

PHAN DOÃN THOẠI (Chủ biên)
LÊ TỰ ĐỀ

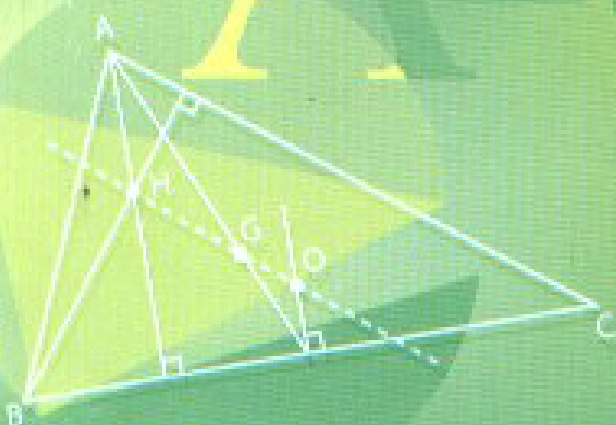
PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 7

THEO CHỦ ĐỀ

PHẦN HÌNH HỌC

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)

$$A = 3x^2y + 2xy^2$$



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHAN DOÃN THOẠI (Chủ biên) – LÊ TỰ ĐỆ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI **TOÁN 7** *THEO CHỦ ĐỀ*

PHẦN HÌNH HỌC

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Chương trình toán trung học cơ sở được trình bày theo các chủ đề. Trong mỗi chủ đề có quy định chuẩn (mức độ cần đạt) về kiến thức và kĩ năng tương đối chi tiết. Do những quy định về thời lượng dạy học, mỗi chủ đề được phân phối trong một hoặc nhiều bài học của SGK. Để giúp học sinh THCS nắm vững kiến thức và phương pháp giải toán, chúng tôi biên soạn bộ sách :

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN THEO CHỦ ĐỀ

Bộ sách gồm 8 quyển. Mỗi lớp hai quyển, một quyển bao gồm các chủ đề Số học (lớp 6), Đại số (lớp 7, 8, 9), một quyển bao gồm các chủ đề Hình học.

Sách được phân chia thành các chương với tên chương như trong SGK. Mỗi chương gồm các chủ đề. Mỗi chủ đề gồm hai phần :

A. Kiến thức cần nhớ. Phần này trình bày tóm tắt những kiến thức cơ bản và nâng cao cần thiết cho việc giải toán.

B. Các dạng bài tập cơ bản. Dựa vào những nội dung cơ bản của từng chủ đề, chúng tôi đưa ra các dạng bài tập để thực hành và luyện tập các nội dung phục vụ cho chủ đề. Trong mỗi dạng bài tập có ba nội dung chính sau đây : **Phương pháp giải; Ví dụ; Bài tập.** Mỗi phương pháp giải đưa ra một số ví dụ minh họa tiêu biểu.

Hệ thống bài tập, về cơ bản gồm hai loại : Loại 1, áp dụng trực tiếp phương pháp và các ví dụ nêu trên; Loại 2, gồm các bài tập vận dụng một cách tổng hợp các phương pháp đó.

Các tác giả đã dành nhiều thời gian để sắp xếp các chủ đề theo thứ tự logic của chương trình; lựa chọn các ví dụ và bài tập từ dễ đến khó và cố gắng đáp ứng nhu cầu nắm vững kiến thức cơ bản của đa số học sinh, đồng thời hướng học sinh đi sâu (ở một số bài tập có dấu ***), phát triển những kiến thức được truyền thụ và rèn luyện kĩ năng.

Mặc dù bộ sách đã được các tác giả nhiều năm kinh nghiệm giảng dạy dày công biên soạn nhưng cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, rất mong được bạn đọc góp ý.

Mọi thư từ góp ý xin gửi về :

P. Khai thác và Quản lí Đề tài – Công ty CP Sách Giáo dục tại Tp Hà Nội.

Địa chỉ : Lô B1 DN 14/3 – Nguyễn Khánh Toàn – Quan Hoa – Cầu Giấy – Hà Nội.

Hà Nội, ngày 01 tháng 01 năm 2011.

Các tác giả

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Chủ đề 1

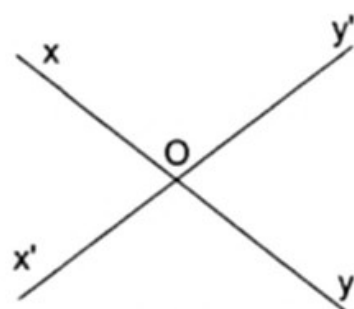
QUAN HỆ GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. **Định nghĩa:** Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

• **Tính chất:** Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

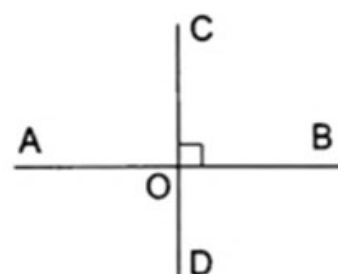
Nếu $\widehat{xOx'}$ và $\widehat{yOy'}$ là hai góc đối đỉnh, $\widehat{xOy'}$ và $\widehat{x'Oy}$ là hai góc đối đỉnh thì: $\widehat{xOx'} = \widehat{yOy'}$ và $\widehat{xOy'} = \widehat{x'Oy}$.



Hình 1

2. Hai đường thẳng vuông góc là hai đường thẳng cắt nhau và một trong các góc tạo thành có một góc vuông. Kí hiệu: $AB \perp CD$ (hình 2).

Qua một điểm cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với đường thẳng cho trước (tính duy nhất).



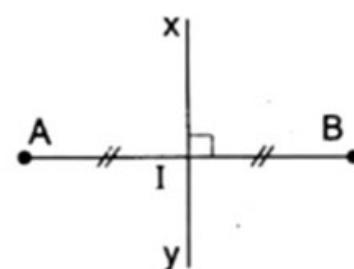
Hình 2

3. Đường thẳng xy là đường trung trực của đoạn thẳng AB khi:

• Đường thẳng xy đi qua I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

• $xy \perp AB$.

Mỗi đoạn thẳng cho trước có một và chỉ một đường trung trực (hình 3).



Hình 3

Tóm tắt: Nếu $AI = IB$; $\widehat{xIA} = 90^\circ$ thì xy là đường trung trực của AB.

Khi đó ta còn nói: Hai điểm A và B đối xứng nhau qua đường thẳng xy.

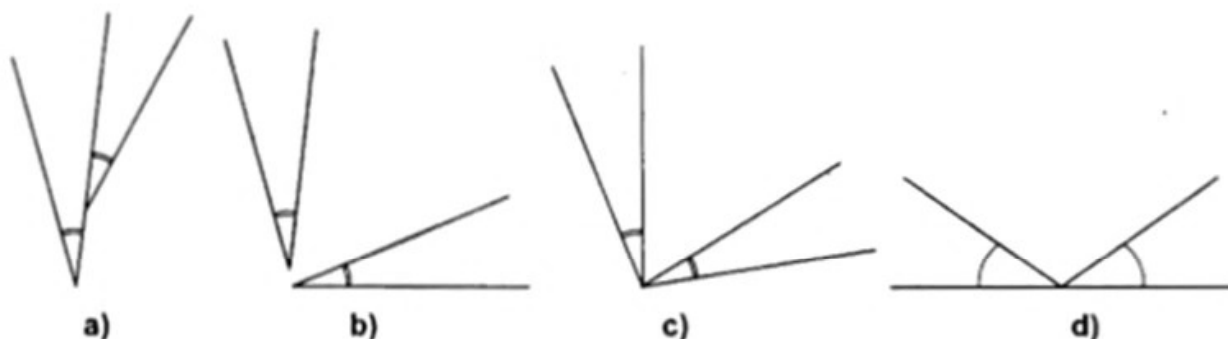
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Hai đường thẳng cắt nhau theo một góc bất kì

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Biết cách vẽ và nhận ra hai góc đối đỉnh theo cách nhanh nhất.

Chú ý: Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau, nhưng điều ngược lại thì không đúng (nên không được áp dụng).



Hình 4

Chẳng hạn hai góc trong hình 4a, 4b, 4c, 4d bằng nhau nhưng không phải là hai góc đối đỉnh.

2. Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo thành bốn góc (không kể các góc bẹt) có chung đỉnh tại điểm cắt.

– Nếu biết số đo của một góc thì dựa vào tính chất của hai góc kề bù nhau và tính chất hai góc đối đỉnh, ta tính được số đo của ba góc còn lại.

– Ngược lại nếu cho hai góc bằng nhau và có một cặp cạnh là hai tia đối của nhau, bằng cách tính toán ta có thể chứng tỏ được cặp cạnh thứ hai cũng là hai tia đối nhau để suy ra hai góc đó là hai góc đối đỉnh.

Thật vậy: $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = \alpha^\circ$ ($0^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$);

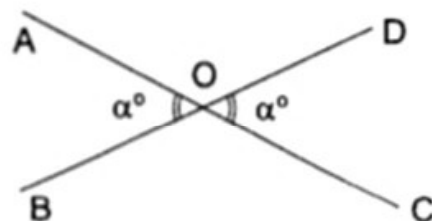
OA và OC là hai tia đối nhau. Chứng tỏ hai tia OB và OD cũng là hai tia đối nhau.

Hai tia OA và OC đối nhau (theo giả thiết), vậy A, O, C nằm trên một đường thẳng. Xét nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC chứa tia OD, có:

$\widehat{AOD} = 180^\circ - \alpha^\circ$ (hai góc kề bù).

Vậy $\widehat{AOB} + \widehat{AOD} = \alpha^\circ + 180^\circ - \alpha^\circ = 180^\circ$, suy ra $\widehat{BOD} = 180^\circ \Rightarrow$ Tia OB và OD thuộc một đường thẳng. Suy ra OB và OD là hai tia đối nhau.

Suy ra $\widehat{AOB}$ và $\widehat{COD}$ có chung đỉnh O có hai cặp cạnh là hai tia đối nhau, vậy nó là hai góc đối đỉnh (hình 5).



Hình 5

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O.

1) Kể tên các cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt);

2) Biết số đo của góc $\widehat{AOC} = 40^\circ$. Tính các góc còn lại.

3) Kẻ OE là tia phân giác của góc $\widehat{AOC}$ và OF là tia đối của tia OE. Hãy chứng tỏ OF là tia phân giác của góc $\widehat{BOD}$.

4) Trong hình vẽ đó (sau câu 3) có mấy cặp góc đối đỉnh, là những góc nào? (không kể góc bẹt). Tính số đo của chúng.

Lời giải

1) Các cặp góc đối đỉnh là:

$\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOD}$; $\widehat{COB}$ và $\widehat{AOD}$.

2) Do $\widehat{AOC}$ và $\widehat{COB}$ là hai góc kề bù, nên: $\widehat{AOC} + \widehat{COB} = 180^\circ$. (1)

Theo đề bài: $\widehat{AOC} = 40^\circ$. (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{COB} + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{COB} = 140^\circ$.

• $\widehat{BOD} = \widehat{AOC}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BOD} = 40^\circ$.

• $\widehat{COB} = \widehat{AOD}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{AOD} = 140^\circ$ (hình 6).

3) *Cách 1:*

Vì OE là phân giác của $\widehat{AOC}$ nên $\widehat{AOE} = \widehat{EOC} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$. (3)

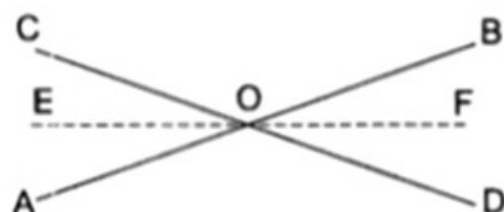
Mà ta có: OE và OF là hai tia đối nhau (theo đề bài).

OA và OB là hai tia đối nhau (vì AB là đường thẳng).

Nên $\widehat{AOE}$ và $\widehat{BOF}$ đối đỉnh $\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{BOF}$ (theo định nghĩa). (4)

Từ (3) và (4), ta được: $\widehat{AOE} = \widehat{BOF} = 20^\circ$.

Vậy $\widehat{BOF} = 20^\circ$, mà $\widehat{BOD} = 40^\circ$ nên $\widehat{BOF} = \frac{\widehat{BOD}}{2} \Rightarrow$ OF là tia phân giác của góc $\widehat{BOD}$.



Hình 6

Cách 2: Vì OE là phân giác của $\widehat{AOC}$ nên $\widehat{AOE} = \widehat{EOC}$. (5)

Ta có: OE và OF là hai tia đối nhau (theo đề bài).

OC và OD là hai tia đối nhau (vì CD là đường thẳng).

OA và OB là hai tia đối nhau (vì AB là đường thẳng).

Vậy, ta có các cặp góc đối đỉnh:

$$\widehat{COE} \text{ và } \widehat{FOD} \Rightarrow \widehat{EOC} = \widehat{FOD} \text{ (tính chất).} \quad (6)$$

$$\widehat{AOE} \text{ và } \widehat{BOF} \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{BOF} \text{ (tính chất)} \quad (7)$$

Từ (5), (6), (7) ta có: $\widehat{BOF} = \widehat{FOD}$, hay OF là tia phân giác của góc $\widehat{BOD}$.

4) Có sáu cặp góc đối đỉnh:

Theo câu 2, có:

$\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOD}$ là hai góc đối đỉnh, bằng 40° ;

$\widehat{COB}$ và $\widehat{AOD}$ là hai góc đối đỉnh, bằng 140° .

Theo câu 3, có:

$\widehat{COE}$ và $\widehat{FOD}$ là hai góc đối đỉnh, bằng 20° ;

$\widehat{AOE}$ và $\widehat{BOF}$ là hai góc đối đỉnh, bằng 20° .

Ta còn thấy $\widehat{EOB}$ và $\widehat{AOF}$ là hai góc đối đỉnh bằng $20^\circ + 140^\circ = 160^\circ$ và

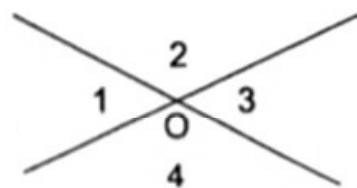
$\widehat{EOD}$ và $\widehat{COF}$ là hai góc đối đỉnh bằng $20^\circ + 140^\circ = 160^\circ$.

Ví dụ 2. Tính số đo các góc $\widehat{O}_1$; $\widehat{O}_2$; $\widehat{O}_3$; $\widehat{O}_4$ (hình 7) nếu biết:

$$1) \widehat{O}_1 = \frac{1}{2} \widehat{O}_2;$$

$$2) \widehat{O}_2 - \widehat{O}_1 = 40^\circ;$$

$$3) \widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = \frac{1}{2}(\widehat{O}_2 + \widehat{O}_4).$$



Hình 7

Lời giải

1) $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 180^\circ$ (vì hai góc kề bù), mà $\widehat{O}_1 = \frac{1}{2} \widehat{O}_2$ (theo đề bài) nên:

$$\frac{1}{2} \widehat{O}_2 + \widehat{O}_2 = 180^\circ \Rightarrow \frac{3}{2} \widehat{O}_2 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O}_2 = \frac{180^\circ \cdot 2}{3} = 120^\circ.$$

$$\widehat{O_1} = \frac{1}{2}\widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{O_1} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} = 60^\circ.$$

Vậy 4 góc đó là $\widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 60^\circ$; $\widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 120^\circ$

2) $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ$ (vì hai góc kề bù), lại có: $\widehat{O_2} - \widehat{O_1} = 40^\circ$ (theo đề bài), suy ra $2\widehat{O_2} = 220^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} = 110^\circ$.

Từ $\widehat{O_2} - \widehat{O_1} = 40^\circ \Rightarrow 120^\circ - \widehat{O_1} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} = 70^\circ$.

Vậy 4 góc đó là: $\widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 70^\circ$; $\widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 110^\circ$.

3) Ta có: $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = \frac{1}{2}(\widehat{O_2} + \widehat{O_4})$ (theo đề bài). (1)

Do $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_3}$ đối đỉnh, nên: $\widehat{O_1} = \widehat{O_3}$. (2)

Do $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_4}$ đối đỉnh, nên: $\widehat{O_2} = \widehat{O_4}$. (3)

Thay (2) và (3) vào (1), ta có: $2\widehat{O_1} = \frac{1}{2}2\widehat{O_2} \Rightarrow 2\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$. (4)

Vì: $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ$ (hai góc kề bù). (5)

Thay (4) vào (5), ta được: $\widehat{O_1} + 2\widehat{O_1} = 180^\circ \Rightarrow 3\widehat{O_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} = 60^\circ$.

Vậy $\widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 60^\circ$; $\widehat{O_2} = 2\widehat{O_1} = 60^\circ \cdot 2 = 120^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 120^\circ$.

III. BÀI TẬP

- Trong các câu sau đây, câu nào đúng? câu nào sai?
 - Hai góc có chung đỉnh và bằng nhau là hai góc đối đỉnh.
 - Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.
 - Hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia là hai góc đối đỉnh.
- Cho góc tù $\widehat{AOB}$. Vẽ $\widehat{BOC}$ và $\widehat{AOD}$ là hai góc kề bù với góc $\widehat{AOB}$. Hãy chứng tỏ hai góc $\widehat{BOC}$ và $\widehat{AOD}$ là hai góc đối đỉnh.
- Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M. Biết rằng $\widehat{BMC} = 3\widehat{CMA}$. Tính số đo của bốn góc $\widehat{AMC}$; $\widehat{BMC}$; $\widehat{BMD}$ và $\widehat{DMA}$ bằng hai cách.

4.
 - 1) Vẽ góc $\widehat{AOB} = 40^\circ$.
 - 2) Vẽ góc $\widehat{A'OB'}$ là góc đối đỉnh với góc $\widehat{AOB}$.
 - 3) Theo cách vẽ đó, ta có thêm cặp góc nào là hai góc đối đỉnh? Tại sao?
 - 4) Vẽ tia OI là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ và vẽ tia OI' là tia đối của tia OI . Chứng tỏ tia OI' là tia phân giác của góc $\widehat{A'OB'}$.
5. Hai đường thẳng EF và MN cắt nhau tại O tạo thành bốn góc (không kể góc bẹt). Biết tổng của ba góc (trong số bốn góc đó) bằng $250^\circ 46'$. Tính số đo của bốn góc đó bằng hai cách.
6. Cho điểm O trên đường thẳng AB . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là AB . Kẻ hai tia OC và OD sao cho $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = \widehat{COD}$. Trên nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng có chứa tia OC bờ là AB kẻ tia OE sao cho $\widehat{BOE} = 60^\circ$.
 - 1) Tia OC là tia phân giác của góc nào? Tại sao?
 - 2) Tia OD là tia phân giác của góc nào? Tại sao?
 - 3) Chứng tỏ $\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOE}$ là hai góc đối đỉnh.
 - 4) Tia OB là tia phân giác của góc nào? Tại sao?

DẠNG 2. Hai đường thẳng cắt nhau có góc tạo thành là góc vuông

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng thước thẳng và êke để vẽ chính xác: đường thẳng $a' \perp a$ và viết kí hiệu.
2. Làm quen sử dụng thước thẳng kẻ hai đường thẳng vuông góc bằng cách ước lượng (tương đối chính xác).
3. Sử dụng thước thẳng và êke vẽ thành thạo hai đường thẳng vuông góc trong các trường hợp:
 - Đường thẳng a và điểm O thuộc a . Vẽ đường thẳng $a' \perp a$ tại O .
 - Đường thẳng a và điểm O ngoài đường thẳng a . Vẽ đường thẳng $a' \perp a$ và qua O .
4. Tập kiểm tra xem hai đường thẳng có vuông góc với nhau không.
 - Bằng êke;
 - Bằng cách gấp tờ giấy;
 - Bằng cách ước lượng.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Để kiểm tra êke sản xuất có chính xác hay không, người ta làm như sau: Đặt một cạnh của êke trên cạnh của thước sao cho đỉnh êke trùng với điểm O cho trước trên thước (vị trí êke là AOB). Dùng thước vạch theo tia OA rồi đặt êke theo vị trí 2 (hình 8), vị trí êke là A'OB'. Kẻ tia OA'. Dùng thước đo góc đo khe hở giữa hai êke ta thấy $\widehat{AOA'} = 1^\circ$.

Hỏi êke được sản xuất có chính xác không? Độ sai lệch là bao nhiêu?

Lời giải

Ta thấy B, O, B' nằm trên cạnh của thước thẳng. Vậy 3 điểm B, O, B' thẳng hàng và $\widehat{BOB'} = 180^\circ$.

Xét nửa mặt phẳng bờ B'B có 3 góc kề nhau:

$$\widehat{B'OA'} + \widehat{A'OA} + \widehat{AOB} = \widehat{B'OB}. \quad (1)$$

Thay $\widehat{A'OA} = 1^\circ$ vào (1), ta có:

$$\widehat{B'OA'} + 1^\circ + \widehat{AOB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B'OA'} + \widehat{AOB} = 179^\circ.$$

Mà $\widehat{B'OA'} = \widehat{BOA}$ (vì cùng là góc của êke), vậy:

$$2\widehat{AOB} = 179^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 89^\circ 30'.$$

Kết luận: êke sản xuất chưa chính xác. Góc vuông của êke sai lệch là $30'$.

Nếu hai tia OA và OA' trùng nhau thì êke được sản xuất chính xác.

Ví dụ 2. Đường thẳng AB và đường thẳng MN cắt nhau tại O sao cho góc $\widehat{AOM}$ là góc tù. Tại O kẻ đường thẳng CD $\perp$ AB và đường thẳng EF $\perp$ MN.

1) Hãy chứng tỏ $\widehat{AOE} = \widehat{MOC}$.

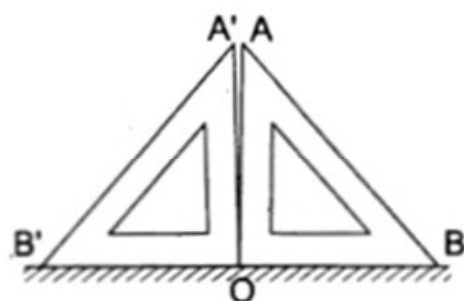
2) Trong hình vừa vẽ ta thấy có tám góc nhọn. Hãy chứng tỏ tám góc nhọn đó có thể được chia thành hai nhóm, mỗi nhóm có bốn góc nhọn bằng nhau.

3) Tìm điều kiện của $\widehat{AOM}$ để tám góc nhọn đó đều bằng nhau.

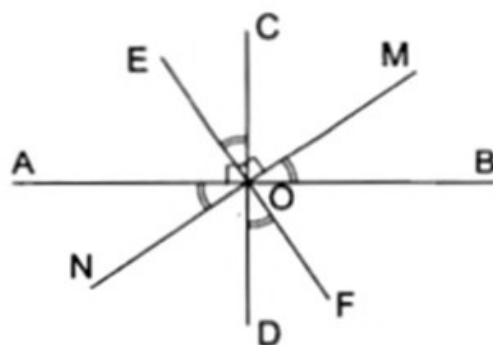
Lời giải

$$1) \quad \widehat{AOE} = \widehat{AOM} - 90^\circ. \quad (1)$$

$$\widehat{MOC} = \widehat{AOM} - 90^\circ. \quad (2)$$



Hình 8



Hình 9

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{AOE} = \widehat{MOC}$. (3)

2) $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}$ (hai góc đối đỉnh). (4)

$\widehat{MOC} = \widehat{DON}$ (hai góc đối đỉnh). (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra: $\widehat{AOE} = \widehat{MOC} = \widehat{BOF} = \widehat{DON}$.

Ta có: $\widehat{AOE} + \widehat{COE} = 90^\circ$ (theo đề bài). (6)

$\widehat{AOE} + \widehat{AON} = 90^\circ$ (theo đề bài). (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{COE} = \widehat{AON}$. (8)

Mà $\widehat{COE} = \widehat{DOF}$ (hai góc đối đỉnh). (9)

$\widehat{AON} = \widehat{MOB}$ (hai góc đối đỉnh). (10)

Từ (8), (9), (10) suy ra: $\widehat{COE} = \widehat{AON} = \widehat{DOF} = \widehat{MOB}$.

Vậy trong tám góc nhọn đó được chia thành hai nhóm mỗi nhóm có bốn góc nhọn bằng nhau.

3) Giả sử tám góc nhọn đó bằng nhau, mà tổng tám góc đó là 360° . Vậy mỗi góc có số đo là: $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{AOE} + \widehat{EOC} + \widehat{COM} = 135^\circ$.

Vậy ban đầu vẽ đường thẳng AB và MN cắt nhau tại O tạo góc $\widehat{AOM} = 135^\circ$. Tiếp tục vẽ theo đầu bài sẽ được tám góc bằng nhau.

III. BÀI TẬP

7. Cho đường thẳng d và điểm O ở ngoài đường thẳng d trên trang giấy trắng. Hãy gấp trang giấy sao cho nếp gấp qua điểm O và vuông góc với đường thẳng d.
8. Hãy vẽ đường thẳng a và b sao cho:
 - 1) Hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O theo một góc tùy ý.
 - 2) Hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O và vuông góc với nhau.
 - 3) Hai đường thẳng a và b không cắt nhau.
9. Cho hai góc $\widehat{MON}$ và $\widehat{NOP}$ là hai góc kề bù nhau. OE là tia phân giác của góc $\widehat{MON}$. Kẻ tia $OF \perp OE$ (OF nằm trong góc $\widehat{NOP}$). Chứng tỏ tia OF là tia phân giác của góc $\widehat{NOP}$.

10. Cho góc $\widehat{AOB}$ là góc tù. Về phía ngoài góc AOB kẻ các tia OC và OD theo thứ tự vuông góc với các tia OA và OB . Kẻ tia Ox là tia phân giác của góc $\widehat{COD}$ và tia Ox' là tia đối của tia Ox . Hãy chứng tỏ Ox' cũng là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.

11*. Qua điểm O cho trước, kẻ 4 đường thẳng phân biệt $a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4$ sao cho $a_1 \perp a_2 ; a_3 \perp a_4$.

1) Trong hình vẽ có bao nhiêu góc được tạo thành?

2) Trong các góc đó có bao nhiêu góc vuông? Bao nhiêu góc nhọn? Bao nhiêu góc tù? Bao nhiêu góc bẹt?

DẠNG 3. Đường trung trực của một đoạn thẳng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Muốn chứng tỏ d là đường trung trực của đoạn thẳng MN ta phải chứng tỏ nó thoả mãn cả hai điều kiện:

- Đường thẳng d qua I trong đó $MI = IN$ (I nằm giữa M và N).
- Đường thẳng $d \perp MN$ ($\widehat{MI d} = 90^\circ$).

2. **Cách vẽ:** Chẳng hạn vẽ đường trung trực của đoạn thẳng AB cho trước.

Cách 1: Dùng êke.

Bước 1: Tìm I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Bước 2: Đặt êke sao cho: Một cạnh góc vuông trùng với đoạn thẳng AB . Đỉnh góc vuông của êke trùng với điểm I .

Bước 3: Kẻ đường thẳng theo cạnh góc vuông thứ hai của êke.

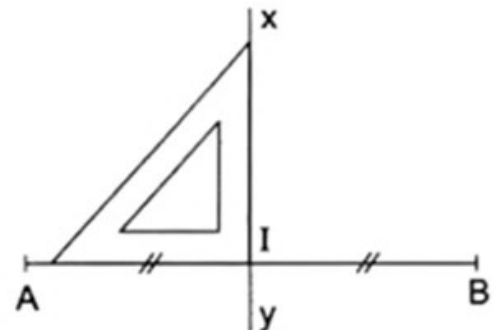
Ta có xy là đường trung trực của đoạn thẳng AB (hình 10).

Cách 2: Dùng thước đo góc.

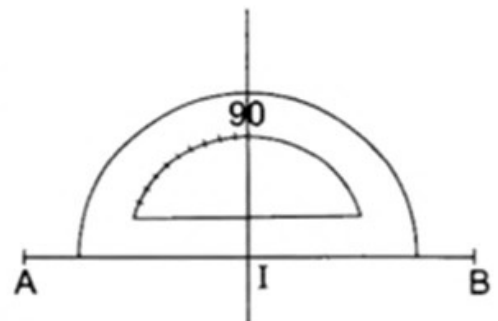
Bước 1: Như trên.

Bước 2: Đặt thước đo góc sao cho cạnh của thước trùng với đoạn thẳng AB . Tâm của thước trùng với điểm I .

Bước 3: Đánh dấu vạch 90° và nối điểm đó với I (hình 11).



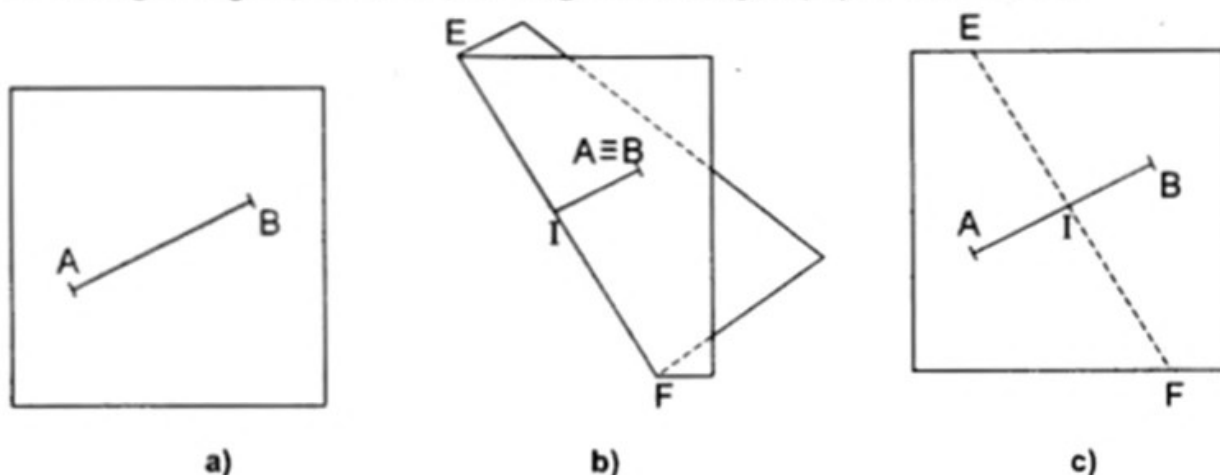
Hình 10



Hình 11

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Đoạn thẳng AB cho trước trên tờ giấy trắng (hình 12a). Một học sinh tìm đường trung trực của đoạn AB bằng cách: gấp tờ giấy trắng sao cho điểm A trùng với điểm B. Được nếp gấp trên trang giấy, em nói nếp gấp đó là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Đúng hay sai? Giải thích.



Hình 12

Lời giải

Giải thích: Gấp sao cho điểm A trùng với điểm B và điểm I cố định, vậy $IA \equiv IB$ suy ra $IA = IB$ (hình 12b) và nếp gấp là EF.

– Giở trang giấy trở lại ban đầu (hình 12c) nếp gấp là EF ta có $\widehat{AIE} = \widehat{EIB}$.

Mà $\widehat{AIE} + \widehat{EIB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Suy ra $\widehat{AIE} = \widehat{EIB} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

– Nếp gấp EF thỏa mãn hai điều kiện:

- Qua I và $AI = IB$.
- $\widehat{AIE} = 90^\circ$.

Vậy EF là đường trung trực của AB.

Ví dụ 2. Trên tia Ox ta đặt các điểm M, N, I và P sao cho $OP = 2OM$, $ON = \frac{1}{4}OP$, $OI = 3ON$. Biết $OP = 10\text{cm}$.

- 1) Tìm độ dài các đoạn OI, OM, ON;
- 2) Xác định vị trí các điểm M, N, I, P trên tia Ox (theo thứ tự nào).
- 3) Từ điểm Q thuộc nửa mặt phẳng bờ là Ox, biết $QM \perp Ox$. Nối các điểm QO, QP, QI, QN. Vậy tia QM nằm giữa hai tia nào? Tại sao?
- 4) QM là đường trung trực của đoạn thẳng nào? Tại sao?

Lời giải

1) $OP = 10\text{cm}$ và $OP = 2OM$ (theo đề bài). Vậy $2OM = 10 \Rightarrow OM = 5\text{ (cm)}$.

$$ON = \frac{1}{4}OP \Rightarrow ON = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2,5\text{ (cm)}.$$

$$OI = 3ON \Rightarrow OI = 3 \cdot 2,5 = 7,5\text{ (cm)}.$$

2) Các tia OP, OM, ON, OI có chung gốc O (hình 13), có độ dài theo thứ tự:

$$2,5 < 5 < 7,5 < 10 \Rightarrow ON < OM < OI < OP$$

Vậy 4 điểm nằm trên Ox theo thứ tự: N, M, I, P .

3) Theo thứ tự trên, tức là:

- $ON < OM$, suy ra N nằm giữa M và O .
- $ON < OM < OI$, suy ra M nằm giữa hai điểm N và I vậy tia QM nằm giữa hai tia QN và QI .
- $ON < OM < OP$, suy ra M nằm giữa hai điểm N và P vậy tia QM nằm giữa hai tia QN và QP .
- $OM < OI$, vậy M nằm giữa hai điểm O và I suy ra tia QM nằm giữa hai tia QO và QI .
- $OM < OP$, vậy M nằm giữa hai điểm O và P suy ra tia QM nằm giữa hai tia QO và QP .

4) Theo câu 2) ta có thứ tự các điểm nằm trên tia Ox là O, N, M, I, P .

Suy ra M nằm giữa O và P

$$\Rightarrow OM + MP = OP$$

$$5 + MP = 10 \Rightarrow MP = 5\text{ (cm)}.$$

Vậy $OM = MP$.

Mà $QM \perp OP$ (đề bài).

Suy ra QM là đường trung trực của đoạn thẳng OP .

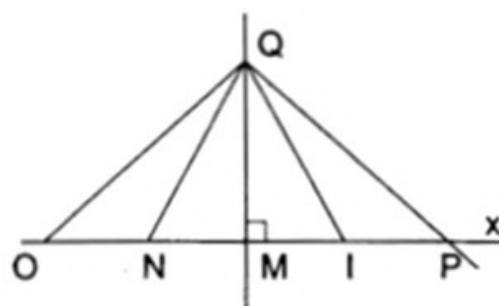
- Vì N nằm giữa O và M nên $ON + NM = OM$.

$$\Rightarrow 2,5 + NM = 5 \Rightarrow NM = 2,5\text{ (cm)}.$$

Vì M nằm giữa O và I nên $OM + MI = OI$

$$\Rightarrow 5 + MI = 7,5 \Rightarrow MI = 2,5\text{ (cm)}.$$

Vậy $NM = MI$.



Hình 13

Mà $QM \perp Ox$ (đề bài) $\Rightarrow QM \perp NI$ (N, I cùng nằm trên tia Ox). (2)

Từ (1) và (2) suy ra QM là đường trung trực của NI .

III. BÀI TẬP

12. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và tia Oz nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Trong nửa mặt phẳng bờ có chứa Ox , không chứa tia Oz vẽ góc $\widehat{mOx} = \widehat{zOy}$ và trong nửa mặt phẳng bờ có chứa tia Oy , không chứa tia Oz vẽ góc $\widehat{yOn} = \widehat{xOz}$. Trên tia Om đặt điểm M , trên tia On đặt điểm N sao cho $OM = ON$.
- 1) Chứng tỏ rằng hai tia Om và On là hai tia đối nhau.
 - 2) Chứng tỏ Oz là đường trung trực của đoạn MN .
13. Cho $\triangle ABC$ có ba góc trong tam giác là ba góc nhọn. Sử dụng thước và êke vẽ chính xác ba đường trung trực của ba cạnh AB, BC, AC và cho nhận xét.
14. Coi kim phút và kim giờ của đồng hồ là hai cạnh của góc. Hỏi số đo của góc lúc đồng hồ chỉ: 1h; 3h; 4h; 6h; 9h và 10h?
15. Cho góc $\widehat{AOB} = \alpha^\circ$ ($90^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$), vẽ các tia $OM \perp OB$ và $ON \perp OA$.
- 1) Chứng tỏ: $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$.
 - 2) Vẽ tia Ox và Oy theo thứ tự là tia phân giác của các góc AOM và BON ; Chứng tỏ $Ox \perp Oy$.
 - 3) Trong hình vẽ, những cặp góc nhọn nào có cạnh tương ứng vuông góc?
16. Cho góc $\widehat{xOy} = \alpha$ ($90^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$) trong nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox , kẻ $Oz \perp Ox$. Gọi OE là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$, biết $\widehat{zOE} = 20^\circ$. Tính $\widehat{xOy}$.

Chủ đề 2

QUAN HỆ GIỮA BA ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

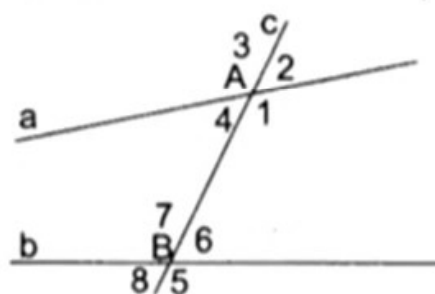
1. Cho trước hai đường thẳng a và b tùy ý và đường thẳng thứ ba (đường thẳng c) cắt đường thẳng a tại điểm A , tại A có bốn góc nhọn được tạo thành. Bốn góc này có mối quan hệ là đôi một đối đỉnh.

Tương tự đường thẳng c cắt đường thẳng b tại điểm B và tại B cũng có bốn góc nhọn được tạo thành. Bốn góc này đôi một đối đỉnh.

Bây giờ ta xét xem một góc tại A tương ứng với một góc tại B có quan hệ như thế nào? (hình 14)

• $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_7}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_6}$ gọi là hai góc so le trong.

• Các cặp $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_5}$; $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_6}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_7}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_8}$ là các cặp góc đồng vị.



Hình 14

2. Cho đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b . Nếu trong các cặp góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì:

- Cặp góc so le trong còn lại bằng nhau.
- Hai cặp góc đồng vị bằng nhau.

3. Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

4. Cho đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b . Nếu trong các cặp góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau. Kí hiệu $a \parallel b$.

* Đây là dấu hiệu nhận ra hai đường thẳng song song (thừa nhận).

5. **Tiên đề Ôclit:** Qua một điểm cho trước ở ngoài đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

6. Ngược lại: Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng $a \parallel b$ thì:

- Hai góc so le trong bằng nhau.
- Hai góc đồng vị bằng nhau.
- Hai góc trong cùng phía bù nhau (tính chất hai đường thẳng song song).

7. Từ vuông góc đến song song:

– Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

– Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.

– Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Góc tạo bởi đường thẳng thứ ba cắt hai đường thẳng.
Góc tạo bởi đường thẳng cho trước cắt hai đường thẳng.

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Trong số tám góc tạo thành nhận ra các cặp so le trong hoặc các cặp góc đồng vị.

2. Từ dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song (kiến thức cần nhớ (4)), ta có thể chứng minh hai đường thẳng song song bằng hai cách:

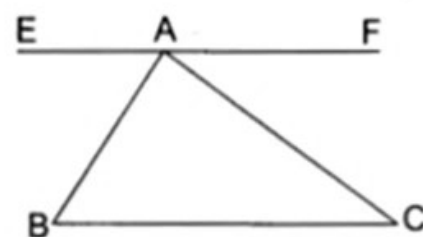
a) *Cách 1:* Chứng minh hai góc so le trong bằng nhau.

b) *Cách 2:* Chứng minh hai góc đồng vị bằng nhau.

3. Ý nghĩa của tiên đề Ôclít:

a) Dựa vào tiên đề để chứng tỏ ba điểm thẳng hàng.

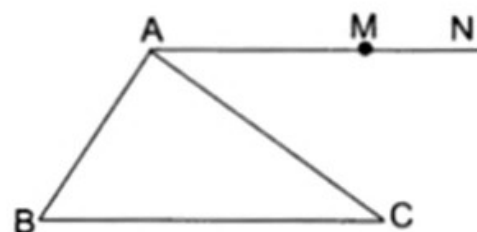
Chẳng hạn trong hình 15, nếu ta chứng tỏ được $AE \parallel BC$, $AF \parallel BC$ thì kết luận E, A, F thẳng hàng (cùng nằm trên một đường thẳng). Vì theo tiên đề Ôclít qua điểm A chỉ có một đường thẳng song song với BC.



Hình 15

b) Dựa theo tiên đề Ôclít ta có thể chứng tỏ hai tia trùng nhau.

Chẳng hạn trong hình 16, nếu ta chứng tỏ được $AM \parallel BC$ và $AN \parallel BC$ thì kết luận hai tia AM và AN trùng nhau. (Vì theo tiên đề qua A chỉ kẻ được một tia song song với BC).



Hình 16

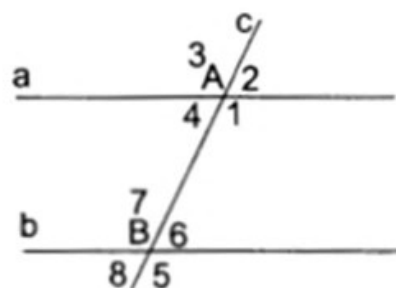
4. Từ hai dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song ở trên ta có thể chứng tỏ thêm các dấu hiệu khác:

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có:

- Cặp góc so le ngoài bằng nhau.
- Cặp góc trong cùng phía bù nhau.
- Cặp góc ngoài cùng phía bù nhau.

Nếu xảy ra một trong ba dấu hiệu trên thì kết luận $a \parallel b$.

Thật vậy:



Hình 17

Trường hợp 1: Cho $\widehat{A_3} = \widehat{B_5}$ chứng tỏ $a \parallel b$ (hình 17).

Tại A có $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$ (đối đỉnh) (1); Tại B có: $\widehat{B_7} = \widehat{B_5}$ (đối đỉnh) (2).

So sánh (1) và (2) có: $\widehat{A_1} = \widehat{B_7}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong nên theo cách 1 ta suy ra $a \parallel b$.

Trường hợp 2: Cho $\widehat{A_1} + \widehat{B_6} = 180^\circ$ chứng tỏ $a \parallel b$.

Để thấy, tại A có: $\widehat{A_1} + \widehat{A_4} = 180^\circ$ (hai góc kề bù nhau). Suy ra: $\widehat{A_4} = \widehat{A_6}$, mà $\widehat{A_4}$ và $\widehat{A_6}$ ở vị trí so le trong nên theo cách 1 ta có: $a \parallel b$.

Trường hợp 3: Cho $\widehat{A_2} + \widehat{B_5} = 180^\circ$, chứng tỏ $a \parallel b$. (Chứng minh tương tự như trường hợp 2)

Vậy đến đây ta có năm cách để chứng minh hai đường thẳng $a \parallel b$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong hình 18, cho $\widehat{A_4} = \widehat{B_2}$.

1) Hãy chứng tỏ: $\widehat{A_1} = \widehat{B_3}$.

2) Hãy chứng tỏ: $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$; $\widehat{A_3} = \widehat{B_3}$; $\widehat{A_4} = \widehat{B_4}$; $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.

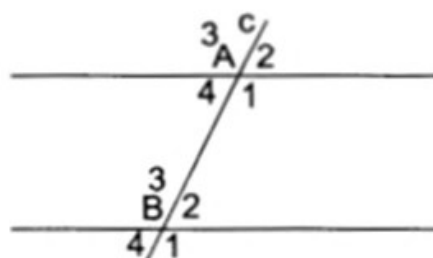
3) Có nhận xét gì về quan hệ giữa hai góc của các cặp góc đó, từ đó rút ra kết luận gì?

Lời giải

1) Tại A, ta có $\widehat{A_1}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{B_3}$ là hai cặp góc kề bù nhau, nên:

$$\widehat{A_4} + \widehat{A_1} = 180^\circ; \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 180^\circ.$$

Mà theo đề bài $\widehat{A_4} = \widehat{B_2}$, suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{B_3}$.



Hình 18

2) • Tại A có:

$$\widehat{A_2} = \widehat{A_4} \text{ (góc đối đỉnh) và } \widehat{B_2} = \widehat{A_4} \text{ (đề bài cho).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{A_2} = \widehat{B_2}.$$

• Tại A có $\widehat{A_1} = \widehat{B_3}$ (theo câu 1) và $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$ (hai góc đối đỉnh).

$$\text{Vậy } \widehat{A_3} = \widehat{B_3}. \quad (*)$$

• Tại B có $\widehat{B_4} = \widehat{B_2}$ (góc đối đỉnh) và $\widehat{A_4} = \widehat{B_2}$ (đầu bài cho).

$$\text{Vậy } \widehat{A_4} = \widehat{B_4}.$$

• Tại B có $\widehat{B_1} = \widehat{B_3}$ (đối đỉnh) và tại A có $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$ (đối đỉnh), mà $\widehat{A_3} = \widehat{B_3}$ (theo (*)). Vậy $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.

3) *Nhận xét:* Trong 6 cặp góc bằng nhau trên có:

a) Hai cặp góc là so le: $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_3}$.

b) Bốn cặp góc đồng vị: $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_4}$; $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$.

Vậy kết luận: Nếu có một cặp góc so le bằng nhau, thì cặp góc so le còn lại cũng bằng nhau và các cặp góc đồng vị bằng nhau.

Ví dụ 2. Trong hình 19a gồm các góc đã biết bằng α° và 100° .

Tính các góc còn lại tại M và N.

Lời giải

$$\text{Đầu bài cho } \widehat{P_4} = \alpha^\circ; \widehat{Q_2} = \alpha^\circ.$$

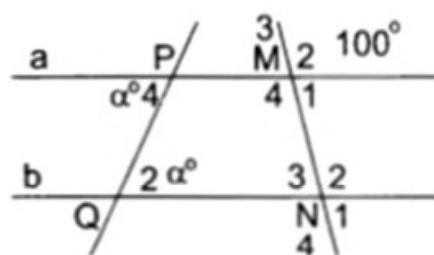
Vậy $\widehat{P_4} = \widehat{Q_2}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong nên: $a \parallel b$.

Do $a \parallel b$ nên $\widehat{M_2} = \widehat{N_2} = 100^\circ$ (đồng vị).

– Tại M ta có $\widehat{M_2} = \widehat{M_4} = 100^\circ$ (góc đối đỉnh).

Mà $\widehat{M_2} + \widehat{M_3} = 180^\circ$ (hai góc kề bù nhau), nên ta có:

$$100^\circ + \widehat{M_3} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{M_3} = 80^\circ.$$



Hình 19a

Suy ra $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_1 = 80^\circ$ (góc đối đỉnh).

– Tại N ta có $\widehat{N}_2 = \widehat{N}_4 = 100^\circ$ (góc đối đỉnh).

Mà $\widehat{N}_2 + \widehat{N}_3 = 180^\circ$ (hai góc kề bù nhau), nên ta có:

$$100^\circ + \widehat{N}_3 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{N}_3 = 80^\circ.$$

Suy ra $\widehat{N}_3 = \widehat{N}_1 = 80^\circ$ (2 góc đối đỉnh).

III. BÀI TẬP

1. Trong các câu sau, câu nào đúng (hình 19b) ?

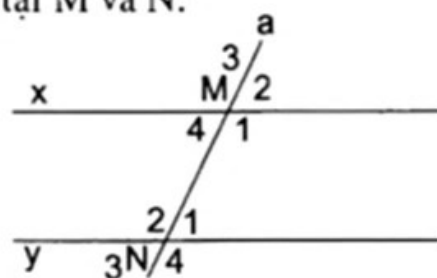
Đường thẳng a cắt hai đường thẳng $x \parallel y$ lần lượt tại M và N:

1) Hai góc $\widehat{M}_4$ và $\widehat{N}_1$ bằng nhau.

2) Hai góc $\widehat{M}_2$ và $\widehat{N}_2$ bằng nhau.

3) Hai góc $\widehat{M}_3$ và $\widehat{N}_2$ bằng nhau.

4) Hai góc $\widehat{M}_1$ và $\widehat{N}_3$ bằng nhau.



Hình 19b

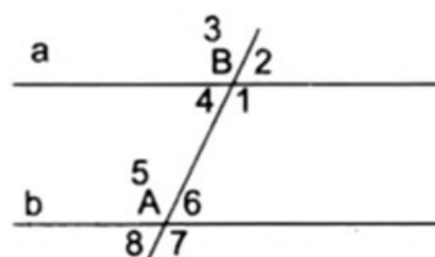
2. Hai đường thẳng a và b có song song với nhau không, nếu có một trong các điều kiện sau được thoả mãn ? (hình 20).

1) $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_6$.

2) $\widehat{A}_4 = \widehat{B}_6$.

3) $\widehat{A}_3 = \widehat{B}_7$.

4) $\widehat{A}_4 + \widehat{B}_5 = 180^\circ$.



Hình 20

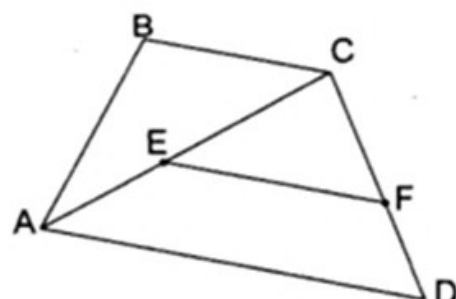
3. Trong hình 21, hãy cho biết:

1) $\widehat{CAD}$ đồng vị với góc nào và so le trong với góc nào?

2) $\widehat{ADC}$ đồng vị với góc nào?

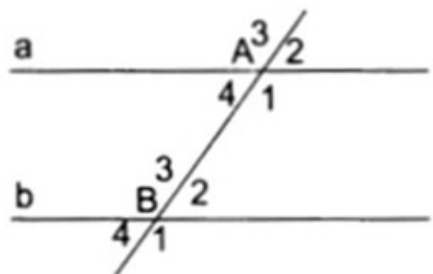
3) $\widehat{ABC}$ và $\widehat{DAB}$ là 2 góc thế nào với nhau ?

$\widehat{BCD}$ và $\widehat{EFD}$ là 2 góc thế nào với nhau ?



Hình 21

4. Trong hình 22, biết $\widehat{A_1} = \widehat{B_3} = 120^\circ$. Tính các góc nhọn có đỉnh là A và B còn lại trong hình vẽ.



Hình 22

5. Cho $\triangle ABC$, tia phân giác AM của góc $\widehat{BAC}$ (M thuộc BC). Từ M kẻ $MP \parallel AB$ và kẻ $MQ \parallel AC$ (P và Q thuộc AC và AB). Chứng tỏ rằng MA cũng là tia phân giác của góc $\widehat{QMP}$.
6. Cho $\triangle ABC$ có tia AM là tia đối của tia AB. Từ A kẻ tia AN là tia phân giác của góc MAC. Trên cạnh AC lấy điểm F tùy ý. Từ F kẻ $FP \parallel AB$ (P thuộc BC) và $FE \parallel AN$ (E thuộc cạnh AB). Hãy chứng tỏ EF cũng là tia phân giác của góc $\widehat{AFP}$.
7. Cho hai đường thẳng $xy \parallel x'y'$, đường thẳng d cắt xy và $x'y'$ tại A và B. Kẻ tia phân giác AA' của $\widehat{xAB}$ cắt $x'y'$ tại A' và tia phân giác BB' của $\widehat{ABx'}$ cắt xy tại B' . Hãy chứng tỏ rằng:

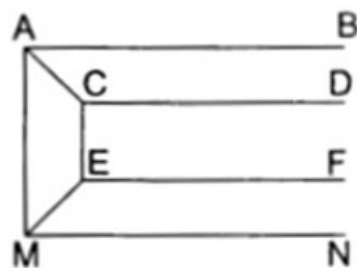
1) $AA' \parallel BB'$.

2) $\widehat{AA'B} = \widehat{AB'B}$.

8. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{ABC} = m^\circ$, $\widehat{ACB} = n^\circ$ ($0^\circ < n^\circ, m^\circ < 90^\circ$). Tại A kẻ phía ngoài góc $\widehat{BAC}$ dựng các góc $\widehat{BAx} = m^\circ$ và góc $\widehat{CAy} = n^\circ$. Hãy chứng tỏ hai tia Ax và Ay nằm trên một đường thẳng.
9. Hình 23 là khung cửa của người thợ mộc đã đóng và kiểm tra thấy các góc:

$$\widehat{MAB} = \widehat{AMN} = \widehat{DEC} = \widehat{CEF} = 90^\circ \text{ và cắt các góc } \widehat{BAC} = \widehat{CAM}, \quad \widehat{AME} = \widehat{EMN}, \quad \widehat{ACD} = \widehat{ACE}, \quad \widehat{FEM} = \widehat{MEC}.$$

Hãy chứng tỏ các cạnh $AB \parallel CD$; $CE \parallel AM$ và $EF \parallel MN$.



Hình 23

10. Đường thẳng d_1 cắt 2 đường thẳng $AB \parallel CD$ tại E và F. Lấy điểm M trên đường thẳng AB. Tại M trên nửa mặt phẳng bờ có chứa các đường thẳng AB, CD vẽ góc $\widehat{AMN} = \widehat{EFD} = \alpha^\circ$ ($0^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$) (điểm N thuộc CD). Hãy chứng tỏ: $MN \parallel EF$.

DẠNG 2. Quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Đến đây ta có thêm một dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song là:

- Nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song.
- Hoặc nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

2. Cần làm quen việc vẽ bằng tay (không cần êke) nhanh nhưng tương đối chính xác: 2 đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc để sử dụng khi làm nháp (đỡ mất thời gian).

3. Để dễ nhận ra hai góc có cạnh tương ứng song song hay hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chỉ ra hai cạnh của góc này và hai cạnh của góc kia.

Bước 2: Từ đó dựa theo dấu bài để xem quan hệ tương ứng giữa chúng (có thể dấu bài cho trực tiếp, có thể phải suy diễn từ dấu bài, tập nhận xét để tìm lời giải).

4. Quan hệ giữa tính song song và vuông góc ở đây là:

- Nếu $c \perp a$ và $c \perp b$ thì kết luận $a \parallel b$ (sử dụng vuông góc để kết luận song song).
- Hoặc nếu $a \perp c$ và $a \parallel b$ thì kết luận $b \perp c$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ là hai góc kề bù nhau OE và OF là hai tia phân giác của hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$. Trên OF lấy điểm H. Tại H kẻ đường thẳng vuông góc với OF cắt Oy tại M và Oz tại N. Chứng tỏ rằng $\triangle OMN$ có $\widehat{OMN} = \widehat{ONM}$.

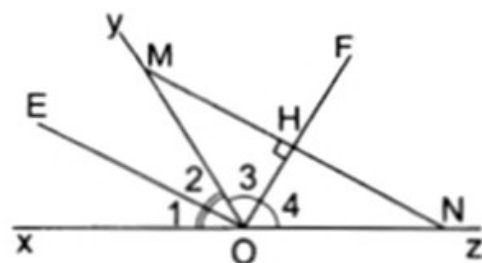
Lời giải

OE là tia phân giác $\widehat{xOy}$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$. (1)

OF là tia phân giác $\widehat{yOz}$ nên $\widehat{O_4} = \widehat{O_3}$. (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2), ta có:

$$\widehat{O_1} + \widehat{O_4} = \widehat{O_2} + \widehat{O_3}.$$



Hình 24

Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_4} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 180^\circ$, vậy: $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ \Rightarrow OF \perp OE$.

Ta có $OF \perp MN$ (theo đề bài). Vậy $OE \parallel MN$ (do OE và MN cùng vuông góc với OF), suy ra: $\widehat{O_2} = \widehat{OMN}$ (so le trong); $\widehat{O_1} = \widehat{ONM}$ (đồng vị).

Mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (theo đầu bài), vậy: $\widehat{OMN} = \widehat{ONM}$.

Ví dụ 2. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$ (hình 25). Trên Oy lấy điểm M . Từ M kẻ $MN \perp Ox$ (N thuộc Ox); Từ N kẻ $NP \perp Oy$ (P thuộc Oy). Tại P kẻ $PQ \perp Ox$ (Q thuộc Ox); Tại Q kẻ $QE \perp Oy$ (E thuộc Oy).

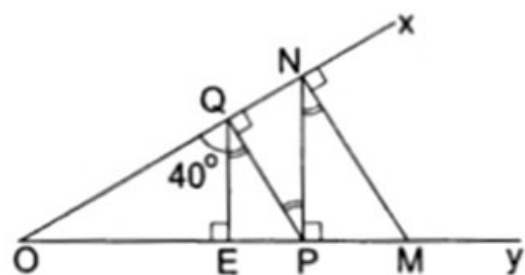
1) Những cặp đường thẳng nào song song? Tại sao?

2) Biết số đo của góc $\widehat{OQE} = 40^\circ$. Tính số đo của các góc nhọn trong hình vẽ (trừ $\widehat{xOy}$).

Lời giải

1) Theo đầu bài: $MN \perp Ox$ và $PQ \perp Ox$ vậy $MN \parallel PQ$ (vì cùng vuông góc với Ox).

Cũng theo đầu bài: $NP \perp Oy$, $QE \perp Oy$ vậy $NP \parallel QE$ (vì cùng vuông góc với Oy).



Hình 25

2) * $PQ \perp Ox$ nên: $\widehat{OQE} + \widehat{EQP} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{OQE} = 40^\circ$, vậy: $40^\circ + \widehat{EQP} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EQP} = 50^\circ$.

$$\widehat{EQP} = \widehat{QPN} = 50^\circ \text{ (2 góc so le trong)}$$

$$\widehat{QPN} = \widehat{PNM} = 50^\circ \text{ (2 góc so le trong).}$$

* $NP \perp Oy$ nên: $\widehat{NPQ} + \widehat{QPE} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{QPN} = 50^\circ$ (câu 1), vậy $\widehat{EPQ} + 50^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EPQ} = 40^\circ$.

$$\widehat{OQE} = \widehat{ONP} = 40^\circ \text{ (2 góc đồng vị)}$$

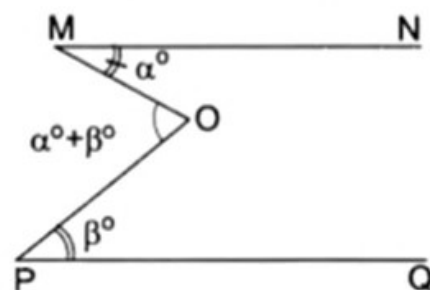
$$\widehat{EPQ} = \widehat{OMN} = 40^\circ \text{ (2 góc đồng vị).}$$

III. BÀI TẬP

11. Vẽ đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b , đường thẳng c vuông góc với đường thẳng b . Hãy chứng tỏ rằng đường thẳng a và đường thẳng c song song với nhau.

12. Vẽ đường thẳng a song song với đường thẳng b , đường thẳng c vuông góc với đường thẳng b . Hãy chứng tỏ rằng đường thẳng c vuông góc với đường thẳng a .
13. Vẽ đường thẳng a song song với đường thẳng b , đường thẳng c song song với đường thẳng b . Hãy chứng tỏ đường thẳng a song song với đường thẳng c .
14. Hãy nói cách vẽ 3 đường thẳng a, b, c sao cho: Đường thẳng c qua điểm M cho trước còn đường thẳng a và b không qua điểm M nhưng $a \parallel b$. Có mấy trường hợp xảy ra? Vẽ từng trường hợp.
15. Trên cạnh AB của $\triangle ABC$, lấy điểm E và điểm M . Từ E kẻ $EF \parallel BC$ (F thuộc AC), từ điểm M kẻ $MN \parallel BC$ (N thuộc AC).
- 1) Hãy chứng tỏ $EF \parallel MN$.
 - 2) Trên nửa mặt phẳng bờ có chứa cạnh AC không chứa điểm B dựng góc $\widehat{CAx} = \widehat{ACB}$. Hãy chứng tỏ $Ax \parallel MN$.
16. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Từ điểm I trong góc đó, kẻ $In \parallel Ox$ và $Im \parallel Oy$
- 1) Hãy chứng tỏ $\widehat{xOy} = \widehat{Im}$.
 - 2) Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa các cạnh của hai góc đó?
 - 3) Nếu thay góc $\widehat{xOy}$ là góc tù thì những kết luận trên có còn đúng không? Tại sao?
17. Có hai đường thẳng a và b cắt nhau tại một điểm ở ngoài trang giấy. Làm thế nào để đo góc hợp bởi hai đường thẳng đó?
- 18*. Cho $\triangle ABC$ có ba góc trong tam giác đều là góc nhọn. Từ A kẻ $AH \perp BC$ (H thuộc BC). Từ C kẻ $CK \perp AB$ (K thuộc AB). Tại ba điểm A, B, C kẻ ba đường thẳng $B'C' \parallel BC$; $A'C' \parallel AC$; $A'B' \parallel AB$. Chúng cắt nhau tại $A'; B'; C'$.
- 1) Có nhận xét gì về 3 góc của $\triangle ABC$ tương ứng với 3 góc của $\triangle A'B'C'$? Hãy chứng tỏ nhận xét đó là đúng.
 - 2) Tìm trong hình vẽ những góc có cạnh tương ứng vuông góc. Chứng tỏ các góc đó bằng nhau.

- 19*. Trong hình vẽ 26, biết: $\widehat{NMO} = \alpha^\circ$; $\widehat{OPQ} = \beta^\circ$;
 $\widehat{MOP} = \alpha^\circ + \beta^\circ$ ($0^\circ < \alpha^\circ; \beta^\circ < 90^\circ$).
 Hãy chứng tỏ $MN \parallel PQ$.



Hình 26

Mở rộng kiến thức

TIÊN ĐỀ - ĐỊNH LÝ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. **Tiên đề Occlit:** Qua một điểm cho trước ở ngoài đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

2. **Định lý:** Một tính chất được khẳng định là đúng hoàn toàn bằng suy luận là một định lý. Mỗi định lý thường được phát biểu dưới dạng: “Nếu ... thì ...” phần nằm giữa từ “nếu” và từ “thì” là phần giả thiết. Phần nằm sau từ “thì” là phần kết luận.

3. **Chứng minh một định lý:** Là từ giả thiết kết hợp sử dụng các định nghĩa, tính chất và những định lý đã được học trước nó và dùng phương pháp suy luận để rút ra kết luận.

Ví dụ 1. Chứng minh định lý: “Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau”.

Hướng dẫn: Giả thiết là: $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_3}$ là hai góc đối đỉnh; Kết luận: $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$.

Chứng minh

– Theo định nghĩa về hai góc đối đỉnh thì:

Tia Ox và Oy nằm trên một đường thẳng.

Tia Ox' và Oy' nằm trên một đường thẳng.

– Theo khái niệm về hai góc kề bù nhau, ta có:

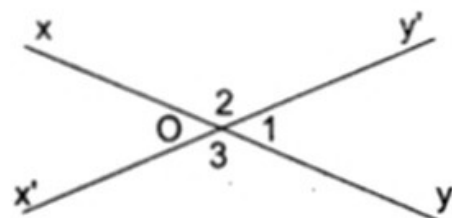
$\widehat{O_1}$ kề bù với $\widehat{O_2}$; $\widehat{O_1}$ kề bù với $\widehat{O_3}$. Vậy ta có:

$$\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ \text{ (tính chất hai góc kề bù).} \quad (1)$$

$$\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 180^\circ \text{ (tính chất hai góc kề bù).} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{O_1} + \widehat{O_3}$. Vậy $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$.

Từ giả thiết cho $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_3}$ là hai góc đối đỉnh bằng phương pháp suy luận ta đã đi đến kết luận là $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$.



Hình 27

II. KĨ NĂNG CẦN ĐẠT

1. Vận dụng tiên đề Ôclit để:

+ Vẽ hai đường thẳng song song.

+ Vẽ hai đường thẳng vuông góc với đường thẳng cho trước.

Vận dụng vào chứng minh:

+ Đường thẳng đi qua 1 điểm và song song với đường thẳng cho trước.

+ Đường thẳng đi qua 1 điểm và vuông góc với đường thẳng cho trước.

+ Chứng minh: Ba điểm thẳng hàng.

2. Cho một định lí, học sinh cần thành thực ba yêu cầu sau:

– *Yêu cầu 1*: Phát biểu bằng ngôn ngữ thông thường (lí thuyết).

– *Yêu cầu 2*: Phân biệt được đâu là giả thiết, đâu là kết luận.

– *Yêu cầu 3*: Vẽ hình và dùng kí hiệu toán học để thể hiện định lí trên hình vẽ. Từ đó dùng kí hiệu toán học để ghi giả thiết và kết luận (thực hành).

Cả ba yêu cầu trên đều rất quan trọng.

3. Chứng minh một định lí bằng phương pháp suy luận. Để đảm bảo cho suy luận có căn cứ thì khi đưa ra mỗi dữ kiện chứng minh phải chỉ rõ căn cứ (lí do). Căn cứ của nó là những khái niệm, định nghĩa và những tính chất đã được học trước đó.

III. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

20. 1) Phát biểu định nghĩa về hai góc đối đỉnh.

2) Phát biểu tính chất của hai đường phân giác của hai góc kề bù nhau.

3) Phát biểu định lí về dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.

4) Phát biểu định lí về tính chất của hai đường thẳng song song.

21. Ghi giả thiết và kết luận của mệnh đề (3) và (4) (trong bài 20).

Cho biết mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận của hai mệnh đề đó.

22. Tính chất của hai góc có cạnh tương ứng song song được phát biểu: Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì:

– Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.

– Chúng bù nhau nếu góc này nhọn góc kia tù.

Vẽ hình, ghi giả thiết, kết luận của tính chất đó.

23. Chứng minh định lý về tính chất 2 góc có cạnh tương ứng vuông góc

Nếu 2 góc có cạnh tương ứng vuông góc thì:

– Chúng bằng nhau nếu cùng nhọn hoặc cùng tù.

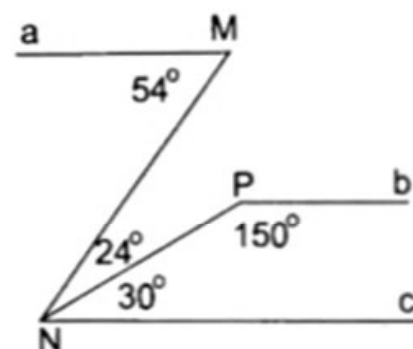
– Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù.

24. Cho $\widehat{xOy} = 70^\circ$. Lấy điểm A trên Ox, điểm B trên Oy. Từ A kẻ đường thẳng song song với OB, từ B kẻ đường thẳng song song với OA, chúng cắt nhau tại C.

1) Tính số đo của góc $\widehat{ACB}$.

2) Nối O với C. Hãy chứng tỏ $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$ có các góc tương ứng bằng nhau.

25. Số đo các góc đã biết và được ghi trong hình vẽ 28. Hỏi những đường thẳng nào song song với nhau? Hãy chứng tỏ điều đó đúng.



Hình 28

26. Trong hình 29, cho $\widehat{N} = \widehat{O}$; $\widehat{Q} = 90^\circ$; $\widehat{B} = 50^\circ$.

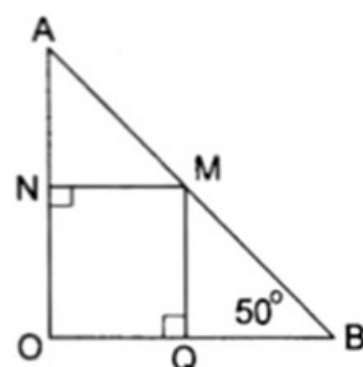
1) Hãy chứng tỏ góc $\widehat{NMQ} = 90^\circ$.

2) Tính các góc $\widehat{AMN}$; $\widehat{QMB}$.

27. Trong hình 30 biết $AB \parallel CD$ và $\widehat{BAE} = 140^\circ$; $\widehat{AEC} = 120^\circ$.

1) Tính số đo của góc $\widehat{ECD}$.

2) Hãy chứng tỏ $\widehat{EAB} + \widehat{ECD} + \widehat{AEC} = 360^\circ$.

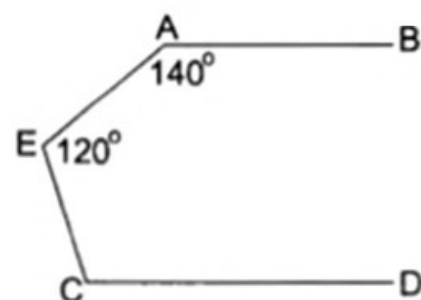


Hình 29

28*. Chứng tỏ rằng: Hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

29*. Chứng tỏ rằng:

Nếu có hai đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một góc khác góc bẹt (mỗi đường thẳng vuông góc với một cạnh của góc) thì hai đường thẳng đó cắt nhau tại một điểm.



Hình 30

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nắm chắc các khái niệm:

+ Thế nào là hai góc đối đỉnh.

+ Thế nào là đường trung trực của một đoạn thẳng.

+ Thế nào là hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc.

+ Thế nào là hai góc có cạnh tương ứng song song, hai góc có cạnh tương ứng vuông góc.

+ Hiểu về tiên đề Ôclit, hiểu định lý là gì?

2. Các tính chất:

+ Tính chất hai góc đối đỉnh.

+ Tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng.

+ Tính chất hai đường thẳng song song.

+ Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.

+ Quan hệ giữa ba đường thẳng: Ba đường thẳng song song; Hai đường thẳng song song, đường thứ 3 vuông góc với một trong hai đường thẳng song song đó.

II. KĨ NĂNG CẦN ĐẠT

1. Vẽ hình theo dấu bài. Sử dụng kí hiệu toán học để ghi giả thiết, kết luận của một bài toán hoặc một định lý.

2. Vận dụng linh hoạt và sáng tạo các khái niệm, tính chất, định lý, tiên đề đã học để chứng minh một bài toán hoặc một định lý.

III. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

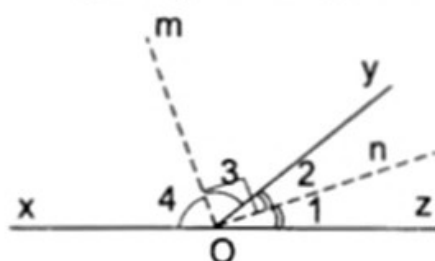
1. Điền vào “.....” để được một mệnh đề đúng:

1) Nếu 3 đường thẳng $a // b // c$ mà $d \perp a$ thì

2) Nếu đường thẳng $a // b$ và $b // c$ thì

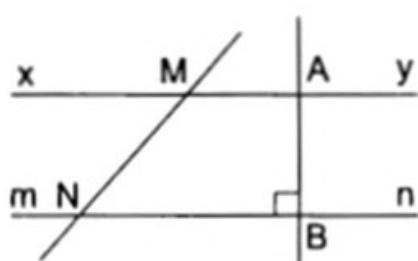
3) Từ một điểm A ở ngoài đường thẳng a ta có thể kẻ được

2. Cho hình vẽ 31a; 31b ứng với các giả thiết và kết luận của nó. Hãy phát biểu thành ngôn ngữ của mệnh đề toán học.



a)

Hình 31



b)

Giả thiết	$\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ là hai góc kề bù nhau $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$; $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$.
Kết luận	$O_m \perp O_n$ (hình 31a).
Giả thiết	Đường thẳng $xy \parallel mn$; $AB \perp mn$, $\widehat{MNB} = 45^\circ$.
Kết luận	1) $xy \perp AB$. 2) Tính $\widehat{xMN}$ (hình 31b).

3. Vẽ hình theo thứ tự sau rồi ghi giả thiết, kết luận:

- Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
 - Đường thẳng d qua B và vuông góc với đường thẳng AC.
 - Đường thẳng m qua B và song song với đường thẳng AC.
- Chứng minh $d \perp m$.

4. Cho $\triangle ABC$ và AE là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ (E thuộc BC). Từ E kẻ $EF \parallel AB$ (F thuộc AC). Từ F kẻ $FI \parallel AE$ (I thuộc BC). Chứng minh:

1) Các góc $\widehat{BAE} = \widehat{EAC} = \widehat{AEF} = \widehat{EFI} = \widehat{IFC}$.

2) FI là tia phân giác của góc $\widehat{EFC}$.

5. Cho hai đường thẳng $xy \parallel mn$, đường thẳng a cắt hai đường thẳng xy và mn lần lượt tại A và B. Kẻ tia phân giác của $\widehat{xAB}$ và tia phân giác của $\widehat{ABm}$, chúng cắt nhau tại C. Kẻ tia phân giác của $\widehat{BAy}$ và tia phân giác của $\widehat{ABn}$, chúng cắt nhau tại D. Chứng minh rằng:

- 1) $AC \perp AD$; $BD \perp BC$.
 - 2) $AD \parallel BC$; $AC \parallel BD$.
 - 3) Góc ACB và góc BDA là góc vuông.
6. Cho $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc. Tính số đo của mỗi góc, cho biết:
- 1) $\widehat{A} - \widehat{B} = 30^\circ$.
 - 2) $2\widehat{A} = 3\widehat{B}$.
7. Cho $\widehat{AOB}$ và $\widehat{CID}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song. OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$ và IN là tia phân giác của $\widehat{CID}$. Chứng minh rằng:
- 1) Nếu hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{CID}$ cùng nhọn hoặc cùng tù thì $OM \parallel IN$.
 - 2) Nếu hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{CID}$ có một góc nhọn, một góc tù thì $OM \perp IN$.
- 8*. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại một điểm O ở ngoài tờ giấy tạo thành một góc nhọn. Biết Ox là tia phân giác của góc đó (điểm góc O ở ngoài tờ giấy). Từ một điểm A trên đường thẳng a , hãy:
- 1) Vẽ đường thẳng song song với đường thẳng Ox .
 - 2) Vẽ đường thẳng vuông góc với đường thẳng Ox .
- 9*. Có bốn đường thẳng vẽ trên một mặt phẳng. Trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Chứng minh rằng ta có thể tìm được hai đường thẳng (trong số bốn đường thẳng đó) tạo với nhau một góc không quá 45° .

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

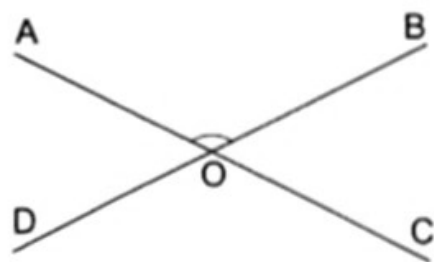
Chủ đề 1

1. Tự trả lời các câu hỏi.

2. (hình 32)

• $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc kề bù (theo đề bài) nên tổng hai góc đó là 180° và hai tia OA và OC nằm trên một đường thẳng.

• Tương tự, $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AOD}$ là 2 góc kề bù (đề bài) nên hai tia OB và OD nằm trên một đường thẳng. Vậy hai góc $\widehat{AOD}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc đối đỉnh (theo định nghĩa).



Hình 32

3. (hình 33)

Cách 1: (không sử dụng tính chất hai góc đối đỉnh).

• $\widehat{BMC}$ và $\widehat{CMA}$ là hai góc kề bù nên:

$$\widehat{BMC} + \widehat{CMA} = 180^\circ. \quad (1)$$

Vì: $\widehat{BMC} = 3\widehat{CMA}$ (theo đề bài). (2)

Thay (2) vào (1), ta có:

$$3\widehat{CMA} + \widehat{CMA} = 180^\circ \Rightarrow 4\widehat{CMA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CMA} = 45^\circ.$$

Thay $\widehat{CMA} = 45^\circ$ vào (2), ta có: $\widehat{BMC} = 3.45^\circ \Rightarrow \widehat{BMC} = 135^\circ$.

• $\widehat{BMC} + \widehat{BMD} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{BMD} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

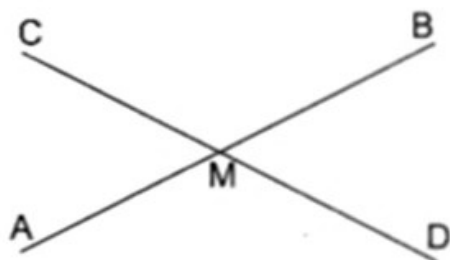
• $\widehat{BMD} + \widehat{DMA} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{DMA} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Cách 2:

Giải theo cách 1, ta tính được: $\widehat{CMA} = 45^\circ$; $\widehat{BMC} = 135^\circ$.

Áp dụng tính chất hai góc đối đỉnh, suy ra:

$$\widehat{BMC} = \widehat{DMA} = 135^\circ; \widehat{CMA} = \widehat{BMD} = 45^\circ.$$



Hình 33

4. (hình 34)

1) Thực hiện vẽ theo ba bước (lớp 6).

2) Dựa theo định nghĩa hai góc đối đỉnh để vẽ góc $\widehat{A'OB'}$.

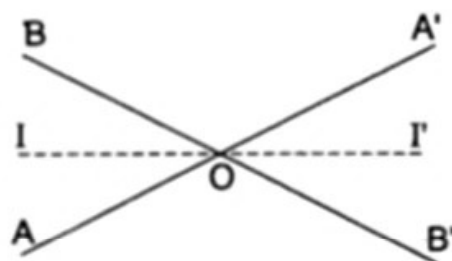
3) Do hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{A'OB'}$ là 2 góc đối đỉnh (cách vẽ) vậy AA' ; BB' là hai đường thẳng. Suy ra hai góc $\widehat{BOA'}$ và $\widehat{AOB'}$ cũng là 2 góc đối đỉnh (theo định nghĩa).

4) Vì tia OI là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ (theo đề bài), nên $\widehat{AOI} = \widehat{IOB}$. (1)

Vì tia OI' là tia đối của tia OI nên:

$$\widehat{AOI} = \widehat{A'OI'} \text{ (đối đỉnh).} \quad (2)$$

$$\widehat{BOI} = \widehat{I'OB'} \text{ (đối đỉnh).} \quad (3)$$



Hình 34

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\widehat{A'OI'} = \widehat{I'OB'}$ (cùng bằng hai góc bằng nhau).

OI' nằm giữa hai tia OA' và OB' và chia $\widehat{A'OB'}$ thành hai góc bằng nhau. Vậy OI' là tia phân giác của $\widehat{A'OB'}$.

5. (hình 35)

Cách 1:

$$\widehat{EOM} + \widehat{MOF} + \widehat{FON} = 250^\circ 46' \text{ (đề bài).} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \widehat{EOM} + \widehat{MOF} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù).} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{FON} = 70^\circ 46'$.

$$\text{Mà } \widehat{FON} = \widehat{EOM} \text{ (hai góc đối đỉnh)} \Rightarrow \widehat{EOM} = 70^\circ 46'. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta có:

$$70^\circ 46' + \widehat{MOF} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MOF} = 180^\circ - 70^\circ 46' = 109^\circ 14'.$$

Vậy $\widehat{MOF} = \widehat{NOE} = 109^\circ 14'$ (hai góc đối đỉnh).

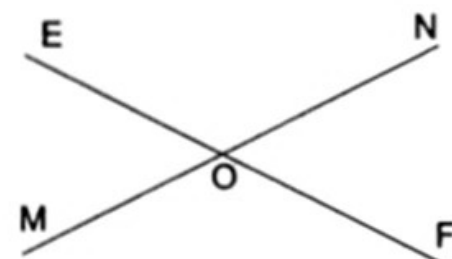
$$\text{Cách 2: Theo đề bài: } \widehat{EOM} + \widehat{MOF} + \widehat{FON} = 250^\circ 46'. \quad (1)$$

$$\text{Mà tổng bốn góc: } \widehat{EOM} + \widehat{MOF} + \widehat{FON} + \widehat{NOE} = 360^\circ. \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta có: $250^\circ 46' + \widehat{NOE} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{NOE} = 109^\circ 14'$.

$$\text{Mà } \widehat{NOE} = \widehat{MOF} \text{ (hai góc đối đỉnh)} \Rightarrow \widehat{MOF} = 109^\circ 14'. \quad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta có: $\widehat{EOM} + \widehat{NOF} + 109^\circ 14' = 250^\circ 46'$.



Hình 35

Suy ra: $\widehat{EOM} + \widehat{NOF} = 250^\circ 46' - 109^\circ 14' = 141^\circ 32'$.

Mà $\widehat{EOM} = \widehat{NOF}$ (hai góc đối đỉnh). Vậy $2\widehat{EOM} = 141^\circ 32'$.

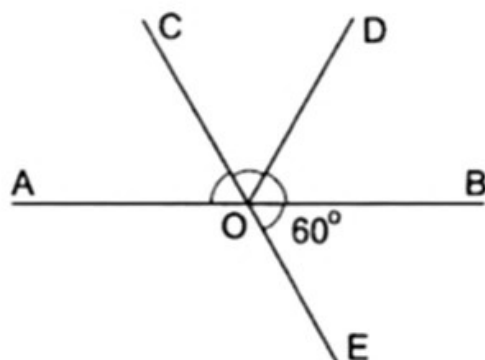
Suy ra: $\widehat{EOM} = \widehat{NOF} = \frac{141^\circ 32'}{2} = 70^\circ 46'$.

6. (hình 36)

1) Tổng ba góc $\widehat{AOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOB} = 180^\circ$ (do A, O, B thẳng hàng).

Mà $\widehat{AOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOB}$ (đề bài). Vậy:

$$\widehat{AOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOB} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ.$$



Hình 36

– Tia OC chia góc $\widehat{AOD}$ thành hai góc bằng nhau, mỗi góc 60° . Vậy tia OC là tia phân giác của góc $\widehat{AOD}$.

2) Tương tự, tia OD là tia phân giác của góc $\widehat{COB}$.

3) Ta có: $\widehat{BOC} = 120^\circ$ (theo cách tính trên); $\widehat{BOE} = 60^\circ$ (theo giả thiết).

Vậy $\widehat{BOC} + \widehat{BOE} = 180^\circ \Rightarrow C, O, E$ nằm trên một đường thẳng.

Suy ra OE là tia đối của tia OC. Vậy hai góc $\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOE}$ là hai góc đối đỉnh (theo định nghĩa).

4) Ta có: $\widehat{BOD} = 60^\circ$ (theo cách tính trên); $\widehat{BOE} = 60^\circ$ (theo giả thiết). Mà OB nằm giữa hai tia OD, OE và $\widehat{BOD} = \widehat{BOE} \Rightarrow OB$ là tia phân giác của $\widehat{DOE}$.

7. Trước tiên cho nếp gấp qua điểm O. Sau chỉnh cho nếp gấp chia đường thẳng d thành hai nửa đường thẳng trùng lên nhau.

8. Tự vẽ theo cách vẽ đã học.

9. (hình 37)

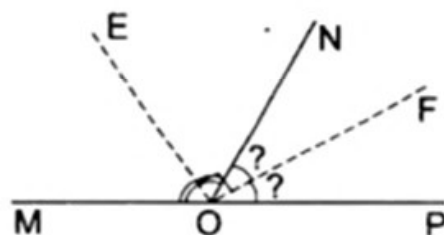
Vì OE là tia phân giác của góc $\widehat{MON}$ nên:

$$\widehat{MOE} = \widehat{EON} = \alpha^\circ \quad (\alpha^\circ < 90^\circ).$$

Vậy $\widehat{NOF} = \widehat{EOF} - \widehat{EON} = 90^\circ - \alpha^\circ$.

$$\widehat{FOP} = 180^\circ - \widehat{MOE} - \widehat{EOF} = 180^\circ - \alpha^\circ - 90^\circ = 90^\circ - \alpha^\circ.$$

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{NOF} = \widehat{FOP}$. Vậy OF là tia phân giác của $\widehat{NOP}$.



Hình 37

10. (hình 38)

Ox' là tia đối của tia Ox nên Ox' và Ox nằm trên một đường thẳng và $\widehat{xOx'} = 180^\circ$.

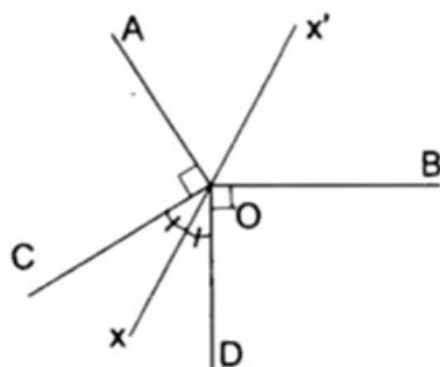
Suy ra: $\widehat{xOC} + \widehat{AOC} + \widehat{AOx'} = 180^\circ$.

$\widehat{xOD} + \widehat{DOB} + \widehat{BOx'} = 180^\circ$.

Mà: $\widehat{xOC} = \widehat{xOD}$ (Ox là tia phân giác), và

$\widehat{AOC} = \widehat{DOB} = 90^\circ$ (theo đề bài).

Vậy $\widehat{AOx'} = \widehat{BOx'} \Rightarrow Ox'$ là tia phân giác của $\widehat{AOB}$.



Hình 38

11*. (hình 39)

1) Bốn đường thẳng cắt nhau tại O. Chúng bị điểm O chia thành 8 tia chung gốc O (mỗi đường thẳng bị chia làm 2 tia).

Xét một tia, chẳng hạn tia Oa_1 :

Khi đó Oa_1 sẽ hợp với 7 tia còn lại tạo thành 7 góc khác nhau.

Vậy 8 tia tạo thành: 7×8 (góc), nhưng trong đó mỗi góc được tính hai lần. Bởi vì:

Chẳng hạn khi chọn tia Oa_1 làm mốc nó hợp với tia Oa_3 được góc $\widehat{a_1Oa_3}$.

Nhưng khi chọn tia Oa_3 làm mốc nó hợp với tia Oa_1 cũng được góc $\widehat{a_3Oa_1}$.

Vậy tổng số góc tạo thành là: $\frac{7 \times 8}{2} = 28$ (góc).

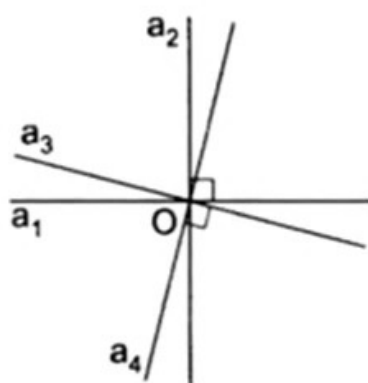
2) Theo câu 1, khi ta lấy tia Oa_1 làm mốc, nó hợp với 7 tia còn lại tạo thành 7 góc khác nhau.

Để ý 7 góc đó ta thấy có: 2 góc vuông, 1 góc bẹt, 2 góc tù, 2 góc nhọn.

Từ cách tính trên, ta có: Số góc vuông trong hình vẽ là: $\frac{2 \times 8}{2} = 8$ (góc).

Số góc bẹt trong hình vẽ là: $\frac{1 \times 8}{2} = 4$ (góc).

Số góc tù trong hình vẽ là: $\frac{2 \times 8}{2} = 8$ (góc).



Hình 39

Số góc nhọn trong hình vẽ là: $\frac{2 \times 8}{2} = 8$ (góc).

Vậy trong 28 góc tạo thành có:

4 góc bẹt, 8 góc vuông, 8 góc tù và 8 góc nhọn.

12. (hình 40)

$$1) \quad \widehat{mOx} = \widehat{zOy} \text{ (theo đề bài).} \quad (1)$$

$$\widehat{nOy} = \widehat{xOz} \text{ (theo đề bài).} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2), ta có: } \widehat{mOx} + \widehat{nOy} = \widehat{xOz} + \widehat{zOy}. \quad (3)$$

$$\text{Mà } \widehat{xOz} + \widehat{zOy} = 90^\circ \text{ (theo đề bài).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{mOx} + \widehat{nOy} = 90^\circ, \text{ do đó } \widehat{mOx} + \widehat{xOz} + \widehat{zOy} + \widehat{nOy} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra hai tia Om và On nằm trên một đường thẳng và chung gốc O, hay Om và On là hai tia đối nhau.

$$2) \text{ Cũng từ đầu bài, ta có: } \widehat{mOx} = \widehat{zOy}; \widehat{xOz} = \widehat{yOn}.$$

$$\text{Vậy: } \widehat{mOx} + \widehat{xOz} = \widehat{zOy} + \widehat{yOn} \Rightarrow \widehat{mOz} = \widehat{zOn} = \frac{1}{2} \widehat{mOn} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Hay $Oz \perp mn$, mà $OM = ON$ nên Oz là đường trung trực của đoạn MN.

13. Vẽ theo cách vẽ phần phương pháp.

14. Vòng tròn trên mặt đồng hồ được chia thành 12 phần bằng nhau.

Mỗi giờ tương ứng với một góc có số đo là $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Dựa vào đó tính số đo của các góc.

15. (hình 41)

1) $\widehat{AOB} = \alpha^\circ > 90^\circ$ nên các tia OM và ON nằm ở miền trong của góc AOB. Suy ra:

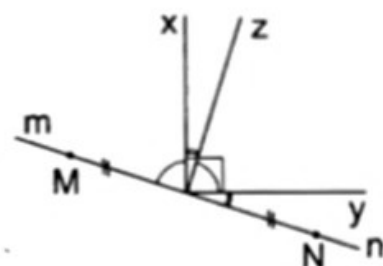
$$\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = \widehat{AOB}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOM} + 90^\circ = \alpha^\circ$$

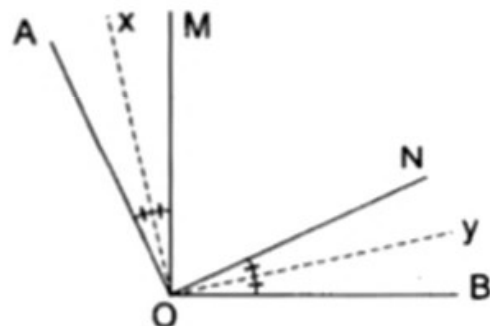
$$\Rightarrow \widehat{AOM} = \alpha^\circ - 90^\circ.$$

$$ON \perp OA, \text{ nên: } \widehat{MON} + \widehat{AOM} = 90^\circ. \quad (1)$$

$$OM \perp OB, \text{ nên: } \widehat{MON} + \widehat{NOB} = 90^\circ. \quad (2)$$



Hình 40



Hình 41

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{AOM} = \widehat{NOB} = \alpha^\circ - 90^\circ$.

2) Ox là tia phân giác của góc $\widehat{AOM}$ nên:

$$\widehat{xOM} = \frac{\widehat{AOM}}{2} \Rightarrow \widehat{xOM} = \frac{\alpha^\circ - 90^\circ}{2}. \quad (3)$$

$$\text{Oy là tia phân giác của góc } \widehat{NOB} \text{ nên: } \widehat{yON} = \frac{\widehat{NOB}}{2} = \frac{\alpha^\circ - 90^\circ}{2}. \quad (4)$$

Đến đây ta có 2 cách tính góc $\widehat{xOy}$:

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } \widehat{xOy} &= \widehat{AOB} - (\widehat{AOx} + \widehat{BOy}) = \alpha^\circ - \left(\frac{\alpha^\circ - 90^\circ}{2} + \frac{\alpha^\circ - 90^\circ}{2} \right) \\ &= \alpha^\circ - (\alpha^\circ - 90^\circ) = 90^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: } \widehat{MON} = 90^\circ - \widehat{NOB} = 90^\circ - (\alpha^\circ - 90^\circ) = 180^\circ - \alpha^\circ. \quad (5)$$

$$\widehat{xOy} = \widehat{xOM} + \widehat{MON} + \widehat{yON}. \quad (6)$$

Thay (3), (4), (5) vào (6), ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{xOy} &= \frac{\alpha^\circ - 90^\circ}{2} + (180^\circ - \alpha^\circ) = \frac{\alpha^\circ - 90^\circ}{2} \\ &= \alpha^\circ - 90^\circ + 180^\circ - \alpha^\circ = 90^\circ \Rightarrow Ox \perp Oy. \end{aligned}$$

3) Những cặp góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc là:

$$\widehat{AOx} \text{ và } \widehat{NOy} \text{ (} OA \perp ON \text{ ; } Ox \perp Oy \text{)}$$

$$\widehat{xOM} \text{ và } \widehat{yOB} \text{ (} Ox \perp Oy \text{ ; } OM \perp OB \text{)}$$

$$\widehat{AOM} \text{ và } \widehat{NOB} \text{ (} OA \perp ON \text{ ; } OM \perp OB \text{)}$$

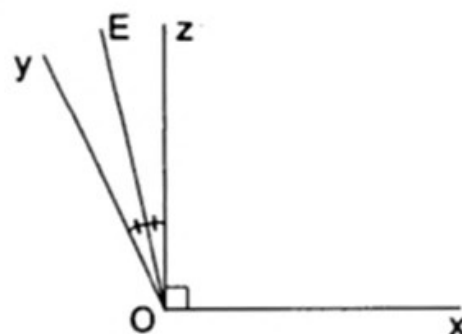
Cặp $\widehat{MON}$ và $\widehat{AOB}$ cũng có cạnh tương ứng vuông góc nhưng $\widehat{MON}$ nhọn còn $\widehat{AOB}$ tù.

16. (hình 42)

$$\widehat{ZOE} = 20^\circ \text{ (theo đề bài)}$$

$$\Rightarrow \widehat{yOz} = 40^\circ \text{ (OE là tia phân giác).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{xOy} = 40^\circ + 90^\circ = 130^\circ.$$



Hình 42

Chủ đề 2

1. Câu 1 và 3 đúng; Câu 2 và 4 sai.
2. Hai đường thẳng a và b song song trong cả 4 trường hợp.
3. 1) $\widehat{CAD}$ đồng vị với $\widehat{CEF}$; so le trong với góc $\widehat{ACB}$.
 2) $\widehat{ADC}$ đồng vị với $\widehat{EFC}$;
 3) $\widehat{ABC}$ và $\widehat{DAB}$ là hai góc trong cùng phía;
 $\widehat{BCD}$ và $\widehat{EFD}$ là hai góc đồng vị.

4. Tại A: $\widehat{A_1} = 120^\circ$ (theo đầu bài);
 $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_3} = 120^\circ$ (hai góc đối đỉnh).
 Có: $\widehat{A_1} + \widehat{A_4} = 180^\circ$ mà $\widehat{A_1} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{A_4} = 60^\circ$.
 Vậy $\widehat{A_4} = \widehat{A_2} = 60^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Tại B: Tương tự, ta tính được:

$$\widehat{B_1} = \widehat{B_3} = 120^\circ; \widehat{B_2} = \widehat{B_4} = 60^\circ.$$

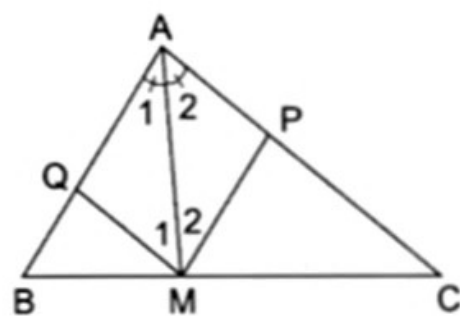
5. (hình 43)

$MQ \parallel AC$ nên $\widehat{A_2} = \widehat{M_1}$ (so le trong).

$MP \parallel AB$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{M_2}$ (so le trong).

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$).

Vậy $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ suy ra MA cũng là tia phân giác của góc $\widehat{QMP}$.



Hình 43

6. (hình 44)

$FP \parallel AB$ nên $\widehat{MAF} = \widehat{AFP}$ (hai góc so le trong),

$$\text{hay } \widehat{MAN} + \widehat{NAF} = \widehat{AFE} + \widehat{EFP}. \quad (1)$$

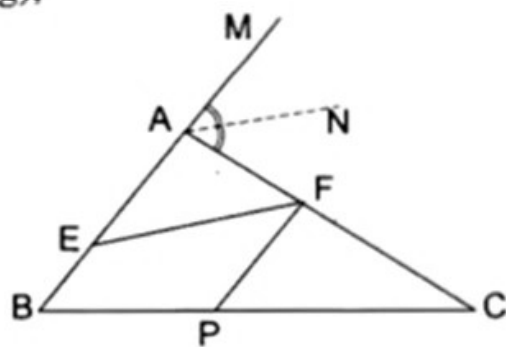
$$\text{Mà } AN \parallel FE \text{ nên } \widehat{NAF} = \widehat{AFE}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \widehat{MAN} = \widehat{EFP}. \quad (3)$$

$$\widehat{NAF} = \widehat{MAN} \text{ (AN là tia phân giác)}. \quad (4)$$

$$\text{Từ (2), (3) và (4) } \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{EFP}.$$

Vậy FE là tia phân giác của $\widehat{AEP}$.



Hình 44

7. (hình 45)

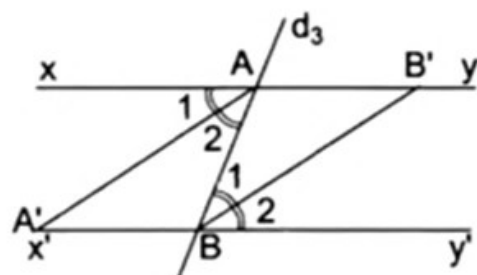
1) $xy \parallel x'y'$ nên $\widehat{xAB} = \widehat{AB'y'}$ (hai góc so le trong). (1)

AA' là tia phân giác của $\widehat{xAB}$ nên:

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2} \widehat{xAB}. \quad (2)$$

BB' là tia phân giác của $\widehat{AB'y'}$ nên:

$$\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2} \widehat{AB'y'}. \quad (3)$$



Hình 45

Từ (1), (2), (3) ta có: $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$. Mà hai góc ở vị trí so le trong, nên $AA' \parallel BB'$ (có 2 góc so le trong bằng nhau).

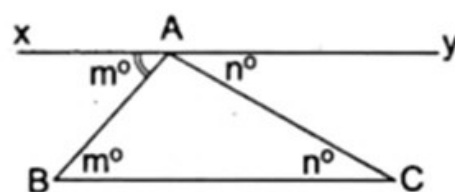
2) $xy \parallel x'y'$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{AA'B}$ (so le trong).

$AA' \parallel BB'$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{AB'B}$ (đồng vị). Vậy $\widehat{AA'B} = \widehat{AB'B}$.

8. (hình 46)

$\widehat{ABC} = \widehat{BAx} = m^\circ$. Vậy $Ax \parallel BC$ (có hai góc so le trong bằng nhau).

$\widehat{ACB} = \widehat{CB'y} = n^\circ$. Vậy $Ay \parallel BC$ (có hai góc so le trong bằng nhau).



Hình 46

Vậy tại A có $Ax \parallel BC$; $Ay \parallel BC$, theo tiên đề Ôclit thì hai tia Ax và Ay nằm trên cùng đường thẳng xy qua A.

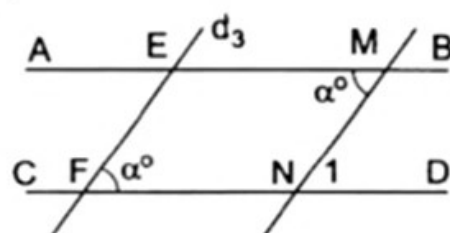
9. Tính được các góc bằng 45° và các góc bằng 135° . Để suy ra các góc trong cùng phía bù nhau nên các đường thẳng đó song song với nhau.

10. (hình 47)

$AB \parallel CD$, vậy: $\widehat{AMN} = \widehat{N_1}$ (hai góc so le trong). (1)

Mà $\widehat{AMN} = \widehat{EFD}$ (theo bài ra). (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{N_1} = \widehat{EFD}$.

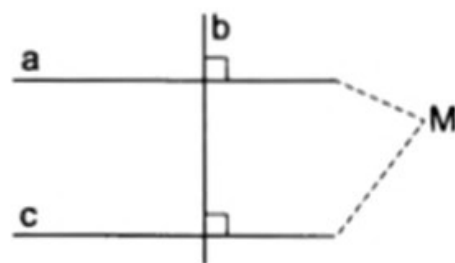


Hình 47

Hai đường thẳng EF và MN bị cắt bởi đường thẳng thứ ba là CD có hai góc $\widehat{N_1}$ và $\widehat{EFD}$ là hai góc đồng vị bằng nhau. Vậy $MN \parallel EF$.

11. (hình 48)

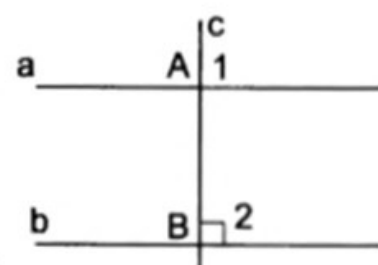
Giả sử a và c không song song thì a và c cắt nhau tại một điểm M . Như vậy từ M kẻ được 2 đường thẳng vuông góc với đường thẳng b (vô lí).



Hình 48

12. (hình 49)

Vì $c \perp b$ nên c cắt b tại B và cũng cắt a tại A .
Ta có $\widehat{B_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{B_2} = \widehat{A_1} = 90^\circ$ (hai góc đồng vị). Vậy $c \perp a$ tại A .



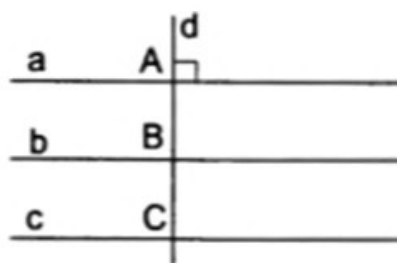
Hình 49

13. (hình 50)

Vẽ đường thẳng $d \perp a$ tại A vì $a \parallel b$ nên $d \perp b$ tại B (theo bài 11). (1)

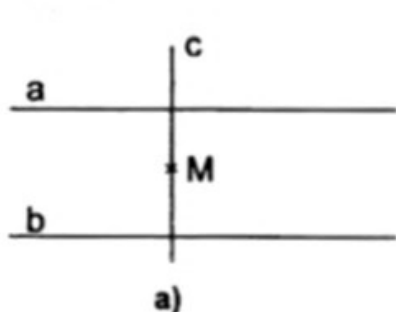
Vì $b \parallel c$ nên $d \perp c$ tại C (theo bài 11). (2)

Từ (1) và (2), ta có a và c cùng vuông góc với d , vậy $a \parallel c$ (theo bài 11).

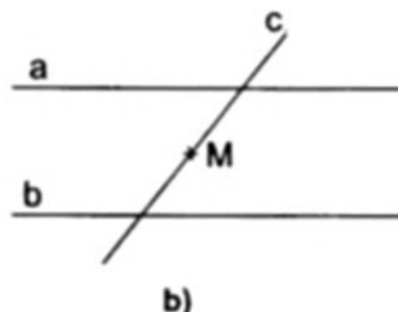


Hình 50

14. Có 3 trường hợp tương ứng với hình 51a; hình 51b; hình 51c.

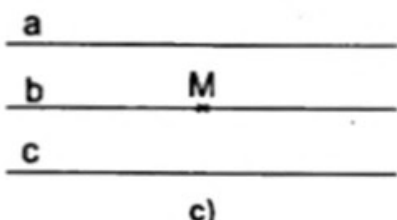


a)



b)

Hình 51



c)

15. (hình 52)

1) $EF \parallel BC$ suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (đồng vị) (1)

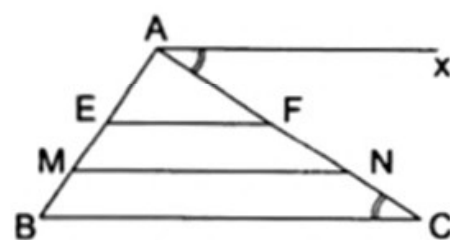
$MN \parallel BC$ suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$ (đồng vị) (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{AEF} = \widehat{AMN}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị nên suy ra $EF \parallel MN$ (có 2 góc đồng vị bằng nhau).

2) $\widehat{CAx} = \widehat{ACB}$ (theo bài ra)

Vậy $Ax \parallel BC$ (có 2 góc đồng vị bằng nhau). Mà $MN \parallel BC$ (theo đề bài).

Suy ra $Ax \parallel MN$ (cùng song song với BC).



Hình 52

16. (hình 53)

1) (câu 1 đúng với Ox và Im; Oy và In cùng chiều).

Kéo dài Im về phía Oy cắt Oy tại M.

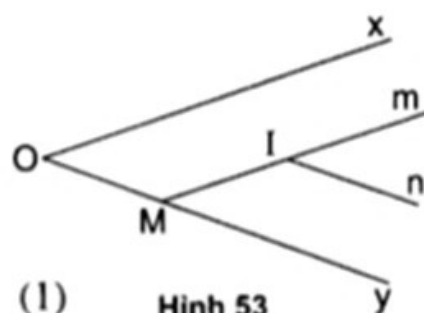
Ta có: $\widehat{IMy} = \widehat{mIn}$ (hai góc đồng vị $IN \parallel Oy$). (1)

$\widehat{IMy} = \widehat{xOy}$ (hai góc đồng vị $Im \parallel Ox$). (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{mIn} = \widehat{xOy}$.

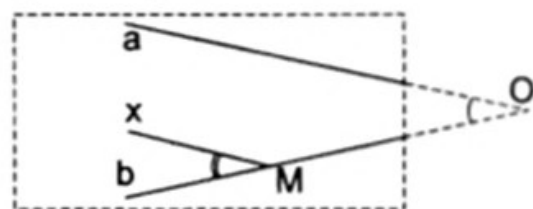
2) Hai góc đó là hai góc có cạnh tương ứng song song và là hai góc cùng nhọn.

3) Nếu thay $\widehat{xOy}$ là góc tù thì khi vẽ $\widehat{mIn}$ ta sẽ có $\widehat{mIn}$ cũng là góc tù. Kết quả vẫn đúng là $\widehat{xOy} = \widehat{mIn}$ nhưng khác là hai góc cùng tù. (HS tự trình bày)

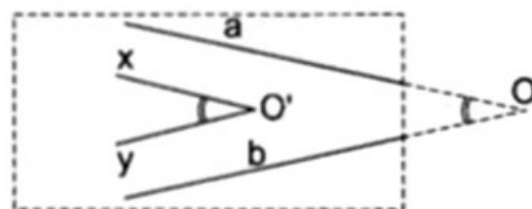


Hình 53

17. (hình 54)



a)



b)

Hình 54

Cách 1: Lấy $M \in b$ (M nằm trong trang giấy) từ M kẻ $Mx \parallel a$.

Ta có $\widehat{xMb} = \widehat{aOb}$ (đồng vị). Với $\widehat{xMb}$ là góc ở trong trang giấy ta có thể đo được (hình 54a).

Cách 2: Lấy điểm O' (điểm O' nằm trong các góc $\widehat{xO'y}$ và trong trang giấy). Từ O' kẻ $O'x \parallel a$ và $O'y \parallel b$. Ta có góc $\widehat{xO'y} = \widehat{aOb}$ (trong đó $\widehat{xO'y}$ có thể đo được) (hình 54b).

18*. (hình 55)

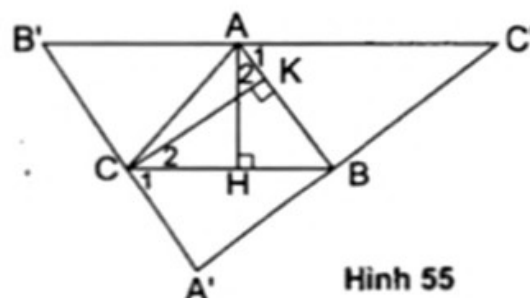
1) $AB \parallel A'B'$ (theo đề bài).

$AC \parallel A'C'$ (theo đề bài).

Vậy $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$ là 2 góc có cạnh tương ứng song song, hay $\widehat{A} = \widehat{A'}$.

Tương tự như trên, ta chứng tỏ được: $\widehat{B} = \widehat{B'}$ và $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

2) $\widehat{BAH}$ có 2 cạnh là BA và HA. $\widehat{BCK}$ có 2 cạnh là CB và CK.



Hình 55

Theo đầu bài: $BA \perp CK$ và $HA \perp CB$.

Vậy $\widehat{BAH}$ và $\widehat{BCK}$ là 2 góc có cạnh tương ứng vuông góc.

$$B'C' \parallel BC \text{ suy ra } \widehat{A_1} = \widehat{B} \text{ (so le trong).} \quad (1)$$

$$A'B' \parallel AB \text{ suy ra } \widehat{C_1} = \widehat{B} \text{ (so le trong).} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \quad (3)$$

$$B'C' \parallel BC \text{ mà } AH \perp CB \text{ nên } AH \perp B'C', \text{ suy ra: } \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ \quad (4)$$

$$A'B' \parallel AB \text{ mà } CK \perp AB \text{ nên } CK \perp A'B', \text{ suy ra: } \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5), suy ra: } \widehat{A_2} = \widehat{C_2} \text{ (} \widehat{BAH} = \widehat{BCK} \text{)}.$$

19*. (Xem hình 26, trang 25)

$$\text{Từ O kẻ } OI \parallel MN, \text{ ta có } \widehat{NMO} = \widehat{MOI} = \alpha^\circ \text{ (so le trong).}$$

$$\text{Theo bài ra, ta có } \widehat{MOP} = \alpha^\circ + \beta^\circ.$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{MOP} = \widehat{MOI} + \widehat{IOP} \Rightarrow \alpha^\circ + \beta^\circ = \alpha^\circ + \widehat{IOP} \Rightarrow \widehat{IOP} = \beta^\circ.$$

Mà hai đường thẳng OI và PQ cắt đường thẳng thứ ba là OP có hai góc $\widehat{IOP}$ và $\widehat{OPQ}$ là hai góc so le trong và đều bằng α .

Suy ra $OI \parallel PQ$. Ta lại có $OI \parallel MN$ (cách vẽ trên).

Vậy $MN \parallel PQ$ (chúng cùng song song với OI).

20. Tự phát biểu các định nghĩa, tính chất và định lý đó.

21. (hình 56)

– Giả thiết và kết luận của mệnh đề 3:

GT	a và b ; $c \cap a = \{M\}$; $c \cap b = \{N\}$; $\widehat{M_4} = \widehat{N_6}$ hoặc $\widehat{M_2} = \widehat{N_6}$.
----	---

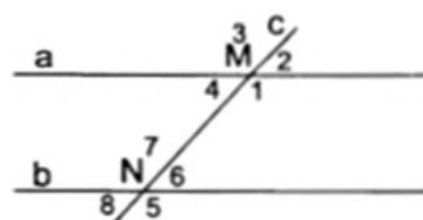
KL	$a \parallel b$.
----	-------------------

– Giả thiết và kết luận của mệnh đề 4:

GT	$a \parallel b$; $c \cap a = \{M\}$; $c \cap b = \{N\}$.
----	---

KL	1) $\widehat{M_4} = \widehat{N_6}$;
----	--------------------------------------

	2) $\widehat{M_2} = \widehat{N_6}$.
--	--------------------------------------



Hình 56

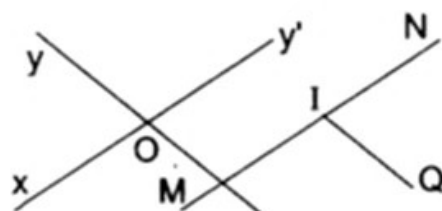
Nhận xét: Giả thiết của (4) gồm một phần giả thiết của (3) và kết luận của (3).

Kết luận của (4) là những giả thiết còn lại của (3).

22. (hình 57)

GT $\widehat{y'Oy}$ và $\widehat{NIQ}$ cùng nhọn;
 $\widehat{xOy'}$ và $\widehat{MIQ}$ là góc tù;
 $xy \parallel IQ$; $x'y' \parallel MN$.

KL 1) $\widehat{y'Oy} = \widehat{NIQ}$ hoặc $\widehat{xOy'} = \widehat{MIQ}$
 2) $\widehat{MIQ} + \widehat{y'Oy} = 180^\circ$

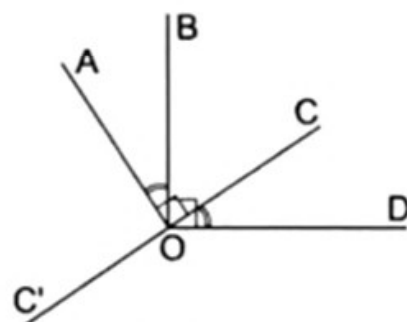


Hình 57

23. (hình 58)

GT $\widehat{AOB}$; $\widehat{COD}$ cùng nhọn;
 $OA \perp OC$; $OB \perp OD$;
 hoặc $\widehat{AOB}$ nhọn, $\widehat{C'OD}$ tù.

KL 1) $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.
 2) Hoặc $\widehat{AOB} + \widehat{C'OD} = 180^\circ$.



Hình 58

Do $\widehat{AOB}$; $\widehat{COD}$ nhọn và $\widehat{AOC}$; $\widehat{BOD}$ là các góc vuông nên ta dễ dàng chứng minh được tia OB nằm giữa hai tia OA và OC; Tia OC nằm giữa hai tia OB và OD.

Từ đó ta có: $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 90^\circ$ ($AO \perp OC$). (1)

$\widehat{COD} + \widehat{BOD} = 90^\circ$ ($OB \perp OD$). (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. (3)

Mà: $\widehat{COD} + \widehat{C'OD} = 180^\circ$, thay (3) vào ta có: $\widehat{AOB} + \widehat{C'OD} = 180^\circ$.

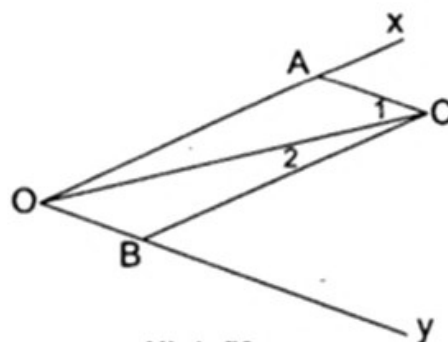
Từ đó rút ra kết luận.

24. (hình 59)

1) $BC \parallel OA \Rightarrow \widehat{CBx} = \widehat{AOB}$ (đồng vị) (1)

$AC \parallel OB \Rightarrow \widehat{CBx} = \widehat{ACB}$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{ACB} = \widehat{xOy} = 70^\circ$.



Hình 59

2) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle OBC$ có:

$$AC \parallel OB \text{ (theo đề bài)} \Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{OAC} = 180^\circ \text{ (góc trong cùng phía).}$$

$$BC \parallel OA \text{ (theo đề bài)} \Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{OBC} = 180^\circ \text{ (góc trong cùng phía).}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \widehat{OAC} = \widehat{OBC}. \quad (3)$$

$$\text{– Do } OA \parallel BC \text{ nên: } \widehat{O_1} = \widehat{C_2} \text{ (so le trong).} \quad (4)$$

$$\text{– Do } AC \parallel OB \text{ nên: } \widehat{C_1} = \widehat{O_2} \text{ (so le trong).} \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) ta có: Các góc của $\triangle AOC$ là: $\widehat{OAC}$; $\widehat{O_1}$; $\widehat{C_1}$;

Các góc của $\triangle BOC$ là: $\widehat{OBC}$; $\widehat{C_2}$; $\widehat{O_2}$.

25. Chúng tương ứng bằng nhau (theo chứng minh trên).

$$\widehat{N_1} + \widehat{N_2} = 24^\circ + 30^\circ = 54^\circ.$$

Vậy $\widehat{aMN} = \widehat{MNC} = 54^\circ$. Mà hai góc ở vị trí so le trong, suy ra $Ma \parallel Nc$ (góc so le trong bằng nhau). (1)

$\widehat{N_2} + \widehat{NPb} = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$. Mà hai góc ở vị trí trong cùng phía. Vậy $Pb \parallel Nc$ (trong cùng phía bù nhau). (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $Ma \parallel Pb$.

26. 1) $MN \perp OA$, $QO \perp OA$ vậy $MN \parallel QO$ (cùng vuông góc với OA).

Mà $MQ \perp QO$, suy ra: $MQ \perp MN$ (hai đường thẳng $MN \parallel QO$ mà $MQ \perp QO$ thì cũng phải vuông góc với đường thứ hai). Vậy $\widehat{NMQ} = 90^\circ$.

2) $MN \parallel OQ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{AMN} = 50^\circ$ (đồng vị);

$$\widehat{AMN} + \widehat{NMQ} + \widehat{QMB} = 180^\circ \text{ (ba điểm A, M, B thẳng hàng).}$$

Thay $\widehat{AMN} = 50^\circ$, $\widehat{NMQ} = 90^\circ$ vào, ta có:

$$50^\circ + 90^\circ + \widehat{QMB} = 180^\circ \Rightarrow 140^\circ + \widehat{QMB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{QMB} = 40^\circ.$$

27. 1) Từ E kẻ $EF \parallel AB$, mà $CD \parallel AB$. Vậy $EF \parallel CD$ (vì cùng song song với AB).

$$\text{Do } AB \parallel EF \text{ nên: } \widehat{EAB} + \widehat{AEF} = 180^\circ \Rightarrow 140^\circ + \widehat{AEF} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AEF} = 40^\circ.$$

Mà $\widehat{AEC} = \widehat{AEF} + \widehat{FEC} \Rightarrow 120^\circ = 40^\circ + \widehat{FEC}$. Vậy $\widehat{FEC} = 80^\circ$.

Do $EF \parallel CD$ nên $\widehat{FEC} + \widehat{ECD} = 180^\circ \Rightarrow 80^\circ + \widehat{ECD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ECD} = 100^\circ$.

2) Do $AB \parallel EF$ nên: $\widehat{BAE} + \widehat{AEF} = 180^\circ$ (góc trong cùng phía). (1)

Do $EF \parallel CD$ nên $\widehat{ECD} + \widehat{CEF} = 180^\circ$ (góc trong cùng phía). (2)

Từ (1) và (2) có: $\widehat{BAE} + \widehat{ECD} + \widehat{AEF} + \widehat{CEF} = 360^\circ$.

Mà $\widehat{AEF} + \widehat{CEF} = \widehat{AEC}$, thay vào ta có: $\widehat{BAE} + \widehat{ECD} + \widehat{AEC} = 360^\circ$.

28*. (hình 60)

Cách 1: Theo đề bài:

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (OE là tia phân giác của $\widehat{AOC}$). (1)

$\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ (OF là tia phân giác của $\widehat{DOB}$). (2)

Mà $\widehat{AOD} = \widehat{COB}$ (hai góc đối đỉnh). (3)

Từ (1), (2), (3), ta có:

$$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 + \widehat{AOD} = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_4 + \widehat{COB}. \quad (4)$$

Mà $(\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 + \widehat{AOD}) + (\widehat{O}_2 + \widehat{O}_4 + \widehat{COB}) = 360^\circ$. (5)

Do đó $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 + \widehat{AOD} = 180^\circ$.

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{EOF} = 180^\circ$.

Vậy E, O, F nằm trên một đường thẳng, hay tia OE và tia OF là hai tia đối nhau.

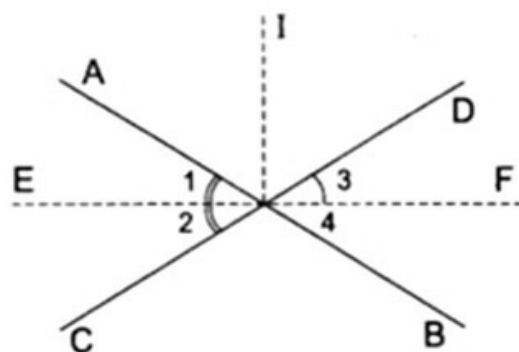
Cách 2: Vẽ thêm tia OI là tia phân giác của góc $\widehat{AOD}$.

– Ta có $\widehat{AOD}$ và $\widehat{DOB}$ là hai góc kề bù nhau (AB là đường thẳng) có OI và OF là hai tia phân giác, vậy $OI \perp OF$ (tính chất tia phân giác của hai góc kề bù).

– Ta có $\widehat{AOD}$ và $\widehat{AOC}$ là 2 góc kề bù nhau (CD là đường thẳng) có OI và OE là hai tia phân giác. Vậy $OI \perp OE$ (tính chất tia phân giác của hai góc kề bù).

Vậy $\widehat{EOI} + \widehat{IOF} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EOF} = 180^\circ$.

Vậy OE và OF nằm trên một đường thẳng và suy ra kết luận.



Hình 60

29*. Giả sử a và b không cắt nhau thì chúng trùng nhau hoặc song song với nhau.

a) Nếu chúng trùng nhau thì qua O kẻ được 2 đường thẳng $OA \perp b$ và $OB \perp b$ (trái với tiên đề).

b) Nếu chúng song song ($a \parallel b$).

Theo giả thiết $OA \perp a$, mà $a \parallel b$ thì $OA \perp b$.

Theo đề bài, ta có: $OB \perp b$.

Vậy qua O kẻ được 2 đường thẳng OA và OB cùng vuông góc với $b \rightarrow$ Vô lí. Vậy 2 đường thẳng a và b phải cắt nhau.

Ôn tập chương I

1. Học sinh tự điền vào chỗ có dấu chấm.

2. *Mệnh đề 1*: Nếu 2 góc kề mà bù nhau thì 2 đường phân giác của 2 góc đó vuông góc với nhau.

Mệnh đề 2: Nếu 2 đường thẳng song song với nhau, đường thẳng thứ 3 vuông góc với một trong 2 đường thẳng đó thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

Mệnh đề 3: Nếu 2 đường thẳng song song với nhau, đường thẳng thứ 3 cắt 2 đường thẳng đó thì có các góc so le trong bằng nhau ($\widehat{MNB} = \widehat{xMN} = 45^\circ$ so le trong).

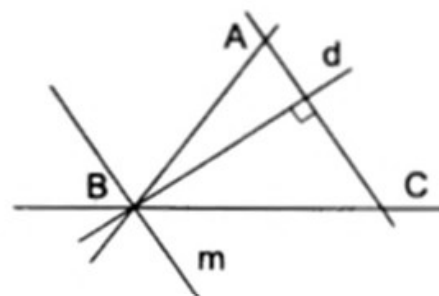
3. (hình 61)

GT | Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

d qua B và $d \perp AC$,

m qua B và $m \parallel AC$

KL | $d \perp m$.



Hình 61

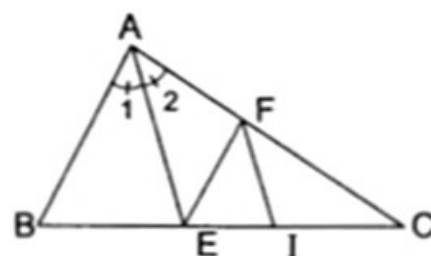
4. (hình 62)

GT | $\triangle ABC$; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$;

$EF \parallel AB$; $FI \parallel AE$.

KL | 1) $\widehat{BAE} = \widehat{EAC} = \widehat{AEF} = \widehat{EFI} = \widehat{IFC}$;

2) FI là tia phân giác $\widehat{EFC}$.



Hình 62

Chứng minh:

$$1) \quad \widehat{BAE} = \widehat{EAC} \text{ (giả thiết).} \quad (1)$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{AEF} \text{ (so le trong } AB \parallel EF). \quad (2)$$

$$\widehat{EAC} = \widehat{IFC} \text{ (hai góc đồng vị } AE \parallel FI). \quad (3)$$

$$\widehat{AEF} = \widehat{EFI} \text{ (so le trong } AE \parallel FI). \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra: $\widehat{BAE} = \widehat{EAC} = \widehat{AEF} = \widehat{IFC} = \widehat{EFI}$.

2) Từ chứng minh trên, ta có: $\widehat{EFI} = \widehat{IFC}$ mà FI là tia nằm giữa hai tia FE và FC, vậy FI là tia phân giác của $\widehat{EFC}$.

5. (hình 63)

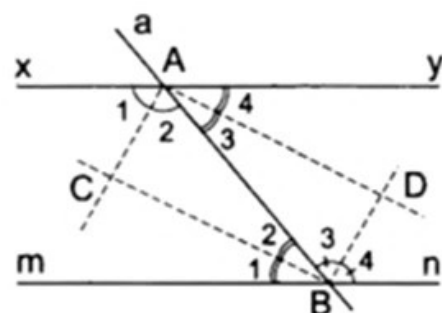
GT $\left| \begin{array}{l} xy \parallel mn; \text{ đường thẳng } a \text{ cắt } xy \text{ tại } A, \text{ cắt } \\ mn \text{ tại } B. \end{array} \right.$

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}, \widehat{B_1} = \widehat{B_2}, \widehat{A_3} = \widehat{A_4}, \widehat{B_3} = \widehat{B_4}.$$

KL 1) $AC \perp AD, BC \perp BD$.

2) $AD \parallel BC, AC \parallel BD$.

$$3) \widehat{ACB} = \widehat{BDA} = 90^\circ.$$



Hình 63

Chứng minh:

1) AC và AD là hai tia phân giác của hai góc kề bù nhau, nên: $AC \perp AD$.

BC và BD là hai tia phân giác của hai góc kề bù nhau, nên: $BC \perp BD$.

2) Vì $xy \parallel mn \Rightarrow \widehat{yAB} = \widehat{ABm}$ (so le trong). Vậy $\widehat{A_3} = \widehat{B_2}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{yAB}$ và $\frac{1}{2}\widehat{ABm}$). Suy ra: $AD \parallel BC$ (có hai góc so le trong bằng nhau).

$xy \parallel mn \Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{ABn}$ (hai góc so le trong). Vậy $\widehat{A_2} = \widehat{B_3}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{xAB}$ và $\frac{1}{2}\widehat{ABn}$). Suy ra: $AC \parallel BD$ (có hai góc so le trong bằng nhau).

3) $AD \parallel BC$ (theo chứng minh 2), $BD \perp BC$ (theo chứng minh 1), vậy $AD \perp BD$ (BD vuông góc với một trong hai đường song song thì vuông góc với đường còn lại). Suy ra: $\widehat{ADB} = 90^\circ$.

Tương tự: $AD \parallel BC$ (theo chứng minh 2); $AD \perp AC$ (theo chứng minh 1), vậy $AC \perp BC$ (như trên). Suy ra: $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

6. Theo đầu bài $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc nhưng chúng không bằng nhau. Vậy chúng chỉ có thể bù nhau, tức là: $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$. (1)

1) Theo đề bài: $\widehat{A} - \widehat{B} = 30^\circ$. (2)

Từ (1) và (2), ta có: $2\widehat{A} = 210^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 105^\circ$.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{A} - 30^\circ = 105^\circ - 30^\circ = 75^\circ$.

2) $2\widehat{A} = 3\widehat{B} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{3\widehat{B}}{2}$. (3)

$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$. (4)

Thay (3) vào (4), ta có:

$$\frac{3\widehat{B}}{2} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{B} + 2\widehat{B} = 360^\circ \Leftrightarrow 5\widehat{B} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 72^\circ.$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} + 72^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 108^\circ.$$

7. (hình 64)

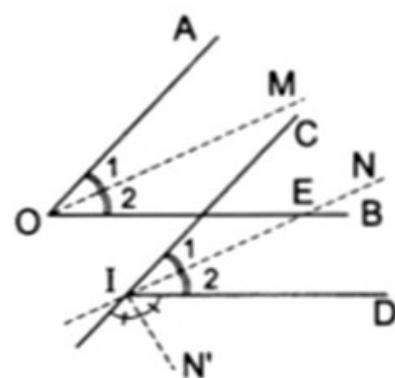
1) Ta chứng minh trường hợp 2 góc cùng nhọn (hai góc cùng tù chứng minh tương tự).

GT $\widehat{AOB}$ và $\widehat{CID}$ cùng nhọn;

$OA \parallel IC$; $OB \parallel ID$; $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$; $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$.

KL 1) $OM \parallel IN$.

2) $OM \perp IN$ nếu 1 góc nhọn, 1 góc tù.



Hình 64

• OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ nên $\widehat{O}_2 = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. (1)

• ON là tia phân giác của góc $\widehat{COD}$ nên $\widehat{I}_2 = \frac{1}{2}\widehat{COD}$. (2)

Mà: $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (định lý) suy ra: $\widehat{O}_2 = \widehat{I}_2$. (3)

• IN cắt OB tại E . Vì $OB \parallel ID$, ta có: $\widehat{I}_2 = \widehat{NEB}$ (đồng vị). (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $\widehat{O}_2 = \widehat{NEB}$.

Hai góc này ở vị trí đồng vị bằng nhau, nên: $OM \parallel IN$.

2) (HS tự vẽ hình) Kéo dài tia OI có tia IC' .

Có $\widehat{CID}$ là góc nhọn nên $\widehat{DIC'}$ là góc tù (hai góc kề bù nhau).

Vậy ta có $\widehat{AOB}$ và $\widehat{DIC'}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song có $\widehat{AOB}$ là góc nhọn, còn $\widehat{DIC'}$ là góc tù. Theo câu 1 ta đã chứng minh: $OM \parallel IN$. (1)

Mà $IN' \perp IN$ (tính chất đường phân giác của hai góc kề bù). (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $IN' \perp OM$ (hai đường thẳng $OM \parallel IN$ mà $IN' \perp IN$ cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai là OM).

8*. (hình 65)

1) Từ A kẻ $Am \parallel b$ (Am nằm trong góc aOb).

Kẻ tia Ay là tia phân giác của aAm , ta có:
 $Ay \parallel Ox$. Thật vậy:

$$\widehat{aOx} = \frac{1}{2} \widehat{aOb} \quad (Ox \text{ là tia phân giác}). \quad (1)$$

$$\widehat{aOy} = \frac{1}{2} \widehat{aOm} \quad (Ay \text{ là tia phân giác}). \quad (2)$$

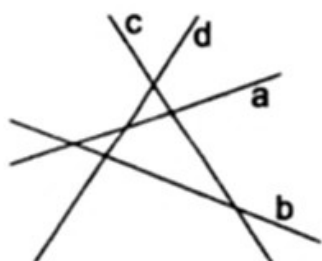
Mà $\widehat{aAm} = \widehat{aOb}$ (đồng vị), vậy $\widehat{aOx} = \widehat{aAy}$.

Suy ra $Ay \parallel Ox$ (vì có hai góc đồng vị bằng nhau).

2) Vẽ tia $Az \perp Ay$ ta có $Az \perp Ox$. Thật vậy $Ay \parallel Ox$ (theo chứng minh 1).

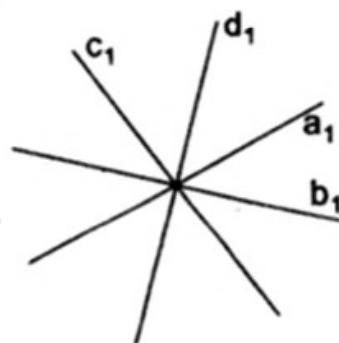
Mà $Ax \perp Ay$ suy ra: $Ax \perp Ox$ (Ax vuông góc với một trong hai đường song song thì phải vuông góc với đường còn lại).

9*. (hình 66)



a)

Hình 66



b)

Giả sử bốn đường thẳng đã cho là a, b, c, d và không có hai đường thẳng nào song song (hình 66a).

Ta lấy điểm O tùy ý trên mặt phẳng đó.

Tại O kẻ các đường thẳng $a_1 // a$; $b_1 // b$; $c_1 // c$; $d_1 // d$.

Bốn đường thẳng này đồng quy tại O và chia mặt phẳng thành tám góc phân biệt (không có phần chung).

Tổng tám góc đó là 360° .

Do vậy ta tìm được một góc có số đo không quá: $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

(Nếu cả tám góc lớn hơn 45° thì tổng tám góc sẽ lớn hơn 360° , điều này vô lí) (hình 66b).

Giả sử tìm được góc $\widehat{c_1 O d_1} < 45^\circ$ thì ta có góc hợp bởi 2 đường thẳng c và d cũng không quá 45° vì nó là hai góc có cạnh tương ứng song song ($c // c_1$; $d // d_1$).

TAM GIÁC

Chủ đề 1

CÁC GÓC CỦA TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. **Định lý:** Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .
2. Trong một tam giác có thể có cả ba góc đều nhọn (gọi là tam giác nhọn). Nhưng không thể có quá một góc tù, quá một góc vuông (tam giác có một góc tù gọi là tam giác tù, tam giác có một góc vuông gọi là tam giác vuông).
3. Trong một tam giác vuông thì hai góc nhọn phụ nhau (vì có một góc bằng 90° nên tổng hai góc nhọn còn lại bằng 90°).
4. Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc trong của tam giác ấy. Vậy: Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG. *Tính các góc trong tam giác*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Phần này chủ yếu là biết tính số đo các góc của tam giác. Từ tính toán đó suy ra so sánh hai hay nhiều góc bằng nhau hoặc lớn hơn, nhỏ hơn...

– *Chú ý:*

- Trong một tam giác thường biết hai góc thì tính được góc thứ ba.
- Trong một tam giác vuông biết được một góc nhọn thì biết được góc nhọn kia.
- Yêu cầu vận dụng các định lý về góc trong tam giác: tính chất đường phân giác của góc, tính chất đường song song, vuông góc, tính chất hai góc kề bù, hai góc đối đỉnh, hai góc phụ nhau vào việc tính toán các góc theo đề bài.

II. VÍ DỤ

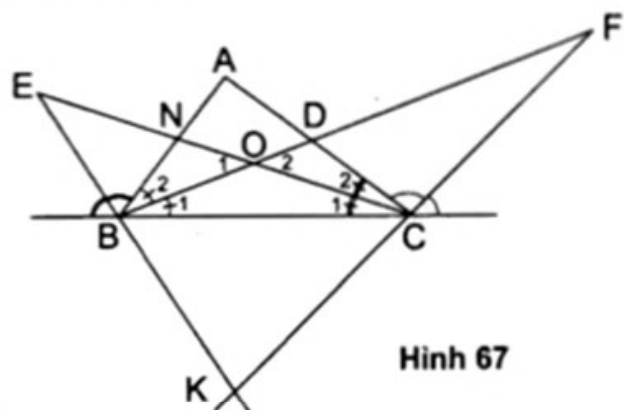
Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có góc $\hat{A} = \alpha^\circ$ ($0^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$), các đường phân giác BD và CN cắt nhau tại O . Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh B cắt tia CN tại E . Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh C cắt tia BD tại F .

1) Tính số đo của góc $\widehat{BOC}$.

2) Chứng minh: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = \frac{\alpha^\circ}{2}$.

3) Tia EB và tia FC cắt nhau tại K .

Chứng minh rằng $\widehat{BOC}$ và $\hat{K}$ là hai góc bù nhau.



Hình 67

Lời giải

GT	$\triangle ABC$: $\hat{A} = \alpha^\circ$ ($0^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$), $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$, $\widehat{xBE} = \widehat{EBA}$, $\widehat{yCF} = \widehat{FCA}$.
----	--

KL	1) Tính $\widehat{BOC}$; 2) $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = \frac{\alpha^\circ}{2}$; 3) $\widehat{BOC} + \hat{K} = 180^\circ$.
----	--

1) $\triangle ABC$ có BD và CN là hai tia phân giác nên:

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{2}\hat{B}; \hat{C}_1 = \frac{1}{2}\hat{C} \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}). \quad (1)$$

$$\triangle BOC \text{ có } \widehat{BOC} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1). \quad (2)$$

$$\text{Mà: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \alpha^\circ. \quad (3)$$

$$\text{Thay (1) vào (2), ta có: } \widehat{BOC} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}). \quad (4)$$

$$\text{Thay (3) vào (4), ta có: } \widehat{BOC} = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha^\circ) = 90^\circ + \frac{\alpha^\circ}{2}. \quad (5)$$

2) Xét $\triangle BEO$ và $\triangle COF$, có: $BE \perp BO$ và $CF \perp CO$ (2 đường phân giác của hai góc kề bù nhau).

Vậy $\triangle BOE$ và $\triangle COF$ là hai tam giác vuông tại B và C chúng có $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (hai góc đối đỉnh). (6)

$$\widehat{O_1} + \widehat{E} = 90^\circ \text{ (hai góc nhọn phụ nhau).} \quad (7)$$

$$\widehat{O_2} + \widehat{F} = 90^\circ. \quad (8)$$

Từ (6), (7) và (8), ta có : $\widehat{E} = \widehat{F}$.

Mà $\widehat{BOC} = \widehat{E} + \widehat{EBO}$ (tính chất góc ngoài của tam giác). (9)

Thay (5) vào (9), ta có: $90^\circ + \frac{\alpha^\circ}{2} = \widehat{E} + 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} = \frac{\alpha^\circ}{2}$.

$$\text{Vậy } \widehat{E} = \widehat{F} = \frac{\alpha^\circ}{2}.$$

3) $\triangle BFK$ có $\widehat{B} = 90^\circ$ ($BE \perp BO$ – theo chứng minh câu 2)

$$\text{Vậy: } \widehat{K} + \widehat{F} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{K} + \frac{\alpha^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{K} = 90^\circ - \frac{\alpha^\circ}{2}. \quad (10)$$

Từ (5) và (10), ta có:

$$\widehat{BOC} + \widehat{K} = \left(90^\circ + \frac{\alpha^\circ}{2} \right) + \left(90^\circ - \frac{\alpha^\circ}{2} \right) = 180^\circ.$$

Vậy $\widehat{BOC}$ và $\widehat{K}$ là 2 góc kề bù nhau.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$. Đường phân giác AD của góc A cắt BC tại D. Tính số đo của các góc $\widehat{ADB}$ và $\widehat{ADC}$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC; \widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ, \widehat{A_1} = \widehat{A_2}.$
KL	Tính số đo $\widehat{ADB}$ và $\widehat{ADC}$?

Cách 1: $\triangle ABD$ và $\triangle ADC$ có tổng các góc trong bằng nhau (hình 68).

Mà có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, góc B lớn hơn C là 20° . Vậy $\widehat{D_1}$ phải nhỏ hơn $\widehat{D_2}$ là 20° .

Tức là: $\widehat{D_2} - \widehat{D_1} = 20^\circ$. Mà $\widehat{D_2} + \widehat{D_1} = 180^\circ$ (B, C, D thẳng hàng), vậy:

$$2\widehat{D_2} = 200^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 100^\circ \text{ và } \widehat{BDA} = 80^\circ.$$

Cách 2:

$$\widehat{D_2} = \widehat{B} + \widehat{A_1} \text{ (góc ngoài của } \triangle ABD \text{)} \quad (1)$$

$$\widehat{D_1} = \widehat{C} + \widehat{A_2} \text{ (góc ngoài của } \triangle ADC \text{)} \quad (2)$$

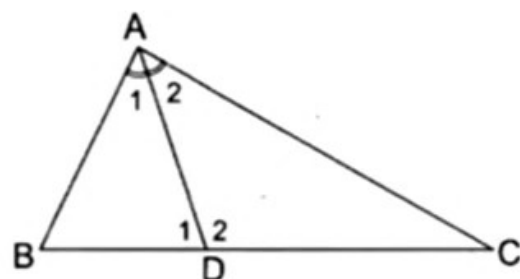
Từ (1) và (2), ta có:

$$\widehat{D_2} - \widehat{D_1} = (\widehat{B} - \widehat{C}) + (\widehat{A_1} - \widehat{A_2}).$$

$$\text{Mà } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (giả thiết), vậy } \widehat{A_1} - \widehat{A_2} = 0; \widehat{D_2} - \widehat{D_1} = 20^\circ + 0^\circ. \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{D_2} + \widehat{D_1} = 180^\circ \text{ (B, C, D thẳng hàng)} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4), ta có: } 2\widehat{D_2} = 200^\circ \Rightarrow \widehat{D_2} = 100^\circ. \text{ Vậy } \widehat{D_1} = 80^\circ.$$

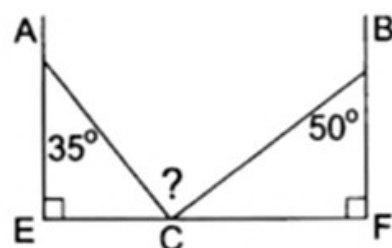


Hình 68

III. BÀI TẬP

1. Trong hình 69 biết $AE \perp EF$; $BF \perp EF$ và $\widehat{EAC} = 35^\circ$; $\widehat{CBF} = 50^\circ$. Tính số đo $\widehat{ACB}$.

2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. Từ A hạ $AH \perp BC$ kẻ tia AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Biết $\widehat{HAM} = 15^\circ$. Tìm số đo của các góc B và C.



Hình 69

3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 110^\circ$; $\widehat{C} = 30^\circ$. Kẻ tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A cắt đường thẳng BC tại E. Tính số đo của góc $\widehat{AEB}$. Nhận xét gì về các góc của $\triangle AEB$?
4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 77^\circ$ ($AB < AC$). Trên AC lấy điểm D sao cho thỏa mãn điều kiện: $\widehat{DBC} = \widehat{C}$; $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$. Tính số đo của góc B và C của $\triangle ABC$.
5. Cho góc $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Từ điểm A trên Ox và điểm B trên Oy vẽ các tia Am và Bn về phía trong của góc vuông sao cho góc $\widehat{xAm} = \widehat{OAB}$ và $\widehat{yBn} = \widehat{OBA}$. Chứng minh rằng: $Am \parallel Bn$.
6. Tính các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:
- 1) Tam giác đó có ba góc trong bằng nhau.
 - 2) Tam giác đó có hai góc trong bằng nhau, còn góc kia bằng 40° .
 - 3) Số đo của các góc A, B, C theo tỉ lệ: $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} = 1 : 3 : 4$.

7. Cho ΔABC kẻ các tia BD và CE là các tia phân giác của góc $\hat{B}$ và góc $\hat{C}$ chúng cắt nhau tại I.

1) Chứng minh rằng góc $\widehat{BIC}$ là góc tù.

2) Chứng minh rằng nếu góc nhọn tạo bởi 2 tia phân giác BD và CE có số đo bằng 45° thì tam giác đó là tam giác vuông.

8*. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại E. Các tia phân giác của góc $\widehat{ACD}$ và $\widehat{ABD}$ cắt nhau tại K. Chứng minh rằng: $\widehat{BKC} = \frac{1}{2}(\widehat{CAE} + \widehat{BDE})$

9*. Cho ΔABC và điểm M nằm trong tam giác

1) Chứng minh: $\widehat{BMC} = \hat{A} + \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$.

2) Biết số đo: $\widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ và tia BM là tia phân giác của góc $\hat{B}$.

Chứng minh tia CM cũng là tia phân giác của góc $\hat{C}$.

10. **Đố vui:** Ai là người thắng cuộc?

Hai người chơi cờ bằng cách: Vẽ một tam giác rồi lấy bên trong tam giác đó 10 điểm, sao cho trong số 13 điểm đó (3 điểm là 3 đỉnh tam giác và 10 điểm bên trong) không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Cách chơi: Lần lượt người nọ đến người kia, mỗi người nối hai điểm đã cho để được một đoạn thẳng (đoạn thẳng vẽ sau không được cắt đoạn thẳng đã vẽ trước đó). Ai vẽ được một tam giác thì được kẻ tiếp. Cuối cùng ai là người vẽ được nhiều tam giác hơn là người thắng cuộc. Cuối cuộc chơi người thứ nhất thấy mình vẽ được 12 tam giác. Hỏi người thứ nhất có thắng cuộc không?

Chủ đề 2

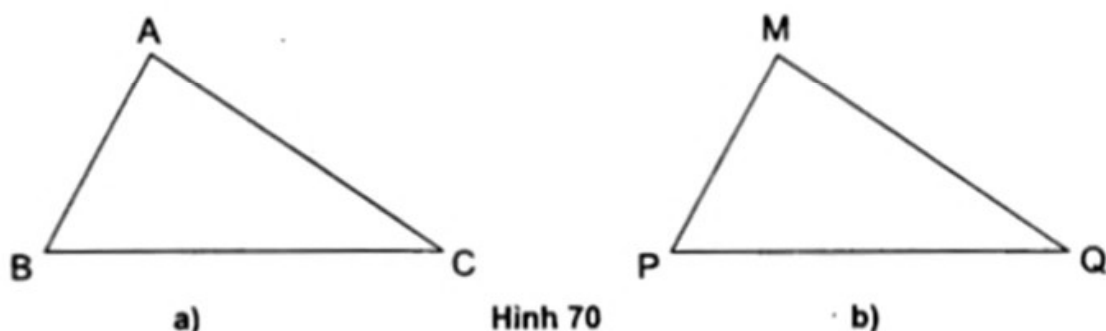
QUAN HỆ BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. **Định nghĩa:** Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau. Kí hiệu: $\triangle ABC = \triangle MPQ$.

Để dễ suy luận người ta thường viết các chữ cái chỉ tên các đỉnh tương ứng được viết theo thứ tự tương ứng. Chẳng hạn: viết $\triangle ABC = \triangle MPQ$ nếu

$AB = MP$; $AC = MQ$; $BC = PQ$; $\hat{A} = \hat{M}$; $\hat{B} = \hat{P}$; $\hat{C} = \hat{Q}$ (hình 70).



2. Ba trường hợp bằng nhau của tam giác (thừa nhận không chứng minh)

– *Trường hợp thứ nhất:* Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau (viết tắt c.c.c).

– *Trường hợp thứ hai:* Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau (viết tắt c.g.c).

– *Trường hợp thứ ba:* Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau (viết tắt g.c.g).

3. Tính chất bắc cầu

– Tương tự tính chất bắc cầu về đường thẳng song song (Chương 1): hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

– Với tam giác: Nếu hai tam giác cùng bằng tam giác thứ ba thì hai tam giác đó bằng nhau.

* Nếu $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ và $\triangle ABC = \triangle A_2B_2C_2$ thì:

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$$

4. Ứng dụng của các tam giác bằng nhau

Khi các tam giác bằng nhau thì các yếu tố tương ứng của nó cũng bằng nhau. Người ta sử dụng kết quả này để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Trường hợp bằng nhau thứ nhất của tam giác cạnh – cạnh – cạnh (c.c.c)

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. *Chú ý:* Cho tam giác ABC và tam giác A'B'C' thì ta ngầm hiểu AB và A'B' là cặp cạnh tương ứng, tương tự góc A và góc A' gọi là cặp góc tương ứng,

– Muốn tìm được cạnh tương ứng và góc tương ứng, ta phải tưởng tượng dịch chuyển sao cho tam giác này trùng khít lên tam giác kia (bởi vì các tam giác có thể ở các vị trí khác nhau).

– Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có thể chồng khít lên nhau. Khái niệm chồng khít tức là ba đỉnh trùng nhau và tất nhiên ba góc tương ứng, ba cạnh tương ứng cũng trùng nhau.

– Để hiểu rõ hơn nếu trên vở có hai tam giác ở hai vị trí khác nhau mà bằng nhau. Ta lấy tấm bìa cắt một hình tam giác bằng hình tam giác thứ nhất trên vở, rồi đem tấm bìa đó đặt chồng lên hình tam giác thứ hai trên vở sẽ thấy chúng trùng khít nhau.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xem hình vẽ 71a; 71b; 71c những đoạn thẳng đánh dấu giống nhau là những đoạn thẳng bằng nhau. Những tam giác nào bằng nhau trong hình vẽ đó?

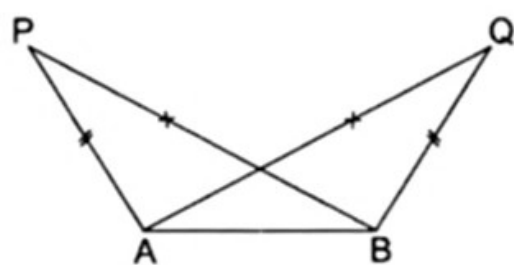
Lời giải

1) *Hình 71a:* $AP = BQ$, $PB = QA$, AB chung. Vậy $\triangle APB = \triangle BQA$ (c.c.c).

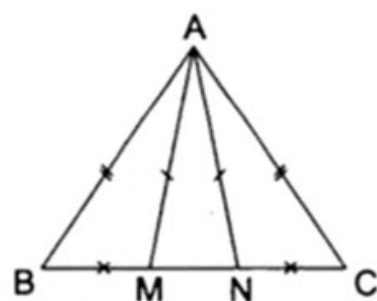
2) *Hình 71b:*

a) Ta có: $AM = AN$, $AB = AC$, $BM = CN$.

Vậy $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.c.c).



Hình 71a



Hình 71b

b) $\triangle ABN$ và $\triangle ACM$, có:
 $AN = AM$, $AB = AC$ và $BM = CN$.
 Mà $BM + MN = NC + MN$ (cùng cộng thêm MN).
 Suyra $BN = CM$.

Vậy $\triangle ABN = \triangle ACM$ (c.c.c).

3) Hình 71c: $IC = ID$, $IA = IB$, $AC = DB$. Vậy $\triangle IAC = \triangle IBD$ (c.c.c).

Ví dụ 2. Trong hình 72: Biết $AD = BC$ và $AB = CD$. Chứng minh rằng:
 $AD \parallel BC$ và $AB \parallel CD$.

Lời giải

Nối B với D xét $\triangle ABD$ và $\triangle CDB$, có:

$AD = BC$; $AB = CD$ (giả thiết).

Cạnh BD là cạnh chung.

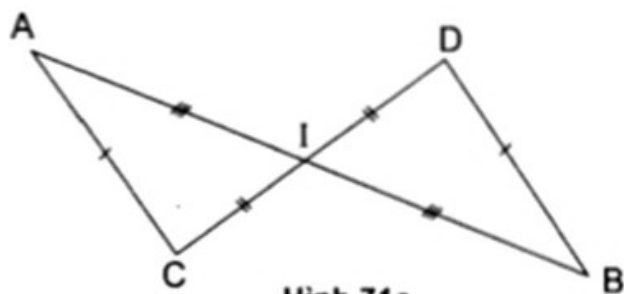
Vậy $\triangle ABD = \triangle CDB$ (c.c.c), suy ra các góc tương ứng bằng nhau:

$$\widehat{D_1} = \widehat{B_1}; \widehat{B_2} = \widehat{D_2}$$

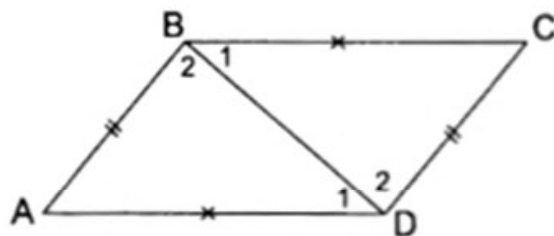
Chú ý: Hai tam giác này trùng nhau khi cố định $\triangle CDB$ và chuyển dịch $\triangle ABD$ cho đỉnh A trùng đỉnh C. Đỉnh D của $\triangle ABD$ trùng với đỉnh B của $\triangle CDB$ và đỉnh B của $\triangle ABD$ trùng với đỉnh D của $\triangle CDB$. Từ đó ta có các đỉnh tương ứng, các góc tương ứng và các cạnh tương ứng.

Mà $\widehat{D_1} = \widehat{B_1}$ ($\widehat{D_1}$, $\widehat{B_1}$ ở vị trí so le trong), vậy $BC \parallel AD$ (dấu hiệu nhận biết).

$\widehat{B_2} = \widehat{D_2}$ ($\widehat{B_2}$, $\widehat{D_2}$ ở vị trí so le trong), vậy $AB \parallel CD$ (dấu hiệu nhận biết).



Hình 71c

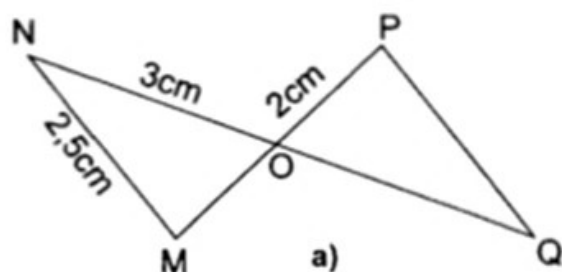


Hình 72

III. BÀI TẬP

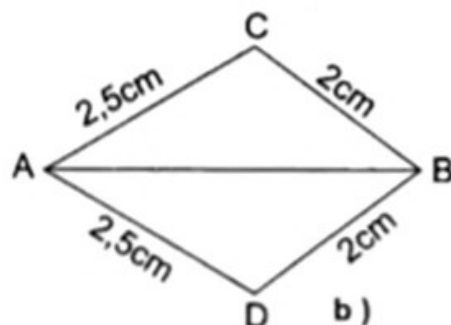
I. 1) Trên hình 73a: Cho $\triangle NOM = \triangle QOP$ và các cạnh có số đo ghi trên hình vẽ. Tính các cạnh còn lại của 2 tam giác. Chứng minh rằng: $MN \parallel PQ$.

2) Trên hình 73b: Biết $AC = AD = 2,5\text{cm}$ và $BC = BD = 2\text{cm}$. Chứng minh: $\widehat{CBA} = \widehat{ABD}$.



a)

Hình 73



b)

2. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$, trên Ox và Oy lấy điểm A và B sao cho $OA = OB$. Vẽ hai đường tròn tâm A và tâm B có cùng độ dài bán kính (bán kính nhỏ hơn OA) chúng cắt nhau tại hai điểm E và F. Chứng minh rằng:

1) $\triangle OEA = \triangle OEB$; $\triangle OFA = \triangle OFB$

2) Ba điểm O, E, F thẳng hàng.

3) OF là tia phân giác của góc $\widehat{AFB}$.

3. Cho đoạn thẳng $AB = 4\text{cm}$. Vẽ đường tròn (A; 3cm) và đường tròn (B; 2,5 cm), chúng cắt nhau tại M và N. Chứng minh:

1) $\triangle AMB = \triangle ANB$.

2) AB là tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$.

4. Trên hình 74 cho biết:

$$EA = EB; FA = FB; QA = QB$$

1) Chứng minh: $\triangle AEF = \triangle BEF$; $\triangle AEQ = \triangle BEQ$

2) Chứng minh: 3 điểm E, F, Q thẳng hàng.

5. Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm B làm tâm vẽ đường tròn (B; AC). Lấy C làm tâm vẽ đường tròn (C; AB). Hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm E và F thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là BC.

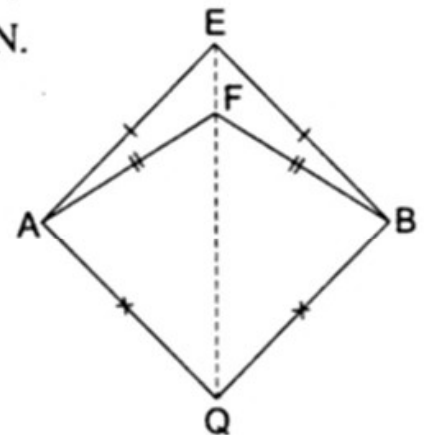
1) Chứng minh các tam giác $\triangle ABC = \triangle ECB = \triangle FCB$.

2) Chứng minh $AB \parallel CF, AC \parallel BF$.

3) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ECA$.

4) Chứng minh $AE \parallel BC$.

6. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$ và H là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh AH vuông góc với BC.



Hình 74

DẠNG 2. Trường hợp bằng nhau thứ hai của tam giác cạnh – góc – cạnh (c.g.c)

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Theo thứ tự cạnh, góc, cạnh nghĩa là góc bằng nhau phải là góc xen giữa hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

Lưu ý: Nếu đảo thứ tự: góc – cạnh – cạnh hoặc cạnh – cạnh – góc là không đúng.

2. “Hai cạnh và góc xen giữa” hai cạnh này có chung điểm đầu và điểm đầu đó chính là đỉnh của góc xen giữa và hai cạnh của góc chính là hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

3. Với tam giác vuông: Ta thấy tất cả các tam giác vuông bao giờ cũng có góc vuông bằng nhau. Đó là góc xen giữa hai cạnh góc vuông. Nên trong hai tam giác vuông nếu có hai cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Kết luận này được gọi là hệ quả.

Hệ quả cũng là một định lý nhưng định lý này được suy ra trực tiếp từ một định lý hoặc một tính chất toán học.

4. Dấu hiệu góc có thể cho trực tiếp, có thể gián tiếp chẳng hạn:

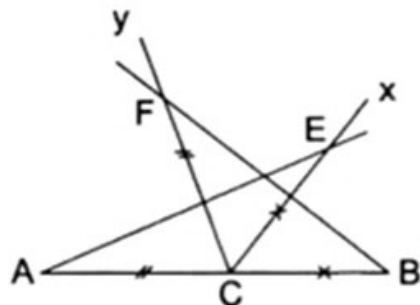
- Hai tam giác có một góc chung.
- Hai góc đối đỉnh
- Góc của các đường song song hay vuông góc.
- Tia phân giác của góc $\rightarrow$ chia góc thành hai phần bằng nhau ...

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho điểm C nằm giữa 2 điểm A và B. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa đoạn AB vẽ tia Cx và Cy sao cho góc $\widehat{BCx} = 60^\circ$; $\widehat{BCy} = 120^\circ$. Lấy điểm E trên Ox và điểm F trên Oy sao cho $CE = CB$; $CF = CA$. Chứng minh: $AE = BF$.

Lời giải

	C nằm giữa A và B.
GT	$\widehat{BCx} = 60^\circ$, $\widehat{BCy} = 120^\circ$, $CE = CB$, $CF = CA$.
KL	$AE = BF$.



Hình 75

Xét $\triangle ACE$ và $\triangle FCB$ (hình 75), có:

C nằm giữa A và B (giả thiết), vậy:

$$\widehat{ACE} + \widehat{BCE} = 180^\circ \text{ (A, B, C thẳng hàng)}.$$

Mà: $\widehat{BCE} = 60^\circ$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ACE} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = 120^\circ$.

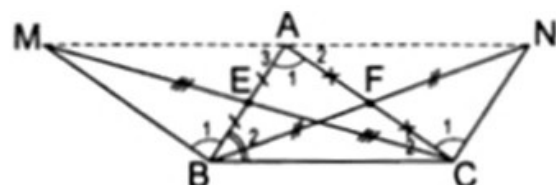
$$\widehat{BCF} = 120^\circ \text{ (giả thiết), vậy } \widehat{ACE} = \widehat{BCF} = 120^\circ.$$

$$CE = CB \text{ (giả thiết); } CF = CA \text{ (giả thiết).}$$

Suy ra $\triangle ACE = \triangle FCB$ (c.g.c). Vậy $AE = BF$ (cạnh tương ứng).

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ các điểm E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Trên tia đối của tia FB lấy $FN = FB$. Trên tia đối của tia EC lấy $EM = EC$. Chứng minh:

- 1) $AB \parallel NC, AC \parallel MB$.
- 2) $\triangle AEM = \triangle BEC, \triangle AFN = \triangle CFB$.
- 3) Ba điểm M, A, N thẳng hàng.
- 4) $AM = AN$.



Hình 76

Lời giải

GT | $\triangle ABC, AE = EB, AF = FC, BF = FN, CE = EM$.

KL | 1) $AB \parallel NC, AC \parallel MB$.
 2) $\triangle AEM = \triangle BEC, \triangle AFN = \triangle CFB$.
 3) $\overline{MAN}$.
 4) $AM = AN$.

Trên hình 76:

1) Xét $\triangle AFB$ và $\triangle CFN$ có:

$$AF = FC \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{AFB} = \widehat{CFN} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$FN = FB \text{ (giả thiết).}$$

Vậy $\triangle AFB = \triangle CFN$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{A_1}$ và $\widehat{C_1}$ là hai góc ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CN$.

Tương tự xét $\triangle AEC$ và $\triangle BEM$ có:

$$AE = EB \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{AEC} = \widehat{BEM} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$EM = EC \text{ (giả thiết).}$$

Vậy $\triangle AEC = \triangle BEC$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$ là hai góc so le trong. Vậy $AC \parallel MB$.

2) Xét $\triangle AEM$ và $\triangle BEC$ có:

$$AE = EB \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{AEM} = \widehat{BEC} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$EM = EC \text{ (giả thiết).}$$

Suy ra: $\triangle AEM = \triangle BEC$ (c.g.c).

Xét $\triangle AFN$ và $\triangle CFB$ có:

$$FA = FC \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{AFN} = \widehat{CFB} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$FN = FB \text{ (giả thiết).}$$

Suy ra: $\triangle AFN = \triangle CFB$ (c.g.c).

3) Cách 1: $\triangle AEM = \triangle BEC$ (theo chứng minh trên).

Suy ra $\widehat{A_3} = \widehat{B_2}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_2}$ là 2 góc so le trong nên $AM \parallel BC$. (1)

$\triangle AFN = \triangle CFB$ (chứng minh trên). Suy ra: $\widehat{A_2} = \widehat{C_2}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{A_2}$ và $\widehat{C_2}$ là 2 góc so le trong nên $AN \parallel BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: A, M, N thẳng hàng (theo tiên đề Ôclit).

Cách 2: $\triangle AEM = \triangle BEC$ (chứng minh trên), suy ra $\widehat{A_3} = \widehat{B_2}$. (3)

$\triangle AFN = \triangle CFB$ (chứng minh trên), suy ra: $\widehat{A_2} = \widehat{C_2}$. (4)

Cộng hai vế (3) và (4), ta có: $\widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{B_2} + \widehat{C_2}$.

Mà $\widehat{B_2} + \widehat{C_2} + \widehat{A_1} = 180^\circ$ (tổng các góc trong tam giác), nên:

$$\widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_1} = 180^\circ.$$

Vậy A, M, N thẳng hàng.

4) Từ chứng minh trên, ta có: $\triangle AEM = \triangle BEC \Rightarrow AM = BC.$ (5)

$$\triangle AFN = \triangle CFB \Rightarrow AN = CB. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), suy ra: $AM = AN.$

III. BÀI TẬP

7. Cho $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$ trên cạnh B_1C_1 lấy điểm M_1 , trên cạnh B_2C_2 lấy điểm M_2 sao cho $B_1M_1 = B_2M_2$. Chứng minh: $A_1M_1 = A_2M_2$.
8. Cho góc $\widehat{xOy}$ trên Ox lấy 2 điểm A và B. Trên Oy lấy 2 điểm C và D sao cho $OA = OC$; $OB = OD$. Nối A với D, C với B chúng cắt nhau tại I. Chứng minh rằng:
 - 1) $\triangle OCB = \triangle OAD$.
 - 2) $\triangle DAB = \triangle BCD$.
9. Chứng minh rằng nếu đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm O sao cho O vừa là trung điểm của đoạn thẳng AB vừa là trung điểm của đoạn thẳng CD thì ta có:
 - 1) $AC \parallel BD$ và $AC = BD$.
 - 2) $CB \parallel AD$ và $CB = AD$.
10. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A} = 90^\circ$. M là trung điểm của cạnh AB. Nối CM và trên tia đối của tia MC lấy $MH = MC$. Chứng minh rằng: $HB \perp BA$.
11. Cho điểm M trên đoạn thẳng AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa đoạn thẳng AB. Kẻ tia Mx sao cho $\widehat{AMx} = 60^\circ$ và tia My sao cho góc $\widehat{BMy} = 60^\circ$. Trên tia Mx lấy điểm C sao cho $MC = MA$; Trên tia My lấy điểm D sao cho $MD = MB$.
 - 1) Chứng minh: $AD = CB$.
 - 2) Lấy E là trung điểm của AD; F là trung điểm của CB. Chứng minh $\widehat{EMF} = 60^\circ$.
12. Cho điểm C nằm trên đoạn thẳng MN; Ix là đường trung trực của đoạn MC (I thuộc MC); Ky là đường trung trực của đoạn CN (điểm K thuộc CN). Kẻ đường thẳng d qua C cắt Ix tại E và cắt Ky tại F. Chứng minh: $ME \parallel NF$.

DẠNG 3. Trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác góc – cạnh – góc (g.c.g)

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Trong tam giác có tổng ba góc trong bằng 180° tính chất này có ý nghĩa quan trọng:

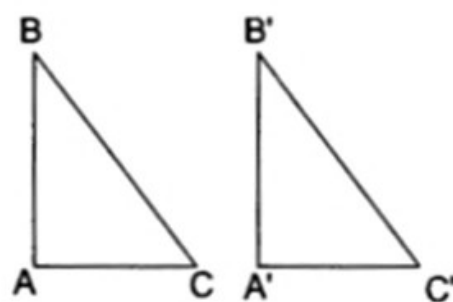
- Trong các trường hợp bằng nhau của tam giác, số yếu tố góc cho không quá hai (vì cho biết hai góc ta tính được góc thứ ba nên cho biết ba góc là thừa).
- Trường hợp hai góc kề với một cạnh (trường hợp thứ ba). Trong hai góc cho nếu có một góc không kề với cạnh mà bằng nhau thì ta cũng có thể suy ra góc thứ ba (là góc kề với cạnh bằng nhau) cũng bằng nhau.

2. Ứng dụng vào các tam giác vuông $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$, ta có:

$$\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ.$$

Nếu cạnh huyền $BC = B'C'$; Chỉ cần $\widehat{B} = \widehat{B'}$ thì ta suy ra được $\widehat{C} = \widehat{C'}$ (2 góc nhọn phụ nhau) vậy $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.g.c).

*Suy ra: Hai tam giác vuông có cạnh huyền bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



Hình 78

3. Qua ba trường hợp bằng nhau của tam giác thường ta thấy một tam giác được xác định khi biết ba yếu tố. Trong đó yếu tố góc không quá hai.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2\text{cm}$, $AC = 2,5\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$. Từ A kẻ $C'B' \parallel BC$, từ B kẻ $A'C' \parallel AC$, từ C kẻ $A'B' \parallel AB$. Tính chu vi $\triangle A'B'C'$.

Lời giải

GT | $\triangle ABC$ $AB = 2\text{cm}$, $AC = 2,5\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$.

Qua A kẻ $C'B' \parallel BC$, qua B kẻ $A'C' \parallel AC$,
qua C kẻ $A'B' \parallel AB$.

KL | Tính chu vi $\triangle A'B'C'$.

Chứng minh (hình 79):

– Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CB'A$, có:

AC chung;

$$\widehat{A_1} = \widehat{C_2} \quad (B'C' \parallel BC);$$

$$\widehat{A_2} = \widehat{C_3} \quad (A'B' \parallel AB).$$

Vậy $\triangle ABC = \triangle CB'A$ (g.c.g), suy ra:

$$AB' = BC \quad (1), \quad CB' = AB. \quad (2)$$

– Xét $\triangle ABC$ và $\triangle BC'A$, có:

AB chung;

$$\widehat{A_2} = \widehat{B_1} \quad (A'C' \parallel AC);$$

$$\widehat{B_2} = \widehat{A_3} \quad (B'C' \parallel BC).$$

Vậy $\triangle ABC = \triangle BC'A$ suy ra:

$$AC' = BC. \quad (3)$$

$$BC' = AC. \quad (4)$$

– Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'CB$, có:

BC chung;

$$\widehat{B_2} = \widehat{C_1} \quad (A'B' \parallel AB);$$

$$\widehat{C_2} = \widehat{B_2} \quad (A'C' \parallel AC).$$

Vậy $\triangle ABC = \triangle A'CB$ (g.c.g), suy ra:

$$A'C = AB. \quad (5)$$

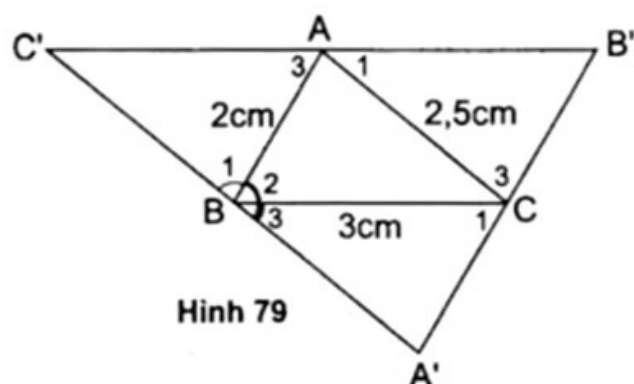
$$BA' = AC. \quad (6)$$

Cộng (1), (2), (3), (4), (5), (6), ta có:

$$\begin{aligned} AB' + CB' + AC' + BC' + A'C + BA' &= BC + AB + BC + AC + AB + AC \\ (AB' + AC') + (B'C + CA') + (C'B + BA') &= 2(AB + AC + BC) \end{aligned}$$

$$B'C' + B'A' + C'A' = 2(AB + AC + BC) = 2(2 + 2,5 + 3) = 15\text{cm}.$$

Vậy: Chu vi $\triangle A'B'C'$ bằng hai lần chu vi $\triangle ABC$; Với cách vẽ đó ta được $\triangle A'B'C'$ trong đó $\triangle A'B'C'$ được chia thành bốn tam giác bằng nhau và bằng $\triangle ABC$ ban đầu.



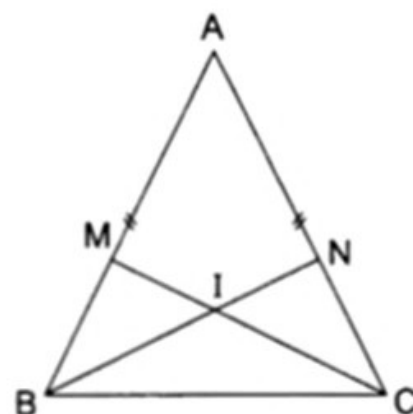
Hình 79

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ ($AB = AC$) trên AB lấy điểm M , trên AC lấy điểm N sao cho $AM = AN$. Nối BN và CM chúng cắt nhau tại I . Chứng minh rằng:

- 1) $BN = CM$;
- 2) $\triangle BMC = \triangle CNB$ và $\triangle BIM = \triangle CIN$;
- 3) AI là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC, AB = AC, AM = AN$; $BN \cap CM = \{I\}$.
KL	1) $BN = CM$. 2) $\triangle BMC = \triangle CNB, \triangle BIM = \triangle CIN$. 3) $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$.



Hình 80

Chứng minh (hình 80):

- 1) Xét $\triangle ABN$ và $\triangle ACM$, có:

$AB = AC$ (giả thiết);

$\widehat{ABN}$ chung;

$AM = AN$ (giả thiết).

Vậy $\triangle ABN = \triangle ACM$ (c.g.c), suy ra: $BN = CM$ (cạnh tương ứng).

- 2) a) Xét $\triangle BMC$ và $\triangle CNB$, có:

Cạnh BC chung;

$BN = CM$ (chứng minh 1).

Mặt khác: $AB = AC$ (giả thiết).

(1)

$AM = AN$ (giả thiết).

(2)

Lấy (1) – (2), ta được: $AB - AM = AC - AN$ hay $BM = CN$.

Vậy $\triangle BMC = \triangle CNB$ (c.c.c).

- b) Xét $\triangle BIM$ và $\triangle CIN$, có:

$\triangle ABN = \triangle ACM \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (theo chứng minh câu 1);

$\triangle BMC = \triangle CNB \Rightarrow \widehat{M_2} = \widehat{N_2}$ (theo chứng minh câu 2);

$BM = CN$ (theo chứng minh câu 2).

Vậy $\triangle BIM = \triangle CIN$ (g.c.g), suy ra: $BI = CI$ (cạnh tương ứng).

3) Xét $\triangle ABI$ và $\triangle ACI$, có:

$BI = CI$, $AB = AC$ (giả thiết), cạnh AI chung.

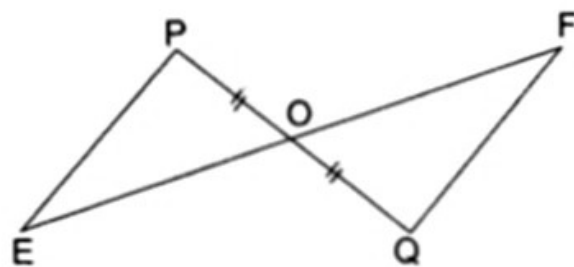
Vậy $\triangle ABI = \triangle ACI$ (c.c.c), suy ra: $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$ (góc tương ứng).

Vậy AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

III. BÀI TẬP

17. Trong hình 81: Cho biết $OP = OQ$ và $PE \parallel FQ$. Hãy chứng tỏ:

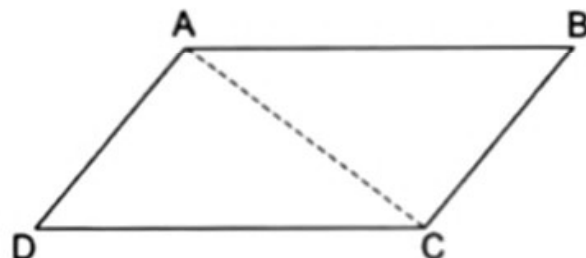
$$\triangle EOP = \triangle FOQ.$$



Hình 81

18. Trong hình 82: Cho biết $AB \parallel CD$ và $AD \parallel BC$. Chứng minh rằng:

$$AB = CD \text{ và } AD = BC.$$



Hình 82

19. Cho $\triangle MNP$ có $\widehat{M} = \widehat{N}$ kẻ tia ME là tia phân giác của góc $\widehat{M}$. Kẻ tia NF là tia phân giác của góc $\widehat{N}$. Chứng minh: $ME = NF$.
20. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = \widehat{C}$ (góc $\widehat{A}$ nhọn). Từ B hạ $BH \perp AC$, từ C hạ $CK \perp AB$.
- 1) Chứng minh rằng: $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cùng nhọn.
 - 2) Chứng minh rằng: $BH = CK$.
21. Cho $\triangle ABC$. Đường phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt đường phân giác của góc $\widehat{B}$ tại O . Từ O hạ $OE \perp AB$ (E thuộc AB). Từ O hạ đường $OF \perp AC$ (F thuộc AC); Từ O hạ $OI \perp BC$ (I thuộc BC). Chứng minh rằng: $OE = OF = OI$.
22. Cho đoạn thẳng AB và lấy I là trung điểm của đoạn AB . Qua A kẻ đường thẳng d_1 và qua B kẻ đường thẳng d_2 sao cho $d_1 \parallel d_2$. Qua I kẻ đường thẳng d_3 ; d_3 cắt d_1 tại M và cắt d_2 tại N . Chứng minh: $MI = IN$.
23. Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm M nằm trong góc đó. Qua M kẻ đường thẳng song song với Ox , đường thẳng này cắt Oy tại B . Qua M kẻ đường thẳng song song với Oy đường thẳng này cắt Ox tại A .
- 1) Chứng minh: $MA = OB$; $MB = OA$.
 - 2) Trên tia đối của tia AO lấy điểm C sao cho $AC = AO$. Đường thẳng CM cắt Oy tại D . Chứng minh: $CM = MD$.

24. Cho $\triangle ABC$. Từ C kẻ $Cx \parallel AB$, trên cạnh AB lấy điểm M. Trên tia Cx lấy điểm N sao cho $AM = CN$. Nối MN cắt AC tại O.
- 1) Chứng minh: $OA = OC$; $OM = ON$.
 - 2) Nối BO tia BO cắt Cx tại P. Chứng minh: $AB = CP$.
- 25*. Cho $\triangle ABC$ từ A kẻ đường thẳng song song với BC. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB. Ba đường thẳng này cắt nhau tại $A_1B_1C_1$. Từ A_1 kẻ đường thẳng song song với B_1C_1 . Từ B_1 kẻ đường thẳng song song với A_1C_1 ; Từ C_1 kẻ đường thẳng song song với A_1B_1 . Ba đường thẳng này cắt nhau tại $A_2B_2C_2$. Cứ kẻ như thế cho đến khi được $\triangle A_{10}B_{10}C_{10}$. So sánh chu vi $\triangle A_{10}B_{10}C_{10}$ với chu vi $\triangle ABC$.
- 26*. Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn trên tia Ox lấy các điểm M, E, P sao cho $OM = ME = EP$. Trên Oy lấy điểm N tùy ý. Từ E và P kẻ các đường thẳng song song với đoạn thẳng MN chúng cắt Oy theo thứ tự tại F và Q. Từ N kẻ $NI \parallel Ox$ (I thuộc EF). Từ F kẻ $FK \parallel Ox$ (K thuộc PQ).
Chứng minh rằng: $ON = NF = FQ$.

Chủ đề 3

TAM GIÁC CÂN – TAM GIÁC ĐỀU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Định nghĩa tam giác cân*: Là tam giác có hai cạnh bên bằng nhau.

Định nghĩa tam giác vuông cân: Là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

Định nghĩa tam giác đều: Là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

2. *Tính chất tam giác cân*: Có hai góc ở đáy bằng nhau. Ngược lại tam giác có hai góc ở đáy bằng nhau là tam giác cân.

3. Hệ quả:

- Tam giác vuông cân hai góc ở đáy bằng nhau và bằng 45° .
- Trong tam giác đều mỗi góc bằng 60° .

- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.
- Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng bài chứng minh và tính toán các yếu tố trong tam giác cân và tam giác đều

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Muốn chứng minh một tam giác là tam giác cân có hai cách:

Cách 1: Theo định nghĩa – chứng minh nó có hai cạnh bằng nhau.

Cách 2: Theo mệnh đề ngược của tính chất: Nếu tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân. (Cần chứng minh tam giác có hai góc bằng nhau)

2. Muốn chứng minh một tam giác là tam giác đều có ba cách:

Cách 1: Theo định nghĩa – chứng minh nó có ba cạnh bằng nhau.

Cách 2: Theo mệnh đề ngược của tính chất: Chứng minh ba góc bằng nhau.

Cách 3: Chứng minh tam giác là cân và có một góc 60° .

3. Các trường hợp bằng nhau của tam giác cân: Do chúng có hai góc ở đáy bằng nhau, hai cạnh bên bằng nhau nên ứng với ba trường hợp bằng nhau của tam giác thường ta có với tam giác cân.

- *Trường hợp 1:* Hai tam giác cân có cạnh đáy và một cạnh bên bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau (vì một cạnh bên bằng nhau thì suy ra cạnh bên thứ hai cũng bằng nhau vậy chúng có ba cạnh bằng nhau).

- *Trường hợp 2:* Hai tam giác cân có một cạnh bên và một góc ở đỉnh bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau (vì một cạnh bên bằng nhau thì suy ra cạnh bên thứ hai cũng bằng nhau, vậy chúng bằng nhau theo (c.g.c)).

- *Trường hợp 3:* Hai tam giác cân có một cạnh đáy và một góc ở đáy bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau (g.c.g).

Tóm lại: Muốn chứng minh hai tam giác cân bằng nhau cần hai yếu tố, trong đó yếu tố góc không quá 1.

4. Với tam giác đều chỉ cần có một cạnh bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau.

5. Tránh lầm lẫn: Khi chứng minh hai tam giác bằng nhau trong đó mới biết một tam giác ở dạng đặc biệt (cân, đều) còn tam giác kia chưa biết thì phải áp dụng một trong ba trường hợp bằng nhau của tam giác thường để chứng

minh. Khi chứng minh được chúng bằng nhau rồi thì mới kết luận tam giác này cân thì tam giác thứ hai cũng cân.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A trên tia đối của tia BC lấy điểm D; Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Chứng minh: $\triangle ADE$ cân tại A.

Lời giải

GT	$\triangle ABC$, $AB = AC$, $BD = CE$.
----	---

KL	$\triangle ADE$ cân.
----	----------------------

Chứng minh (hình 83):

$\triangle ABC$ cân nên $AB = AC$ (giả thiết).

Mà: $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (tính chất). (1)

$\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^\circ$. (2)

$\widehat{ACB} + \widehat{ACE} = 180^\circ$. (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra: $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$AB = AC$ (giả thiết), $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (cm trên), $BD = CE$ (giả thiết).

Vậy $\triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c), suy ra: $AD = AE$.

Vậy $\triangle ADE$ cân tại A (định nghĩa).

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ đều trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh AC lấy điểm F, trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $BE = AF = PC$. Chứng minh $\triangle EFP$ là tam giác đều.

Lời giải

Giả thiết	$\triangle ABC$ đều, $AF = BE = PC$.
-----------	---------------------------------------

Kết luận	$\triangle EFP$ đều.
----------	----------------------

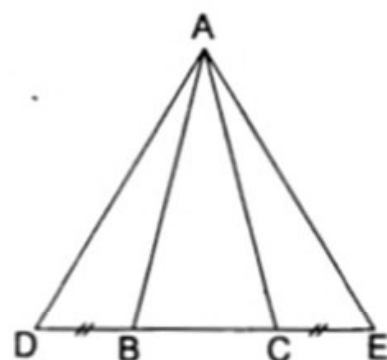
Chứng minh (hình 84):

Xét 3 tam giác $\triangle AFE$, $\triangle BEP$ và $\triangle CPF$ có:

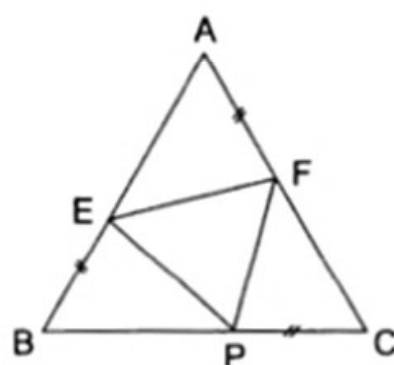
$AB = BC = AC$ (cạnh tam giác đều) (1)

$BE = CP = AF$ (giả thiết) (2)

Từ (1) và (2), ta có: $AE = BP = CF$.



Hình 83



Hình 84

Chủ đề 4

TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. **Định lý Pi-ta-go:** Trong tam giác vuông bình phương độ dài của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của độ dài hai cạnh góc vuông.

Định lý Pi-ta-go đảo: Nếu một tam giác có bình phương độ dài của một cạnh bằng tổng các bình phương của độ dài hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

2. Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông

Hai tam giác vuông bằng nhau nếu có:

- Cạnh huyền bằng nhau và một cạnh góc vuông bằng nhau.
- Hai cạnh góc vuông bằng nhau.
- Cạnh huyền bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau.
- Một cạnh góc vuông bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Áp dụng định lý Pi-ta-go

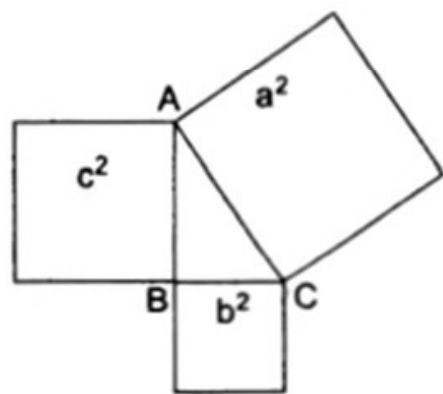
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Nếu $\triangle ABC$ vuông có độ dài cạnh huyền là a , độ dài hai cạnh góc vuông là b và c thì $a^2 = b^2 + c^2$.

Ý nghĩa: Diện tích hình vuông có cạnh bằng độ dài cạnh huyền bằng tổng diện tích hai hình vuông có cạnh bằng độ dài hai cạnh góc vuông (hình 85).

Từ định lý đảo ta thấy: Nếu một tam giác có ba cạnh độ dài tỉ lệ với 3 : 4 : 5 thì tam giác đó vuông.

Ứng dụng kết quả này để đoán góc vuông hoặc kiểm tra một góc có bằng 90° không.



Hình 85

2. Ứng dụng:

- Từ định lí: Trong một tam giác vuông biết độ dài hai cạnh thì tính được cạnh thứ ba.
- Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ đường vuông góc hạ từ A xuống BC là AH. Biết $AH = 6\text{ cm}$, $BH = 4,5\text{ cm}$, $HC = 8\text{ cm}$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải

Xét $\triangle AHC$ là tam giác vuông tại H (hình 86). Theo định lí Pi-ta-go, ta có:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 6^2 + 8^2 = 100.$$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H.

Theo định lí Pi-ta-go, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 6^2 + (4,5)^2 = 6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}.$$

$$\text{Vậy } AC^2 + AB^2 = 100 + \frac{225}{4} = \frac{625}{4}. \quad (1)$$

$$\text{Mà } BC = BH + HC = \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2} \Rightarrow BC^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625}{4}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Theo định lí Pi-ta-go đảo, ta có: $\triangle ABC$ vuông tại A.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ $AH \perp BC$. Biết độ dài các cạnh $AC = 15\text{ cm}$; $AH = 12\text{ cm}$ và $BH = 9\text{ cm}$. Hỏi $\triangle ABC$ là tam giác gì? So sánh BH và CH.

Lời giải

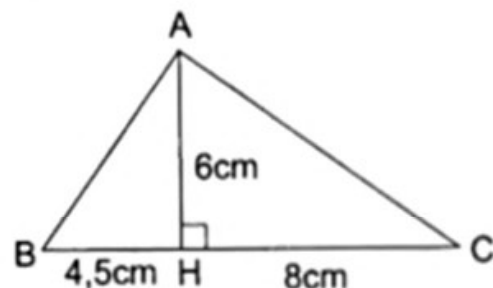
- Xét $\triangle AHC$ vuông tại H (hình 87).

Theo định lí Pi-ta-go ta có:

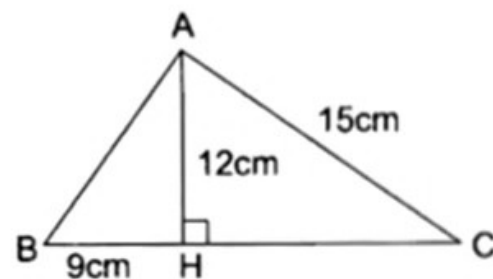
$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Leftrightarrow 15^2 = 12^2 + HC^2$$

$$\Leftrightarrow HC^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$$

$$\Leftrightarrow HC = 9\text{ (cm)}. \quad (1)$$



Hình 86



Hình 87

- Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, theo định lí Pi-ta-go ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Leftrightarrow AB^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 225 \Leftrightarrow AB = 15 \text{ (cm)}.$$

Vậy $\triangle ABC$ có $AB = AC = 15\text{cm}$ nên $\triangle ABC$ cân tại A.

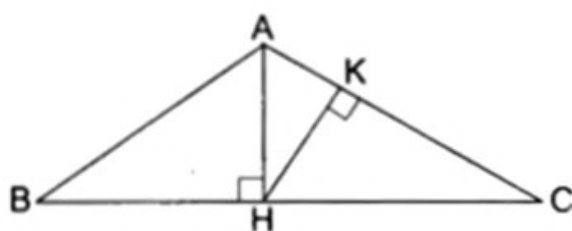
Từ (1) và giả thiết ta thấy ngay: $BH = HC = 9\text{cm}$.

III. BÀI TẬP

1. Cho $\triangle ABC$ có góc A tù. Từ A hạ $AH \perp BC$ (H thuộc BC). Biết $AB = 29\text{cm}$; $AC = 40\text{cm}$ và $AH = \frac{1}{2}BC$. Tính BH và HC.

2. Cho biết một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông tỉ lệ với 6 : 8. Biết cạnh huyền dài 55cm. Hãy tính độ dài hai cạnh góc vuông.
3. Chứng minh rằng độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông cân luôn luôn là một số vô tỉ.
4. Chứng minh rằng trong tam giác vuông có một góc bằng 30° thì cạnh đối diện với góc đó có độ dài bằng nửa độ dài cạnh huyền.

5. Để làm một kèo nhà bằng sắt để lợp mái tôn sao cho có độ dốc vừa phải. Người thợ thiết kế kèo hình tam giác $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$) (hình 88) có thanh AH được hàn vuông góc với thanh BC. Thanh HK được hàn vuông góc với thanh AC. Biết góc $\widehat{ACH} = 30^\circ$ và $AH = 2\text{m}$. Tính độ dài các thanh: AK, KC, HK và HC.



Hình 88

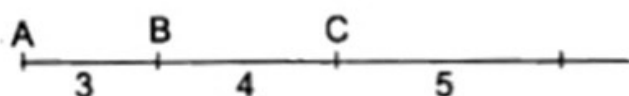
6. Cho $\triangle ABC$, kẻ $AH \perp BC$.
 - 1) Chứng minh rằng: $AB^2 + HC^2 = AC^2 + HB^2$.
 - 2) Trên tia đối của tia HA lấy điểm D tùy ý, nối DB và DC. Chứng minh rằng: $AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2$.
7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Từ điểm M là trung điểm của cạnh AC hạ $MN \perp BC$ (N thuộc BC). Chứng minh rằng: Nếu $AB > AC$ thì $NB^2 - NC^2 = AB^2$.
- 8*. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Từ A hạ $AH \perp BC$ (H thuộc BC).
 - 1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.
 - 2) Biết $BC = 10\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$. Tính độ dài của AH.

9. Một người thợ xây đóng góc vuông trên mặt đất để làm móng nhà, người thợ làm như sau:

Bước 1: Lấy một sợi dây đánh dấu điểm đầu là A. Dùng thước đo đoạn thứ nhất dài 3m và đánh dấu (chẳng hạn là B). Đo tiếp đoạn thứ hai dài 4m và đánh dấu (chẳng hạn là C). Đo tiếp đoạn thứ ba dài 5m được điểm cuối (hình 89). Buộc điểm cuối với điểm A ta có sợi dây vòng tròn có 3 điểm đánh dấu.

Bước 2: Dùng 3 chiếc cọc.

Đóng chiếc cọc thứ nhất và thứ hai theo một cạnh của mặt nền (chọn cạnh tương đối chuẩn), cọc thứ hai tại góc dự kiến xây cọc thứ nhất cách cọc thứ hai là 3m.



Hình 89

Căng sợi dây sao cho cọc thứ nhất tại nút A; cọc thứ hai tại nút B.

Dùng cọc thứ ba buộc tại điểm C của dây và cho các đoạn dây thẳng để đóng cọc thứ 3.

Em hãy giải thích tại sao $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

DẠNG 2. Trường hợp bằng nhau của tam giác vuông

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Muốn chứng minh một tam giác là tam giác vuông cân. Ngoài các cách chứng minh đã nêu ở chủ đề 3. Còn có cách chứng minh thứ ba là chứng minh tam giác đó vuông và có một góc nhọn 45° .

2. Với tam giác vuông cân bất kì thì ba góc trong tam giác đã biết. Vì vậy muốn chứng minh hai tam giác vuông cân bằng nhau chỉ cần có một cạnh bằng nhau là đủ (có thể là cạnh huyền bằng nhau hoặc một cạnh góc vuông bằng nhau).

3. Từ kết quả chứng minh Bài tập 104, ta suy ra:

Trong tam giác vuông có góc nhọn 30° thì cạnh đối diện với góc đó có độ dài bằng $\frac{1}{2}$ độ dài cạnh huyền của tam giác đó.

4. **Chú ý:** Nếu chứng minh hai tam giác bằng nhau mà một trong hai tam giác đó chưa biết là tam giác vuông thì ta vẫn phải áp dụng ba trường hợp bằng nhau của tam giác thường để từ đó suy ra kết quả: Tam giác thứ nhất có góc vuông thì tam giác thứ hai cũng có góc vuông tương ứng.

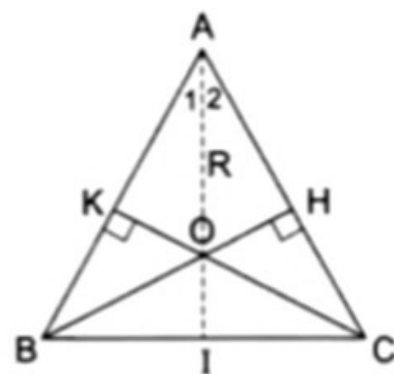
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$). Từ B kẻ $BH \perp AC$; $CK \perp AB$. Chứng minh rằng:

- 1) $BH = CK$
 - 2) BH và CK cắt nhau tại O. Tia AO cắt BC tại I.
- Chứng minh: $AI \perp BC$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC, AB = AC, BH \perp AC, CK \perp AB.$
KL	1) $BH = CK.$ 2) $AI \perp BC.$



Hình 90

Chứng minh:

- 1) Xét $\triangle BHC$ và $\triangle CKB$ là tam giác vuông tại H và K.

Ta có: Cạnh huyền BC chung; $\widehat{BCH} = \widehat{CBK}$ ($\triangle ABC$ cân).

Suy ra $\triangle BHC = \triangle CKB$ (cạnh huyền, góc nhọn). Vậy $BH = CK$.

- 2) Xét $\triangle AKO$ và $\triangle AHO$ là 2 tam giác vuông tại H và K.

Có cạnh huyền OA chung;

$$AB = AC \text{ (giả thiết);} \quad (1)$$

$$BK = CH \text{ (} \triangle BHC = \triangle CKB \text{).} \quad (2)$$

Lấy (1) – (2): $AB - BK = AC - CH \Leftrightarrow AK = AH$.

Vậy: $\triangle AKO = \triangle AHO$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông). Suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

$\triangle ABI$ và $\triangle ACI$ có: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (chứng minh trên), $\widehat{B} = \widehat{C}$ ($\triangle ABC$ cân).

Hai tam giác đó có hai góc tương ứng bằng nhau suy ra góc thứ 3 cũng bằng nhau, hay $\widehat{AIB} = \widehat{AIC}$.

Mà $\widehat{AIB} + \widehat{AIC} = 180^\circ$ (B, I, C thẳng hàng) suy ra: $\widehat{AIB} = \widehat{AIC} = 90^\circ$.

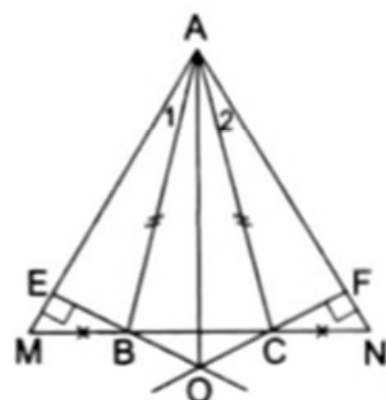
Vậy $AI \perp BC$.

Ví dụ 2. Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M, Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Từ B hạ $BE \perp AM$ (E thuộc AM). Từ C hạ $CF \perp AN$ (E thuộc AN). Chứng minh rằng:

- 1) ΔAMN cân
- 2) $BE = CF$
- 3) $\Delta BME = \Delta CNF$
- 4) EB và FC kéo dài cắt nhau tại O. Chứng minh AO là tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$.

Lời giải

GT	ΔABC , $AB = AC$, $BM = CN$, $BE \perp AM$, $CF \perp AN$.
KL	1) ΔAMN cân 2) $BE = CF$ 3) $\Delta BME = \Delta CNF$ 4) $\widehat{AMO} = \widehat{ON}$.



Hình 91

Chứng minh:

- 1) ΔABM và ΔACN có:

$$AB = AC \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{ABM} = \widehat{ACN} \text{ (cùng bù với 2 góc } \widehat{B} = \widehat{C} \text{)}$$

$$BM = CN \text{ (giả thiết).}$$

Vậy $\Delta ABM = \Delta ACN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ (cạnh tương ứng), $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A (định nghĩa).

- 2) Xét ΔABE và ΔACF vuông tại E và F có:

$$AB = AC \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (chứng minh 1).}$$

Vậy $\Delta ABE = \Delta ACF$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra:

$$BE = CF \text{ (cạnh tương ứng).}$$

$$AE = AF \text{ (cạnh tương ứng).}$$

3) Xét $\triangle BME$ và $\triangle CNE$ vuông tại E và F có:

$$BM = CN \text{ (giả thiết);}$$

$\triangle AMN$ cân tại A (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{EMB} = \widehat{FNC}$ (hai góc đáy tam giác cân).

Vậy $\triangle BME = \triangle CNE$ (cạnh huyền, góc nhọn).

4) Nối AO, $\triangle AEO$ và $\triangle AFO$ là tam giác vuông tại E và F có:

Cạnh huyền AO chung

$$AE = AF \text{ (chứng minh trên).}$$

Vậy $\triangle AEO = \triangle AFO$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông). Suy ra: $\widehat{MAO} = \widehat{OAN}$ (hai góc tương ứng).

Vậy tia AO là tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$.

III. BÀI TẬP

10. Cho $\triangle ABC$ kẻ AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ (I thuộc BC). Từ I hạ $IH \perp AB$ (H thuộc AB) và hạ $IK \perp AC$ (K thuộc AC). Chứng minh: $IH = IK$.

11. Cho $\triangle ABC$ vuông góc tại A. Hạ $AH \perp BC$ (H thuộc BC). Từ H hạ $HE \perp AB$ (E thuộc AB) và $HF \perp AC$ (F thuộc AC).

1) Chứng minh: $EF = AH$

2) EF cắt AH tại O. Chứng minh: $OA = OH$; $OE = OF$.

3) Chứng minh: $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$; $\widehat{AHE} = \widehat{ABC}$.

12. Một đường thẳng d đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối giữa hai nhà máy A và B. Từ A hạ $AH \perp d$; Từ B hạ $BK \perp d$. Chứng minh rằng hai con đường AH và BK bằng nhau.

13. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Qua A kẻ đường thẳng d (đường thẳng d cắt BC tại một điểm ngoài đoạn thẳng BC). Từ B hạ $BE \perp d$ (E thuộc d). Từ C hạ $CF \perp d$ (F thuộc d). So sánh độ dài hai đoạn thẳng BE và CF với độ dài đoạn thẳng EF.

14. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Từ A hạ $AH \perp BC$ (H thuộc BC). Kẻ tia AD là tia phân giác của $\widehat{CAH}$ (D thuộc BC) và AE là tia phân giác của $\widehat{BAH}$ (E thuộc BC). Chứng minh rằng:

1) $\triangle ADB$ và $\triangle AEC$ là tam giác cân.

2) $AB + AC = BC + DE$.

15. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn và O là điểm bất kì trong tam giác. Từ O hạ $OM \perp AC$ (M thuộc AC); $OI \perp AB$ (I thuộc AB). Hạ $OH \perp BC$ (H thuộc BC). Chứng minh rằng: $AI^2 + BH^2 + CM^2 = AM^2 + CH^2 + BI^2$.
- 16*. Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho góc $\widehat{BAE} = 15^\circ$, trên cạnh CD lấy điểm F sao cho góc $\widehat{DAF} = 30^\circ$. Từ B hạ $BH \perp AE$ (H thuộc AE) và trên tia đối của tia HB lấy điểm P sao cho $HP = HB$. Chứng minh rằng:
- 1) $\triangle ABP$ cân tại A .
 - 2) $\triangle APD$ là tam giác đều.
 - 3) Các điểm E, P, F thẳng hàng.
 - 4) Có nhận xét gì về $\triangle FPD$ và số đo các góc của tam giác đó.
- 17*. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC . Từ A hạ $AH \perp BC$ (H thuộc BC). Biết rằng AH và AM chia góc $\widehat{BAC}$ thành 3 góc bằng nhau. Chứng minh rằng:
- 1) $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại A .
 - 2) $\triangle AMC$ là tam giác cân.
 - 3) $\triangle ABM$ là tam giác đều.

Mở rộng kiến thức

Bài 1.

ĐỊNH LÝ THUẬN - ĐỊNH LÝ ĐẢO

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta xét mệnh đề sau:

1. Trong $\triangle ABC$, nếu $AB = AC$ thì $\hat{B} = \hat{C}$.

Từ mệnh đề trên ta có thể lập được nhiều mệnh đề khác.

Trong phạm vi chương trình lớp 7 ta chỉ xét mệnh đề sau:

2. Trong $\triangle ABC$ nếu $\hat{B} = \hat{C}$ thì $AB = AC$.

Mối quan hệ giữa 2 mệnh đề này: ta thấy giả thiết của mệnh đề 1 là kết luận của mệnh đề 2 và ngược lại kết luận của mệnh đề 2 là giả thiết của mệnh đề 1.

– Nếu ta gọi mệnh đề 1 là mệnh đề thuận thì mệnh đề 2 là mệnh đề đảo.

– Dạng tổng quát của hai mệnh đề trên là:

Mệnh đề 1: Nếu có A thì có B.

Mệnh đề 2: Nếu có B thì có A.

Mệnh đề 1: Giả thiết : có A; Kết luận: có B.

Mệnh đề 2: Giả thiết : có B; Kết luận: có A.

Từ đó ta hiểu thế nào là mệnh đề thuận và mệnh đề đảo và mối quan hệ giữa chúng.

– Tuy nhiên nhiều mệnh đề thuận ở dạng phức tạp hơn:

Mệnh đề thuận: Nếu có A và có B thì có C.

Giả thiết: có A, có B; Kết luận: có C.

Ta có thể thiết lập thành 3 mệnh đề đảo:

1) Nếu có C thì có A và có B (gọi là đảo toàn bộ).

2) Nếu có A và có C thì có B (gọi là đảo một phần, giả thiết giữ nguyên A còn B và C thì đổi chỗ).

3) Nếu có B và có C thì có A (giữ nguyên B còn A và C thì đổi chỗ).

Ví dụ 1. Định lý thuận: Nếu $a \perp c$ và $a \perp b$ thì $b \parallel c$.

Em hãy thiết lập mệnh đề đảo của định lý trên.

Lời giải

1) Đảo toàn bộ: Nếu $b \parallel c$ thì $a \perp b$ và $a \perp c$ (Sai).

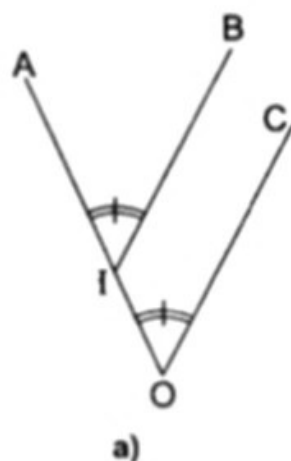
2) Đảo một phần: $a \perp c$ và $b \parallel c$ thì $a \perp b$ (Đúng).

Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

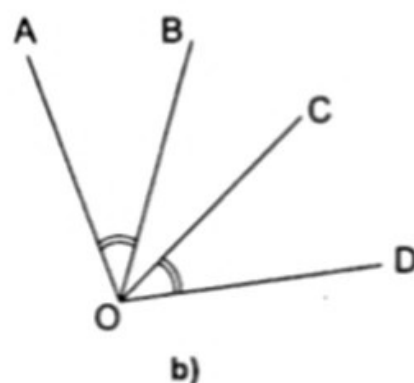
3) Đảo một phần: Nếu $a \perp b$ và $b \parallel c$ thì $a \perp c$ (đúng) (cũng tương đương như mệnh đề đảo 2).

* Như vậy từ một định lý thuận đúng thì mệnh đề đảo có thể đúng có thể sai

Ví dụ 2. Định lý thuận: Nếu 2 góc đối đỉnh thì bằng nhau.



Hình 92



Lời giải

Mệnh đề đảo: Nếu 2 góc bằng nhau thì đối đỉnh.

Mệnh đề đảo này không đúng (hình 92), vì ta có thể chỉ ra ngay các góc bằng nhau nhưng không đối đỉnh.

II. KĨ NĂNG CẦN ĐẠT

1. Yêu cầu thứ nhất là từ một định lý (coi là định lý thuận) thiết lập định lý đảo. Muốn vậy ta thực hiện các bước:

Bước 1: Viết giả thiết, kết luận của định lý thuận.

Bước 2: Từ giả thiết, kết luận của định lý thuận ta lập giả thiết và kết luận của mệnh đề đảo.

Bước 3: Từ giả thiết và kết luận vừa lập phát biểu thành ngôn ngữ thông thường.

Ví dụ 3. Định lí: Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30° thì cạnh đối diện với góc ấy bằng một nửa cạnh huyền (hình 93).

Bước 1: Vẽ hình ghi giả thiết, kết luận.

GT	$\triangle ABC, \hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 30^\circ.$
KL	$AC = \frac{1}{2}BC.$

Bước 2: Viết giả thiết, kết luận của mệnh đề đảo.

• Đảo 1: (Đảo toàn bộ).

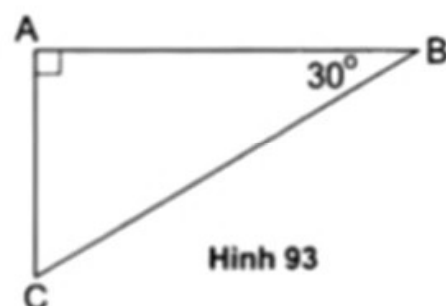
GT	$\triangle ABC, AC = \frac{1}{2}BC.$
KL	$\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 30^\circ.$

• Đảo 2: (Đảo từng phần).

GT	$\triangle ABC, \hat{A} = 90^\circ, AC = \frac{1}{2}BC.$
KL	$\hat{B} = 30^\circ.$

• Đảo 3: (Đảo từng phần).

GT	$\triangle ABC, \hat{B} = 30^\circ, AC = \frac{1}{2}BC.$
KL	$\hat{A} = 90^\circ.$



Bước 3: Phát biểu thành ngôn ngữ thông thường.

• Đảo 1: Nếu một tam giác có một cạnh bằng một nửa cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông có một góc bằng 30° .

• Đảo 2: Nếu một tam giác vuông có một cạnh bằng nửa cạnh kia thì góc đối diện với nó bằng 30° .

• Đảo 3: Nếu một tam giác có một góc bằng 30° và một cạnh bằng nửa cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

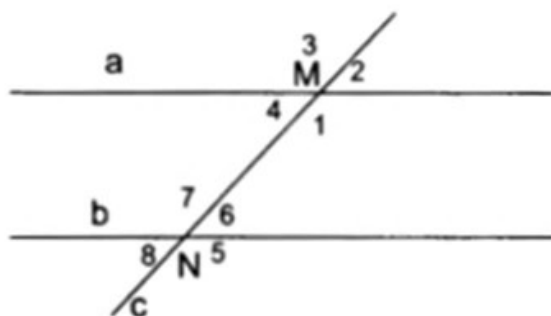
2. Định lí còn có thể có dạng: từ hai, ba giả thiết và có hai, ba kết luận.

Ví dụ 4. Định lí: Nếu một đường thẳng cắt 2 đường thẳng song song thì :

- 1) Hai góc so le trong bằng nhau;
- 2) Hai góc đồng vị bằng nhau;
- 3) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

Lời giải

GT	$a // b$, c cắt a tại M , c cắt b tại N .
KL	1) $\widehat{M_4} = \widehat{N_6}$ 2) $\widehat{M_1} = \widehat{N_5}$ 3) $\widehat{M_1} + \widehat{N_6} = 180^\circ$.



Hình 94

Bước 1: Ta phải hiểu định lí trên tương đương với 3 mệnh đề sau:

Mệnh đề 1:

GT	$a // b$, đường thẳng c cắt a tại M , cắt b tại N .
KL	$\widehat{M_4} = \widehat{N_6}$.

Mệnh đề 2:

GT	$a // b$; c cắt a tại M , cắt b tại N .
KL	$\widehat{M_1} = \widehat{N_5}$

Mệnh đề 3:

GT	$a // b$; c cắt a tại M , cắt b tại N .
KL	$\widehat{M_1} + \widehat{N_6} = 180^\circ$.

Bước 2: Từ đó ta có ba mệnh đề đảo:

Mệnh đề đảo 1:

GT	Đường thẳng c cắt a tại M , cắt b tại N , $\widehat{M_4} = \widehat{N_6}$.
KL	$a // b$.

Mệnh đề đảo 2:

GT	Đường thẳng c cắt a tại M, cắt b tại N; $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_5$.
KL	$a // b$.

Mệnh đề đảo 3:

GT	Đường thẳng c cắt a tại M, cắt b tại N; $\widehat{M}_1 + \widehat{N}_6 = 180^\circ$.
KL	$a // b$.

Bước 3: Phát biểu:

- Mệnh đề đảo 1: Nếu một đường thẳng cắt 2 đường thẳng cho trước và trong các góc tạo thành có 2 góc so le trong bằng nhau thì hai đường thẳng đó song song với nhau.
- Mệnh đề đảo 2: Nếu một đường thẳng cắt 2 đường thẳng cho trước và trong các góc tạo thành có 2 góc đồng vị bằng nhau thì hai đường thẳng đó song song.
- Mệnh đề đảo 3: Nếu một đường thẳng cắt 2 đường thẳng cho trước và trong các góc tạo thành có 2 góc trong cùng phía bù nhau thì hai đường thẳng đó song song.

3. Kỹ năng sử dụng các khái niệm, tính chất và định lý đã học để chứng minh các định lý thuận và đảo đã lập để chứng tỏ đúng hay sai.

4. Chú ý: Tránh quan niệm máy móc việc phân biệt giữa giả thiết và kết luận bằng từ “Nếu” và “Thì”. Mà phải hiểu tổng quát giả thiết là các yếu tố cho biết còn kết luận là chân lý suy ra từ giả thiết. Nếu đúng thì được tổng quát thành định lý.

Ví dụ 5. Định lý: Cạnh đáy của một tam giác cân thì song song với tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh đối diện.

Lời giải

Ở đây ta cần hiểu:

Không thể ngắt “cạnh đáy của một tam giác cân” là giả thiết và phần còn lại làm kết luận được, mà phải hiểu: trong tam giác cân, đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh thì song song với cạnh đáy.

Mệnh đề thuận:

Giả thiết	$\triangle ABC$; $AB = AC$; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.
-----------	---

Kết luận	$Ax \parallel BC$.
----------	---------------------

Chứng minh:

Theo giả thiết thì $\triangle ABC$ cân đỉnh A, nên ta có: $\widehat{B} = \widehat{C}$ (hai góc đáy của tam giác cân). (1)

Gọi $\widehat{yAC}$ là góc ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{yAC} = \widehat{B} + \widehat{C}. \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2), ta có: } \widehat{yAC} = \widehat{B} + \widehat{B} = 2\widehat{B}. \quad (3)$$

$$\text{Mà } \widehat{yAC} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 2\widehat{A_1} \text{ (do } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{)}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có:

$$2\widehat{B} = 2\widehat{A_1} \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{A_1}. \text{ Mà hai góc ở vị trí đồng vị } \Rightarrow Ax \parallel BC.$$

Mệnh đề đảo 1:

GT	$\triangle ABC$; $Ax \parallel BC$.
----	---------------------------------------

KL	$AB = AC$; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.
----	---

Mệnh đề đảo 2:

GT	$\triangle ABC$ có $AB = AC$; $Ax \parallel BC$.
----	--

KL	$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.
----	-----------------------------------

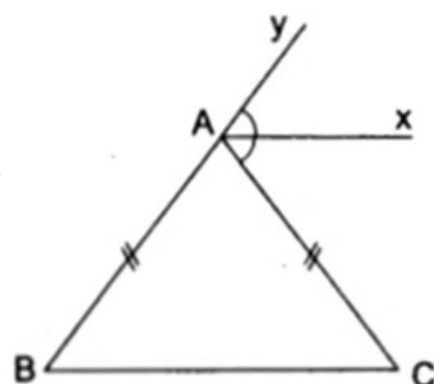
Mệnh đề đảo 3:

GT	$\triangle ABC$ có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$; $Ax \parallel BC$.
----	--

KL	$AB = AC$.
----	-------------

Chứng minh:

– Mệnh đề đảo 1: Ta dễ dàng thấy mệnh đề này sai, vì cho một tam giác bất kì, qua đỉnh kẻ đường song song với đáy thì không thể nào khẳng định Ax là tia phân giác của góc ngoài và tam giác đó không thể cân được.



Hình 95

– Mệnh đề đảo 2:

$\triangle ABC$ có $AB = AC$ suy ra $\triangle ABC$ cân tại A (định nghĩa), vậy $\widehat{B} = \widehat{C}$ (hai góc đáy của tam giác cân). (1)

Mà $Ax \parallel BC$, nên:

$$\widehat{A_1} = \widehat{B} \text{ (đồng vị);} \quad (2)$$

$$\widehat{A_2} = \widehat{C} \text{ (so le trong).} \quad (3)$$

Vậy $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow Ax$ là tia phân giác của góc ngoài tại A $\rightarrow$ mệnh đề đảo 2 là đúng.

– Tương tự ta cũng chứng minh được mệnh đề đảo 3 là đúng.

III. BÀI TẬP

Chứng minh các định lý sau và lập các mệnh đề đảo của nó. Xét xem mệnh đề đảo đó đúng hay sai:

1. Nếu một tam giác vuông có một góc 30° thì cạnh đối diện với góc ấy bằng nửa cạnh huyền.
2. Nếu 2 góc có cạnh tương ứng song song thì chúng bằng nhau nếu cùng nhọn hoặc cùng tù, chúng bù nhau nếu góc này nhọn góc kia tù.
3. Nếu 2 góc có cạnh tương ứng vuông góc thì chúng bằng nhau nếu cùng nhọn hoặc cùng tù, chúng bù nhau nếu góc này nhọn góc kia tù.
4. Trong tam giác cân đường thẳng qua đỉnh và trung điểm của cạnh đáy thì vuông góc với cạnh đáy và là đường phân giác của góc ở đỉnh.
5. Lập một mệnh đề đảo của mệnh đề: “Nếu em có đạo đức tốt và học giỏi toán thì được vào lớp chuyên toán”.
6. Cho góc $\widehat{AOB} = 180^\circ$ trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa AB, vẽ 2 góc $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}$; Kẻ OC là tia phân giác của góc $\widehat{EOF}$. Chứng minh: $OC \perp AB$.

1) Chứng minh bài toán trên.

2) Lập bài toán đảo của nó và chứng minh.

Bài 2.

THỰC HÀNH NGOÀI TRỜI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Các trường hợp bằng nhau của tam giác.
- Tính chất của hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc.

B. ỨNG DỤNG

- 1) Đo khoảng cách giữa 2 điểm mà không trực tiếp đo được.
- 2) Đo chiều cao của cây hoặc tháp cao.

Bước I. Chuẩn bị dụng cụ

- 1) Một số cọc tiêu cao vừa tầm mắt, có sơn màu để dễ nhìn.
- 2) Một giác kế.
- 3) Một sợi dây (không co giãn) dài khoảng 15m.
- 4) Một thước cuộn.
- 5) Một quả dọi.

Bước II. Cách tiến hành

1) *Đo khoảng cách giữa hai điểm A và B mà ta không đo trực tiếp được (cách sông hoặc cách một chướng ngại vật nào đó).*

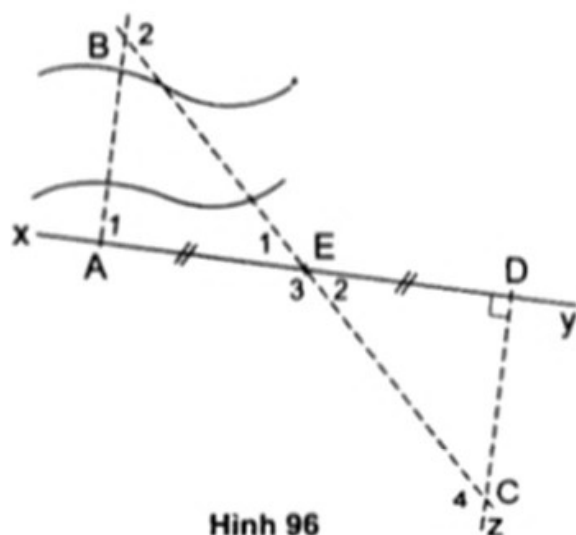
Bước 1: (hình 96) Đóng 2 cọc tiêu thẳng đứng với mặt đất (dùng dây dọi để kiểm tra) cọc tiêu 1 tại A, cọc tiêu 2 tại B.

Bước 2: Dùng giác kế vạch đường thẳng xy sao cho $xy \perp AB$ tại A và chọn điểm E tùy ý trên xy.

Bước 3: Xác định điểm D sao cho $AE = ED$.

Bước 4: Dùng giác kế vạch đường thẳng Dz sao cho $Dz \perp ED$ tại D.

Bước 5: Cắm cọc tiêu 3 tại E sau đó dùng cọc tiêu 4. Di chuyển cọc tiêu 4 trên đường thẳng Dz cho đến khi 3 cọc tiêu số 2, số 3 và số 4 thẳng hàng. Gọi vị trí cọc tiêu 4 là C ta có B, E, C thẳng hàng.



Hình 96

Bước 6: Đo độ dài CD chính là khoảng cách của AB cần tìm.

Giải thích:

$\triangle ABE$ và $\triangle DEC$ vuông tại A và D có A, E, D thẳng hàng (theo cách dựng); B, E, D thẳng hàng (cũng theo cách dựng).

Vậy: $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (đối đỉnh);

$AE = ED$ (cách xác định).

Suy ra: $\triangle ABE = \triangle DEC$ (cạnh góc vuông, góc nhọn).

Vậy $AB = CD$ (cạnh tương ứng).

2. Cả 2 điểm A và B đều ở bên kia sông (hình 97)

Bước 1: Dựng cọc tiêu 1 tại A, cọc tiêu 2 tại B.

Bước 2: Vạch đường thẳng d tùy ý bên này sông.

Bước 3: Dùng giác kế dựng đường thẳng $AH \perp d$ và $BK \perp d$.

Bước 4: Dùng dây xác định I là trung điểm của HK và dựng cọc tiêu 3 tại I.

Bước 5: Dùng cọc tiêu 4 dựng trên đường thẳng AH di chuyển đến khi 3 cọc tiêu 2, 3, 4 thẳng hàng. Ta có A'.

Bước 6: Dùng cọc tiêu 5 dựng trên đường thẳng BK di chuyển đến khi 3 cọc tiêu 1, 3, 5 thẳng hàng. Ta có B'.

Bước 7: Đo khoảng cách A'B' chính là khoảng cách AB cần đo.

Thật vậy: Theo cách dựng ta có A, I, B' thẳng hàng; B, I, A' thẳng hàng và H, I, K thẳng hàng.

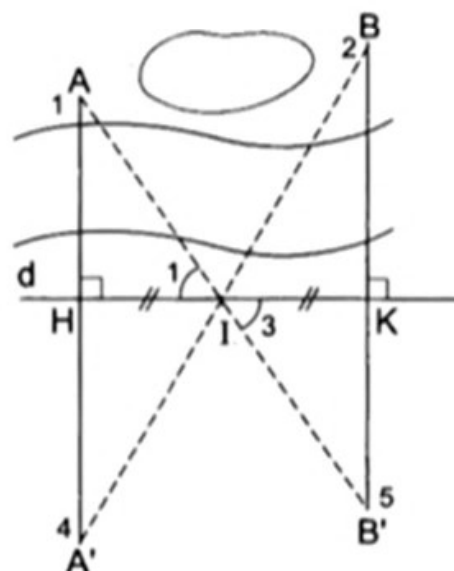
– Xét $\triangle AHI$ và $\triangle B'KI$ có:

$IH = IK$ (cách chia)

$\widehat{I}_1 = \widehat{I}_3$ (đối đỉnh)

$\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ (cách dựng).

Vậy $\triangle AHI = \triangle B'KI$ (g.c.g). Suy ra: $AI = IB'$.



Hình 97

Tương tự, ta có: $\Delta BKI = \Delta A'HI \Rightarrow IB = IA'$.

ΔAIB và $\Delta B'IA'$, có:

$$AI = IB'; IB = IA' \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{AIB} = \widehat{A'IB'} \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\Delta AIB = \Delta A'IB'$ (c.g.c). Suy ra: $AB = A'B'$.

C. BÀI TẬP

7. Người ta đóng hình như hình 98 để đo khoảng cách giữa 2 điểm A và B mà không đo trực tiếp được.

1) Nói cách đóng hình.

2) Giải thích tại sao $DE = AB$.

8. Để đo khoảng cách giữa 2 điểm A và B mà không đo trực tiếp được người ta còn có cách đóng hình đơn giản hơn (hình 99).

1) Nói cách đóng hình.

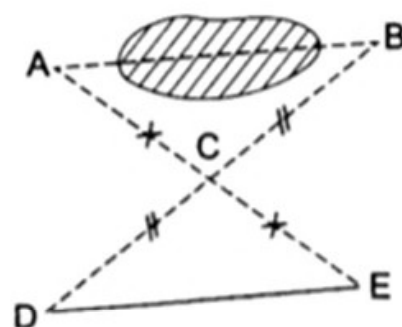
2) Giải thích tại sao tính được AB khi biết BC dài 83m.

9. Người ta dùng thước ngắn để đóng và để đo được chiều cao của một cây AB (hình 100).

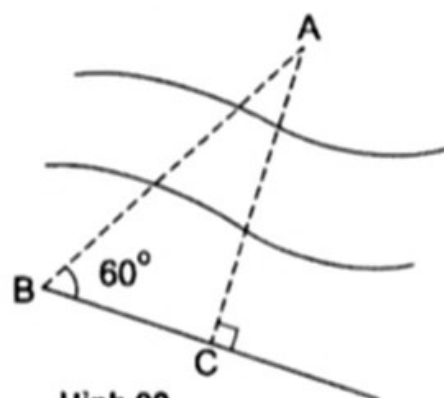
Tính chiều cao của cây, nếu:

1) $ED = 1\text{m}; BD = 5,2\text{m}; \widehat{AEF} = 45^\circ$.

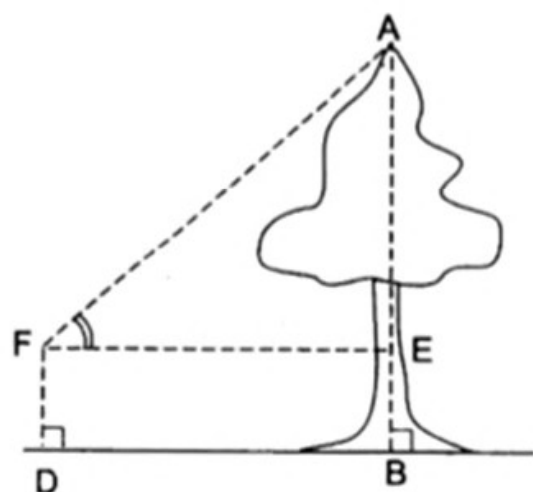
2) $ED = 1\text{m}; BD = 5,2\text{m}; \widehat{AEF} = 60^\circ$.



Hình 98



Hình 99



Hình 100

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trong chương này trước hết xét quan hệ cạnh và góc của một tam giác:

• *Góc:*

– Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° (không đổi).

Từ đó suy ra một tam giác bất kì không thể có hai góc là góc tù. Nhưng có thể cả ba góc đều nhọn.

– Tổng ba góc ngoài tại ba đỉnh cũng không đổi và bằng

$$180^\circ \times 3 - 180^\circ = 360^\circ.$$

– Tam giác cân: Hai góc ở đáy bằng nhau.

Nếu tam giác cân có góc tù thì nhất thiết phải là góc ở đỉnh.

– Tam giác đều: Mỗi góc bằng 60° .

– Tam giác vuông: Có hai góc nhọn phụ nhau.

– Tam giác vuông cân: Mỗi góc nhọn bằng 45° .

• *Cạnh:*

– Tam giác cân có hai cạnh bên bằng nhau.

– Tam giác đều có ba cạnh bằng nhau.

– Tam giác vuông: Bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng các bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

– Với tam giác vuông cân thì cạnh huyền bằng cạnh góc vuông nhân với $\sqrt{2}$.

2. Ba trường hợp bằng nhau của tam giác. Trường hợp bằng nhau của tam giác cân, vuông, đều.

II. KĨ NĂNG CẦN ĐẠT

Kĩ năng quan trọng trong chương trình này là kĩ năng thực hiện các khâu trong quá trình làm một bài toán hoặc chứng minh một định lí:

1. Kĩ năng vẽ hình

a) Vẽ chính xác để dễ phát hiện ra quan hệ trong hình, giúp phát hiện nhanh cách chứng minh.

– Không vẽ hình ở trường hợp đặc biệt để tránh nhầm lẫn các quan hệ không có trong hình.

Chẳng hạn đề bài cho: “Cho ΔABC ” ta vẽ nó là tam giác cân hoặc tam giác đều để nhầm hình có hai, ba cạnh bằng nhau mà giả thiết không có.

b) Vẽ đến đâu dùng kí hiệu đánh dấu vào hình vẽ như đoạn thẳng bằng nhau, đường thẳng vuông góc v.v... để khi tìm lời giải dễ phát hiện.

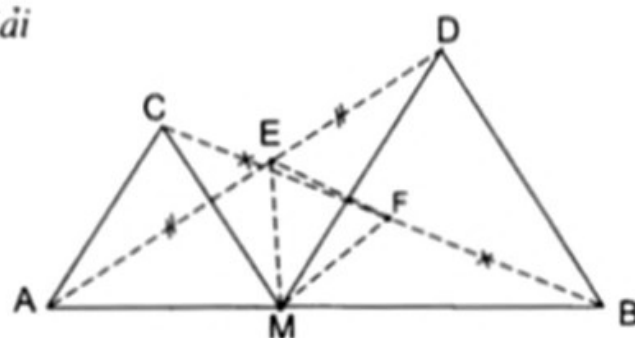
2. Kỹ năng giải toán: Phải bắt đầu từ giả thiết yêu cầu chứng minh gì. Liên hệ với giả thiết xem đã cho những gì. Còn những điều gì chưa cho biết ta liên tưởng đến các khái niệm tính chất, định lí đã học.

Kỹ năng trên thể hiện qua ví dụ sau:

Ví dụ. Cho điểm M trên đoạn thẳng AB . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa đoạn thẳng AB vẽ các tam giác đều ΔACM và ΔMDB . Gọi E và F là trung điểm của AD và CB . Chứng minh ΔEMF là tam giác đều.

Lời giải

	Đoạn thẳng AB , $M \in AB$.
GT	ΔACM , ΔMDB đều. $AE = ED$, $CF = FB$.
KL	ΔEMF đều.



Hình 101

Phân tích:

– Khi lấy điểm M trên đoạn AB nếu lấy ở vị trí đặc biệt (M trùng với trung điểm của AB) thì dẫn đến các kết quả đặc biệt khác như:

$\Delta ACM = \Delta MDB$, $CM = MD$, ... dễ bị sai lầm khi chứng minh. Vì vậy chọn vị trí của điểm M như thế nào để hai tam giác có độ khác nhau vừa phải.

– Khi vẽ các tam giác đều càng chính xác càng dễ phát hiện chẳng hạn $CM \parallel BD$; $AC \parallel MD$ giả thiết không cho. Nhưng nếu vẽ chính xác ΔACM , ΔMDB đều sẽ phát hiện thấy điều đó.

– Đánh dấu các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau giúp ta dễ phát hiện ra các tam giác bằng nhau.

Nhưng lưu ý: Các đoạn thẳng bằng nhau khác nhau phải dùng kí hiệu khác nhau (như $AE = ED$ khác với $CF = FB$).

Chứng minh:

- $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$ có:

$$AM = CM ; MD = MB \text{ (cạnh của tam giác đều).}$$

$$\widehat{AMD} = \widehat{AMC} + \widehat{CMD} = 60^\circ + \widehat{CMD} \text{ (góc của tam giác đều).} \quad (1)$$

$$\widehat{CMB} = \widehat{DMB} + \widehat{CMD} = 60^\circ + \widehat{CMD} \text{ (góc của tam giác đều).} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{CMB}$.

Vậy $\triangle AMD = \triangle CMB$ (c.g.c) suy ra:

$$\widehat{MAD} = \widehat{MCB} \text{ (góc tương ứng).} \quad (3)$$

$$AD = CB \text{ (cạnh tương ứng).} \quad (4)$$

- $\triangle AME$ và $\triangle MFC$ có:

$$MA = MC \text{ (cạnh tam giác đều);}$$

$$\widehat{MAD} = \widehat{MCB} \text{ (theo (3));}$$

$$AE = CF \text{ (theo (4) và } AE = \frac{1}{2}AD ; CF = \frac{1}{2}CB \text{ (giả thiết)).}$$

Vậy $\triangle AME = \triangle MFC$ (c.g.c) $\Rightarrow ME = MF \Rightarrow \triangle MEF$ cân tại M.

$$\text{Suy ra } \widehat{AME} = \widehat{CMF} \text{ (góc tương ứng).} \quad (5)$$

$$\widehat{AME} = \widehat{AMC} + \widehat{CMF} \text{ (2 góc kề nhau).} \quad (6)$$

$$\widehat{CMF} = \widehat{FME} + \widehat{CME} \text{ (2 góc kề nhau).} \quad (7)$$

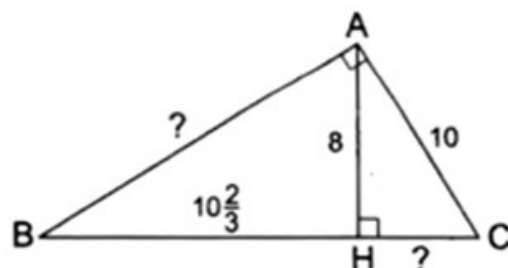
Từ (5), (6), (7) suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{FME} = 60^\circ$ (góc của $\triangle AMC$).

$\triangle MEF$ cân và có $\widehat{FME} = 60^\circ$ vậy $\triangle MEF$ là tam giác đều.

Chú ý: Phần chứng minh một bên là dữ liệu chứng minh, một bên là lí do (hay gọi là cơ sở để có dữ liệu đó). Cơ sở này là giả thiết hoặc các định nghĩa, tính chất, định lí, hệ quả, tiên đề v.v... đã được học trước đó.

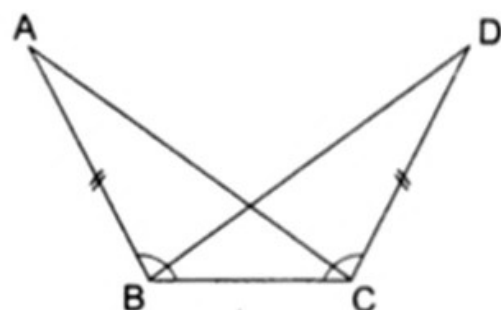
III. BÀI TẬP

1. Trong hình 102 các yếu tố đã cho ghi trên hình vẽ. Tính cạnh AB, BC.



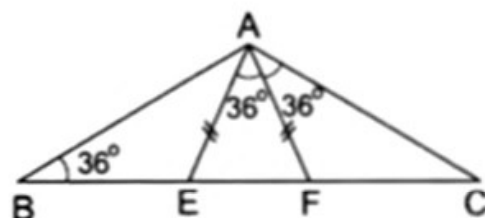
Hình 102

2. Tìm các tam giác bằng nhau trong hình 103. Biết: $AB = DC$, $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$. Chứng minh $\triangle ABC = \triangle DCB$.



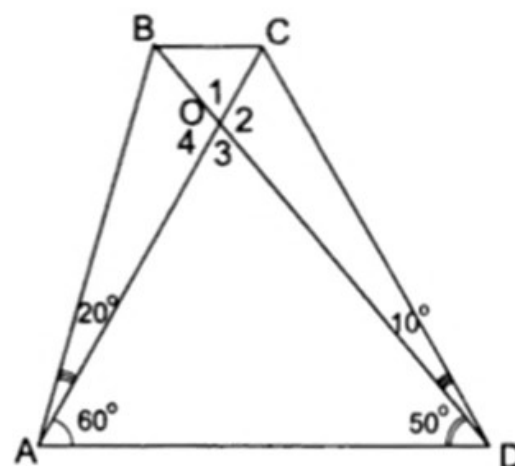
Hình 103

3. Trên hình vẽ 104. Biết: $AE = AF$, $\widehat{ABC} = \widehat{EAF} = \widehat{FAC} = 36^\circ$. Tìm những tam giác cân trong hình vẽ. Chứng minh.



Hình 104

4. Trong hình vẽ 105. Biết $\widehat{BAC} = 20^\circ$; $\widehat{CAD} = 60^\circ$; $\widehat{ADB} = 50^\circ$ và $\widehat{BDC} = 10^\circ$.



Hình 105

- 1) Tính các góc chưa biết trong hình vẽ.
2) Cho biết những tam giác nào là tam giác đều, tam giác cân?

5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Từ B hạ $BH \perp AC$ (H thuộc AC) lấy điểm M trên cạnh BC từ M hạ $MF \perp AC$ (F thuộc AC) và $MF \perp AB$ (E thuộc AB). Trên tia đối của tia MF lấy điểm I sao cho $FI = BH$. Chứng minh rằng:

- 1) Góc $\widehat{BIF} = 90^\circ$;
2) $ME + MF = BH$.
6. Cho hai đường thẳng $d_1 \parallel d_2$; Đường thẳng d_3 cắt d_1 và d_2 tại M và N. Lấy O là trung điểm của đoạn thẳng MN. Qua O kẻ đường thẳng d_4 cắt đường thẳng d_1 tại E và cắt đường thẳng d_2 tại F.

- 1) Chứng minh: O là trung điểm của EF và $EM = NF$.
2) Chứng minh: $EN \parallel FM$.
3) Lấy điểm P bất kì thuộc đoạn thẳng EM. Nối PO tia PO cắt d_2 tại Q. Chứng minh $EP = QF$ và $EQ \parallel PF$.
7. Cho đoạn thẳng BC. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa đoạn thẳng BC vẽ $\triangle ABC$ cân tại A và có góc ở đáy bằng 80° . Vẽ $\triangle BMC$ đều. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = BC$. Nối AM, tia AM cắt BC tại I.

1) Chứng minh: AI là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$. MI là tia phân giác của góc $\widehat{BMC}$.

2) Chứng minh: CE là tia phân giác của góc $\widehat{ACM}$.

8. Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($AB > BC$) trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $BD = BC$.

1) Chứng minh: $\widehat{ABC} = \widehat{BDC}$.

2) Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = AD$. Chứng minh: $\triangle DAB = \triangle BEC$.

3) Trong hình vẽ có những tam giác nào là tam giác cân?

9. Cho $\triangle ABC$ cân tại A (góc $\widehat{A} = 120^\circ$) AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ (I thuộc BC). Từ I hạ $IH \perp AB$ (H thuộc AB); Hạ $IK \perp AC$ (K thuộc AC).

1) Chứng minh: $\triangle IHK$ đều và $HK \parallel AC$.

2) Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Chứng minh $\triangle ACD$ đều.

3) $\triangle BCD$ là tam giác gì? Vì sao?

- 10*. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông thì đoạn thẳng nối đỉnh của góc vuông với trung điểm của cạnh huyền thì có độ dài bằng $\frac{1}{2}$ độ dài cạnh huyền.

- 11*. Cho $\triangle ABC$ vẽ phía ngoài tam giác tại đỉnh A kẻ $Ax \perp AB$ và lấy điểm E trên tia Ax sao cho $AE = AB$ (E và C ở 2 phía của A). Kẻ $Ay \perp AC$ và lấy điểm F trên Ay sao cho $AF = AC$ (F và B ở 2 phía của A), lấy M là trung điểm của đoạn BC.

1) Chứng minh: $AM = \frac{1}{2} EF$.

2) Kéo dài AM cắt EF tại I. Chứng minh rằng $\triangle IAF$ vuông tại I.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Chủ đề 1

1. Xét $\triangle AEC$ vuông tại E vậy : $\widehat{EAC} + \widehat{ACE} = 90^\circ$ (hai góc nhọn phụ nhau),
hay $35^\circ + \widehat{ACE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = 55^\circ$.

– Xét $\triangle BCF$ vuông tại F vậy: $\widehat{CBF} + \widehat{BCF} = 90^\circ$ (2 góc nhọn phụ nhau)

hay: $50^\circ + \widehat{BCF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCF} = 40^\circ$

– Mà: $\widehat{ACE} + \widehat{ACB} + \widehat{BCF} = 180^\circ$ (C, E, F thẳng hàng) thay vào ta có:

$$55^\circ + \widehat{ACB} + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 85^\circ.$$

2. (hình 106)

– Xét $\triangle AHM$, có: $\widehat{H} = 90^\circ$; $\widehat{MAH} = 15^\circ$ (giả thiết).

Vậy $\widehat{AMH} = 90^\circ - 15^\circ \Rightarrow \widehat{AMH} = 75^\circ$.

– Xét $\triangle AMC$, có: $\widehat{MAC} = 45^\circ$ (MA là tia phân giác của góc vuông); $\widehat{AMH} = 75^\circ$.

Vậy $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{MAC} + \widehat{AMH})$

$$= 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ.$$

Mà $\triangle ABC$ vuông tại A nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (hai góc nhọn), hay:

$$\widehat{B} + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ.$$

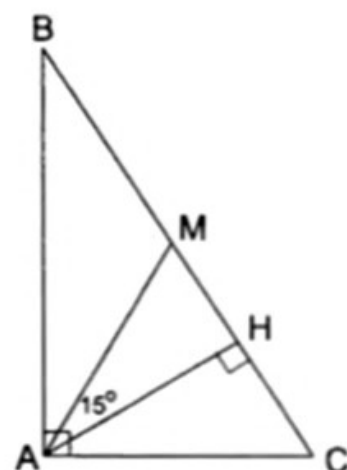
3. (hình 107)

– $\triangle ABC$ có: $\widehat{A_3} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

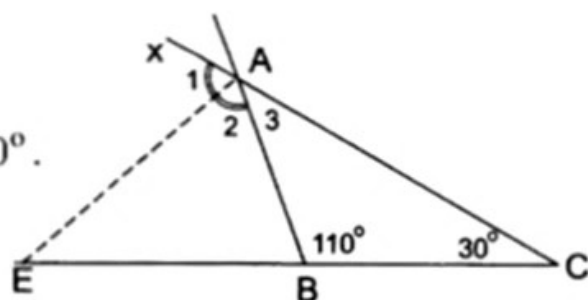
Mà : $\widehat{A_3} + 110^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A_3} = 40^\circ$.

– Do $\widehat{xAB}$ và $\widehat{A_3}$ là hai góc kề bù nhau nên: $\widehat{xAB} + \widehat{A_3} = 180^\circ$ hay

$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 180^\circ$, suy ra:



Hình 106



Hình 107

$$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 140^\circ \text{ mà } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (giả thiết) nên } \widehat{A_2} = 70^\circ. \quad (1)$$

$$\text{– Xét } \triangle AEB \text{ có } \widehat{ABC} \text{ là góc ngoài nên } \widehat{ABC} = \widehat{A_2} + \widehat{AEB} \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có: } 110^\circ = 70^\circ + \widehat{AEB} \Rightarrow \widehat{AEB} = 40^\circ.$$

$$\text{Vậy } \triangle AEB \text{ có: } \widehat{A_2} = 70^\circ; \widehat{EBA} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

Suy ra: $\triangle AEB$ có $\widehat{AEB} = 40^\circ$ và hai góc bằng 70° .

4. (hình 108)

– Xét $\triangle ABD$ có: $\widehat{A} = 77^\circ$ nên:

$$\begin{aligned} \widehat{ABD} + \widehat{ADB} &= 180^\circ - \widehat{A} \\ &= 180^\circ - 77^\circ = 103^\circ; \end{aligned}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ADB} \text{ (giả thiết).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{ABD} = \frac{103^\circ}{2} = 51^\circ 30'.$$

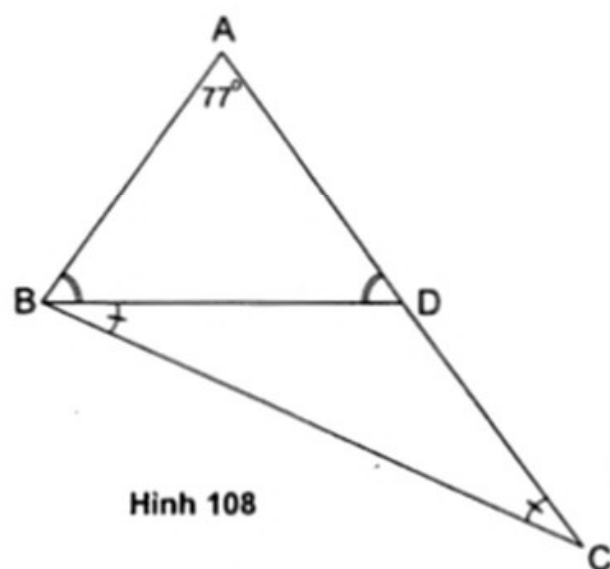
– Xét $\triangle BDC$ có:

$$\widehat{ADB} \text{ là góc ngoài tại D nên: } \widehat{ADB} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB}.$$

$$\widehat{DBC} = \widehat{C} \text{ (giả thiết).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{ADB} = 2\widehat{C} \Rightarrow 2\widehat{C} = 51^\circ 30' \Rightarrow \widehat{C} = 25^\circ 45'.$$

$$\text{Vì } \widehat{B} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 51^\circ 30' + 25^\circ 45' \Rightarrow \widehat{B} = 77^\circ 15'.$$



Hình 108

5. (hình 109)

Do x, A, O thẳng hàng, nên:

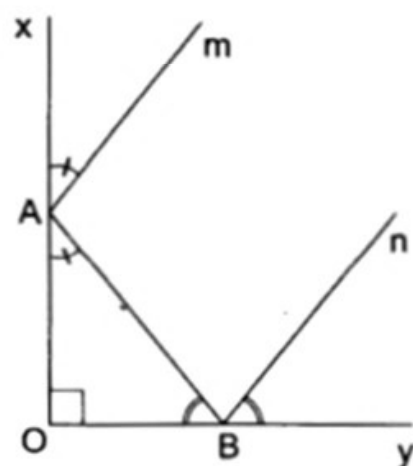
$$\widehat{xAm} + \widehat{mAB} + \widehat{BAO} = 180^\circ \quad (1)$$

Do O, B, y thẳng hàng, nên:

$$\widehat{yBn} + \widehat{nAB} + \widehat{ABO} = 180^\circ \quad (2)$$

$$\text{Mà: } \widehat{xAm} = \widehat{BAO} \text{ (giả thiết)} \quad (3)$$

$$\widehat{yBn} = \widehat{ABO} \text{ (giả thiết)} \quad (4)$$



Hình 109

$$\text{Thay (3) vào (1), ta có: } 2\widehat{BAO} + \widehat{mAB} = 180^\circ. \quad (5)$$

$$\text{Thay (4) vào (2), ta có: } 2\widehat{ABO} + \widehat{nBA} = 180^\circ. \quad (6)$$

$$\text{Cộng (5) và (6), ta có: } 2(\widehat{BAO} + \widehat{ABO}) + \widehat{mAB} + \widehat{nBA} = 360^\circ. \quad (7)$$

Trong đó $\widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 90^\circ$ (hai góc nhọn của Δ vuông).

$$\text{Thay vào (7), ta có: } 2 \times 90^\circ + \widehat{mAB} + \widehat{nBA} = 360^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{mAB} + \widehat{nBA} = 180^\circ.$$

Chúng là 2 góc trong cùng phía bù nhau, vậy hai đường thẳng $Am \parallel Bn$.

$$6. \quad 1) \quad \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \text{ mà } \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}, \text{ vậy } 3\widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ.$$

$$2) \quad \text{Chẳng hạn 2 góc bằng nhau là } \widehat{B} = \widehat{C} \text{ thì } \widehat{A} = 40^\circ \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 40^\circ + 2\widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{B} = 140^\circ.$$

$$\text{vậy } \widehat{B} = \widehat{C} = 70^\circ \text{ và } \widehat{A} = 40^\circ.$$

$$3) \quad \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{1+3+4} = \frac{180^\circ}{8} \text{ (tính chất dãy tỉ số).}$$

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{180^\circ}{8} \Rightarrow \widehat{A} = 22^\circ 30';$$

$$\frac{\widehat{B}}{3} = 22^\circ 30' \Rightarrow \widehat{B} = 67^\circ 30';$$

$$\frac{\widehat{C}}{4} = 22^\circ 30' \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ.$$

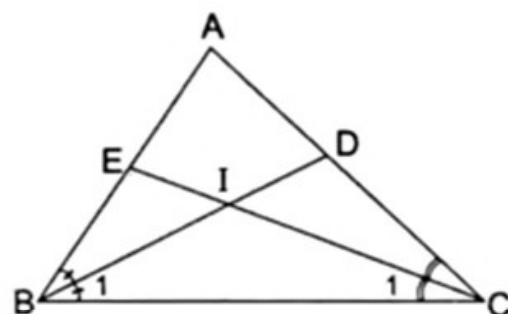
7. (hình 110)

1) Xét ΔIBC , ta có:

$$\widehat{BIC} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ. \quad (1)$$

Theo bài ra: $\widehat{B_1} = \frac{1}{2}\widehat{B}$; $\widehat{C_1} = \frac{1}{2}\widehat{C}$ (BD và CE là hai tia phân giác) nên:

$$\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}). \quad (2)$$



Hình 110

Thay (2) vào (1), ta có:

$$\widehat{BIC} + \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}.$$

Mà $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A}$, nên:

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Điều đó chứng tỏ $\widehat{BIC} > 90^\circ$ do đó $\widehat{BIC}$ là góc tù.

2) Do B, I, D thẳng hàng, nên: $\widehat{BIC} + \widehat{DIC} = 180^\circ$. (1)

Mặt khác: $\widehat{DIC} = 45^\circ$ (giả thiết cho). (2)

$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} \text{ (theo chứng minh trên).} \quad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1), ta có:

$$90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ.$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A.

8*. (hình 111)

Cách 1: CK cắt AB tại I, BK cắt CD tại F.

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle KIB$, có:

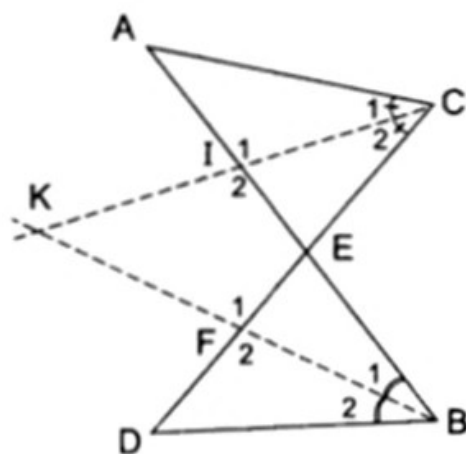
$\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$ (đối đỉnh), nên:

$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{C}_1 &= \widehat{K} + \widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{C}_1 - \widehat{B}_1 \\ &= \widehat{A} + \frac{\widehat{C}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Xét $\triangle BFD$ và $\triangle KFC$ có:

$$\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2 \text{ (đối đỉnh), nên } \widehat{B}_2 + \widehat{D} = \widehat{K} + \widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{K} = \widehat{D} + \widehat{B}_2 - \widehat{C}_2 = \widehat{D} + \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } 2\widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{D} \Rightarrow \widehat{K} = \frac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2}.$$



Hình 111

Cách 2:

Xét $\triangle KIB$, có: $\widehat{AIK} = \widehat{K} + \widehat{B}_1$ (góc ngoài của tam giác).

Xét $\triangle AIC$ có: $\widehat{AIK} = \widehat{A} + \widehat{C}_1$ (góc ngoài của tam giác).

Suy ra: $\widehat{K} + \widehat{B}_1 = \widehat{A} + \widehat{C}_1$ (cùng bằng $\widehat{AIK}$). (3)

Tương tự, xét $\triangle KFC$ có: $\widehat{KFD} = \widehat{K} + \widehat{C}_2$ (góc ngoài của tam giác).

Xét $\triangle BFD$, có: $\widehat{KFD} = \widehat{D} + \widehat{B}_2$ (góc ngoài của tam giác).

Suy ra: $\widehat{K} + \widehat{C}_2 = \widehat{D} + \widehat{B}_2$ (cùng bằng $\widehat{KFD}$). (4)

Cộng vế với vế (3) và (4), ta có:

$$2\widehat{K} + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = \widehat{A} + \widehat{D} + \widehat{C}_1 + \widehat{B}_2.$$

Theo giả thiết thì $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$; $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, vậy $2\widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{D}$ hay $\widehat{K} = \frac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2}$.

9*. (hình 112)

1) Tia CM cắt AB tại I.

Xét $\triangle BIM$ có:

$\widehat{BMC} = \widehat{B}_1 + \widehat{BIM}$ (góc ngoài của tam giác). (1)

Xét $\triangle AIC$ có:

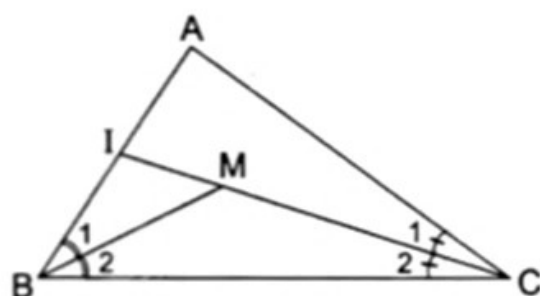
$$\widehat{BIC} = \widehat{A} + \widehat{C}_1 \text{ (góc ngoài của tam giác).} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta có:

$$\widehat{BMC} = \widehat{B}_1 + \widehat{A} + \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{A} + \widehat{ABM} + \widehat{ACM}. \quad (3)$$

$$2) \text{ Theo giả thiết: } \widehat{ACM} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}. \quad (4)$$

$$\text{Thay (4) vào (3), ta có: } \widehat{BMC} = \widehat{A} + 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$



Hình 112

Xét $\triangle BMC$ có: $\widehat{C_2} = 180^\circ - (\widehat{BMC} + \widehat{B_2})$.

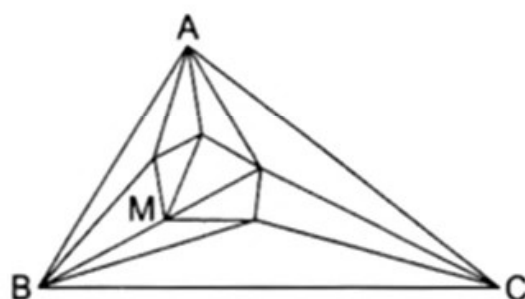
Mà $\widehat{B_2} = \frac{\widehat{B}}{2}$; $\widehat{BMC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ (theo chứng minh trên).

$$\text{Suy ra: } \widehat{C_2} = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} \right) = 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2}.$$

Vậy CM là tia phân giác của góc $\widehat{C}$.

10. (hình 113) Gọi tam giác cho trước là $\triangle ABC$. Trong $\triangle ABC$ lấy 10 điểm (giả thiết) và ba điểm A, B, C, vậy trên mặt phẳng có tất cả là 13 điểm.

Khi trò chơi kết thúc thì các tam giác nhỏ được xếp kín $\triangle ABC$ (sát nhau); Không có phần chồng lên nhau (vì yêu cầu các đoạn thẳng không cắt nhau) và cũng không có giao điểm nào khác ngoài 10 điểm đã cho.



Hình 113

– Ta xét một điểm bất kì (trong 10 điểm đó) chẳng hạn điểm M:

Điểm M là đỉnh của nhiều tam giác nhỏ xếp kề nhau nên nó là đỉnh chung của nhiều góc nhỏ. Không cần biết có bao nhiêu góc nhỏ. Nhưng tổng các góc nhỏ đó phải bằng 360° .

Như thế, trong $\triangle ABC$ có 10 điểm thì có tổng các góc phân biệt thuộc 10 đỉnh là: $360^\circ \times 10$ và tổng ba góc trong $\triangle ABC$ là 180° . Vậy tổng số đo của tất cả các góc của các tam giác vẽ được là: $360^\circ \times 10 + 180^\circ$.

Mà mỗi tam giác có tổng ba góc trong là 180° .

Vậy số tam giác vẽ được là: $\frac{360^\circ \cdot 10 + 180^\circ}{180^\circ} = 20 + 1 = 21$, hay tổng số tam giác cả 2 người vẽ được là 21 tam giác.

Người thứ nhất vẽ được 12 tam giác, vậy người thứ nhất thắng.

Chủ đề 2

1. 1) – Ta dễ dàng tính được OM, OQ và PQ.

– $\triangle NOM = \triangle QPO$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{MNO} = \widehat{PQO}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác).

Do hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau nên $MN \parallel PQ$.

2) Theo giả thiết ta dễ dàng thấy $\triangle ABC = \triangle ABD$ (c.c.c).

Suy ra: $\widehat{CBA} = \widehat{ABD}$ (hai góc tương ứng của hai tam giác).

2. (hình 114)

Do độ dài bán kính bằng $\frac{1}{2}OA$ nên E và F nằm trong góc $\widehat{xOy}$.

1) Xét $\triangle OEA$ và $\triangle OEB$ có:

OE chung;

OA = OB (giả thiết);

AE = BE (cùng bán kính bằng nhau).

Vậy $\triangle OEA = \triangle OEB$ (c.c.c)

Xét $\triangle OFA$ và $\triangle OFB$ có:

OF chung;

OA = OB (giả thiết);

FA = FB (2 bán kính bằng nhau).

Vậy $\triangle OFB = \triangle OFA$ (c.c.c).

2) Theo chứng minh câu 1:

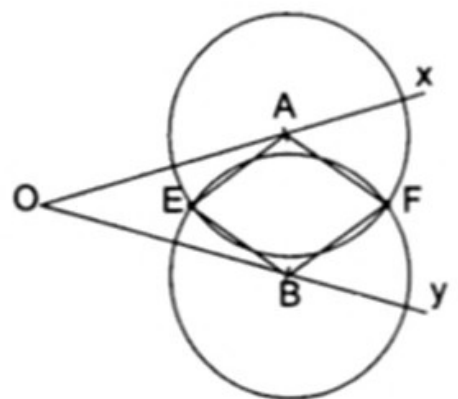
$\triangle OEA = \triangle OEB \Rightarrow \widehat{EOA} = \widehat{EOB}$ (góc tương ứng).

Vậy OE là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.

Theo chứng minh câu 1:

$\triangle OFA = \triangle OFB$ nên $\widehat{AOF} = \widehat{BOF}$ (góc tương ứng).

Vậy OF là tia phân giác của góc $\widehat{AFB}$.



Hình 114

3. (hình 115)

1) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle ANB$ có:

$AM = AN = 3\text{cm}$ (cùng bán kính)

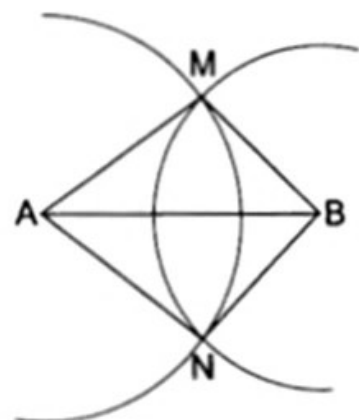
$BM = BN = 2,5\text{cm}$ (cùng bán kính)

Cạnh AB chung.

Vậy $\triangle AMB = \triangle ANB$ (c.c.c). (1)

2) Từ (1) suy ra: $\widehat{MAB} = \widehat{BAN}$ (góc tương ứng)

Vậy AB là tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$.



Hình 115

4. 1) Xét $\triangle AEF$ và $\triangle BEF$ có:

Cạnh EF chung ;

$AE = BE$; $AF = BF$ (giả thiết).

Vậy $\triangle AEF = \triangle BEF$ (c.c.c). (1)

– Xét $\triangle AEQ$ và $\triangle BEQ$ có:

EQ chung;

$AE = EB$; $AQ = BQ$ (giả thiết).

Vậy $\triangle AEQ = \triangle BEQ$ (c.c.c). (2)

2) Từ (1), ta có: $\triangle AEF = \triangle BEF \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{FEB}$, hay EF là phân giác của $\widehat{AEB}$.

Từ (2), ta có: $\triangle AEQ = \triangle BEQ \Rightarrow \widehat{AEQ} = \widehat{BEQ}$, hay EQ là phân giác của $\widehat{AEB}$.

Vì EF và EQ cùng là tia phân giác của góc $\widehat{AEB}$, nên EF trùng với EQ tức là E, F, Q thẳng hàng.

5. (hình 116)

1) $\triangle ABC$ và $\triangle ECB$ có:

BC chung;

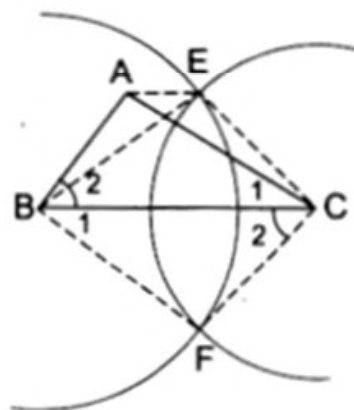
$AC = BE$; $AB = CE$ (giả thiết).

Vậy: $\triangle ABC = \triangle ECB$ (c.c.c). (1)

Xét $\triangle ECB$ và $\triangle FCB$ có:

BC chung;

$CE = CF$; $BE = BF$ (cùng bán kính).



Hình 116

Vậy $\triangle ECB = \triangle FCB$ (c.c.c).

(2)

Từ (1) và (2), ta có: $\triangle ABC = \triangle ECB = \triangle FCB$.

2) Từ $\triangle ABC = \triangle FCB$ suy ra: $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$ và $\widehat{C}_2 = \widehat{B}_2$ (góc tương ứng).

Vì $\widehat{C}_1$ và $\widehat{B}_1$ ở vị trí so le trong của hai đường AC, BF suy ra: $AC \parallel BF$.

$\widehat{B}_2$ và $\widehat{C}_2$ ở vị trí so le trong của hai đường AB, CF suy ra: $AB \parallel CF$.

6. Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có:

AH chung;

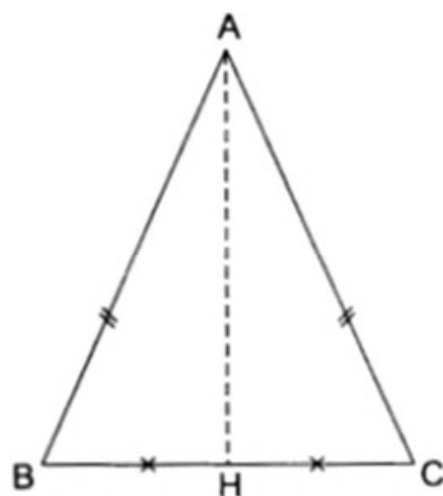
$AB = AC$ (giả thiết);

$BH = HC$ (H là trung điểm của BC).

Vậy $\triangle ABH = \triangle ACH$ (c.c.c).

Suy ra: $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$ (hai góc tương ứng).

Vì $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^\circ$ (A, H, C cùng nằm trên cạnh BC thẳng hàng), nên $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$. Vậy $AH \perp BC$.



Hình 117

7. Vì $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (giả thiết), nên ta có:

$A_1B_1 = A_2B_2$ (cạnh tương ứng);

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (góc tương ứng);

$B_1M_1 = B_2M_2$ (giả thiết).

Suy ra: $\triangle A_1B_1M_1 = \triangle A_2B_2M_2$ (c.g.c), hay $A_1M_1 = A_2M_2$.

8. (hình 118)

1) Xét $\triangle OCB$ và $\triangle OAD$ có:

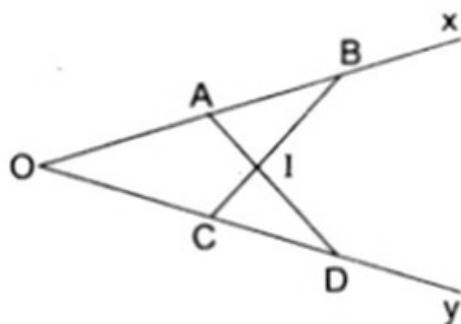
$OA = OC$ (giả thiết);

$OB = OD$ (giả thiết);

$\widehat{xOy}$ chung.

Vậy $\triangle OCB = \triangle OAD$ (c.g.c).

(1)



Hình 118

2) Từ (1), suy ra:

$$AD = CB \text{ (cạnh tương ứng)}. \quad (2)$$

$$\widehat{OAD} = \widehat{OCB} \text{ (góc tương ứng)}. \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{OAD} + \widehat{BAD} = \widehat{DCB} + \widehat{OCB}, \text{ theo (3) ta có: } \widehat{BAD} = \widehat{DCB}. \quad (4)$$

Lại vì $OB = OD$; $OA = OC$ (giả thiết), nên:

$$OB - OA = OD - OC \Rightarrow AB = CD. \quad (5)$$

Từ (2), (4) và (5) ta được: $\triangle DAB = \triangle BCD$ (c.g.c).

9. (hình 119)

1) Xét $\triangle AOC$ và $\triangle BOD$ có:

$$OD = OC \text{ (O là trung điểm của CD)}.$$

$$OA = OB \text{ (O là trung điểm của AB)}.$$

$$\widehat{AOC} = \widehat{DOB} \text{ (đối đỉnh)}.$$

Vậy: $\triangle AOC = \triangle BOD$ (c.g.c).

Từ đó, ta có: $AC = BD$ (cạnh tương ứng) và $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$ (góc tương ứng), nên:

$$AC \parallel BD \text{ (vì có hai góc so le trong bằng nhau)}.$$

2) Tương tự xét $\triangle AOD$ và $\triangle BOC$ bằng nhau dễ dàng có được:

$$AD = CB \text{ và } AD \parallel BD.$$

10. (hình 120)

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle BMH$ có:

$$MA = MB \text{ (M là trung điểm)};$$

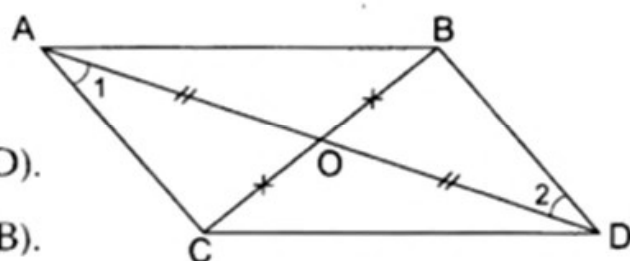
$$\widehat{AMC} = \widehat{BMH} \text{ (đối đỉnh)};$$

$$MC = MH \text{ (giả thiết)}.$$

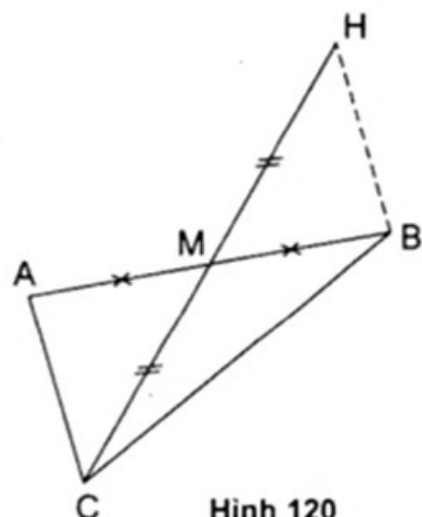
Vậy $\triangle AMC = \triangle BMH$ (c.g.c). Từ đó suy ra:

$$\widehat{CAM} = \widehat{HBM} \text{ (góc tương ứng)}.$$

Mà $\widehat{MAC} = 90^\circ$ vậy $\widehat{MBH} = 90^\circ \Rightarrow HB \perp BM$.



Hình 119



Hình 120

11. (hình 121)

1) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$ có:

$$\begin{aligned} AM &= MC \text{ (giả thiết);} \\ \widehat{AMD} &= \widehat{CMB} + 60^\circ. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\widehat{CMB} = \widehat{CMB} + 60^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$\widehat{AMD} = \widehat{CMB}$$

$$MD = MB \text{ (giả thiết).}$$

Vậy $\triangle AMD = \triangle CMB$ (c.g.c), suy ra: $AD = CB$. (3)

2) Từ (3), suy ra: $\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}CB$ hay $DE = BF$.

Xét $\triangle EDM$ và $\triangle FBM$ có:

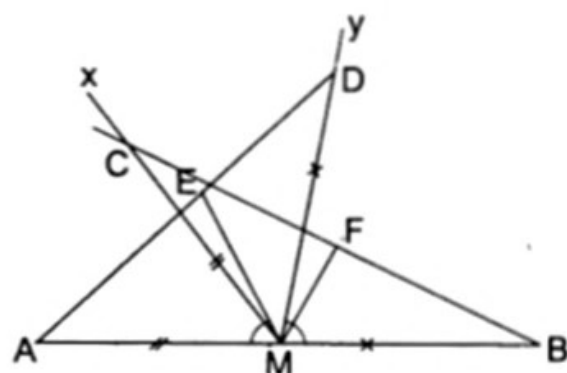
$$DE = BF; DM = BM \text{ (giả thiết).}$$

$$\widehat{EDM} = \widehat{FBM} \text{ (do } \triangle AMD = \triangle CMB \text{)}.$$

Suy ra: $\triangle EDM = \triangle FBM$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{EMD} = \widehat{FMB}$.

Mà $\widehat{FMB} + \widehat{FMD} = 60^\circ$ (giả thiết).

Vậy $\widehat{EMD} + \widehat{FMD} = 60^\circ$ hay $\widehat{EMF} = 60^\circ$.



Hình 121

12. (hình 122)

– Xét $\triangle EIM$ và $\triangle EIC$ có:

$$MI = IC \text{ (Ix là đường trung trực);}$$

$$\widehat{MIE} = \widehat{EIC} = 90^\circ \text{ (Ix là đường trung trực);}$$

IE chung.

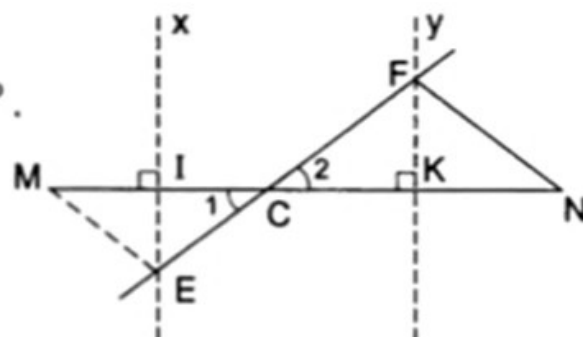
Vậy $\triangle EIM = \triangle EIC$ (c.g.c), suy ra $\widehat{M} = \widehat{C}_1$ (góc tương ứng). (1)

– Xét $\triangle CKF$ và $\triangle NKF$ có:

$$CK = KN \text{ (vì yK là trung trực).}$$

$$\widehat{CKF} = \widehat{FKN} \text{ (vì yK là trung trực).}$$

KF chung.



Hình 122

Vậy $\triangle CKF = \triangle NKF$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{N} = \widehat{C}_2$ (góc tương ứng). (2)

Mà $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (đối đỉnh). (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\widehat{M} = \widehat{N}$.

Vậy $ME \parallel FN$ (vì có hai góc so le trong bằng nhau).

13*. (hình 123)

1) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ANC$ có:

$AM = AC$; $AB = AN$ (giả thiết).

$\widehat{BAM} = \widehat{A} + 90^\circ$;

$\widehat{NAC} = 90^\circ + \widehat{A}$ (do cách vẽ).

vậy: $\widehat{BAM} = \widehat{NAC}$

suy ra: $\triangle ABM = \triangle ANC$ (c.g.c)

2) Và $BM = CN$ (cạnh tương ứng).

3) CN cắt AB tại E và cắt BM tại F.

Xét $\triangle ANE$ và $\triangle BEF$ có:

$\widehat{N}_1 = \widehat{B}_1$ ($\triangle ABM = \triangle ANC$ chứng minh trên);

$\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (đối đỉnh).

$\triangle ANE$ và $\triangle BEF$ có 2 cặp góc tương ứng bằng nhau nên cặp góc tương ứng còn lại phải bằng nhau, tức là: $\widehat{NAE} = \widehat{EFB}$.

Mà $\widehat{NAE} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{EFB} = 90^\circ$, hay ra: $BM \perp CN$.

14*. (hình 124)

1) Các cặp:

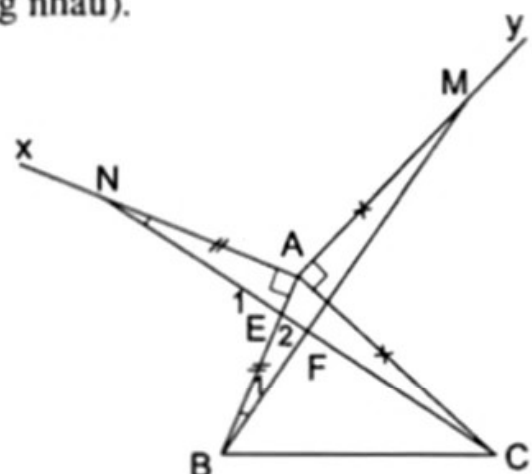
$\triangle AOB = \triangle A'OB'$;

$\triangle BOC = \triangle B'OC'$;

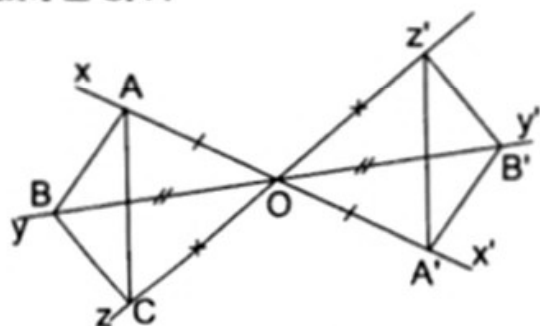
$\triangle AOC = \triangle A'OC'$

theo trường hợp (c.g.c) (bạn đọc tự chứng minh).

Từ ba cặp tam giác bằng nhau đó suy ra các cặp cạnh tương ứng bằng nhau $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $AC = A'C'$ để suy ra $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.c.c).



Hình 123



Hình 124

2) Từ chứng minh 1: $\triangle AOB = \triangle A'OB' \Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{B'A'O} \Rightarrow AB \parallel A'B'$ (có 2 góc so le trong bằng nhau).

$$\triangle AOC = \triangle A'OC' \Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{C'A'O} \Rightarrow AC \parallel A'C'.$$

$$\triangle BOC = \triangle B'OC' \Rightarrow \widehat{CBO} = \widehat{C'B'O} \Rightarrow BC \parallel B'C'.$$

15*. (hình 125)

1) Xét $\triangle AMN$ và $\triangle CPN$ có:

$$AN = NC; NM = NP \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

Vậy $\triangle AMN = \triangle CPN$ (c.g.c).

2) Từ kết quả trên, suy ra:

$$AM = CP \text{ (cạnh tương ứng);}$$

Mà $AM = MB$ (giả thiết), vậy $CP = MB$.

Lại có: $\widehat{A} = \widehat{C}_2$ (do $\triangle AMN = \triangle CPN$)

$$\Rightarrow PC \parallel AM \text{ (có 2 góc so le trong bằng nhau).}$$

Vậy $PC \parallel AB$.

3) Nối MC xét $\triangle BMC$ và $\triangle PMC$ có:

MC là cạnh chung;

$$CP = MB \text{ (theo chứng minh câu 2);}$$

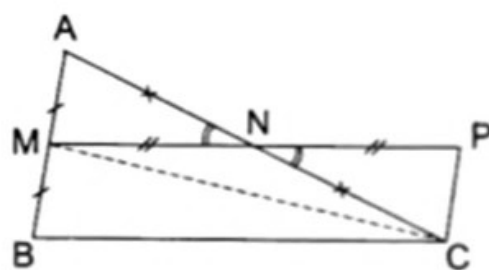
$$\widehat{BMC} = \widehat{MCP} \text{ (góc so le trong tạo bởi } PC \parallel AB \text{).}$$

Vậy $\triangle BMC = \triangle PCM$ (c.g.c), suy ra:

• $\widehat{PMC} = \widehat{MBC}$ (góc tương ứng) $\Rightarrow MP \parallel BC$ (hai góc so le trong bằng nhau).

• $MP = BC$ (cạnh tương ứng). Mà $MN = \frac{1}{2} MP$ (giả thiết), vậy:

$$MN = \frac{1}{2} BC \text{ và } MN \parallel BC.$$



Hình 125

16. Chứng minh $\triangle ABC$ và $\triangle AEC$ bằng nhau là sai vì cặp góc $\widehat{C}$ không phải là góc xen giữa hai cạnh tương ứng bằng nhau.

17. Tự chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp (g.c.g)

18. Nối A với C, xét $\triangle ABC$ và $\triangle CAD$ có:

Cạnh AC chung;

$$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \text{ (AB // CD);}$$

$$\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 \text{ (AD // BC).}$$

Vậy $\triangle ABC = \triangle CAD$ (g.c.g).

Suy ra: $AB = CD$ và $AD = BC$.

19. (hình 126)

Xét $\triangle MEN$ và $\triangle NFM$ có:

$$\widehat{M} = \widehat{N} \text{ (giả thiết);}$$

Cạnh MN là cạnh chung.

$$\text{Do } \widehat{M} = \widehat{N} \Rightarrow \frac{\widehat{M}}{2} = \frac{\widehat{N}}{2} \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1.$$

Vậy $\triangle MEN = \triangle NFM$ (g.c.g), suy ra:

$ME = NF$ (cạnh tương ứng).

20. (hình 127)

1) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ mà góc A nhọn nên:

$$\widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ.$$

$$\widehat{B} = \widehat{C} \text{ (giả thiết)} \Rightarrow 2\widehat{B} < 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ,$$

vậy $\widehat{B} = \widehat{C}$ cùng nhọn.

2) Xét $\triangle BHC$ và $\triangle CKB$ có:

$$\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ;$$

BC chung;

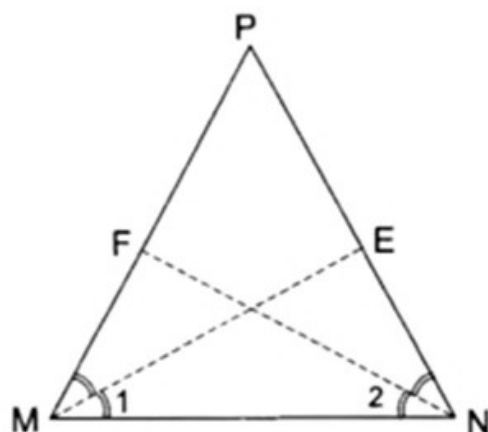
$$\widehat{B} = \widehat{C}.$$

Vậy $\triangle BHC = \triangle CKB$ (g.c.g) $\Rightarrow BH = CK$.

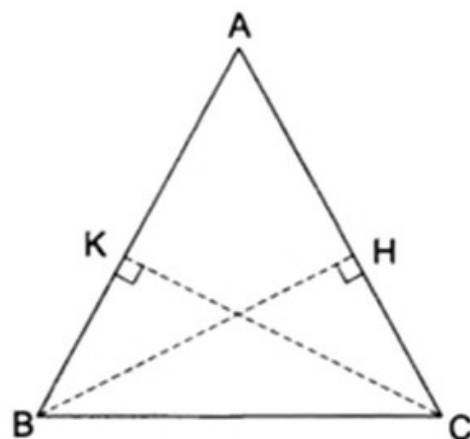
21. (hình 128)

– Xét $\triangle EOA$ và $\triangle FOA$ có:

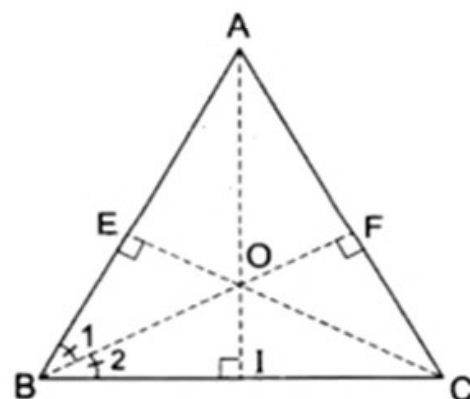
$$\widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ;$$



Hình 126



Hình 127



Hình 128

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (giả thiết);}$$

OA chung.

Vậy $\triangle EOA = \triangle FOA$ (cạnh huyền, góc nhọn), suy ra: $OE = OF$. (1)

– Tương tự, ta chứng minh được $\triangle EOB = \triangle IOB$ (cạnh huyền, góc nhọn),
vậy $OE = OI$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $OE = OF = OI$.

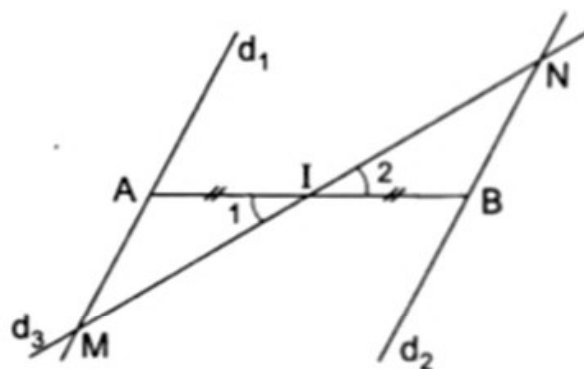
22. (hình 129)

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle BNI$ có:

$$IA = IB \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{I_1} = \widehat{I_2} \text{ (đối đỉnh);}$$

$$\widehat{M} = \widehat{N} \text{ (so le trong } d_1 \parallel d_2 \text{).}$$



Hình 129

Vậy $\triangle AMI = \triangle BNI$ (g.c.g) suy ra: $MI = IN$.

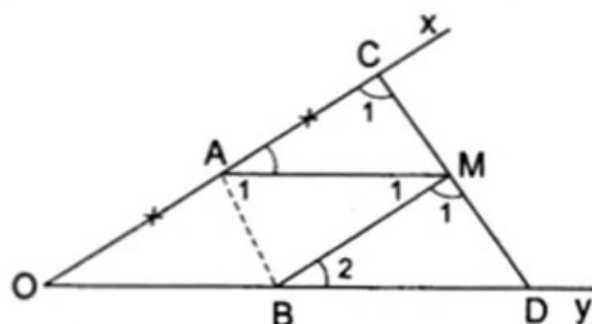
23. (hình 130)

1) Nối A với B. Tương tự bài 18, ta chứng minh được:

$$\triangle AOB = \triangle BMA \text{ (g.c.g).}$$

Suy ra:

$$OA = MB; OB = MA \text{ (cạnh tương ứng)}$$



Hình 130

2) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle BDM$ có:

$$\widehat{C_1} = \widehat{M_1} \text{ (hai góc đồng vị } Ox \parallel MB \text{);}$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1} \text{ (hai góc có cạnh tương ứng song song);}$$

Do $OA = AC$ (giả thiết) và $OA = MB$ (theo chứng minh câu 1), nên:

$$AC = MB \text{ (cùng bằng OA).}$$

Suy ra: $\triangle AMC = \triangle BDM$ (g.c.g). Vậy $CM = MD$ (cạnh tương ứng).

24. (hình 131)

1) Xét $\triangle AOM$ và $\triangle CON$ có:

$$AM = CN \text{ (giả thiết);}$$

$AB \parallel Cx$ (giả thiết) nên ta có:

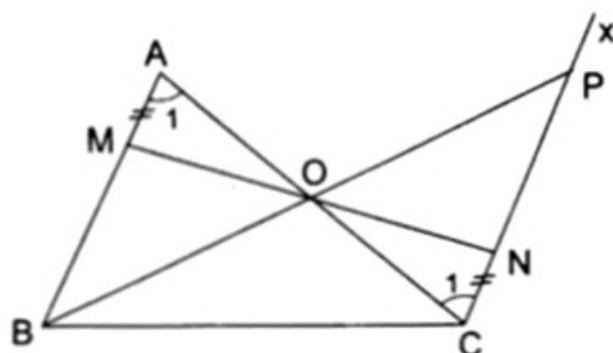
$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (so le trong)}$$

$$\widehat{M_1} = \widehat{N_1} \text{ (so le trong).}$$

Vậy $\triangle AOM = \triangle CON$ (g.c.g) suy ra:

$$OA = OC \text{ (cạnh tương ứng);}$$

$$OM = ON \text{ (cạnh tương ứng).}$$



Hình 131

2) Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COP$ có:

$$OA = OC \text{ (theo chứng minh câu 1);}$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (so le trong);}$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{COP} \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\triangle AOB = \triangle COP$ (g.c.g), suy ra: $AB = CP$ (cạnh tương ứng).

25*. Theo chứng minh bài toán ví dụ 1 ta có: Chu vi $\triangle A_1B_1C_1$ gấp hai lần chu vi $\triangle ABC$ (tức là 2^1 lần)

– Vậy chu vi $\triangle A_2B_2C_2$ gấp 4 lần chu vi $\triangle A_1B_1C_1$ và gấp 2^2 lần chu vi $\triangle ABC$

– Vậy chu vi $\triangle A_3B_3C_3$ gấp 2^2 lần chu vi $\triangle A_1B_1C_1$ và gấp 2^3 lần chu vi $\triangle ABC$

.....

Vậy chu vi $\triangle A_{10}B_{10}C_{10}$ gấp 2^{10} lần chu vi $\triangle ABC$.

26*. (hình 132)

Theo bài 18: Ta nối MI để chứng minh $\triangle MEI = \triangle INM$ và suy ra:

$$ME = IN. \quad (1)$$

Nối EK, chứng minh $\triangle EPK = \triangle KFK$ suy ra: $EP = FK$. (2)

Mà $OM = ME = EP$ (giả thiết). (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra: $OM = NI = FK$.

Xét các tam giác $\triangle ONM$; $\triangle NFI$; $\triangle FQK$, có:

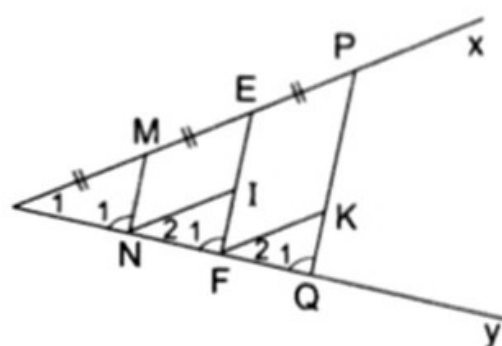
$OM = NI = FK$ (chứng minh trên);

$\widehat{N}_1 = \widehat{F}_1 = \widehat{Q}_1$ (các góc đồng vị)

$\widehat{O}_1 = \widehat{N}_2 = \widehat{F}_2$ (các góc đồng vị).

Vậy: $\triangle ONM = \triangle NFI = \triangle FQK$ (g.c.g)

Suy ra: $ON = NF = FQ$ (cạnh tương ứng).



Hình 132

Chủ đề 3

1. Tự tính kết quả: a) 67° ; b) $\frac{180^\circ - \alpha^\circ}{2}$.

2. Tự tính kết quả: a) 80° ; b) $180^\circ - 2\beta^\circ$.

3. Giả sử $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{B} = \widehat{C}$, ta xét hai trường hợp:

– Trường hợp 1: $\widehat{A} > 90^\circ$ (tù), trong đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

(1)

Vì $\widehat{A} \geq 90^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} \leq 90^\circ$

Lại có $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow 2\widehat{B} \leq 90^\circ$. Vậy $\widehat{B} = \widehat{C} \leq 45^\circ \Rightarrow \widehat{B}$ và $\widehat{C}$ nhọn.

– Trường hợp 2: $\widehat{A}$ nhọn. Từ (1) suy ra: $\widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$.

Mà $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow 2\widehat{B} < 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} < 90^\circ$. Vậy $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là các góc nhọn.

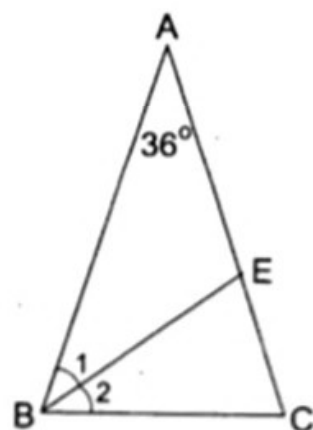
4. (hình 133)

– Xét $\triangle ABC$ có: $\widehat{A} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

Mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ (tính chất) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$.

Mà $\widehat{ABE} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ (BE là phân giác), vậy:

$$\widehat{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ.$$



Hình 133

$\triangle ABE$ có $\widehat{A} = \widehat{ABE} = 36^\circ$ nên $\triangle ABE$ cân tại E $\Rightarrow AE = BE$.

(1)

– Xét $\triangle BEC$ có:

$$\widehat{B}_2 = 36^\circ; \widehat{C} = 72^\circ \text{ (chứng minh trên).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{BEC} = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BEC} = \widehat{C} = 72^\circ \Rightarrow \triangle BEC \text{ cân tại B} \Rightarrow BE = BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $AE = BE = BC$.

5. 1) Góc có số đo 100° phải là góc ở đỉnh (vì nếu là góc ở đáy thì hai góc ở đáy đã là 200° vô lí).

Vậy hai góc còn lại phải là hai góc ở đáy. Mỗi góc ở đáy bằng:

$$\frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

- 2) Nếu góc ở đỉnh bằng 50° thì hai góc ở đáy là:

$$\frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ.$$

Ba góc của tam giác là: $50^\circ; 65^\circ; 65^\circ$.

Nếu góc ở đáy bằng 50° thì góc ở đỉnh là:

$$180^\circ - (2 \cdot 50^\circ) = 80^\circ.$$

Ba góc của tam giác là: $80^\circ; 50^\circ; 50^\circ$.

6. (hình 134)

$$1) AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}_1 = 30^\circ \text{ (giả thiết).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{A}_1 = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}_1) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

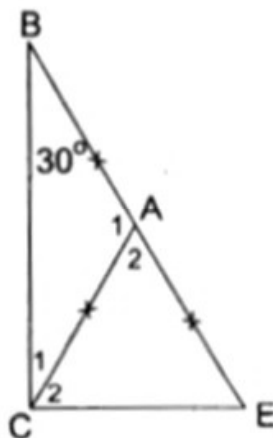
Mà $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$ kề bù nhau, nên:

$$\widehat{A}_2 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$\triangle ACE$ có: $AE = AB$ (cách vẽ);

$AC = AB$ (giả thiết).

Vậy $AE = AC$ (cùng bằng AB) $\Rightarrow \triangle ACE$ cân có $\widehat{A}_2 = 60^\circ$ (chứng minh trên) vậy $\triangle ACE$ đều.



Hình 134

2) $\triangle ACE$ đều nên $\widehat{E} = 60^\circ$. Xét $\triangle BCE$ có:

$\widehat{B} = 30^\circ$ (giả thiết), vậy $\widehat{B} + \widehat{E} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

Suy ra: $\widehat{BCF} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, hay $\triangle BCE$ là tam giác vuông tại C.

7. (hình 135)

Xét $\triangle BEA$ và $\triangle CFA$ có:

$AB = AC$ (giả thiết $\triangle ABC$ cân);

$BE = CF$ (cách vẽ);

$\widehat{EAC} = \widehat{C_1}$ ($AE \parallel Cx$) giả thiết). (1)

$\widehat{EAC} = \widehat{C_2}$ ($\triangle AEC$ cân tại E). (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$. (3)

Mà $\widehat{C_2} = \widehat{B_1}$ ($\triangle ABC$ cân). (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$. (5)

Mà $\widehat{EBA} + \widehat{B_1} = 180^\circ$ (E, B, C thẳng hàng). (6)

$\widehat{FCA} + \widehat{C_1} = 180^\circ$ (Cx là đường thẳng). (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra: $\widehat{EBA} = \widehat{FCA}$.

Vậy $\triangle BEA = \triangle CFA$ (c.g.c), suy ra: $EA = FA$, hay $\triangle EAF$ cân tại A.

8*. (hình 136)

– Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CEF$ có:

$AE = CF$ (giả thiết);

$AD = AB + BD$; $CE = AC + CF$

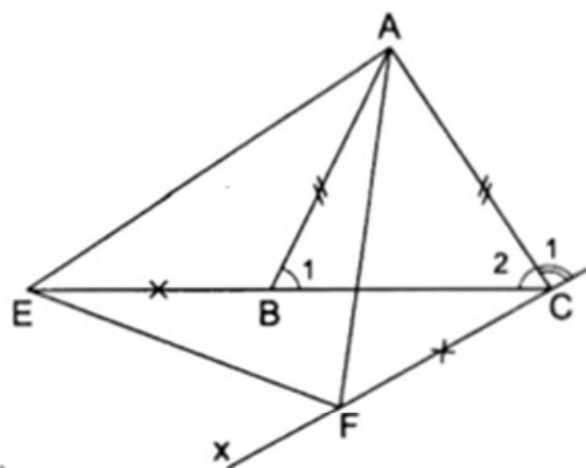
Mà $AB = AC$ ($\triangle ABC$ đều), $BD = CF$ (giả thiết), vậy $AD = CE$.

$\widehat{EAD} + \widehat{A} = 180^\circ$ ($C_1 A_1 E$ thẳng hàng). (1)

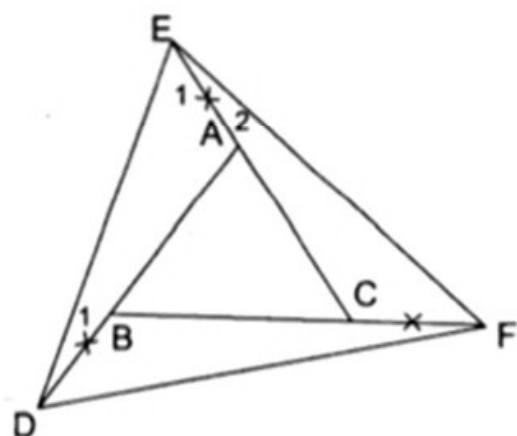
$\widehat{FCE} + \widehat{C} = 180^\circ$ ($B_1 C_1 F$ thẳng hàng). (2)

Mà $\widehat{A} = \widehat{C} = 60^\circ$ ($\triangle ABC$ đều). (3)

Từ (1) (2) và (3), suy ra: $\widehat{EAD} = \widehat{FCE} = 120^\circ$.



Hình 135



Hình 136

Vậy $\triangle ADE = \triangle CEF$ (c.g.c) suy ra: $ED = EF$. Vậy $\triangle DEF$ cân tại E.

- Xét $\triangle ADE$ có:

$$\widehat{D}_1 = \widehat{E}_2 \quad (\triangle ADE = \triangle CEF). \quad (4)$$

$$\widehat{EAD} = 120^\circ \text{ (chứng minh trên).}$$

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{D}_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ. \quad (5)$$

Thay (4) vào (5), có: $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 60^\circ$ hay $\widehat{DEF} = 60^\circ$.

$\triangle DEF$ cân có một góc 60° vậy $\triangle DEF$ là tam giác đều.

9. (hình 137)

1) Xét $\triangle AOB$ và $\triangle BOC$, có:

$$OA = OB = OC \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = 60^\circ \text{ (Oz là phân giác).}$$

Vậy $\triangle AOB$ và $\triangle BOC$ cân có một góc 60° nên nó là hai tam giác đều.

$$\text{Vậy } \widehat{O}_1 = \widehat{B}_1 = 60^\circ \text{ (góc } \triangle \text{ đều)} \Rightarrow OA \parallel CB.$$

$$\widehat{O}_2 = \widehat{B}_2 = 60^\circ \text{ (góc } \triangle \text{ đều)} \Rightarrow OC \parallel AB.$$

2) Xét $\triangle COI$ và $\triangle AOI$ có:

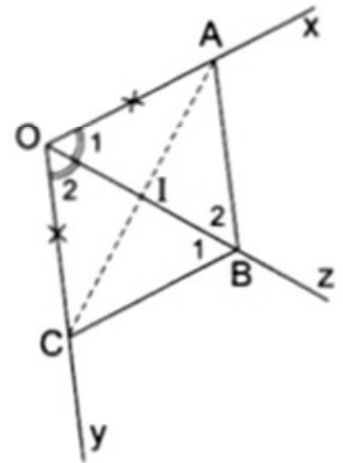
OI là cạnh chung.

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2; OA = OC \text{ (giả thiết)}$$

Vậy $\triangle COI = \triangle AOI$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{OIC} = \widehat{OIA}$.

Mà $\widehat{OIC} + \widehat{OIA} = 180^\circ$ (C, I, A thẳng hàng).

Vậy $\widehat{OIC} = \widehat{OIA} = 90^\circ$, suy ra: $OB \perp CA$.



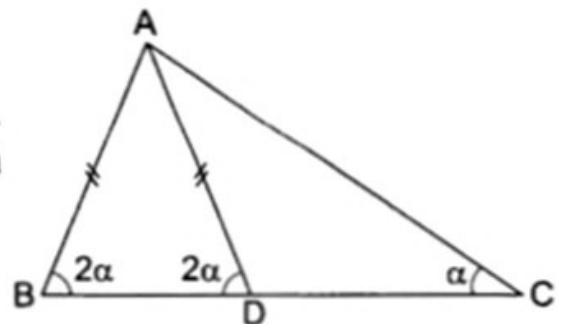
Hình 137

10*. (hình 138a, b)

Giả sử $\widehat{ADC} > \widehat{ADB}$ thì $\widehat{ADC} > 90^\circ$.

$\triangle ADC$ cân có góc tù thì góc đó phải là góc ở đỉnh, vậy $\triangle ADC$ cân tại D.

Còn $\triangle ADB$ có thể xảy ra một trong 3 trường hợp (cân tại A, cân tại B và cân tại C).

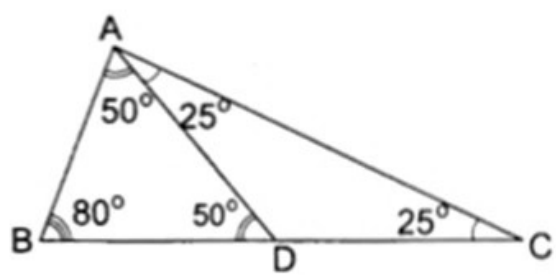


Hình 138a

Trường hợp: (Cân tại A)

– Gọi $\widehat{C} = \alpha^\circ$ thì $\widehat{DAC} = \widehat{C} = \alpha^\circ$ (2 góc ở đáy $\triangle ADC$ cân).

Góc $\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{DAC}$ (góc ngoài của $\triangle ADC$) $= 2\alpha^\circ$.



Hình 138b

Xét $\triangle ABD$ theo giả sử cân tại A nên: $\widehat{B} = \widehat{ADB} = 2\alpha^\circ$. Xét $\triangle ABC$ có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ hay: $75^\circ + 2\alpha^\circ + \alpha^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha^\circ = 105^\circ \Rightarrow \alpha^\circ = 35^\circ$.

Vậy $\triangle ABC$ có: $\widehat{C} = 35^\circ$; $\widehat{B} = 70^\circ$; $\widehat{A} = 75^\circ$.

Trường hợp 2 (cân tại D). Theo trường hợp 1: $\widehat{ADB} = 2\alpha^\circ$. Mà $\triangle ABD$ cân tại D thì $\widehat{B} = \widehat{BAD}$.

$\triangle ABC$ có: $\widehat{B} + \widehat{BAD} + \widehat{BDA} = 180^\circ$ (trong đó $\widehat{BDA} = 2\alpha^\circ$ (1) và $\widehat{B} = \widehat{BAD}$ (2)) thay (1) và (2) vào có:

$$2\widehat{BAD} + 2\alpha^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ - \alpha^\circ.$$

Vậy góc $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = 90^\circ - \alpha^\circ + \alpha^\circ = 90^\circ$.

Trái với giả thiết cho $\widehat{A} = 75^\circ$. Vậy không có trường hợp cân tại D.

Trường hợp 3 (cân tại B): Ta có: $\widehat{ADB} = 2\alpha^\circ$. Mà $\widehat{BAD} = \widehat{ADB} = 2\alpha^\circ$ (2 góc ở đáy $\triangle ABD$ cân tại B) vậy $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = 2\alpha^\circ + \alpha^\circ$

$$\text{hay: } 75^\circ = 3\alpha^\circ \Rightarrow \alpha^\circ = 25^\circ \text{ Suy ra: } \widehat{C} = 25^\circ; \widehat{B} = 180^\circ - (75^\circ + 25^\circ) = 80^\circ$$

vậy 3 góc của $\triangle ABC$ là: $\widehat{A} = 75^\circ$; $\widehat{C} = 25^\circ$; $\widehat{B} = 80^\circ$ (hình 138b)

Chủ đề 4

1. $AH = \frac{1}{2}AC$ (giả thiết); mà $AC = 40\text{cm}$ (giả thiết).

Vậy $AH = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20 \text{ (cm)}$.

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho các $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ để tính được $BH = 21 \text{ (cm)}$; $CH = 20\sqrt{3} \text{ (cm)}$.

2. Cạnh huyền có mấy phần: $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$.

Vậy cạnh huyền có 10 phần chính là 55 cm.

vậy 2 cạnh góc vuông là: $\frac{55 \cdot 6}{10} = 33$ (cm) và $\frac{55 \cdot 8}{10} = 44$ (cm).

3. $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 1$ vuông; $AB = AC = x$ (cm) theo định lí Pi-ta-go có:
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + x^2$; $BC^2 = 2x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}x$ (cm).

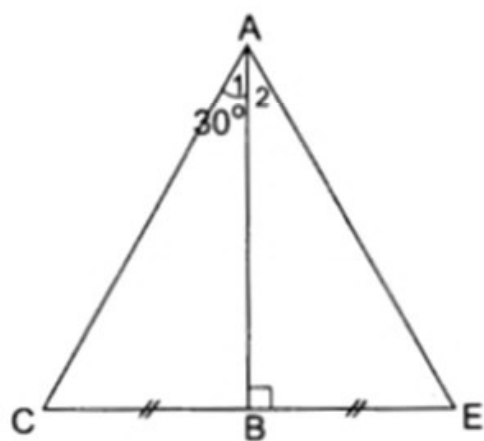
$\sqrt{2}$ là một số vô tỉ. Vậy cạnh huyền $BC = \sqrt{2}x$ là số vô tỉ.

4. (hình 139)

– Theo đầu bài ta có $\triangle ABC$ vuông tại B. Có

$\widehat{A} = 30^\circ$ phải chứng minh: $BC = \frac{1}{2}AC$

– Thật vậy: trên tia đối của tia BC lấy $BE = BC$. Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABE$ là 2 tam giác vuông tại B có AB chung và $BC = BE$ (cách vẽ) vậy: $\triangle ABC = \triangle ABE$ (2 cạnh góc vuông) suy ra: $AC = AE$ (1);
 $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 30^\circ$ (2)



Hình 139

Từ (1) suy ra $\triangle ACE$ cân tại A. Từ (2) suy ra $\widehat{CAE} = 60^\circ$. Vậy $\triangle ACE$ cân có một góc $60^\circ \Rightarrow \triangle ACE$ đều vậy: $AC = CE = AE$ mà $CB = \frac{1}{2}CE$ (cách vẽ)

$$\Rightarrow CB = \frac{1}{2}AC.$$

5. (hình 88 – tr. 75) $\triangle AHC$ vuông tại H có $\widehat{C} = 30^\circ$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \widehat{HAK} = 60^\circ. \triangle AHK \text{ có } \widehat{HAK} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AHK} = 30^\circ.$$

$$\text{vậy } AK = \frac{1}{2}AH \text{ (cạnh đối diện góc } 30^\circ) \Rightarrow AK = \frac{1}{2} \cdot 2\text{ cm} = 1 \text{ (cm).}$$

$$AH = \frac{1}{2}AC \text{ (đối diện góc } \widehat{C} = 30^\circ) \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AC = 4 \text{ (cm).}$$

$$\text{Vậy } KC = AC - AK = 4 - 1 = 3 \text{ (cm).}$$

$$\text{Áp dụng định lí Pi-ta-go có: } HK^2 = AH^2 - AK^2 = 2^2 - 1^2 = 3.$$

Vậy $HK = \sqrt{3}$ (cm)

$\triangle HKC$ có $\hat{K} = 90^\circ$; $\hat{C} = 30^\circ$, suy ra: $HK = \frac{1}{2}HC$ (đối diện góc 30°), hay

$$\sqrt{3} = \frac{1}{2}HC \Rightarrow HC = 2\sqrt{3}.$$

Vậy: $AK = 1\text{cm}$; $KC = 3\text{cm}$; $HK = \sqrt{3}$ (cm); $HC = 2\sqrt{3}$ (cm).

6. (hình 140)

1) Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2. \quad (1)$$

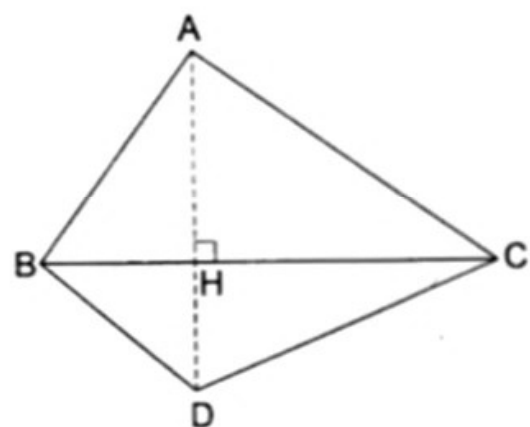
$\triangle ACH$ vuông tại H, có:

$$AH^2 = AC^2 - HC^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2,$$

$$\text{hay } AB^2 + HC^2 = AC^2 + BH^2.$$



Hình 140

$$2) \text{ Xét } \triangle ABH \text{ vuông tại H có: } AB^2 = AH^2 + BH^2. \quad (3)$$

$$\text{Xét } \triangle CHD \text{ vuông tại H có: } DC^2 = HC^2 + HD^2. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Cộng (3) và (4), ta có: } AB^2 + DC^2 &= AH^2 + BH^2 + HC^2 + HD^2 \\ &= (AH^2 + HC^2) + (BH^2 + HD^2). \text{ Vậy, ta có: } AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2. \end{aligned}$$

7. (hình 141)

Xét $\triangle MBN$ vuông tại N, theo Pi-ta-go, ta có:

$$MB^2 = MN^2 + NB^2. \quad (1)$$

Xét $\triangle CMN$ vuông tại N, ta có:

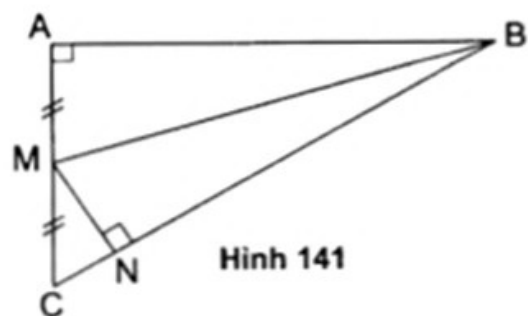
$$MC^2 = MN^2 + CN^2. \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2), ta có:

$$MB^2 - MC^2 = NB^2 - CN^2. \quad (3)$$

$$\text{Mà } MC = MA \text{ (giả thiết)}. \quad (4)$$

$$\text{Thay (4) vào (3), ta có: } MB^2 - MA^2 = NB^2 - NC^2. \quad (5)$$



Hình 141

Trong $\triangle ABM$ vuông tại A có: $AB^2 = MB^2 - MA^2$. (6)

Thay (6) vào (5), ta có: $AB^2 = NB^2 - NC^2$

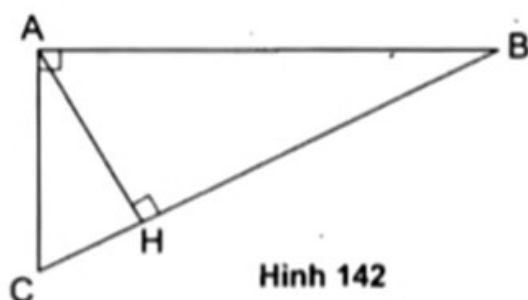
8*. (hình 142)

1) Ta thấy diện tích $\triangle ABC$ được tính bằng 2 cách:

Cách 1: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$.

Cách 2: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$.

Từ đó suy ra: $AB \cdot AC = AH \cdot BC$,



Hình 142

$$\text{hay } AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{AH} = \frac{BC}{AB \cdot AC} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2}. \quad (1)$$

Theo định lí Pi-ta-go, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

$$\text{Thay vào (1), ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{AB^2}{AB^2 \cdot AC^2} + \frac{AC^2}{AB^2 \cdot AC^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2}. \quad (2)$$

$$2) \text{ Từ } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 10^2 = AB^2 + 8^2 \Rightarrow AB^2 = 36 \Rightarrow AB = 6.$$

$$\text{Thay vào hệ thức (2), ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{1}{64} + \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{36 + 64}{8^2 \cdot 6^2} = \frac{100}{8^2 \cdot 6^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{8^2 \cdot 6^2}{10^2}, \quad AH = \frac{8 \cdot 6}{10} \Rightarrow AH = 4,8(\text{cm})$$

$$9. \text{ Giải thích tại sao } \widehat{ABC} = 90^\circ: \text{ Thật vậy, } AC^2 = 5^2 = 25. \quad (1)$$

$$AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ theo định lí đảo của Pi-ta-go ta có AC là cạnh huyền và AB và BC là 2 cạnh góc vuông. $\triangle ABC$ vuông tại B.

10. Ta dễ dàng chứng minh được $\triangle AHI = \triangle AKI$ (cạnh huyền, góc nhọn), để suy ra: $HI = KI$.

11. (hình 143)

1) Xét $\triangle EAF$ và $\triangle FHE$ có:

Cạnh huyền EF chung

$AB \perp AC$; $HF \perp AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow AB \parallel HF$ (cùng vuông góc với AC).

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{EFH}$ (so le trong)

$\Rightarrow \triangle EAF = \triangle FHE$ (cạnh huyền, góc nhọn).

Vậy $AF = EH$; $EA = FH$.

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle FHE$ vuông tại E và F có:

EH là cạnh chung; $EA = FH$ (theo (1)).

Vậy $\triangle AEH = \triangle FHE$ (hai cạnh góc vuông).

Suy ra: $AH = FE$ (cạnh tương ứng).

2) Xét $\triangle AOF$ và $\triangle EOH$, ta có:

$AF = EH$ (theo (1))

$\widehat{FAH} = \widehat{AHE}$ ($AC \parallel EH$)

$\widehat{AFE} = \widehat{FEH}$ ($AC \parallel EH$)

Vậy $\triangle AOF = \triangle EOH$ (g.c.g) $\Rightarrow OA = OH$; $OE = OF$.

3) $\triangle AEH = \triangle FHE$ (chứng minh 1) $\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{EFH}$ (góc tương ứng). (2)

$\widehat{AEF} = \widehat{HFE}$ ($AE \parallel FH$). (3)

Từ (2) và (3), suy ra: $\widehat{EAH} = \widehat{AEF}$ (cùng bằng $\widehat{HFE}$). (4)

Mà: $\widehat{EAH} = \widehat{ACB}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Vậy:

$\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$ (cùng bằng $\widehat{EAH}$).

$AH \perp BC$ (giả thiết); $HE \perp AB$ (giả thiết).

Vậy $\widehat{AHE} = \widehat{ABC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

12. (hình 144)

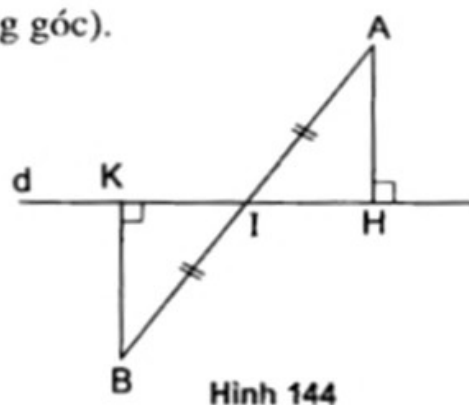
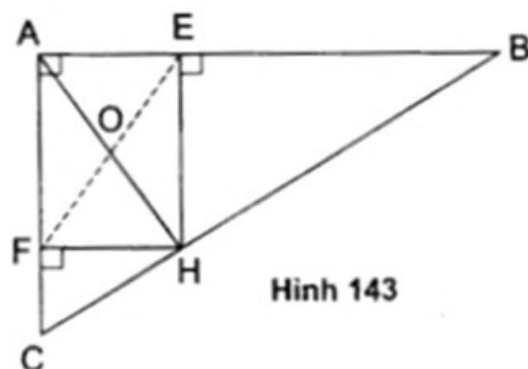
Xét $\triangle BKI$ và $\triangle AHI$ vuông tại H và K , ta có:

$IA = IB$ (giả thiết)

$\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ (đối đỉnh)

Vậy $\triangle BKI = \triangle AHI$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow BK = AH$.



13. (hình 145)

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle CFA$ vuông tại E và F có:

$$AB = CA \text{ (giả thiết)}$$

$\widehat{EAB} = \widehat{FCA}$ ($AB \perp CA$; $AE \perp CF$
góc có cạnh tương ứng vuông góc).

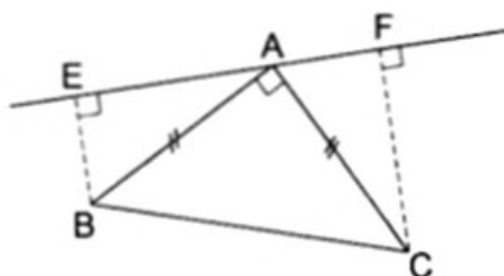
Vậy $\triangle AEB = \triangle CFA$ (cạnh huyền, góc nhọn), suy ra:

$$AE = CF \text{ (cạnh tương ứng)}$$

$$AF = BE \text{ (cạnh tương ứng)}$$

Hay $AE + AF = CF + BE$.

Mà A nằm giữa hai điểm E và F, nên ta có: $EF = BE + CF$.



Hình 145

14. (hình 146)

1) $AB \perp AC$; $AH \perp BC$ (giả thiết).

Vậy:

$$\widehat{BAH} = \widehat{C} \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)}. \quad (1)$$

$$\widehat{CAH} = \widehat{B} \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)}. \quad (2)$$

$$\widehat{A_2} = \widehat{A_1} \text{ (AD là tia phân giác)}. \quad (3)$$

$$\text{Cộng (1) và (3), ta có: } \widehat{BAH} + \widehat{A_2} = \widehat{C} + \widehat{A_1}. \quad (4)$$

Mà $\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{A_1}$ (góc ngoài $\triangle ACD$). Vậy:

$$\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{A_1} = \widehat{BAH} + \widehat{A_2} = \widehat{DAB}$$

$\triangle ABD$ có $\widehat{ADB} = \widehat{DAB} \Rightarrow$ vậy $\triangle ABD$ cân tại B.

Tương tự, ta có: $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$ (AE là phân giác). (5)

$$\text{Cộng (2) và (5), ta có: } \widehat{CAH} + \widehat{A_3} = \widehat{B} + \widehat{A_4}.$$

Mà $\widehat{AEC} = \widehat{B} + \widehat{A_4}$ (góc ngoài $\triangle ABE$).

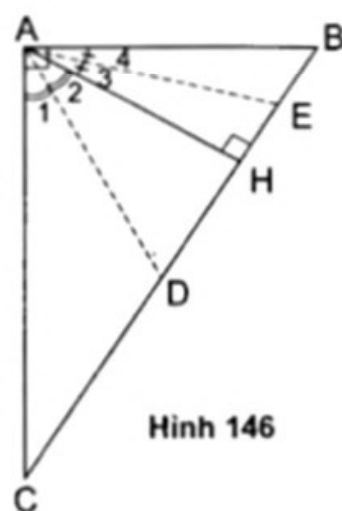
$$\text{Vậy } \widehat{AEC} = \widehat{B} + \widehat{A_4} = \widehat{CAH} + \widehat{A_3} = \widehat{CAE};$$

$\triangle ACE$ có: $\widehat{AEC} = \widehat{CAE} \Rightarrow \triangle ACE$ cân tại C.

$$2) \quad \triangle ABD \text{ cân tại B} \Rightarrow AB = BD.$$

$$\triangle ACE \text{ cân tại C} \Rightarrow AC = CE.$$

$$\Rightarrow AB + AC = BD + CE. \quad (6)$$



Hình 146

Mà $CE = CD + DE$.

(7)

Thay (7) vào (6), ta có: $AB + AC = BD + DC + DE$.

Vậy $AB + AC = BC + DE$.

15. (hình 147)

– Xét $\triangle AOI$ và $\triangle AOM$ vuông tại I và M ,

ta có: $OA^2 = AI^2 + OI^2$

$$OA^2 = AM^2 + OM^2.$$

Vậy: $AI^2 + OI^2 = AM^2 + OM^2$, hay:

$$AI^2 = AM^2 + OM^2 - OI^2. \quad (1)$$

– Xét $\triangle BOI$ và $\triangle BOH$ vuông tại I và H , ta có:

$$OB^2 = BI^2 + OI^2$$

$$OB^2 = BH^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow BH^2 + OH^2 = BI^2 + OI^2 \Rightarrow BH^2 = BI^2 + OI^2 - OH^2. \quad (2)$$

– Tương tự, xét $\triangle COH$ và $\triangle COM$ vuông tại H và M , ta có:

$$OC^2 = CH^2 + OH^2;$$

$$OC^2 = CM^2 + OM^2$$

$$\Rightarrow CM^2 + OM^2 = CH^2 + OH^2 \Rightarrow CM^2 = CH^2 + OH^2 - OM^2. \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3), ta có:

$$\begin{aligned} AI^2 + BH^2 + CM^2 &= AM^2 + OM^2 - OI^2 + BI^2 + OI^2 \\ &\quad - OH^2 + CH^2 + OH^2 - OM^2 \end{aligned}$$

$$AI^2 + BH^2 + CM^2 = AM^2 + BI^2 + CH^2.$$

16*. (hình 148)

1) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle APH$ vuông tại H , ta có:

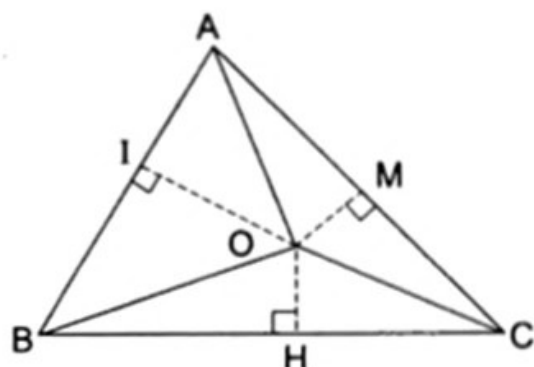
$$BH = HP \text{ (giả thiết)}$$

AH là cạnh chung

$$\text{Vậy } \triangle ABH = \triangle APH \text{ (hai cạnh góc vuông).} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra: } AB = AP. \quad (2)$$

Vậy $\triangle ABP$ cân tại A .



Hình 147

2) Từ (1), suy ra:

$$\widehat{BAH} = \widehat{DAH} = 15^\circ. \quad (3)$$

Vậy: $\widehat{BAD} = \widehat{BAH} + \widehat{DAH} = 30^\circ$;

$$\widehat{PAD} = \widehat{DAB} - \widehat{BAD} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Lại có: $AB = AP$ (chứng minh 1)

$$AD = AB \text{ (cạnh hình vuông).}$$

$$\Rightarrow AD = AP \text{ (cùng bằng AB).} \quad (4)$$

Vậy $\triangle APD$ có: $AD = AP$ và $\widehat{PAD} = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle APD$ đều.

3) – Xét $\triangle ABE$ và $\triangle APE$, có:

AE là cạnh chung ;

$$AB = AP \text{ (theo (2))}$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{EAD} = 15^\circ \text{ (theo (3))}$$

$$\text{Vậy } \triangle ABE = \triangle APE \text{ (c.g.c), suy ra: } \widehat{ABE} = \widehat{APE} = 90^\circ. \quad (5)$$

– Xét $\triangle PAF$ và $\triangle DAF$, có:

Cạnh AF chung;

$$AD = AP \text{ (theo (4));}$$

$$\widehat{PAF} = \widehat{DAF} = 30^\circ.$$

$$\text{Vậy } \triangle PAF = \triangle DAF \text{ (c.g.c), suy ra: } \widehat{ADF} = \widehat{APF} = 90^\circ. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), ta có: $\widehat{APE} + \widehat{APF} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, hay E, P, F thẳng hàng.

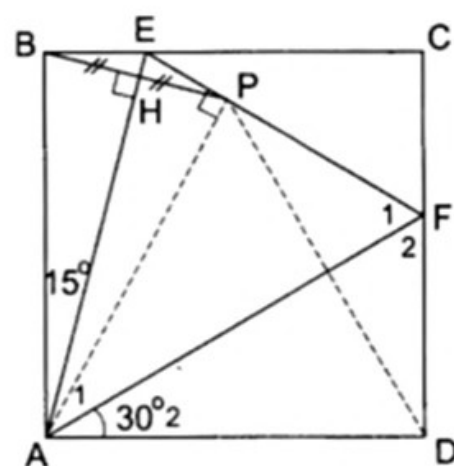
4) $\triangle PFD$ cân tại F và có:

$$\widehat{F_2} + \widehat{A_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{F_2} = 60^\circ$$

$$\widehat{F_1} + \widehat{A_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{F_1} = 60^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{F} = \widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 120^\circ.$$

Góc ở đỉnh là 120° và hai góc ở đáy mỗi góc bằng 30° .



Hình 148

17*. (hình 149)

1) Từ M hạ $MN \perp AC$, ta có $\triangle AMH$ và $\triangle AMN$ vuông tại H và N. Có:

AM là cạnh chung

$$\widehat{A_2} = \widehat{A_3} \text{ (giả thiết).} \quad (1)$$

Vậy $\triangle AMH = \triangle AMN$ (cạnh huyền, góc nhọn).

Tương tự, $\triangle ABH$ và $\triangle AMH$ vuông tại H, có:

Cạnh AH chung

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (giả thiết).} \quad (2)$$

Vậy $\triangle ABH = \triangle AMH$ (cạnh góc vuông, góc nhọn).

Từ (1) và (2), suy ra: $\triangle AMH = \triangle AMN = \triangle ABH$.

Vậy: $MH = MN = BH$.

Mà $MH + BH = BM$, suy ra: $MN = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2} MC$ ($BM = MC$ giả thiết).

$\triangle MNC$ vuông tại N có cạnh $MN = \frac{1}{2} MC$ (cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền), suy ra góc đối diện bằng 30° (định lý đảo). Vậy $\widehat{C} = 30^\circ$.

$\triangle AHC$ vuông tại H, nên:

$$\widehat{HAC} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HAC} + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HAC} = 60^\circ. \quad (3)$$

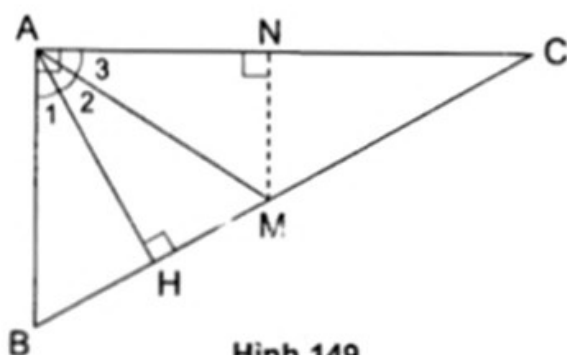
Mà $\widehat{BAC} = \frac{3}{2} \widehat{HAC}$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{3}{2} \cdot 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A.

2) Từ (3) có: $\widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{A_3} = 30^\circ; \widehat{C} = 30^\circ$.

Vậy $\triangle AMC$ cân tại M.

3) Theo (2) $\triangle ABH = \triangle AMH \Rightarrow AB = AM$

Vậy $\triangle ABM$ cân, mà $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 60^\circ$ nên $\triangle ABM$ là tam giác đều.



Hình 149

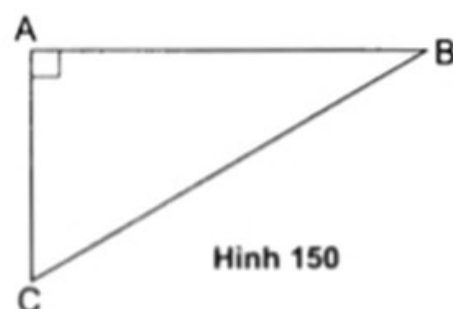
Bài 1. ĐỊNH LÝ THUẬN - ĐỊNH LÝ ĐẢO

1. (hình 150)

GT	$\triangle ABC; \hat{A} = 90^\circ; \hat{B} = 30^\circ.$
KL	$AC = \frac{1}{2}BC.$

* Chứng minh định lý thuận trên xem ví dụ 3, trang 83.

* Lập mệnh đề đảo:



Hình 150

Đảo 1: (đảo toàn bộ) Nếu một tam giác có cạnh này bằng $\frac{1}{2}$ cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° .

Dễ dàng thấy mệnh đề này sai.

Đảo 2: (đảo từng phần) Nếu một tam giác vuông có 1 cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện cạnh đó bằng 30° .

Đảo 3: (đảo từng phần) Nếu một tam giác có một góc bằng 30° và cạnh đối diện với nó bằng nửa cạnh kia. Thì tam giác đó vuông.

Ta thấy mệnh đề đảo 2 và 3 là mệnh đề đúng.

2. (hình 151)

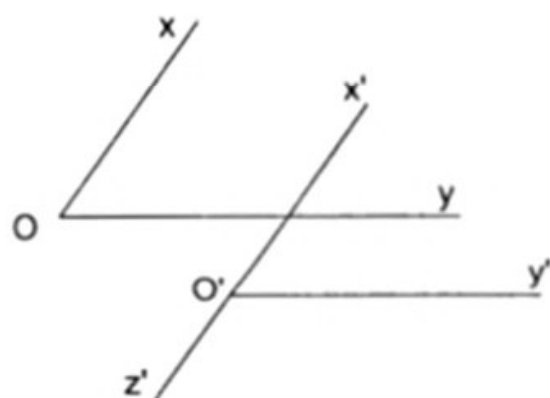
1) **Định lý thuận:** Ta hiểu định lý thuận này tương đương với 3 định lý nhỏ là:

Định lý 1:

GT	$\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ cùng nhọn, $Ox \parallel O'x'; Oy \parallel O'y'.$
KL	$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}.$

Định lý 2:

GT	$\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ cùng tù, $Ox \parallel O'x'; Oy \parallel O'y'.$
KL	$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}.$



Hình 151

Định lí 3:

GT $\widehat{xOy}$ nhọn; $\widehat{x'O'y'}$ tù; $Ox \parallel O'x'$; $Oy \parallel O'y'$.

KL $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = 180^\circ$.

Chứng minh: Theo cách chứng minh của bài 7 (ôn tập chương I)

2) **Định lí đảo:** Từ mỗi định lí thuận trên ta có thể lập được các mệnh đề đảo (chẳng hạn định lí 1).

Đảo 1: (đảo toàn bộ) Nếu 2 góc cùng nhọn và bằng nhau, thì các cặp cạnh của chúng tương đương song song.

Đảo 2: (đảo từng phần) Nếu 2 góc cùng nhọn và bằng nhau mà có một cặp cạnh tương ứng song song thì cặp cạnh kia cũng song song ($Ox \parallel O'x'$ thì $Oy \parallel O'y'$).

Đảo 3: Trùng với đảo 2 ($Oy \parallel O'y'$ thì $Ox \parallel O'x'$).

Trong 3 mệnh đề đảo đó ta dễ dàng thấy Đảo 1 là sai (hãy vẽ hình chứng tỏ). Đảo 2 là đúng; Đảo 3 trùng với đảo 2.

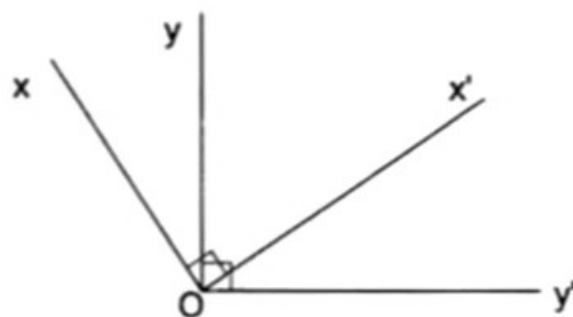
* Tương tự: Ta có thể lập tất cả 9 mệnh đề đảo. Trong đó có 3 mệnh đề đảo sai; 3 mệnh đề đảo này trùng với 3 mệnh đề đảo kia. Vậy kết luận lại chỉ còn 3 mệnh đề đảo đúng.

3. (hình 152)

1) Tương tự như bài 2 trên ta có thể lập 3 định lí thuận nhỏ

Chứng minh mệnh đề thuận xem bài 4 (chuyên đề 1 – chương I)

2) Theo cách lập của bài 2 trên hãy lập các mệnh đề đảo để chỉ ra mệnh đề đúng, sai.



Hình 152

4. (hình 153)

Định lí thuận:

GT $\triangle ABC$; $AB = AC$; $BM = MC$.

KL 1) $AM \perp BC$

2) $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

1) Chứng minh: $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

AM chung;

$AB = AC$; $BM = MC$ (giả thiết)

Vậy $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow AM$ là tia phân giác của $\widehat{A}$.

Và $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ ($\triangle ABM = \triangle ACM$), mà:

$\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$.

Vậy $AM \perp BC$.

2) Mệnh đề thuận trên tương đương với hai mệnh đề thuận:

Thuận 1:

GT	$\triangle ABC$; $AB = AC$; $BM = MC$.
----	---

KL	$AM \perp BC$.
----	-----------------

Thuận 2:

GT	$\triangle ABC$; $AB = AC$; $BM = MC$.
----	---

KL	$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.
----	-----------------------------------

– Từ định lý thuận 1 ta có hai định lý đảo:

Đảo 1:

GT	$\triangle ABC$; $AB = AC$; $AM \perp BC$.
----	---

KL	$BM = MC$.
----	-------------

Đảo 2:

GT	$\triangle ABC$; $AM \perp BC$; $BM = MC$.
----	---

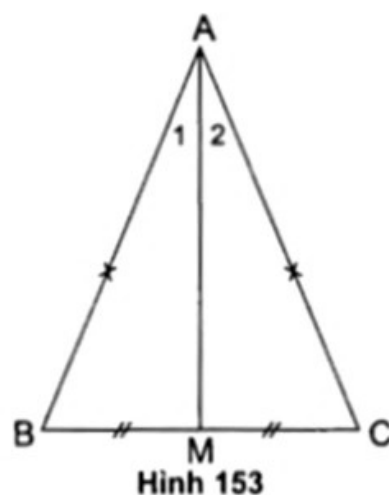
KL	$AB = AC$.
----	-------------

– Từ định lý thuận 2 ta có hai mệnh đề đảo:

Đảo 3:

GT	$\triangle ABC$; $AB = AC$; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.
----	---

KL	$BM = MC$.
----	-------------



Đảo 4:

GT	$\triangle ABC; \widehat{A_1} = \widehat{A_2}; BM = MC.$
----	--

KL	$AB = AC.$
----	------------

– Và còn mệnh đề đảo toàn bộ.

Đảo 5:

GT	$\triangle ABC; AM \perp BC; \widehat{A_1} = \widehat{A_2}.$
----	--

KL	$AB = AC; BM = MC.$
----	---------------------

Ở đây cả 5 mệnh đề đảo trên đều đúng.

5. **Đảo 1:** Nếu em được vào lớp chuyên toán thì em có đạo đức tốt và học giỏi toán.

Đảo 2: Nếu em có đạo đức tốt và được vào lớp chuyên toán thì học giỏi toán.

Đảo 3: Nếu em học giỏi toán và được vào lớp chuyên toán thì em có đạo đức tốt.

6. (hình 154)

1) Chứng minh:

Tia OE nằm giữa 2 tia OA và OC nên:

$$\widehat{AOC} = \widehat{O_1} + \widehat{O_2}. \quad (1)$$

Tia OF nằm giữa 2 tia OB và OC nên:

$$\widehat{COB} = \widehat{O_4} + \widehat{O_3}. \quad (2)$$

Ta có: $\widehat{O_1} = \widehat{O_4}$ (giả thiết); $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$
(OC là tia phân giác). (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra: $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$.

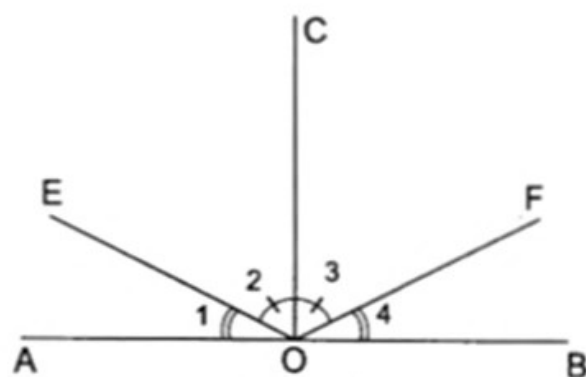
Mà $\widehat{AOC} + \widehat{COB} = 180^\circ$ (A, O, B thẳng hàng), vậy $\widehat{AOC} = \widehat{COB} = 90^\circ$ nên $OC \perp OA$.

2) Bài toán đảo: Cho $\widehat{AOB} = 180^\circ$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa tia AB vẽ 2 góc $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}$. Tại O kẻ $OC \perp AB$. Chứng minh OC là tia phân giác của góc EOF

Thật vậy:

$$OC \perp AB \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{COB} = 90^\circ. \quad (4)$$

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_4} \text{ (giả thiết)}. \quad (5)$$



Hình 154

Từ (4) và (5), ta có: $\widehat{AOC} - \widehat{O_1} = \widehat{COB} - \widehat{O_4} \Rightarrow \widehat{O_2} = \widehat{O_3}$.

Vậy OC là tia phân giác của góc EOF.

Bài 2. THỰC HÀNH NGOÀI TRỜI

7. Chọn 1 điểm C sao cho đo được khoảng cách AC và BC.

– Cắm 3 cọc tiêu: cọc tiêu 1 tại A; cọc tiêu 2 tại B; cọc tiêu 3 tại C.

– Đóng cọc tiêu 4 sao cho 3 cọc (cọc 2, cọc 3, cọc 4) thẳng hàng rồi lấy CD = CB cắm cọc tiêu 4 tại D.

– Đóng cọc tiêu 5 sao cho 3 cọc (cọc 1, cọc 3, cọc 5) thẳng hàng. Rồi lấy CE = AB. Cắm cọc tiêu 5 tại E.

Ta dễ dàng chứng minh được: $\triangle ABC = \triangle EDC$ (c.g.c) để suy ra $AB = DE$ trong đó DE là đoạn đo được.

8. Bước 1: Dùng giác kế vạch đường Bx tại B và hợp với AB góc $\widehat{ABx} = 60^\circ$.

Bước 2: Dùng giác kế xác định trên Bx điểm C sao cho $AC \perp Bx$.

Bước 3: Đo khoảng cách BC ta tính được khoảng cách AB.

Thật vậy: $\triangle ABC$ vuông tại C (cách dựng) và $\widehat{B} = 60^\circ$ (cách dựng).

Vậy suy ra: $\widehat{A} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BC$ (cạnh đối diện góc 30°)

$\Rightarrow AB = 2.83 \text{ (m)} \Rightarrow AB = 166 \text{ (m)}.$

9. 1) $\triangle AFE$ vuông tại E, có $\widehat{AFE} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AFE$ vuông cân.

Vậy $FE = EA = 5,2 \text{ (m)}.$

Lấy: $AB = E + A = 1 + 5,2 = 6,2 \text{ (m)}.$

2) $\triangle AFE$ vuông tại E có $\widehat{AFE} = 60^\circ$ thì $\widehat{FAE} = 30^\circ$.

Vậy $FA = 2FE \Rightarrow FA = 10,4 \text{ (m)}.$

Theo định lí Pi-ta-go có:

$$FA^2 = AE^2 + FE^2 \Rightarrow AE^2 = FA^2 - FE^2 = (10,4)^2 - (5,2)^2.$$

Vậy: $AE = 5,2\sqrt{3} \text{ (m)}$ và $AB = AE + EB = 5,2\sqrt{3} + 1 \text{ (m)}.$

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

1. Áp dụng định lí Pi-ta-go để tính các đoạn còn lại.
2. Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABC = \triangle DCB$ (c.g.c).

Để suy ra: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. (1)

$$\widehat{ABC} = \widehat{DCB} \text{ (giả thiết).} \quad (2)$$

$$\widehat{DBC} = \widehat{ABC} \text{ (} \triangle ABC = \triangle DCB \text{).} \quad (3)$$

Lấy (2) – (3) có: $\widehat{ABI} = \widehat{ICD}$. (4)

Vậy $\triangle ABI$ và $\triangle DCI$ có:

$$AB = CD; \widehat{BAC} = \widehat{BDC} \text{ (theo (1))}$$

$$\widehat{ABI} = \widehat{ICD} \text{ (theo (4))}$$

$$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle DCI \text{ (g.c.g).}$$

3. $\triangle AEF$ cân tại A, có $\widehat{EAF} = 36^\circ$.

Từ đó ta tính được $\widehat{AEF} = \widehat{EFA} = (180^\circ - 36^\circ) : 2 = 72^\circ$.

Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác, từ $\widehat{EFA} = 72^\circ$ và $\widehat{FAC} = 36^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{C} = 36^\circ$. Vậy $\triangle AFC$ cân tại F.

Tương tự từ góc $\widehat{AEF} = 72^\circ$; $\widehat{B} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{BAE} = 36^\circ$. Vậy $\triangle AEB$ cân tại E.

Cuối cùng: $\triangle ABC$ cân tại A; $\triangle BAF$ cân tại B; $\triangle ACE$ cân tại C.

Vậy trong hình vẽ có tất cả 6 tam giác cân.

4. – $\triangle ACD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = 50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$.

Còn lại $\widehat{ACD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ACD$ là tam giác đều.

$$\text{– } \triangle BAD \text{ có: } \widehat{ADB} = 50^\circ; \widehat{DAB} = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} = 50^\circ.$$

Vậy $\triangle BAD$ cân tại A.

Suy ra: $AB = AD$. (1)

Mà $AC = AD$ ($\triangle ACD$ đều). (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A và có $\widehat{A} = 20^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = \widehat{BCA} \text{ (}\triangle ABC \text{ cân)} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 80^\circ.$$

$$\triangle AOD \text{ có } \widehat{O_2} = 180^\circ - (\widehat{OAD} + \widehat{ODA}) = 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} = 70^\circ \text{ (hai góc đối đỉnh), suy ra: } \widehat{O_3} = \widehat{O_4} = 110^\circ.$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} \Rightarrow 80^\circ = 50^\circ + \widehat{DBC} \Rightarrow \widehat{DBC} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ.$$

5. (hình 155)

GT $\left| \begin{array}{l} \triangle ABC; AB = AC; M \in BC; \\ MF \perp AC; ME \perp AB; FI = BH. \end{array} \right.$

KL $\left| \begin{array}{l} 1) \widehat{BIF} = 90^\circ \\ 2) ME + MF = BH. \end{array} \right.$

Chứng minh:

1) Nối BF xét $\triangle BHF$ và $\triangle FIB$, có:

BF chung;

BH = FI (giả thiết);

BH // FI (cùng vuông góc với AC)

$$\Rightarrow \widehat{HBF} = \widehat{BFI} \text{ (so le trong)}.$$

$$\text{Vậy } \triangle BHF = \triangle FIB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BHF} = \widehat{BFI} \text{ (hai góc tương ứng)}.$$

$$\text{Mà } \widehat{BHF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BFI} = 90^\circ.$$

2) Xét $\triangle BEM$ và $\triangle BIM$, có:

$$\widehat{BEM} = 90^\circ \text{ (giả thiết); } \widehat{BIM} = 90^\circ \text{ (chứng minh 1);}$$

BM chung;

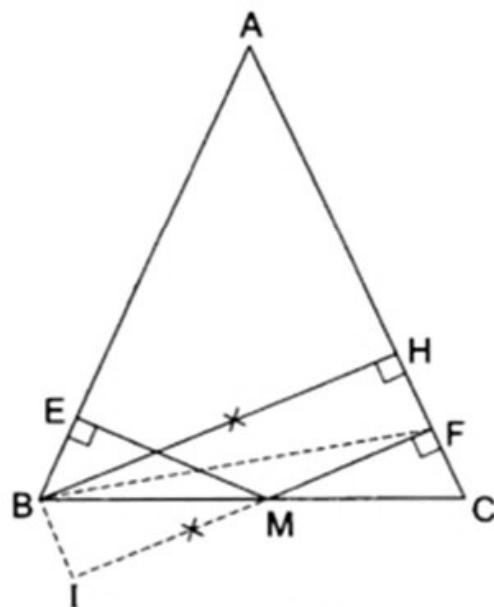
$$\text{Mà } \widehat{EBM} = \widehat{C} \text{ (}\triangle ABC \text{ cân)}$$

$$\widehat{IBM} = \widehat{C} \text{ (BI // AC vì BI và AC cùng vuông góc với AC).}$$

$$\Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{IBM} \text{ (cùng bằng } \widehat{C} \text{)}.$$

$$\text{Vậy } \triangle BEM = \triangle BIM \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)} \Rightarrow ME = MI.$$

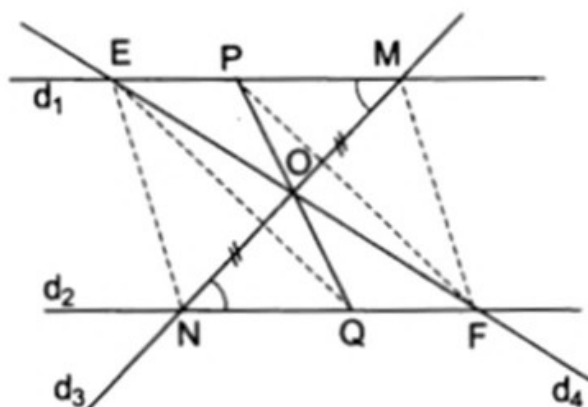
$$\text{Mà } MI + MF = BH \text{ (giả thiết), vậy } ME + MF = BH.$$



Hình 155

6. (hình 156)

GT	Đường thẳng $d_1 \parallel d_2$; d_3 cắt d_1 và d_2 tại M, N; $MO = ON$; d_4 cắt d_1 và d_2 tại E, F.
KL	1) $OE = OF$; $EM = NF$ 2) $EN \parallel MF$ 3) $EP = FQ$; $EQ \parallel PF$.



Hình 156

Chứng minh:

1) Xét $\triangle EOM$ và $\triangle FON$, có:

$$\widehat{M_1} = \widehat{N_1} \text{ (so le trong } d_1 \parallel d_2 \text{)}$$

$$OM = ON \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{EOM} = \widehat{FON} \text{ (đối đỉnh)}$$

Vậy $\triangle EOM = \triangle FON$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OF$ và $EM = NF$ (cạnh tương ứng).

2) Xét $\triangle MEF$ và $\triangle NFE$, có:

EF là cạnh chung

$$EM = FN \text{ (chứng minh 1);}$$

$$\widehat{MEF} = \widehat{EFN} \text{ (so le trong } d_1 d_2 \text{)}$$

Vậy $\triangle MEF = \triangle NFE$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{NEF} = \widehat{EFN}$ (góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong bằng nhau, nên $EN \parallel MF$.

3) Chứng minh tương tự câu 1 để suy ra $\triangle EPO = \triangle FQO$, từ đó có: $EP = FQ$.

Chứng minh tương tự câu 2 để suy ra $\triangle EPF = \triangle FQE$, từ đó có: $EQ \parallel PF$.

7. (hình 157)

GT	$\triangle ABC$; $AB = AC$; $\widehat{ABC} = 80^\circ$; $\triangle MBC$ đều; $AE = BC$; AM cắt BC tại I.
KL	1) AI là tia phân giác $\widehat{BAC}$; MI là tia phân giác $\widehat{BMC}$ 2) CE là tia phân giác $\widehat{ACM}$.

Chứng minh

1) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$$AB = AC \text{ (giả thiết)}$$

$$MB = MC \text{ (}\triangle BMC \text{ đều)}$$

AM là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MAC} \text{ (góc tương ứng).} \quad (1)$$

Vậy AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Mà $\widehat{BCM} < \widehat{BCA}$ ($60^\circ < 80^\circ$), vậy tia CM nằm giữa hai tia CB và CA .

Tương tự tia BM nằm giữa 2 tia BC và BA .

$$\text{Có } \widehat{ABM} + \widehat{MBC} = \widehat{ABC}, \text{ hay } \widehat{ABM} + 60^\circ = 80^\circ,$$

$$\text{suy ra: } \widehat{ABM} = \widehat{ACM} = 20^\circ. \quad (2)$$

$$\widehat{BMI} = \widehat{ABM} + \widehat{BAM} \text{ (góc ngoài } \triangle ABM \text{).} \quad (3)$$

$$\widehat{CMI} = \widehat{ACM} + \widehat{CAM} \text{ (góc ngoài } \triangle ACM \text{).} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4), suy ra: $\widehat{BMI} = \widehat{CMI}$.

Vậy MI là tia phân giác của góc $\widehat{BMC}$.

2) Xét $\triangle AEC$ và $\triangle CMA$ có:

$$AE = MC \text{ (cùng bằng } BC \text{).}$$

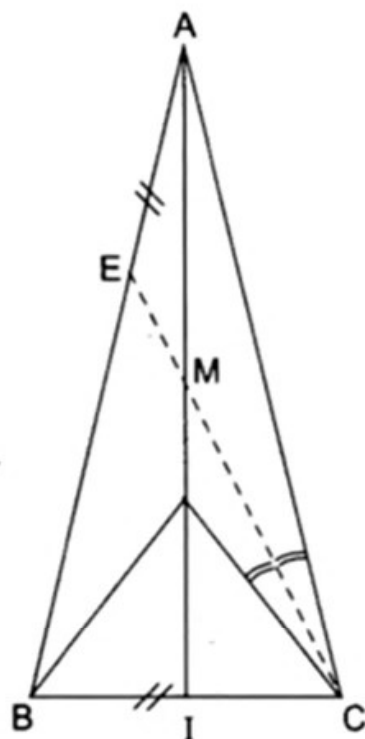
$$\widehat{EAC} = \widehat{ACM} = 20^\circ$$

Cạnh AC chung.

Vậy $\triangle AEC = \triangle CMA$ (c.g.c). suy ra: $\widehat{ECA} = \widehat{MAC}$ (góc tương ứng).

$$\text{Mà } \widehat{MAC} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{ECA} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{ECA} = \frac{1}{2} \widehat{ACM}.$$

Vậy CE là tia phân giác của góc $\widehat{ACM}$.



Hình 157

8. (hình 158)

GT ΔABC ; $AB = AC$; $AB > BC$; $BD = BC$;
 $AD = BE$.

KL 1) $\widehat{ABC} = \widehat{BDC}$
2) $\Delta DAB = \Delta BEC$
3) Tìm những tam giác cân trên hình vẽ.

Chứng minh

$$1) \quad \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \quad (\Delta ABC \text{ cân})$$

$$\widehat{BDC} = \widehat{ACB} \quad (\Delta BDC \text{ cân})$$

$$\text{Vậy: } \widehat{ABC} = \widehat{BDC} \text{ (cùng bằng } \widehat{ACB} \text{).}$$

2) Xét ΔDAB và ΔBEC có:

$$AD = BE \text{ (giả thiết)}$$

$$DB = BC \text{ (giả thiết)}$$

$$\text{Có: } \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = 180^\circ; \widehat{EBC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$$

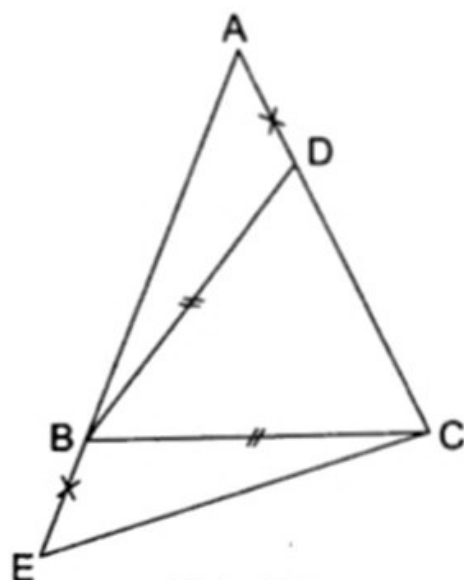
$$\text{Mà } \widehat{BDC} = \widehat{ABC} \text{ (theo (1))} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{EBC};$$

$$\text{Vậy } \Delta DAB = \Delta BEC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = CE \text{ (cạnh tương ứng).} \quad (2)$$

3) $CA = CE$ (cùng bằng AB) vậy ΔACE cân tại C ;

ΔABC cân tại A (giả thiết);

ΔCBD cân tại B (giả thiết).

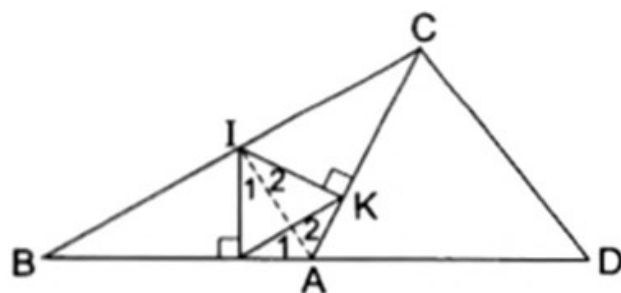


Hình 158

9. (hình 159)

GT ΔABC ; $AB = AC$; $\widehat{BAC} = 120^\circ$;
 $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$; $IH \perp AB$; $IK \perp AC$;
 $AD = AC$.

KL 1) ΔIHK đều $HK \parallel BC$
2) ΔACD đều
3) ΔBCD ? Chứng minh?



Hình 159

Chứng minh:

IA chung; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle AIH = \triangle AIK$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow IH = IK$.

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{I_2} = 30^\circ$ và $\widehat{HIK} = 60^\circ \Rightarrow$ vậy $\triangle AIK$ cân và có một góc 60° nên $\triangle HIK$ là tam giác đều.

– $\triangle ABC$ cân tại A; $\widehat{A} = 120^\circ$ vậy $\widehat{B} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Có $\widehat{BHK} = \widehat{BHI} + \widehat{IHK} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Vậy $\widehat{B} + \widehat{BHK} = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$.

Hai góc trong cùng phía bù nhau nên $HK \parallel BC$.

2) $\triangle ACD$ có $AC = AD$ (cùng bằng AB) $\Rightarrow \triangle ACD$ cân và góc $\widehat{CAD}$ kề bù với góc $\widehat{A} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CAD} = 60^\circ$, vậy $\triangle ACD$ là tam giác đều.

3) Theo chứng minh 1: $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^\circ$; $\widehat{ACD} = 60^\circ$ ($\triangle ACD$ đều).

Vậy $\widehat{BCD} = \widehat{C} + \widehat{ACD} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle BCD$ là tam giác vuông tại C.

10*. (hình 160)

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D, sao cho: $MD = MA$.

$\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có:

$MB = MC$ (giả thiết);

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (đối đỉnh)

$AM = MD$ (cách vẽ)

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{MDB}$ (góc tương ứng).

Vậy $AC \parallel DB$ (hai góc so le trong bằng nhau).

Mà $AB \perp AC$ nên $AB \perp BD$ (cùng vuông góc với $AC \parallel DB$).

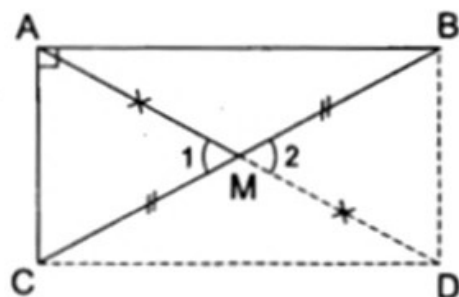
– Xét $\triangle ABC$ và $\triangle BAD$ vuông tại A và tại D, có:

Cạnh AB chung;

$AC = BD$ (vì $\triangle AMC = \triangle DMB$)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BAD$ (hai cạnh góc vuông bằng nhau) $\Rightarrow BC = AD$.

Mà $AM = \frac{1}{2} AD$ (cách vẽ), vậy $AM = \frac{1}{2} BC$.



Hình 160

11*. (hình 161)

GT ΔABC , $AE \perp AB$, $AE = AB$,
 $AF \perp AC$, $AF = AC$, $BM = MC$,
 $AM = MN$.

KL 1) $AM = \frac{1}{2}EF$
 2) ΔAIF vuông tại I.

Chứng minh:

1) Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho: $MN = AM$.

– Ta dễ dàng chứng minh được:

$$\Delta AMC = \Delta NMB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_1} \text{ (góc tương ứng)}.$$

Từ đó ta thu được: $AC \parallel BN$ (hai góc so le trong bằng nhau) và $AC = BN$ (cạnh tương ứng). (1)

– Xét ΔABN và ΔAEF có:

$$AE = AB \text{ (giả thiết); } AC = AF \text{ (giả thiết)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $BN = AF$.

$$\text{Có: } \widehat{ABN} + \widehat{BAC} = 180^\circ \text{ (trong cùng phía)}. \quad (3)$$

$$\widehat{EAF} + \widehat{BAC} = 180^\circ \text{ (2 góc có cạnh tương ứng vuông góc 1 nhọn; 1 tù)}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có: $\widehat{ABN} = \widehat{EAF}$, vậy: $\Delta ABN = \Delta AEF$ (c.g.c).

$$\text{Suy ra: } EF = AN. \text{ Mà } AM = \frac{1}{2}AN \Rightarrow AM = \frac{1}{2}EF.$$

$$2) I, A, M \text{ thẳng hàng nên: } \widehat{A_1} + \widehat{FAC} + \widehat{A_2} = 180^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{FAC} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ. \quad (5)$$

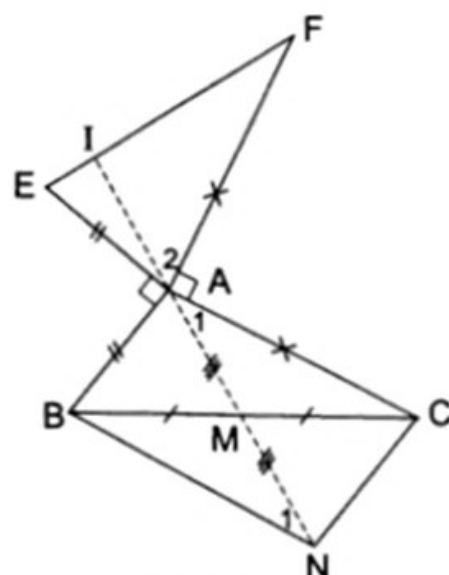
$$\text{Trong đó: } \widehat{A_1} = \widehat{N_1} \text{ (so le trong)}$$

$$\widehat{EFA} = \widehat{N_1} \text{ (} \Delta ABN = \Delta AEF \text{ chứng minh trên).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{A_1} = \widehat{EFA}. \quad (6)$$

$$\text{Thay (6) vào (5), ta có: } \widehat{EFA} + \widehat{A_2} = 90^\circ.$$

$$\text{Xét } \Delta IAF \text{ có } \widehat{EFA} + \widehat{A_2} = 90^\circ. \text{ Vậy còn lại } \widehat{AIF} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AIF \text{ vuông tại I.}$$



Hình 161

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC - CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

Chủ đề 1

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác

- Trong tam giác góc đối diện với cạnh lớn hơn thì lớn hơn.
- Trong tam giác cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn.
- Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác cân.
- Tam giác có ba cạnh bằng nhau là tam giác đều.

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

- Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên (cùng kẻ từ một điểm đến đường thẳng).
- *Ứng dụng:* Trong tam giác vuông cạnh huyền là cạnh lớn nhất.

3. Quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu

Nếu từ một điểm ở ngoài đường thẳng kẻ hai đường xiên đến một đường thẳng thì:

- Đường xiên có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- Ngược lại đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.
- Hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu của nó bằng nhau và ngược lại.

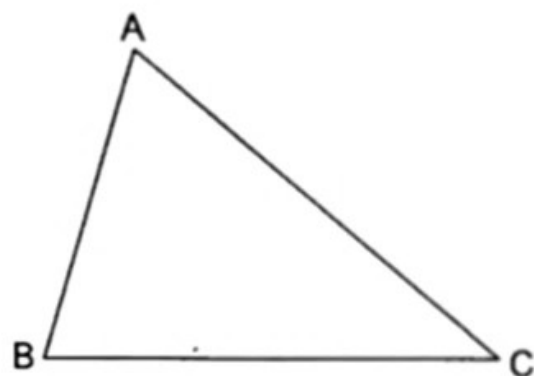
4. Bất đẳng thức trong tam giác

Trong một tam giác, độ dài một cạnh nhỏ hơn tổng độ dài và lớn hơn hiệu độ dài của hai cạnh còn lại.

$$|AB - CA| < AB < BC + CA;$$

$$|BC - AB| < AC < BC + AB;$$

$$|AB - AC| < BC < AB + AC.$$



Hình 162

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Ở đây chỉ xét mối quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong một tam giác (quan hệ giữa hai cạnh và hai góc đối diện tương ứng thuộc hai tam giác khác nhau sẽ học sau).

2. Từ định lý trên ta dễ dàng suy ra được trong một tam giác:

- Đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.
- Ngược lại, đối diện với góc nhọn là cạnh nhỏ nhất: Điều này không đúng vì trong tam giác có thể có hai hoặc ba góc nhọn.
- Cạnh đối diện với góc tù (hay góc vuông) là cạnh lớn nhất của tam giác. Điều ngược lại cũng không đúng.

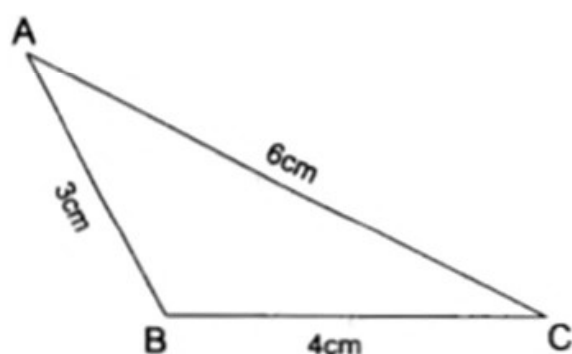
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho ba đoạn thẳng $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$. Vẽ $\triangle ABC$ có ba cạnh là độ dài của ba đoạn thẳng trên. $\triangle ABC$ có góc nào lớn nhất và góc nào nhỏ nhất?

Lời giải

Ta dễ dàng thấy đối diện với cạnh AC (cạnh lớn nhất, vì $6\text{cm} > 4\text{cm} > 3\text{cm}$) là $\hat{B}$, vậy $\hat{B}$ là góc lớn nhất.

Cạnh AB là cạnh nhỏ nhất ($3\text{cm} < 4\text{cm} < 6\text{cm}$), vậy $\hat{C}$ là góc đối diện với cạnh AB là góc nhỏ nhất (trong ba góc).



Hình 163

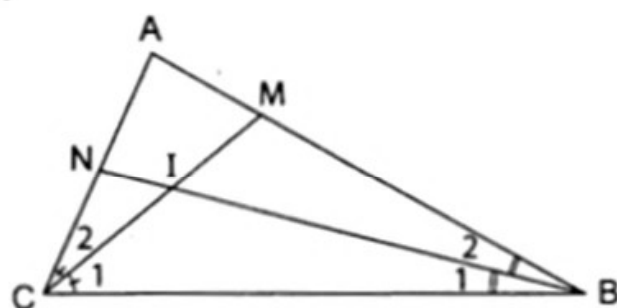
Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$. Kẻ tia phân giác BN của góc $\widehat{ABC}$ (N thuộc cạnh AC), CM là tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$ (M thuộc cạnh AB). BN và CM cắt nhau tại I.

1) So sánh IC và IB.

2) Một học sinh nhận xét: " $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (theo giả thiết) nên $AM = BM$ ". Đúng hay sai? Tại sao?

Lời giải

GT	$\triangle ABC, AB > AC, \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2,$ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2, BN \cap CM = I.$
KL	1) So sánh CI và IB 2) $AM = BM.$



Hình 164

Chứng minh:

1) Xét $\triangle ABC$ có $AB > AC$ (giả thiết).

Vậy $\widehat{C} > \widehat{B}$ (đối diện với cạnh lớn hơn). (1)

Mà: $\widehat{C}_1 = \frac{\widehat{C}}{2}$ (CM là tia phân giác). (2)

$\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2}$ (BN là tia phân giác). (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $\widehat{C}_1 > \widehat{B}_1$.

Trong $\triangle AIC$ đối diện với $\widehat{B}_1$ là cạnh IC. Đối diện với $\widehat{C}_1$ là cạnh IB, mà $\widehat{C}_1 > \widehat{B}_1$ (chứng minh trên).

Vậy $IB > IC$ (đối diện góc lớn hơn là cạnh lớn hơn).

2) Từ $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ suy ra $AM = MB$ là sai. Vì $\widehat{C}_2$ thuộc $\triangle ACM$, $\widehat{C}_1$ thuộc $\triangle CMB$ mà AM và MB cũng là hai cạnh của tam giác đó.

Trong phạm vi chương này chúng ta chưa xét được.

III. BÀI TẬP

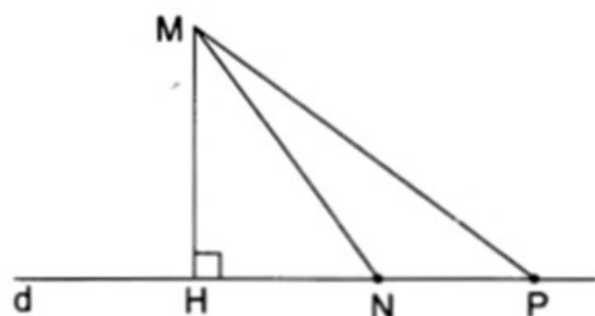
1. Cho $\triangle MNP$. Các tia phân giác của góc $\widehat{N}$ và góc $\widehat{P}$ cắt nhau tại O.
 - a) Trong tam giác NOP cạnh nào là cạnh lớn nhất?
 - b) Nếu $OP > ON$, hãy so sánh MN với MP.
2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, M là trung điểm của cạnh AC. Nối BM, trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho $ME = MB$. Chứng minh rằng :
 - a) $CE \perp AC$ và $BC > CE$;
 - b) $\widehat{ABM} > \widehat{MBC}$.
3. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$, M là trung điểm của cạnh BC. Nối AM, trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MF = AM$. Chứng minh rằng :
 - a) $\widehat{BAM} < \widehat{CAM}$;
 - b) $\widehat{CAM} > \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.
4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} \geq 90^\circ$ trên cạnh AB và AC, lần lượt lấy của đỉnh E và F (không trùng với các đỉnh của tam giác). Chứng minh: $BC > EF$.
- 5*. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Trên cạnh đáy BC lấy các điểm E và F sao cho:
 $BE = EF = FC$.
 - a) So sánh độ lớn của các góc $\widehat{BAE}$, $\widehat{EAF}$, và $\widehat{FAC}$.
 - b) Nếu đoạn thẳng BC được chia thành bốn đoạn bằng nhau thì bốn góc đối diện của bốn đoạn nhỏ đó như thế nào?
- 6*. Cho $\triangle ABC$, lấy M là trung điểm của cạnh BC, nối AM. Chứng minh rằng:
 - a) Nếu $AM > BM$ thì $\widehat{BAC}$ là góc nhọn.
 - b) Nếu $AM = BM$ thì $\widehat{BAC}$ là góc vuông.
 - c) Nếu $AM < BM$ thì $\widehat{BAC}$ là góc tù.

DẠNG 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Điểm M ở ngoài đường thẳng d . Lấy hai điểm phân biệt N và P thuộc đường thẳng d . Từ M hạ $MH \perp d$ (hình 165). Ta có:

- MN, MP gọi là đường xiên.
- MH gọi là đường vuông góc.
- HN gọi là hình chiếu của MN trên đường thẳng d .
- HP gọi là hình chiếu của MP trên đường thẳng d .



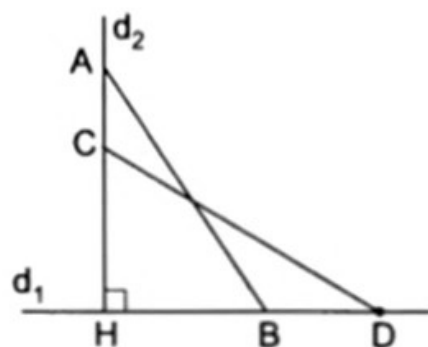
Hình 165

Cả hai đường xiên MN và MP đều lớn hơn MH còn hình chiếu của hai đường xiên đó trên đường thẳng d là khác nhau. Ta dễ dàng thấy MN và MP đều lớn hơn MH (cạnh đối diện với góc vuông).

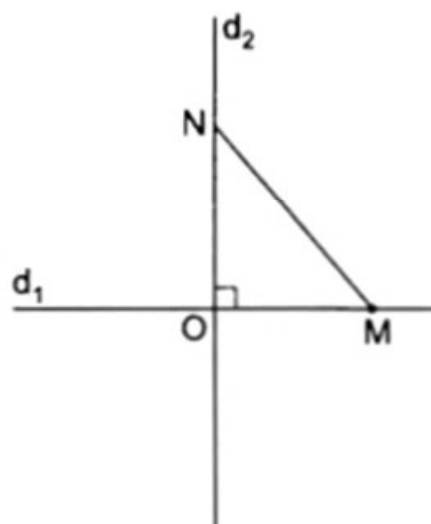
2. *Chú ý:* + Khi nói hình chiếu của một đường xiên phải chỉ rõ những hình chiếu trên đường thẳng nào? Vì cùng một đường xiên nhưng hình chiếu của nó trên đường thẳng khác nhau sẽ khác nhau.

+ Quan hệ hai đường xiên và hình chiếu chỉ xét được khi chúng cùng xuất phát từ một điểm ngoài đường thẳng. Với hai đường xiên AB và CD trong hình 166 thì không thể kết luận trực tiếp được.

+ Với một đường xiên cho trước thì đường vuông góc và hình chiếu có thể đổi vai trò cho nhau. Chẳng hạn $d_1 \perp d_2$ tại O , M trên d_1 và N trên d_2 (hình 167), ta có: MN là đường xiên nếu gọi MO là đường vuông góc thì ON là hình chiếu của MN trên d_2 . Nếu gọi NO là đường vuông góc thì OM là hình chiếu của MN trên d_1 .



Hình 166



Hình 167

3. Cách so sánh hai đoạn thẳng: Muốn chứng minh đoạn thẳng này lớn hơn (hay nhỏ hơn) đoạn thẳng kia ta có thể chứng minh theo các cách sau:

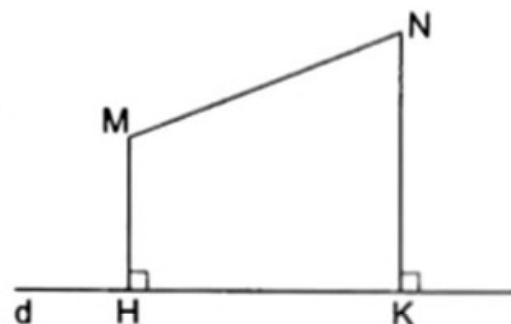
Cách 1: Xét mối quan hệ giữa hình chiếu và đường xiên.

Cách 2: Dùng đoạn thẳng thứ ba làm trung gian.

Cách 3: Sử dụng góc trong tam giác. Từ so sánh góc suy ra quan hệ cạnh đối diện, dẫn đến việc so sánh cạnh.

4. Cách tìm hình chiếu của một đoạn thẳng cho trước trên một đường thẳng cho trước (ở đây chỉ xét phép chiếu vuông góc). Ta tìm hình chiếu của hai điểm đầu của đoạn thẳng trên đường thẳng cho trước.

Cho đoạn thẳng MN nằm ngoài đường thẳng d, tìm hình chiếu của MN trên d.



Hình 168

Ta tìm hình chiếu của M trên d bằng cách hạ $MH \perp d$. H là hình chiếu của M trên d. Tiếp tục tìm hình chiếu của N trên d bằng cách hạ $NK \perp d$, K là hình chiếu của N trên d. Vậy HK là hình chiếu của MN trên d.

II. VÍ DỤ

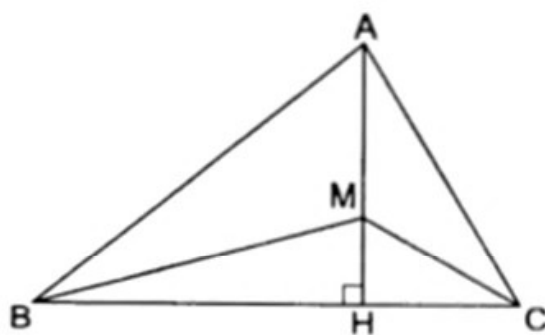
Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$. Từ A hạ $AH \perp BC$, trên đường thẳng AH lấy điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $MB > MC$;

b) $BA > BM$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC$, $AB > AC$, $AH \perp BC$, M thuộc AH.
KL	a) $MB > MC$ b) $BA > BM$.



Hình 169

Chứng minh:

a) Do $AB > AC$ (theo giả thiết), suy ra $BH > HC$ (đường xiên lớn hơn thì hình chiếu lớn hơn).

Xét hai đường xiên MB và MC, có: $BH > HC$ (chứng minh trên).

Vậy $MB > MC$ (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn).

b) Ta có BH là đường vuông góc với đường thẳng AH (theo giả thiết) thì AH và MH là hình chiếu của BA và BM trên đường thẳng AH .

Lại theo giả thiết điểm M nằm giữa hai điểm A và H , nên $MH < AH$.

Suy ra $BM < BA$ (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn).

Vậy $BA > BM$.

Ví dụ 2. Cho hai đoạn thẳng AB và CD thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ có chứa đường thẳng a và nằm ngoài đường thẳng a sao cho $AB = CD$ và $AB \parallel CD$. Hình chiếu của đoạn thẳng AB và CD trên đường thẳng a là $A'B'$ và $C'D'$. Chứng minh: $A'B' = C'D'$.

Lời giải

GT	AB và CD nằm ngoài đường thẳng a . $AB = CD$; $AB \parallel CD$. $A'B'$ và $C'D'$ là hình chiếu của AB, CD trên a .
----	---

KL	$A'B' = C'D'$.
----	-----------------

Chứng minh :

– Qua A' kẻ $A'M \parallel AB$; qua C' kẻ $C'N \parallel CD$

– Nối AM , xét $\triangle ABM$ và $\triangle MA'A$, có:

AM chung;

$$\widehat{A_1} = \widehat{M_2} \text{ (so le trong } AB \parallel A'M \text{);}$$

$AA' \perp a$ và $BB' \perp a$, vậy $AA' \parallel BB'$. Suy ra: $\widehat{M_1} = \widehat{A_2}$ (so le trong).

Vậy $\triangle ABM = \triangle MA'A$ (g.c.g), suy ra: $AB = MA'$. (1)

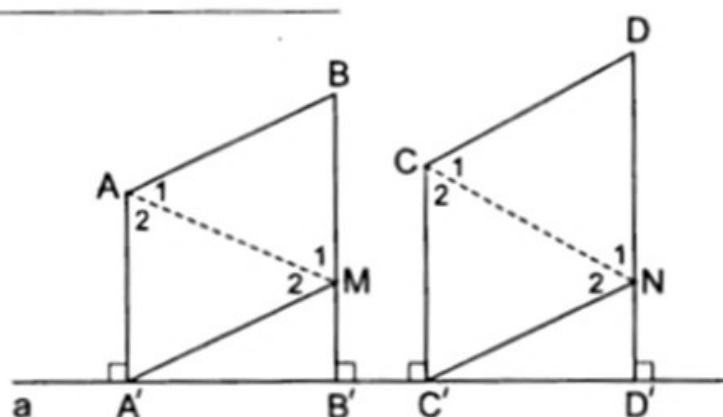
– Tương tự như trên xét $\triangle DCN$ và $\triangle C'NC$, có:

CN chung;

$$\widehat{C_1} = \widehat{N_2} \text{ (do } CN \parallel C'N \text{);}$$

$$\widehat{C_2} = \widehat{N_1} \text{ (do } CC' \parallel DD' \text{).}$$

Vậy $\triangle DCN = \triangle C'NC$ (g.c.g), suy ra: $DC = C'N$. (2)



Hình 170

Mà $AB = CD$ (theo giả thiết), nên từ (1) và (2) ta có: $MA' = C'N$. (3)

Xét $\triangle A'MB'$ và $\triangle C'ND'$ vuông tại B' và D' , có:

$$A'M = C'N \text{ (theo (3));}$$

$$A'M \parallel AB \text{ (cách vẽ);}$$

$$C'N \parallel CD \text{ (cách vẽ).}$$

Mà $AB \parallel CA$ (theo giả thiết).

Vậy $A'M \parallel C'N$ (cùng song song với AB và CD).

Suy ra $\widehat{MA'B} = \widehat{NC'D'}$ (đồng vị), vậy $\triangle A'MB' = \triangle C'ND'$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra: $A'B' = C'D'$.

III. BÀI TẬP

7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A kẻ $AH \perp BC$ (H thuộc BC).

Trên tia đối của tia HA lấy điểm F sao cho $HF = HA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E tùy ý. Chứng minh rằng:

$$1) AB = AC = FB = FC; \quad 2) \triangle AEF \text{ cân.}$$

8. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Qua I kẻ đường thẳng d . Biết IH và IK là hình chiếu của đoạn IA và IB trên đường thẳng d .

a) Chứng minh: $IH = IK$.

b) Nếu I không phải là trung điểm của đoạn thẳng AB mà $IA > IB$. Chứng minh $IH > IK$.

9. Đoạn thẳng $MN = 12\text{cm}$; $PQ = 8\text{cm}$ cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đoạn và góc tạo thành giữa 2 đoạn thẳng đó là 60° ($\widehat{MOQ} = 60^\circ$).

a) Nêu cách tìm hình chiếu của đoạn MN trên đường thẳng PQ , và cách tìm hình chiếu của đoạn PQ trên đường thẳng MN .

b) Tính độ dài của hai hình chiếu đó.

10. Cho $\triangle ABC$:

a) Từ A hạ $AH \perp BC$ (H thuộc BC). Chứng minh: $AH < \frac{AB + AC}{2}$.

b) Từ B hạ $BK \perp AC$ (K thuộc AC), từ C hạ $CI \perp AB$ (I thuộc AB). Chứng minh rằng: $AH + BK + CI$ nhỏ hơn chu vi $\triangle ABC$.

11. Cho $\triangle PMN$ (có $\widehat{P}$ nhọn), Px là tia nằm giữa hai tia PM và PN . Kẻ $MH \perp Px$, $NK \perp Px$ ($H, K \in Px$). Chứng minh rằng :

a) $MH + NK < MN$.

b) Tìm vị trí của tia Px để $MH + NK = MN$.

12. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , Bx là tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt tại AC tại D . Tại C kẻ $Cy \perp AC$ (AB và Cy thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ có chứa AC), Cy cắt Bx tại N . So sánh chu vi $\triangle ABD$ và chu vi $\triangle CDN$.

13. **??** *Cạnh góc vuông bằng cạnh huyền?*

Cho $\triangle ABC$ ($\widehat{A} = 90^\circ$), $Ix \perp AC$. By là tia phân giác của $\widehat{B}$, Ix và By cắt nhau tại O . Từ C hạ các đường vuông góc $CE \perp AB$, $CF \perp BC$. Ta có thể chứng minh $AB = BC$ được không?

Một bạn giải như sau:

Chứng minh:

• $\triangle BOE = \triangle BOF$ vì là hai tam giác vuông có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (theo giả thiết) và BO chung (cạnh huyền và góc nhọn). Suy ra: $BE = BF$. (1)

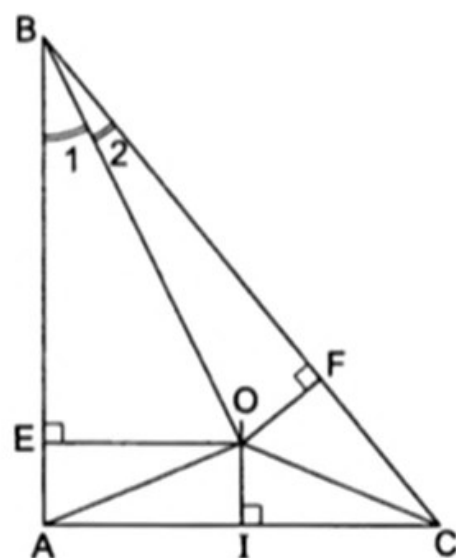
• $\triangle AOI = \triangle COI$ vì là hai tam giác vuông. Tại I có OI chung; $IA = IC$ (theo giả thiết) (hai cạnh góc vuông). Suy ra: $OA = OC$. (2)

• $\triangle AOE = \triangle OCF$ vì $OA = OC$ (từ (2)) và $OE = OF$ (do $\triangle BOE = \triangle BOF$) (cạnh góc vuông và cạnh huyền), suy ra: $AF = CF$. (3)

Từ (1) và (3), ta có: $BE + AE = BF + CF$.

Hay $AB = BC$ (cạnh góc vuông bằng cạnh huyền).

Bạn đã giải sai chỗ nào? Hãy chỉ ra chỗ sai.



Hình 171

DẠNG 3. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Từ các bất đẳng thức trong tam giác đã nêu ở trên ta có thể kiểm tra độ dài ba cạnh có thỏa mãn bất đẳng thức hay không theo cách nhanh nhất là:

Chọn cạnh lớn nhất xem có nhỏ hơn tổng hai cạnh còn lại không?

Hoặc: Chọn cạnh bé nhất xem có lớn hơn hiệu hai cạnh còn lại không?

Chẳng hạn: Có thể dựng tam giác có ba cạnh có độ dài như sau không:

a) 6cm; 3cm; 2cm;

b) 3cm; 4cm; 6cm;

c) 2cm; 4cm; 6cm.

Trả lời:

a) Không được vì $6 > 3 + 2$.

b) Được vì $6 < 3 + 4$.

c) Không được vì $6 = 2 + 4$ nên ba điểm thẳng hàng, có một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.

• Trường hợp này người ta còn gọi là: *Tam giác suy biến thành đoạn thẳng*.

2. Ứng dụng của bất đẳng thức:

– Để so sánh các đoạn thẳng không bằng nhau.

– Để tìm điều kiện cho một tam giác tồn tại.

3. *Chú ý:* Ở đây sử dụng kiến thức bất đẳng thức mà học sinh chưa được học trong đại số, nên lưu ý:

– Độ dài các cạnh của tam giác là các số dương.

– Nếu cộng hai vế thì hai bất đẳng thức phải cùng chiều (cùng $>$ hoặc cùng $<$).

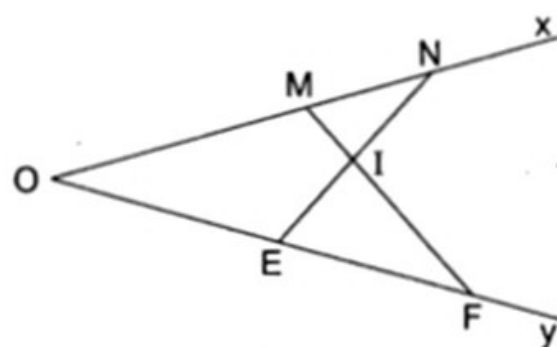
– Nếu một vế có dạng: $AB - CD$ thì cần có điều kiện $AB \geq CD$ để $AB - CD \geq 0$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Trên Ox lấy hai điểm M và N (điểm M nằm giữa hai điểm O và N), trên Oy lấy hai điểm E và F (điểm E nằm giữa hai điểm O và F). Chứng minh rằng: $MN + EF < MF + NE$.

Lời giải

GT	$\widehat{xOy} < 90^\circ$. $M, N \in Ox$ (M nằm giữa O và N). $E, F \in Oy$ (E nằm giữa O và F).
KL	$MN + EF < MF + NE$



Hình 172

Chứng minh (hình 172):

Gọi I là giao điểm của MF và NE.

Xét $\triangle MIN$ có:

$$MN < MI + IN \text{ (tổng hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại).} \quad (1)$$

Xét $\triangle EIF$ có:

$$EF < EI + FI \text{ (tổng hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại).} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $MN + EF < MI + IN + EI + FI$.

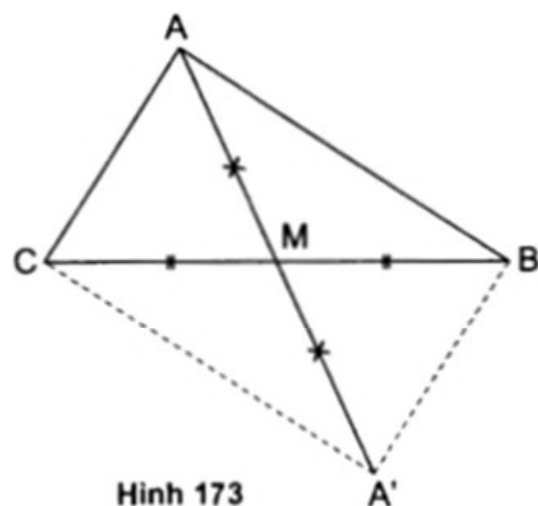
Do đó: $MN + EF < (MI + IF) + (NI + IE)$, hay:

$$MN + EF < MF + NE. \text{ (Đpcm)}$$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, nối AM. Chứng minh rằng: $\frac{AB - AC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC$, $AB > AC$, $BM = MC$.
KL	$\frac{AB - AC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$.



Hình 173

Chứng minh (hình 173):

Trên tia đối của MA lấy điểm A' sao cho $MA' = MA$.

• Xét $\triangle ABM$ và $\triangle A'MC$, có:

$$AM = MA' \text{ (cách vẽ)}$$

$$BM = MC \text{ (theo giả thiết)}$$

$$\widehat{AMB} = \widehat{CMA'} \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\triangle ABM = \triangle A'MC$ (c.g.c). Suy ra: $AB = A'C$. (1)

• Xét $\triangle ACA'$, có: $CA' - CA < AA' < AC + CA'$

$$AB > AC \Rightarrow AB - AC > 0 \text{ mà } AB = CA'. \quad (2)$$

$$\text{Vậy: } CA' - CA > 0; AA' = 2AM. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) và (1) vào (2), ta có: $AB - AC < 2AM < AC + AB$,

$$\text{hay } \frac{AB - AC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}.$$

Kết luận: Đoạn thẳng đi qua đỉnh và trung điểm của cạnh đối diện nhỏ hơn nửa tổng hai cạnh còn lại nhưng lớn hơn nửa hiệu của chúng.

III. BÀI TẬP

14. Tính chu vi của $\triangle ABC$ cân, biết:
 - a) $AB = 7\text{cm}; AC = 4\text{cm}.$
 - b) $AB = 9\text{cm}; AC = 4\text{cm}.$
15. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$, kẻ tia phân giác AD của góc A (D thuộc BC), lấy M trên AD . Chứng minh rằng: $AB - AC > MB - MC$.
16. Chứng minh rằng trong một tam giác thì độ dài cạnh lớn nhất sẽ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ chu vi của tam giác, nhưng nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.
17. Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trong một $\triangle ABC$ thì tổng các khoảng cách từ M đến ba đỉnh của tam giác ấy nhỏ hơn chu vi, nhưng lớn hơn nửa chu vi của $\triangle ABC$.
18. Cho hai điểm A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng xác định bởi đường thẳng a (A và B không thuộc đường thẳng a). Từ A hạ $AH \perp a$ và trên đối của tia HA lấy điểm A' sao cho $HA' = HA$. Nối BA' cắt đường thẳng a tại E . Trên đường thẳng a lấy điểm F bất kì (F khác E). Chứng minh rằng:

$$AE + BE < AF + BF.$$
19. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Đường thẳng d qua A và song song với BC . Lấy A' là điểm bất kì trên đường thẳng d ($A' \neq A$). Chứng minh rằng chu vi của $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi của $\triangle A'BC$.
20. Cho $\widehat{xOy}$ nhọn. Lấy điểm M thuộc miền trong của góc, từ M hạ $MH \perp Ox$ (H thuộc Ox) và trên tia đối HM lấy điểm E sao cho $HE = HM$. Từ M hạ $MK \perp Oy$ (K thuộc Oy) và trên tia đối của tia KM lấy điểm F sao cho $KF = KM$. Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B bất kì.
 - a) Chứng minh rằng chu vi của $\triangle MAB$ bằng tổng các độ dài các đoạn thẳng $AE + AB + BF$.
 - b) Tìm vị trí của A và B để chu vi $\triangle ABM$ là nhỏ nhất.

Chủ đề 2

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. **Định lý 1** (thuận): Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.
2. **Định lý 2** (đảo): Nếu điểm M nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nó nằm trên tia phân giác của góc đó.
3. **Định lý 3** (thuận): Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.
4. **Định lý 4** (đảo): Điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.
5. **Nhận xét:**
 - Từ định lý 1 và 2 suy ra: Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.
 - Từ định lý 3 và 4 suy ra: Tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính chất đường phân giác của một góc

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Muốn chứng minh một đường thẳng là tia phân giác của một góc.
Cách 1: (theo định nghĩa) Chứng minh đường thẳng đó đi qua đỉnh và chia góc thành hai góc bằng nhau.
Cách 2: (theo tính chất) Chứng minh đường thẳng đó đi qua đỉnh của góc và có một điểm nằm trong góc đó cách đều hai cạnh của góc.
Cách 3: Chứng minh đường thẳng đó chia góc thành hai góc và có một trong hai góc đó bằng góc đã cho.

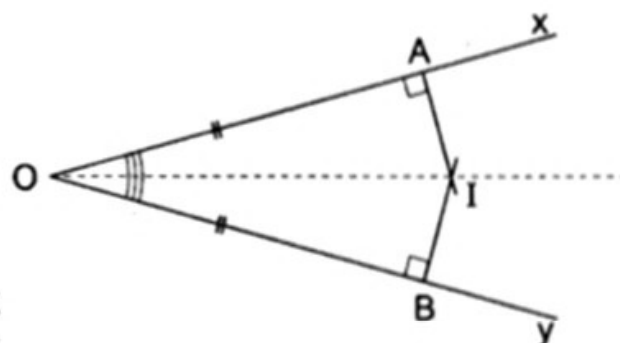
2. Cách vẽ đường phân giác của một góc.

Cách 1: (dùng thước đo góc)

- Bước 1: Đo để biết số đo của góc đã cho.
- Bước 2: Từ đỉnh kẻ 1 tia hợp với một cạnh của góc đó một góc có số đo bằng $\frac{1}{2}$ số đo của góc đã cho.

Cách 2: (dùng êke)

- Bước 1: Trên hai cạnh của góc $\widehat{xOy}$ lấy hai điểm A và B tùy ý sao cho $OA = OB$.
- Bước 2: Dùng êke kẻ đường vuông góc với cạnh Ox của góc tại A. Dùng êke kẻ đường vuông góc với cạnh Oy của góc tại B. Hai đường vuông góc này cắt nhau tại I.

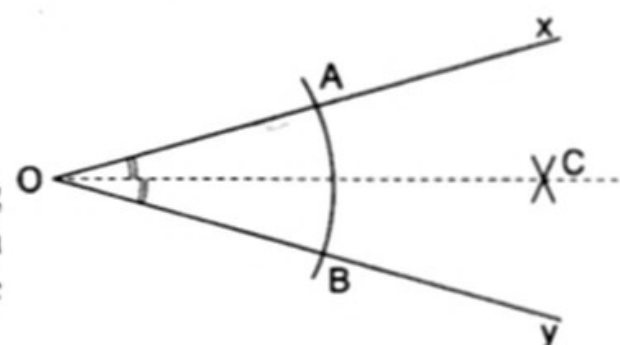


Hình 174

Có OI là tia phân giác $\widehat{xOy}$ (hình 174) (tự chứng minh).

Cách 3: (dùng compa)

- Bước 1: Lấy O làm tâm vẽ đường tròn $(O; R)$ cắt Ox tại A và Oy tại B.
- Bước 2: Vẽ đường tròn $(A; R)$, đường tròn $(B; R)$, hai đường tròn này cắt nhau tại C. Ta có OC là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ (hình 175) (tự chứng minh).



Hình 175

II. VÍ DỤ

Cho góc $\widehat{xOy}$ trên Ox lấy điểm A và B. Trên Oy lấy điểm C và D sao cho $OA = OC$, $OB = OD$. Từ A và B kẻ $An \parallel Oy$, $Bn' \parallel Oy$. Từ C kẻ $Cm \parallel Ox$, từ D kẻ $Dm' \parallel Ox$. Biết An và Cm cắt nhau tại E, Bn' cắt Dm' tại F. Chứng minh rằng: O, E, F thẳng hàng.

Lời giải

GT	$\widehat{xOy}$, $A, B \in Ox$, $C, D \in Oy$. $OA = OC$, $OB = OD$. $OA \parallel CE$, $OA \parallel DF$, $OD \parallel AE$, $OD \parallel BF$.
KL	O, E, F thẳng hàng.

Chứng minh:

– Nối OE, xét $\triangle OAE$ và $\triangle OCE$ có:

OE là cạnh chung;

$\widehat{O_2} = \widehat{E_1}$ (so le trong $OA \parallel OE$),

$\widehat{O_1} = \widehat{E_2}$ (so le trong $OD \parallel AE$).

Vậy $\triangle OAE = \triangle ECO$ (g.c.g), suy ra: $AE = CO$.

Mà $OA = OC$ (giả thiết).

Từ (2) và (3), ta có: $OA = AE$.

Suy ra $\triangle OAE$ cân tại A, suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{E_1}$.

Từ (1) và (4), ta có: $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$. Vậy OE là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

– Nối OF, tương tự như trên:

Xét $\triangle BOF$ và $\triangle DOF$ có:

OF là cạnh chung;

$\widehat{BFO} = \widehat{FOD}$ (so le trong $BF \parallel OD$);

$\widehat{BOF} = \widehat{OFD}$ (so le trong $DF \parallel OB$).

Vậy $\triangle BOF = \triangle FDO$ (g.c.g).

Suy ra $OD = BF$, mà $OB = OD$ nên $OB = BF$.

Vậy $\triangle BOF$ cân tại B, suy ra $\widehat{BFO} = \widehat{BOF}$ (góc tương ứng).

Từ (5) và (6), ta có: $\widehat{BFO} = \widehat{FOD}$

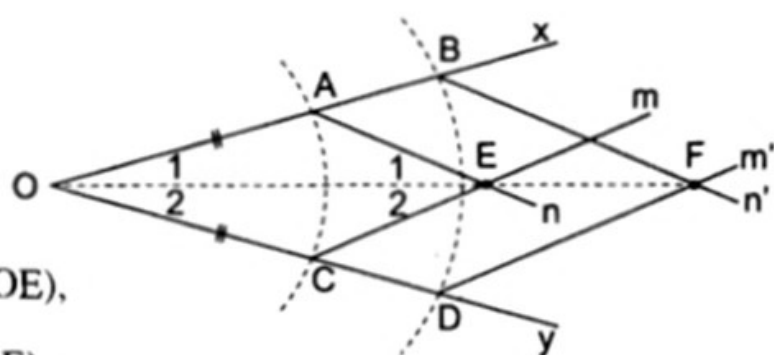
Vậy OF là đường phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Ta đã chứng minh được OE và OF cùng là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Vậy OE trùng với OF, hay O, E, F thẳng hàng.

Chú ý: Khi chứng minh ta dễ mắc sai lầm ở chỗ:

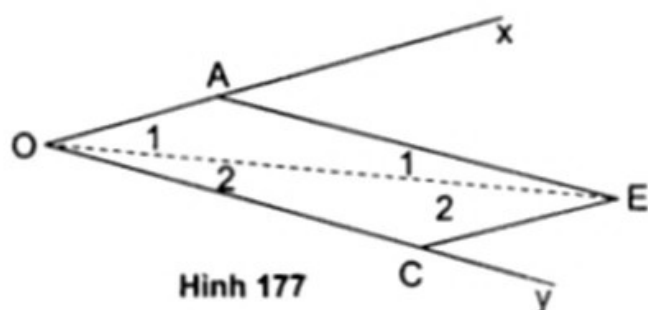
Chứng minh xong $\triangle OAE = \triangle ECO$ là kết luận ngay $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ để suy ra OE là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ là sai, vì hai tam giác trên bằng nhau thì góc $\widehat{O_2}$ tương ứng với góc $\widehat{E_1}$ (không tương ứng với góc $\widehat{O_1}$).



Hình 176

Ta dễ dàng thấy nếu $OA \neq OC$ (hình 177) thì $\triangle OAE$ và $\triangle ECO$ vẫn bằng nhau theo trường hợp g.c.g.

Nhưng ta dễ dàng thấy $\widehat{E}_1 = \widehat{O}_2$ và $\widehat{E}_2 = \widehat{O}_1$. Và tất nhiên $\widehat{O}_1 \neq \widehat{O}_2$ nên OE không phải là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.



Hình 177

III. BÀI TẬP

1. Cho $\triangle MNP$ vuông tại P, kẻ tia phân giác MI của góc $\widehat{PMN}$ (I thuộc PN). Từ I kẻ $IK \perp PN$ (K thuộc MN), $KH \parallel MI$ (H thuộc PN). Chứng minh rằng KH là tia phân giác của $\widehat{IKN}$.
2. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$, lấy điểm M trên Ox, điểm N trên Oy sao cho $OM = ON$, từ M kẻ đường thẳng vuông góc với Ox đường thẳng này cắt Oy tại Q. Tại Q kẻ $Qn \perp Oy$. Từ N kẻ đường vuông góc với Oy, đường thẳng này cắt Ox tại P. Từ P kẻ $Pm \perp Ox$. Hai đường thẳng Qn và Pm cắt nhau tại F; NP và MQ cắt nhau tại E. Chứng minh rằng ba điểm O, E, F thẳng hàng.
3. Cho góc $\widehat{xOy}$ là góc tù. Từ O kẻ $Ox' \perp Ox$ sao cho tia Ox' và tia Oy thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là tia Ox. Kẻ $Oy' \perp Oy$ sao cho tia Oy' và tia Ox thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là tia Oy. Kẻ Oz là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$. Oz' là tia đối của tia Oz. Chứng minh rằng: Oz' là tia phân giác của $\widehat{x'Oy'}$.
4. Cho $\triangle ABC$, tia phân giác của $\widehat{B}$ và tia phân giác của $\widehat{C}$ cắt nhau tại O.
 - a) Chứng minh rằng OA là tia phân giác của $\widehat{A}$.
 - b) Tính góc $\widehat{BOC}$ biết $\widehat{A} = 70^\circ$
5. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng AB và CD.
- 6*. Cho $\triangle ABC$, trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $EB = BA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $FC = CA$. Qua E kẻ đường thẳng song song với AB. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC, hai đường thẳng này cắt nhau tại P.
 - a) Chứng minh: EA là phân giác của góc $\widehat{PEB}$; FA là phân giác của $\widehat{PFC}$.

b) Chứng minh: PA là phân giác của góc $\widehat{EPF}$.

c) PA kéo dài cắt BC tại Q. Chứng minh AQ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

7. Cho góc $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Lấy điểm M trên Ox và điểm N trên Oy. Vẽ $\triangle MPN$ vuông cân tại P (sao cho đỉnh P của $\triangle MPN$ thuộc miền trong $\widehat{xOy}$).

a) Chứng minh rằng: OP là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

b) Khi M di động trên Ox, N di động trên đường thẳng cố định nào?

DẠNG 2. Tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng:

Cách 1: (theo định nghĩa) Chứng minh đường thẳng đó đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

Cách 2: Trên đường thẳng chỉ ra có hai điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó (có thể là hai điểm bất kì hoặc một điểm là bất kì còn một điểm là trung điểm của đoạn thẳng đó). (Tự chứng minh)

Cách 3: Đường thẳng đó có một điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó. (Tự chứng minh)

2. Cách vẽ đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước:

Cách 1: (Dùng êke)

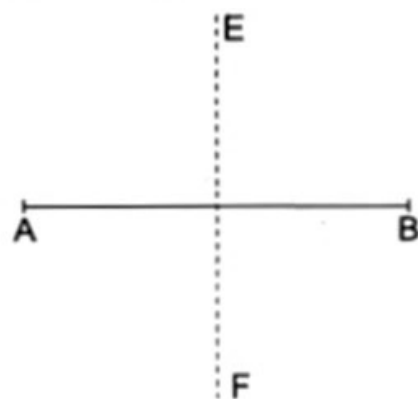
Bước 1: Tìm điểm M là trung điểm của đoạn thẳng.

Bước 2: Dùng êke từ B kẻ đường thẳng d vuông góc với đoạn thẳng đó. d chính là đường trung trực của đoạn thẳng (theo định nghĩa).

Cách 2: (Dùng compa)

Bước 1: Tại A vẽ đường tròn (A; r) và tại B vẽ đường tròn (B; r) (hai đường tròn có bán kính $r > \frac{AB}{2}$).

Bước 2: Hai đường tròn (A; r) và (B; r) cắt nhau tại E và F. Đường thẳng EF chính là đường trung trực của đoạn thẳng AB (hình 178). (Theo cách nhận biết 2).



Hình 178

II. VÍ DỤ

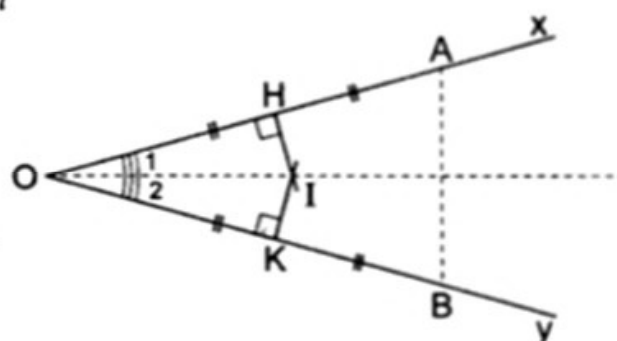
Ví dụ 1. Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn, trên Ox lấy điểm A và trên Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Đường trung trực của OA và đường trung trực của OB cắt nhau tại I.

a) Chứng minh: OI là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

b) Chứng minh: OI là đường trung trực của đoạn AB.

Lời giải

GT	$\widehat{xOy}$ nhọn; $OA = OB$, IH là trung trực của OA, IK là trung trực của OB.
KL	a) $\widehat{IOA} = \widehat{IOB}$ b) OI là trung trực của AB.



Hình 179

Chứng minh (hình 179):

a) Xét $\triangle AOI$ và $\triangle OIB$, có:

HI là trung trực của OA (theo giả thiết), nên $OI = IA$ (tính chất);

IK là trung trực của OB (theo giả thiết), nên $OI = IB$ (tính chất).

Do đó: $OI = IA = IB$.

(1)

Vì $OA = OB$ (giả thiết), suy ra: $\triangle OIA = \triangle OIB$ (c.c.c), hay $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (góc tương ứng).

Do đó: OI là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

b) Theo giả thiết: $OA = OB$; theo (1), ta có: $IA = IB$.

Vậy O và I là hai điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng AB. Suy ra OI là đường trung trực của đoạn thẳng AB (cách nhận biết 2).

Ví dụ 2. Cho hai đoạn thẳng $AB \perp BC$ tại B gọi d_1 là đường trung trực của đoạn thẳng AB và d_2 là đường trung trực của đoạn thẳng BC. Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại C. Chứng minh: Ba điểm A, O, C thẳng hàng.

Lời giải

GT	$AB \perp BC$ tại B, d_1 là trung trực của AB, d_2 là trung trực của BC, $d_1 \cap d_2 \equiv O$.
KL	A, O, C thẳng hàng.

Chứng minh (hình 180):

Do $AB \perp BC$ tại B nên $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 90^\circ$. (*)

Xét $\triangle AOB$, ta có:

$OA = OB$ (d_1 là trung trực của AB), suy ra:

$$\triangle AOB \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1. \quad (1)$$

Xét $\triangle BOC$, ta có: $OB = OC$ (d_2 là trung trực của BC) $\Rightarrow \triangle BOC$ cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{B}_2. \quad (2)$$

Mà ta có tổng các góc trong hai tam giác $\triangle AOB$ và $\triangle BOC$ là 360° , tức là:

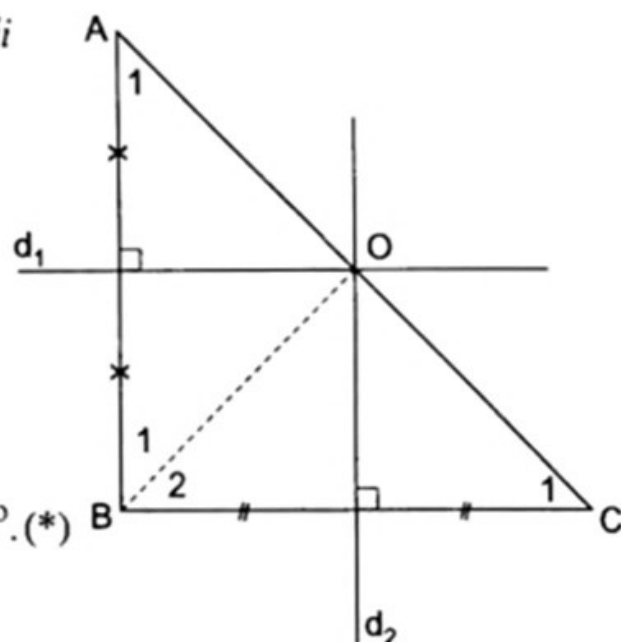
$$\begin{aligned} \widehat{AOB} + \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{BOC} + \widehat{B}_2 + \widehat{C}_1 &= 360^\circ \\ \Leftrightarrow (\widehat{AOC} + \widehat{BOC}) + (\widehat{A}_1 + \widehat{C}_1) + (\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2) &= 360^\circ. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } \widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 90^\circ \text{ (theo (*)}. \quad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta có: $(\widehat{AOC} + \widehat{BOC}) + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$.

Suy ra: $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^\circ$.

Vậy $\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc kề bù nhau nên OA và OC nằm trên một đường thẳng. Tức là A, O, C thẳng hàng.



Hình 180

III. BÀI TẬP

8. Cho điểm M nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Từ M hạ $MH \perp Ox$; $MK \perp Oy$. Lấy I là trung điểm của đoạn thẳng OM. Vậy I nằm trên đường trung trực của những đoạn thẳng nào? Chứng minh.

9. Cho đoạn thẳng AB và đường trung trực d của AB, d cắt AB tại H. Trên d lấy điểm M và N tùy ý. Chứng minh rằng:
- $\Delta MNA = \Delta MNB$.
 - NH là tia phân giác của $\widehat{ANB}$.
10. Đường thẳng a là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Trên đường thẳng a lấy điểm M bất kì. Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A bờ là đường thẳng a lấy điểm C bất kì ($C \neq A$).
- Hãy so sánh độ dài của MA + MC với độ dài của đoạn CB.
 - Tìm vị trí của M trên đường thẳng a để MA + MB là nhỏ nhất.
11. Cho ΔABC vuông tại A. Qua A kẻ đường thẳng xy sao cho xy hợp với AB một góc $\widehat{BAx} = 45^\circ$ (góc $\widehat{BAx}$ nằm ngoài ΔABC) từ B và C hạ $BK \perp xy$ và $CI \perp xy$. M là trung điểm của cạnh huyền BC.
- Chứng minh: MI và MK lần lượt là đường trung trực của đoạn thẳng AC và AB.
 - Góc $\widehat{IMK} = 90^\circ$.
12. Cho ΔABC có góc $\widehat{A}$ tù, tia phân giác của góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại O. Lấy E là điểm trên cạnh AB. Từ E hạ $EP \perp BO$ (P thuộc BC) từ P hạ $PF \perp OC$ (F thuộc AC). Chứng minh rằng:
- OB và OC là đường trung trực của các đoạn thẳng EP và PF.
 - $BE + CF = BC$.
 - Khi E di chuyển trên cạnh AB thì đường trung trực của EF luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Chủ đề 3

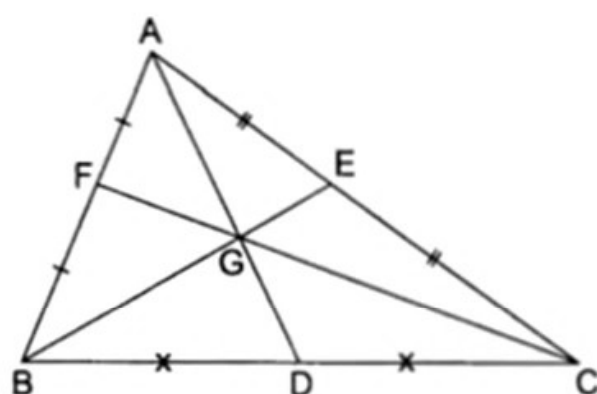
CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Ba đường trung tuyến trong tam giác đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Trong $\triangle ABC$ ba đường trung tuyến AD , BE và CF đồng quy tại G , ta có:

$$\frac{GA}{AD} = \frac{GB}{BE} = \frac{GC}{CF} = \frac{2}{3}.$$



Hình 181

G gọi là trọng tâm của tam giác ABC (hình 181).

2. Ba đường phân giác của ba góc trong tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Định lý: Trong tam giác cân đường phân giác xuất phát từ đỉnh cũng là đường trung tuyến tương ứng của cạnh đáy.

Đảo lại: Nếu một tam giác có một đường trung tuyến đồng thời cũng là đường phân giác của góc ở đỉnh đó thì tam giác đó là một tam giác cân.

3. Ba đường trung trực của ba cạnh một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách đều ba đỉnh của tam giác.

Định lý: Trong tam giác cân đường trung trực của cạnh đáy cũng là đường trung tuyến của cạnh đó.

4. Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm, điểm này được gọi là trực tâm của tam giác.

Trong tam giác cân đường trung trực thuộc cạnh đáy đồng thời cũng là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đáy đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính chất của ba đường trung tuyến trong tam giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Từ tính chất ba đường trung tuyến ta suy ra:

Trong một tam giác có hai đường trung tuyến cắt nhau tại G thì đường thẳng thứ ba đi qua đỉnh thứ ba và qua G cũng là đường trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác đó.

Ứng dụng: Từ tính chất đó áp dụng chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau; Hoặc đoạn này gấp đôi, gấp ba đoạn thẳng kia.

2. Từ “trọng tâm” ý nghĩa vật lí tức là “tâm của trọng lực”.

Ý nghĩa: Cắt một tấm bìa hình tam giác có độ dày như nhau. Kẻ đường trung tuyến để tìm trọng tâm. Ta đặt tấm bìa hình tam giác lên một mũi đinh yêu cầu phương của đỉnh thẳng góc với mặt đất, mũi đinh đặt vào trọng tâm của tam giác. Giữ cho tấm bìa thẳng bằng (song song với mặt đất) thì tấm bìa hình tam giác có thể nằm yên trên mũi đinh.

3. Muốn chứng minh một điểm là trọng tâm của một tam giác:

Cách 1: Chứng minh điểm đó là giao của hai đường trung tuyến của một tam giác.

Cách 2: Điểm đó nằm trên một đường trung tuyến của tam giác và cách đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài của đường trung tuyến (hoặc cách trung điểm cạnh đối một khoảng bằng $\frac{1}{3}$ độ dài đường trung tuyến).

4. Từ hai cách chứng minh đó, để tìm trọng tâm của một tam giác cho trước ta cũng sử dụng hai cách trên.

II. VÍ DỤ

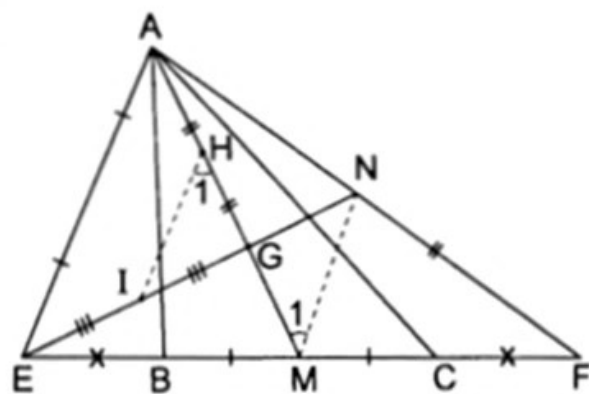
Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$, trên tia đối của tia BC lấy điểm E và trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $BE = CF$.

a) Chứng minh $\triangle ABC$ và $\triangle AEF$ có cùng trọng tâm G.

b) Nối AG cắt BC tại M. Lấy H là trung điểm của đoạn AG. Nối EG cắt AF tại N và lấy I là trung điểm của đoạn EG. Chứng minh: $IH \parallel MN$ và $IH = MN$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC$, $BE = CF$, G là trọng tâm $\triangle ABC$, $AH = HG$, $IE = IG$.
KL	a) G là trọng tâm $\triangle AEF$. b) $IH \parallel MN$; $IH = MN$.



Hình 182

Chứng minh (hình 182):

a) Kẻ trung tuyến AM và trên AM lấy $AG = \frac{2}{3} AM$, ta có G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Ta sẽ chứng minh G cũng là trọng tâm của $\triangle AEF$. Thật vậy:

$$AM \text{ là trung tuyến của } \triangle ABC \text{ nên } BM = MC. \quad (1)$$

$$\text{Theo giả thiết: } BE = CF. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $BM + BE = MC + CF$ hay $ME = MF$.

Vậy AM cũng là trung tuyến thuộc cạnh EF của $\triangle AEF$, mà: $AG = \frac{2}{3} AM$, hay G cũng là trọng tâm của $\triangle AEF$.

b) Xét $\triangle GHI$ và $\triangle GMN$, có: $HG = \frac{1}{2} AG$ (giả thiết).

$$\text{Mà } AG = \frac{2}{3} AM \text{ (tính chất), vậy } HG = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AM = \frac{1}{3} AM. \quad (1)$$

$$GM = \frac{1}{3} AM \text{ (tính chất), vậy } GM = HG \text{ (cùng bằng } \frac{1}{3} AM).$$

Ta có G là trọng tâm của $\triangle AEF$ nên EN là trung tuyến, vậy:

$$GN = \frac{1}{3} EN \text{ (tính chất).} \quad (3)$$

$IG = \frac{1}{2} EG$ (I là trung điểm của EG), vậy:

$$IG = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} EN \text{ (với } EG = \frac{2}{3} EN) \Rightarrow IG = \frac{1}{3} EN. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra: $GN = IG$.

Vì $\widehat{HGI} = \widehat{MGN}$ (đối đỉnh) vậy $\Delta GHI = \Delta GMN$ (c.g.c) suy ra:

$$HI = MN \text{ (cạnh tương ứng)}$$

$$\widehat{H_1} = \widehat{M_1} \text{ (góc tương ứng)}$$

Mà $\widehat{H_1}$ và $\widehat{M_1}$ ở vị trí so le trong bằng nhau nên $HI \parallel MN$.

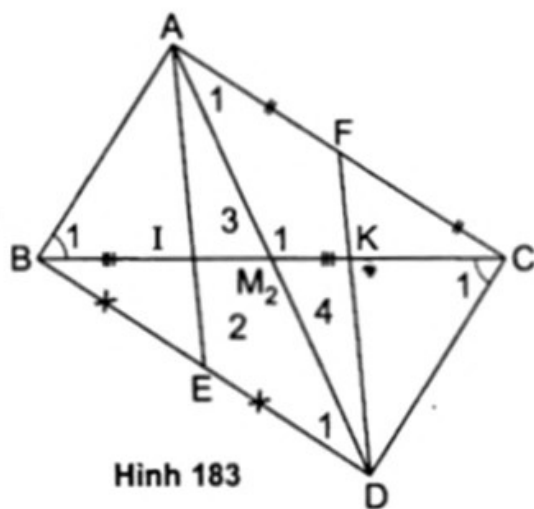
Ví dụ 2. Cho ΔABC , đường trung tuyến AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

a) Chứng minh: $AB \parallel CD$ và $AB = CD$; $AC \parallel BD$ và $AC = BD$.

b) E và F là trung điểm của BD và AC , AE cắt BC tại I , DF cắt BC tại K . Khi đó I và K là trọng tâm của tam giác nào? Chứng minh: $IM = MK$.

Lời giải

GT	ΔABC , $MB = MC$, $MD = MA$,
	$BE = ED$, $AF = FC$
	$BM \cap AE = I$, $DF \cap MC = K$.
KL	a) $AB \parallel CD$, $AB = CD$
	$AC \parallel BD$, $AC = BD$
	b) $IM = MK$, I và K là trọng tâm tâm của ΔABD và ΔACD .



Hình 183

Chứng minh (hình 183):

a) xét ΔAMC và ΔDMB , có:

$$AM = DM \text{ (giả thiết)}$$

$$MC = MB \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{M_1} = \widehat{M_2} \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\Delta AMC = \Delta DMB$ (c.g.c), suy ra:

$$AC = BD \text{ (cạnh tương ứng) và } \widehat{A_1} = \widehat{D_1} \text{ (góc tương ứng).}$$

Mà $\widehat{A_1}$ và $\widehat{D_1}$ là hai góc ở vị trí so le trong, bằng nhau, do đó: $AC \parallel BD$.

Tương tự, ta chứng minh được $\Delta AMB = \Delta DMC$ (c.g.c)

$$\text{(vì } AM = MD; BM = MC \text{ và } \widehat{M_3} = \widehat{M_4} \text{).}$$

Vậy $AB = CD$ và $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow AB \parallel CD$.

b) Xét $\triangle ADB$ có:

BM là đường trung tuyến ($AM = MD$, theo giả thiết)

AE là đường trung tuyến ($BE = ED$, theo giả thiết)

Vậy I là trọng tâm của $\triangle ABD$, suy ra: $IM = \frac{1}{3}MB$ (tính chất). (1)

Xét $\triangle ACD$, có:

CM là đường trung tuyến ($AM = MD$, theo giả thiết)

DF là đường trung tuyến ($AF = FC$, theo giả thiết)

Vậy K là trọng tâm của $\triangle ACD$. Suy ra $IK = \frac{1}{3}MC$ (tính chất). (2)

Từ (1) và (2) và $MB = MC$ (theo giả thiết), ta có: $IM = MK$.

III. BÀI TẬP

- Cho $\triangle ABC$ cân tại A, BN là CM là hai đường trung tuyến thuộc hai cạnh bên. Chứng minh rằng $BN = CM$.
 - Đảo lại: Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó cân.
- Cho $\triangle ABC$, trung tuyến BN và trung tuyến AI cắt nhau tại O. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho $IE = IO$.
 - Chứng minh độ dài các cạnh của $\triangle BOE$ bằng $\frac{2}{3}$ độ dài các đường trung tuyến của $\triangle ABC$.
 - Chứng minh rằng ta có thể vẽ một tam giác có độ dài ba cạnh là độ dài ba đường trung tuyến thuộc $\triangle ABC$.
- Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Từ A hạ $AH \perp BC$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm M sao cho $HM = HA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $CN = BC$.
 - Chứng minh: C là trọng tâm của tam giác $\triangle AMN$.
 - AC cắt MN tại I chứng minh: $HI \parallel AN$.
- Cho $\triangle ABC$, kẻ ba đường trung tuyến AI, BE, CF cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia IA lấy điểm M sao cho $IM = IG$. Trên tia đối của tia EB lấy điểm N, sao cho $EN = EG$. Trên tia đối của tia FC lấy điểm P, sao cho $PF = FG$.
 - Chứng minh: $\triangle MNP = \triangle ABC$
 - Chứng minh G cũng là trọng tâm của $\triangle MNP$.

- 5*. Chứng minh rằng nếu một tam giác có đường trung tuyến thuộc một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông (bài toán đảo của bài 136).
- 6*. Cho ΔABC có $AB > AC$ và ba đường trung tuyến AI , BE và CF . Chứng minh rằng:

a) $\frac{AB - AC}{2} < AI < \frac{AB + AC}{2}$

b) Tổng độ dài ba đường trung tuyến nhỏ hơn chu vi ΔABC nhưng lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi của tam giác đó.

DẠNG 2. Tính chất của ba đường phân giác trong tam giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1- Muốn chứng minh một đường thẳng là tia phân giác của một góc có ba cách chứng minh (dạng 2 chủ đề 2).

2- Muốn chứng minh một điểm là giao điểm của ba đường phân giác trong tam giác:

Cách 1: Chứng minh điểm đó cách đều ba cạnh.

Cách 2: Chứng minh điểm đó là giao của hai đường phân giác của tam giác.

3 - Ta có thể chứng minh được trong một tam giác phân giác của hai góc ngoài và tia phân giác của góc trong không kể với nó, cùng đi qua một điểm. Điểm đó cũng cách đều ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác.

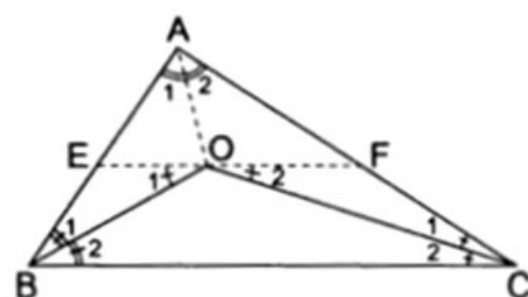
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho ΔABC , đường phân giác của góc A và đường phân giác của góc B cắt nhau tại O . Qua O kẻ $EF \parallel BC$ (E thuộc AB , F thuộc AC).

Chứng minh rằng: $EF = BE + CF$.

Lời giải

GT	$\Delta ABC, \widehat{A_1} = \widehat{A_2}, \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$
	$EF \parallel BC.$
KL	$EF = BE + CF.$



Hình 184

Chứng minh (hình 184):

Xét $\triangle BOE$ có:

$$\widehat{B_1} = \widehat{B_2} \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{O_1} = \widehat{B_2} \text{ (so le trong tạo bởi } EF \parallel BC).$$

Vậy: $\widehat{B_1} = \widehat{O_1}$ suy ra $\triangle BEO$ cân tại E.

Do đó: $BE = EO$ (hai cạnh bên). (1)

Xét $\triangle CFO$ có:

$$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{O_2} = \widehat{C_2} \text{ (so le trong tạo bởi } EF \parallel BC).$$

Vậy: $\widehat{C_1} = \widehat{O_2}$ suy ra $\triangle CFO$ cân tại F.

Do đó: $CF = FO$ (hai cạnh bên). (2)

Từ (1) và (2), ta có: $BE + FC = EO + FO$, hay: $EF = BE + CF$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A} = 120^\circ$. Đường phân giác của góc B và góc C là BD và CE cắt nhau tại I.

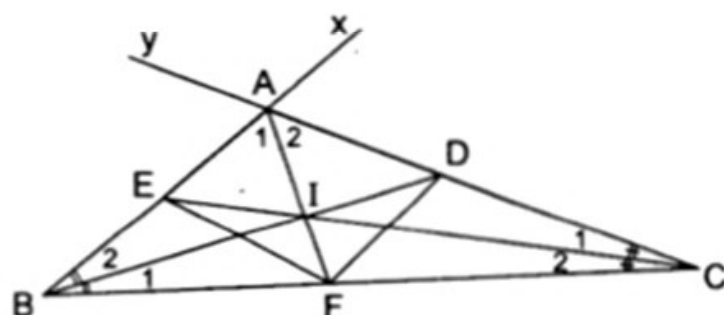
a) Tính số đo của góc $\widehat{BIC}$.

b) Nối AI kéo dài cắt BC tại F. Chứng minh rằng: $DF \perp FE$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC, \widehat{A} = 120^\circ,$ $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}, \widehat{C_1} = \widehat{C_2},$ $BD \cap CE = I,$ $AI \cap BC = F.$
----	--

KL	a) Tính số đo $\widehat{BIC}$ b) $DF \perp FE.$
----	--



Hình 185

Chứng minh (hình 185):

a) Xét $\triangle ABC$, có: $\widehat{A} = 120^\circ$ (giả thiết).

$$\text{Vậy } \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ. \quad (1)$$

$$\text{Mà } \widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\widehat{B}; \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}\widehat{C} \text{ (giả thiết), nên: } \widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}).$$

$$\text{Trong đó: } \widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ \text{ (theo (1))} \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } \triangle BIC, \text{ có: } \widehat{BIC} &= 180^\circ - (\widehat{B}_1 + \widehat{C}_2) \text{ (tổng ba góc trong } \triangle). \\ &= 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ. \end{aligned}$$

b) Xét $\triangle ABC$ có I là giao điểm của hai đường phân giác của góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$, vậy AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ (ba đường phân giác cắt nhau tại một điểm), hay: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ. \quad (1)$

$$\text{Mà } \widehat{xAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ (hai góc kề bù nhau).} \quad (2)$$

$$\text{Và } \widehat{yAB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ (hai góc kề bù nhau).} \quad (3)$$

$$\text{So sánh (1) và (2), ta có AC là tia phân giác của góc } \widehat{FAx}. \quad (4)$$

$$\text{So sánh (1) và (3), ta có AB là tia phân giác của góc } \widehat{FAy}. \quad (5)$$

– Xét $\triangle ABF$ có: BD là tia phân giác của góc $\widehat{B}$ (giả thiết) và AB là tia phân giác của góc $\widehat{FAx}$ (theo 4), nên D là giao của hai đường phân giác. Suy ra FD cũng phải là đường phân giác của góc $\widehat{AFC}$ (hai đường phân giác góc ngoài và góc trong không kề). (6)

– Tương tự xét $\triangle AFC$ có AB là tia phân giác của $\widehat{FAy}$ (theo 5) và có AC là tia phân giác của $\widehat{C}$ (giả thiết) nên E là giao điểm của hai đường phân giác. Suy ra FE cũng là phân giác của góc $\widehat{AFB}$ (hai đường phân giác của góc ngoài và góc trong không kề bù). (7)

Mà $\widehat{AFB}$ và $\widehat{AFC}$ là hai góc kề bù nhau và có FE là tia phân giác của góc $\widehat{AFB}$ (theo 7) và FD là tia phân giác của góc $\widehat{AFC}$ (theo 6).

Vậy $FE \perp FD$ (tính chất tia phân giác của hai góc kề bù).

III. BÀI TẬP

7. Cho $\triangle ABC$ ($AB > AC$), gọi AD là tia phân giác của góc $\widehat{A}$. I là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$, từ I hạ $IH \perp BC$ (H thuộc BC). Chứng minh rằng: $\widehat{BIH} = \widehat{CID}$.
8. Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{A}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân tại A.
9. Cho $\triangle ABC$. Đường phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt BC tại E. Qua E kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại F, qua F kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại P. Chứng minh rằng: $AP = AF$.
10. Cho $\triangle ABC$, trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $MB = AB$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N. Sao cho $NC = AC$. Qua M kẻ đường thẳng song song với AB. Qua N kẻ đường thẳng song song với AC. Hai đường thẳng đó cắt nhau tại P. Chứng minh rằng:
- a) MA là tia phân giác của $\widehat{PMB}$, NA là tia phân giác của $\widehat{PNC}$.
- b) Đường thẳng PA là tia phân giác của $\widehat{MPN}$ và $\widehat{BAC}$.
- 11*. Cho $\triangle ABC$ là tam giác đều. Qua B kẻ đường thẳng $xy \parallel AC$ và hạ $BM \perp AC$ (M thuộc AC). Qua C kẻ đường thẳng $x'y' \parallel AB$ và hạ $CN \perp AB$ (N thuộc AB). Hai đường thẳng xy và $x'y'$ cắt nhau tại P. Chứng minh rằng:
- a) Đường phân giác của góc $\widehat{A}$ và hai đường BF, CF đồng quy.
- b) Đường phân giác của góc $\widehat{A}$ và hai đường xy và $x'y'$ đồng quy.
- 12*. Cho $\triangle ABC$. Ba đường phân giác của góc trong cắt nhau tại I. Qua A kẻ đường thẳng $xy \perp AI$. Đường thẳng xy cắt BI tại M và cắt CI tại N. Chứng minh rằng:
- a) $NB \perp BM, NC \perp CM$.
- b) Ba đường thẳng NB, MC và AI đồng quy.
13. *Kẻ tia phân giác ở ngoài trang giấy:*
- Cho góc $\widehat{xOy}$ có đỉnh O ở ngoài trang giấy. Cách vẽ tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ như sau: Trên tia Ox lấy điểm M, trên Oy lấy điểm N sao cho tia phân giác của góc $\widehat{OMN}$ và tia phân giác của góc $\widehat{MNO}$ cắt nhau tại I (I ở trong tờ giấy). Tại M kẻ đường vuông góc với MI. Tại N kẻ đường vuông góc với NI. Hai đường vuông góc đó cắt nhau tại K. Giải thích tại sao KI là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

DẠNG 3. Tính chất của ba đường trung trực trong tam giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Giao điểm ba đường trung trực cách đều ba đỉnh. Vì vậy nếu O là giao điểm ba đường trung trực của ΔABC thì đường tròn $(O; OA)$ sẽ đi qua B và C .
2. Trong tam giác cân thì đường phân giác của góc ở đỉnh vừa là trung tuyến, vừa là đường trung trực của cạnh đáy.
3. Cách tìm giao điểm ba đường trung trực của một tam giác: vẽ hai đường trung trực của hai cạnh (theo cách vẽ chủ đề 2 – dạng 2).

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho ΔABC cân tại A , phân giác AH . Đường trung trực của cạnh AB cắt đường AH tại O . Trên các cạnh AB và AC của tam giác lấy các điểm E và F sao cho: $AE + AF = AB$.

a) Chứng minh: $OE = OF$.

b) Chứng minh khi E và F di động trên cạnh AB và AC của ΔABC nhưng luôn luôn có $AE + AF = AB$ thì hai đường trung trực của EF đi qua một điểm cố định.

c) Tìm vị trí của E và F để O là trung điểm của EF .

Lời giải

GT	ΔABC , $AB = AC$, $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Trung trực của AB cắt AH tại O , $AE + AF = AB$.
KL	a) $OE = OF$. b) Trung trực của EF đi qua điểm cố định. c) Tìm vị trí của E và F để O là trung điểm của EF .

Chứng minh (hình 186):

$$\text{a) } AE + AF = AB \text{ (giả thiết).} \quad (1)$$

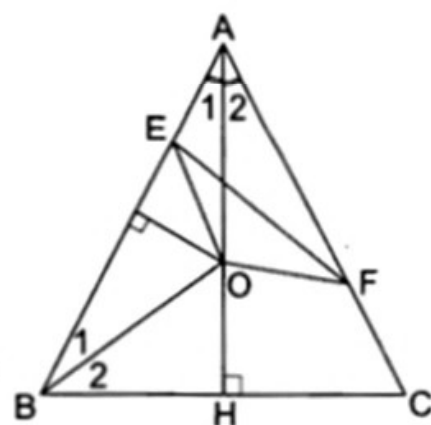
$$AE + EB = AB \text{ (hình vẽ).} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } AF = EB. \quad (3)$$

$$\text{Có: } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (giả thiết).} \quad (4)$$

Vì O nằm trên đường trung trực AB nên ΔAOB là tam giác cân, ta có:

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}. \quad (5)$$



Hình 186

$$OB = OA. \quad (6)$$

$$\text{Từ (4) và (5), ta có: } \widehat{A_2} = \widehat{B_1}. \quad (7)$$

Theo (3), (6) và (7), ta được: $\triangle BOE = \triangle AOF$ (c.g.c), suy ra $OE = OF$.

b) Vì $OE = OF$, nên O nằm trên đường trung trực của OF.

Mặt khác, ta có AB và BC cố định, mà O cũng là giao điểm của hai đường trung trực cố định đó nên O là điểm cố định. Vậy E và F chuyển động nhưng trung trực của EF luôn đi qua điểm cố định O.

c) Theo câu a), ta luôn có $OE = OF$, vậy nên để O là trung điểm của EF thì điều kiện cần là ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Khi E, O, F thẳng hàng, từ đẳng thức: $AE + AF = AB \Rightarrow AE = AF = \frac{1}{2} AB$.

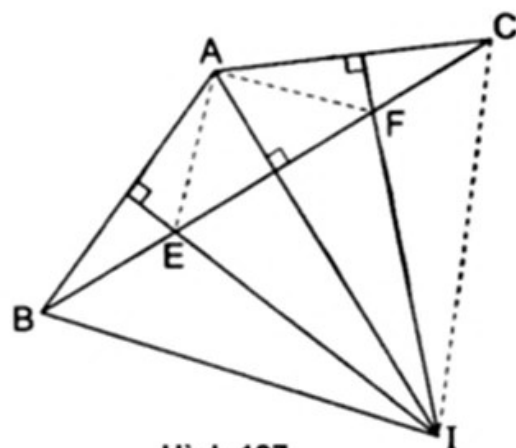
Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A} = 140^\circ$ các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt BC tại E và F và cắt nhau tại I.

a) Chứng minh các tam giác: $\triangle ABE$, $\triangle ACF$, $\triangle BIC$ cân.

b) Tính số đo của góc $\widehat{BIC}$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC$, $\widehat{A} = 140^\circ$, EI là trung trực của AB, FI là trung trực của AC.
KL	a) $\triangle ABE$, $\triangle ACF$, $\triangle BIC$ cân. b) Tính số đo của góc $\widehat{BIC}$.



Hình 187

Chứng minh (hình 187):

a) E nằm trên đường trung trực của AB nên $EB = EA$, vậy $\triangle ABE$ cân tại E.

F nằm trên đường trung trực AC nên $FA = FC$, vậy $\triangle ACF$ cân tại F.

Ta có: I nằm trên trung trực AB nên $IA = IB$ (tính chất). (1)

I nằm trên trung trực AC nên $IA = IC$ (tính chất). (2)

Từ (1) và (2), ta có: $IB = IC$ vậy $\triangle BIC$ cân tại I.

b) Từ (1) suy ra $\triangle AIB$ cân và có: $\widehat{IBA} = \widehat{BAI}$ (hai góc ở đáy). (3)

Từ (2) suy ra $\triangle AIC$ cân và có: $\widehat{ICA} = \widehat{CAI}$ (hai góc ở đáy). (4)

Từ (3) và (4), ta có: $\widehat{IBA} + \widehat{ICA} = \widehat{BAI} + \widehat{CAI} = \widehat{BAC} = 140^\circ$.

Tổng các góc trong hai tam giác $\triangle AIB$ và $\triangle AIC$ là 360° , nên:

$$\begin{aligned}(\widehat{IBA} + \widehat{ICA}) + \widehat{BAC} + \widehat{BIC} &= 360^\circ \\ \Leftrightarrow 140^\circ + 140^\circ + \widehat{BIC} &= 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{BIC} + 280^\circ = 360^\circ.\end{aligned}$$

Vậy: $\widehat{BIC} = 80^\circ$.

III. BÀI TẬP

14. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh chính là trung điểm của cạnh huyền.
15. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và điểm P nằm trong góc đó. Trên mặt phẳng đó lấy điểm A sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng PA và điểm B sao cho Oy là đường trung trực của đoạn thẳng PB.
 - a) Chứng minh ba điểm A, O, B thẳng hàng.
 - b) Chứng minh O là giao của ba đường trung trực của $\triangle ABP$.
16. Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AI (I thuộc BC). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh rằng:
 - a) Đường trung trực của đoạn thẳng EF đi qua đỉnh A của $\triangle ABC$.
 - b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF vuông góc với AI.
 - c) Khi H di động trên tia IC của $\triangle ABC$ cố định thì đường trung trực của đoạn thẳng EF cố định.
17. Cho $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$) các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt đường thẳng BC tại N và M (N và M nằm ngoài đoạn thẳng BC). Trên tia đối của tia AM lấy điểm P sao cho $AP = MB$. Chứng minh:
 - a) $\triangle AMC$ và $\triangle ANB$ cân.
 - b) $AM = PC = AN$.
- 18*. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Các điểm F, K, I là trung điểm các cạnh BC, BA, AC. Gọi H là giao điểm các đường trung trực $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia FH lấy điểm A_1 sao cho $A_1F = FH$. Trên tia đối của tia KH lấy điểm C_1 sao cho $KH = KC_1$. Trên tia đối của tia IH lấy điểm B_1 sao cho $IH = IB_1$.
 - a) Chứng minh rằng hình sáu cạnh $A_1BC_1AB_1C$ có sáu cạnh bằng nhau và trong sáu cạnh đó có từng đôi một song song.
 - b) Chứng minh rằng: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

DẠNG 4. Tính chất của ba đường cao trong tam giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Khi điểm H là trực tâm của tam giác ABC :

– Quan hệ giữa trực tâm và tam giác:

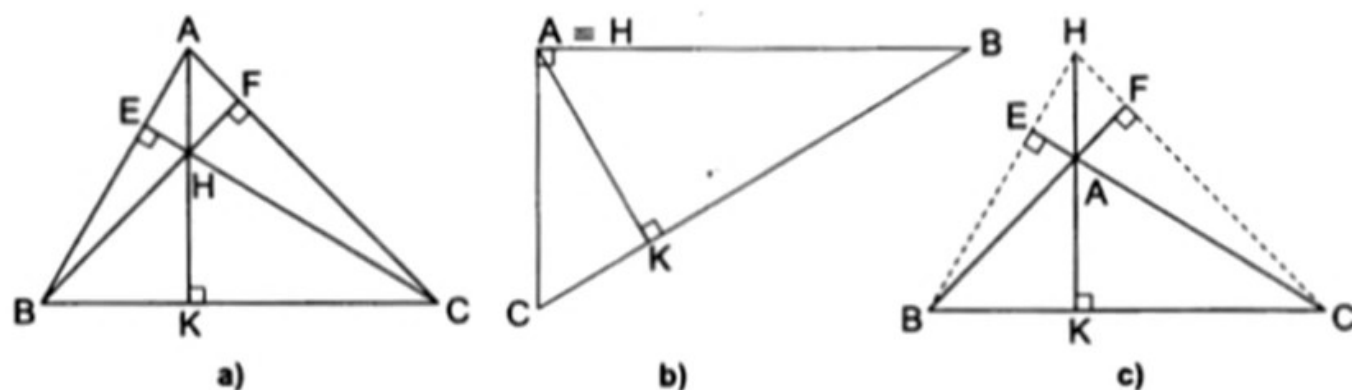
Nếu H là trực tâm của $\triangle ABC$ thì một trong số bốn điểm H, A, B, C sẽ là trực tâm của tam giác có đỉnh là ba điểm còn lại (vẽ hình để chứng tỏ điều đó). Vì vậy tùy theo bài toán ta vận dụng cho phù hợp.

– Quan hệ giữa các đáy với góc ở đỉnh và vị trí của trực tâm:

+ Nếu ba góc đều nhọn thì trực tâm nằm trong tam giác (hình 188a).

+ Nếu góc ở đỉnh bằng 90° thì trực tâm nằm tại đỉnh góc 90° (hình 188b).

+ Nếu góc ở đỉnh là góc tù thì trực tâm nằm ngoài tam giác (hình 188c).



Hình 188

2. Ứng dụng:

+ Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

+ Muốn tìm trực tâm của tam giác chỉ cần vẽ chính xác hai đường cao.

– Muốn chứng minh một tam giác là tam giác cân ta cần chứng minh có một đường thẳng qua một đỉnh và đồng thời là hai trong bốn đường (trung tuyến, phân giác, trung trực, đường cao) thì tam giác đó cân.

– Trong tam giác đều đường trung tuyến, đường cao, đường trung trực, đường phân giác xuất phát từ cùng một đỉnh trùng nhau.

II. VÍ DỤ

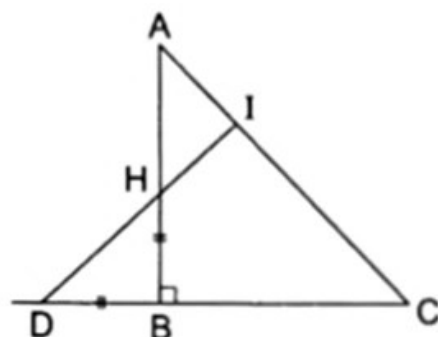
Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại B. Trên cạnh AB lấy điểm H, trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BH$. Chứng minh rằng:

a) $DH \perp AC$;

b) $CH \perp AD$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC, \widehat{B} = 90^\circ, AB = BC, BH = BD.$
KL	a) $DH \perp AC$ b) $CH \perp AD.$



Hình 189

Chứng minh (hình 189):

a) $\triangle ABC$ vuông cân tại B vậy $\widehat{C} = 45^\circ$.

$\triangle DBH$ có: $\widehat{B} = 90^\circ$ (theo giả thiết)
 $BH = BD$ (theo giả thiết).

Vậy $\triangle DBH$ vuông cân tại B, suy ra $\widehat{D} = 45^\circ$.

$\triangle DIC$ có: $\widehat{D} + \widehat{C} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$. Vậy $\widehat{DIC} = 90^\circ$.

Do đó $DH \perp AC$.

b) $\triangle ADC$ có: $AB \perp BC$ (theo giả thiết)

$DH \perp AC$ (chứng minh câu a).

Vậy H là trực tâm của $\triangle ADC$, suy ra CH cũng là đường cao thứ ba của tam giác. Vậy $CH \perp AD$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông góc tại A. Đường cao AH. Lấy điểm I là trung điểm của cạnh AC.

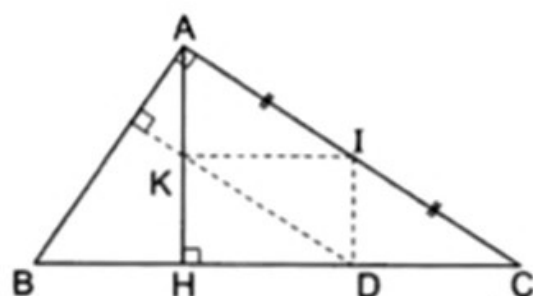
a) Chứng minh: I là giao điểm ba đường trung trực $\triangle AHC$.

b) Gọi IK và ID là trung trực của AH và CH (K thuộc AH; D thuộc HC). Chứng minh: $KD \parallel AC$.

c) Chứng minh $BK \perp AD$.

Lời giải

GT	$\triangle ABC, \widehat{A} = 90^\circ, IA = IC,$ IK là trung trực của AH; ID là trung trực của CH.
KL	a) I là giao điểm ba đường trung trực $\triangle AHC$ b) $KD \parallel AC$ c) $BK \perp AD.$



Hình 190

Chứng minh (hình 190):

a) Theo bài ra, ta chứng minh được: $AI = HI = IC = \frac{1}{2} AC$;

$IA = IH$ suy ra I nằm trên đường trung trực của AH ;

$IH = IC$ suy ra I nằm trên đường trung trực của HC ;

$IC = IA$ suy ra I nằm trên đường trung trực của BC .

Vậy I là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle AHC$

b) • Xét $\triangle KHD$ và $\triangle DIK$, có:

KD chung.

Mà $AH \perp BC$; $DI \perp BC \Rightarrow AH \parallel DI$, suy ra: $\widehat{HKD} = \widehat{KDI}$ (so le trong).

Lại có: $IA \perp AH$; $BC \perp AH \Rightarrow KI \parallel BC$, suy ra: $\widehat{HDK} = \widehat{IKD}$ (so le trong).

Vậy $\triangle KHD = \triangle DIK$ (g.c.g), suy ra: $HK = ID$; $HD = KI$.

• Xét $\triangle KHD$ và $\triangle DIC$ vuông tại H và D , có:

$HK = ID$ (theo chứng minh câu a);

$HD = DC$ (ID là trung trực).

Vậy $\triangle KHD = \triangle DIC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C}$ (góc tương ứng).

Vậy $KD \parallel AC$ (vì có hai góc đồng vị bằng nhau).

c) Ta có: $\left. \begin{array}{l} KD \parallel AC \text{ (chứng minh câu b)} \\ AB \perp AC \text{ (giả thiết)} \end{array} \right\} \Rightarrow KD \perp AB.$

Xét $\triangle ABD$ có: $AH \perp BD$ (giả thiết) và $KD \perp AB$, nên K là trực tâm của $\triangle ABD$. Vậy KD là đường cao thứ ba của $\triangle ABD$, suy ra: $KD \perp AB$.

III. BÀI TẬP

19. Cho $\triangle ABC$ có góc A tù. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $CM = CA$, và lấy điểm N sao cho $BN = BA$. Đường phân giác của $\widehat{B}$ cắt AM tại E . Đường phân giác của $\widehat{C}$ cắt AN tại F . Chứng minh rằng đường phân giác của $\widehat{A}$ vuông góc với EF .

20. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A}$ nhọn kẻ đường cao BK và CH . Trên tia đối của tia BK lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Trên tia đối của tia CH lấy điểm F sao cho $CF = AB$. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$;

b) $AE \perp AF$.

21. Cho $\triangle ABC$, đường cao AH . Trên tia đối của AH lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tại B kẻ đường thẳng $BE \perp AB$ và $BE = AB$ (E và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau từ bờ là AB). Tại C kẻ đường thẳng $CF \perp AC$ và $CF = AC$ (F và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau từ bờ là AC). Chứng minh rằng:
- $DC = BF$ và $DC \perp BF$;
 - Ba đường thẳng DH , BF và CE đồng quy.
22. Cho $\triangle ABC$. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. Biết rằng $AH = BC$. Tính số đo của góc $\widehat{BAC}$.
- 23*. Cho $\triangle ABC$. Các đường thẳng chứa tia phân giác của ba góc ngoài của $\triangle ABC$ cắt nhau tại E, F, P (E thuộc miền trong của góc $\widehat{A}$, F thuộc miền trong của góc $\widehat{B}$, P thuộc miền trong của góc $\widehat{C}$). Chứng minh rằng:
- Ba đường thẳng AE, BF, CP đồng quy tại H .
 - Bốn điểm E, F, P, H cách đều ba đường thẳng AB, AC và BC .
 - H là trực tâm của $\triangle EFP$.
- 24*. Cho $\triangle ABC$. Qua A kẻ đường thẳng $d_1 \parallel BC$, qua B kẻ đường thẳng $d_2 \parallel AC$, qua C kẻ đường thẳng $d_3 \parallel AB$. Ba đường thẳng này cắt nhau tại ba điểm E, F, P . Chứng minh rằng:
- Các cạnh AB, AC, BC chia $\triangle EFP$ thành bốn tam giác nhỏ bằng nhau.
 - Các đường cao của $\triangle ABC$ là đường trung trực của $\triangle EFP$.

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nắm chắc mối quan hệ giữa góc với cạnh đối diện và ngược lại.
2. Nắm chắc mối quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên và hình chiếu của nó.
3. Mối quan hệ giữa ba cạnh với nhau (bất đẳng thức trong tam giác).

Tất cả các mối quan hệ trên đều xét trong một tam giác.

4. Bốn đường chủ yếu trong tam giác giống nhau là đều đồng quy tại một điểm. Nhưng khác nhau là:

- + Ba đường phân giác: điểm đồng quy cách đều ba cạnh tam giác.
- + Ba đường trung trực: điểm đồng quy cách đều ba đỉnh tam giác.
- + Ba đường trung tuyến: điểm đồng quy gọi là trọng tâm và khoảng cách từ nó đến đỉnh bằng $\frac{2}{3}$ độ dài mỗi đường trung tuyến tương ứng.
- + Ba đường cao: điểm đồng quy gọi là trực tâm.

II. KĨ NĂNG CẦN ĐẠT

- Nắm chắc chắn các tính chất của các yếu tố cạnh, góc và đường đồng quy trong tam giác, mối quan hệ của chúng từ đó vận dụng linh hoạt vào giải các bài toán cụ thể.
- Phần này hết sức quan trọng cần được ôn tập tốt để chuẩn bị tốt cho việc học lên các lớp trên.

III. BÀI TẬP

1. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{C} = 30^\circ$. Kẻ đường cao AH. Biết $AH = \frac{1}{2}BC$, tính số đo các góc của $\triangle ABC$.
2. Cho $\triangle ABC$ có $BC > AB$. Tia phân giác của góc $\widehat{B}$ cắt cạnh AC tại D. Chứng minh rằng: $CD > DA$.
3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{C} < \widehat{B} < 90^\circ$, đường cao AH. Trên đoạn BH lấy điểm E, trên đoạn BC lấy điểm F (F nằm ngoài đoạn thẳng BC). Chứng minh rằng:
 - a) $HB < HC$;
 - b) $AE < AB < AF$.

4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh rằng nếu $AB > AC$ thì ta có:
- $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$.
 - Điểm M nằm trên AH, chứng minh: $AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2$.
5. Cho $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$). Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $MA + AN = 2AB$. Qua N kẻ đường thẳng $xy \parallel AB$, cắt BC tại F.
- Chứng minh: $BM = CN$;
 - Chứng minh $\triangle CNF$ cân;
 - MN cắt BF tại K. Chứng minh AK là đường trung tuyến ứng với cạnh MN của $\triangle AMN$.
6. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$. Trên đường phân giác AD của góc $\widehat{A}$ lấy điểm I. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AI$. Chứng minh rằng:
- AB và AC là đường trung trực của đoạn IE và IF;
 - $\triangle IEF$ là tam giác đều;
 - $IA \perp EF$.
7. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A} = 90^\circ$. BD là tia phân giác của góc $\widehat{B}$ (D thuộc AC), từ D hạ $DH \perp BC$ (H thuộc BC). Tia BA và tia HD cắt nhau tại N.
- So sánh độ dài hai đoạn thẳng AD và DC.
 - Chứng minh $BD \perp NC$.
 - $\triangle BNC$ là tam giác gì?
 - Chứng minh $HA \parallel NC$.
8. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$; $AB > BC$, đường cao AH và CK. Trên đoạn KA lấy điểm E sao cho $KE = KB$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CF = AE$.
- Chứng minh $\triangle BCE$ cân;
 - So sánh các góc của $\triangle ABC$ với các góc của $\triangle BCE$;
 - Chứng minh $\triangle ABF$ cân.
- 9*. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tia phân giác BD của góc $\widehat{B}$ (D thuộc AC). Từ D kẻ $DN \parallel BC$ (N thuộc AB). Chứng minh rằng:
- $BD = DC$.
 - $BN = DN$.
 - Từ D hạ $DH \perp BC$ (H thuộc BC). Tia BA và tia HD cắt nhau tại M. Chứng minh D là giao điểm ba đường phân giác của $\triangle BMC$.

10. Cho ΔABC là tam giác đều.

a) Các đường cao AH, BK, CI cắt nhau tại O. Chứng minh rằng ba đoạn OH, OK và OI có độ dài bằng nhau và có tổng các độ dài đó bằng độ dài đường cao của tam giác.

b) Nếu O' là một điểm bất kì nằm trong tam giác thì tổng các độ dài $O'H' + O'K' + O'I'$ bằng độ dài đường cao của tam giác ($O'H' \perp BC$, $O'K' \perp AC$, $O'I' \perp AB$).

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Cho ΔABC , biết số đo của các góc $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} = 3 : 2 : 1$.

a) Tính số đo các góc ΔABC ;

b) So sánh ba cạnh của ΔABC .

c) Kẻ đường cao AH. Tìm các góc có cạnh tương ứng vuông góc trong hình vẽ.

2. Cho ΔABC có $AC < AB$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Trên tia đối của tia CB lấy F sao cho $CF = CA$.

a) So sánh $\widehat{AFC}$ với $\widehat{AEB}$.

b) So sánh AF và AE.

3. Cho ΔABC cân tại A. Kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Trên AH lấy điểm D sao cho D nằm giữa hai điểm A và H.

a) Tìm hình chiếu của các đoạn thẳng AB, AC, DC, BD trên đường thẳng BC.

b) So sánh độ dài đoạn thẳng AC và DC.

4. Cho ΔABC có góc $\widehat{A} = 120^\circ$. Đường phân giác AD của góc A (D thuộc BC). Từ D hạ $DH \perp AB$ và $DK \perp AC$.

a) Chứng minh ΔDHK là tam giác đều.

b) Qua C kẻ đường thẳng song song AD cắt AB tại I. Chứng minh: ΔACI là tam giác đều.

5. Cho ΔABC có góc A tù ($AC > AB$). Đường phân giác BD của góc B (D thuộc AC). Từ A hạ $AH \perp BD$ cắt BC tại E. Tại D kẻ đường vuông góc với BD cắt BA tại M, cắt BC tại N.

a) Chứng minh $AM = EN$.

b) Tia ED cắt tia BA tại F. Chứng minh $MF = NC$.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Chủ đề 1

1. (hình 191)

a) (Theo cách tính bài toán ví dụ 1 chương 2).

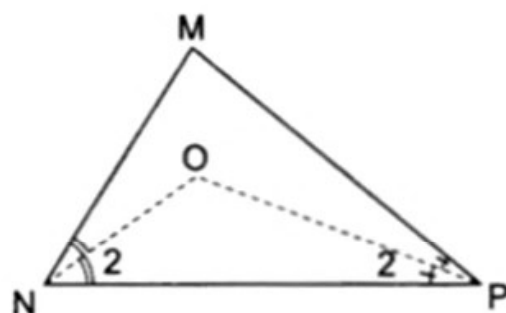
O là giao của hai đường phân giác góc $\widehat{N}$ và $\widehat{P}$ thì:

$$\widehat{NOP} = 90^\circ + \frac{\widehat{M}}{2} \quad (\widehat{M} \text{ là góc ở đỉnh}).$$

Vậy $\widehat{NOP} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{NOP}$ là góc tù do đó trong $\triangle NOP$ thì NP là cạnh lớn nhất (đối diện với góc tù).

b) Nếu $ON < OP$ thì $\widehat{N}_2 > \widehat{P}_2 \Rightarrow \widehat{N} > \widehat{P}$.

Trong $\triangle MNP$ có $\widehat{N} > \widehat{P}$ vậy $MP > MN$ (cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn).



Hình 191

2. (hình 192)

a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle CEM$ có:

$$AM = MC \text{ (giả thiết);}$$

$$MB = ME \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\triangle ABM = \triangle CEM$ (c.g.c).

Suy ra: $\widehat{BAM} = \widehat{ECM}$, mà $\widehat{BAM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ECM} = 90^\circ \Rightarrow CE \perp AC$.

– $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 1v \Rightarrow BC$ là cạnh huyền $\Rightarrow BC > AB$. (1)

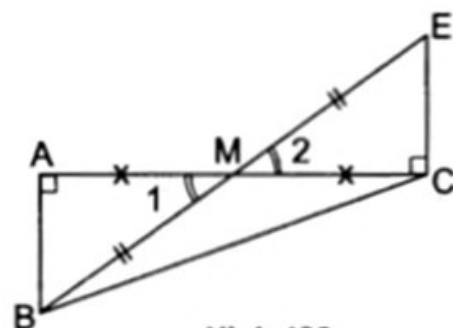
Mà $AB = CE$ (do $\triangle ABM = \triangle CEM$). (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $BC > CE$.

b) $\widehat{ABM} = \widehat{CEM}$ (do $\triangle ABM = \triangle CEM$). (3)

Trong $\triangle BCE$ có: $\widehat{CEM} > \widehat{MBC}$ (do $BC > CE$). (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $\widehat{ABM} > \widehat{MBC}$.



Hình 192

3. (hình 193)

a) Xét $\triangle BMF$ và $\triangle CAM$ có:

$$AM = MF; BC = MC \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{M_1} = \widehat{M_2} \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\triangle BMF = \triangle CMA$.

$$AC = BF.$$

– Trong $\triangle ABC$ có:

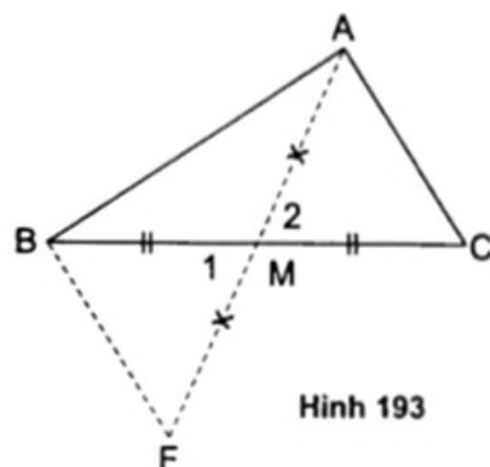
$$AB > AC \Rightarrow AB > BF.$$

Vậy $\widehat{BFM} > \widehat{BAM}$.

Từ (1) và (3), ta có: $\widehat{BAM} < \widehat{CAM}$.

b) Cộng thêm vào hai vế của (4) với $\widehat{CAM} > 0^\circ$, ta có:

$$\widehat{BAM} + \widehat{MAC} < \widehat{CAM} + \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{BAC} < 2\widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{CAM} > \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$



Hình 193

4. (hình 194)

Xét $\triangle EFC$ có: $\widehat{EFC} = \widehat{A} + \widehat{E_1}$ (góc ngoài tam giác).

Mà $\widehat{A} \geq 90^\circ$, suy ra $\widehat{EFC}$ là góc tù. Trong

$\triangle EFC$ có $\widehat{EFC}$ tù vậy cạnh CE là lớn nhất
 $\Rightarrow CE > EF$.

(1)

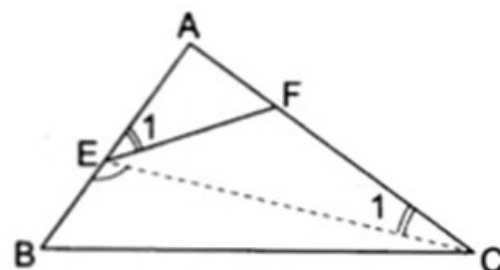
Xét $\triangle AEC$ có:

$$\widehat{BEC} = \widehat{A_1} + \widehat{C_1} \text{ (góc ngoài).}$$

Mà $\widehat{A} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} > 90^\circ$

Trong $\triangle BEC$ có $\widehat{BEC}$ tù vậy cạnh BC là lớn nhất $\Rightarrow BC > CE$.

Từ (1) và (2) có: $BC > EF$.



Hình 194

5*. (hình 195)

a) $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$; $AB = AC$ và $BE = FC$ (giả thiết).

Vậy $\triangle ABE = \triangle ACF$ (c.g.c).

Suy ra: $\widehat{BEA} = \widehat{CFA}$ (góc tương ứng).

• Xét $\triangle ABE$ có:

$$\widehat{AEC} = \widehat{B} + \widehat{BAE} \text{ (góc ngoài).}$$

Mà $\widehat{C} = \widehat{B}$ nên $\widehat{AEC} = \widehat{C} + \widehat{BAE}$, hay $\widehat{AEC} > \widehat{C}$.

Trong $\triangle AEC$ có $\widehat{AEC} > \widehat{C}$ suy ra:

$$AC > AE. \quad (1)$$

Trên tia đối tia FA lấy N sao cho $FN = FA$.

Ta dễ dàng chứng minh được:

$$\triangle EAF = \triangle CNF \text{ (c.g.c).}$$

Suy ra: $\widehat{EAF} = \widehat{CNF}$ (2) vì $AE = CN$ (3) (cạnh và góc tương ứng).

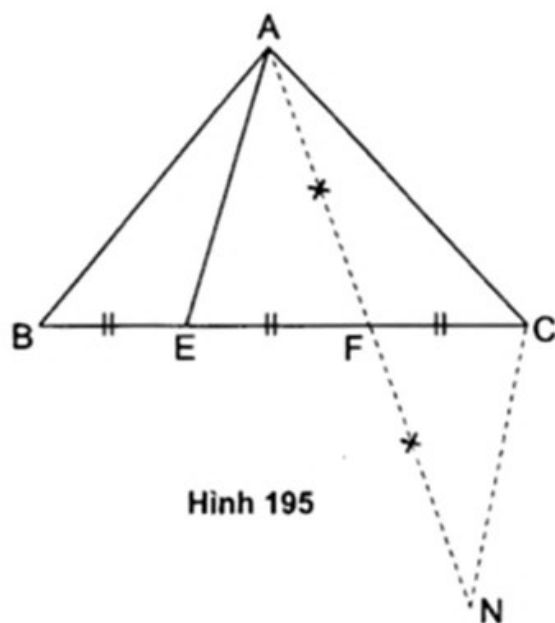
• Trong $\triangle ACN$, từ (1) và (3), ta có:

$$AC > CN \Rightarrow \widehat{CNF} > \widehat{FAC}. \quad (4)$$

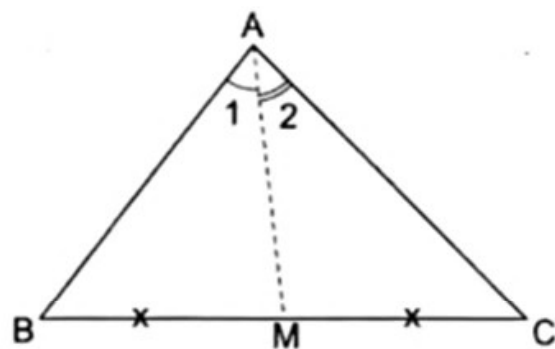
Từ (2) và (4), suy ra: $\widehat{CNF} > \widehat{FAC}$.

Vậy trong ba góc đó: $\widehat{CNF} > \widehat{FAC} = \widehat{BAE}$.

b) Nếu chia thành bốn đoạn bằng nhau: $BE = IE = FE = FC$, ta sẽ có bốn góc trong đó hai góc đối một bằng nhau: $\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$; $\widehat{EAI} = \widehat{IAF}$ (học sinh chứng minh tương tự).



Hình 195



Hình 196

6*. (hình 196)

a) Do $AM > BM$ (theo giả thiết) nên trong $\triangle ABM$ có $AM > BM \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{A_1}$ (đối diện cạnh lớn hơn). (1)

Vì $BM = MC$, nên ta cũng có:

$AM > MC \Rightarrow \widehat{C} > \widehat{A_2}$ (trong $\triangle AMC$ đối diện cạnh lớn hơn). (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2), ta có: $\widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A_1} + \widehat{A_2}$, hay $\widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A}$.

Mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$, vậy $\widehat{B} + \widehat{C} > 90^\circ$ còn $\widehat{A} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}$ nhọn.

b) Tương tự như trên, nếu: $AM = BM = CM$.

Trong $\triangle ABM$ có: $AM = BM \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A_1}$. (3)

Trong $\triangle ACM$ có: $AM = CM \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A}_2$. (4)

Từ (3) và (4), ta có: $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}$, hay $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A}$.

Mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} = 90^\circ$. Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A.

c) Tương tự chứng minh câu a, ta thấy:

Nếu $AM < BC$ thì $AM < MC$ ($BM = BC$).

Trong $\triangle ABM$ có $AM < BM \Rightarrow \widehat{B} < \widehat{A}_1$ (đối diện cạnh nhỏ hơn).

Trong $\triangle ACM$ có $AM < CM \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{A}_2$ (đối diện cạnh nhỏ hơn).

Vậy: $\widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$ hay $\widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{A}$.

Mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} < 90^\circ$, còn $\widehat{A} > 90^\circ$.

Vậy trong $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A}$ tù.

(hình 197)

a) $AB = AC$ (giả thiết) (1) suy ra:
 $BH = HC$ (đường xiên bằng nhau
 nên hình chiếu bằng nhau).

$AH = HF$ (giả thiết) suy ra:

$AC = CF$ (hình chiếu bằng nhau nên đường xiên bằng nhau). (2)

$AB = BF$ (hình chiếu bằng nhau nên đường xiên bằng nhau). (3)

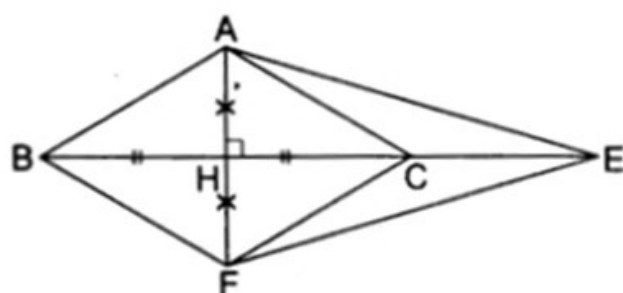
Từ (1), (2) và (3), suy ra: $AB = AC = CF = BF$.

b) $AH = HF \Rightarrow AE = EF$ (hình chiếu bằng nhau nên đường xiên bằng nhau).
 Vậy $\triangle AEF$ cân tại E ($EA = EF$).

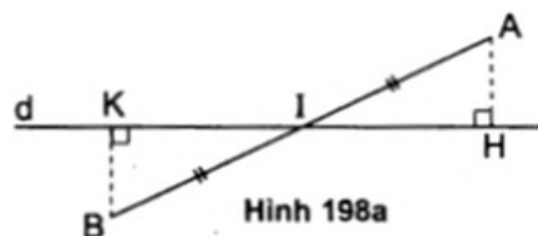
8. (hình 198a, b)

a) I là trung điểm của AB nên $AI = IB$; I
 nằm giữa A và B $\Rightarrow$ I nằm giữa H và K.

$\triangle IAH = \triangle IBK$ (cạnh huyền, góc nhọn),
 $\Rightarrow KI = IH$.



Hình 197

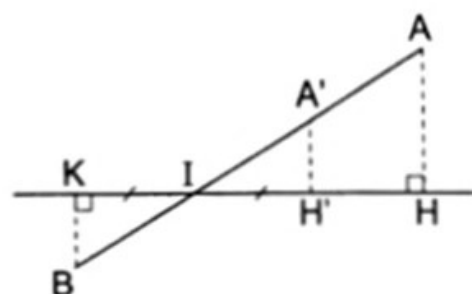


Hình 198a

b) Nếu $IA > IB$ thì trên tia đối IA ta có thể lấy được điểm A' , sao cho $IA' = IB$. Từ kết quả câu a, ta có hình chiếu của nó cũng bằng nhau, tức là $KI = IH'$.

Do A' nằm giữa I và A , suy ra:

$$IH' < IH, \text{ hay } KI < IH.$$



Hình 198b

9. (hình 199)

a) Muốn tìm hình chiếu của đoạn thẳng MN trên đường thẳng PQ , ta đi tìm hình chiếu của hai đầu mút đoạn thẳng đó lên PQ . Tức là từ M và N hạ các đường vuông góc với đường thẳng PQ .

Hạ $MH \perp PQ$, mà $NK \perp PQ$ nên ta có HK là hình chiếu của MN trên đường thẳng PQ .

Tương tự cách tìm trên ta có EF là hình chiếu của PQ trên đường thẳng MN .

b) Chứng minh: $\triangle HOM = \triangle KON$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow OH = OK$.

Tương tự, ta có: $OE = OF$.

Xét $\triangle MHO$ có: $\widehat{H} = 90^\circ$ (theo cách vẽ); $\widehat{O} = 60^\circ$ (giả thiết), vậy $\widehat{M} = 30^\circ$.

OH là cạnh đối diện với góc $\widehat{M} = 30^\circ$, nên $OH = \frac{1}{2}OM$ (định lý)

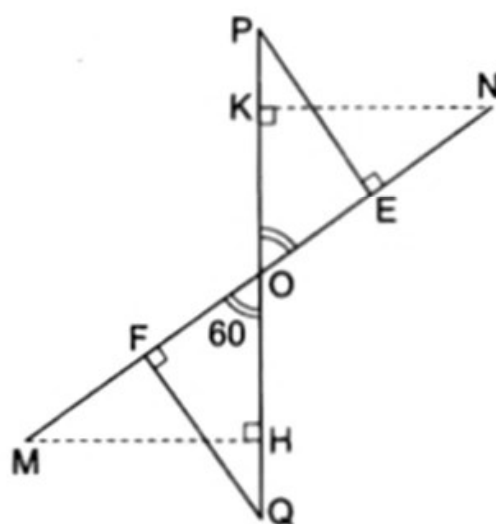
$$\Rightarrow OH = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{2} = 3 \text{ (cm)}.$$

Vậy $OH = OK = 3\text{cm}$, $HK = 6\text{cm}$.

Tương tự, xét $\triangle POE$ có: $\widehat{E} = 90^\circ$; $\widehat{O} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 30^\circ$.

$$\Rightarrow OE = \frac{1}{2}PO \Rightarrow OE = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{2} = 2.$$

Vậy: $OE = OF = 2\text{cm}$; $EF = 4\text{cm}$.



Hình 199

10*. (hình 200)

a) $AH < AC$ (đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên) $AH < AC$ (đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên).

Vậy: $2AH < AC + AC$, hay

$$AH < \frac{AC + AC}{2}. \quad (1)$$

b) Chứng minh tương tự như trên, ta có :

$$BK < \frac{BA + BC}{2}. \quad (2)$$

$$CI < \frac{CA + CB}{2}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3), ta có:

$$AH + BK + CI < \frac{BC + AC + AB + BC + AC + BC}{2}.$$

Hay: $AH + BK + CI < AB + BC + AC = C_{\Delta ABC}$.

11. (hình 201)

a) $MH < MI$; $NK < IN$ (đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên).

Vậy: $MH + NK < MI + IN$ (I nằm giữa hai điểm M và N), vậy: $MH + NK < MN$.

b) Nếu $Px \perp MN$ thì $MH \perp Px$ nên MH trùng MN (vì qua M chỉ có một đường thẳng vuông góc với Px).

Tương tự, ta có NK trùng MN, tức là K trùng với H. Khi đó $MH + KN = MN$.

Vậy khi $Px \perp MN$ thì $MH + KN = MN$ (khi đó $H = K$).

12. Vì: $AB \perp AC$ (ΔABC vuông tại A).

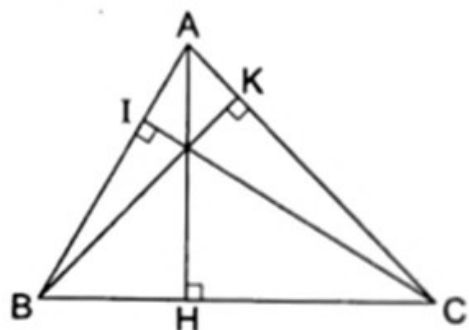
$Cy \perp AC$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow AB \parallel Cy$ (cùng vuông góc với AC).

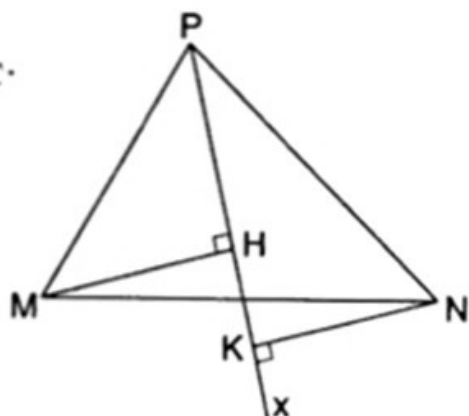
– Xét ΔBCN , có:

$$\widehat{N} = \widehat{B_1} \text{ (so le trong);}$$

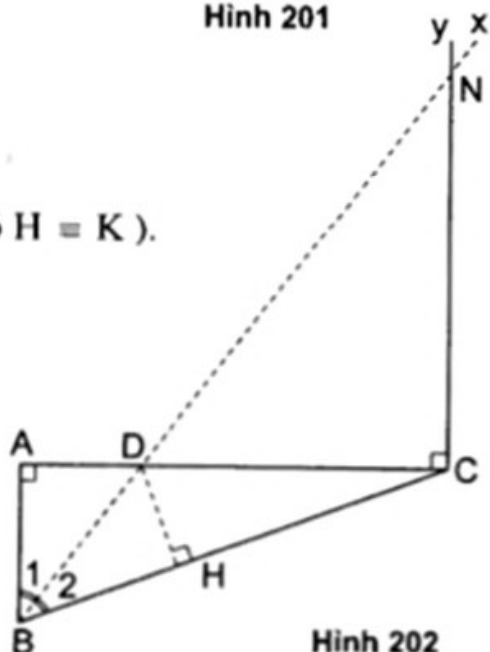
$$\widehat{B_2} = \widehat{B_1} \text{ (BD là phân giác).}$$



Hình 200



Hình 201



Hình 202

Vậy $\widehat{N} = \widehat{B}_2 \Rightarrow \triangle BCN$ cân tại C, nên $CB = CN$.

Trong $\triangle ABC$ có $AB < CB$ vậy $AB < CN$. (1)

Mà BD là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ nên tia BD nằm giữa hai tia BA và BC, suy ra điểm D nằm giữa hai điểm A và C.

Kẻ $DH \perp BC$, ta có $\triangle ABD = \triangle HBD$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow DA = DH$.

Lại vì $DC > DH$ (đường vuông góc lớn hơn đường xiên).

Vậy: $DC > DA$, hay $AD < DC$. (2)

Trong $\triangle ABD$ vuông tại A, có: $BD^2 = AD^2 + AB^2$ (định lý Pi-ta-go).

Trong $\triangle CND$ vuông tại C, có: $DN^2 = DC^2 + CN^2$ (định lý Pi-ta-go).

Mà $AB < CN$; $AD < DC$ (theo chứng minh trên).

Vậy: $BD^2 < DN^2 \Rightarrow BD < DN$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $AB + AD + BD < CN + DC + DN$.

Vậy $C_{\triangle ABD} < C_{\triangle CDN}$.

13. (hình 203)

Bài toán trên do vẽ hình. Dẫn đến chứng minh sai và kết quả sai trên:

a) Sai đầu tiên là điểm O (giao của đường phân giác góc B và đường trung trực cạnh AC không thể ở trong $\triangle ABC$ được, mà O phải ở ngoài $\triangle ABC$). Ta sẽ chứng tỏ điều đó:

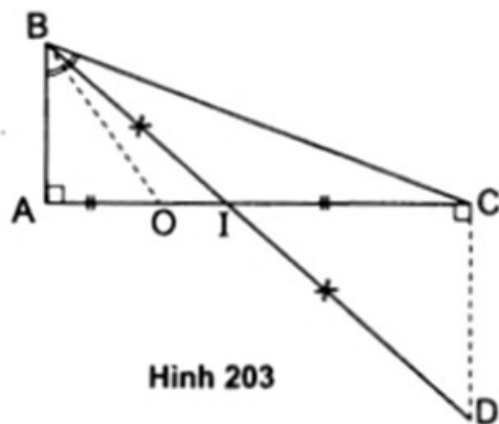
$\triangle ABC$ vuông tại A, trung tuyến BI. Ta sẽ chứng minh tia phân giác BO của $\widehat{ABC}$ nằm giữa hai tia BA và BI.

Thật vậy kéo dài BI lấy $ID = BI$, ta dễ dàng chứng minh được:

$$\triangle ABI = \triangle CDI \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = CD; \widehat{A} = \widehat{C}_1 = 90^\circ.$$

Trong $\triangle BCD$ có $BC > CD$ (vì $BC > AB$), nên $\widehat{BDC} > \widehat{DBC}$.

Vì $\widehat{BDC} = \widehat{ABC}$ ($\triangle ABI = \triangle CDI$) nên $\widehat{ABI} > \widehat{DBC} \Rightarrow \widehat{ABI} > \frac{1}{2} \widehat{ABC}$.



Hình 203

Mà BO' là tia phân giác nên: $\widehat{ABO'} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$.

Vậy $\widehat{ABO'} < \widehat{ABI} \Rightarrow$ tia BO' nằm giữa hai tia BA và BI .

Vậy đường trung trực của AC qua I và $\perp BC$ cắt tại BO' tại O thuộc nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng chứa điểm B bờ là AC .

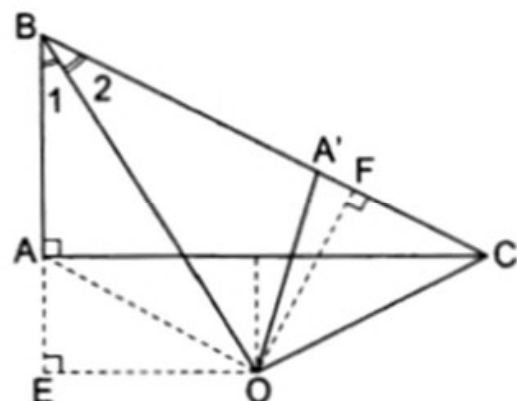
b) Vì O nằm ngoài $\triangle ABC$ nên từ O kẻ $OE \parallel AC$, ta dễ thấy E nằm ngoài đoạn AB .

c) Còn điểm F ta phải chứng tỏ điểm F phải nằm giữa B và C : trên BC lấy điểm A' sao cho $BA = BA'$. Dễ dàng chứng minh được:

$$\triangle ABO = \triangle A'BO \text{ (c.g.c);}$$

$$\triangle AIO = \triangle CIO \text{ (c.g.c).}$$

$$\text{Để suy ra: } \left. \begin{array}{l} OA = OA' \\ OA = OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA' = OC$$



Hình 204

$\Rightarrow \triangle A'OC$ cân tại O nên $OF \perp A'C$ và $FA' = FC \rightarrow F$ nằm giữa A' và C và F nằm giữa B và C .

d) Chứng minh:

$$\triangle BOE = \triangle BOF \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)} \Rightarrow BE = BF. \quad (1)$$

$$\triangle AOE = \triangle COF \text{ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)} \Rightarrow AE = FC. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } BE - AE = BF - FC. \quad (3)$$

$$\text{Mà } BE - AE = AB; BF = BC - CF.$$

$$\text{Thay vào (3), ta có: } AB = BC - CF - CF = BC - 2CF.$$

Vậy AB không thể bằng BC được.

14. a) Nếu AB là cạnh bên của tam giác thì ba cạnh là: 7cm, 7cm, 4cm thỏa mãn bất đẳng thức của tam giác. Vậy chu vi là: 18cm.

Nếu AC là cạnh bên của tam giác thì ba cạnh là: 4cm, 4cm, 7cm cũng thỏa mãn bất đẳng thức của tam giác. Vậy chu vi là: 15cm.

- b) Nếu AB là cạnh bên của tam giác thì ba cạnh là: 9cm, 9cm, 4cm thỏa mãn bất đẳng thức của tam giác. Vậy chu vi là: 22cm

Nếu AC là cạnh bên của tam giác thì ba cạnh là: 4cm, 4cm, 9cm không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $4 + 4 = 8\text{cm} < 9\text{cm}$ (tổng hai cạnh nhỏ hơn một cạnh).

15. Trên tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$.

Vì $AB > AC \Rightarrow AB > AE$ vậy E nằm giữa A và B, nên $AB = AE + EB$, hay:

$$AB - AE = BE. \quad (1)$$

Ta dễ dàng chứng minh được:

$$\triangle AEM = \triangle ACM \text{ (c.g.c.)}$$

Suy ra: $EM = MC$. (2)

Xét $\triangle BEM$, có: $BE > BM - ME$ (một cạnh lớn hơn hiệu hai cạnh còn lại). (3)

Thay (1) và (2) vào (3), ta có:

$$AB - AE > BM - MC.$$

Mà $AE = AC$ (cách vẽ), vậy $AB - AC > BM - MC$.

16. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh BC, AC, AB (đối diện ba đỉnh A, B, C của tam giác). Giả sử $a \geq b \geq c > 0$, ta có:

$$b - c < a < b + c \text{ (bất đẳng thức trong tam giác)}. \quad (1)$$

Từ (1) có:

$$a < b + c \Rightarrow a + a < a + b + c$$

$$\Rightarrow 2a < a + b + c \Rightarrow a < \frac{a + b + c}{2}. \quad (2)$$

Từ giả thiết: $a \geq b$ (3); $a \geq c$ (4); $a = a$ (5)

Từ (3), (4) và (5), ta có:

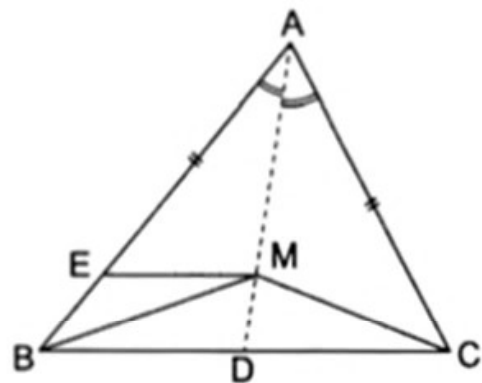
$$3a \geq a + b + c \Rightarrow a \geq \frac{a + b + c}{3}. \quad (6)$$

Từ (2) và (6), ta có: $\frac{a + b + c}{3} \leq a \leq \frac{a + b + c}{2}$.

17. (hình 206)

Trong $\triangle AMB$, có: $AM + MB > c$ (bất đẳng thức trong tam giác).

Trong $\triangle AMC$, có: $AM + MC > b$ (bất đẳng thức trong tam giác).

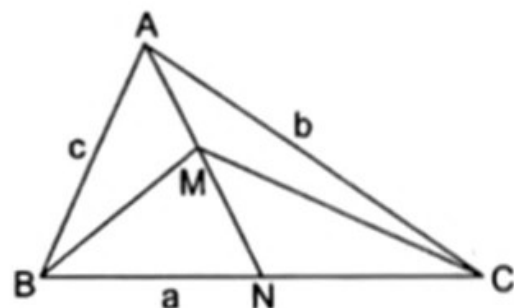


Hình 205

Trong $\triangle BMC$, có: $BM + MC > a$ (bất đẳng thức trong tam giác).

Vậy: $2(AM + BM + CM) > a + b + c$,

$$\text{hay: } AM + BM + CM > \frac{a + b + c}{2}. \quad (*)$$



Hình 206

Tia AM cắt BC tại N.

Trong $\triangle ANC$, có:

$$AN < AC + NC \text{ (bất đẳng thức trong tam giác).}$$

Trong $\triangle BMN$, có:

$$BM < BN + MN \text{ (bất đẳng thức trong tam giác)}$$

Suy ra: $AN + BM < AC + (BN + NC) + MN$.

Mà $AM = AN + MN$, vậy:

$$AM + MN + BM < AC + BC + MN,$$

$$\Leftrightarrow AM + BM < AC + BC. \quad (1)$$

Tiếp tục chứng minh như trên, ta có:

$$AM + CM < AM + BC. \quad (2)$$

$$BM + CM < AB + AC. \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2) và (3), ta có:

$$2(AM + BM + CM) < 2(AB + BC + AC)$$

$$\Leftrightarrow AM + BM + CM < AB + BC + AC. \quad (**)$$

Từ (*) và (**), ta có: $\frac{a + b + c}{2} < AM + BM + CM < a + b + c$.

18. (hình 207)

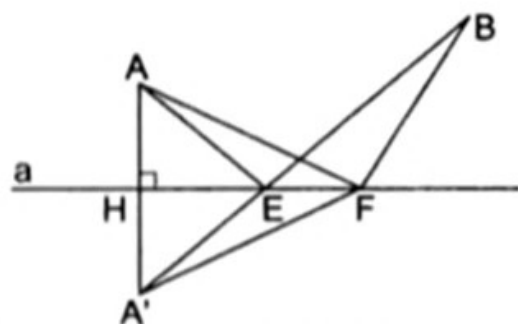
Xét $\triangle AHE$ và $\triangle A'HE$ vuông tại H, có:

HE chung;

$AH = HA'$ (giả thiết).

Vậy $\triangle AHE = \triangle A'HE$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow AE = A'E$.

$$\Rightarrow AE + EB = A'E + EB = A'B. \quad (1)$$



Hình 207

Tương tự, ta có $\triangle AFH = \triangle A'FH \Rightarrow FA = FA'$.

Vậy: $AF + FB = A'F + BF$. (2)

Trong $\triangle BA'F$, có: $A'B < BI < FA'$ (bất đẳng thức trong tam giác). (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có:

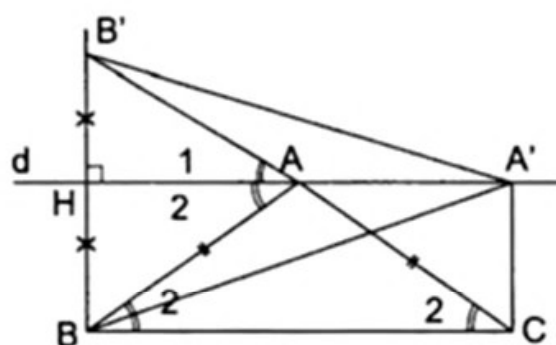
$$AF + BF > A'B = AE + BE \Leftrightarrow AF + BF > AE + BE.$$

19*. (hình 208)

Từ B hạ $BH \perp d$ và trên tia đối của tia HB lấy B' sao cho $HB' = HB$. Ta phải chứng minh: B', A, C thẳng hàng.

Thật vậy, ta dễ dàng chứng minh được:

$\triangle ABH = \triangle AB'H$ (hai cạnh góc vuông bằng nhau), suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.



Hình 208

Trong $\triangle ABC$ có: $\widehat{BAC} + \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = 180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác).

Mà $\widehat{B_2} = \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{BAC} + 2\widehat{B_2} = 180^\circ$. (1)

Lại có: $\left. \begin{array}{l} \widehat{B_2} = \widehat{A_1} \text{ (so le trong)} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (chứng minh trên)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{B_2} + \widehat{A_1} = 2\widehat{B_2}$. (2)

Thay (2) vào (1), ta có: $\widehat{BAC} + \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$.

Vậy: B', A, C thẳng hàng.

Mặt khác: $\triangle ABH = \triangle AB'H$ (chứng minh trên), nên $AB = AB'$.

Vậy $AB + AC = AB' + AC \Rightarrow A'B = AB$. (3)

Tương tự, ta chứng minh được: $\triangle A'BH = \triangle A'B'H$ (hai cạnh góc vuông).

Suy ra $A'B = A'B' \Rightarrow A'B + A'C = A'B' + A'C$. (4)

Trong $\triangle A'B'C'$, có: $A'B + A'C > A'C$ (bất đẳng thức trong tam giác).

Mà $B'C = B'A + AC$, thay vào (4), ta có: $A'B + A'C > B'A + AC$.

Thêm vào hai vế BC, ta được: $A'B' + A'C + BC > B'A + AC + BC$.

Lại theo (3), ta có: $A'B' + A'C + BC > AB + AC + BC$.

Vậy: $C_{\triangle A'BC} > C_{\triangle ABC}$.

20*. (hình 209)

a) Tương tự bài 19, ta dễ dàng chứng minh được $\triangle AHF = \triangle AHM$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow AE = AM$.

$\triangle BKM = \triangle BKF$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow BF = BM$.

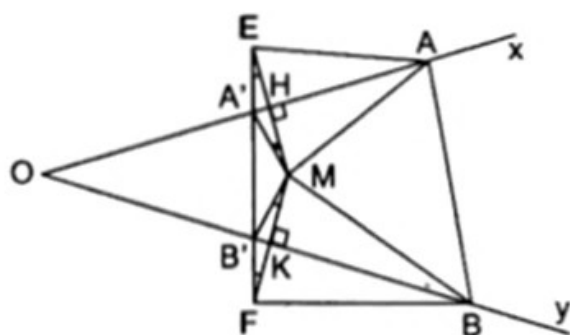
Vậy: $AE + BF = AM + BM$.

Thêm vào hai vế AB, ta có:

$$AE + AB + BF = AB + AM + BM = C_{\triangle ABM}.$$

b) Chu vi $\triangle ABM$ nhỏ nhất khi tổng $AE + AB + BF$ nhỏ nhất mà tổng ba đoạn đó nhỏ nhất khi chúng thẳng hàng, hay bằng EF.

Khi đó nối CF cắt Ox tại A', cắt Oy tại B', thì $C_{\triangle MA'B'} = EF$ là nhỏ nhất.



Hình 209

Chủ đề 2

1. (hình 210)

Từ $\hat{P} = 90^\circ$; $PM \perp PN$; $KI \perp PN$ (theo giả thiết). Vậy $PM \parallel IK \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{I}_1$ (so le trong). (1)

Lại có: $MI \parallel KH$ (giả thiết)

$\Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{K}_1$ (so le trong). (2)

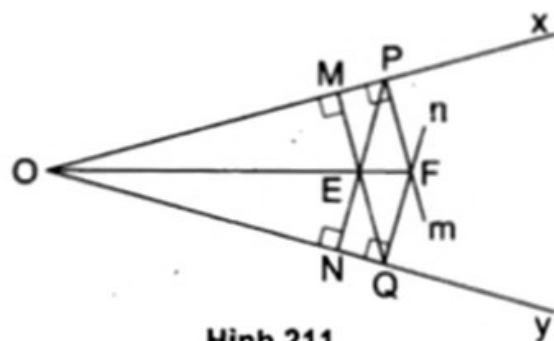
Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{K}_1$. (3)

Mà $MI \parallel KH \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{K}_2$ (đồng vị). (4) và $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{K}_2 \Rightarrow KH$ là tia phân giác của góc $\widehat{IKN}$.

2. (hình 211)

Xét $\triangle OEM$ và $\triangle OEN$ vuông tại M và N (theo giả thiết) $OM = ON$ (giả thiết) OE chung. Vậy $\triangle OEM = \triangle OEN$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông), suy ra: $\widehat{MOE} = \widehat{NOE}$. Vậy OE là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$. (1)



Hình 211

Xét $\triangle NOP$ và $\triangle MOQ$, có: $OM = ON$; $\widehat{POQ}$ chung.

Vậy $\triangle NOP = \triangle MOQ$ (cạnh góc vuông, góc nhọn), suy ra: $OP = OQ$.

Xét $\triangle OFP$ và $\triangle OFQ$, có: $OP = OQ$; OF chung.

Vậy $\triangle OFP = \triangle OFQ$ (cạnh góc vuông, cạnh huyền) $\Rightarrow \widehat{FOP} = \widehat{FOQ}$.

Vậy OF là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. (2)

Từ (1) và (2), có OE và OF đều là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ nên OE trùng OF .

Vậy O, E, F thẳng hàng.

3. (hình 212)

Oz và Oz' là tia đối nhau nên $z'z$ là đường thẳng chia mặt phẳng thành hai nửa.

Tia Oz là phân giác của $\widehat{xOy}$. Vậy Ox và Oy thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là $z'z$.

Có $\widehat{xOz} < 90^\circ$ ($\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$ tù);

$$\widehat{x'Ox} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{zOx'} < 180^\circ.$$

Vậy $\widehat{zOx'} < \widehat{zOz'}$ nên Ox' nằm giữa hai tia Oz' và Oz vậy Ox và Ox' thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ là $z'z$.

Chúng minh tương tự, ta có Oy' và Oy thuộc cùng nửa mặt phẳng thứ hai bờ là $z'z$.

Mặt khác, vì: $\widehat{x'Oy'} + \widehat{xOy} + \widehat{x'Ox} + \widehat{y'Oy} = 360^\circ$

$$\Leftrightarrow \widehat{x'Oy'} + \widehat{xOy} + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ.$$

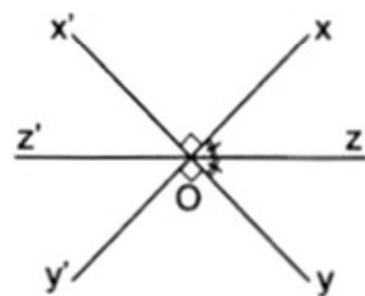
Vậy $\widehat{x'Oy'} + \widehat{xOy} = 180^\circ$, mà $\widehat{xOy} > 90^\circ$ (theo giả thiết) $\Rightarrow \widehat{x'Oy'} < 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{x'Oy'}$ là góc nhọn.

Ta có: $\widehat{x'Oz} = 180^\circ - (\widehat{x'Ox} + \widehat{xOz})$. (1)

$$\widehat{z'Oy'} = 180^\circ - (\widehat{y'Oy} + \widehat{yOz}). \quad (2)$$

Có: $\widehat{x'Ox} = \widehat{y'Oy} = 90^\circ$; $\widehat{xOz} = \widehat{yOz}$ (giả thiết), suy ra vế phải của (1) và (2) bằng nhau $\Rightarrow \widehat{x'Oz} = \widehat{z'Oy'}$. Vậy Oz' là tia phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$.



Hình 212

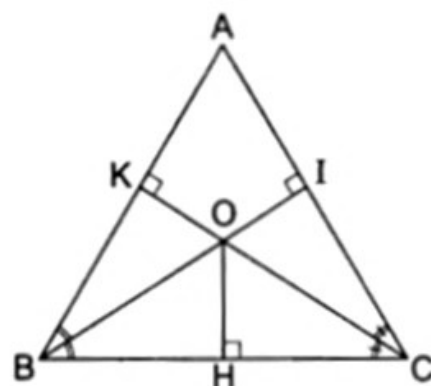
4. (hình 213)

a) Hạ $OK \perp OB$; $OI \perp AC$; $OH \perp BC$.

Ta có: O nằm tâm tia phân giác góc $\widehat{B}$ nên $OH = OK$ (tính chất).

O nằm tâm tia phân giác góc $\widehat{C}$ nên $OH = OI$ (tính chất).

Vậy: $OH = OK = OI \Rightarrow OK = OI$ thì O nằm trên đường phân giác góc $\widehat{A} \Rightarrow OA$ là tia phân giác của $\widehat{A}$.



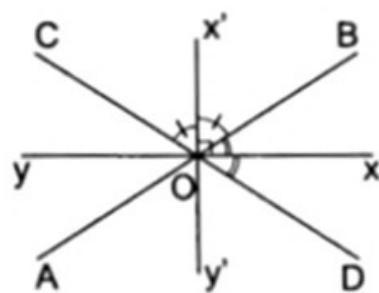
Hình 213

b) Theo ví dụ 1 (chương 2). Có $\widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$. Thay góc $\widehat{A} = 70^\circ$, ta có:

$$\widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{70^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{BOC} = 125^\circ.$$

5. (hình 214)

Xét điểm M nằm trong $\widehat{BOD}$ thỏa mãn $MI = MK$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện cách đều hai cạnh của góc là đường phân giác của $\widehat{BOD}$ (Ox).



Hình 214

Tương tự nếu các điểm M' nằm trong $\widehat{AOC}$ thỏa mãn $M'I' = M'K'$. Tập hợp các điểm M' là đường phân giác Oy của $\widehat{AOC}$.

$\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOD}$ là hai góc đối đỉnh, ta có thể chứng minh cho Ox và Oy nằm trên một đường thẳng.

Tương tự như vậy khi M' thuộc góc $\widehat{COB}$ và $\widehat{AOD}$ tập hợp là đường thẳng $x'y'$ là tia phân giác của $\widehat{COB}$ và $\widehat{AOD}$.

Mặt khác $\widehat{COB}$ và $\widehat{BOD}$ là hai góc kề bù nhau. Nên ta có thể chứng minh được hai đường phân giác $Ox' \perp Ox$.

Vậy tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O là hai đường thẳng $x'y' \perp xy$ tại O và $x'y', xy$ là các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD .

6*. (hình 215)

a) Từ $AB = BE$ (giả thiết), nên $\triangle ABE$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{A}_1$.

Mà $\widehat{E}_2 = \widehat{A}_1$ (so le trong $AB \parallel EP$), suy ra $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (cùng bằng góc $\widehat{A}_1$).

Vậy EA là tia phân giác của $\widehat{PEB}$.

Tương tự xét $\triangle ACF$ để suy ra $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$, từ đó FA là tia phân giác của $\widehat{PFC}$.

b) Từ A hạ $AI \perp PE$; $AH \perp BC$; $AK \perp PF$, ta có:

$$AI = AH \text{ (A nằm trên đường phân giác } \widehat{FEB} \text{)}. \quad (1)$$

$$AK = AH \text{ (A nằm trên đường phân giác } \widehat{PFC} \text{)}. \quad (2)$$

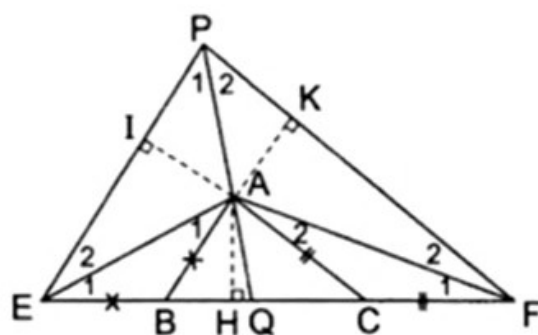
Từ (1) và (2), suy ra: $AI = AK$. Vậy A nằm trên đường phân giác của $\widehat{EPF}$. (tương tự bài 4 – Dạng 1 – Chủ đề 2 – Chương 3).

c) Kéo dài PA cắt BC tại Q, ta có:

$$\widehat{P}_1 = \widehat{BAQ} \text{ (góc đồng vị tạo bởi } AB \parallel PE \text{);}$$

$$\widehat{QAC} = \widehat{P}_2 \text{ (góc đồng vị tạo bởi } AC \parallel PF \text{).}$$

Mà $\widehat{P}_1 = \widehat{P}_2$, nên $\widehat{BAQ} = \widehat{QAC}$. Vậy AQ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.



Hình 215

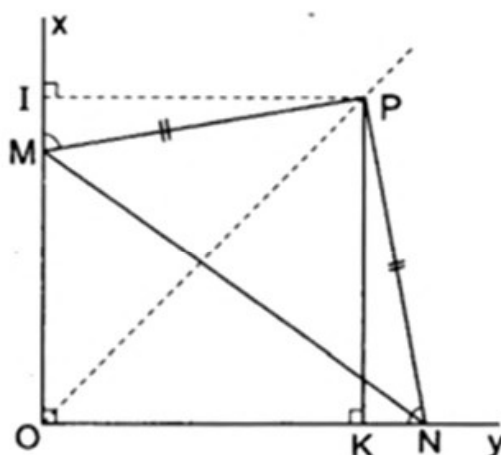
7. (hình 216)

a) Từ P hạ $PI \perp Ox$; $PK \perp Oy$.

Xét $\triangle MPI$ và $\triangle NPK$ vuông tại I và K, ta có: $PM = PN$ (giả thiết);

$\widehat{PMI} = \widehat{PNK}$ (vì $MI \perp NK$; $MP \perp NP$ (giả thiết) hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Vậy $\triangle MPI = \triangle NPK$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow PI = PK$ (cạnh tương ứng). Vậy P cách đều Ox và Oy.

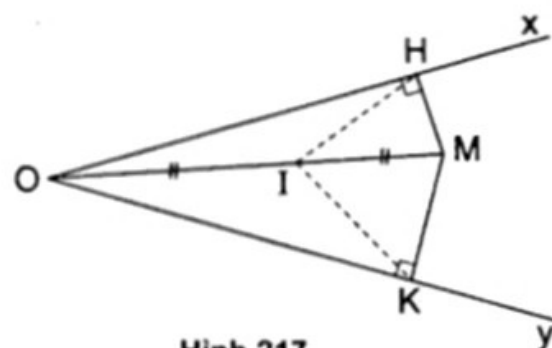


Hình 216

b) Khi M di động trên tia Ox thì N di động trên Oy mà $\triangle MPN$ không đổi thì $\triangle PMI$ luôn luôn bằng $\triangle PNK$. P luôn luôn cách đều Ox và Oy. Vậy P nằm trên tia phân giác $\widehat{xOy}$.

8. (hình 217)

GT	M nằm trong góc $\widehat{xOy}$, $MH \perp Ox$, $MK \perp Oy$, $OI = IM$.
KL	I nằm trên đường trung trực của OH , OK , KH , HM , KM , OM .



Hình 217

Chứng minh:

Xét $\triangle OMH$ và $\triangle OMK$ vuông tại H và K có:

IH và IK là hai đoạn thẳng qua đỉnh góc vuông và trung điểm cạnh huyền OM.

HI là trung tuyến ứng với cạnh huyền OM của $\triangle HOM$.

KI là trung tuyến ứng với cạnh huyền OM của $\triangle KOM$.

Theo bài 136, ta có: $IH = \frac{1}{2}OM$; $IK = \frac{1}{2}OM$.

Vậy: $IH = IK$ và $OI = IM$ (giả thiết) $= \frac{1}{2}OM$.

$$IH = IK = OI = IM.$$

(I)

Từ (I) có $OI = IH$ suy ra I nằm trên đường trung trực của OH (định lí đảo)

Từ (I) có $OI = IK$ suy ra I nằm trên đường trung trực của OK (định lí đảo)

Từ (I) có $IH = IK$ suy ra I nằm trên đường trung trực của HK (định lí đảo)

Từ (I) có $IH = IM$ suy ra I nằm trên đường trung trực của HM (định lí đảo)

Từ (I) có $IK = IM$ suy ra I nằm trên đường trung trực của KM (định lí đảo)

Từ (I) có $OI = IM$ suy ra I nằm trên đường trung trực của OM (định lí đảo)

9. (hình 218)

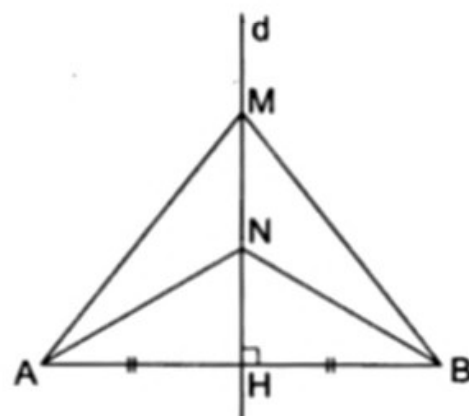
a) Xét $\triangle AMN$ và $\triangle BMN$, có:

MN chung

$MA = MB$ (M nằm trên đường trung trực của AB)

$NA = NB$ (MN là đường trung trực của AB).

Vậy $\triangle AMN = \triangle BMN$ (c.c.c.).



Hình 218

b) Xét $\triangle ANH$ và $\triangle BNH$, có:

NH chung

$NA = NB$ (tính chất đường trung trực)

$AH = HB$ (MN là đường trung trực của AB).

Vậy $\triangle ANH = \triangle BNH$ (c.c.c), suy ra: $\widehat{ANH} = \widehat{BNH}$.

Vậy NH là tia phân giác của $\widehat{ANB}$.

10. (hình 219)

a) Nối MB, ta có M nằm trên đường trung trực của AB (giả thiết) $\Rightarrow MA = MB$ (tính chất). (1)

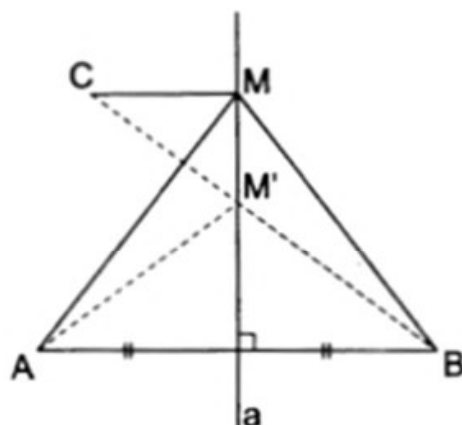
Xét $\triangle CMB$ có: $MC + MB > BC$ (bất đẳng thức trong tam giác). (2)

Thay (1) vào (2), ta có: $MC + MA > BC$.

b) Với ba điểm A, B, C cố định thì đoạn thẳng AB cố định nên đường trung trực của AB cũng cố định.

Điểm M di động trên đường thẳng a thì tổng độ dài của M đến hai mút của BC luôn luôn lớn hơn BC. Tổng $MB + MC$ nhỏ nhất là bằng độ dài BC. Vậy M' là giao điểm của BC đường thẳng a (C, M' , B thẳng hàng) thì ta có:

$M'C + M'B = BC$, hay $M'C + M'A = BC$.



Hình 219

11. (hình 220)

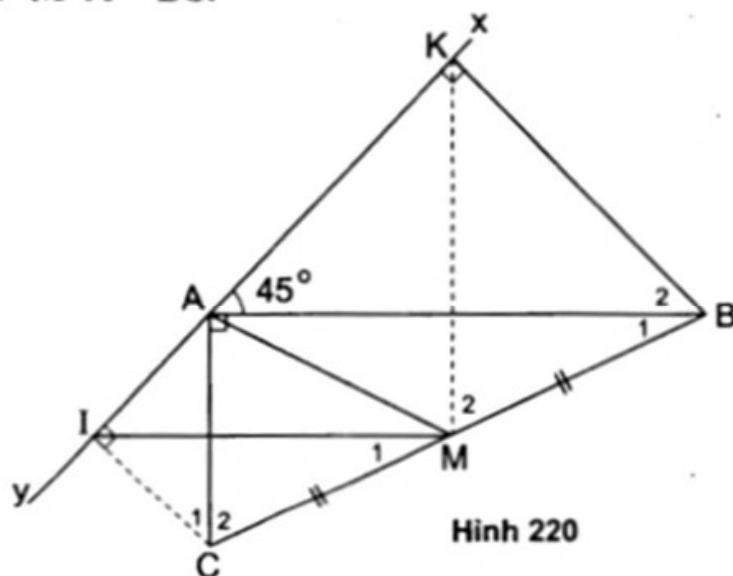
GT	$\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, $\widehat{BAX} = 45^\circ$, $BK \perp xy$, $CI \perp xy$, $CM = MB$.
----	---

KL	a) MI, MK là đường trung trực của AC, BC. b) $\widehat{IMK} = 90^\circ$.
----	--

Chứng minh:

a) Theo bài 10 – Ôn tập chương 2, ta có: $AM = \frac{1}{2} BC$.

Vậy: $AM = MB = MC$, $MA = MB$ nên M nằm trên đường trung trực của AB.



Hình 220

Xét $\triangle AKB$, có:

$$\widehat{K} = 90^\circ \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{KAB} = 45^\circ \text{ (giả thiết).}$$

$\Rightarrow \triangle AKB$ cân tại $K \Rightarrow KA = KB$, vậy K nằm trên đường trung trực của AB .

Đường thẳng KM có hai điểm nằm trên đường trung trực của AB vậy KM trùng với đường trung trực của AB . (Đpcm)

Tương tự, xét $\triangle AIC$ để suy ra I và M nằm trên đường trung trực AC .

b) $AB \perp AC$ (giả thiết);

$IM \perp AC$ (IM là đường trung trực của AC).

$$\Rightarrow AB \parallel IM \text{ (cùng vuông góc với } AC) \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{M}_1 \text{ (đồng vị).} \quad (1)$$

$AC \perp AB$ (giả thiết); $MK \perp AB$ (đường trung trực).

$$\text{Suy ra } AC \parallel MK \text{ (cùng vuông góc với } AB) \Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{M}_2 \text{ (đồng vị).} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } \widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2.$$

$$\text{Mà } \widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ \text{ (hai góc nhọn của tam giác vuông } ABC).$$

$$\text{Vậy: } \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IKM} = 90^\circ.$$

12. (hình 221)

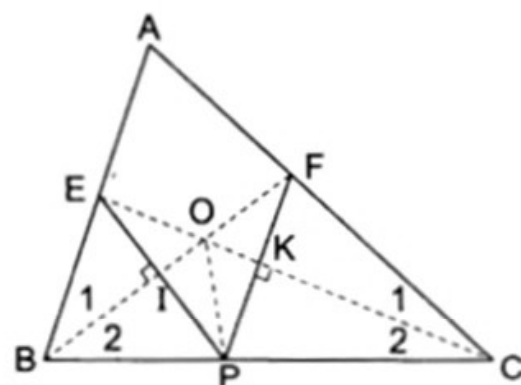
$$\text{GT} \quad \triangle ABC, \widehat{A} \text{ tù, } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2, \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2,$$

$$EF \perp OB, PF \perp OC.$$

$$\text{KL} \quad \text{a) } OB, OC \text{ là trung trực của } EP, PE.$$

$$\text{b) } BE + CF = BC.$$

$$\text{c) Khi } E \text{ di chuyển trên } AB \text{ thì trung trực } EF \text{ qua một điểm cố định.}$$



Hình 221

Chứng minh:

a) Xét $\triangle BEI$ và $\triangle BPI$ vuông tại I , có:

$$BI \text{ chung, } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (giả thiết).}$$

$$\text{Vậy: } \triangle BEI = \triangle BPI \text{ (cạnh góc vuông, góc nhọn)} \Rightarrow BE = BP \text{ và } EI = IP.$$

$$BO \text{ qua trung điểm và vuông với } EP \Rightarrow BO \text{ là trung trực của } EP \text{ (định nghĩa).}$$

Tương tự, ta chứng minh được $\triangle CFK = \triangle CPK$ (cạnh góc vuông, góc nhọn).
Suy ra OC là trung trực của PF.

b) Từ: $BE = BP$ ($\triangle BEI = \triangle BPI$)

$$CF = CP \text{ (} \triangle PCK = \triangle FCK \text{)}.$$

$$\Rightarrow BE + CF = BP + PC = BC. \text{ (Đpcm)}$$

c) O nằm trên trung trực của EF nên $OE = OP$. (1)

O nằm trên trung trực của FP nên $OF = OP$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $OE = OP = OF$.

Mà $OE = OP$ nên O nằm trên đường trung trực của EF (định lý đảo).

$\triangle ABC$ cố định nên O cố định, vậy đường trung trực của EF đi qua O cố định.

Chủ đề 3

1. (hình 222)

a)	GT	$\triangle ABC$; $AB = AC$, trung tuyến BN, CM.
	KL	$BN = CM$.

Chứng minh:

$\triangle NBC$ và $\triangle MCB$, có:

$$AB = AC \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} \Rightarrow BM = CN.$$

$$\hat{B} = \hat{C} \text{ (tính chất tam giác cân).}$$

Cạnh BC chung.

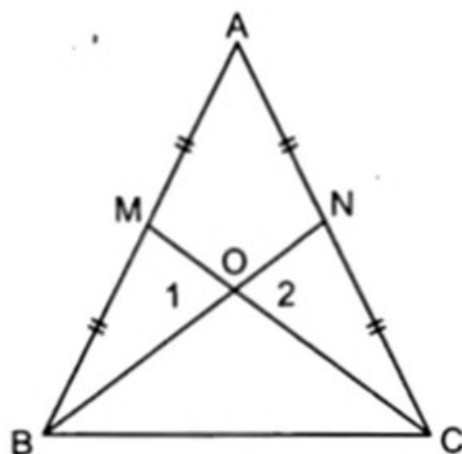
$$\text{Vậy } \triangle NBC = \triangle MCB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BN = CM.$$

b) Đảo lại:

GT	$\triangle ABC$ trung tuyến BN, CM, $BN = CM$.
KL	$BA = AC$.

Chứng minh:

Ta có BM và CN cắt nhau tại O.



Hình 222

Xét $\triangle BOM$ và $\triangle CON$, có:

$$BO = \frac{2}{3}BN. \quad (1)$$

$$ON = \frac{1}{3}BN. \quad (2)$$

$$OC = \frac{2}{3}CM. \quad (3)$$

$$OM = \frac{1}{3}CM \text{ (tính chất 3 đường trung tuyến)}. \quad (4)$$

Mà $BN = CM$ (giả thiết). (5)

Từ (1), (3) và (5), ta có: $BO = CO$.

Từ (2), (4) và (5), ta có: $ON = OM$; $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (đối đỉnh).

Vậy $\triangle BOM = \triangle CON$ (c.g.c) suy ra: $BM = CN$.

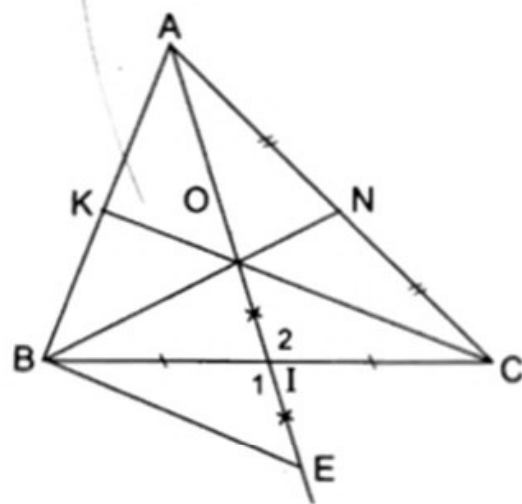
Mặt khác: $BM = \frac{AB}{2}$; $CN = \frac{AC}{2} \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} \Rightarrow AB = AC$.

Vậy $\triangle ABC$ cân tại A (theo định nghĩa).

2. (hình 223)

GT $\triangle ABC$, trung tuyến AI, BN, cắt nhau tại O; $E \in OA$, $OI = IE$.

KL a) Độ dài ba cạnh của $\triangle ABC$ bằng $\frac{2}{3}$ độ dài cạnh $\triangle ABC$.
b) BN, CK, AI thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.



Hình 223

Chứng minh:

a) O là trọng tâm $\triangle ABC$ (giả thiết), suy ra AI trung tuyến.

Xét $\triangle BOE$, có: $BO = \frac{2}{3}BN$ (tính chất). (1)

Có: $ON = \frac{1}{3}BN$; $OI = \frac{1}{3}AI$.

Mà $OI = IE$ (giả thiết) $\Rightarrow OI = IE = \frac{1}{3} AI$.

$$\text{Vậy } OI + IE = \frac{1}{3} AI + \frac{1}{3} AI = \frac{2}{3} AI \Rightarrow OE = \frac{2}{3} AI. \quad (2)$$

Xét $\triangle BIE$ và $\triangle CIO$, có:

$$OI = IE; BI = IC \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{I_1} = \widehat{I_2} \text{ (đối đỉnh).}$$

$$\text{Vậy } \triangle BIE = \triangle CIO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BE = CO.$$

$$\text{Mà } CO = \frac{2}{3} CK \text{ (tính chất), vậy } BE = \frac{2}{3} CK. \quad (3)$$

Vậy $\triangle BOE$ có ba cạnh:

$$OE = \frac{2}{3} AI; BO = \frac{2}{3} BN; BE = \frac{2}{3} CK \text{ (theo (1) (2) (3))} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

b) $\triangle BOE$ tồn tại ba đoạn OE, BO, BE thỏa mãn bất đẳng thức trong tam giác:

$$BE - OE < OB < BE + OE \Leftrightarrow \frac{2}{3} CK - \frac{2}{3} AI < \frac{2}{3} BN < \frac{2}{3} CK + \frac{2}{3} AI.$$

$$\Leftrightarrow CK - AI < BN < CK + AI.$$

Hay ba đoạn thẳng AI, CK và BN thỏa mãn bất đẳng thức trong tam giác.

Vậy tồn tại một tam giác có ba cạnh là độ dài của ba đoạn thẳng đó.

3. (hình 224)

GT $\triangle ABC, AB = AC; AH \perp BC;$

$AH = HM; BC = CN.$

KL a) C là trọng tâm của $\triangle AMN.$

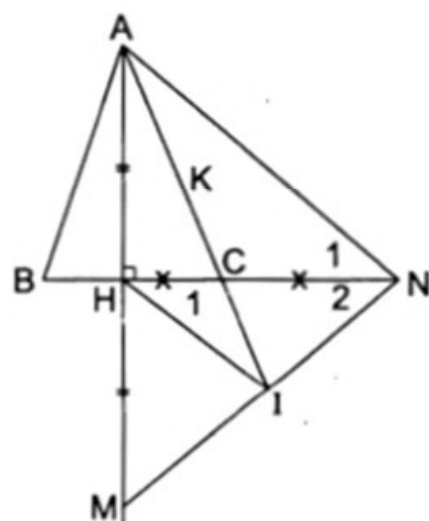
b) $HI \parallel AN.$

Chứng minh:

a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ vuông tại H , có:

$$AB = AC; \widehat{B} = \widehat{C} \text{ (tính chất tam giác cân).}$$

$$\text{Vậy } \triangle ABH = \triangle ACH \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)} \\ \Rightarrow BH = CH.$$



Hình 224

Xét $\triangle ANM$, có: HN là trung tuyến ($AH = HM$).

Mà: $BC = CN$ (giả thiết)

$BH = HC$ (chứng minh trên).

$$\text{Suy ra } HC = \frac{1}{2}CN \Rightarrow CN = 2HC \Rightarrow CN = \frac{2}{3}HN.$$

Vậy C là trọng tâm $\triangle ANM$.

Khi đó AC cũng là trung tuyến thuộc cạnh MN nên: $MI = IN$. (1)

b) Ta dễ dàng chứng minh được:

$\triangle AHN = \triangle MHN$ (hai cạnh góc vuông),

$$\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2. \quad (2)$$

Trong $\triangle MHN$ vuông tại H , có: $MI = IN$ (theo (1)).

Vậy HI là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên $HI = \frac{1}{2}MN$ (Bài 10 – Ôn tập chương 2) $\Rightarrow HI = IN$.

$$\Rightarrow \triangle HIN \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{N}_2 \text{ (tính chất tam giác cân).} \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta có: $\widehat{N}_1 = \widehat{H}_1$ (cùng bằng $\widehat{N}_2$).

Vậy $HI \parallel AN$ (hai góc so le trong bằng nhau).

4*. (hình 225)

a) G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên:

$$GI = \frac{1}{3}AI \text{ (tính chất).}$$

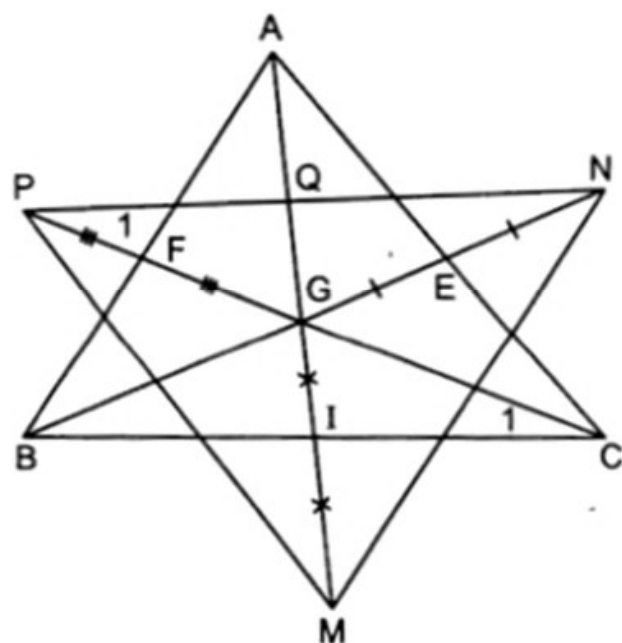
Mà $GI = IM$ nên:

$$GM = GA = \frac{2}{3}AI. \quad (1)$$

Tương tự, ta có:

$$GN = GB = \frac{2}{3}BE. \quad (2)$$

$$GP = GC = \frac{2}{3}CF. \quad (3)$$



Hình 225

Xét $\triangle PGN$ và $\triangle CGB$, có:

$$GP = GC \text{ (theo (3))}$$

$$GN = GB \text{ (theo (2))}$$

$$\widehat{PGN} = \widehat{CGB} \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\triangle PGN = \triangle CGB$ (c.g.c), suy ra: $PN = BC$. (4)

$$\widehat{P_1} = \widehat{C_1} \text{ (góc tương ứng).} \quad (5)$$

Tương tự, ta chứng minh được:

$$\triangle GPM = \triangle GCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow PM = AC. \quad (6)$$

$$\triangle GNM = \triangle GBA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MN = AB. \quad (7)$$

Vậy $\triangle ABC = \triangle PNM$ (c.c.c) (theo (4), (6) và (7)).

b) PN cắt AM tại Q . Xét $\triangle GPQ$ và $\triangle GCI$, có:

$$GP = GC \text{ (theo (3));}$$

$$\widehat{D_1} = \widehat{C_1} \text{ (theo (5));}$$

$$\widehat{PGQ} = \widehat{CGI} \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\triangle GPQ = \triangle GCI$ (c.g.c), suy ra:

$$PQ = IC. \quad (8)$$

$$GQ = GI. \quad (9)$$

Từ (8): $PQ = IC$, mà $IC = \frac{1}{2} BC$; $PN = BC \Rightarrow PQ = \frac{1}{2} PN$, hay $PQ = QN$.

Vậy MQ là trung tuyến thuộc cạnh PN của $\triangle PNM$.

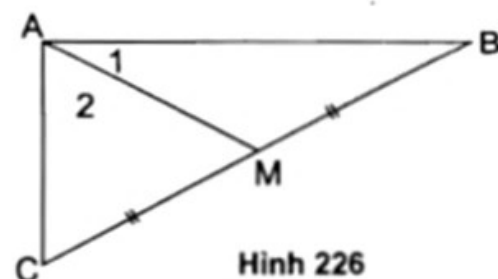
Từ (9): $QG = GI$, mà $GI = IM$ (giả thiết) $\Rightarrow QG = GI = IM$, hay:

$$QG = \frac{1}{3} QM; GM = \frac{2}{3} QM.$$

Vậy G là trọng tâm của $\triangle PNM$.

5*. (hình 226)

GT	$\triangle ABC$, $CM = MB$, $AM = \frac{1}{2} BC$.
KL	$\widehat{BAC} = 90^\circ$.



Chứng minh:

$$AM = \frac{1}{2}BC \text{ (giả thiết);}$$

$$CM = MB.$$

Vậy: $AM = MC = MB$.

$$\Delta AMB, \text{ có: } MA = MB \text{ nên } \Delta AMB \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B}. \quad (1)$$

$$\Delta AMC, \text{ có: } MA = MC \text{ nên } \Delta AMC \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{C}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{B} + \widehat{C}.$$

$$\text{Mà: } \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \text{ (tổng các góc trong } \Delta ABC \text{)}.$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{A_1} + \widehat{A_2}) + (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ. \text{ Vậy: } \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

6*. (hình 227)

a) Trên tia đối của tia IA lấy điểm D sao cho $ID = IA$.

Xét ΔBID và ΔCIA , có:

$$BI = IC; ID = IA \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{BID} = \widehat{CIA} \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\Delta BID = \Delta CIA$ (c.g.c)

$$\Rightarrow BD = AC \text{ (cạnh tương ứng).}$$

(1)

Trong ΔABC , có:

$$AB - BD < AD < AB + BD \text{ (bất đẳng thức trong tam giác)}$$

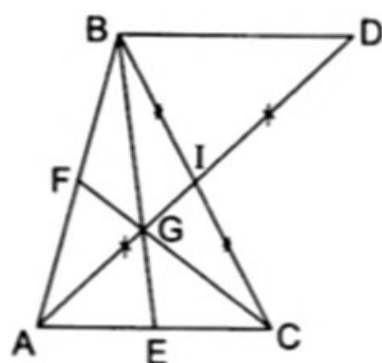
$$\text{Theo (1), ta có: } AB - AC < AD < AB + AC.$$

Thay $AD = 2AI$, ta được:

$$AB - AC < 2AI < AB + CA \Leftrightarrow \frac{AB - CA}{2} < AI < \frac{AB + CA}{2}. \quad (2)$$

$$\text{b) Tương tự với đường trung tuyến } BE, \text{ ta có: } BE < \frac{AB + BC}{2}. \quad (3)$$

$$\text{Tương tự với đường trung tuyến } CF, \text{ ta có: } CF < \frac{AC + BC}{2}. \quad (4)$$



Hình 227

Từ (2), (3) và (4), ta có:

$$AI + BE + CF < \frac{2AB + 2BC + 2AC}{2}$$

$$\Leftrightarrow AI + BE + CF < AB + BC + AC.$$

Xét $\triangle BHG$, có: $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức trong tam giác).

$$\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC \Rightarrow \frac{2}{3}(BE + CF) > BC \Rightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC. \quad (5)$$

$$\text{Tương tự: } \triangle GAB, \text{ có: } AI + BE > \frac{3}{2}AB. \quad (6)$$

$$\triangle GAC \text{ có: } AI + CF > \frac{3}{2}AC. \quad (7)$$

Từ (5), (6) và (7) suy ra:

$$2BE + 2CF + 2AI > \frac{3}{2}(AB + AC + BC)$$

$$\Leftrightarrow 2(BE + CF + AI) > \frac{3}{2}(AB + AC + BC)$$

$$\Leftrightarrow BE + CF + AI > \frac{3}{4}(AB + AC + BC).$$

$$\text{Vậy: } \frac{3}{4}C_{\triangle ABC} < BE + CF + AI < C_{\triangle ABC}. \quad (\text{Đpcm})$$

7. (hình 228)

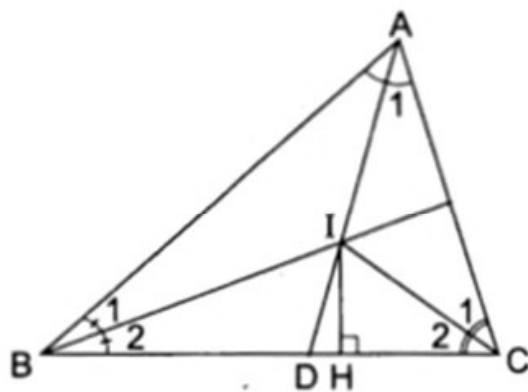
GT	$\triangle ABC \text{ (} AC > AB \text{)}, \widehat{A_1} = \widehat{A_2},$ $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}, \widehat{C_1} = \widehat{C_2}, IH \perp BC.$
----	--

KL	$\widehat{BIH} = \widehat{CID}.$
----	----------------------------------

Chứng minh:

Xét $\triangle BIH$ có $\widehat{H} = 90^\circ$.

$$\text{Vậy: } \widehat{BIH} = 90^\circ - \widehat{B_2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} \quad (\text{BI là tia phân giác}). \quad (1)$$



Hình 228

Xét $\triangle AIC$ có $\widehat{DIC}$ là góc ngoài: $\widehat{DIC} = \widehat{A}_1 + \widehat{C}_1$.

$$\begin{aligned} \text{Mà } \widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 &= \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} \text{ (AI và CI là tia phân giác)} \\ &= \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{BIH} = \widehat{DIC} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$.

8. (hình 229)

Cách 1: Hạ $MN \perp AB$; $MH \perp AC$.

Vì AM là tia phân giác $\widehat{A}$ nên $MN = MH$ (tính chất).

Mà $\triangle BMN = \triangle CMH$ (vuông tại N và H; $BM = MC$; $MN = MH$) (cạnh huyền, cạnh góc vuông).

Suy ra: $\widehat{B} = \widehat{C}$ vậy $\triangle ABC$ cân.

Cách 2: Trên tia đối của tia MA, lấy điểm D, sao cho $MD = MA$, ta có:

$\triangle ABM = \triangle DCM$ (do $AM = MD$, $BM = MC$ và $\widehat{AMB} = \widehat{CMB}$).

Suy ra: $\widehat{A}_1 = \widehat{D}$ và $AB = CD$. (3)

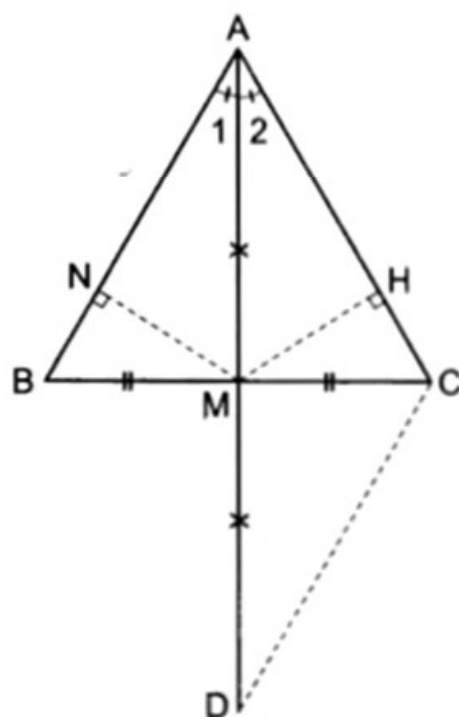
Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ nên $\widehat{A}_2 = \widehat{D}$ (cùng bằng $\widehat{A}_1$).

Vậy $\triangle ACD$ cân tại C (hai góc ở đáy bằng nhau), nên $AC = CD$. (4)

Suy ra: $AB = AC$ (từ (3) và (4) cùng bằng CD). Vậy $\triangle ABC$ cân.

9. (hình 230)

GT	$\triangle ABC$, $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $AF \parallel AB$, $EP \parallel BC$.
KL	$AF = AP$.



Hình 229

Chứng minh:

$\triangle AFE$, có: $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ ($EF \parallel AB$);

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (theo giả thiết).

Vậy $\widehat{A_2} = \widehat{E_1} \Rightarrow \triangle AFE$ cân tại F

$\Rightarrow FA = FE$.

(1)

Nối PF, xét $\triangle APF$ và $\triangle EFP$, có:

$\widehat{APF} = \widehat{PFE}$ (so le trong $AB \parallel EF$)

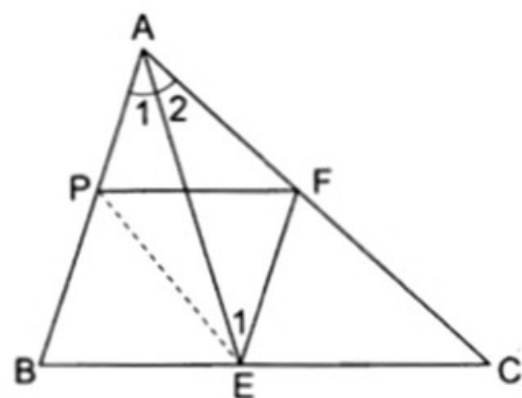
PE chung

$\widehat{PFA} = \widehat{FPE}$ (so le trong $PE \parallel AC$).

$\Rightarrow \triangle APF = \triangle EFP$ (g.c.g), suy ra: $AP = EF$.

(2)

Từ (1) và (2), ta có: $AF = AP$.



Hình 230

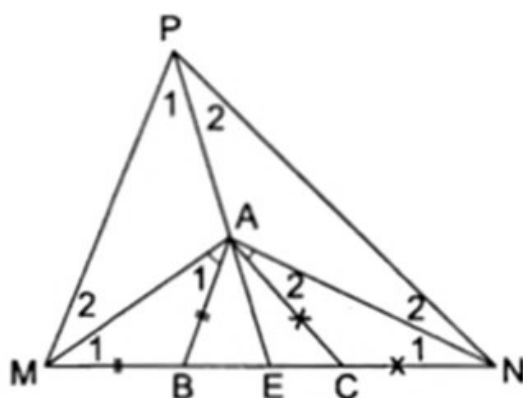
10. (hình 231)

GT $\triangle ABC$, $BM = BA$, $CN = CA$

$MP \parallel AB$, $NP \parallel AC$.

KL a) $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, $\widehat{N_1} = \widehat{N_2}$.

b) PA là tia phân giác của $\widehat{MPN}$, $\widehat{BAC}$.



Hình 231

Chứng minh:

a) $\triangle ABM$, có $AB = BM$ (theo giả thiết) $\Rightarrow \triangle ABM$ cân tại B.

Suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$.

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{M_2}$ (góc so le trong tạo bởi $AB \parallel MP$).

Vậy: $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (cùng bằng $\widehat{A_1}$), nên MA là tia phân giác của $\widehat{PMB}$.

Tương tự, $\triangle ACN$ cân, nên: $\widehat{A_2} = \widehat{N_1}$; $\widehat{A_2} = \widehat{N_2}$ (so le) $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{N_2}$.

Vậy NA là tia phân giác của $\widehat{PNC}$.

b) Xét $\triangle MPN$ có:

MA là tia phân giác của $\widehat{M}$;

NA là tia phân giác của $\widehat{N}$.

Vậy PA phải là tia phân giác của $\widehat{MPN}$ (ba đường phân giác đồng quy)

$$\Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{P}_2.$$

Kéo dài PA cắt BC tại E , ta có: $\widehat{EAC} = \widehat{P}_2$ (đồng vị $AC \parallel PN$) và $\widehat{BAE} = \widehat{P}_1$ (đồng vị $AB \parallel PM$), mà $\widehat{P}_1 = \widehat{P}_2$ (theo chứng minh trên).

Vậy $\widehat{EAC} = \widehat{BAE} \Rightarrow PA$ cũng là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

11. (hình 232)

GT	$\triangle ABC$ đều, xy qua B và song song với AC , $x'y'$ qua C và song song với AB , $CN \perp AB$, $BM \perp AC$, $CN \cap xy = E$, $BM \cap x'y' = F$, $xy \cap x'y' = P$.
KL	a) BF, CE, AI đồng quy. b) AI, BP, PC đồng quy.

Chứng minh:

a) $\triangle BMC$ có: $\widehat{M} = 90^\circ$; $\widehat{C} = 60^\circ$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = 30^\circ.$$

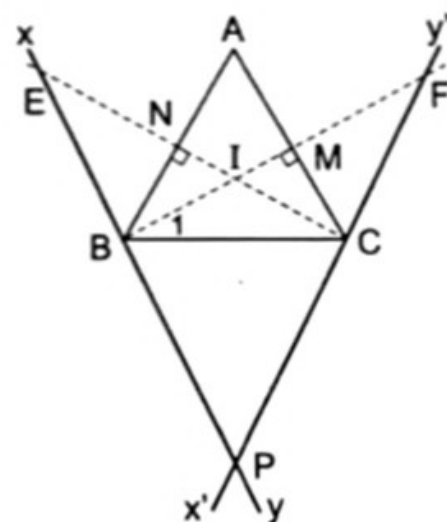
Mà $\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \widehat{B}$ nên BF là phân giác của góc $\widehat{B}$.

Tương tự, xét $\triangle BNC$ ta cũng chứng minh được CE là phân giác của $\widehat{C}$.

Trong $\triangle ABC$ có BM và CN là hai đường phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I , hay AI là phân giác của $\widehat{A}$.

Vậy BF, CE, AI đồng quy.

b) $\left. \begin{array}{l} BF \perp AC \text{ (giả thiết)} \\ PE \parallel AC \text{ (giả thiết)} \end{array} \right\} \Rightarrow BF \perp PE.$



Hình 232

Mà BF là tia phân giác $\widehat{B}$ (theo chứng minh trên), trong đó $\widehat{B}$ và $\widehat{CBm}$ là góc kề bù nhau, vậy BP cũng là tia phân giác của góc $\widehat{CBm}$.

Tương tự như trên, ta có: CP là tia phân giác của góc $\widehat{BCn}$.

$\triangle ABC$ có xy và x'y' là hai đường phân giác của hai góc ngoài $\widehat{CBm}$ và $\widehat{BCn}$.

AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ không kể với nó phải đồng quy tại P.

12. (hình 233)

GT $\triangle ABC$, $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$,

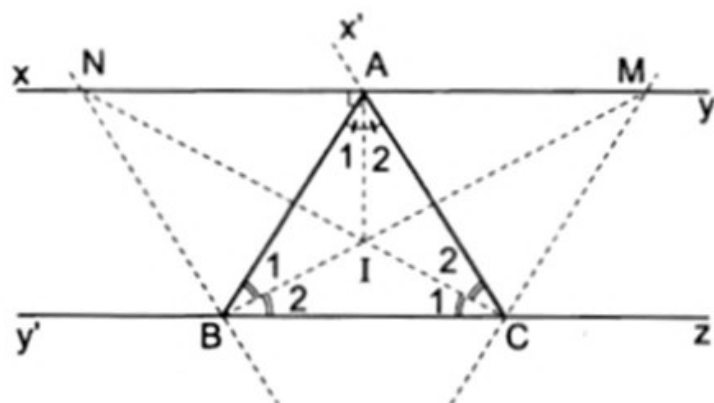
xy $\perp$ AI, $BI \cap xy = M$, $CI \cap xy = N$.

KL a) $BN \perp BM$, $CN \perp CM$.

b) BN, CM, AI đồng quy.

Chứng minh:

a) AI là tia phân giác góc $\widehat{A}$ mà xy $\perp$ AI vậy xy là tia phân giác $\widehat{BAx'}$ (góc kề bù với $\widehat{A}$, tức là góc ngoài của $\triangle ABC$ tại A).



Hình 233

N là giao của đường phân giác góc $\widehat{C}$ và góc ngoài tại A, vậy BN là tia phân giác của $\widehat{ABx'}$ (góc ngoài tại B). Suy ra $BN \perp BM$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù nhau).

Chứng minh tương tự, ta vẽ góc ngoài tại C nên $CM \perp CN$.

b) NB là tia phân giác góc ngoài tại B;

CM là tia phân giác góc ngoài tại C.

AI là tia phân giác góc trong tại A (không kể bù với $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$).

Vậy BN, CM, AI đồng quy.

13. (hình 234)

Xét $\triangle OMN$ có: MI là tia phân giác của $\widehat{M}$

$MK \perp MI$ (giả thiết).

Vậy MK là tia phân giác của $\widehat{NMx}$ (góc kề bù với $\widehat{M}$) và góc ngoài của $\triangle OMN$ tại M.

Tương tự, xét tại đỉnh N, có:

NI là tia phân giác của $\widehat{N}$

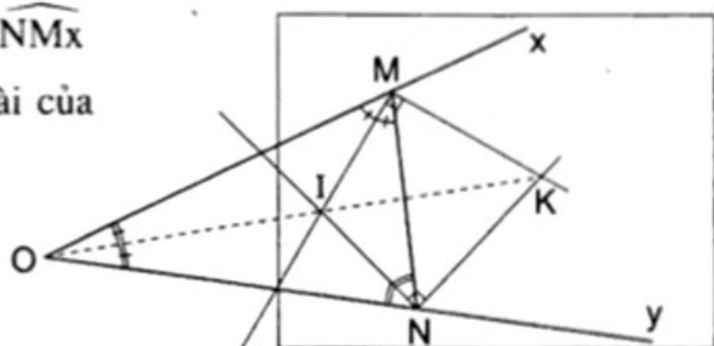
$NI \perp NK$ (giả thiết).

Vậy NK phải là tia phân giác của

$\widehat{yNM}$ (góc kề bù với $\widehat{N}$) và góc ngoài của $\triangle OMN$ tại N.

Từ đó, ta có K là giao điểm của hai đường phân giác hai góc ngoài tại M và N.

Vậy OK là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$, hay OI và OK trùng nhau.

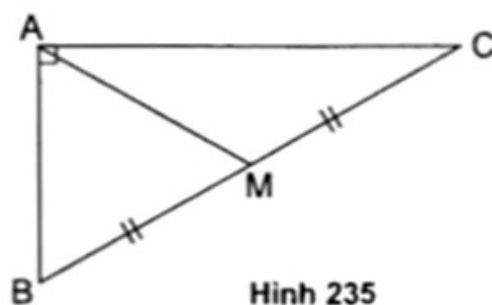


Hình 234

14. (hình 235)

$\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. Lấy M là trung điểm của cạnh BC.

Theo bài 10 – Ôn tập chương 2, ta chứng minh được: $MA = MB = MC = \frac{1}{2} BC$.



Hình 235

Do $MA = MB$, vậy M nằm trên đường trung trực của AB

Do $MA = MC$, vậy M nằm trên đường trung trực của AC

Do $MB = MC$, vậy M nằm trên đường trung trực của BC.

Vậy M là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle ABC$.

15. (hình 236)

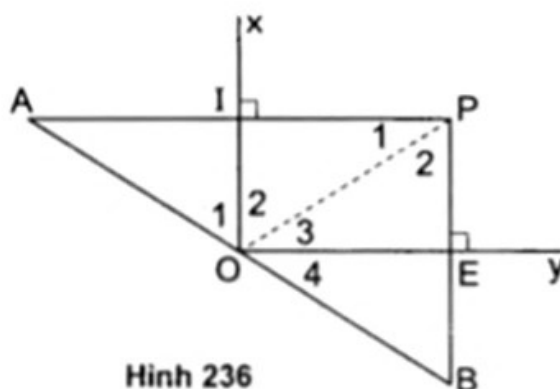
GT P nằm trong góc $\widehat{xOy} = 90^\circ$.

AI = IP; $AP \perp Ox$;

BE = EP; $BP \perp Oy$.

KL a) A, O, B thẳng hàng.

b) O giao điểm của ba đường trung trực $\triangle APB$.



Hình 236

Chứng minh:

a) Xét ΔAOP có:

$$Ox \text{ là đường trung trực của } AP \text{ nên } OA = OP. \quad (1)$$

ΔAOP cân tại $O \Rightarrow OI$ vừa là trung trực vừa là phân giác của $\widehat{O}$

$$\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2. \quad (2)$$

Tương tự, xét ΔBOP có:

$$Oy \text{ là trung trực của } BP, \text{ nên } OB = OP. \quad (3)$$

$$OE \text{ vừa là trung trực vừa là phân giác} \Rightarrow \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4. \quad (4)$$

Từ (2) và (4), ta có:

$$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_4 = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3.$$

$$\text{Mà } \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ \text{ (giả thiết).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{O}_1 + \widehat{O}_4 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^\circ.$$

Điều đó chứng tỏ A, O, B thẳng hàng.

b) Theo chứng minh câu a):

$$\left. \begin{array}{l} \Delta AOP \text{ cân nên } \widehat{A} = \widehat{P}_1 \\ \Delta BOP \text{ cân nên } \widehat{B} = \widehat{P}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{P}_1 + \widehat{P}_2.$$

Do A, O, B thẳng hàng (chứng minh câu a), nên AB là một cạnh của ΔAPB ,

$$\text{từ đó: } \widehat{A} + \widehat{B} + (\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2) = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{P}_1 + \widehat{P}_2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Vậy ΔAPB vuông tại $\widehat{P}$, có O là trung điểm cạnh huyền AB .

Theo bài 14 dạng 3 trên, O là giao điểm của ba đường trung trực của ΔAPB .

16. (hình 237)

GT	$\Delta ABC, \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2, H \in IC, HK // AI$ cắt AB và AC tại E, F .
KL	a) AK là trung trực của EF b) $AK \perp AI$ c) H chuyển động AK cố định.

Chứng minh:

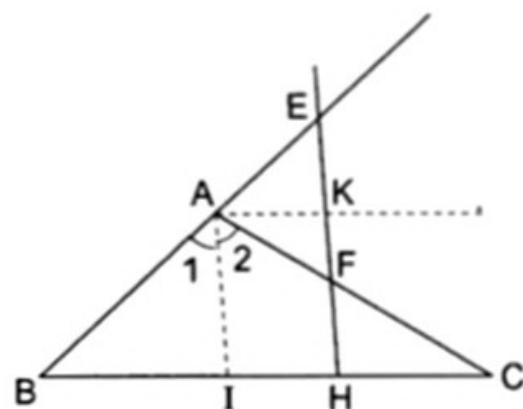
a) Xét $\triangle AEF$, có:

$$\widehat{E} = \widehat{A_1} \text{ (đồng vị } AI \parallel HE);$$

$$\widehat{F} = \widehat{A_2} \text{ (so le trong } AI \parallel HE);$$

$$\text{Mà } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (giả thiết)} \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F}$$

$\Rightarrow \triangle AEF$ cân tại A. (Đpcm)



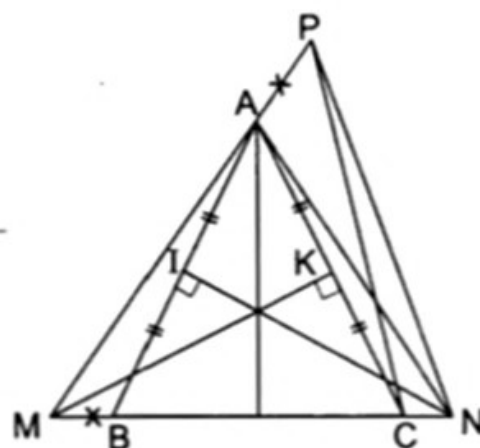
Hình 237

b) Gọi K là giao của EH và đường trung trực của EF. $\triangle AEF$ cân tại A nên AK vừa là đường trung trực, vừa là đường phân giác của góc $\widehat{EAF}$. Mà $\widehat{BAC}$ và $\widehat{CAF}$ là hai góc kề bù có AI và AK là hai tia phân giác nên $AI \perp AK$.

c) $\triangle ABC$ cố định nên đường phân giác AI cố định, $AK \perp AI$ nên AI cũng cố định. Điểm H chuyển động trên IC thì $\triangle EAF$ luôn cân tại A nên đường trung trực qua A cố định.

17. (hình 238)

GT	$\triangle ABC$ cân: $AB = BC$, $AI = IB$, $IN \perp AB$, $AK = KC$, $KM \perp AC$, $AP = MB$.
KL	a) $\triangle AMC$, $\triangle ANB$ cân b) $AM = AN = PC$.



Hình 238

Chứng minh:

a) M nằm trên đường trung trực AC nên $MA = MC \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại M.

N nằm trên đường trung trực của AC nên $NA = NB \Rightarrow \triangle ANB$ cân.

b) Xét $\triangle AMK$ và $\triangle ANI$, có:

$$AI = AK = \frac{1}{2} AB$$

$$\widehat{MAK} = \widehat{C} \text{ (vì } \triangle AMC \text{ cân)}$$

$$\widehat{IAN} = \widehat{B} \text{ (vì } \triangle ANB \text{ cân).}$$

$$\text{Mà } \widehat{B} = \widehat{C} \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân)} \Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{IAN}.$$

$$\text{Vậy } \triangle AMK = \triangle ANI \text{ (cạnh góc vuông, góc nhọn)} \Rightarrow AM = AN. \quad (1)$$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle CAP$, có:

$AB = CA$ (theo giả thiết); $DM = AP$ (theo giả thiết).

$$\widehat{MBA} + \widehat{ABC} = 180^\circ. \quad (2)$$

$$\widehat{PAC} + \widehat{MAC} = 180^\circ. \quad (3)$$

$$\text{Mà } \left. \begin{array}{l} \widehat{ABN} = \widehat{MCA} \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân)} \\ \widehat{CAM} = \widehat{MCA} \text{ (vì } \triangle AMC \text{ cân)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{MAC}. \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4), suy ra: $\widehat{MBA} = \widehat{PAC}$.

$$\text{Vậy } \triangle ABM = \triangle CAP \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AM = PC. \quad (5)$$

Từ (1) và (5), ta có: $AM = AN = PC$.

18*. (hình 239)

Xét $\triangle AKH$ và $\triangle BKC_1$, có:

$$AK = KB; KH = KC_1.$$

$$\Rightarrow \triangle AKH = \triangle BKC_1 \text{ (c.g.c).}$$

$$\text{Suy ra: } AH = BC_1. \quad (1)$$

$$\text{Mà } \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow AH \parallel BC_1 \text{ (có hai góc so le trong bằng nhau).} \quad (2)$$

Xét $\triangle AHI$ và $\triangle CB_1I$, có:

$$HI = IB; AI = IC$$

$$\Rightarrow \triangle AHI = \triangle CB_1I \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AH = CB_1. \quad (3)$$

$$\text{Mà } \widehat{A_2} = \widehat{C_1}, \text{ vậy } AH \parallel CB_1. \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (3), ta có: } AH = BC_1. \quad (5)$$

$$\text{Từ (2) và (4), ta có: } AH \parallel BC_1 \parallel CB_1. \quad (6)$$

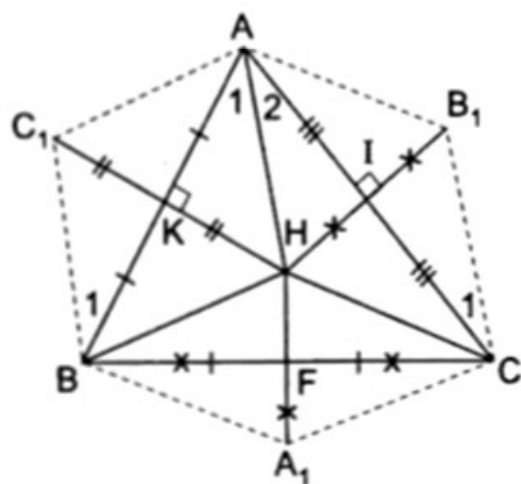
Tương tự như trên, ta chứng minh được:

$$\triangle AKC_1 = \triangle BKH; \widehat{C_1AB_1} = \widehat{CA_1B}; \triangle BFH = \triangle CFA_1 \text{ để suy ra:}$$

$$AB \parallel AC_1 \parallel CA_1. \quad (7)$$

$$BH = AC_1 = CA_1. \quad (8)$$

Tương tự, ta chứng minh được: $\triangle BFA_1 = \triangle CFH; \triangle AIB = \triangle CIH$ để suy ra:



Hình 239

$$CH // BA_1 // AB_1. \quad (9)$$

$$CH = BA_1 = AB_1. \quad (10)$$

$$\text{Mà } AH = BH = CH \text{ (tính chất giao điểm ba đường trung trực)}. \quad (11)$$

Từ (11), (5), (8), (10), ta có:

$$BC = CB_1 = AC_1 = CA = BA_1 = AB_1.$$

b) Xét $\triangle C_1AB_1$ và $\triangle CA_1B$ là hai tam giác cân, ta có:

$$C_1A = CA_1 = AB_1 = A_1B;$$

$$AC_1 // A_1C; AB_1 // A_1B \text{ (chứng minh trên).}$$

$$\text{Vậy } \widehat{C_1AB_1} = \widehat{CA_1B} \text{ (c.g.c)} \Rightarrow B_1C_1 = BC.$$

Tương tự như trên, ta chứng minh được:

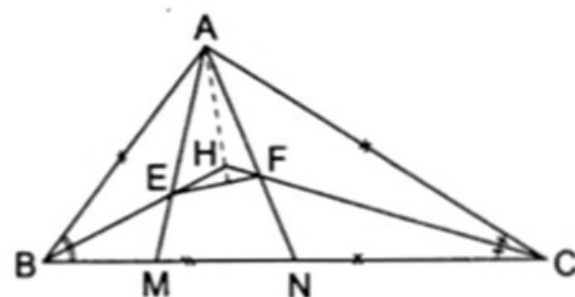
$$\triangle AC_1B = \triangle A_1CB \Rightarrow A_1B_1 = AB.$$

$$\triangle ACB_1 = \triangle A_1C_1B \Rightarrow A_1C_1 = AC.$$

$$\text{Vậy } \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \text{ (c.c.c).}$$

19. (hình 240)

GT	$\triangle ABC$ có: $\widehat{A}$ tù, $BN = BA$, $CM = CA$. Tia phân giác $\widehat{B}$ cắt AM tại E . Tia phân giác $\widehat{C}$ cắt AN tại F .
KL	$AH \perp EF$.



Hình 240

Chứng minh:

Góc A tù, nên BC lớn hơn AB và AC, vậy M và N nằm giữa hai điểm B và C.

Mặt khác, $\triangle ABN$ có $BN = BA$, nên $\triangle ABN$ cân tại B.

Vậy BE là tia phân giác $\widehat{B}$, đồng thời cũng là đường cao $\Rightarrow BE \perp AN$.

$\triangle ACM$ có $CA = CM$ nên $\triangle ACM$ cân tại C $\Rightarrow CF$ là tia phân giác $\widehat{C}$ và cũng là đường cao $\Rightarrow CF \perp AM$.

$\triangle AEF$ có $BE \perp AN$ và $CF \perp AM$. Gọi H là giao điểm của BE và CF thì H là trực tâm $\triangle AEF$, hay AH phải vuông góc với EF (tính chất ba đường cao trong tam giác).

20. (hình 241)

GT ΔABC có:
 $BK \perp AC$, $BE = AC$,
 $CH \perp AB$, $CF = AB$.

KL a) $AE = AF$
 b) $AE \perp AF$.

Chứng minh:

a) Xét ΔABE và ΔFCA , có:

$AB = CF$; $BE = AC$ (giả thiết).

Mà $\widehat{ABE} = \widehat{A_1} + 90^\circ$; $\widehat{ACF} = \widehat{A_1} + 90^\circ$ (tính chất góc ngoài tam giác).

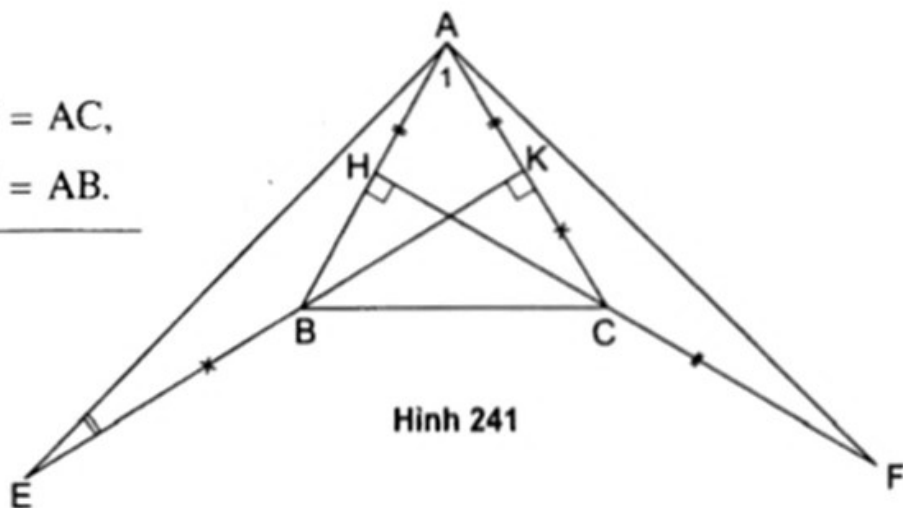
$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACF}$.

Vậy $\Delta ABE = \Delta FCA$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = FA$ và $\widehat{AEK} = \widehat{CAF}$. (1)

b) Ta có $\widehat{AEK} + \widehat{EAK} = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{CAF} + \widehat{EAK} = 90^\circ$, hay $\widehat{EAF} = 90^\circ$.

Vậy $AE = AF$ và $AE \perp AF$.



Hình 241

21. (hình 242)

GT ΔABC : $AH \perp BC$, $AD = BC$,
 $BE \perp AB$, $BE = AB$, $CF \perp AC$,
 $CF = AC$.

KL a) $DC = BF$, $DC \perp BF$
 b) DH , BF , CE đồng quy.

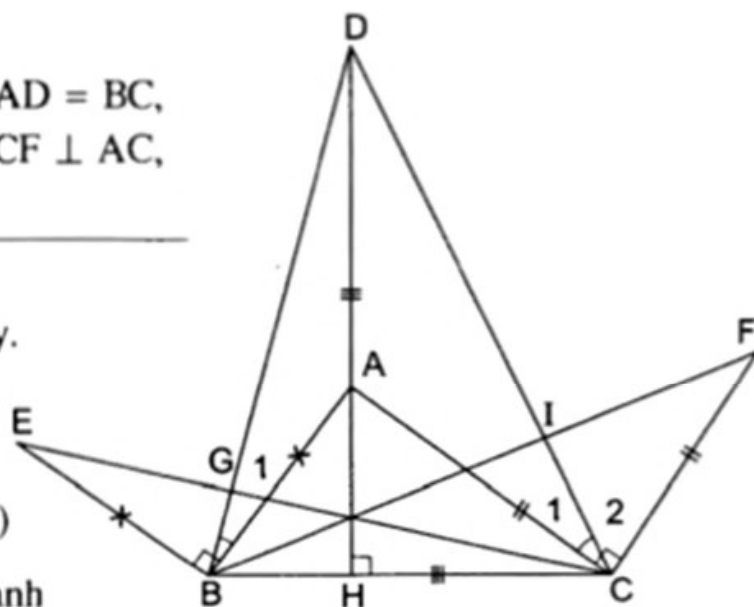
Chứng minh:

a) ΔDAC và ΔBCF có:

$DA = DC$; $AC = CF$ (giả thiết)

$\widehat{DAC} = \widehat{BCF}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc, cùng tù $CB \perp AD$; $CF \perp AC$).

Vậy $\Delta DAC = \Delta BCF$ (c.g.c) $\Rightarrow DC = BF$; $\widehat{C_1} = \widehat{F}$.



Hình 242

Mà $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{F} + \widehat{C_2} = 90^\circ$.

Trong $\triangle CFI$ có: $\widehat{F} + \widehat{C_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CIF} = 90^\circ$. Vậy $DC \perp BF$.

b) Tương tự, ta chứng minh được: $\triangle DAB = \triangle CBE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{E}$.

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} + \widehat{B_2} = 90^\circ$.

Trong $\triangle EBG$ có: $\widehat{E} + \widehat{B_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EBG} = 90^\circ \Rightarrow DB \perp CE$.

Trong $\triangle DBC$ có $DH \perp BC$; $BI \perp AC$; $CG \perp AB$. Vậy DH ; BI , CG là ba đường cao của $\triangle DBC$, hay ba đường thẳng đồng quy (tính chất ba đường cao).

22. (hình 243, 244)

Trước tiên, ta thấy $\widehat{A}$ không thể bằng 90° vì nếu $\widehat{A} = 90^\circ$ thì trực tâm H sẽ trùng lên đỉnh A . Khi đó $AH = 0$.

Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $\widehat{A} < 90^\circ$ (hình 243).

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle BCK$, có:

$$AH = BC \text{ (giả thiết);}$$

$$\widehat{B_1} = \widehat{A_1} \text{ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).}$$

Vậy $\triangle AHK = \triangle BCK$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AK = BK \Rightarrow \triangle ABK$ vuông cân tại K , nên $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

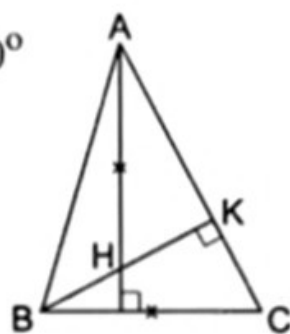
Trường hợp 2: $\widehat{A} > 90^\circ$ (hình 244).

Khi đó trực tâm H sẽ nằm ngoài tam giác. Tương tự, ta chứng minh được: $\triangle AHK = \triangle BCK$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow HK = BK$.

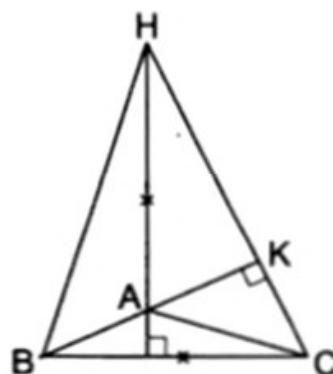
Vậy $\triangle BKH$ vuông cân tại $K \Rightarrow \widehat{BHC} = 45^\circ$. (1)

Mà hai góc $\widehat{BHC}$ và $\widehat{BAC}$ có: $BA \perp HC$; $CA \perp HB$, trong đó $\widehat{BHC}$ là góc tù, nên: $\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2), ta có: $45^\circ + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 135^\circ$.



Hình 243



Hình 244

23. (hình 245)

a) E là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài tam giác ABC tại B và C nên AE là tia phân giác của $\widehat{A}$ (tính chất).

F là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài $\triangle ABC$ tại A và C nên BF là tia phân giác của $\widehat{B}$ (tính chất).

P là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc ngoài $\triangle ABC$ tại A và B nên CP là tia phân giác của $\widehat{C}$ (tính chất).

Vậy AE; BF; CP là ba đường phân giác của ba góc trong $\triangle ABC$, hay AE; BF; CP đồng quy tại H.

b) H là trực tâm $\triangle ABC$, vậy H cách đều ba cạnh $\triangle ABC$ (tính chất).

Từ P hạ $PQ \perp AC$; $PI \perp BC$ vì P nằm trên đường phân giác $\widehat{C}$ nên cách đều hai cạnh, vậy $PI = PQ$. (1)

Hạ $PS \perp AB$, vì BP là phân giác của $\widehat{ABI}$ nên $PI = PS$. (2)

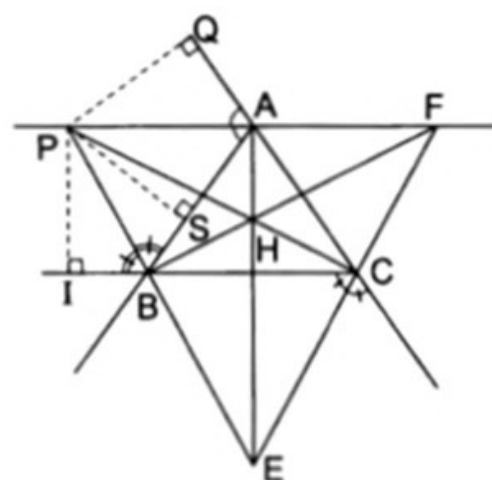
Từ (1) và (2), ta có: $PI = PQ = PS$.

Tương tự như chứng minh điểm P, ta chứng minh điểm F và điểm E cũng cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$.

c) Tại A ta có $\widehat{QAB}$ và $\widehat{BAC}$ là hai góc kề bù, trong đó AP là tia phân giác của $\widehat{QAB}$; AE là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Vậy $AP \perp AE$.

Tương tự, tại B có $\widehat{IBA}$ và $\widehat{BAC}$ là hai góc kề bù, trong đó BP và BF là hai đường phân giác, nên $BF \perp BP$.

Vậy trong $\triangle AFP$ có EA và FB là đường cao, suy ra H là trực tâm $\triangle AFP$.



Hình 245

24. (hình 246)

a) Xét $\triangle BDF$ và $\triangle BAC$, có:

AB là cạnh chung

$\widehat{A_1} = \widehat{B}$ (góc so le tạo bởi $d_1 \parallel AC$)

$\widehat{B_1} = \widehat{A}$ (góc so le tạo bởi $d_2 \parallel AC$).

Vậy $\triangle ABF = \triangle BAC$ (g.c.g) $\Rightarrow AF = BC$. (1); $FB = AC$ (2).

Tương tự, ta chứng minh được:

$$\Delta AEC = \Delta CBA \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow AE = BC \text{ (3); } CE = AB \text{ (4).}$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được: $\Delta PBC = \Delta ACB \text{ (c.g.c)}$

$$\Rightarrow DP = AC \text{ (5); } PC = AB \text{ (6).}$$

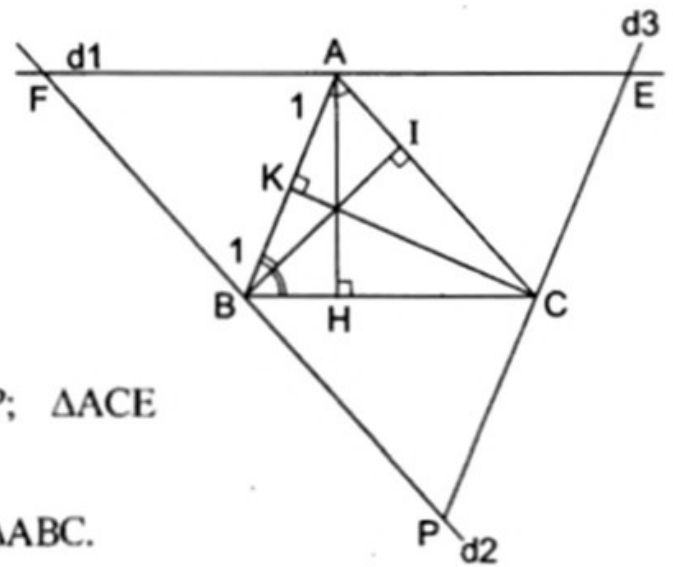
Vậy ba tam giác ΔABF ; ΔBCP ; ΔACE cùng bằng ΔABC , hay

$$\Delta ABF = \Delta BCP = \Delta ACE = \Delta ABC.$$

b) Từ (1) và (3), ta có: $AF = AE$.

Mà $AH \perp BC$; $d_1 \parallel BC$ vậy $AH \perp d_1 \Rightarrow AH$ là đường trung trực của EF (theo định nghĩa).

Tương tự, ta chứng minh được BI là đường trung trực của FP . Vậy ba đường cao AH, BI, CK của ΔABC là ba đường trung trực của ΔAFP .



Hình 246

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

1. ΔABC có $\hat{H} = 90^\circ$; $\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{1}{2} AC$ (tính chất).

Theo giả thiết: $AH = \frac{1}{2} BC \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại C .

Trong ΔABC : $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Mà theo chứng minh trên, ΔABC cân tại $C \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$, vậy:

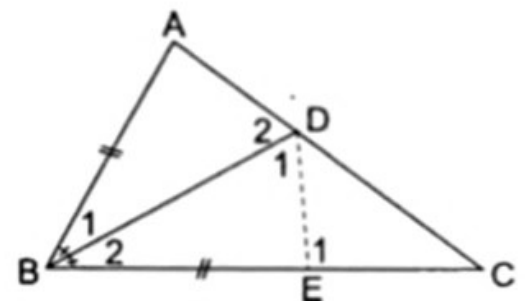
$$\hat{A} = \hat{B} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ.$$

2. (hình 247)

Trên BC lấy điểm E sao cho $BE = AB$.

Vì $BC > AB$ (giả thiết), nên $BC > BE$.

Vậy E nằm giữa B và C .



Hình 247

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AED$ có:

BD là cạnh chung; $BA = BE$ (cách vẽ); $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (giả thiết).

Vậy $\triangle ABD = \triangle AED$ (c.g.c), suy ra:

$$\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2. \quad (1)$$

$$AD = DE. \quad (2)$$

Mà $\widehat{D}_1 < \widehat{E}_1$ ($\widehat{E}_1$ là góc ngoài $\triangle BDE$). (3)

$$\widehat{D}_2 < \widehat{C} \text{ (}\widehat{D}_2 \text{ là góc ngoài } \triangle DBC \text{)}. \quad (4)$$

Từ (1), (3), (4), suy ra: $\widehat{E}_1 > \widehat{C} \Rightarrow DC > DE$ (đối diện góc lớn hơn là cạnh lớn hơn). (5)

Thay (2) vào (5), ta có: $DC > AD$.

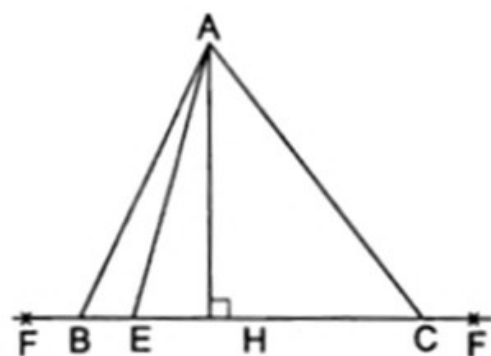
3. (hình 248)

a) $\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AB$ (cạnh đối diện góc lớn hơn). (1)

Vậy $HC > HB$ (có đường xiên lớn hơn).

b) E thuộc BH nên $HE < HB$, vậy:

$AE < AB$ (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn). (2)



Hình 248

Với điểm F nằm trên đường thẳng BC , có 2 trường hợp:

TH 1: F nằm trên tia đối của tia CB thì $HF > HC$, suy ra:

$$AF > AC \text{ (hình chiếu lớn hơn)}. \quad (3)$$

Từ (1) và (3), ta có: $AF > AB$. (4)

Từ (1) và (4), ta có: $AE < AB < AF$.

TH 2: F nằm trên tia đối của tia BC có: $HE < HB < HF$.

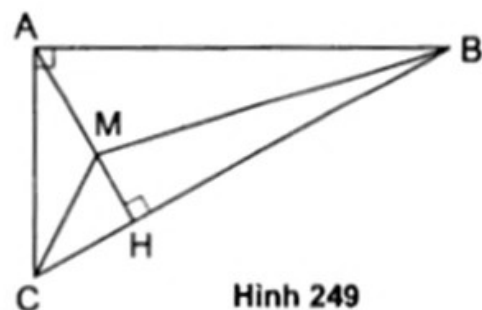
Vậy: $AE < AB < AF$ (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn).

4. (hình 249)

a) Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle AHB$, $\triangle AHC$ ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2. \quad (1)$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2. \quad (2)$$



Hình 249

Lấy vế trừ vế của (1) và (2), ta có:

$$AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2. \quad (*)$$

b) Áp dụng định lí Pi-ta-go vào ΔMBH và ΔMHC , ta có:

$$MB^2 = MH^2 + HB^2. \quad (3)$$

$$MC^2 = MH^2 + HC^2. \quad (4)$$

Lấy vế trừ vế của (3) và (4), ta có:

$$MB^2 - MC^2 = HB^2 - HC^2. \quad (**)$$

Thay (**) vào (*), ta có: $AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2$.

5. (hình 250)

a) Xét ΔABC , có: $AB = AC$.

Mà $AM + AN = 2AB$ (giả thiết).

$$\begin{aligned} \Rightarrow AM + AN &= AB + AB \\ &= (AM + BM) + (AN - CN) \\ &= AM + AN + BM - CN \\ \Rightarrow BM &= CN. \end{aligned} \quad (1)$$

b) Xét ΔCNF , có:

$$\widehat{F} = \widehat{B} \text{ (so le trong)}$$

$$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \text{ (đối đỉnh)}.$$

Mà $\widehat{B} = \widehat{C_2}$ (tính chất tam giác cân) $\Rightarrow \widehat{F} = \widehat{C_1}$.

Suy ra ΔCNF cân tại $N \Rightarrow CN = NF$.

c) Từ (1) và (2), ta có: $BM = NF$ (cùng bằng CN).

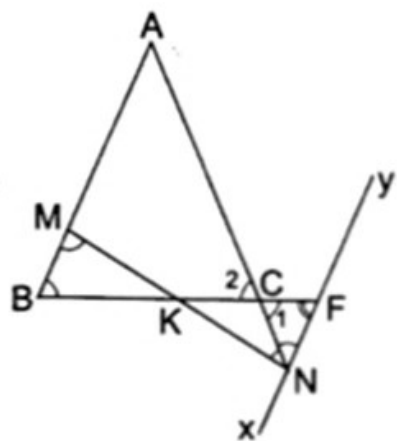
Xét ΔABM và ΔFKN , có:

$$BM = NF, \widehat{B} = \widehat{F} \text{ (so le trong);}$$

$$\widehat{M} = \widehat{KNF} \text{ (so le trong)}.$$

$\Rightarrow \Delta BMK = \Delta FKN$ (c.g.c), suy ra: $BK = KF$ và $MK = KN$.

Vậy K là trung điểm của MN , hay AK là trung tuyến của ΔAMN .



Hình 250

6. (hình 251)

GT $\triangle ABC$, $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$, AD là phân giác của $\widehat{A}$,
 $F \in AB$: $AF = AI$, $E \in AC$: $AE = AI$.

KL a) AB là trung trực EI, DC là trung trực

b) $AD \perp EF$

c) $\triangle EIF$ đều.

Chứng minh:

a) $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$ (giả thiết), vậy
 $\widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{FAC} = 60^\circ$ (kề bù
 nhau).

$\triangle IAF$ có $AI = AF$ (giả thiết), vậy
 $\triangle AIF$ cân tại A.

Có $\widehat{DAC} = \widehat{FAC} = 60^\circ \Rightarrow AC$ là tia phân giác vậy AC vừa là đường cao,
 trung trực, hay AC là trung trực của IF.

Chứng minh tương tự, xét $\triangle EAI$ có AB là tia phân giác của $\widehat{EAI}$ và $AE = AI$
 (giả thiết) $\Rightarrow \triangle EAI$ cân tại A. Vậy AB vừa là phân giác vừa là đường trung
 trực của EI.

b) E nằm trên AC, mà AC là trung trực của IF nên $EI = EF$ (tính chất). (1)

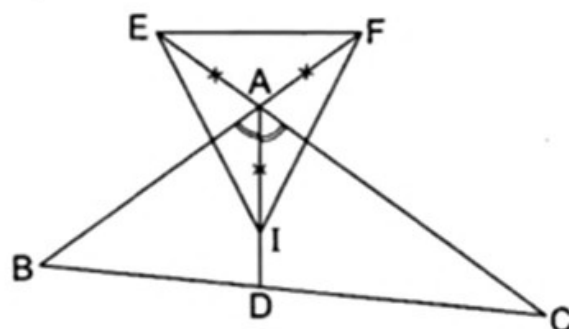
Vậy $\triangle EIF$ cân tại E.

F nằm trên AB, mà AB là trung trực của EI nên $FE = FI$ (tính chất). (2)

Vậy $\triangle EIF$ cân tại F.

Từ (1) và (2), ta có: $EI = EF = FI$, hay $\triangle EIF$ đều.

c) Từ đó suy ra A là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác đều
 nên cũng là giao điểm của ba đường cao. Vậy $AD \perp EF$.



Hình 251

7. (hình 252)

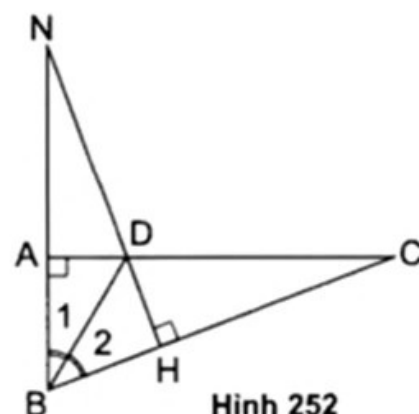
GT $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $DH \perp BC$,
 $DH \cap BA = N$.

KL a) So sánh AD và DC.

b) $BD \perp NC$.

c) $\triangle BNC$ là tam giác cân.

d) $AH \parallel NC$.



Hình 252

Chứng minh:

a) Ta có: $DA = DH$ (vì D nằm trên đường phân giác).

Trong $\triangle DHC$ có $DC > DH$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow DC > DA$.

b) Xét $\triangle BNC$, có:

$NH \perp BC$ (giả thiết)

$CA \perp BN$ (giả thiết).

Vậy D là trực tâm của $\triangle BNC$ nên BD là đường cao thứ ba và $DB \perp NC$.

c) $\triangle BNC$ có BD là tia phân giác của $\widehat{B}$; BD lại là đường cao (chứng minh câu b), vậy $\triangle BNC$ cân tại B.

d) Xét $\triangle ABO$ và $\triangle BHO$ vuông tại A và H, có:

BO chung

$\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (giả thiết).

$\Rightarrow \triangle ABO = \triangle BHO$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow BA = BH$ (cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle ABH$ cân tại B (định nghĩa).

Vậy, BD là tia phân giác của góc ở đỉnh nên nó cũng là đường cao, hay:

$BD \perp AH$;

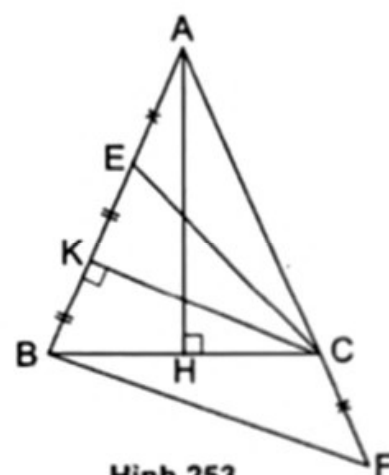
Mà $BD \perp NC$ (chứng minh câu b).

Vậy $AH \parallel NC$ (cùng vuông góc với BD).

8. (hình 253)

GT $\triangle ABC$ ($AB = AC > BC$), $AH \perp BC$,
 $CK \perp AB$, $KE = KB$, $CF = AE$.

KL a) $\triangle BCE$ cân.
b) So sánh các góc của $\triangle BCE$ với các góc của $\triangle ABC$.
c) $\triangle ABF$ cân.



Hình 253

Chứng minh:

a) $\triangle BCE$ có $CK \perp AB$ và $KE = KB$ (giả thiết), vậy KC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên $\triangle BCE$ cân tại C.

b) $\triangle BCE$ và $\triangle ABC$ là hai tam giác cân có góc $\widehat{B}$ là góc đáy chung. Vậy các góc ở đáy bằng nhau là: $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{BEA}$.

Hai góc ở đỉnh cũng bằng nhau: $\widehat{A} = \widehat{BCE}$.

c) Xét $\triangle AEC$ và $\triangle FCB$, có:

$$CE = CB \text{ (} \triangle BCE \text{ cân); } AE = CF \text{ (giả thiết).}$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{EAC} + \widehat{BEC} = 180^\circ; \widehat{BCF} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

Mà theo chứng minh trên, ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{BCF}$.

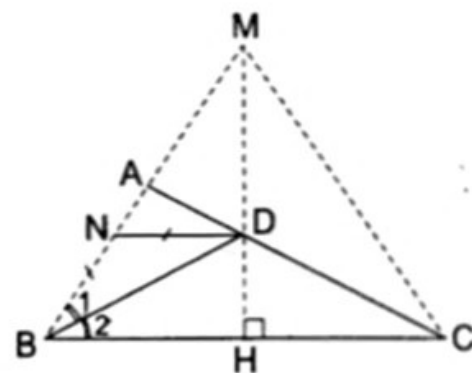
Vậy $\triangle AEC = \triangle FCB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = BF$ (cạnh tương ứng).

Ta lại có: $AC = AB$ (giả thiết) $\Rightarrow BF = BA$ (cùng bằng AC).

Vậy $\triangle ABF$ cân tại B .

9*. (hình 254)

GT	$\triangle ABC: \widehat{B} = 2\widehat{C}, \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2,$ $DN \parallel BC, DH \perp BC, DH \cap AB = M.$
KL	a) $BD = DC.$ b) $BN = ND.$ c) D là giao điểm của ba đường phân giác của $\triangle BMC.$



Hình 254

Chứng minh:

a) Xét $\triangle BDC$, có:

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (giả thiết)} \Rightarrow \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2}. \quad (1)$$

$$\widehat{B}_2 = 2\widehat{C} \text{ (giả thiết)} \Rightarrow \widehat{C} = \frac{\widehat{B}}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{B}_2 = \widehat{C} \Rightarrow \triangle BDC$ cân tại D , hay $DB = DC$.

b) $\widehat{D} = \widehat{B}_2$ (so le trong);

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (giả thiết).}$$

Vậy $\widehat{D} = \widehat{B}_1$ (cùng bằng $\widehat{B}_2$) $\Rightarrow \triangle BMD$ cân tại $N \Rightarrow NB = ND$.

c) $\triangle BDC$ cân tại D (chứng minh câu a) nên DH là đường cao, cũng là đường trung trực của BC (tính chất). M thuộc đường trung trực của BC nên MB = MC. Vậy $\triangle BMC$ cân, MH (hay MD) là đường cao ($MD \perp BC$) và là phân giác của $\widehat{BMC}$.

Mặt khác, BD là đường phân giác của $\widehat{B}$ (giả thiết).

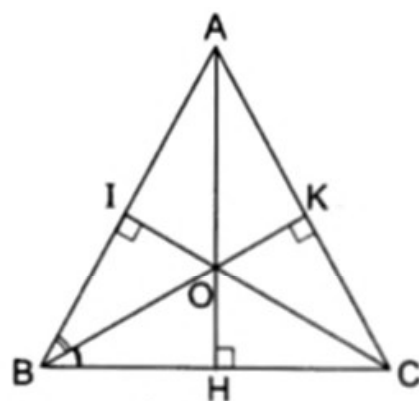
Vậy D là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle BMC$.

10*. (hình 255, 256, 257)

a) AH, BK, CI là ba đường cao trong tam giác đều ABC. Vậy AH, BK và CI cũng là ba đường phân giác của ba góc A, B, C (tính chất). Suy ra: O là giao điểm của 3 đường phân giác, nên $OI = OK = OH$. (1)

O cũng là trọng tâm $\triangle ABC$, vậy:

$$OH = \frac{1}{3}AH \text{ (tính chất)}. \quad (2)$$



Hình 255

Từ (1) và (2), ta có: $OH + OK + OI = \frac{1}{3}AH + \frac{1}{3}AH + \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}AH = AH$.

b) Cách 1: $S_{\triangle AO'B} = \frac{1}{2}O'I'.AB$;

Mà $AB = BC = AC$, nên:

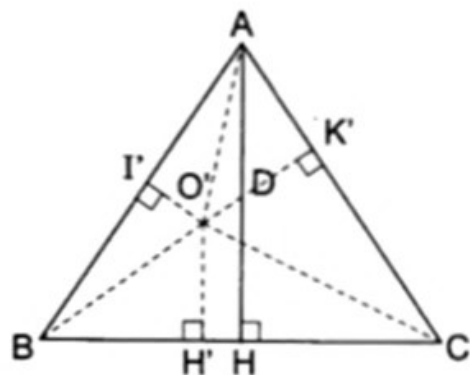
$$S_{\triangle BO'C} = \frac{1}{2}O'H'.BC = \frac{1}{2}O'H'.AB;$$

$$S_{\triangle AO'C} = \frac{1}{2}O'K'.AC = \frac{1}{2}O'K'.AB.$$

Vậy: $S_{\triangle AO'B} + S_{\triangle BO'C} + S_{\triangle AO'C}$

$$= \frac{1}{2}O'I'.AB + \frac{1}{2}O'H'.AB + \frac{1}{2}O'K'.AB$$

$$= \frac{1}{2}AB.(O'I' + O'H' + O'K').$$



Hình 256

Tổng diện tích ba tam giác trên chính là diện tích $\triangle ABC$. Vậy:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB.(O'I' + O'H' + O'K'). \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AH \cdot AB. \quad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta có: $AH = O'I' + O'H' + O'K'$.

Vậy O' là điểm bất kì trong tam giác đều thì tổng 3 khoảng cách đến 3 cạnh bằng độ dài đường cao của tam giác.

Cách 2: Ta phải chứng minh tổng $OH + OI + OK$ bằng độ dài đường cao AF của ΔABC (O là điểm bất kì trong ΔABC ; OH ; OI ; OK khoảng cách từ O đến ba cạnh trong ΔABC đều). Thật vậy:

- Từ O kẻ $MN \parallel BC$ cắt AF tại H .

Ta dễ dàng chứng minh được $\Delta OHF = \Delta FEO$ (cạnh huyền, góc nhọn) để suy ra: $OH = EF$.

- Vậy ta còn ta phải chứng minh:

$$OI + OK = AE.$$

Xét ΔAMN có: $MN \parallel BC$ (cách vẽ);
 $AF \perp BC$ (giả thiết). $\left. \vphantom{\begin{array}{l} MN \parallel BC \\ AF \perp BC \end{array}} \right\} \Rightarrow MN \perp AF$.

Khi đó, ΔAMN có AF vừa là đường phân giác, vừa là đường cao và $\hat{A} = 60^\circ$ nên ΔAMN là tam giác đều, suy ra $AE = NP$ (ba đường cao bằng nhau).

Ta chứng minh: $OI + OK = AE = NP$.

Từ O kẻ $OS \parallel AM$; OS cắt NP tại Q . Chứng minh tương tự như trên, ta có:

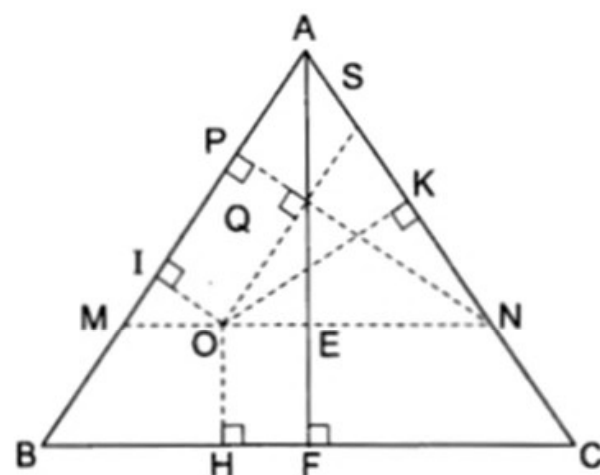
$$OI = QP.$$

Xét ΔNSO có: $\hat{N} = \hat{C} = 60^\circ$ (đồng vị $MN \parallel BC$).

$$\hat{S} = \hat{A} = 60^\circ \text{ (đồng vị } OS \parallel AC).$$

Vậy ΔNSO là tam giác đều NQ và OK là đường cao nên $OK = NQ$.

Từ cách phân tích trên suy ra ra cách chứng minh.



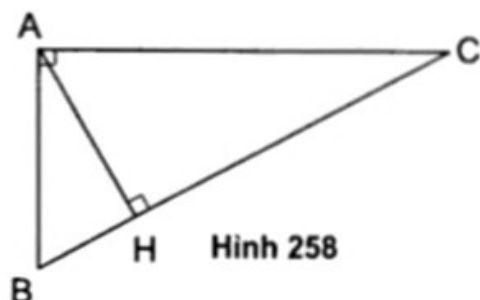
Hình 257

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. (hình 258)

a) Các góc tỉ lệ : $\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{1}$

$$= \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{3 + 2 + 1} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ.$$



Hình 258

Vậy : $\widehat{A} = 3.30^\circ = 90^\circ$; $\widehat{B} = 2.30^\circ = 60^\circ$; $\widehat{C} = 30^\circ$.

b) $\widehat{C} = 30^\circ$ nên: $AB = \frac{1}{2} BC$ (tính chất). (1)

Theo Pi-ta-go, ta có: $AC^2 = BC^2 - AB^2$. (2)

Thay (1) vào (2), ta có :

$$AC^2 = BC^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = BC^2 - \frac{1}{4}BC^2 = \frac{3}{4}BC^2$$

$$\Rightarrow AC = \frac{BC\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy ba cạnh của tam giác đó là: $AB = \frac{1}{2}BC$, $AC = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$.

c) Các góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn là:

$$\widehat{B} = \widehat{HAC} \quad (BA \perp AC; BH \perp AH);$$

$$\widehat{C} = \widehat{BAH} \quad (AC \perp AB; CB \perp AH).$$

2. (hình 259)

a) $\triangle ABC$ có $AC < AB$ vậy

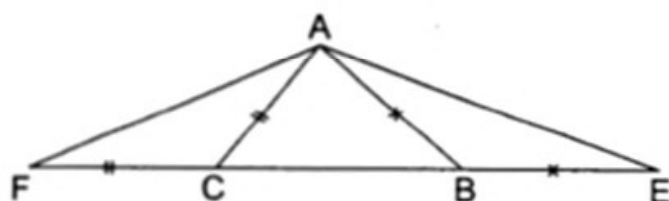
$\widehat{C} > \widehat{B}$ (đối diện cạnh lớn hơn là góc lớn hơn).

$\triangle ACF$ cân tại C, vậy $\widehat{C} = 2\widehat{AFC}$.

$\triangle ABE$ cân tại B, vậy $\widehat{B} = 2\widehat{AEB}$ (góc ngoài của các tam giác cân).

Mà $\widehat{C} > \widehat{B}$ vậy $\widehat{AFC} > \widehat{AEB}$.

b) $\triangle AFE$ có $\widehat{AFC} > \widehat{AEB} \Rightarrow AE > AF$ (đối diện góc lớn hơn là cạnh lớn hơn).

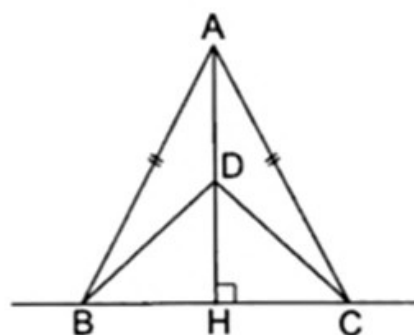


Hình 259

3. (hình 260)

a) Hình chiếu của AB và DB trên đường thẳng BC là BH, hình chiếu của AC và DC trên đường thẳng BC là CH.

b) Xét đường thẳng AH ta có hình chiếu của CA và CD trên đường thẳng AH là AH và DH. Vì D nằm giữa hai điểm A và H nên $HK < AH$. Vậy ta có: $CD < CA$ (vì hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn).



Hình 260

4. (hình 261)

GT	$\triangle ABC, \widehat{A} = 120^\circ, \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ $DH \perp AB, DK \perp AC, CI \parallel AD.$
KL	a) $\triangle DKH$ đều b) $\triangle ACI$ đều.

Chứng minh:

a) AD là tia phân giác của $\widehat{A}$ nên $DH = DK$ (tính chất), vậy $\triangle HDK$ cân tại D.

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 60^\circ$ (giả thiết).

$\triangle ADH$ vuông tại H (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{HDA} = 30^\circ$ (vì $\widehat{A_1} = 60^\circ$).

$\triangle ADK$ vuông tại K (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{KDA} = 30^\circ$ (vì $\widehat{A_2} = 60^\circ$).

$\Rightarrow \widehat{HDA} = \widehat{HDA} + \widehat{ADK} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

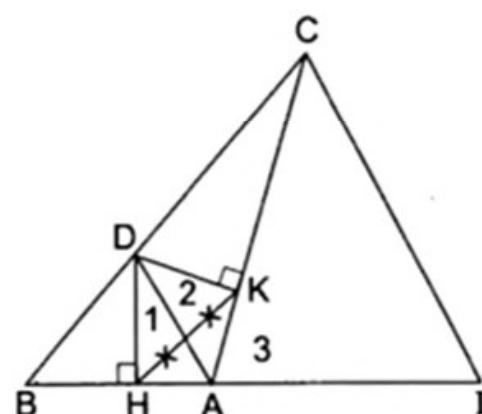
Vậy $\triangle HDK$ cân có góc $\widehat{HDK} = 60^\circ$ nên $\triangle HDK$ là tam giác đều.

b) $\widehat{A} = 120^\circ$ (giả thiết) nên $\widehat{A_3} = 60^\circ$ (hai góc kề bù nhau).

$\widehat{I} = \widehat{A_1} = 60^\circ$ (hai góc đồng vị $CI \parallel DA$)

$\widehat{ACI} = \widehat{A_2} = 60^\circ$ (hai góc so le trong $CI \parallel DA$).

Vậy $\triangle ACI$ có ba góc bằng nhau, bằng 60° nên $\triangle CIA$ đều.

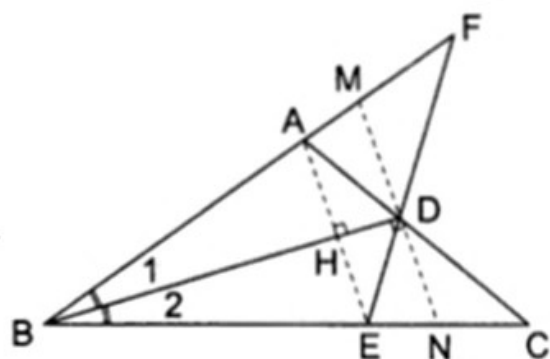


Hình 261

5. (hình 262)

GT ΔABC ($\widehat{A}$ tù, $AC > AB$), $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$,
 $AH \perp AD$, $MN \perp BD$.

KL a) $AM = EN$
 b) $ED \cap AB = F$; $MF = NC$.



Hình 262

Chứng minh:

a) ΔMBN có BD vừa là phân giác, vừa là đường cao (giả thiết), nên ΔMBN cân tại B , ta được: $BM = BN$. (1)

Tương tự, ΔABE có BH vừa là phân giác, vừa là đường cao (giả thiết). Vậy ΔMBN cân tại B , nên $BA = BE$. (2)

Từ (1) và (2) có: $BM - BA = BN - BE$ hay $AM = EN$.

b) • ΔBAD và ΔBED có:

BD chung

$BA = BE$ (theo (2))

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (giả thiết).

Vậy $\Delta BAD = \Delta BED$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (góc tương ứng). (3)

• ΔABF và ΔBAC có:

$\widehat{B}$ chung

$BE = BA$ (theo (2))

$\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (theo (3)).

Vậy $\Delta ABF = \Delta BAC$ (c.g.c), suy ra: $BF = BC$.

Mà: $BM = BN$ (theo (1)), vậy ta có: $BF = BM = BC - BN$ hay $MF = NC$.

6. (hình 263)

Hạ $BI \perp AM$; $CK \perp AM$.

Trước hết, ta thấy ΔBIM và ΔCKM là các tam giác vuông tại I và K , có:
 $BM = MC$ (giả thiết); $\widehat{IBM} = \widehat{KMC}$ (đối đỉnh).

$\Rightarrow \Delta BIM = \Delta CKM$ (cạnh huyền, góc nhọn).

Vậy: $BI = CK$. (1)

$$a) \quad S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} BM \cdot AH;$$

$$S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} CM \cdot AH.$$

Mà $BM = CM$ (giả thiết); AH chung, vậy
 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM}$.

$$b) \quad S_{\triangle ACG} = \frac{1}{2} AG \cdot CK. \quad (2)$$

$$S_{\triangle CGM} = \frac{1}{2} GM \cdot CK. \quad (3)$$

$$AG = 2GM \text{ (tính chất của trọng tâm tam giác)}. \quad (4)$$

$$\text{Từ (4), (2) và (3), ta có: } S_{\triangle ACG} = 2S_{\triangle CGM}. \quad (5)$$

$$c) \quad S_{\triangle AGC} = \frac{1}{2} AG \cdot CK; \quad S_{\triangle AGB} = \frac{1}{2} AG \cdot BI.$$

Mà $CK = CI$ (theo (1)), vậy: $S_{\triangle AGC} = S_{\triangle AGB}$.

Theo (5), ta có:

$$S_{\triangle AGC} = S_{\triangle AGB} = 2S_{\triangle CGM} \text{ (trong đó } 2S_{\triangle CGM} \text{ chính là } S_{\triangle AGB} \text{)}.$$

Vậy $\triangle ABC$ được G chia thành 3 tam giác có S bằng nhau.

$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle ACG} = S_{\triangle BCG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}.$$

d) Theo chứng minh câu c):

$$S_{\triangle ACG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}. \quad (6)$$

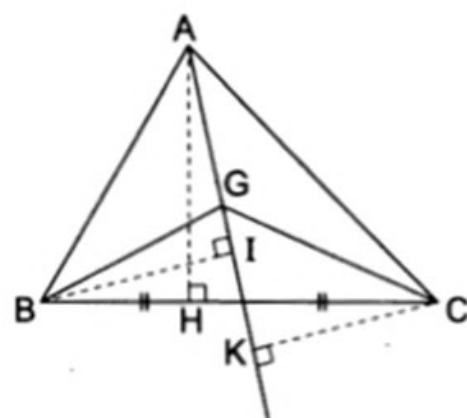
Theo chứng minh câu b):

$$S_{\triangle ACG} = 2S_{\triangle CGM}. \quad (7)$$

$$\text{Thay (7) vào (6), ta có: } 2S_{\triangle CGM} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \text{ hay } S_{\triangle CGM} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}.$$

7. (hình 264)

a) $\widehat{NAM} + \widehat{BAC} + \widehat{NAB} + \widehat{MAC} = 360^\circ$. Mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAC} = 90^\circ$ (giả thiết), vậy: $\widehat{NAM} + \widehat{BAC} + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$, hay:



Hình 263

$$\widehat{NAM} + \widehat{BAC} = 180^\circ. \quad (1)$$

$\Rightarrow \widehat{BAC} < \widehat{NAM}$ (do $\triangle ABC$ nhọn).

b) Trên tia đối của tia DA lấy điểm I, sao cho:

$$DI = DA.$$

$\triangle ADI$ và $\triangle IDB$ có:

$$BD = DC \text{ (giả thiết)}$$

$$AD = DI \text{ (cách vẽ)}$$

$$\widehat{D_1} = \widehat{D_2} \text{ (đối đỉnh).}$$

Vậy $\triangle ADI = \triangle IDB$ (c.g.c), suy ra:

$$AC = BI. \quad (2)$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{I_1} \text{ (góc tương ứng).}$$

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{I_1}$ thì $AC \parallel BI$ (hai góc so le trong bằng nhau).

$\triangle NAM$ và $\triangle ABI$ có:

$$AN = BA; AM = AC \text{ (giả thiết).}$$

$$AC = BI \text{ (theo (2)).}$$

Vậy: $AM = BI$ (cùng bằng AC);

$$\widehat{NAM} + \widehat{BAC} = 180^\circ \text{ (chứng minh câu a)).} \quad (3)$$

$$\widehat{ABI} + \widehat{BAC} = 180^\circ \text{ (góc trong cùng phía của } AC \parallel BI). \quad (4)$$

So sánh (3) và (4), ta có: $\widehat{NAM} = \widehat{ABI}$.

Vậy $\triangle NAM = \triangle ABI$ (c.g.c), suy ra: $MN = AI$.

Mà $AI = 2AD$ (cách vẽ), vậy: $MN = 2AD$, hay: $AD = \frac{1}{2} MN$.

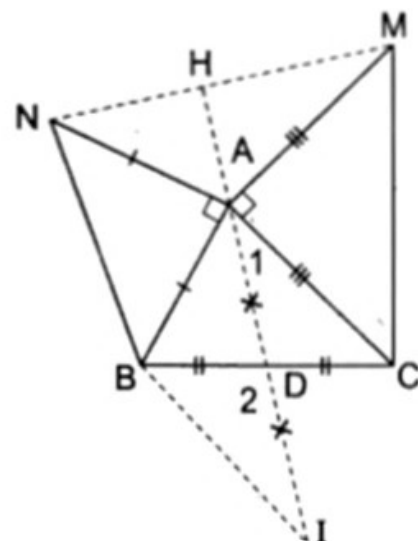
c) AD cắt MN tại H.

Xét $\triangle NAH$ có: $\widehat{ANM} = \widehat{BAI}$ ($\triangle NAM = \triangle ABI$). (5)

H, A, D thẳng hàng, nên:

$$\widehat{HAN} + \widehat{NAB} + \widehat{BAI} = 180^\circ \text{ (trong đó } \widehat{NAB} = 90^\circ \text{ (giả thiết)).}$$

$$\text{Vậy: } \widehat{HAN} + 90^\circ + \widehat{BAI} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{HAN} + \widehat{BAI} = 90^\circ. \quad (6)$$



Hình 264

Thay (5) vào (6), ta có: $\widehat{HAN} + \widehat{ANM} = 90^\circ$.

Trong $\triangle NAH$ có tổng hai góc: $\widehat{HAN} + \widehat{ANM} = 90^\circ$, vậy góc còn lại là $\widehat{NHA}$ phải bằng $90^\circ \Rightarrow AD \perp MN$.

8. (hình 265)

a) $AC > AB$, vậy $HC > HB$ (đường xiên lớn hơn nên hình chiếu lớn).

b) Theo bài toán ví dụ 1 (chương 2 – Tam giác), ta có:

Trong $\triangle ABC$: BO và CO là tia phân giác của hai góc ở đáy thì:

$$\widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Mà $\widehat{A} = 90^\circ$ (giả thiết), vậy: $\widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ$.

Tương tự: – Với $\triangle ABH$ thì H là ở đỉnh, đáy AB , AM và BM là phân giác của hai góc ở đáy, nên $\widehat{AMB} = 135^\circ$.

– Với $\triangle ACH$ có H là đỉnh; AC là đáy và hai đường phân giác của hai góc đáy là AN và CN , nên $\widehat{ANC} = 135^\circ$.

Vậy: $\widehat{BOC} = \widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 135^\circ$.

9. (hình 266)

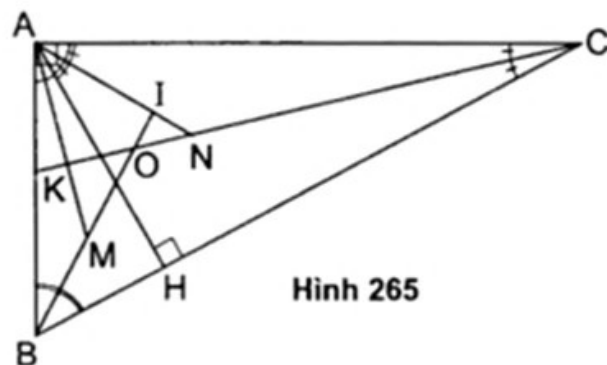
O là giao điểm của ba đường phân giác nên O phải nằm trong tam giác (tia phân giác nằm giữa hai cạnh của góc tù là hai cạnh trong tam giác, nên tia phân giác phải nằm trong tam giác).

BC là trung trực của OH (giả thiết), vậy O và H thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là BC , suy ra H nằm ngoài tam giác. Mà H thuộc trung trực BC (giả thiết). Vậy OH thuộc đường trung trực của BC , suy ra $\triangle ABC$ cân tại A từ đó suy ra cách vẽ.

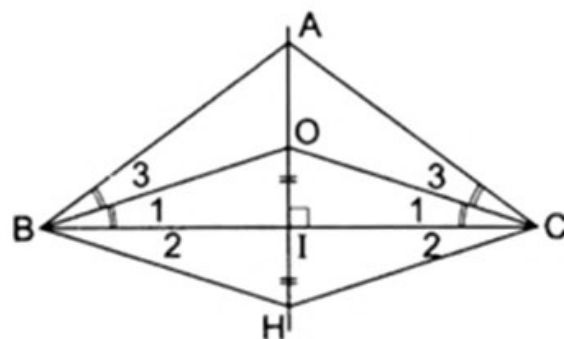
Chứng minh:

$\triangle BOC$ và $\triangle BHC$, có:

$CO = CH$; $BO = BH$ (BC là trung trực của OH).



Hình 265



Hình 266

Mà $HC = HB$ (H thuộc đường trung trực của BC).

$\Rightarrow OB = OC = CH = BH$; BC chung.

Vậy $\triangle BOC = \triangle BHC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$; $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (góc tương ứng).

Mà: $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_3$; $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_3$ (BO và CO là phân giác), vậy:

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{B}_3; \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \widehat{C}_3 \Rightarrow \widehat{AHB} = \frac{3}{2} \widehat{ABC}.$$

$\triangle ABH$ có H nằm trên đường trung trực của AB nên nó cân tại H ($AH = HB$)

$$\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{BAH} = \frac{3}{2} \widehat{ABC}.$$

Mà $\widehat{BAH} = \frac{1}{2} \widehat{A}$ (AO là phân giác), vậy: $\frac{1}{2} \widehat{A} = \frac{3}{2} \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{A} = 3 \widehat{ABC}$.

Tương tự, ta có: $\Rightarrow \widehat{A} = 3 \widehat{ABC} = 3 \widehat{ACB}$. (1)

Mà trong $\triangle ABC$ ta luôn có: $\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$. (2)

Thay (1) vào (2), ta được: $5 \widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 36^\circ$.

Vậy $\widehat{BAC} = 36^\circ$ và $\widehat{A} = 108^\circ$.

10. (hình 267)

a) $\triangle ABC$ đều, vậy $AB = AC = BC = a$.

Từ đó: $BP = \frac{1}{3}a$. (1)

$$AP = \frac{2}{3}a \text{ (giả thiết).}$$

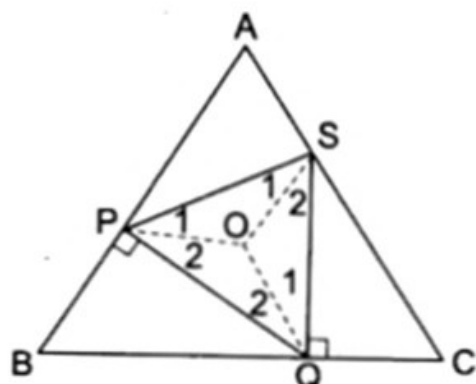
Vậy $\widehat{BQP} = 30^\circ$, suy ra: $BP = \frac{1}{2} BQ$ (cạnh

đối diện góc 30° bằng nửa cạnh huyền).

$$\text{Hay } BQ = 2BP = 2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a. \quad (3)$$

$$\text{Mà } BC = a, \text{ nên } QC = \frac{1}{3}a. \quad (4)$$

Tương tự, xét $\triangle QCS$ có: $\widehat{Q} = 90^\circ$; $\widehat{C} = 60^\circ$ (giả thiết).



Hình 267

$$\text{Vậy } \widehat{QSC} = 30^\circ \Rightarrow QC = \frac{1}{2}SC \Rightarrow SC = 2QC = 2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a. \quad (5)$$

$$\text{Mà } SC = \frac{2}{3}a, \text{ suy ra: } AS = \frac{1}{2}a. \quad (6)$$

Xét $\triangle PBQ$; $\triangle QCS$; $\triangle SPA$ có:

$$BP = QC = QS = \frac{1}{2}a \text{ (theo 1, 4, 6);}$$

$$AP = BQ = SC = \frac{2}{3}a \text{ (theo 2, 3, 5);}$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ \text{ (giả thiết).}$$

Vậy $\triangle PBQ = \triangle QCS = \triangle SPA$ (c.g.c), suy ra: $\widehat{BPQ} = \widehat{CQS} = \widehat{ASP} = 90^\circ$ (ba góc tương ứng). Vậy $\widehat{ASP} = 90^\circ$ nên $PS \perp AC$.

b) Suy ra: $PQ = QS = PS$ (ba cạnh tương ứng), vậy $\triangle PQS$ là tam giác đều (ba cạnh bằng nhau).

c) Gọi O là tâm của $\triangle PQS$ đều thì PO, QO, SO là các tia phân giác của góc $\widehat{SPQ}; \widehat{PQS}; \widehat{QSP}$. Vậy, ta có:

$$\widehat{P_2} = \widehat{Q_1} = \widehat{S_1} = 30^\circ \text{ (bằng } \frac{1}{2}\widehat{P}; \widehat{Q}; \widehat{S} = 60^\circ).$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{BPO} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ \text{ (hai góc kề nhau);}$$

$$\widehat{CQO} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ \text{ (hai góc kề nhau).}$$

$$\widehat{ASO} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ \text{ (hai góc kề nhau),}$$

$$\triangle BPO = \triangle CQO = \triangle ASO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BO = CO = AO.$$

Vậy O là tâm của $\triangle ABC$.

MỤC LỤC

	Trang
<i>Lời nói đầu</i>	3
Chương 1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC – ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	5
Chủ đề 1. Quan hệ giữa đường thẳng	5
Chủ đề 2. Quan hệ giữa ba đường thẳng	17
<i>Mở rộng kiến thức:</i> Tiêu đề – Định lí	26
Ôn tập chương 1	29
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ	32
Chương 2. TAM GIÁC	51
Chủ đề 1. Các góc của tam giác	51
Chủ đề 2. Quan hệ bằng nhau của hai tam giác	56
Chủ đề 3. Tam giác cân – tam giác đều	69
Chủ đề 4. Tam giác vuông	73
<i>Mở rộng kiến thức:</i>	
Bài 1. Định lí thuận – định lí đảo	81
Bài 2. Thực hành ngoài trời	88
Ôn tập chương 2	91
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ	96
Chương 3. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC – CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC	137
Chủ đề 1. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác	137
Chủ đề 2. Tính chất tia phân giác của một góc. Tính chất đường trung trực của đoạn thẳng	149
Chủ đề 3. Các đường đồng quy trong tam giác	157
Ôn tập chương 3	173
Ôn tập cuối năm	175
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ	177

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập NGÔ ÁNH TUYẾT
Giám đốc CTCP Sách giáo dục tại TP Hà Nội CẦN HỮU HẢI

Biên tập nội dung :

ĐỖ HỮU PHÚ – MAI MINH TUÂN

Sửa bản in :

MAI MINH TUÂN

Trình bày bìa :

HOÀNG MẠNH DỨA

Chế bản :

PHƯƠNG KIỀU HUNG – TRẦN NGỌC DUY

Công ty CP Sách giáo dục tại TP Hà Nội - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam
giữ quyền công bố tác phẩm

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 7 THEO CHỦ ĐỀ - PHẦN HÌNH HỌC
(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KỸ NĂNG)

Mã số: T7T59s2 - TTS

Số đăng ký KHXB: 57-2012/CXB/573-23/GD

In 1.500 bản (98TK), khổ 17 x 24 cm, tại CTCP In Khoa học Công nghệ mới
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2012.