, BE đều sẽ khiến hình 2 nảy sinh đường quay lui, xem ra không còn cạnh nào có thể thêm vào hình 2 nữa

3. Nếu không tìm thấy cạnh thoả mãn yêu cầu, thì chúng ta tìm tất cả các cạnh, cộng chi phí trên các cạnh vào, chính là giá sửa đường thấp nhất

Thế thì tổng chi phí trong hình 2 là  $4+7+3+10=24$  triệu đồng. Mạng đường sắt này không những nối liền 5 thành phố, mà chi phí còn thấp nhất.

## Tốc độ tính toán kinh ngạc của máy tính?

Giữa thế kỷ 20, xuất phát từ mong muốn giải quyết những vấn đề tính toán phức tạp, người ta phát minh ra máy tính điện tử. Máy tính ENIAC lúc đó ứng dụng kĩ thuật ống điện tử và cầu dao điện, tốc độ phép tính cộng mỗi giây 5000 lần. Từ khi chiếc máy tính đầu tiên chào đời đến nay, trong vòng 40 năm, tốc độ phát triển của máy tính trong lịch sử khoa học không thể tưởng tượng được. Máy tính ngày nay tốc độ tính toán có thể đạt hơn 100 tỷ phép tính/giây, thậm chí có thể cao đến mấy nghìn tỷ lần.

Để làm rõ tốc độ tính toán của máy tính nhanh cỡ nào, chúng ta hãy xem ví dụ sau.

Mọi người đều biết tỉ lệ của chiều dài chu vi đường tròn và đường kính là số pi, cũng là "p". Nó là số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Rất nhiều người hi vọng tính ra số pi ngày càng chính xác hơn nữa.

Hơn 1500 năm trước, nhà toán học thời Nam bắc triều Trung Quốc đã bỏ ra nhiều năm mới tính ra giá trị của pi là ở giữa của 3,1415926 và 3,1415927, tính đến đơn vị thứ 7 sau dấu phẩy.

Năm 1615, nhà toán học Rudolf nước Đức cả cuộc đời mới tính ra được số pi với 35 đơn vị sau dấu phẩy. Để kỷ niệm ông, người ta lấy số pi với 35 đơn vị khắc trên bia mộ của ông.

Năm 1873, một nhà toán học nước Anh tính được số pi đến đơn vị 707 sau dấu phẩy sau 15 năm tính toán. Đáng tiếc, người sau nghiệm chứng 100 đơn vị cuối ông tính toán là sai

Sau khi phát minh ra máy tính, tốc độ tính toán trị số pi nhanh hơn nhiều.

Năm 1957, chỉ dùng 8 tiếng 43 phút ngồi trước máy tính điện tử, người ta đã tính ra giá trị số pi đến 100265 đơn vị sau dấu phẩy, phá kỷ lục 100 ngàn đơn vị.

Năm 1973, một nhà toán học nước Pháp đã dùng 23 tiếng 18 phút trên máy tính, tính ra được số nhỏ pi đến 1 triệu đơn vị sau dấu phẩy, nước Pháp đã ra một quyển sách nổi tiếng 400 trang về nhà toán học này.

Năm 1984, một giáo sư ở Đại học thủ đô của Nhật đã áp dụng máy tính siêu tốc, tính số pi ra số nhỏ đến 10.013.395 đơn vị, phá kỷ lục 10 triệu đơn vị. Đến năm 1989 ông lại tính ra số pi đến số nhỏ 1.073.740.000 đơn vị, máy tính đó vận hành đúng 74 tiếng 30 phút.

Từ đó có thể thấy, tốc độ tính toán của máy tính quả là thần kỳ.

Hiện nay, công ty IBM của Mỹ đã nghiên cứu chế tạo ra máy tính có tốc độ tính toán là 3 nghìn tỷ phép tính/giây; tiêu tốn tới gần 100 triệu đô la. Trong vòng chỉ 8 giây, nó có thể hoàn thành khối lượng tính toán tương đương với 25 vạn năm của một nhà toán học dùng bút tính toán và 2 ngày tính toán của máy tính cá nhân thông thường.

Tốc độ tính toán của máy tính bình quân 10 năm tăng lên một trăm lần. Dự tính trong tương lai không xa, sẽ xuất hiện máy tính siêu cao tốc với tốc độ đạt đến mấy chục ngàn tỷ phép tính/giây.

## Đường cao tốc thông tin là gì?

Mọi người đều biết đường cao tốc là một loại đường trải nhựa rất phẳng, xe đi lại với tốc độ cao, đưa khách, hàng hoá và các loại vật liệu đi khắp nơi với thời gian nhanh nhất. Vậy, đường cao tốc thông tin là gì?

Khái niệm "Đường cao tốc thông tin" thực ra là mượn từ "đường cao tốc" mà chúng ta đều biết để biểu đạt một cách hình tượng một sản phẩm khoa học kĩ thuật cao mới. Trên "đường cao tốc thông tin", các loại thông tin nhìn không thấy, sờ không được sẽ chuyển qua chuyển lại như con thoi qua xử lí của máy tính; mà nguyên liệu cấu thành nên đường cao tốc thông tin không phải là gạch đá, nhựa đường, mà là những tia sáng mảnh như sợi tóc, trong suốt; Đây là đường truyền trung gian nhanh nhất được nhân loại phát hiện từ trước tới nay. Vậy còn "bến xe" của đường cao tốc thông tin thì sao? Chính là đầu ra của hàng ngàn máy tính lớn nhỏ.

Về mặt kĩ thuật mà nói, đường cao tốc thông tin chính là sự kết hợp của công nghệ cáp quang, công nghệ máy tính đa chức năng và nhiều dạng công nghệ thông tin khác. Có thể coi công nghệ máy tính và công nghệ thông tin là "nền đường", cáp quang là mặt đường của đường cao

tốc. Nói một cách đơn giản thì, nó là sự dung hoà của điện thoại, ti vi và máy tính, tạo nên một mạng lưới thông tin điện tử trên toàn quốc cho đến toàn thế giới mà trước kia chưa có, liên kết mọi người với nhau, từ đó thực hiện "làng hoá" toàn cầu.

Đường cao tốc thông tin khi được "thông xe" đã tác động rất lớn đối với nhân loại trên tất cả các lĩnh vực, tạo ra những thay đổi to lớn trong học tập và cuộc sống của con người.

Khi đó, những người yêu thích xem ti vi sẽ phát hiện cơ hội tăng thêm kênh truyền hình, 50 kênh hiện tại có thể tăng lên thành 500 kênh; học sinh có thể không cần đi đến trường cũng có thể nghe thầy giáo giảng bài được, thông qua ti vi thảo luận câu hỏi cùng thầy giáo; không ra khỏi nhà cũng vẫn biết được việc trong thiên hạ, trên mạng có thể đọc các loại sách báo cần thiết, mà không cần đi thư viện, phòng tư liệu; người thích sưu tập tem có thể vào các hiệp hội sưu tập tem toàn cầu. Trên đường cao tốc thông tin, người ta thông qua nhiều đầu cuối môi giới lẫn nhau để thương lượng trao đổi.

Mọi người có thể làm việc ở nhà, kịp thời duy trì liên hệ với cấp trên và đồng sự, giống như ngồi ở văn phòng; chuyên gia các nơi trên thế giới có thể thông qua mạng tiến hành hội chẩn đối với bệnh nhân, chỉ đạo đối với phẫu thuật. Do người đi làm có thể không cần ra khỏi nhà, không cần đi lại giữa nhà và văn phòng, có thể giảm được rất lớn lưu lượng giao thông và ô nhiễm, khiến thế giới trở lên càng sạch sẽ hơn.

Hiện nay, chính phủ các nước đang đẩy mạnh kế hoạch xây dựng đường cao tốc thông tin. Mục tiêu của nước Mỹ là đầu thế kỷ 21 khiến cho đại bộ phận trong toàn quốc liên kết mạng, đồng thời giúp cho tất cả trường học, bệnh viện, thư viện đều có thể nối thông với đường cao tốc thông tin. Đến năm 2015 làm cho tất cả các công dân, tất cả các khu vực đều có được cơ hội giao lưu tin tức trên đường cao tốc thông tin.

Nhật Bản và một số nước Châu Âu cũng không chịu lạc hậu, đầu tư vốn lớn tiến hành xây dựng mạng lưới thông tin cấp quang.

Việc xây dựng đường cao tốc thông tin, sẽ mở ra kỷ nguyên mới cho lịch sử loài người. Tin rằng đến năm 2050, nhân loại sẽ thực sự bước vào xã hội tin tức.

## Công cụ tính toán ngày xưa của con người có những loại nào?

Các bạn có biết nhân loại thời nguyên thủy tính toán như thế nào không?

Khi đó, sức sản xuất cực thấp, ngôn ngữ và chữ viết còn chưa hình thành, mọi người dùng phương pháp kết thừng để ghi lại con số, dùng que gỗ nhỏ để làm những phép tính toán cộng trừ đơn giản. Đến chế độ xã hội nô lệ, sức sản xuất được nâng cao, người ta cũng phát minh ra những công cụ tính toán mới.

Thời Xuân Thu, người ta dùng "thẻ" để tính toán, còn gọi "tính thẻ". Thẻ được làm từ tre hoặc gỗ, bên trên đánh dấu những con số khác nhau, lấy những thẻ khác nhau ghép lại, có thể tiến hành phép tính toán cộng trừ nhân chia khác nhau. Ngoài ra, còn có thẻ tính bình phương, lập phương, v.v...

Đến đầu thời Minh triều, khi Chu Nguyên Chương thống trị Trung Quốc, tính thẻ được thay thế bằng bàn tính. Bạn có thể rất quen với kiểu bàn tính. Bàn tính thời cổ và bàn tính bây giờ khác biệt không nhiều, bên ngoài là khung gỗ hình chữ nhật, từ trên xuống dưới xiên những que gỗ nhỏ, cũng chính là "giống", thông thường chia thành 9 giống, 11 giống và 15 giống. Phía trên bàn tính còn có một xà ngang, trên mỗi một giống que của phía trên xà có hai hạt tròn, trên mỗi giống của phía dưới xà có 5 hạt. Khi tính toán gạt hạt tròn tính toán. Bởi vì bàn tính đơn giản dễ học, sử dụng tiện lợi nên cho đến nay vẫn còn được sử dụng ở một số nơi.

Đến thời kỳ cận đại, con người phải thực hiện những phép tính phức tạp trên con đường chinh phục giới tự nhiên, thế là xuất hiện các loại công cụ tính toán, như thước, máy tính lắc tay, máy tính điện động. Máy tính lắc tay là gì? Nó chính là công cụ máy tính lắp đặt hoàn toàn cơ khí, kèm theo một chiếc cần lắc, khi làm việc cần dùng tay chuyển động cần lắc, làm chuyển động các bộ phận cơ khí bên trong. Khi nó làm việc, tạp âm to, làm người ta tương đối mệt mỏi. Sau đó, trên cơ sở máy tính dùng

tay lắc, thêm vào một chiếc mô tơ nhỏ, cũng chính là máy điện động nhỏ, nhưng tính toán số liệu phức tạp vẫn cần thời gian rất dài.

Theo sự phát triển nhanh chóng của khoa học kĩ thuật, quy mô tính toán và trình độ phức tạp cũng không ngừng tăng lên. Những năm 40 thế kỷ 20, các nhà khoa học thông qua mấy năm nỗ lực gian khổ, ứng dụng kĩ thuật điện tử đã sáng tạo ra một loại công cụ tính toán hoàn toàn mới-máy tính điện tử. Nó phát triển đến ngày nay, được ứng dụng rộng rãi trong cuộc sống của chúng ta. Sự phát minh và phát triển của nó là một trong những thành tựu khoa học kĩ thuật vĩ đại của thế kỷ 20.

## **Có phải máy tính chỉ chuyên dùng để tính toán?**

Phân tích từ cái tên “máy tính” có nghĩa là máy móc dùng cho tính toán. Đúng vậy, máy tính ra đời là do sự cần thiết đối với con người trong nghiên cứu khoa học và tính toán công trình. Trong nghiên cứu khoa học cơ sở như toán học, vật lí, hoá học, sinh vật học v.v..., trong thiết kế công trình khoa học như thiết kế máy bay, máy phát điện thuỷ lợi v.v..., đều cần tiến hành khối lượng tính toán rất nhiều, sự xuất hiện của máy tính, không chỉ tiết kiệm được thời gian, nhân lực, vật lực, còn cho ra đáp án đầy đủ, chính xác đối với những câu hỏi trước nay không giải quyết được. Máy tính với tốc độ nhanh, chính xác, hiệu quả cao của mình đã bước vào nhiều lĩnh vực khoa học.

Theo sự tiến bộ của khoa học kĩ thuật, nhân loại đã bước vào xã hội tin tức, các loại tin tức khối lượng lớn (như văn kiện, số liệu v.v...) không ngừng xuất hiện. Có lúc chúng ta cần lưu trữ những tin tức này, có lúc lại cần phân tích tin tức, còn có thể phải phân loại, truyền đi v.v..., khi đó, máy tính lại đảm nhận những nhiệm vụ này. Ngày nay, trong gia đình hiện đại, máy tính có thể giúp bạn học tập, lên sổ sách, xem phim, nghe nhạc, thậm chí lên mạng chơi, mua hàng, chuyển nhận thư tín v.v..., công năng nhiều đến mức kể không hết được. Ngày nay, máy tính đã trở thành một phần không thể thiếu trong cuộc sống của chúng ta.

Thế thì máy tính còn có thể làm được những gì?

Máy tính có thể giúp con người tiến hành công việc thiết kế máy móc, xây dựng, mạch điện và thiết kế cả bản thân máy tính. Có sự giúp



đờ của máy tính, không chỉ tăng nhanh thêm chất lượng, tốc độ sản xuất, mà còn khiến cho toàn bộ quá trình của dự án công trình đều được điều khiển dưới sự hỗ trợ máy tính, hoàn toàn thay đổi bộ mặt cũ trước kia.

Máy tính còn ứng dụng rộng rãi vào lĩnh vực hàng không vũ trụ, quân sự, và tự động hoá trong quá trình sản xuất. Ví dụ, việc điều khiển máy bay, đạn đạo, vệ tinh nhân tạo và phi thuyền vũ trụ đều dựa vào máy tính để thực hiện. Cổ máy được điều khiển bởi máy tính có thể thực hiện gia công tự động linh kiện có độ chính xác cao và hình dạng phức tạp. Nói chung, máy tính ứng dụng rộng rãi trong việc điều khiển quá trình sản xuất.

Trong nghiên cứu máy tính, sức hấp dẫn nhất cũng như cái khó nhất là tình cảm của con người, tức là dùng máy tính mô phỏng hành vi, suy nghĩ của con người, ví dụ làm cho máy tính có cảm giác, suy luận, học tập và lí giải ... như con người, để cho máy tính nghe âm thanh, nhận biết chữ, biết khám bệnh, biết chơi cờ, đẻ sản xuất ra người máy thông minh. Nếu có người máy, nó có thể thay thế con người hoàn thành những công việc trong môi trường độc hại, tức là ngay cả công việc thường ngày, nó cũng có thể làm chất lượng tốt hơn con người.

Có thể thấy, tác dụng của máy tính không giới hạn ở công việc tính toán, nó có liên quan mật thiết với mọi lĩnh vực khác trong cuộc sống của chúng ta.

## Vì sao máy tính là máy tính số?

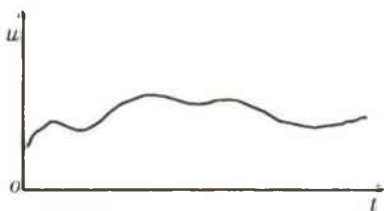
Tên gọi đầy đủ của máy tính là máy tính điện tử số. Bạn có biết số trong đó hàm ý gì không?

Công việc của máy tính không thể tách rời dòng điện được, chỉ có máy tính đã nối điện mới có thể làm việc được, nếu không thì sẽ biến thành một vật trang trí mà thôi. Như chúng ta đã biết, trong mạch điện tín hiệu điện tử được chia thành hai loại: tín hiệu tương tự và tín hiệu số.

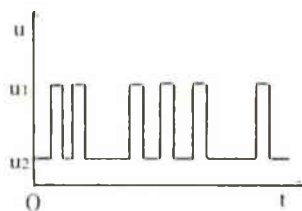
Tín hiệu tương tự là chỉ những tín hiệu liên tục thay đổi về thời gian và trị số. Chúng ta hãy xem hình vẽ của tín hiệu tương tự trong hình 1.

Có thể thấy theo sự thay đổi của thời gian  $t$ ,  $u$  cũng có các giá trị liên tục khác nhau, liên tục thay đổi.

Tuy nhiên, tín hiệu số là một loại tín hiệu gián đoạn. Sự thay đổi của nó không liên tục theo thời gian. Hình 2 biểu thị tín hiệu số.



Hình 1



Hình 2

Chúng ta thấy như hình vẽ, trị số của  $u$  chỉ có hai mức  $u_1$  và  $u_2$ , mà  $u_1$  lớn hơn  $u_2$  rất nhiều, có thể thấy trị số của  $u$  thay đổi là gián đoạn, thời gian ở mỗi mức là khác nhau. Người ta dùng 0 và 1 để biểu thị tín hiệu số, lấy 1 để biểu thị mức điện cao  $u_1$ , lấy 0 để biểu thị mức điện áp thấp  $u_2$ .

Do hai loại tín hiệu làm việc được trình bày ở trên không giống nhau, mạch điện điện tử gồm hai loại lớn: mạch điện tương tự và mạch điện số. Trong đó mạch điện tương tự để xử lý tín hiệu tương tự, mạch điện số để xử lý tín hiệu số, mà máy tính sử dụng mạch điện số, cho nên nó là máy tính điện tử số.

Trong cuộc sống hiện đại, có lẽ bạn thường nghe thấy từ "số" này. Ví dụ như ti vi số, radio số, máy chụp ảnh kỹ thuật số v.v..., số ở đây chỉ mạch điện điện tử số, cũng tức là các đầu vào, đầu ra của nó đều là dạng tín hiệu số 0 và 1, chứ không phải là các số 1, 2, 3, 4 mà trong toán học hay nói.

Ngày nay rất nhiều sản phẩm được xây dựng trên nền số, do đó mọi người nói chúng ta đang sống trong một thời đại số hoá.

## Vì sao máy tính chứng minh được định lý số học?

Hơn 50 năm trước, từ khi chiếc máy tính đầu tiên ra đời, máy tính đã trở thành một kỹ thuật tiên tiến không thể thay thế trong cuộc sống, công việc của con người. Tên gọi của máy tính cho chúng ta biết, máy tính

ngày trước chính là một công cụ tính toán, nó ra đời để đáp ứng nhu cầu tính toán phức tạp, phiền phức của nhân loại.

Ví dụ, "định lý bốn màu" nổi tiếng nói rằng, bất kỳ một bản đồ nào chỉ cần dùng bốn màu khác nhau là có thể phân biệt được các nước láng giềng. Trong vòng 124 năm, vô số nhà toán học đã đổ biết bao tâm sức mà vẫn chưa đưa ra được chứng minh hoàn chỉnh, bởi vì khi tăng lên 1, 2 nước; quan hệ biên giới giữa các nước khác nhau trở nên vô cùng phức tạp, mang đến sự khó khăn rất lớn cho con người trong việc tính toán thủ công. Cho đến năm 1976, chính máy tính đã giúp các nhà toán học giải quyết được vấn đề chứng minh định lý này, gây ra chấn động trong giới toán học, hơn nữa lúc bấy giờ sử dụng ba chiếc máy tính cỡ siêu lớn đã làm hao phí hơn 1200 tiếng đồng hồ; nếu nhà toán học lúc đó dùng sức thủ công để hoàn thành, thì sẽ không thể làm được.

Dùng máy tính chứng minh định lý toán học có tính ưu việt độc đáo của nó: một là không sợ phiền phức, sở trường của máy tính là tiến hành những tính toán phức tạp khối lượng lớn, giúp nhà toán học giải thoát khỏi những tính toán phiền phức, hai là tính toán chuẩn xác, cơ bản không có sai sót gì. Vì máy tính làm việc vừa nhanh vừa tốt, cho nên rất nhiều người đã bắt đầu nghiên cứu làm thế nào để dùng máy tính thay con người chứng minh định lý, gọi là "máy tính chứng minh", nó đã trở thành một phân nhánh mới của khoa học máy tính.

Nhiều nhà toán học đã nhiều năm dồn sức nghiên cứu máy móc hoá chứng minh định lý. Trên cơ sở hình học giải tích, họ sẽ đại số hoá định lý trong hình học phẳng, từ đó để cho máy tính thực hiện nhiệm vụ của mình.

Trên thế giới, các nhà toán học đã dùng máy tính tìm ra giá trị số Pi chính xác nhất mà mọi người biết đến cho tới ngày nay, số pi được tính chính xác đến 1073740000 đơn vị sau dấu phẩy. Không có sự giúp đỡ của máy tính, những thành tích này thật không thể đạt được.

Tin rằng cùng với sự tăng lên về dung lượng bộ nhớ và tốc độ xử lý, máy tính sẽ mang lại những đột phá mới cho việc chứng minh định lý.

## Vì sao máy tính sử dụng hệ số nhị phân?

Trong cuộc sống thường ngày, chúng ta đều sử dụng hệ số thập phân, số La Mã từ 0 đến 9. Thế nhưng máy tính trong xã hội tin tức hiện đại lại sử dụng hệ số nhị phân để thực hiện các phép tính số, bạn có biết vì sao không?

Chúng ta biết nhân loại sử dụng hệ số thập phân vì người có 10 ngón tay, hệ số thập phân có thể giúp tính toán mọi phép tính. Kỳ thực, hệ số nhị phân đối với máy tính cũng có nghĩa như vậy. Chúng ta hãy bắt đầu từ nguyên lý làm việc của máy tính trước nhé.

Tên gọi đầy đủ của máy tính là "máy tính điện tử số". Nó không thể hoạt động mà không có dòng điện. Đối với một điểm nối trên mạch điện mà nói, trạng thái khi dòng điện chạy qua chỉ có hai loại: hoặc là thông điện hoặc là ngắt điện, hơn nữa, tín tức trên máy tính thông thường lưu giữ trên đĩa từ, bất luận là đĩa từ cứng hay đĩa từ mềm, cũng chỉ có hai trạng thái: từ hoá và chưa từ hoá. Bây giờ đĩa CD đã dùng rộng rãi, trạng thái vật lý của mỗi một điểm tin tức của nó cũng có hai loại: lồi và lõm, phân biệt được tác dụng tập trung ánh sáng và phân tán ánh sáng.

Từ đó có thể thấy, trạng thái biểu hiện của các môi trường lưu giữ thông tin mà máy tính sử dụng đều là hai loại.

Hệ số nhị phân chỉ sử dụng hai ký hiệu cơ bản: 0 và 1. Có thể dùng 0 biểu thị ngắt điện, 1 biểu thị thông điện; hoặc 0 biểu thị chưa từ hoá, 1 biểu thị từ hoá; 0 biểu thị tán ánh sáng - điểm lồi, 1 biểu thị tập trung ánh sáng - điểm lõm.

Xem ra máy tính dùng hệ số nhị phân là phù hợp nhất. Nhưng hệ số nhị phân cũng có điểm không đầy đủ, nó viết ra những số rất dài, lại đọc khó hiểu, ví dụ: viết một số hai chữ số 98 của hệ số thập phân thành hệ số nhị phân là 1100010, có tới bảy chữ số. Sau đó, để bổ sung sự không đầy đủ này, người ta lại tìm ra hệ số bát phân và hệ số thập lục phân, chúng được sử dụng như nhau trong máy tính.

## Chuyển đổi như thế nào giữa hệ số thập phân và hệ số nhị phân?

Trong cuộc sống thường ngày, chúng ta sử dụng là hệ số thập phân, mà trong máy tính điện tử lại sử dụng hệ số nhị phân. Vậy thì, giữa hệ số thập phân và hệ số nhị phân sẽ được chuyển đổi như thế nào?

(1) Từ số thập phân chuyển thành hệ số nhị phân

Phương pháp chuyển từ hệ số thập phân thành hệ số nhị phân vô cùng đơn giản, chỉ cần bạn học qua phép chia là sẽ làm được. Phương pháp này gọi là "liên tục chia 2 tìm số dư". Tức là ta lấy số của hệ số thập phân liên tục chia cho 2, tìm được số dư, cho đến khi nào số thương bằng 0. Sau đó lấy số dư của mỗi lần chia viết theo thứ tự ngược lại, sẽ được số trong hệ số nhị phân.

Ví dụ, quá trình chuyển số 11 trong hệ số thập phân sang thành số hệ số nhị phân là:

$$11 : 2 = 5 \text{ dư } 1$$

$$5 : 2 = 2 \text{ dư } 1$$

$$2 : 2 = 1 \text{ dư } 0$$

$$1 : 2 = 0 \text{ dư } 1$$

Như vậy, số 11 trong hệ số thập phân được chuyển thành số 1011 trong hệ số nhị phân. Nhớ rằng, nhất định phải liệt kê số dư từ sau ra trước! để viết thuận tiện, chúng ta nhớ  $(11)_{10} = (1011)_2$ , số của góc dưới bên phải dấu ngoặc biểu thị hệ số của số trong dấu ngoặc. Như vậy có thể biểu thị rất rõ ràng số 11 hệ số thập phân bằng với 1011 của hệ số nhị phân.

Mời bạn tính toán một chút  $(302)_{10} = (?)_2$ . Đáp án là 100101110

(2) Từ hệ số nhị phân chuyển sang hệ số thập phân.

Khi chuyển số từ hệ số nhị phân thành hệ số thập phân, chúng ta nên phân tích trước "quyền" của mỗi đơn vị trong hệ số nhị phân. "Quyền" là gì! lấy ví dụ số thập phân  $2478, 2478 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1$

$+8 \times 10^0$ , quyền của các số trên các hàng trong đó không giống nhau, như 2 ở hàng nghìn, quyền là  $10^3$ , tức là 1000; 4 ở hàng trăm, quyền là  $10^2$ , tức là 100; 7 ở hàng chục, quyền là  $10^1$ ; 8 ở hàng đơn vị, quyền là  $10^0$ . "Quyền" giống như là quyền lực cho các số ở các hàng khác nhau trong một số, ví dụ cùng là 2, trong số 22, quyền của hai số 2 là khác nhau!

Trong hệ số nhị phân với các số được tạo nên từ 0 và 1, các đơn vị của nó cũng có quyền, tuy nhiên quyền của hệ số nhị phân chỉ số mũ mấy của 2. ví dụ, số  $(1010)_2$  trong hệ số nhị phân được viết thành số trong hệ số thập phân như sau:

$$\begin{aligned}(1010)_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 8 + 2 = (10)_{10}\end{aligned}$$

Ở đây  $2^3$  là quyền của số 1 thứ nhất. Thông thường, 1010 xét từ phải sang trái, quyền của các chữ số lần lượt là mũ  $n$  của 2, như quyền của số 0 thứ nhất bên phải là  $2^0=1$ , của số 1 thứ 2 bên phải là  $2^1$ , và cứ thế suy ra.

Áp dụng phương pháp chuyển hệ số nhị phân thành hệ số thập phân này mời bạn lại thử xem xét  $(10101001)_2 = (?)_{10}$ , đáp án là  $(169)_{10}$ .

Sự chuyển đổi giữa hai hệ số rất thú vị! bây giờ cho bạn một chuỗi các số 0 và 1, bạn chắc sẽ biết chúng đại diện bao nhiêu chứ?

## Bạn có hiểu thế nào là hệ số bát phân, hệ số thập lục phân không?

Chúng ta biết các số thường dùng trong cuộc sống hàng ngày thuộc hệ số thập phân, mà máy tính điện tử số chỉ sử dụng hệ số nhị phân. Thế thì còn có những loại hệ số nào thường hay dùng trong máy tính điện tử không? Đó chính là hệ số bát phân và hệ số thập lục phân.

Trong hệ bát phân, chỉ có tám số từ 0 đến 7, phương pháp ghi số của nó là "gấp 8 tiến 1", thế thì quyền của các đơn vị số cũng là hình thức số mũ của 8. Khi biểu thị số hệ bát phân, dùng hình thức như sau,  $(17)_8$ . Ví dụ, để phân biệt số 17 này không phải là 17 của hệ số thập phân. Thế thì,  $(17)_8$  trong hệ số thập phân là bao nhiêu? 17 của hệ số bát phân bằng với  $1 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = (15)_{10}$ . bạn xem, nếu không ký hiệu rõ ràng, chắc chắn sẽ sai sót.



Trong số hệ số thập lục phân, ngoài sử dụng 10 chữ số từ 0 đến 9 của hệ số thập phân, còn phải thêm sáu chữ cái A, B, C, D, E, F. Phương pháp ghi số của nó là "gấp 16 tiến 1", vậy thì đến 16 trong hệ số thập lục phân sẽ là  $(10)_{16}$ . Quyền của các đơn vị số là hình thức số mũ của 16. Bạn có biết  $(3AF6)_{16}$  trong hệ số thập lục phân là số gì của hệ số thập phân không? Chúng ta tính toán một chút:

$(3AF6)_{16} = 3 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 6 \times 16^0 = 15094$ , A ở đây biểu thị 10 trong hệ số thập phân, F thì biểu thị 15.

Số hệ số bát phân và số hệ số thập lục phân chúng ta đều không thể một lúc nhìn ra được nó là bao nhiêu của số hệ số thập phân, cho nên có khi cần tiến hành chuyển đổi chế độ số bắt buộc. Phương pháp lấy số hệ số bát phân, hệ số thập lục phân chuyển thành số hệ số thập phân, đã được giới thiệu ở trên. Thế thì ngược lại, làm thế nào chuyển từ số hệ số thập phân thành số hệ số bát phân hoặc thập lục phân? Phương pháp giống với "phép chia 2 liên tục tìm dư" chuyển từ hệ số thập phân thành hệ số nhị phân, chỉ cần chuyển thành "phép chia 8 liên tục tìm dư" và "phép chia 16 liên tục tìm dư" là được. Ví dụ  $(259)_{10} = (403)_8$ ,  $(2686)_{10} = (A7E)_{16}$ .

Trong máy tính đều được nhập hệ số bát phân và hệ số thập lục phân là để bù cho những điểm thiếu sót của số hệ số nhị phân, cũng may là ba đơn vị số của hệ số nhị phân vừa vận ghi thành một đơn vị số hệ số bát phân, như vậy, độ dài của số hệ số nhị phân sẽ rút ngắn đi 1/3. Một đơn vị số của hệ số thập lục phân có thể đại diện cho bốn đơn vị số của hệ số nhị phân, như vậy, số hệ số nhị phân sẽ càng thêm "gọn nhỏ sắc bén", tinh xảo hơn so với hệ số thập phân.

## Hệ số thập phân trong máy tính biểu thị như thế nào?

Mặc dù trong máy tính sử dụng hệ số nhị phân, nhưng do chúng ta sử dụng rộng rãi hệ số thập phân trong công việc và cuộc sống thường ngày, vì vậy người sử dụng máy tính hi vọng máy tính có thể trực tiếp tiến hành lưu trữ và xử lý tính toán đối với các con số trong hệ số thập phân. Hiện nay, khi chúng ta sử dụng máy tính, các số được nhập vào và

hiển thị đều là số của hệ số thập phân, bạn có biết, những số hệ số thập phân này được biểu thị thành số hệ số nhị phân trong máy tính như thế nào không?

Trước tiên, chúng ta xem xét một chút, những số từ 0 đến 9 của hệ số thập phân được biểu thị thành số hệ số nhị phân như thế nào.

Chúng ta dùng số hệ số nhị phân 4 đơn vị biểu thị từ 0 đến 9 của hệ số thập phân, loại phương án mã hoá này gọi là mã BCD, cũng gọi là mã 8421. vì sao gọi là mã 8421? Bởi vì bốn đơn vị hệ số nhị phân đối ứng số hệ số thập phân 8, 4, 2 và 1. Ví dụ 0110 trong hệ số nhị phân biểu thị cho số hệ số thập phân là  $0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 4 + 2 = 6$ , bảng dưới đây là quan hệ đối ứng giữa mã 8421 và số hệ số thập phân:

| Mã 8421 | Số hệ số thập phân | Mã 8421 | Số hệ số thập phân |
|---------|--------------------|---------|--------------------|
| 0000    | 0                  | 0101    | 5                  |
| 0001    | 1                  | 0110    | 6                  |
| 0010    | 2                  | 0111    | 7                  |
| 0011    | 3                  | 1000    | 8                  |
| 0100    | 4                  | 1001    | 9                  |

Đối với số trong hệ số thập phân, ví dụ như 1973, mã BCD của nó là mã BCD của từng số riêng lẻ viết cùng nhau là được.

Mã BCD của 1973

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 0001 | 1001 | 0111 | 0011 |
|------|------|------|------|

Trừ mã BCD, để biểu thị số hệ số thập phân thành số hệ số nhị phân còn có phương pháp mã hoá khác chúng tôi không giới thiệu ở đây.

Có phương pháp mã hoá số hệ số thập phân rồi, bước tiếp theo chúng ta cần xem ký hiệu của số hệ số thập phân (như số dương là +, số âm là -) chúng ta xử lý thế nào.

|        |        |       |        |         |
|--------|--------|-------|--------|---------|
| Chữ số | Chữ số | ..... | Chữ số | Kí hiệu |
|--------|--------|-------|--------|---------|

Trong máy tính, một số hệ số thập phân được biểu thị theo cách thức dưới đây: phía trước biểu thị các số trong chữ số, 4 đơn vị sau cùng là ký hiệu của số. Ví dụ, một số dương là + 1230 trong máy tính biểu thị là

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| 0001 | 0010 | 0011 | 0000 | 1011 |
|------|------|------|------|------|

Các số trong đó đều dùng mã BCD, 1011 biểu thị là số dương (+).

Trong máy tính có một bộ phận xử lí ngôn ngữ chuyên môn, nó chịu trách nhiệm phiên dịch số hệ số thập phân mà chúng ta nhập vào thành số hệ số nhị phân, sau khi tính toán xong, nó lại "phiên dịch" thành số hệ số thập phân, dẫn ra. Cho nên khi chúng ta sử dụng máy tính, về cơ bản không cảm nhận được việc máy tính sử dụng là số hệ số nhị phân.

## Mã ASCII là gì?

Bạn đã nghe nói đến mã ASCII chưa? Nó là một loại mã trao đổi thông tin tiêu chuẩn quốc tế, ASCII là cách viết tắt chữ đầu của tên tiếng Anh (American Standard Code for Information Interchange). Loại mã này được Uỷ ban tiêu chuẩn trao đổi thông tin Mỹ đưa vào sử dụng đầu tiên, sau đó nó được sử dụng rộng rãi và đã phát triển thành một loại mã tiêu chuẩn quốc tế trong ngành máy tính và thông tin số.

Mã ASCII dùng làm gì? Nó chuyên dùng cho biểu thị ký hiệu. Ký tự và ký hiệu là một bộ phận lớn trong số liệu được máy tính lưu giữ và xử lí, nhất là trong hệ thống làm việc tự động hoá, có lúc chúng ta cần nhập các tài liệu hồ sơ như tên, tuổi, nghề nghiệp... phải đánh số, phân loại; phải làm biểu lương v.v... những cái này phải dùng các ký hiệu không số, vậy sẽ thể hiện trong máy tính như thế nào? Ví dụ, ký hiệu chữ cái tiếng Anh: A, B, C..., Z; a, b, c, ...y, z; ký hiệu chuyên dùng: \$ @, #, +, -, /, =, " ... v.v

Những ký hiệu này không thể trực tiếp nhập vào máy tính được, trước tiên phải mã hoá cho chúng, sau khi chuyển sang hệ số nhị phân (cũng gọi là số hoá) mới có thể xử lí được, mã ASCII chính là một trong những phương pháp để thực hiện việc mã hoá này.

Mã ASCII dùng 7 đơn vị trong hệ số nhị phân biểu thị một ký hiệu, lại thêm một đơn vị gọi là số hiệu nghiệm (số thông tin kiểm tra sai sót) như vậy thành 8 đơn vị, mà trong máy tính một byte chính là 8 đơn vị,

cho nên, mã ASCII vô cùng có lợi cho việc xử lý và truyền tải thông tin của máy tính.

Trong rất nhiều sách máy tính, người ta đều cung cấp bảng mã ASCII, ví dụ mã ASCII của ký tự A là 1000001, mã ASCII của ký tự 6 là 0110110, mã ASCII của ký tự 10 là 0101011, mã ASCII của ký tự # là 0100011.

Có mã ASCII rồi, thì có thể chuyển đổi ký tự và ký hiệu thành số liệu ký tự hệ số nhị phân; mà mã BCD có thể chuyển đổi số hệ số thập phân dùng trong tính toán thành số liệu số hệ số nhị phân. Như vậy, qua một số trình tự dịch đặc thù, máy tính có thể đọc hiểu ngôn ngữ của chúng ta, tiến hành các bước công việc tiếp theo.

## Tại sao máy tính bị "tràn" dữ liệu trong tính toán?

Chúng ta đều biết "tràn" là hình dung từ thường dùng để hình dung chất lỏng trong vật chứa bị chảy ra ngoài khi đầy, ví dụ nước trong cốc đổ đầy quá, sẽ bị chảy tràn ra ngoài qua thành cốc. Trong máy tính, cũng có chuyện "tràn" như vậy, nó chỉ sự "tràn" dữ liệu trong tính toán. Vậy tại sao máy tính lại bị tràn?

Thì ra, phạm vi số mà máy tính có thể biểu thị là có hạn. Nếu số quá to hoặc quá nhỏ vượt quá phạm vi biểu thị này, thì gọi là tràn dữ liệu. Thiết bị tính toán giống như cái cốc, số giống như nước trong cốc, khi số cho vào trong cốc không chứa hết, nó sẽ chảy ra một phần. Phần bị chảy ra sẽ bị mất đi, khiến kết quả tính toán không chính xác, từ đó có thể ảnh hưởng đến các quá trình tính toán sau, vấn đề sẽ trở nên nghiêm trọng, không đơn giản như chuyện nước chảy ra từ cốc. Vì vậy, máy tính khi tính toán nhất định phải tránh để tràn dữ liệu.

Ví dụ một thiết bị tính toán có dung lượng chỉ 8 đơn vị, một số thuộc hệ số nhị phân có 8 đơn vị, mỗi một đơn vị có thể là 0 hoặc 1, trong khi đơn vị bên trái nhất là đơn vị ký hiệu, tức là ký hiệu.

Vậy thì giá trị lớn nhất của số được biểu thị bằng bảy vị trí còn lại là  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$ . Lại xem xét đến vấn đề âm hay dương của đơn vị ký hiệu, ta sẽ có phạm vi biểu thị số của thiết bị tính toán 8 đơn vị này sẽ là  $-2^7$  đến  $2^7 - 1$ , tức là từ -128 đến 127

Khi kết quả tính toán vượt quá phạm vi này, hiện tượng tràn dữ liệu sẽ xảy ra, ví dụ số 129 trong máy được biểu thị là 1000001, mà số 1 của vị trí bên trái nhất là đơn vị ký hiệu, 1 chỉ số âm, vậy là số này sẽ là -1, chứ không phải là 129, bạn xem, khoảng cách sai số quá lớn!

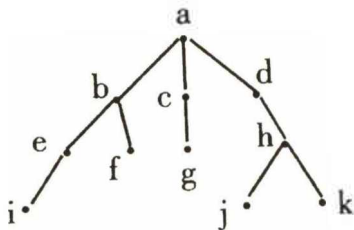
Theo sự phát triển của khoa học máy tính, máy tính ngày này đều là 16 hoặc 32 bit, phạm vi biểu thị số nâng cao rất lớn, từ đó đảm bảo cho các phép toán thông thường không xảy ra sự cố tràn dữ liệu.

Nhưng, nếu xảy ra sự cố tràn dữ liệu thì nên làm thế nào? Trước tiên yêu cầu ngừng máy, sau đó kiểm tra để tìm ra nguyên nhân bị tràn ra. Khi máy tính tính toán, nhất là khi cộng hai số cùng âm hoặc cùng là dương, phải phán đoán kết quả tính toán có phải gây ra sự cố tràn dữ liệu, nếu phát hiện dữ liệu bị tràn, phải xử lý mới có thể đảm bảo tính chính xác của quá trình tính toán tiếp theo.

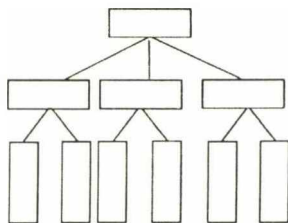
Bởi vậy, chúng ta khi sử dụng máy tính, cần đọc trước thông tin về máy, xem phạm vi tính toán của nó là bao nhiêu bit, để tránh trong khi tính toán nảy sinh sự cố tràn dữ liệu.

## Bạn có biết "cây" cũng được dùng để thể hiện vấn đề không?

Trong toán học có một hình thức thể hiện dữ liệu vô cùng độc đáo, gọi là "cây dữ liệu" hay "cây thông tin". Nó có phần giống với cây trong tự nhiên mà chúng ta vẫn thấy, có gốc, cành, lá, nhưng có điểm khác là, "cây" trong toán học là cây ngược, gốc của nó ở trên, lá lại ở dưới, bạn thấy có thú vị không?



Hình 1



Hình 2

Hình 1 là cây sử dụng trong toán học. Gốc của nó là điểm a, cả chiếc cây được tạo thành bởi các điểm liên kết và các cạnh nối giữa các điểm đó, nhưng cạnh cũng không được nối linh tinh, trong cây không được có đường vòng lại. nếu lấy hai điểm b, c nối lại, như thế ab, bc, ca 3 cạnh sẽ hình thành đường vòng lại, thì sẽ không phải là cây nữa.

Ở hình trên, b, c và d cũng là gốc của cây, b, c và d là con của a, và a là cha của chúng, b, c và d gọi nhau là anh em. i, f, g, j và k được gọi là lá vì chúng không có con. Làm thế nào dùng cây để miêu tả vấn đề? Chính vì cây có tầng lớp rõ ràng, cho nên khi biểu thị vấn đề có quan hệ tầng lớp thì đặc biệt thuận tiện. Ví dụ hình 2 chính là cơ cấu lớn của một trường học, để cho ta nhìn tự nhiên, nếu dùng văn tự miêu tả, thì không có hiệu quả rõ ràng đơn giản được.

Lại ví dụ, một sự việc cũng có thể dùng kết cấu cây để nói rõ. Lấy ví dụ việc chuẩn bị trước khi gói sủi cảo, thì có thể dùng một chiếc cây biểu thị ra được. Trong cái cây này, chúng ta biểu thị rõ công việc chuẩn bị trước khi gói sủi cảo. Nếu bạn có hứng thú, còn có thể vẽ ra từng tầng một, như vậy biểu đạt sẽ rõ ràng hơn.

Chúng ta đã biết hình vẽ nói trong toán học được cấu thành bởi điểm và cạnh, thế thì kỳ thực cây là một loại hình đặc thù. Trong máy tính, cây có thể dùng để lưu trữ dữ liệu, cho nên nó là phương pháp biểu thị quan trọng trong máy tính. Thông qua hình thức này của cây, vấn đề trong cuộc sống cũng có thể phản ánh trong máy tính được.

## Cài mật mã và giải mật mã là thế nào?

Theo sự phát triển và phổ cập của khoa học máy tính, văn kiện, hộp thư điện tử, mạng máy tính.. những thứ cần đến cài mật mã và giải mật mã càng ngày càng nhiều.

Nói đến mật mã, bạn có lẽ cũng nghĩ đến ám hiệu đặc vụ sử dụng trong phim điện ảnh! Đúng vậy, đó chính là mật mã mà chúng ta đã sớm biết đến. Mà ngày nay, mật mã đã thâm nhập vào cuộc sống thường ngày của chúng ta, cũng không còn là thứ bí mật gì nữa. Ví dụ, tài khoản trong ngân hàng của bạn có mật mã chứ, có lẽ bạn còn có mật mã của va li hành lí, hoặc hộp bút chì, vở ghi chép, trong đơn vị thường có kết sắt,



không có mật mã có được không? Mà máy tính nối mạng càng cần dùng mật mã để bảo vệ tốt, để tránh sự công kích của hacker (tin tặc, kẻ chuyên đột nhập vào máy tính của người khác làm những việc phi pháp). Đến nay, con người đã hình thành một môn khoa học mới gọi là mật mã học.

Mục đích sử dụng mật mã là bảo vệ tin tức của chúng ta... không để kẻ khác lấy cắp đi một cách phi pháp. Nguyên tắc cài mật mã là chuyển hoá tin tức có thể đọc hiểu thành những tin tức nhìn thì thấy rối loạn không hiểu. Quá trình giải mật mã ngược lại với cài mật mã, thông thường mà nói, hai bên sử dụng mật mã đều có một quyển mật mã hoặc từ điển, họ dựa theo phương pháp ước định để tiến hành mã hoá và giải mã. Trong mật mã học gọi quy tắc biến đổi này là khoá mã, chính là giống như chìa khoá mở khoá, không có chìa khoá mã thì không thể giải mật mã được.

Ví dụ, để bảo mật điện văn, phải dựa vào quy luật nhất định để chuyển nó thành mật mã, người nhận báo lại theo quy luật ước định để dịch nó thành nguyên bản. Quy tắc chuyển đổi như sau: chuyển chữ cái A thành chữ cái E, a thành e, tức là biến thành chữ cái thứ tư sau nó, W thành A, X thành B, Y thành C, Z thành D. Chữ cái chuyển đổi theo quy luật nói trên, ký hiệu không phải chữ cái thì không đổi. Lúc này "China!" biến thành "Glmre!" mà người nhận được mật văn "Glmre!" cần dùng ngược lại quy tắc mã hoá để giải mã, lấy mỗi một chữ cái biến thành chữ cái thứ tư trước nó, mới có thể nhận được văn bản thật "China!". Khoá mã ở đây - và phương pháp thêm mật mã chỉ có thể là hai người đưa nhận được biết, không thể công khai.

Bước vào xã hội tin tức, để bảo vệ an toàn số liệu thông tin, như tin tức của đường dây điện thoại, sóng siêu âm, số liệu vệ tinh v.v., mật mã là biện pháp rất hữu dụng.

## Vì sao cần học tốt số học?

Bắt đầu từ khi chúng ta vào lớp một tiểu học, cho đến lớp 12 trung học, trong thời gian 12 năm, hàng năm đều phải học toán học. Trong giáo trình tiểu học và phổ thông cơ sở, toán học, ngữ văn, ngoại ngữ được gọi là

ba môn chính, các nước trên thế giới đều như vậy. Không biết bạn đã nghĩ đến vì sao phải học toán học chưa, mà còn phải học tốt toán học nữa?

Điều này chủ yếu có 3 nguyên nhân:

Thứ nhất, toán học cũng giống như ngữ văn, ngoại ngữ, là một loại ngôn ngữ, nó là ngôn ngữ của khoa học. Nó sử dụng các loại công cụ như chữ số, ký hiệu, công thức, hình tượng, khái niệm, định lý v.v., biểu đạt giản lược mà chính xác quan hệ giữa vạn vật trên thế giới, quan hệ vị trí trong không gian, đối với việc nhận loại nhận thức thế giới. Không hiểu toán học, chính là không thể lý giải khoa học.

Thứ hai, Toán học giúp bồi dưỡng tư duy lí tính, nếu nói ngữ văn có thể dùng để biểu thị tình cảm, nguyện vọng, ý chí, thì toán học chủ yếu dùng để tiến hành tư duy lí tính như khái quát, trừu tượng, suy lí ... Toán học nghiêm khắc chính xác, trước nay không hàm hồ, đối với việc giáo dục khả năng tư duy cho con người là không thể thiếu được.

Thứ ba, Toán học xuất hiện ở mọi lĩnh vực, nhỏ thì mua đồ trên phố, lớn thì thiết kế máy bay tên lửa, điều khiển vận hành vệ tinh, tất cả đều không thể tách rời toán học được. Hơn nữa, sự cao thấp về trình độ toán học của một quốc gia, phản ánh được quốc gia đó có cường thịnh hay không.

Toán học là khoa học nghiên cứu về số và hình, phạm những vật có "số lượng to nhỏ" và "hình dáng vị trí" đều không tách rời với tri thức toán học. Toán học càng học càng thích nó, đừng sợ toán học, càng không thể ghét nó, chỉ có thể chắc chắn đi từng bước chăm chỉ học tập tốt toán học, mới có thể giúp bạn làm chủ được tri thức khoa học.

# MỤC LỤC

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Lời mở đầu .....                                                                              | 5  |
| Bạn có biết nguồn gốc của cách đếm không?.....                                                | 7  |
| Ý nghĩa của số 0 có phải là không có?.....                                                    | 8  |
| Số nguyên tố là gì?.....                                                                      | 9  |
| Số chẵn và số nguyên số nào nhiều hơn? .....                                                  | 10 |
| Số thân thiết là gì?.....                                                                     | 12 |
| Làm sao đoán được một số có thể chia hết cho 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11?.....                       | 13 |
| Đuôi của một cặp số nhân có bao nhiêu số 0? .....                                             | 14 |
| Các cặp số nguyên tố sinh đôi có phải là nhiều vô cùng không? .....                           | 15 |
| Bạn có biết số ngược là gì không?.....                                                        | 16 |
| Bạn có biết "Số khuyết 8" kì diệu như thế nào không? .....                                    | 17 |
| Bạn có biết cách chuyển số thập phân vô hạn tuần hoàn thành phân số không? .....              | 18 |
| Tại sao hình dạng của gạch đa phần là vuông hoặc lục giác đều? .....                          | 20 |
| Tại sao tổ ong có hình lục giác? .....                                                        | 21 |
| Trong số tất cả các hình khép kín có chu vi tương đương, hình nào có diện tích lớn nhất?..... | 23 |
| Tại sao các ống khói nhà máy đều được làm theo hình tháp tròn? .....                          | 25 |
| Bóng người dưới ánh đèn đường biến hoá như thế nào? .....                                     | 26 |

|                                                                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Khi tăng số điện thoại từ 7 con số lên 8 con số thì chúng ta đã tăng được bao nhiêu thuê bao?.....                                     | 28 |
| Bạn có thể tính được các vận động viên chạy 200m ở điểm xuất phát vòng ngoài về trước điểm xuất phát vòng trong bao nhiêu không? ..... | 30 |
| Từ tám bia mộ bạn có thể tính ra được tuổi của nhà toán học không? ....                                                                | 31 |
| Quân trình sát đã làm như thế nào để đo được chiều cao của các cây lớn? .....                                                          | 33 |
| Tại sao dựa vào mã vạch trên sản phẩm người ta lại có thể biết được giá của sản phẩm? .....                                            | 34 |
| Làm thế nào để không qua sông mà biết được sông rộng bao nhiêu? .....                                                                  | 35 |
| Tại sao khi dòng nước chảy gọn sóng lại không bị biến dạng?.....                                                                       | 37 |
| Trên bản vẽ hàng hải, tuyến đường thẳng có phải là tuyến đường ngắn nhất hay không? .....                                              | 38 |
| Tại sao trần nhà hát lại có hình Elip? .....                                                                                           | 40 |
| Cánh của máy bay có đối xứng không?.....                                                                                               | 41 |
| Mỗi người đi một đường, phải đi thế nào mới không giao nhau hoặc trùng nhau?.....                                                      | 43 |
| Vì sao khi tính điểm hát Karaoke phải bỏ đi điểm cao nhất và thấp nhất?..                                                              | 44 |
| Em có thể cắt được hình sao chỉ bằng một đường kéo không? .....                                                                        | 45 |
| Làm thế nào để ghép 2 hoặc 3 hình vuông bằng nhau thành một hình vuông lớn? .....                                                      | 46 |
| Em có tính được số trận đấu của một giải bóng đá loại vòng tròn không?.....                                                            | 48 |
| Tỉ lệ tăng thể tích khi nước đóng băng lớn hơn tỉ lệ giảm thể tích khi băng tan?.....                                                  | 49 |
| Trên bàn cờ vây có bao nhiêu hình vuông? .....                                                                                         | 50 |
| Khi đánh cờ, liệu có xuất hiện cuộc cờ hoàn toàn giống nhau? .....                                                                     | 51 |
| Làm thế nào để đạt thành tích tốt trong chạy tiếp sức? .....                                                                           | 53 |
| Em có thể ước tính được số cá trong ao không? .....                                                                                    | 54 |

|                                                                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Thời gian di chuyển qua lại của thuyền khi nước tĩnh và nước động có bằng nhau không? .....                                         | 56 |
| Khi đi xe đạp, vòng tròn trong và ngoài của bánh xe vận hành như thế nào? .....                                                     | 57 |
| Làm sao để cắt một bánh đậu phụ thành các hình ba cạnh, bốn cạnh, năm cạnh, sáu cạnh mà chỉ bằng một nhát cắt? .....                | 58 |
| Làm thế nào để chia đều 8 lít dầu trong thùng dầu? .....                                                                            | 59 |
| Sức nâng của phao bơi lớn đến mức nào? .....                                                                                        | 61 |
| Đoạn đường thẳng thực sự biến mất sao? .....                                                                                        | 62 |
| Quả cầu lăn từ máng nghiêng xuống theo đường nào mất ít thời gian nhất? .....                                                       | 63 |
| Bạn có vẽ được hình dạng của bông hoa tuyết không? .....                                                                            | 64 |
| Làm sao tính nhanh ra một ngày bất kì là ngày thứ mấy? .....                                                                        | 66 |
| Tại sao lại có năm nhuận và tháng nhuận? .....                                                                                      | 67 |
| Khi cửa hàng nhập hàng, để đảm bảo chất lượng của sản phẩm có phải kiểm tra tất cả các loại hàng hoá hay không? .....               | 68 |
| Găng tay sạch đảm bảo cho bác sĩ và bệnh nhân không truyền bệnh lẫn nhau nên có mấy chiếc? .....                                    | 70 |
| Ý nghĩa của việc gieo đồng tiền xu .....                                                                                            | 71 |
| Có bao nhiêu cách kết hợp các đồng 1 xu, 2 xu, và 5 xu thành 1 hào? .....                                                           | 73 |
| Làm sao để 1000 chiếc đĩa vào trong 10 chiếc hộp? .....                                                                             | 74 |
| Nhà thám hiểm đi theo hình vuông, tại sao lại biến thành hình tam giác? ..                                                          | 75 |
| Một chồng ống thép xếp thành hình tam giác, tại sao chỉ cần đếm số lượng hàng cuối cùng là có thể tính ra được tổng số lượng? ..... | 76 |
| Làm thế nào để có được một cái nút bình dùng được cho ba chiếc bình có các kiểu miệng bình khác nhau? .....                         | 78 |
| Số vô nghĩa được phát hiện như thế nào? .....                                                                                       | 80 |
| Thế nào là số ảo? .....                                                                                                             | 81 |
| Thế nào là hình vuông hoàn mĩ? .....                                                                                                | 82 |

|                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Bạn có biết thế nào là xác suất? .....                                                                        | 83  |
| Thế nào là mô hình toán học? .....                                                                            | 85  |
| Bạn có biết về giải thưởng Feirzi không?.....                                                                 | 86  |
| Phương pháp toán học có thể thay thế thí nghiệm khoa học được không?..                                        | 87  |
| Số Arập có phải là do người Arập sáng tạo ra? .....                                                           | 89  |
| Ai là người đầu tiên tìm ra hệ đếm theo 60? .....                                                             | 90  |
| Tại sao người Babylon lại sử dụng hệ đếm 60 nhỉ? Về vấn đề này có hai cách lí giải hoàn toàn khác nhau? ..... | 90  |
| Bạn có biết về "số 7 cô đơn" không? .....                                                                     | 91  |
| Bạn có biết ý nghĩa của các chữ số La Mã I, II, III, IV, V, VI.... không? ....                                | 93  |
| Thỏ trắng nấp ở trong những cái hang nào thì cáo mới không tìm ra được? ..                                    | 94  |
| Bạn có biết nhà toán học nào trong giới động vật không? .....                                                 | 95  |
| Bạn có biết về vòng Macbius kì diệu không?.....                                                               | 96  |
| Làm thế nào để nhanh chóng thu hẹp phạm vi? .....                                                             | 97  |
| Sự kì diệu của đường gấp khúc bông hoa là ở đâu? .....                                                        | 99  |
| Bạn có biết về trò chơi ru-bíc không? .....                                                                   | 100 |
| Làm thế nào để đi ra khỏi mê cung? .....                                                                      | 101 |
| Không cần đo đạc liệu có thể tính ra góc trên mặt phẳng không? .....                                          | 103 |
| Làm thế nào nhanh chóng vẽ ra hình ngôi sao năm cánh?.....                                                    | 104 |
| Bạn có biết góc nhìn một độ lớn thế nào không? .....                                                          | 106 |
| Bạn đã từng chơi trò 15 điểm chưa, làm thế nào để thắng? .....                                                | 107 |
| Câu chuyện về người thông minh vì sao có thể chia bò tròn số?.....                                            | 109 |
| Làm sao để lấy được vòng bạc? .....                                                                           | 110 |
| Lấy đồng xu có mẹo không? .....                                                                               | 111 |
| Lễ duyệt binh ở Prussia đã gây ra vấn đề gì? .....                                                            | 112 |
| Sói, dê, rau bắp cải qua sông thế nào? .....                                                                  | 114 |
| Bí quyết gì để giải vấn đề thực tế bằng tri thức toán học? .....                                              | 115 |



|                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Vẽ đường tròn có giúp bạn giải câu hỏi nhanh không? .....                                                                                 | 116 |
| Trong tình huống không có bất kì một thiết bị đo nào trong tay, bạn có thể đoán ra khoảng cách giữa bạn và người đi trên bờ bên kia?..... | 118 |
| Sáng tạo toán học từ con nhện giăng tơ.....                                                                                               | 119 |
| Chia đất thế nào? .....                                                                                                                   | 120 |
| Dùng kiến thức hình học bắt trộm như thế nào?.....                                                                                        | 122 |
| Ai là gián điệp quốc tế .....                                                                                                             | 123 |
| Vì sao quốc vương không đủ gạo để thưởng? .....                                                                                           | 124 |
| Bạn có biết dãy số sinh ra từ việc sinh sôi nảy nở của một cặp thỏ là gì không? .....                                                     | 125 |
| Sao gọi là "điều luật cắt tóc" sai?.....                                                                                                  | 126 |
| Bạn có biết kiến thức số học từ việc con kiến mang được vật nặng không? ..                                                                | 127 |
| Tháp Phật và "ngày cuối cùng của thế giới" có quan hệ không? .....                                                                        | 128 |
| Thực nghiệm ném kim thế nào để tìm ra được giá trị của $\pi$ ? .....                                                                      | 130 |
| "Nguyên tắc ngăn kéo" là gì? .....                                                                                                        | 131 |
| "Câu hỏi mười lăm nữ sinh héc man" là gì? .....                                                                                           | 132 |
| Sự kỳ diệu của tỉ thức vàng là ở đâu? .....                                                                                               | 133 |
| Bạn có biết quá trình chứng minh "định lí Féc-ma" không? .....                                                                            | 134 |
| Từ màu sắc của bản đồ đã gây ra vấn đề gì? .....                                                                                          | 136 |
| Bạn có biết "câu hỏi 7 chiếc cầu" nổi tiếng trong lịch sử không?.....                                                                     | 137 |
| Hình như thế nào có thể vẽ một nét bút? .....                                                                                             | 139 |
| Làm thế nào để tìm ra mạng lưới đường sắt nối 5 thành phố có giá xây dựng thấp nhất? .....                                                | 140 |
| Tốc độ tính toán kinh ngạc của máy tính? .....                                                                                            | 142 |
| Đường cao tốc thông tin là gì?.....                                                                                                       | 143 |
| Công cụ tính toán ngày xưa của con người có những loại nào?.....                                                                          | 145 |
| Có phải máy tính chỉ chuyên dùng để tính toán? .....                                                                                      | 146 |

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Vì sao máy tính là máy tính số? .....                                  | 147 |
| Vì sao máy tính chứng minh được định lý số học? .....                  | 148 |
| Vì sao máy tính sử dụng hệ số nhị phân? .....                          | 150 |
| Chuyển đổi như thế nào giữa hệ số thập phân và hệ số nhị phân?.....    | 151 |
| Bạn có hiểu thế nào là hệ số bát phân, hệ số thập lục phân không?..... | 152 |
| Hệ số thập phân trong máy tính biểu thị như thế nào? .....             | 153 |
| Mã ASCII là gì?.....                                                   | 155 |
| Tại sao máy tính bị "tràn" dữ liệu trong tính toán? .....              | 156 |
| Bạn có biết "cây" cũng được dùng để thể hiện vấn đề không?.....        | 157 |
| Cài đặt mã và giải mã là thế nào? .....                                | 158 |
| Vì sao cần học tốt số học? .....                                       | 159 |

# NHỮNG CÂU HỎI KỲ THÚ VỀ THẾ GIỚI QUANH TA

## BÍ MẬT TOÁN HỌC

Phuong Hiếu *biên soạn*

---

### NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG

Địa chỉ: Số 175 Giảng Võ – Hà Nội

Điện thoại: 04.38515380; Fax: 04.38515381

E-mail: [info@nxblaodong.com.vn](mailto:info@nxblaodong.com.vn);

Website: [www.nxblaodong.com.vn](http://www.nxblaodong.com.vn)

### Chi nhánh phía Nam:

Số 85 Cách mạng Tháng Tám, Quận 1 - Tp. Hồ Chí Minh

Điện thoại: 08.38390970; Fax: 08.39257205

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*

VÔ THỊ KIM THANH

*Biên tập:* Mai Thị Thanh Hằng

*Trình bày:* Đắc Huy

*Bìa:* Nguyễn Thẩm

*Sửa bản in:* Nguyễn Nga – Đặng Thiên Sơn

### Phát hành tại:

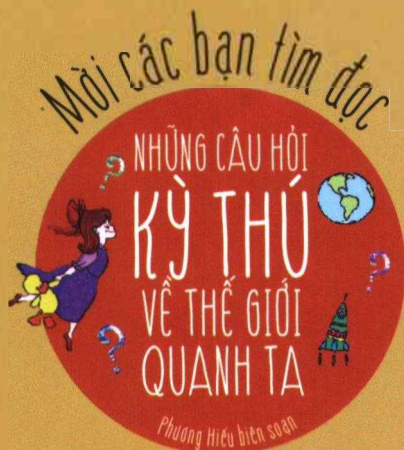
☛ Nhà sách Đông Tây: 62 Nguyễn Chí Thanh, Hà Nội. ĐT: 04.37733041;

☛ Thư viện Café Đông Tây: Nhà N11A Trần Quý Kiên, Cầu Giấy, Hà Nội. ĐT: 04.62671117. Website: [dongtay.vn](http://dongtay.vn)

☛ Sách Hà Nội: 245 Nguyễn Thị Minh Khai, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh. Website: [www.sachdongtay.com](http://www.sachdongtay.com)

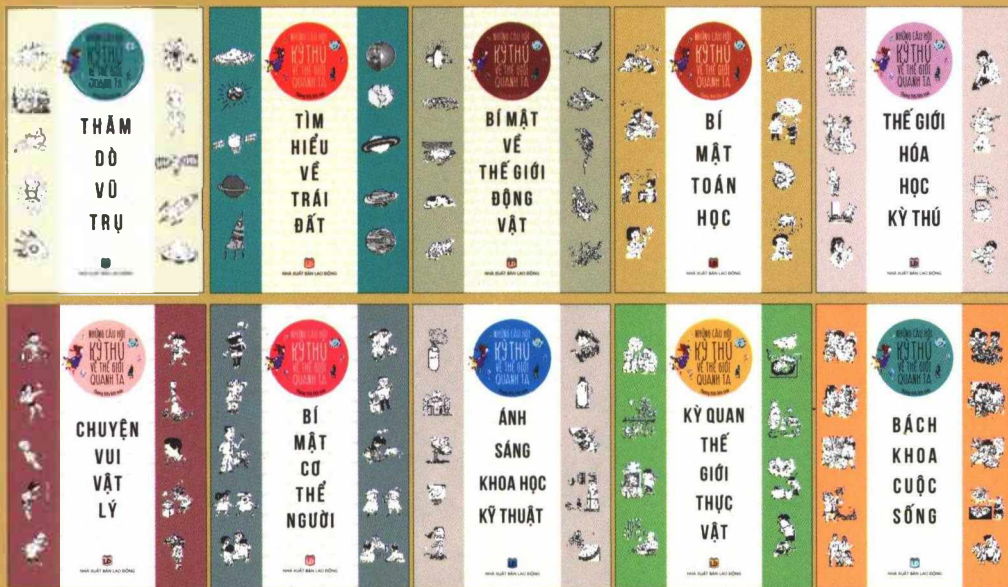
---

In 1.000 cuốn, khổ 16 x 23 cm, tại Nhà in Văn hóa Dân tộc, số 128C Đại La, Hai Bà Trưng Hà Nội. Số đăng kí KHXB: 1095-2015/CXBIPH/12-77/LĐ. Số quyết định xuất bản: 504/QĐ-NXBLĐ cấp ngày 26/5/2015. Mã số ISBN: 978-604-59-3565-1. In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2015.



“Thế giới hiện thực khách quan luôn tồn tại và phát triển, con người cũng vận động và phát triển không ngừng. Khả năng quan sát và luôn tìm câu hỏi trong những vấn đề là cơ sở của những phát minh và phát kiến có tính đột phá của con người. Mỗi một câu hỏi ẩn chứa một lời giải đáp và trong mỗi một lời giải đáp lại chứa một câu hỏi cần tìm một đáp án mới...”

**Những câu hỏi kỷ thủ về thế giới quanh ta** là bộ sách khoa học thường thức mang đến cho người đọc những kiến thức về Trái đất, về con người, về những môn khoa học tự nhiên và những phát hiện của con người về cuộc sống xung quanh chúng ta. Bộ sách nhằm đem đến cho các bạn say mê tìm hiểu, thích quan sát thế giới và hướng các bạn đến với những sáng tạo khoa học”.



ISBN: 978-604-59-3565-1



9 786045 935651



8 936065 583689

Giá: 51.000 Đ