



ĐỒ ĐỨC THÁI

BÀI TẬP

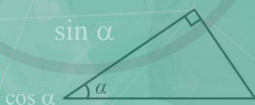
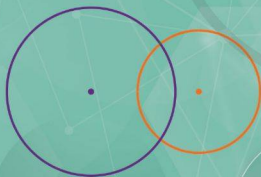
# Toán 9

TẬP MỘT

$$(ax + b)(cx + d) = 0 \quad (a \neq 0, c \neq 0)$$

$$ax + b > 0 \quad (a \neq 0)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$\tan \alpha$   
 $\cot \alpha$



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM



CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ  
XUẤT BẢN - THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

ĐỖ ĐỨC THÁI

BÀI TẬP

# Toán 9

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ  
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản in thử

## LỜI NÓI ĐẦU

Sách **Bài tập Toán 9** (gồm hai tập) được biên soạn tương thích với sách giáo khoa Toán 9 (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên – GS.TSKH Đỗ Đức Thái). Nội dung sách hướng đến tạo cơ hội hình thành và phát triển năng lực toán học, phát huy hứng thú học tập, tính chủ động và tiềm năng của mỗi học sinh; bảo đảm tính tích hợp, phân hoá trong dạy học bộ môn Toán.

Nội dung mỗi bài trong sách được thể hiện qua các phần: A. Kiến thức cần nhớ – B. Ví dụ – C. Bài tập.

Các bài tập cơ bản gồm những bài tập giúp học sinh củng cố, kết nối các kiến thức cốt lõi, trọng tâm được học trong mỗi chủ đề. Ngoài ra, có những bài tập nâng cao (được đánh dấu \*) ở mức độ vận dụng phát triển và gắn với một số ứng dụng của toán học trong đời sống. Qua đó tạo cơ hội để học sinh nâng cao dần năng lực tư duy, vận dụng giải quyết vấn đề và hình thành niềm yêu thích môn Toán. Những bài tập đó cũng cung cấp tư liệu để các thầy cô giáo dạy học phân hoá, bồi dưỡng học sinh khá, giỏi.

Tác giả hi vọng sách có thể giúp học sinh học tốt môn Toán theo định hướng phát triển năng lực, đồng thời hỗ trợ tài liệu cho các thầy cô giáo, cha mẹ học sinh nhằm tham gia vào việc nâng cao khả năng tự học, tự thực hành giải quyết vấn đề trên lớp, ở nhà cho học sinh.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong khi biên soạn, song cuốn sách khó tránh khỏi sơ suất, rất mong nhận được sự góp ý của đông đảo bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong các lần tái bản sau.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về: Công ty Cổ phần Đầu tư Xuất bản – Thiết bị Giáo dục Việt Nam, tầng 5, toà nhà hỗn hợp AZ Lâm Viên, 107 đường Nguyễn Phong Sắc, phường Dịch Vọng Hậu, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

**Tác giả**

# Chương I

## PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

### **PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**Phương trình tích có dạng  $(ax + b)(cx + d) = 0$  ( $a \neq 0, c \neq 0$ )**

Để giải phương trình tích  $(ax + b)(cx + d) = 0$  với  $a \neq 0$  và  $c \neq 0$ , ta có thể làm như sau:

*Bước 1.* Giải hai phương trình bậc nhất:  $ax + b = 0$  và  $cx + d = 0$

*Bước 2. Kết luận nghiệm:* Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình bậc nhất vừa giải được ở *Bước 1*.

#### **Phương trình chứa ẩn ở mẫu**

– Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là điều kiện xác định của phương trình.

– Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:

*Bước 1.* Tìm điều kiện xác định của phương trình

*Bước 2.* Quy đồng mẫu thức hai vế của phương trình rồi khử mẫu

*Bước 3.* Giải phương trình vừa tìm được

*Bước 4. Kết luận nghiệm:* Trong các giá trị của ẩn vừa tìm được ở *Bước 3*, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

#### B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Giải các phương trình:

a)  $\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{5}\right)\left(3x - \frac{5}{8}\right) = 0;$

b)  $(2x + 3)(x + 1) = (3x + 1)(x + 1);$

c)  $\frac{1}{4}x^2 - (3x - 2)^2 = 0.$



Giải

a) Để giải phương trình đã cho, ta giải hai phương trình sau:

$$*) \frac{1}{2}x - \frac{7}{5} = 0$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{5}$$

$$x = \frac{14}{5};$$

$$*) 3x - \frac{5}{8} = 0$$

$$3x = \frac{5}{8}$$

$$x = \frac{5}{24}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = \frac{14}{5}$  và  $x = \frac{5}{24}$ .

b) Ta có:  $(2x+3)(x+1) = (3x+1)(x+1)$

$$(2x+3)(x+1) - (3x+1)(x+1) = 0$$

$$(x+1)[(2x+3) - (3x+1)] = 0$$

$$(x+1)(-x+2) = 0.$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau:

$$*) x + 1 = 0$$

$$x = -1;$$

$$*) -x + 2 = 0$$

$$x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = -1$  và  $x = 2$ .

c) Ta có:  $\frac{1}{4}x^2 - (3x-2)^2 = 0$

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - (3x-2)^2 = 0$$

$$\left[\frac{1}{2}x - (3x-2)\right]\left[\frac{1}{2}x + (3x-2)\right] = 0$$

$$\left(-\frac{5}{2}x + 2\right)\left(\frac{7}{2}x - 2\right) = 0.$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau:

$$*) -\frac{5}{2}x + 2 = 0$$

$$\frac{5}{2}x = 2$$

$$x = \frac{4}{5};$$

$$*) \frac{7}{2}x - 2 = 0$$

$$\frac{7}{2}x = 2$$

$$x = \frac{4}{7}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = \frac{4}{5}$  và  $x = \frac{4}{7}$ .

**Ví dụ 2** Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a)  $\frac{7x}{12-x} = 10$ ;

b)  $\frac{x}{2} - \frac{7}{5} = \frac{x}{2x-5}$ ;

c)  $\frac{13}{5x+1} - 1 = \frac{8x}{x-3}$ .

*Giải*

a) Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{7x}{12-x} = 10$  là  $12-x \neq 0$  hay  $x \neq 12$ .

b) Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{x}{2} - \frac{7}{5} = \frac{x}{2x-5}$  là  $2x-5 \neq 0$  hay  $x \neq \frac{5}{2}$ .

c) Điều kiện xác định của phương trình  $\frac{13}{5x+1} - 1 = \frac{8x}{x-3}$  là  $5x+1 \neq 0$  và  $x-3 \neq 0$   
hay  $x \neq -\frac{1}{5}$  và  $x \neq 3$ .

**Ví dụ 3** Giải các phương trình:

a)  $\frac{x^2}{1-2x} + \frac{1+2x}{4} = 1$ ;

b)  $\frac{7}{x+4} - \frac{2}{x-7} = 0$ .

*Giải*

a) Điều kiện xác định:  $x \neq \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{1-2x} + \frac{1+2x}{4} &= 1 \\ \frac{4x^2}{4(1-2x)} + \frac{(1+2x)(1-2x)}{4(1-2x)} &= \frac{4(1-2x)}{4(1-2x)} \\ 4x^2 + (1+2x)(1-2x) &= 4(1-2x) \\ 4x^2 + 1 - 4x^2 &= 4 - 8x \\ 1 &= 4 - 8x \\ 8x &= 3 \\ x &= \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Ta thấy  $x = \frac{3}{8}$  thoả mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = \frac{3}{8}$ .

b) Điều kiện xác định:  $x \neq -4$  và  $x \neq 7$ .

$$\begin{aligned}\frac{7}{x+4} - \frac{2}{x-7} &= 0 \\ \frac{7(x-7)}{(x+4)(x-7)} - \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-7)} &= 0\end{aligned}$$

$$7(x-7) - 2(x+4) = 0$$

$$7x - 49 - 2x - 8 = 0$$

$$5x - 57 = 0$$

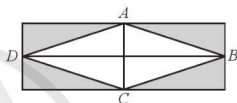
$$5x = 57$$

$$x = \frac{57}{5}.$$

Ta thấy  $x = \frac{57}{5}$  thoả mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = \frac{57}{5}$ .

**Ví dụ 4\*** Một khu đất có dạng hình chữ nhật với chiều dài hơn chiều rộng 16 m. Trên khu đất đó, người ta làm một mảnh vườn trồng hoa có dạng hình thoi  $ABCD$  với đường chéo  $AC$  bằng chiều rộng của khu đất và đường chéo  $BD$  bằng chiều dài của khu đất (Hình 1). Tính chiều dài của khu đất, biết diện tích của phần đất còn lại là  $96 \text{ m}^2$ .



Hình 1

*Giải*

Gọi  $x$  (m) là chiều dài của khu đất với  $x > 16$ . Khi đó, chiều rộng của khu đất là  $x - 16$  (m) và mảnh vườn trồng hoa có  $AC = x - 16$  (m) và  $BD = x$  (m).

Do đó, diện tích của khu đất là:  $(x - 16)x \text{ (m}^2\text{)}$  và diện tích của mảnh vườn trồng hoa là:  $\frac{1}{2}(x - 16)x \text{ (m}^2\text{)}$ . Vì diện tích của phần đất còn lại là  $96 \text{ m}^2$  nên ta có phương trình:

$$(x - 16)x - \frac{1}{2}(x - 16)x = 96 \text{ hay } \frac{1}{2}(x - 16)x = 96. \text{ Tức là, } x^2 - 16x - 192 = 0.$$

$$\text{Giải phương trình: } x^2 - 16x - 192 = 0$$

$$(x^2 - 16x + 64) - 256 = 0$$

$$(x - 8)^2 - 16^2 = 0$$

$$(x - 24)(x + 8) = 0$$

$$x = 24 \text{ hoặc } x = -8.$$

Do  $x > 16$  nên  $x = 24$ . Vậy chiều dài của khu đất là 24 m.

**Ví dụ 5** Một công nhân dự định làm 14 sản phẩm trong thời gian đã định. Nhưng trên thực tế công ty đã giao 21 sản phẩm nên để hoàn thành đúng thời gian đã định, người đó phải làm mỗi giờ thêm 3 sản phẩm. Tính năng suất dự định của công nhân đó.

*Giải*

Gọi  $x$  (sản phẩm/giờ) là năng suất dự định của người công nhân đó với  $x \in \mathbb{N}^*$ .  
Khi đó, năng suất thực tế của người đó là  $x + 3$  (sản phẩm/giờ).

Theo giả thiết, ta có phương trình:  $\frac{14}{x} = \frac{21}{x+3}$ .

Giải phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{14}{x} &= \frac{21}{x+3} \\ \frac{14(x+3)}{x(x+3)} &= \frac{21x}{x(x+3)} \\ 14(x+3) &= 21x \\ 14x + 42 &= 21x \\ 7x &= 42\end{aligned}$$

$$x = 6 \text{ (thỏa mãn } x \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

Vậy năng suất dự định của người công nhân đó là 6 sản phẩm/giờ.

### C. BÀI TẬP

1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a)  $\frac{13}{4-x^2} = 1$ ;

b)  $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x^2}{x-3}$ ;

c)  $\frac{3}{-5x+5} - 3x = \frac{12x}{x^2-1}$ .

2. Giải các phương trình:

a)  $(3x+5)\left(\frac{12}{5} - 2x\right) = 0$ ;

b)  $(7x-1)^2 = 4(1-2x)^2$ ;

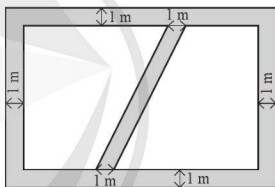
c)  $\frac{2x^2}{4x+3} - \frac{4x-3}{8} = 1$ ;

d\*)  $\frac{x}{x^2+4x-5} - \frac{2}{x-1} = 0$ .

3. Một ô tô đi quãng đường  $AB$  dài 61,5 km. Sau khi đi được 30 km với tốc độ không đổi, ô tô đi tiếp quãng đường còn lại với tốc độ tăng thêm 2 km/h. Tính tốc độ ban đầu của ô tô, biết thời gian ô tô đi trên 30 km đầu bằng thời gian ô tô đi trên 31,5 km còn lại.

4. Một ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm  $A$  đến địa điểm  $B$ , rồi lại đi ngược dòng từ địa điểm  $B$  trở về địa điểm  $A$ . Thời gian ca nô đi xuôi dòng và thời gian ca nô đi ngược dòng chênh lệch nhau 40 phút. Tính tốc độ của ca nô khi nước yên lặng. Biết rằng độ dài quãng đường  $AB$  là 24 km, tốc độ của dòng nước là 3 km/h và tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không đổi trên suốt quãng đường.

5. Cho một phân số có mẫu số lớn hơn tử số là 2. Nếu bớt tử số đi 3 đơn vị và bớt mẫu số đi 6 đơn vị thì ta được một phân số mới bằng phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.
6. Biết khối lượng riêng của kim loại A lớn hơn khối lượng riêng của kim loại B là  $6,24 \text{ kg/m}^3$ . Thể tích của 45 kg kim loại B bằng thể tích của 149 kg kim loại A. Tính khối lượng riêng của kim loại B.
7. Bác Lan dự định dùng hết số tiền 480 nghìn đồng để mua gạo nếp gói bánh chưng nhân dịp tết Nguyên đán. Khi đến cửa hàng, loại gạo mà bác Lan dự định mua đã tăng 2 nghìn đồng/kg. Do vậy, bác Lan đã mua lượng gạo giảm  $\frac{1}{16}$  lần so với dự định. Tính giá tiền mỗi kilôgam gạo mà bác Lan đã mua.
- 8\*. Một mảnh vườn có dạng hình chữ nhật với chiều rộng là 10 m. Chủ vườn đã làm con đường thâm cò (phân tô màu xám) với các kích thước như Hình 2.
- a) Tính chiều dài của mảnh vườn, biết tỉ số giữa diện tích của con đường thâm cò và diện tích của mảnh vườn là  $\frac{1}{3}$ .
- b) Biết rằng chi phí để hoàn thành mỗi mét vuông của con đường thâm cò là 100 000 đồng. Tính số tiền mà chủ vườn đã chi để làm con đường thâm cò đó.



Hình 2

## **PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.** **HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN**

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Phương trình bậc nhất hai ẩn

– Phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là hệ thức dạng:  $ax + by = c$ , trong đó  $a, b, c$  là những số cho trước,  $a \neq 0$  hoặc  $b \neq 0$ .

– Cho phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$ :  $ax + by = c$ . Nếu  $ax_0 + by_0 = c$  là một khẳng định đúng thì cặp số  $(x_0; y_0)$  được gọi là một nghiệm của phương trình  $ax + by = c$ .

– Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , mỗi nghiệm của phương trình  $ax + by = c$  được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm  $(x_0; y_0)$  được biểu diễn bởi điểm có toạ độ  $(x_0; y_0)$ .

– Ta cũng áp dụng được quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân đã biết ở phương trình bậc nhất một ẩn để biến đổi phương trình bậc nhất hai ẩn.

## Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

– Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: 
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (I),$$
 ở đó mỗi phương trình  $ax + by = c$  và  $a'x + b'y = c'$  đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.

– Nếu cặp số  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của từng phương trình trong hệ (I) thì cặp số  $(x_0; y_0)$  được gọi là nghiệm của hệ (I).

– Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

## B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$ ? Đối với những phương trình bậc nhất hai ẩn đó, xác định hệ số  $a$  của  $x$ , hệ số  $b$  của  $y$ , hệ số tự do  $c$ .

a)  $2x^2 + 7y = 5$ .

b)  $-3x + 0y = -7$ .

c)  $-\frac{1}{2}x + 4y = 0$ .

d)  $x - 0,3y^2 = 0,1$ .

*Giải*

Phương trình ở các câu b, c là phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$ . Phương trình ở các câu a, d không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$ .

Phương trình  $-3x + 0y = -7$  có  $a = -3$ ,  $b = 0$ ,  $c = -7$ .

Phương trình  $-\frac{1}{2}x + 4y = 0$  có  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = 4$ ,  $c = 0$ .

### **Ví dụ 2**

a) Trong các cặp số  $(-2; 3)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(-\frac{1}{2}; 2)$ ,  $(-2; 2)$ , cho biết cặp số nào là nghiệm của phương trình  $2x + y = 1$ .

b) Chỉ ra ba nghiệm của phương trình  $x + y = \frac{1}{3}$ .

*Giải*

a) Ta có:  $2 \cdot (-2) + 3 = -1 \neq 1$ ;  $2 \cdot 0 + 1 = 1$ ;  
 $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 1$ ;  $2 \cdot (-2) + 2 = -2 \neq 1$ .

Vậy  $(0; 1), \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$  là hai nghiệm của phương trình  $2x + y = 1$ .

b) Ba nghiệm của phương trình  $x + y = \frac{1}{3}$  là:  $\left(0; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; 0\right), \left(1; -\frac{2}{3}\right)$ .

**Ví dụ 3** Bác Ninh có hai khoản tiền thu được do bán bàn ăn và bàn làm việc cho công ty A. Bàn ăn giá 500 000 đồng/chiếc, bàn làm việc giá 700 000 đồng/chiếc. Bác Ninh thu được tổng số tiền 11 200 000 đồng từ hai khoản tiền trên. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn cho tổng số tiền bác Ninh thu được từ hai khoản tiền do bán bàn ăn và bàn làm việc cho công ty A và chỉ ra hai nghiệm của phương trình đó.

*Giải*

Gọi  $x$  (chiếc) là số bàn ăn mà bác Ninh đã bán cho công ty A với  $x \in \mathbb{N}^*$ . Khi đó, khoản tiền bác Ninh thu được do bán bàn ăn cho công ty A là  $500\,000x$  (đồng).

Gọi  $y$  (chiếc) là số bàn làm việc mà bác Ninh đã bán cho công ty A với  $y \in \mathbb{N}^*$ . Khi đó, khoản tiền bác Ninh thu được do bán bàn làm việc cho công ty A là  $700\,000y$  (đồng).

Ta có phương trình bậc nhất hai ẩn cho tổng số tiền bác Ninh thu được từ hai khoản tiền do bán bàn ăn và bàn làm việc cho công ty A là:

$$500\,000x + 700\,000y = 11\,200\,000 \text{ hay } 5x + 7y = 112.$$

Hai nghiệm của phương trình trên là:  $(7; 11), (14; 6)$ .

**Ví dụ 4** Trong các trường hợp sau, chỉ ra những hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

a)  $\begin{cases} 2x + 3y^2 = 1 \\ -3x = 18; \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 0,2x - 3y = 0,7 \\ -x - 0,8y = 2; \end{cases}$   
c)  $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x + y = -2; \end{cases}$  d)  $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 31x^2 + 5y^2 = -1. \end{cases}$

*Giải*

Hệ phương trình ở các câu b, c là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Trường hợp ở các câu a, d không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

**Ví dụ 5** Trong các hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn sau, hệ phương trình nào nhận cặp số  $(-1; -2)$  là nghiệm?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 12x - 3y = 6 \\ -5x = 5. \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 0,5x - 0,2y = -0,1 \\ -x + 0,7y = -0,4. \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -4x + 7y = -10 \\ 3x + 8y = -19. \end{cases} \end{array}$$

Giải

Thay  $x = -1, y = -2$  vào mỗi phương trình trong từng hệ, ta có:

$$\begin{array}{ll} 12 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = -6 \neq 6; & -5 \cdot (-1) = 5; \\ 0,5 \cdot (-1) - 0,2 \cdot (-2) = -0,1; & -(-1) + 0,7 \cdot (-2) = -0,4; \\ -4 \cdot (-1) + 7 \cdot (-2) = -10; & 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-2) = -19. \end{array}$$

Vậy hệ phương trình ở các câu b, c nhận cặp số  $(-1; -2)$  là nghiệm.

**Ví dụ 6** Hai trường A và B có tổng cộng 180 học sinh tham gia ngày hội STEM. Biết rằng 15% học sinh trường A tham gia và 10% học sinh trường B tham gia đạt giải. Tổng số học sinh hai trường A và B đạt giải là 22 học sinh. Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số học sinh của trường A và trường B tham gia ngày hội đó.

- a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.  
b) Cặp số  $(80; 100)$  có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

Giải

a) Số học sinh trường A đạt giải là:  $15\% \cdot x = \frac{3}{20}x$ ;

Số học sinh trường B đạt giải là:  $10\% \cdot y = \frac{1}{10}y$ .

Tổng số học sinh hai trường A và B đạt giải là:  $\frac{3}{20}x + \frac{1}{10}y$ .

Do hai trường A và B có tổng cộng 180 học sinh tham gia ngày hội STEM và tổng số học sinh hai trường A và B đạt giải là 22 học sinh nên ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ \frac{3}{20}x + \frac{1}{10}y = 22. \end{cases}$$

- b) Thay  $x = 80, y = 100$  vào mỗi phương trình trong hệ phương trình ở câu a, ta có:

$$80 + 100 = 180; \quad \frac{3}{20} \cdot 80 + \frac{1}{10} \cdot 100 = 22.$$

Vậy cặp số  $(80; 100)$  là nghiệm của hệ phương trình ở câu a.



### C. BÀI TẬP

9. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$ ?

a)  $2x + 7y = 15$ .

b)  $0,7x^2 - 0,5y^2 = 11$ .

c)  $x + 0y = 9$ .

10. Cho phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$ :  $2x - 3y = 5$  (1)

Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Cặp số  $(1; -1)$  là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

b) Cặp số  $(4; 1)$  là một nghiệm của phương trình (1).

c) Cặp số  $(-2; -3)$  không phải là nghiệm của phương trình (1).

11. a) Chứng tỏ rằng các cặp số  $(-5; 2)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(2; 2)$  đều là nghiệm của phương trình  $0x - 2y = -4$ .

b) Trong các cặp số  $(7; 1)$ ,  $(1; 7)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $\left(1; -\frac{5}{2}\right)$ , cho biết cặp số nào là nghiệm của phương trình  $3x - 0y = 3$ .

12. Ba bạn An, Bình, Chi cùng đi nhà sách. Cả ba bạn đã mua hết 279 000 đồng. Ba bạn đã mua 3 quyển truyện với giá 45 000 đồng/quyển và mua thêm bút bi, bút chì màu. Giá của bút bi và bút chì màu lần lượt là 3 600 đồng/chiếc và 5 000 đồng/chiếc. Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số chiếc bút bi và bút chì màu mà ba bạn đã mua. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn cho số tiền mà ba bạn đã dùng để mua bút bi, bút chì màu và chỉ ra một nghiệm của phương trình đó.

13. Cô Hà sử dụng dịch vụ điện thoại di động với giá cước gọi nội mạng và gọi ngoại mạng lần lượt là 1 190 đồng/phút và 1 390 đồng/phút. Trong tháng 10, cô Hà đã sử dụng 500 phút gọi (cả nội mạng và ngoại mạng) với tiền cước là 635 000 đồng. Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số phút gọi nội mạng và ngoại mạng trong tháng 10 của cô Hà.

a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

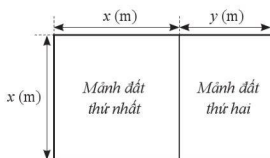
b) Cặp số  $(300; 200)$  có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

14. Người ta chia một khu đất có dạng hình chữ nhật thành hai mảnh đất: mảnh đất thứ nhất có dạng hình vuông với độ dài cạnh  $x$  (m); mảnh đất thứ hai có dạng hình chữ nhật với chiều dài  $x$  (m) và chiều rộng  $y$  (m) ( $x > y > 0$ ) được minh họa ở Hình 3. Chu vi của mảnh đất thứ nhất lớn hơn chu vi của mảnh đất thứ hai là

6,8 m. Trên một cạnh là chiều dài của khu đất, người ta đã xây một tường rào với chi phí 1 130 000 đồng theo giá 50 000 đồng/mét.

a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

b) Cặp số  $(13 ; 9,6)$  có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?



Hình 3

15. Người ta muốn pha dung dịch  $\text{HNO}_3$  30% với dung dịch  $\text{HNO}_3$  55% để được dung dịch  $\text{HNO}_3$  50%. Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số gam dung dịch  $\text{HNO}_3$  30% và  $\text{HNO}_3$  55% cần dùng để pha được 100 g dung dịch  $\text{HNO}_3$  50%.

a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

b) Cặp số  $(20 ; 80)$  có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

16. Một ô tô đi từ địa điểm  $A$  đến địa điểm  $B$  với tốc độ  $x$  (km/h) thì đi hết  $y$  (giờ) với  $x > 10$  và  $y > 0,5$ . Nếu tốc độ của ô tô giảm 10 km/h thì thời gian ô tô đi tăng 45 phút. Nếu tốc độ của ô tô tăng 10 km/h thì thời gian ô tô đi giảm 30 phút.

a) Viết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

b) Cặp số  $(50 ; 3)$  có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?



## GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế theo các bước sau:

*Bước 1. (Thế)* Từ một phương trình của hệ đã cho, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình một ẩn

*Bước 2. (Giải phương trình một ẩn)* Giải phương trình (một ẩn) nhận được ở Bước 1 để tìm giá trị của ẩn đó

**Bước 3. (Tìm ẩn còn lại và kết luận)** Thay giá trị vừa tìm được của ẩn đó ở *Bước 2* vào biểu thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia ở *Bước 1* để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

## Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số theo các bước sau:

**Bước 1. (Làm cho hai hệ số của một ẩn nào đó bằng nhau hoặc đối nhau)** Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

**Bước 2. (Đưa về phương trình một ẩn)** Cộng (hay trừ) từng vế hai phương trình của hệ phương trình nhận được ở *Bước 1* để nhận được một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0, tức là nhận được phương trình một ẩn. Giải phương trình một ẩn đó.

**Bước 3. (Tìm ẩn còn lại và kết luận)** Thay giá trị vừa tìm được của ẩn đó ở *Bước 2* vào một trong hai phương trình của hệ đã cho để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

## B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

$$\text{a) } \begin{cases} 0,1x + 0,2y = 0,5 \\ -2x + 3y = 4; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{7}x - \frac{1}{5}y = \frac{1}{3} \\ x - 1,4y = 1,2. \end{cases}$$

*Giải*

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} 0,1x + 0,2y = 0,5 & (1) \\ -2x + 3y = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ phương trình (1), ta có: } x + 2y = 5 \text{ hay } x = 5 - 2y \quad (3)$$

$$\text{Thế } x = 5 - 2y \text{ vào phương trình (2), ta được: } -2(5 - 2y) + 3y = 4 \quad (4)$$

$$\text{Giải phương trình (4): } -2(5 - 2y) + 3y = 4$$

$$-10 + 4y + 3y = 4$$

$$7y = 14$$

$$y = 2.$$

$$\text{Thay } y = 2 \text{ vào phương trình (3), ta có: } x = 5 - 2 \cdot 2 = 1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (1; 2)$ .

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} \frac{1}{7}x - \frac{1}{5}y = \frac{1}{3} & (5) \\ x - 1,4y = 1,2 & (6) \end{cases}$$

Từ phương trình (6), ta có:  $x = 1,2 + 1,4y$  (7)

Thế  $x = 1,2 + 1,4y$  vào phương trình (5), ta được:  $\frac{1}{7}(1,2 + 1,4y) - \frac{1}{5}y = \frac{1}{3}$  (8)

$$\begin{aligned} \text{Giải phương trình (8): } \quad \frac{1}{7}(1,2 + 1,4y) - \frac{1}{5}y &= \frac{1}{3} \\ \frac{6}{35} + \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}y &= \frac{1}{3} \\ 0y &= \frac{17}{105}. \end{aligned}$$

Do đó, phương trình (8) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

**Ví dụ 2** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 5x - 3y = -5 \\ 3x + 4y = 8,6; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x - 6y = 2 \\ -3x + 9y = -3. \end{cases} \end{array}$$

*Giải*

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} 5x - 3y = -5 & (1) \\ 3x + 4y = 8,6 & (2) \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (1) với 3 và nhân hai vế của phương trình (2) với 5,

$$\text{ta được hệ phương trình sau: } \begin{cases} 15x - 9y = -15 & (3) \\ 15x + 20y = 43 & (4) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình (4) và (3), ta nhận được phương trình:

$$29y = 58 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Giải phương trình (5): } \quad 29y &= 58 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Thay  $y = 2$  vào phương trình (1), ta có:  $5x - 3 \cdot 2 = -5$  (6)

$$\begin{aligned} \text{Giải phương trình (6): } \quad 5x - 3 \cdot 2 &= -5 \\ 5x - 6 &= -5 \\ 5x &= 1 \\ x &= 0,2. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (0,2; 2)$ .

b) Ta có: 
$$\begin{cases} 2x - 6y = 2 & (7) \\ -3x + 9y = -3 & (8) \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (7) với 3 và nhân hai vế của phương trình (8) với 2,

ta được hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} 6x - 18y = 6 & (9) \\ -6x + 18y = -6 & (10) \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình (9) và (10), ta nhận được phương trình:

$$0x + 0y = 0 \quad (11)$$

Do phương trình (11) có vô số nghiệm nên hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

Từ phương trình (7), ta có:  $x - 3y = 1$  hay  $x = 3y + 1$ . Vậy phương trình đã cho có vô số nghiệm  $(x; y) = (3a + 1; a)$  với  $a \in \mathbb{R}$ .

**Ví dụ 3** Để mở rộng kinh doanh, một cửa hàng đã vay 600 triệu đồng kì hạn 12 tháng từ hai ngân hàng A và B với lãi suất lần lượt là 8%/năm và 9%/năm. Tổng số tiền lãi một năm phải trả cho cả hai ngân hàng đó của cửa hàng là 51,5 triệu đồng. Tính số tiền mà cửa hàng đã vay từ mỗi ngân hàng.

*Giải*

Gọi  $x$  (triệu đồng),  $y$  (triệu đồng) lần lượt là số tiền mà cửa hàng đã vay từ ngân hàng A, B ( $x > 0, y > 0$ ).

Theo giả thiết, ta có phương trình:  $x + y = 600$ .

Mặt khác, ta có phương trình:  $8\% \cdot x + 9\% \cdot y = 51,5$  hay  $8x + 9y = 5150$ .

Ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 600 & (1) \\ 8x + 9y = 5150 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có:  $y = 600 - x$ .

Thế  $y = 600 - x$  vào phương trình (2), ta được:  $8x + 9(600 - x) = 5150$  (3)

Giải phương trình (3):  $8x + 9(600 - x) = 5150$

$$8x + 5400 - 9x = 5150$$

$$-x + 5400 = 5150$$

$$x = 250 \text{ (thỏa mãn } x > 0).$$

Thay  $x = 250$  vào phương trình  $y = 600 - x$ , ta có:

$$y = 600 - 250 = 350 \text{ (thỏa mãn } y > 0).$$

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (250; 350)$ .

Vậy số tiền mà cửa hàng đã vay từ ngân hàng A, B lần lượt là 250 triệu đồng, 350 triệu đồng.

**Ví dụ 4** Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số bằng 11. Nếu đổi vị trí hai chữ số của số đó cho nhau thì ta được một số mới lớn hơn số ban đầu là 63 đơn vị.

*Giải*

Gọi số cần tìm có dạng  $\overline{ab}$  ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$  và  $1 \leq a \leq 9$ ,  $1 \leq b \leq 9$ ).

Theo giả thiết, ta có phương trình:  $a + b = 11$ .

Mặt khác, ta có phương trình:  $\overline{ba} - \overline{ab} = 63$  hay  $(10b + a) - (10a + b) = 63$ , tức là  $-9a + 9b = 63$  hay  $-a + b = 7$ .

Ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} a + b = 11 & (1) \\ -a + b = 7 & (2) \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình (1) và (2), ta nhận được phương trình:

$$2b = 18 \quad (3)$$

Giải phương trình (3):  $2b = 18$

$$b = 9 \text{ (thỏa mãn } b \in \mathbb{N} \text{ và } 1 \leq b \leq 9).$$

Thay  $b = 9$  vào phương trình (1), ta có:  $a + 9 = 11$  (4)

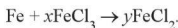
Giải phương trình (4):  $a + 9 = 11$

$$a = 2 \text{ (thỏa mãn } a \in \mathbb{N} \text{ và } 1 \leq a \leq 9)$$

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(a; b) = (2; 9)$ .

Vậy số cần tìm là 29.

**Ví dụ 5** Tìm các hệ số  $x, y$  để cân bằng phương trình phản ứng hoá học:



*Giải*

Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và Cl, ta có: 
$$\begin{cases} 1 + x = y \\ 3x = 2y. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 1 + x = y & (1) \\ 3x = 2y & (2) \end{cases}$$

Thế  $y = 1 + x$  vào phương trình (2), ta được:  $3x = 2(x + 1)$  (3)

Giải phương trình (3):  $3x = 2(x + 1)$

$$3x = 2x + 2$$

$$x = 2.$$

Thay  $x = 2$  vào phương trình (1), ta có:  $1 + 2 = y$  hay  $y = 3$ .

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (2; 3)$ .

Vậy ta có phương trình sau cân bằng:  $\text{Fe} + 2\text{FeCl}_3 \rightarrow 3\text{FeCl}_2$ .

### C. BÀI TẬP

17. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 10x - 3y = -0,5 \\ x + 2y = 0,41; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3} - 2y = -\frac{5}{3}; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 5x - 0,7y = 1 \\ -10x + 1,4y = -2. \end{cases} \end{array}$$

18. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x - 5y = -11 \\ -3x + 7y = 15; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 0,3x - 2y = -0,7 \\ 2x - 0,2y = 1,9; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -5x + 7y = 3 \\ 7x - 9,8y = -4. \end{cases} \end{array}$$

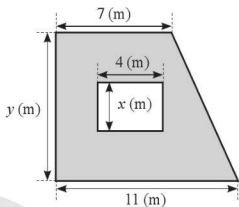
19. Tìm hai số, biết rằng bốn lần số thứ nhất cộng với ba lần số thứ hai bằng 6 120 và ba lần số thứ nhất hơn hai lần số thứ hai là 1 615.

20. Một nhà máy sản xuất hai loại xi măng: loại I và loại II. Cứ sản xuất mỗi tấn xi măng loại I thì nhà máy thải ra 0,5 kg  $\text{CO}_2$  (carbon dioxide) và 0,3 kg  $\text{SO}_3$  (sulfur trioxide), sản xuất mỗi tấn xi măng loại II thì nhà máy thải ra 0,8 kg  $\text{CO}_2$  và 0,45 kg  $\text{SO}_3$ . Trung bình mỗi ngày, nhà máy nhận được thông số lượng khí thải  $\text{CO}_2$  và  $\text{SO}_3$  lần lượt là 1 700 kg và 975 kg. Tính khối lượng xi măng loại I và loại II trung bình mỗi ngày nhà máy sản xuất được.

21. Bác Lan có 500 triệu đồng để đầu tư vào hai khoản: trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng với kì hạn 12 tháng. Lãi suất của trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng lần lượt là 7%/năm và 6%/năm. Tính số tiền mà bác Lan đầu tư vào mỗi khoản để mỗi năm nhận được tiền lãi là 32 triệu đồng từ hai khoản đầu tư đó.

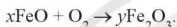
22. Một ô tô dự định đi từ địa điểm  $A$  đến địa điểm  $B$  trong một khoảng thời gian nhất định. Nếu ô tô đi với tốc độ 40 km/h thì ô tô đến địa điểm  $B$  chậm hơn 90 phút so với dự định. Nếu ô tô đi với tốc độ 60 km/h thì ô tô đến địa điểm  $B$  nhanh hơn 30 phút so với dự định. Tính quãng đường  $AB$  và thời gian ô tô dự định đi.

23. Một cửa sổ có dạng hình chữ nhật được xây trên bức tường có dạng hình thang vuông với các kích thước như Hình 4. Tìm  $x, y$ , biết rằng diện tích của bức tường không tính phần làm cửa sổ là  $69 \text{ m}^2$  và  $2x = y - 3$ .



Hình 4

24. Tìm các hệ số  $x, y$  để cân bằng phương trình phản ứng hoá học:



25\*. Hai đội công nhân cùng đào đất để đắp đê ngăn triều cường. Nếu hai đội cùng làm thì 2 ngày hoàn thành công việc. Nếu đội thứ nhất làm trong 4 ngày rồi nghỉ, đội thứ hai làm tiếp trong 1 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Tính thời gian mỗi đội làm riêng để hoàn thành công việc.

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

26. Tổng các nghiệm của phương trình  $(x - 3)(2x + 6) = 0$  là

A. -6.

B. 0.

C. 3.

D. 6.

27. Trong các cặp số  $(-1; 0)$ ,  $(2; -2)$ ,  $(6; -1)$ ,  $(4; -3)$ ,  $\left(0; -\frac{3}{5}\right)$ , có bao nhiêu cặp số là nghiệm của phương trình  $3x + 5y = -3$ ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

28. Giải các phương trình sau:

a)  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{16}{x^2-1};$

b)  $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0.$



**29.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y = -2 \\ 7x + 2y = 9; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - \frac{y}{2} = -1 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

**30.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

$$\text{a) } \begin{cases} 0,7x + 0,5y = 1,2 \\ -x + 2y = 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ -15x - 6y = -4. \end{cases}$$

**31.** Hai khu công nghiệp A và B có tổng cộng 2 200 công nhân. Sau khi chuyển 100 công nhân ở khu A sang khu B thì  $\frac{2}{3}$  số công nhân ở khu A bằng  $\frac{4}{5}$  số công nhân ở khu B. Tính số công nhân ở mỗi khu công nghiệp lúc ban đầu.

**32.** Một công ty du lịch tiến hành giảm giá cho gói du lịch loại A trong các dịp lễ:

– Tuần lễ kích cầu du lịch: Hà Nội đi Đà Lạt giảm 15% giá niêm yết, Hà Nội đi Huế giảm 10% giá niêm yết;

– Ngày lễ Quốc tế Lao động: Hà Nội đi Đà Lạt giảm 20% giá niêm yết, Hà Nội đi Huế giảm 15% giá niêm yết.

Trong tuần lễ kích cầu du lịch, nếu 3 gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt và 2 gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Huế thì khách hàng phải trả 15 000 000 đồng. Trong ngày lễ Quốc tế Lao động, nếu 2 gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt và 3 gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Huế thì khách hàng phải trả 14 810 000 đồng. Tính giá niêm yết của gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt và chuyến Hà Nội đi Huế.

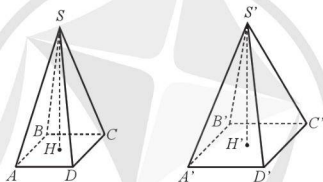
**33.** Một tam giác có chiều cao bằng  $\frac{3}{4}$  cạnh đáy. Nếu tăng chiều cao thêm 3 dm và giảm cạnh đáy đi 3 dm thì diện tích của tam giác tăng thêm 6 dm<sup>2</sup>. Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác đó.

**34.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không chứa nước thì bể đó đầy nước sau 4 giờ 48 phút. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ và vòi thứ hai chảy trong 3 giờ

thì cả hai vòi chảy được  $\frac{3}{4}$  bể nước. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng một mình đầy bể.

35\*. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc. Xe máy thứ nhất đi từ địa điểm  $A$  đến địa điểm  $B$  và xe máy thứ hai đi từ địa điểm  $B$  đến địa điểm  $A$  (trên cùng quãng đường). Tốc độ của xe máy thứ hai bằng  $\frac{4}{5}$  tốc độ của xe máy thứ nhất và sau 2 giờ hai xe gặp nhau. Hỏi mỗi xe đi cả quãng đường  $AB$  trong bao lâu?

36\*. Ở Hình 5, cho hai hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  và  $S'.A'B'C'D'$  có cùng chiều cao  $SH = S'H' = 30$  cm. Thể tích của hình chóp  $S.ABCD$  nhỏ hơn thể tích của hình chóp  $S'.A'B'C'D'$  là  $240 \text{ cm}^3$ . Tính độ dài cạnh đáy của mỗi hình chóp, biết rằng  $A'B' - AB = 2$  cm.



Hình 5

## LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Ta có:  $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$ . Do đó, điều kiện xác định của phương trình

$$\frac{13}{4 - x^2} = 1 \text{ là } 4 - x^2 \neq 0 \text{ hay } x \neq 2 \text{ và } x \neq -2.$$

b)  $x \neq 3$ .

c)  $x \neq 1$  và  $x \neq -1$ .

2. a)  $x = -\frac{5}{3}$ ;  $x = \frac{6}{5}$ .      b)  $x = \frac{3}{11}$ ;  $x = -\frac{1}{3}$ .      c)  $x = -\frac{15}{32}$ .

d\*) Ta có:  $x^2 + 4x - 5 = (x^2 + 4x + 4) - 9 = (x + 2)^2 - 3^2 = (x - 1)(x + 5)$ .

Điều kiện xác định:  $x \neq 1$  và  $x \neq -5$ .

$$\frac{x}{x^2 + 4x - 5} - \frac{2}{x - 1} = 0$$

$$\frac{x}{(x - 1)(x + 5)} - \frac{2(x + 5)}{(x - 1)(x + 5)} = 0$$

$$x - 2(x + 5) = 0$$

$$x - 2x - 10 = 0$$

$$x = -10 \text{ (thỏa mãn } x \neq 1 \text{ và } x \neq -5).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = -10$ .

3. Gọi  $x$  (km/h) là tốc độ ban đầu của ô tô với  $x > 0$ . Ta lập được phương trình:

$$\frac{30}{x} = \frac{31,5}{x + 2}.$$

Giải phương trình, ta tìm được  $x = 40$  (thỏa mãn  $x > 0$ ). Vậy tốc độ ban đầu của ô tô là 40 km/h.

4. Gọi  $x$  (km/h) là tốc độ của ca nô khi nước yên lặng với  $x > 3$ . Ta lập được phương

trình:  $\frac{24}{x - 3} - \frac{24}{x + 3} = \frac{2}{3}$ . Giải phương trình, ta tìm được  $x = 15$  (thỏa mãn  $x > 3$ )

hoặc  $x = -15$  (không thỏa mãn  $x > 3$ ). Vậy tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là 15 km/h.

5. Gọi  $x$  là tử số của phân số cần tìm với  $x \in \mathbb{Z}$  và  $x \neq -2$ ;  $x \neq 0$ ;  $x \neq 4$ . Ta lập được

phương trình:  $\frac{x - 3}{x + 2 - 6} = \frac{x + 2}{x}$  hay  $\frac{x - 3}{x - 4} = \frac{x + 2}{x}$ . Giải phương trình, ta tìm

được  $x = 8$  (thỏa mãn  $x \in \mathbb{Z}$  và  $x \neq -2$ ;  $x \neq 0$ ;  $x \neq 4$ ). Vậy phân số cần tìm là  $\frac{8}{10}$ .

6. Gọi  $x$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) là khối lượng riêng của kim loại B với  $x > 0$ . Ta lập được phương trình:  $\frac{45}{x} = \frac{149}{x + 6,24}$ . Giải phương trình, ta tìm được  $x = 2,7$  (thỏa mãn  $x > 0$ ). Vậy khối lượng riêng của kim loại B là  $2,7 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

7. Gọi  $x$  (nghìn đồng) là giá tiền mỗi kilôgam gạo mà bác Lan đã mua với  $x > 2$ . Ta lập được phương trình:  $\frac{480}{x} = \frac{15}{16} \cdot \frac{480}{x - 2}$ . Giải phương trình, ta tìm được  $x = 32$  (thỏa mãn  $x > 2$ ). Vậy giá tiền mỗi kilôgam gạo mà bác Lan đã mua là 32 nghìn đồng.

8\*. a) Gọi  $x$  (m) là chiều dài của mảnh vườn với  $x > 10$ . Khi đó, diện tích của mảnh vườn là  $10x$  ( $\text{m}^2$ ). Diện tích của con đường thăm cỏ là:

$$2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot (x - 2) \cdot 1 + 1 \cdot (10 - 2) = 2x + 24 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Theo giả thiết, ta có phương trình:  $\frac{2x + 24}{10x} = \frac{1}{3}$ . Giải phương trình, ta tìm được  $x = 18$  (thỏa mãn  $x > 10$ ). Vậy chiều dài của mảnh vườn là 18 m.

b) 6 000 000 đồng.

9. Phương trình ở các câu a, c là phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$ .

10. Phát biểu ở câu b là đúng. Phát biểu ở các câu a, c là sai.

11. Học sinh tự làm.

12. Phương trình bậc nhất hai ẩn cho số tiền mà ba bạn đã dùng để mua bút bi, bút chì màu là:  $3\,600x + 5\,000y = 144\,000$  hay  $18x + 25y = 720$ .

Một nghiệm của phương trình trên là:  $(15; 18)$ .

13. a) Ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 1\,190x + 1\,390y = 635\,000 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x + y = 500 \\ 119x + 139y = 63\,500. \end{cases}$$

b) Học sinh tự làm.

14. a) Do chu vi của mảnh đất thứ nhất lớn hơn chu vi của mảnh đất thứ hai là 6,8 m nên ta có phương trình:  $4x - 2(x + y) = 6,8$  hay  $x - y = 3,4$ . Vậy hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} x - y = 3,4 \\ x + y = 22,6. \end{cases}$$

b) Học sinh tự làm.

15. a) Do pha dung dịch  $\text{HNO}_3$  30% với dung dịch  $\text{HNO}_3$  55% để được 100 g dung dịch  $\text{HNO}_3$  50% nên ta có phương trình:

$$\frac{30\% \cdot x + 55\% \cdot y}{100} = 50\% \text{ hay } 6x + 11y = 1\,000.$$

Vậy hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 6x + 11y = 1\,000. \end{cases}$$

b) Học sinh tự làm.

16. a) Do tốc độ của ô tô giảm 10 km/h thì thời gian ô tô đi tăng 45 phút nên ta có phương trình:  $(x - 10)\left(y + \frac{3}{4}\right) = xy$  hay  $3x - 40y = 30$ . Mặt khác, tốc độ của ô tô tăng 10 km/h thì thời gian ô tô đi giảm 30 phút nên ta có phương trình:  $(x + 10)\left(y - \frac{1}{2}\right) = xy$  hay  $-x + 20y = 10$ . Vậy hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng là:

$$\begin{cases} 3x - 40y = 30 \\ -x + 20y = 10. \end{cases}$$

b) Học sinh tự làm.

17. a)  $(x; y) = (0,01; 0,2)$ .      b)  $(x; y) = (1; 1)$ .      c) Vô số nghiệm.

18. a)  $(x; y) = (2; 3)$ .      b)  $(x; y) = (1; 0,5)$ .      c) Vô nghiệm.

19. Gọi  $x$  là số thứ nhất,  $y$  là số thứ hai. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6\,120 \\ 3x - 2y = 1\,615. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 1\,005$  và  $y = 700$ . Vậy hai số cần tìm là 1 005 và 700.

20. Gọi  $x$  (tấn),  $y$  (tấn) lần lượt là khối lượng xi măng loại I, loại II trung bình mỗi ngày nhà máy sản xuất được với  $x > 0, y > 0$ . Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,8y = 1\,700 \\ 0,3x + 0,45y = 975. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 1\,000$  (thỏa mãn  $x > 0$ ) và  $y = 1\,500$  (thỏa mãn  $y > 0$ ). Vậy khối lượng xi măng loại I và loại II trung bình mỗi ngày nhà máy sản xuất được lần lượt là 1 000 tấn và 1 500 tấn.

21. Gọi  $x$  (triệu đồng),  $y$  (triệu đồng) lần lượt là số tiền mà bác Lan đầu tư vào trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng với  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,07x + 0,06y = 32. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 200$  (thỏa mãn  $x > 0$ ) và  $y = 300$  (thỏa mãn  $y > 0$ ). Vậy số tiền mà bác Lan đầu tư vào trái phiếu và gửi tiết kiệm ngân hàng lần lượt là 200 triệu đồng và 300 triệu đồng.

22. Gọi  $x$  (km) là quãng đường  $AB$  và  $y$  (giờ) là thời gian ô tô dự định đi với  $x > 0$ ,  $y > \frac{1}{2}$ . Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{40} - y = \frac{3}{2} \\ y - \frac{x}{60} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x - 40y = 60 \\ -x + 60y = 30. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 240$  (thỏa mãn  $x > 0$ ) và  $y = 4,5$  (thỏa mãn  $y > \frac{1}{2}$ ). Vậy quãng đường  $AB$  dài 240 km và thời gian ô tô dự định đi là 4,5 giờ.

23. Ta lập được hệ phương trình:

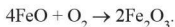
$$\begin{cases} \frac{(7+11)y}{2} - 4x = 69 \\ 2x = y - 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} -4x + 9y = 69 \\ 2x - y = -3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 3$  và  $y = 9$ .

24. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + 2 = 3y. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 4$  và  $y = 2$ . Vậy ta có phương trình sau cân bằng:



- 25\*. Gọi  $x, y$  lần lượt là số ngày làm riêng để hoàn thành công việc của đội thứ nhất, đội thứ hai với  $x > 0, y > 0$ . Khi đó, trong mỗi ngày thì đội thứ nhất làm được  $\frac{1}{x}$  công việc và đội thứ hai làm được  $\frac{1}{y}$  công việc. Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

Coi  $\frac{1}{x}$  và  $\frac{1}{y}$  là hai ẩn và giải hệ phương trình, ta tìm được  $\frac{1}{x} = \frac{1}{6}$  và  $\frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ . Suy ra  $x = 6$  (thỏa mãn  $x > 0$ ) và  $y = 3$  (thỏa mãn  $y > 0$ ). Vậy thời gian làm riêng để hoàn thành công việc của đội thứ nhất và đội thứ hai lần lượt là 6 ngày và 3 ngày.

26. B.

27. C.

28. a)  $x = 4$ .

b) Vô nghiệm.

29. a)  $(x; y) = (1; 1)$ .

b)  $(x; y) = (0; 2)$ .

30. a)  $(x; y) = (1; 1)$ .

b) Vô nghiệm.

31. Gọi  $x, y$  lần lượt là số công nhân ở khu công nghiệp A, khu công nghiệp B lúc ban đầu với  $x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*$  và  $x > 100$ . Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2\,200 \\ \frac{2}{3}(x - 100) = \frac{4}{5}(y + 100) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + y = 2\,200 \\ \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y = \frac{440}{3}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 1\,300$  (thỏa mãn  $x \in \mathbb{N}^*$  và  $x > 100$ ) và  $y = 900$  (thỏa mãn  $y \in \mathbb{N}^*$ ). Vậy số công nhân ở khu công nghiệp A và khu công nghiệp B lúc ban đầu lần lượt là 1 300 công nhân và 900 công nhân.

32. Gọi  $x$  (triệu đồng),  $y$  (triệu đồng) lần lượt là giá niêm yết của gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt, chuyến Hà Nội đi Huế với  $x > 0, y > 0$ . Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3 \cdot 0,85x + 2 \cdot 0,9y = 15 \\ 2 \cdot 0,8x + 3 \cdot 0,85y = 14,81 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2,55x + 1,8y = 15 \\ 1,6x + 2,55y = 14,81. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 3,2$  (thỏa mãn  $x > 0$ ) và  $y = 3,8$  (thỏa mãn  $y > 0$ ). Vậy giá niêm yết của gói du lịch loại A cho chuyến Hà Nội đi Đà Lạt và chuyến Hà Nội đi Huế lần lượt là 3,2 triệu đồng và 3,8 triệu đồng.

33. Gọi  $x$  (dm),  $y$  (dm) lần lượt là chiều cao, cạnh đáy của tam giác với  $x > 0, y > 3$ .

Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ (x+3)(y-3) = xy + 12 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ -x + y = 7. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 21$  (thỏa mãn  $x > 0$ ) và  $y = 28$  (thỏa mãn  $y > 3$ ). Vậy tam giác đó có chiều cao là 21 dm, cạnh đáy là 28 dm.

34. Thời gian chạy riêng một mình để đầy bể của vòi thứ nhất và vòi thứ hai lần lượt là 8 giờ và 12 giờ.

- 35\*. Gọi  $x$  (km/h),  $y$  (km/h) lần lượt là tốc độ của xe máy thứ nhất, xe máy thứ hai với  $x > 0, y > 0$ . Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x \\ 2x + 2y = AB. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = \frac{5AB}{18}$  và  $y = \frac{2AB}{9}$ .

Xe máy thứ nhất đi cả quãng đường  $AB$  trong:

$$AB : \frac{5AB}{18} = 3,6 \text{ (giờ)}.$$

Xe máy thứ hai đi cả quãng đường  $AB$  trong:

$$AB : \frac{2AB}{9} = 4,5 \text{ (giờ)}.$$

- 36\*. Đặt  $AB = x$  (cm),  $A'B' = y$  (cm). Theo giả thiết, ta có:  $\frac{1}{3}y^2 \cdot 30 - \frac{1}{3}x^2 \cdot 30 = 240$   
hay  $y^2 - x^2 = 24$ , tức là  $(y-x)(y+x) = 24$ . Mặt khác, ta lại có:  $y - x = 2$  nên  $2(y+x) = 24$  hay  $y+x = 12$ . Ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y+x=12 \\ y-x=2. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được  $x = 5$  (cm) và  $y = 7$  (cm). Vậy cạnh đáy của hình chóp  $S.ABCD$  và  $S'.A'B'C'D'$  lần lượt là 5 cm và 7 cm.



# Chương II

## BẤT ĐẲNG THỨC.

### BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

#### BẤT ĐẲNG THỨC

##### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### Nhắc lại về thứ tự trong tập hợp số thực

Ta có các kết quả sau:

- Trên trục số nằm ngang, nếu số thực  $a$  nằm bên trái số thực  $b$  thì  $a < b$  hay  $b > a$ .



- Tổng của hai số thực dương là số thực dương. Tổng của hai số thực âm là số thực âm.
- Với hai số thực  $a, b$ , ta có:
  - $ab > 0$  khi  $a, b$  cùng dương hoặc cùng âm (hay  $a, b$  cùng dấu) và ngược lại;
  - $ab < 0$  khi  $a, b$  trái dấu và ngược lại.
- Với mỗi số thực  $a$ , ta có  $a^2 \geq 0$ . Ngoài ra,  $a^2 = 0$  khi  $a = 0$  và ngược lại.
- Với  $a, b$  là hai số thực dương, nếu  $a > b$  thì  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$  và ngược lại.

##### Bất đẳng thức

– *Khái niệm:* Ta gọi hệ thức dạng  $a < b$  (hay  $a > b, a \leq b, a \geq b$ ) là bất đẳng thức và gọi  $a$  là vế trái,  $b$  là vế phải của bất đẳng thức.

– *Tính chất:*

- + Nếu  $a > b$  thì  $a + c > b + c$  với mọi số thực  $c$ .
- + Nếu  $a > b$  thì  $ac > bc$  với  $c > 0$ .
- + Nếu  $a > b$  thì  $ac < bc$  với  $c < 0$ .
- + Nếu  $a > b$  và  $b > c$  thì  $a > c$ .

### B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1)**

Chứng minh:

a)  $3(b - 1) > 3(a - 1)$  với  $a < b$ ;

b)  $3 - 2m < 4 - 3n$  với  $2m > 3n$ ;

c)  $p - q - \frac{1}{3} > 2q - p - \frac{1}{2}$  với  $3q \leq 2p$ .

*Giải*

a) Xét hiệu:  $3(b-1) - 3(a-1) = 3b - 3 - 3a + 3 = 3b - 3a = 3(b-a)$ .

Do  $a < b$  nên  $b - a > 0$  hay  $3(b - a) > 0$ .

Vậy  $3(b-1) - 3(a-1) > 0$  hay  $3(b-1) > 3(a-1)$ .

b) Xét hiệu:  $(3 - 2m) - (4 - 3n) = 3 - 2m - 4 + 3n = 3n - 2m - 1$ .

Do  $2m > 3n$  nên  $3n - 2m < 0$  hay  $3n - 2m - 1 < 0$ .

Vậy  $(3 - 2m) - (4 - 3n) < 0$  hay  $3 - 2m < 4 - 3n$ .

c) Xét hiệu:  $\left(p - q - \frac{1}{3}\right) - \left(2q - p - \frac{1}{2}\right) = p - q - \frac{1}{3} - 2q + p + \frac{1}{2} = 2p - 3q + \frac{1}{6}.$

Do  $3q \leq 2p$  nên  $2p - 3q \geq 0$  hay  $2p - 3q + \frac{1}{6} > 0$ .

$$\text{Vậy } \left(p - q - \frac{1}{3}\right) - \left(2q - p - \frac{1}{2}\right) > 0 \text{ hay } p - q - \frac{1}{3} > 2q - p - \frac{1}{2}.$$

**Ví dụ 2]**

Cho  $a, b$  là hai số dương. Chứng minh:

a)  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ;

b)  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ ;

c)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b};$

d)  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  với  $a < b$ .

*Giải*

a) Xét hiệu:  $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$ .

Với hai số  $a, b$  dương, ta có:  $(a - b)^2 \geq 0, ab > 0$ . Suy ra  $\frac{(a - b)^2}{ab} \geq 0$ .

$$\text{Vậy } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 \geq 0 \text{ hay } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

b) Xét hiệu:  $(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b)$   
 $= (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a + b)(a - b)^2.$

Với hai số  $a, b$  dương, ta có:  $(a-b)^2 \geq 0$  và  $a+b > 0$ . Suy ra  $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$ .

Vậy  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ .

$$\begin{aligned} \text{c) Xét hiệu: } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{4}{a+b} &= \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{ab(a+b)} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}. \end{aligned}$$

Với hai số  $a, b$  dương, ta có:  $(a-b)^2 \geq 0$ ,  $ab > 0$ ,  $a+b > 0$ . Suy ra  $\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$ .

$$\text{Vậy } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

d) Xét hiệu:  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ . Do  $a < b$  nên  $b-a > 0$ . Mặt khác, ta có  $ab > 0$  với hai số  $a, b$  dương tùy ý nên  $\frac{b-a}{ab} > 0$  với  $0 < a < b$ .

$$\text{Vậy } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

**Ví dụ 3** Chứng minh:

$$\text{a) } \frac{1}{12} - \sqrt{16} > \frac{1}{13} - \sqrt{17};$$

$$\text{b) } \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2\,022 \cdot 2\,023} + \frac{1}{2\,023 \cdot 2\,024} > \frac{1}{3};$$

$$\text{c) } \frac{2\,021}{2\,023} + \frac{2\,022}{2\,024} > \frac{2\,022 + 2\,021}{2\,024 + 2\,023}.$$

*Giải*

$$\text{a) Do } 17 > 16 \text{ nên } \sqrt{17} > \sqrt{16} \text{ hay } -\sqrt{16} > -\sqrt{17}.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } \frac{1}{12} > \frac{1}{13} \text{ nên } \frac{1}{12} - \sqrt{16} > \frac{1}{13} - \sqrt{17}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } &\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2\,022 \cdot 2\,023} + \frac{1}{2\,023 \cdot 2\,024} \\ &= \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2\,023-2\,022}{2\,022 \cdot 2\,023} + \frac{2\,024-2\,023}{2\,023 \cdot 2\,024} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2\,022} - \frac{1}{2\,023}\right) + \left(\frac{1}{2\,023} - \frac{1}{2\,024}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,024} = \frac{1\,011}{2\,024}. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có  $\frac{1}{3} = \frac{1\ 011}{3\ 033}$  và  $\frac{1\ 011}{2\ 024} > \frac{1\ 011}{3\ 033}$  nên  $\frac{1\ 011}{2\ 024} > \frac{1}{3}$ .

Vậy  $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2\ 022 \cdot 2\ 023} + \frac{1}{2\ 023 \cdot 2\ 024} > \frac{1}{3}$ .

c) Ta có: 
$$\frac{2\ 022 + 2\ 021}{2\ 024 + 2\ 023} = \frac{2\ 021}{2\ 024 + 2\ 023} + \frac{2\ 022}{2\ 024 + 2\ 023}.$$

Mặt khác, ta lại có  $\frac{2\ 021}{2\ 023} > \frac{2\ 021}{2\ 024 + 2\ 023}$ ;  $\frac{2\ 022}{2\ 024} > \frac{2\ 022}{2\ 024 + 2\ 023}$  nên

$$\frac{2\ 021}{2\ 023} + \frac{2\ 022}{2\ 024} > \frac{2\ 021}{2\ 024 + 2\ 023} + \frac{2\ 022}{2\ 024 + 2\ 023}.$$

Vậy  $\frac{2\ 021}{2\ 023} + \frac{2\ 022}{2\ 024} > \frac{2\ 022 + 2\ 021}{2\ 024 + 2\ 023}$ .

**Ví dụ 4** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh  $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$  cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

*Giải*

Do  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nên  $a > 0, b > 0, c > 0$  và  $a + b > c, b + c > a, c + a > b$ .

Ta có:  $\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}$ ;  $\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}$  nên  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{2}{a+b+c}$ .

Mặt khác, ta lại có  $c + a > b$  nên  $a + b + c < 2(a + c)$ . Suy ra  $\frac{2}{a+b+c} > \frac{2}{2(a+c)}$

hay  $\frac{2}{a+b+c} > \frac{1}{a+c}$ . Do đó  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{c+a}$ .

Tương tự, ta chứng minh được  $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b}$  và  $\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} > \frac{1}{b+c}$ .

Vậy  $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

**Ví dụ 5\*** Cho các số  $x, y, z$  thỏa mãn  $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$ . Chứng minh có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là **sai**:

$$x(1-y) > 0,25; y(1-z) > 0,25; z(1-x) > 0,25.$$

*Giải*

Giả sử cả ba bất đẳng thức đã cho đều đúng. Khi đó, ta có:

$$x(1-y) \cdot y(1-z) \cdot z(1-x) > 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25$$

$$\text{hay } x(1-x) \cdot y(1-y) \cdot z(1-z) > \frac{1}{64} \quad (1)$$

Ta xét:  $x(1-x) = x - x^2 = -\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ . Với số  $x$  tùy ý, ta có  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$  hay  $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ , tức là  $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ . Suy ra  $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ . Tương tự, ta chứng minh được  $y(1-y) \leq \frac{1}{4}$ ;  $z(1-z) \leq \frac{1}{4}$ . Do đó

$$x(1-x) \cdot y(1-y) \cdot z(1-z) \leq \frac{1}{64} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta thấy giả thiết ban đầu là vô lí. Vậy có ít nhất một trong các bất đẳng thức đã cho là sai.

**Ví dụ 6** Bảng 1 cho biết sản lượng lúa các vụ của nước ta trong năm 2021. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

- Tổng sản lượng lúa của cả ba vụ lớn hơn hai lần sản lượng lúa vụ đông xuân.
- Sản lượng lúa vụ mùa lớn hơn 70% sản lượng lúa vụ đông xuân.
- Tổng sản lượng lúa vụ hè thu và thu đông với sản lượng lúa vụ mùa lớn hơn sản lượng lúa vụ đông xuân.

| Vụ lúa             | Sản lượng (triệu tấn) |
|--------------------|-----------------------|
| Đông xuân          | 20,63                 |
| Hè thu và thu đông | 15,16                 |
| Mùa                | 8,06                  |

Bảng 1  
(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

Giải

- a) Tổng sản lượng lúa của cả ba vụ là:

$$20,63 + 15,16 + 8,06 = 43,85 \text{ (triệu tấn)}.$$

Hai lần sản lượng lúa vụ đông xuân là:

$$2 \cdot 20,63 = 41,26 \text{ (triệu tấn)}.$$

Do  $43,85 > 41,26$  nên tổng sản lượng lúa của cả ba vụ lớn hơn hai lần sản lượng lúa vụ đông xuân. Vậy phát biểu ở câu a là đúng.

- b) 70% sản lượng lúa vụ đông xuân là:

$$70\% \cdot 20,63 = 14,441 \text{ (triệu tấn)}.$$

Do  $8,06 < 14,441$  nên sản lượng lúa vụ mùa nhỏ hơn 70% sản lượng lúa vụ đông xuân. Vậy phát biểu ở câu b là sai.

c) Tổng sản lượng lúa vụ hè thu và thu đông với sản lượng lúa vụ mùa là:

$$15,16 + 8,06 = 23,22 \text{ (triệu tấn)}.$$

Do  $23,22 > 20,63$  nên tổng sản lượng lúa vụ hè thu và thu đông với sản lượng lúa vụ mùa lớn hơn sản lượng lúa vụ đông xuân. Vậy phát biểu ở câu c là đúng.

### C. BÀI TẬP

1. Cho các số  $a, b, c, d$  đều khác 0 thỏa mãn  $a > b$  và  $c > d$ . Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào đúng?

a)  $a + c > b + d$ .

b)  $ac > bd$ .

c)  $a - d > b - c$ .

d)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ .

2. Cho  $a < b$ . So sánh:

a)  $M = -24(a + 23)$  và  $N = -24(b + 23)$ ;

b)  $P = a\sqrt{12} - 24$  và  $Q = b\sqrt{12} - 23$ .

3. Cho  $x, y$  là các số thực tùy ý thỏa mãn  $x > y$ . Bất đẳng thức  $x^2 > y^2$  là đúng hay sai? Vì sao?

4. Cho  $a, b, c, d$  là các số không âm thỏa mãn  $a > c + d, b > c + d$ . Chứng minh:

a)  $a + 2b > 3c + 3d$ ;

b)  $a^2 + b^2 > 2c^2 + 2cd + 2d^2$ ;

c)  $ab > c^2 + cd + d^2$ .

5. Cho  $x, y, z$  là các số thực tùy ý. Chứng minh:

a)  $x^2 + y^2 \geq -2xy$ ;

b)  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ;

c)  $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$ .

6. Chứng minh:

a)  $\sqrt{5} - \sqrt{7} < \sqrt{6} - 2$ ;

b)  $\sqrt{10} + \sqrt{11} - \sqrt{7} < \sqrt{10} + \sqrt{13} - \sqrt{5}$ ;

c)  $3 \cdot 1024^2 > 2^{21}$ .

7. Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh:

a)  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ ;

b)  $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .

8. Theo Tổng cục Môi trường, chỉ số chất lượng không khí được tính theo thang điểm (khoảng giá trị AQI) tương ứng với biểu tượng và màu sắc để cảnh báo chất lượng không khí và mức độ ảnh hưởng tới sức khỏe con người, cụ thể như sau (Bảng 2):

| Khoảng giá trị AQI | Chất lượng không khí | Màu sắc |
|--------------------|----------------------|---------|
| 0 – 50             | Tốt                  | Xanh    |
| 51 – 100           | Trung bình           | Vàng    |
| 101 – 150          | Kém                  | Da cam  |
| 151 – 200          | Xấu                  | Đỏ      |
| 201 – 300          | Rất xấu              | Tím     |
| 301 – 500          | Nguy hại             | Nâu     |

Bảng 2

Chỉ số AQI tại Hà Nội, Thái Nguyên, Hưng Yên, Sơn La ghi nhận vào sáng ngày 09/01/2023 lần lượt là: 338; 406; 312,9; 78 (Nguồn: Tạp chí điện tử Môi trường và Cuộc sống). Dựa vào Bảng 2, cho biết chất lượng không khí vào sáng 09/01/2023 tại Hà Nội, Thái Nguyên, Hưng Yên, Sơn La ở mức nào trong các mức sau: Tốt, Trung bình, Kém, Xấu, Rất xấu, Nguy hại.

9. Một cửa hàng nhập về 60 chiếc điện thoại từ nước ngoài với giá nhập vào là 20 triệu đồng/chiếc. Thuế và phí vận chuyển của 60 chiếc điện thoại đó lần lượt là 36 triệu đồng và 20 triệu đồng. Khi về Việt Nam, cửa hàng đó đã bán mỗi chiếc điện thoại với giá bán bằng 125% giá nhập vào. Nhận định “Sau khi bán hết 60 chiếc điện thoại đó, cửa hàng đã lãi hơn 250 triệu đồng” là đúng hay sai? Vì sao?

10. Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh diện tích của tứ giác  $ABCD$  không lớn hơn

$$\frac{AB \cdot BC + AD \cdot DC}{2}.$$

11\*. Bác Long dùng 80 m lưới thép gai để rào một mảnh vườn có dạng hình chữ nhật. Bác Long đã tận dụng bờ ruộng có sẵn để làm một cạnh hàng rào của mảnh vườn. Tìm các kích thước của mảnh vườn có diện tích lớn nhất mà bác Long rào được bằng 80 m lưới thép gai.

## BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Mở đầu về bất phương trình một ẩn

- Một bất phương trình với ẩn  $x$  có dạng  $A(x) > B(x)$  (hoặc  $A(x) < B(x)$ ,  $A(x) \geq B(x)$ ,  $A(x) \leq B(x)$ ) trong đó về trái  $A(x)$  và về phải  $B(x)$  là hai biểu thức của cùng một biến  $x$ .
- Khi thay giá trị  $x = a$  vào bất phương trình với ẩn  $x$ , ta được một khẳng định đúng thì số  $a$  (hay giá trị  $x = a$ ) gọi là nghiệm của bất phương trình đó.

#### Bất phương trình bậc nhất một ẩn

– *Định nghĩa:* Bất phương trình dạng  $ax + b > 0$  (hoặc  $ax + b < 0$ ,  $ax + b \geq 0$ ,  $ax + b \leq 0$ ) với  $a, b$  là hai số đã cho và  $a \neq 0$  được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

– *Cách giải:*

Bất phương trình  $ax + b > 0$  (với  $a > 0$ ) được giải như sau:

$$ax + b > 0$$

$$\begin{aligned} ax &> -b \\ x &> \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:  $x > \frac{-b}{a}$ .

Bất phương trình  $ax + b > 0$  (với  $a < 0$ ) được giải như sau:

$$ax + b > 0$$

$$\begin{aligned} ax &> -b \\ x &< \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:  $x < \frac{-b}{a}$ .

*Chú ý:* Các bất phương trình bậc nhất  $ax + b < 0$ ,  $ax + b \geq 0$ ,  $ax + b \leq 0$  với  $a, b$  là hai số đã cho và  $a \neq 0$  được giải bằng cách tương tự.



## B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất một ẩn? Đối với những bất phương trình bậc nhất một ẩn đó, xác định hệ số  $a$  của  $x$ , hệ số tự do  $b$ .

a)  $-7x + 2 < 0$ .

b)  $x^2 - 0,23 > 0$ .

c)  $21x + \frac{1}{2x} \geq 0$ .

d)  $\sqrt{10}x \leq 0$ .

*Giải*

Bất phương trình ở các câu a, d là bất phương trình bậc nhất một ẩn. Bất phương trình ở các câu b, c không phải là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bất phương trình  $-7x + 2 < 0$  có  $a = -7$ ,  $b = 2$ .

Bất phương trình  $\sqrt{10}x \leq 0$  có  $a = \sqrt{10}$ ,  $b = 0$ .

**Ví dụ 2** Kiểm tra xem giá trị  $x = -2$  có phải là nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất sau hay không:

a)  $-x + 3 > 0$ ;

b)  $2 + 2x < 0$ ;

c)  $-45x \leq 0$ .

*Giải*

a) Thay  $x = -2$ , ta có:  $-(-2) + 3 > 0$  là khẳng định đúng.

Vậy  $x = -2$  là nghiệm của bất phương trình  $-x + 3 > 0$ .

b) Thay  $x = -2$ , ta có:  $2 + 2 \cdot (-2) < 0$  là khẳng định đúng.

Vậy  $x = -2$  là nghiệm của bất phương trình  $2 + 2x < 0$ .

c) Thay  $x = -2$ , ta có:  $-45 \cdot (-2) \leq 0$  là khẳng định không đúng.

Vậy  $x = -2$  không là nghiệm của bất phương trình  $-45x \leq 0$ .

**Ví dụ 3** Giải các bất phương trình:

a)  $2x - 6 \geq 0$ ;

b)  $-0,3x + 0,63 < 0,6x - 1,8$ ;

c)  $0,5x + 0,5 > 5(x - 1)$ .

*Giải*

a)  $2x - 6 \geq 0$

$$2x \geq 6$$

$$x \geq 3.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là  $x \geq 3$ .

$$b) -0,3x + 0,63 < 0,6x - 1,8$$

$$-0,9x < -2,43$$

$$x > 2,7.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là  $x > 2,7$ .

$$c) 0,5x + 0,5 > 5(x - 1)$$

$$0,5x + 0,5 > 5x - 5$$

$$-4,5x > -5,5$$

$$x < \frac{11}{9}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là  $x < \frac{11}{9}$ .

**Ví dụ 4** Tìm giá trị của  $a$  để bất phương trình  $(a + 1)x - 2 \geq 0$  nhận giá trị  $x = -3$  làm nghiệm.

*Giải*

Do bất phương trình  $(a + 1)x - 2 \geq 0$  nhận giá trị  $x = -3$  làm nghiệm nên ta có:

$$(a + 1) \cdot (-3) - 2 \geq 0.$$

$$\text{Giải bất phương trình trên: } (a + 1) \cdot (-3) - 2 \geq 0$$

$$-3a - 3 - 2 \geq 0$$

$$-3a \geq 5$$

$$a \leq -\frac{5}{3}.$$

Vậy với các giá trị của  $a$  sao cho  $a \leq -\frac{5}{3}$  thì bất phương trình  $(a + 1)x - 2 \geq 0$  nhận giá trị  $x = -3$  làm nghiệm.

**Ví dụ 5** Cho  $t > 2$ . Viết một bất phương trình cho mỗi biểu thức sau:

$$a) 2t + 1;$$

$$b) 0,5(3t - 5);$$

$$c) -6(2t - 4).$$

*Giải*

$$a) \text{ Do } t > 2 \text{ nên } 2t + 1 > 2 \cdot 2 + 1 \text{ hay } 2t + 1 > 5.$$

$$b) \text{ Do } t > 2 \text{ nên } 3t - 5 > 3 \cdot 2 - 5 \text{ hay } 3t - 5 > 1. \text{ Do đó } 0,5(3t - 5) > 0,5.$$

$$c) \text{ Do } t > 2 \text{ nên } 2t - 4 > 2 \cdot 2 - 4 \text{ hay } 2t - 4 > 0. \text{ Do đó } -6(2t - 4) < 0.$$

**Ví dụ 6** Cô Hạnh mang 500 nghìn đồng để mua thức ăn chuẩn bị cho bữa tiệc gia đình. Số tiền mua cá là  $x$  (nghìn đồng) với  $x > 0$ . Số tiền mua thịt lợn nhiều hơn số tiền mua cá là 20 nghìn đồng. Số tiền mua thịt bò gấp ba lần số tiền mua thịt lợn.

- a) Viết một bất phương trình bậc nhất ẩn  $x$ , biết rằng sau khi mua cá, thịt lợn, thịt bò thì cô Hạnh vẫn còn tiền.  
b) Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn ở câu a.

*Giải*

- a) Số tiền mà cô Hạnh mua thịt lợn và thịt bò lần lượt là  $x + 20$  (nghìn đồng) và  $3(x + 20)$  (nghìn đồng) với  $x > 0$ . Do sau khi mua cá, thịt lợn, thịt bò thì cô Hạnh vẫn còn tiền nên ta có bất phương trình:

$$500 - [x + x + 20 + 3(x + 20)] > 0 \text{ hay } 420 - 5x > 0 \quad (1)$$

- b) Giải bất phương trình (1):  $420 - 5x > 0$

$$-5x > -420$$

$$x < 84.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình ở câu a là  $0 < x < 84$ .

**Ví dụ 7** Bà Mai dành không quá 4 giờ để gói bánh tẻ và bánh nếp. Bánh tẻ cần 3 phút để gói xong một chiếc, còn bánh nếp cần 2 phút để gói xong một chiếc. Tính số bánh tẻ mà bà Mai có thể gói nhiều nhất, biết bà Mai đã gói được 75 chiếc bánh nếp.

*Giải*

Gọi  $x$  là số chiếc bánh tẻ mà bà Mai gói ( $x \in \mathbb{N}^*$ ). Khi đó, tổng thời gian bà Mai dùng để gói hai loại bánh là:  $3x + 2 \cdot 75$  (phút).

Do bà Mai dành không quá 4 giờ để gói hai loại bánh nên ta có bất phương trình:

$$3x + 2 \cdot 75 \leq 4 \cdot 60.$$

Giải bất phương trình trên:  $3x + 2 \cdot 75 \leq 4 \cdot 60$

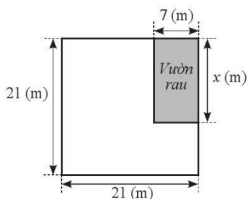
$$3x + 150 \leq 240$$

$$3x \leq 90$$

$$x \leq 30.$$

Vậy bà Mai có thể gói được nhiều nhất 30 chiếc bánh tẻ.

**Ví dụ 8** Cho một khu đất có dạng hình vuông với độ dài cạnh 21 (m). Bác Lan muốn dành ra một mảnh vườn có dạng hình chữ nhật với chiều rộng 7 (m), chiều dài  $x$  (m) ở góc của khu đất để trồng rau như Hình 1 ( $7 < x < 21$ ). Tìm giá trị nhỏ nhất của  $x$  để diện tích của phần đất còn lại không quá  $350 \text{ m}^2$ .



Hình 1

*Giải*

Diện tích của phần đất còn lại là:  $21^2 - 7x \text{ (m}^2\text{)}$ .

Do diện tích của phần đất còn lại không quá  $350 \text{ m}^2$  nên ta có bất phương trình:

$$21^2 - 7x \leq 350.$$

Giải bất phương trình trên:  $21^2 - 7x \leq 350$

$$441 - 7x \leq 350$$

$$-7x \leq -91$$

$$x \geq 13.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $x$  là 13 m.

## C. BÀI TẬP

12. Kiểm tra xem giá trị  $x = 3$  có phải là nghiệm của mỗi bất phương trình sau hay không:

a)  $2x - 7 < 0$ ;

b)  $-0,3x + 1,7 \leq 0$ ;

c)  $-5x^2 + 2x > 0$ .

13. Giải các bất phương trình:

a)  $3x + 7 < -x + 2$ ;

b)  $3(x + 2) + 0,5 > 4(x - 1)$ ;

c)  $\frac{x+1}{6} + \frac{x+1}{12} \geq \frac{5x+5}{4} + \frac{1}{15}$ .

14. Cho  $u \leq -1$ . Viết một bất phương trình cho mỗi biểu thức sau:

a)  $-3,2u + 3$ ;

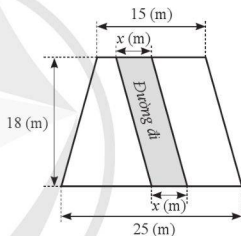
b)  $\frac{3}{13}(2u - 4)$ ;

c)  $-5(5u - 2)$ .

15. Tổng chi phí của một công ty sản xuất nước rửa tay là 80 triệu đồng/quý. Giá mỗi chai nước rửa tay là 18 000 đồng. Hỏi trung bình mỗi quý, công ty đó phải bán ít nhất bao nhiêu chai nước rửa tay để thu lợi nhuận không dưới 328 triệu đồng sau bốn quý?

16. Một xí nghiệp đã sản xuất hai loại hộp giấy có dạng hình hộp chữ nhật để đựng đồ ăn. Hộp giấy loại I có chiều rộng là  $x$  (cm), chiều dài hơn chiều rộng là 9 (cm), chiều cao là 18 (cm) và hộp giấy loại II có chiều rộng là 10 (cm), chiều dài hơn chiều rộng là 5 (cm), chiều cao là  $x + 1$  (cm) với  $x > 0$ . Tổng diện tích xung quanh của 25 hộp giấy loại I hơn tổng diện tích xung quanh của 20 hộp giấy loại II không dưới  $175 \text{ dm}^2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $x$ , biết rằng diện tích giấy dán mép hộp không đáng kể.

17. Cho một khu đất có dạng hình thang với đáy nhỏ 15 (m), đáy lớn 25 (m), chiều cao 18 (m). Bác Lâm muốn dành ra một mảnh vườn có dạng hình bình hành với cạnh đáy  $x$  (m), chiều cao 18 (m) như Hình 2 ( $0 < x < 15$ ). Tìm giá trị lớn nhất của  $x$  để diện tích của phần đất còn lại không dưới  $270 \text{ m}^2$ .



Hình 2

18. Số đo tính theo độ của ba góc  $A, B, C$  trong tứ giác  $ABCD$  lần lượt là  $x, 2x, 3(x - 10)$  với  $x > 10$ .

a) Viết một bất phương trình bậc nhất ẩn  $x$ .

b) Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn ở câu a.

c) Các góc có số đo là  $2x$  và  $3(x - 10)$  có bằng nhau được hay không? Vì sao?

19. Bạn Minh mang 120 nghìn đồng đi mua vở. Bạn Minh mua hai loại vở: loại I giá 10 nghìn đồng/quyển; loại II giá 8 nghìn đồng/quyển. Tìm số quyển vở loại I nhiều nhất mà bạn Minh có thể mua được, biết bạn Minh đã mua 5 quyển vở loại II.

20. Vòi thứ nhất chảy vào bể không chứa nước, chảy được 60 l nước mỗi phút. Cùng lúc đó, vòi thứ hai chảy từ bể ra, chảy được lượng nước bằng  $\frac{1}{3}$  lượng nước chảy vào của vòi thứ nhất. Hỏi hai vòi chảy sau ít nhất bao nhiêu giờ thì trong bể có không ít hơn 1 200 l nước?

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

21. Cho  $a, b, c$  là các số bất kì thoả mãn  $a > b$ . Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?  
 A.  $a^2 > b^2$ .      B.  $ac > bc$ .      C.  $c - a > c - b$ .      D.  $a + c > b + c$ .
22. Cho  $a, b, c, d$  là các số dương thoả mãn  $a > b$  và  $c > d$ . Bất đẳng thức nào sau đây **không** đúng?  
 A.  $ac > bd$ .      B.  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ .      C.  $a + c > b + d$ .      D.  $a - d > b - c$ .
23. Giá trị của  $m$  để phương trình  $x - 2 = 3m + 4$  có nghiệm lớn hơn 3 là  
 A.  $m > 1$ .      B.  $m < 1$ .      C.  $m > -1$ .      D.  $m < -1$ .
24. Nghiệm của bất phương trình  $-\frac{x+2}{5} + \frac{x}{4} > 1$  là  
 A.  $x < 28$ .      B.  $x > 28$ .      C.  $x < 9$ .      D.  $x > 9$ .
25. Cho  $a, b$  là hai số thực tùy ý. Chứng minh:  $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab$ .
26. a) Cho  $a, b, c$  là các số dương thoả mãn  $a < b$ . Chứng minh:  $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$ .  
 b) Áp dụng kết quả trên, hãy so sánh:  

$$M = \frac{10^{2 \cdot 023} + 1}{10^{2 \cdot 024} + 1} \text{ và } N = \frac{10^{2 \cdot 022} + 1}{10^{2 \cdot 023} + 1}.$$
27. Một hãng taxi có giá cước như sau (Bảng 3):

| Loại xe  | Giá mở cửa<br>(0 km đến 1 km) | Giá cước<br>29 km tiếp theo<br>(trên 1 km đến 30 km) | Giá cước<br>từ kilômét thứ 31<br>(trên 30 km) |
|----------|-------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| Xe 4 chỗ | 11 000 đồng                   | 14 500 đồng/km                                       | 11 600 đồng/km                                |
| Xe 7 chỗ | 11 000 đồng                   | 15 500 đồng/km                                       | 13 600 đồng/km                                |

Bảng 3

Hai nhóm khách A và B đã sử dụng dịch vụ của hãng taxi này để đi chuyển. Nhóm khách A đã đi 45 km bằng loại xe 4 chỗ. Nhóm khách B đã đi 40 km bằng loại xe 7 chỗ. Nhận định “Số tiền nhóm khách A phải trả cao hơn số tiền nhóm khách B phải trả và số tiền chênh lệch lớn hơn 10 000 đồng” là đúng hay sai? Vì sao?

**28. Giải các bất phương trình:**

a)  $-3x + 22 < -13x + 17$ ;

b)  $5(x - 1) + 0,7(2x + 1) > 1,4x + 0,6$ ;

c)  $\frac{x-1}{6} + \frac{x+1}{2} \leq \frac{3x-5}{4} + \frac{1}{2}$ .

**29\*.** Cô Ngọc đi du lịch từ Hà Nội vào Thành phố Hồ Chí Minh với quãng đường 1 595 km. Trung bình mỗi ngày, cô Ngọc đi được 295 km. Gọi  $t$  là số ngày mà cô Ngọc đã đi. Tìm  $t$  sao cho quãng đường còn lại cô Ngọc phải đi ít hơn 415 km sau  $t$  ngày đã đi.

**30.** Bác Lan sử dụng dịch vụ điện thoại di động với giá cước gọi nội mạng và gọi ngoại mạng lần lượt là 1 200 đồng/phút và 2 000 đồng/phút. Trong tháng 10, bác Lan đã sử dụng 90 phút gọi nội mạng. Hỏi bác Lan có thể sử dụng nhiều nhất bao nhiêu phút gọi ngoại mạng nếu tiền cước bác Lan phải trả trong tháng 10 không vượt quá 200 000 đồng.

**31.** Một trang trại thu được ít nhất 20,8 triệu đồng do bán cà chua và khoai tây. Giá bán cà chua là 18 nghìn đồng/kg và giá bán khoai tây là 25 nghìn đồng/kg. Tính số kilôgam cà chua ít nhất mà trang trại đó đã bán, biết trang trại này đã bán 400 kg khoai tây.

**32.** Một người muốn sử dụng yến mạch và gạo lứt để tạo món ăn kiêng. Giá yến mạch và gạo lứt lần lượt là 70 000 đồng/kg và 30 000 đồng/kg. Tìm số kilôgam gạo lứt nhiều nhất mà người đó có thể mua, biết người đó đã mua 1 kg yến mạch và số tiền người đó bỏ ra không vượt quá 190 000 đồng.

## LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Bất đẳng thức ở các câu a, c là đúng.
2. a)  $M > N$ .                      b)  $P < Q$ .
3. Bất đẳng thức  $x^2 > y^2$  là sai. Chẳng hạn, chọn  $x = -1$  và  $y = -2$ , ta có:  $x^2 = 1$  và  $y^2 = 4$ . Khi đó  $x > y$  nhưng  $x^2 < y^2$ .
4. Do  $a, b, c, d$  là các số không âm nên  $c + d$  cũng không âm. Khi đó, với  $a > c + d$ ,  $b > c + d$ , ta có:
- a)  $a + 2b > c + d + 2(c + d)$  hay  $a + 2b > 3c + 3d$ ;
- b)  $a^2 + b^2 > (c + d)^2 + (c + d)^2$  hay  $a^2 + b^2 > 2c^2 + 4cd + 2d^2$ , suy ra  $a^2 + b^2 > 2c^2 + 2cd + 2d^2$ ;
- c)  $ab > (c + d)(c + d)$  hay  $ab > c^2 + 2cd + d^2$ , suy ra  $ab > c^2 + cd + d^2$ .
5. a) Với hai số thực  $x, y$  tùy ý, ta có:  $(x + y)^2 \geq 0$  hay  $x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$ . Do đó  $x^2 + y^2 \geq -2xy$ .
- b) Với ba số thực  $x, y, z$  tùy ý, ta có:  $(x - y)^2 \geq 0$ ,  $(y - z)^2 \geq 0$ ,  $(z - x)^2 \geq 0$  hay  $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ . Suy ra  $x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0$  hay  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$ . Do đó  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ .
- c) Xét hiệu:  $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ . Do  $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$  (theo câu b) nên  $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \geq 0$ . Vậy  $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$ .
6. a) Ta có:  $2 = \sqrt{4}$ . Do  $5 < 6$  và  $7 > 4$  nên  $\sqrt{5} < \sqrt{6}$  và  $\sqrt{7} > \sqrt{4}$ .  
Do đó  $\sqrt{5} - \sqrt{7} < \sqrt{6} - \sqrt{4}$  hay  $\sqrt{5} - \sqrt{7} < \sqrt{6} - 2$ .
- b) Học sinh tự làm.
- c) Ta có:  $2^{21} = 2 \cdot 2^{20} = 2 \cdot (2^{10})^2 = 2 \cdot 1\,024^2$ . Do  $3 > 2$  nên  $3 \cdot 1\,024^2 > 2 \cdot 1\,024^2$ .  
Do đó  $3 \cdot 1\,024^2 > 2^{21}$ .
7. a) Do  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nên  $a > 0, b > 0, c > 0, a + b > c, b + c > a, c + a > b$ . Suy ra  $a^2 < a(b + c), b^2 < b(c + a), c^2 < c(a + b)$ . Do đó  $a^2 + b^2 + c^2 < a(b + c) + b(c + a) + c(a + b)$  hay  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ .



b) Theo kết quả Ví dụ 2c (trang 32), ta có:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{(a+b-c) + (b+c-a)}$$

hay 
$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{2}{b}.$$

Tương tự, ta chứng minh được

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{2}{c}; \quad \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{2}{a}.$$

Do đó 
$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

8. Chất lượng không khí vào sáng ngày 09/01/2023 tại Hà Nội, Thái Nguyên, Hưng Yên, Sơn La lần lượt ở mức Nguy hại, Nguy hại, Nguy hại, Trung bình.

9. Số tiền lãi mà cửa hàng đó thu được khi bán hết 60 chiếc điện thoại đó là:

$$(125\% \cdot 20 \cdot 60) - (20 \cdot 60 + 36 + 20) = 244 \text{ (triệu đồng)}.$$

Do  $244 < 250$  nên nhận định đã cho là sai.

10. Kẻ  $CH$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$ ,  $AK$  vuông góc với  $DC$  tại  $K$  (Hình 3). Khi đó,

diện tích của tam giác  $ABC$  là:  $S_1 = \frac{AB \cdot CH}{2}$  và diện tích của tam giác  $ACD$  là:

$$S_2 = \frac{DC \cdot AK}{2}.$$

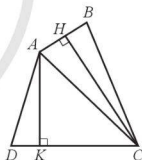
Diện tích của tứ giác  $ABCD$  là:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{AB \cdot CH + AK \cdot DC}{2}.$$

Mà  $CH \leq BC$  và  $AK \leq AD$ , suy ra

$$S \leq \frac{AB \cdot BC + AD \cdot DC}{2}.$$

Vậy diện tích của tứ giác  $ABCD$  không lớn hơn  $\frac{AB \cdot BC + AD \cdot DC}{2}$ .



Hình 3

11\*. Gọi  $x$  (m) là độ dài cạnh song song với bờ gậu và  $y$  (m) là độ dài cạnh vuông góc với bờ gậu ( $x > 0, y > 0$ ). Khi đó, ta có:  $x + 2y = 80$  hay  $x = 80 - 2y$ .

Diện tích của mảnh vườn là:

$$\begin{aligned} S &= xy = (80 - 2y)y = -2y^2 + 80y = -2(y^2 - 40y + 400) + 800 \\ &= -2(y - 20)^2 + 800 \text{ (m}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Do  $(y - 20)^2 \geq 0$  với số  $y$  tùy ý nên  $-2(y - 20)^2 + 800 \leq 800$ . Do đó, diện tích lớn nhất của mảnh vườn mà bác Long rào được là  $800 \text{ m}^2$ . Dấu “=” xảy ra khi  $y - 20 = 0$  hay  $y = 20$ . Thay  $y = 20$  vào  $x = 80 - 2y$ , ta được:  $x = 80 - 2 \cdot 20 = 40$ .

Vậy mảnh vườn có diện tích lớn nhất mà bác Long rào được có chiều dài  $40 \text{ m}$  và chiều rộng  $20 \text{ m}$ .

## 12. Học sinh tự làm.

13. a)  $x < -\frac{5}{4}$ .

b)  $x < 10,5$ .

c)  $x \leq -\frac{16}{15}$ .

14. a)  $-3,2u + 3 \geq 6,2$ .

b)  $\frac{3}{13}(2u - 4) \leq -\frac{18}{13}$ .

c)  $-5(5u - 2) \geq 35$ .

15. Gọi  $x$  là số chai nước rửa tay mà công ty đó bán được trung bình mỗi quý ( $x \in \mathbb{N}^*$ ). Ta lập được bất phương trình:  $4 \cdot (18\,000x - 80\,000\,000) \geq 328\,000\,000$ . Giải bất phương trình, ta tìm được  $x \geq 9\,000$ . Vậy trung bình mỗi quý công ty đó phải bán ít nhất  $9\,000$  chai nước rửa tay sau bốn quý.

16. Ta lập được bất phương trình:

$$25 \cdot 2(x + x + 9) \cdot 18 - 20 \cdot 2(10 + 15)(x + 1) \geq 17\,500.$$

Giải bất phương trình, ta tìm được  $x \geq 13$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của  $x$  là  $13$ .

17. Ta lập được bất phương trình:  $\frac{(15 + 25) \cdot 18}{2} - 18x \geq 270$ . Giải bất phương trình, ta tìm được  $x \leq 5$ . Vậy giá trị lớn nhất của  $x$  là  $5$ .

18. a)  $x + 2x + 3(x - 10) < 360$  hay  $6x - 30 < 360$  với  $x > 10$ .

b)  $10 < x < 65$ .

c) Giả sử  $2x$  và  $3(x - 10)$  bằng nhau. Khi đó, ta có phương trình:  $2x = 3(x - 10)$ . Giải phương trình, ta tìm được  $x = 30$  (thỏa mãn  $10 < x < 65$ ). Vậy các góc có số đo là  $2x$  và  $3(x - 10)$  có thể bằng nhau.

19. Gọi  $x$  là số quyển vở loại I mà bạn Minh đã mua ( $x \in \mathbb{N}^*$ ). Ta lập được bất phương trình:  $10x + 8 \cdot 5 \leq 120$ . Giải bất phương trình, ta tìm được  $x \leq 8$ . Vậy bạn Minh có thể mua được nhiều nhất  $8$  quyển vở loại I.

20. Gọi  $x$  (phút) là thời gian hai vòi chảy ( $x > 0$ ). Ta lập được bất phương trình:

$$60x - \frac{1}{3} \cdot 60x \geq 1\,200.$$

Giải bất phương trình, ta tìm được  $x \geq 30$ . Vậy hai vòi chảy sau ít nhất 30 phút hay 0,5 giờ thì trong bể có 1 200 l nước.

21. D.

22. B.

23. C.

24. B.

25. Xét hiệu:  $(a^2 + 1)(b^2 + 1) - 4ab = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 - 4ab$

$$= (a^2b^2 - 2ab + 1) + (a^2 - 2ab + b^2) = (ab - 1)^2 + (a - b)^2.$$

Với hai số thực  $a, b$  tùy ý, ta có:  $(ab - 1)^2 \geq 0$ ,  $(a - b)^2 \geq 0$ . Suy ra

$$(ab - 1)^2 + (a - b)^2 \geq 0 \text{ hay } (a^2 + 1)(b^2 + 1) - 4ab \geq 0.$$

Vậy  $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab$ .

26. a) Xét hiệu:

$$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bc-ab-ac}{b(b+c)} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)}.$$

Do  $a, b, c$  là các số dương và  $a < b$  nên  $b - a > 0$ ,  $b + c > 0$ .

Suy ra  $\frac{c(b-a)}{b(b+c)} > 0$ . Vậy  $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$ .

b) Ta có:

$$N = \frac{10^{2\,022} + 1}{10^{2\,023} + 1} = \frac{10(10^{2\,022} + 1)}{10(10^{2\,023} + 1)} = \frac{10^{2\,023} + 10}{10^{2\,024} + 10} = \frac{(10^{2\,023} + 1) + 9}{(10^{2\,024} + 1) + 9}.$$

Theo câu a, ta có

$$\frac{(10^{2\,023} + 1) + 9}{(10^{2\,024} + 1) + 9} > \frac{10^{2\,023} + 1}{10^{2\,024} + 1} \text{ nên } M < N.$$

27. Số tiền nhóm khách A phải trả là:

$$11\,000 + 14\,500 \cdot 29 + 11\,600 \cdot (45 - 30) = 605\,500 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền nhóm khách B phải trả là:

$$11\,000 + 15\,500 \cdot 29 + 13\,600 \cdot (40 - 30) = 596\,500 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền nhóm khách A phải trả nhiều hơn số tiền nhóm khách B phải trả là:

$$605\,500 - 596\,500 = 9\,000 \text{ (đồng)}.$$

Do  $9\,000 < 10\,000$  nên nhận định đã cho là sai.

28. a)  $x < -0,5$ .

b)  $x > 0,98$ .

c)  $x \geq 13$ .

29\*. Ta lập được bất phương trình:  $1\,595 - 295t < 415$ . Giải bất phương trình, ta tìm được  $t > 4$ . Ngoài ra,  $t$  phải thoả mãn điều kiện  $1\,595 - 295t > 0$  hay  $t < 5,41$ . Vậy  $t = 5$ .

30. Gọi  $x$  là số phút gọi ngoại mạng của bác Lan trong tháng 10 ( $x > 0$ ). Ta lập được bất phương trình:  $1\,200 \cdot 90 + 2\,000x \leq 200\,000$ . Giải bất phương trình, ta tìm được  $x \leq 46$ . Vậy bác Lan có thể sử dụng nhiều nhất 46 phút gọi ngoại mạng.

31. Gọi  $x$  là số kilôgam cà chua mà trang trại đó đã bán ( $x > 0$ ). Ta lập được bất phương trình:  $18\,000x + 25\,000 \cdot 400 \geq 20\,800\,000$ . Giải bất phương trình, ta tìm được  $x \geq 600$ . Vậy trang trại đó đã bán được ít nhất 600 kg cà chua.

32. Gọi  $x$  là số kilôgam gạo lứt mà người đó đã mua ( $x > 0$ ). Ta lập được bất phương trình:  $70\,000 + 30\,000x \leq 190\,000$ . Giải bất phương trình, ta tìm được  $x \leq 4$ . Vậy người đó có thể mua nhiều nhất 4 kg gạo lứt.

# Chương III

## CĂN THỨC

### §1 CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### Căn bậc hai của số thực không âm

- Căn bậc hai của một số thực  $a$  không âm là số thực  $x$  sao cho  $x^2 = a$ .
- Khi  $a > 0$ , số  $a$  có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: số dương kí hiệu là  $\sqrt{a}$ ; số âm kí hiệu là  $-\sqrt{a}$ . Ta gọi  $\sqrt{a}$  là căn bậc hai số học của  $a$ .
- Căn bậc hai của số 0 bằng 0, kí hiệu là  $\sqrt{0}$ .
- Số âm không có căn bậc hai.
- Với  $a \geq 0$ , ta có:  $(\sqrt{a})^2 = a$ .
- Với hai số  $a, b$  không âm, ta có:
  - + Nếu  $a < b$  thì  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ;
  - + Nếu  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  thì  $a < b$ .

##### Căn bậc ba

- Căn bậc ba của một số thực  $a$  là số thực  $x$  sao cho  $x^3 = a$ .
- Căn bậc ba của số thực  $a$  được kí hiệu là  $\sqrt[3]{a}$ .
- Ta có:  $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ .
- Với hai số  $a, b$ , ta có:
  - + Nếu  $a < b$  thì  $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ ;
  - + Nếu  $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$  thì  $a < b$ .

#### B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Diện tích của một vườn hoa có dạng hình tròn là  $50,24 \text{ m}^2$ . Tính chu vi của vườn hoa đó, lấy  $\pi = 3,14$ .

*Giải*

Diện tích của hình tròn được tính bằng công thức  $S = \pi R^2$  với  $R$  là bán kính hình tròn.

Do diện tích của vườn hoa là  $50,24 \text{ m}^2$  nên  $50,24 = 3,14 \cdot R^2$  hay  $R^2 = 16$ .

Vì  $R > 0$  nên  $R = \sqrt{16} = 4$  (m).

Chu vi của vườn hoa đó là:

$$2 \cdot 3,14 \cdot 4 = 25,12 \text{ (m)}.$$

**Ví dụ 2** Tìm:

- a)  $\sqrt{49}$ ;      b)  $-\sqrt{1,44}$ ;      c)  $\sqrt{(-8)^2}$ ;      d) Căn bậc hai của 225.

*Giải*

a) Do  $7^2 = 49$  nên  $\sqrt{49} = 7$ .

b) Do  $(1,2)^2 = 1,44$  nên  $-\sqrt{1,44} = -1,2$ .

c) Ta có:  $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64}$ . Do  $8^2 = 64$  nên  $\sqrt{(-8)^2} = 8$ .

d) Do  $15^2 = (-15)^2 = 225$  nên căn bậc hai của 225 có hai giá trị là 15 và  $-15$ . Cụ thể, ta có:  $\sqrt{225} = 15$  và  $-\sqrt{225} = -15$ .

**Ví dụ 3** Trong các số  $\sqrt{(-3)^2}$ ,  $\sqrt{3^2}$ ,  $-\sqrt{(-3)^2}$ ,  $-\sqrt{3^2}$ , những số nào là căn bậc hai số học của 9?

*Giải*

Các số  $\sqrt{(-3)^2}$ ,  $\sqrt{3^2}$  là căn bậc hai số học của 9 do  $\sqrt{9} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 > 0$ .

**Ví dụ 4** So sánh:

- a) 7 và  $\sqrt{50}$ ;      b)  $\sqrt{14}$  và  $\sqrt{\frac{48}{7}}$ ;      c) 2 và  $\sqrt{2} + 1$ .

*Giải*

a) Ta có:  $7 = \sqrt{49}$ . Do  $49 < 50$  nên  $\sqrt{49} < \sqrt{50}$  hay  $7 < \sqrt{50}$ .

b) Ta có:  $14 = \frac{98}{7}$ . Do  $\frac{98}{7} > \frac{48}{7}$  nên  $\sqrt{\frac{98}{7}} > \sqrt{\frac{48}{7}}$  hay  $\sqrt{14} > \sqrt{\frac{48}{7}}$ .

c) Do  $1 < 2$  nên  $1 < \sqrt{2}$ . Suy ra  $1 + 1 < \sqrt{2} + 1$  hay  $2 < \sqrt{2} + 1$ .

**Ví dụ 5**

- a) Số 3 có phải là căn bậc ba của 27 hay không?  
b) Số  $-2$  có phải là căn bậc ba của  $-8$  hay không?  
c) Số  $\frac{1}{7}$  có phải là căn bậc ba của  $\frac{1}{49}$  hay không?

*Giải*

- a) Ta có:  $3^3 = 27$  nên số 3 là căn bậc ba của 27.  
b) Ta có:  $(-2)^3 = -8$  nên số -2 là căn bậc ba của -8.  
c) Ta có:  $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343} \neq \frac{1}{49}$  nên số  $\frac{1}{7}$  không phải là căn bậc ba của  $\frac{1}{49}$ .

**Ví dụ 6** So sánh:

- a)  $\sqrt[3]{-115}$  và  $\sqrt[3]{-65}$ ;      b)  $\sqrt[3]{\frac{1}{210}}$  và  $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$ ;      c) 5 và  $\sqrt[3]{124}$ .

*Giải*

- a) Do  $-115 < -65$  nên  $\sqrt[3]{-115} < \sqrt[3]{-65}$ .  
b) Do  $\frac{1}{210} > \frac{1}{216}$  nên  $\sqrt[3]{\frac{1}{210}} > \sqrt[3]{\frac{1}{216}}$ .  
c) Ta có:  $5 = \sqrt[3]{125}$ . Do  $125 > 124$  nên  $\sqrt[3]{125} > \sqrt[3]{124}$  hay  $5 > \sqrt[3]{124}$ .

## C. BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

- a) Căn bậc hai của 25 là 5.  
b) Căn bậc hai của 36 là 6 và -6.  
c) Căn bậc hai số học của 0,01 là 0,1.  
d) Căn bậc hai số học của 7 là  $\sqrt{7}$ .

2. Tìm căn bậc hai của:

- a) 144;      b) 2,56;      c)  $\frac{169}{81}$ .

3. Tìm căn bậc ba của:

- a) 343;      b) -0,512;      c)  $\frac{27}{125}$ .

4. So sánh:

- a)  $\sqrt{41}$  và 6;      b)  $\sqrt{0,82}$  và 0,9;      c)  $\sqrt{\frac{6}{7}}$  và  $\sqrt{\frac{7}{6}}$ ;  
d)  $\sqrt[3]{-65}$  và  $\sqrt[3]{-64}$ ;      e)  $\sqrt[3]{3,03}$  và  $\sqrt[3]{3,3}$ ;      g) -8 và  $\sqrt[3]{-888}$ .

5. Chứng minh:

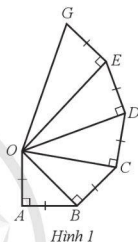
a)  $(\sqrt{2\,025} - \sqrt{2\,024})(\sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024}) = 1;$

b)  $(\sqrt[3]{3} - 1)[(\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} + 1] = 2;$

c)  $(\sqrt{3} - 2)^2 (\sqrt{3} + 2)^2 = 1.$

6. Cho hình thang cân  $ABCD$  có  $AB \parallel CD$  và  $AC \perp AD$ . Tính độ dài cạnh  $AD$ , biết  $AB = 5$  cm và  $CD = 11$  cm.

7. Cho Hình 1 có  $OA = AB = BC = CD = DE = EG = 2$  cm và  $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODE} = \widehat{OEG} = 90^\circ$ . Tính độ dài các cạnh  $OB, OC, OD, OE, OG$ .



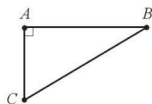
8. Trên một đoạn sông, tốc độ dòng chảy của nước ở bề mặt sông lớn hơn tốc độ dòng chảy của nước ở đáy sông. Gọi  $v$  (km/h) là tốc độ dòng chảy của nước ở bề mặt sông và  $f$  (km/h) là tốc độ dòng chảy của nước ở đáy sông. Khi đó, ta có công thức:  $\sqrt{f} = \sqrt{v} - 1,3$ .

a) Tính tốc độ dòng chảy của nước ở đáy sông, biết tốc độ dòng chảy của nước ở bề mặt sông là 9 km/h.

b) Tính tốc độ dòng chảy của nước ở bề mặt sông, biết tốc độ dòng chảy của nước ở đáy sông là 20,25 km/h.

9. Cho một hình hộp chữ nhật có các kích thước là 4,8 dm, 3 dm, 15 dm và một hình lập phương có cùng thể tích với hình hộp chữ nhật đó. Tính độ dài cạnh của hình lập phương.

10. Hàng ngày, hai anh em An và Bình cùng đi bộ từ nhà ở vị trí A đến trường. Trường của anh An ở vị trí B và trường của em Bình ở vị trí C theo hai hướng vuông góc với nhau (Hình 2). Anh An đi với tốc độ 4 km/h và đến trường sau 15 phút. Em Bình đi với tốc độ 3 km/h và đến trường sau 12 phút. Tính khoảng cách BC giữa hai trường (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).





## §2 MỘT SỐ PHÉP TÍNH VỀ CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Căn bậc hai của một bình phương

Với mọi số  $a$ , ta có:  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

#### Căn bậc hai của một tích

Với hai số không âm  $a$  và  $b$ , ta có:  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

#### Căn bậc hai của một thương

Với  $a \geq 0$  và  $b > 0$ , ta có:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

#### Đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai

Cho hai số  $a, b$  với  $b \geq 0$ . Khi đó  $\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$ .

Cụ thể, ta có:

- Nếu  $a \geq 0, b \geq 0$  thì  $\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}$ ;
- Nếu  $a < 0, b \geq 0$  thì  $\sqrt{a^2 b} = -a \sqrt{b}$ .

#### Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai

- Với  $a \geq 0$  và  $b \geq 0$ , ta có:  $a \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ .
- Với  $a < 0$  và  $b \geq 0$ , ta có:  $a \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$ .

### B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một bình phương, hãy tính:

- a)  $\sqrt{19^2}$ ;      b)  $\sqrt{(-125)^2}$ ;      c)  $\sqrt{\left(-\frac{8}{11}\right)^2}$ ;      d)  $\sqrt{(\sqrt{7}-5)^2}$ .

*Giải*

a)  $\sqrt{19^2} = |19| = 19$ .

b)  $\sqrt{(-125)^2} = |-125| = 125$ .

$$c) \sqrt{\left(-\frac{8}{11}\right)^2} = \left|-\frac{8}{11}\right| = \frac{8}{11}.$$

$$d) \sqrt{(\sqrt{7}-5)^2} = |\sqrt{7}-5|.$$

Do  $\sqrt{7} < \sqrt{25}$  hay  $\sqrt{7} < 5$  nên  $\sqrt{7} - 5 < 0$ . Vì thế, ta có  $|\sqrt{7}-5| = 5 - \sqrt{7}$ .

$$\text{Vậy } \sqrt{(\sqrt{7}-5)^2} = |\sqrt{7}-5| = 5 - \sqrt{7}.$$

**Ví dụ 2** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

$$a) \sqrt{25 \cdot 144}; \quad b) \sqrt{52} \cdot \sqrt{13}; \quad c) \sqrt{\frac{25}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{9}}; \quad d) \sqrt{1,2} \cdot \sqrt{270}.$$

*Giải*

$$a) \sqrt{25 \cdot 144} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{144} = 5 \cdot 12 = 60.$$

$$b) \sqrt{52} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{52 \cdot 13} = \sqrt{26 \cdot 2 \cdot 13} = \sqrt{26 \cdot 26} = 26.$$

$$c) \sqrt{\frac{25}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{7} \cdot \frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

$$d) \sqrt{1,2} \cdot \sqrt{270} = \sqrt{1,2 \cdot 270} = \sqrt{324} = 18.$$

**Ví dụ 3** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

$$a) \sqrt{\frac{12,5}{0,5}}; \quad b) \sqrt{\frac{625}{121}}; \quad c) \sqrt{\frac{230}{2,3}}; \quad d) \sqrt{\frac{27}{13}} : \sqrt{\frac{192}{13}}.$$

*Giải*

$$a) \sqrt{\frac{12,5}{0,5}} = \sqrt{25} = 5.$$

$$b) \sqrt{\frac{625}{121}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{121}} = \frac{25}{11}.$$

$$c) \sqrt{\frac{230}{2,3}} = \sqrt{\frac{230}{2,3}} = \sqrt{100} = 10.$$

$$d) \sqrt{\frac{27}{13}} : \sqrt{\frac{192}{13}} = \sqrt{\frac{27}{13} : \frac{192}{13}} = \sqrt{\frac{27}{13} \cdot \frac{13}{192}} = \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}.$$

**Ví dụ 4** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

$$a) \sqrt{4^2 \cdot 6}; \quad b) \sqrt{(-12)^2 \cdot 15}; \quad c) \sqrt{1\,300}; \quad d) \sqrt{\frac{108}{25}}.$$

*Giải*

$$a) \sqrt{4^2 \cdot 6} = 4\sqrt{6}.$$

$$\text{b) } \sqrt{(-12)^2 \cdot 15} = |-12| \cdot \sqrt{15} = 12\sqrt{15}.$$

$$\text{c) } \sqrt{1300} = \sqrt{100 \cdot 13} = \sqrt{10^2 \cdot 13} = 10\sqrt{13}.$$

$$\text{d) } \sqrt{\frac{108}{25}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 3}{25}} = \sqrt{\frac{36}{25} \cdot 3} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot 3} = \frac{6}{5}\sqrt{3}.$$

**Ví dụ 5** Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } \sqrt{98} - \sqrt{72};$$

$$\text{b) } \sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300};$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{2,25 \cdot 121 - 2,25 \cdot 21}}{\sqrt{6,25}};$$

$$\text{d) } \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

*Giải*

$$\text{a) } \sqrt{98} - \sqrt{72} = \sqrt{49 \cdot 2} - \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{7^2 \cdot 2} - \sqrt{6^2 \cdot 2} = 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300} &= \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{100 \cdot 3} \\ &= \sqrt{5^2 \cdot 3} + \sqrt{4^2 \cdot 3} - \sqrt{10^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\sqrt{2,25 \cdot 121 - 2,25 \cdot 21}}{\sqrt{6,25}} &= \frac{\sqrt{2,25 \cdot (121 - 21)}}{\sqrt{(2,5)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2,25 \cdot 100}}{2,5} = \frac{\sqrt{225}}{2,5} = \frac{15}{2,5} = 6. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1.$$

**Ví dụ 6** So sánh:

$$\text{a) } 2\sqrt{10} \text{ và } \sqrt{41};$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} \text{ và } \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\text{c) } -\frac{1}{3}\sqrt{63} \text{ và } -2\sqrt{2};$$

$$\text{d) } -3\sqrt{7} \text{ và } -\frac{1}{2}\sqrt{260}.$$

*Giải*

$$\text{a) Ta có: } 2\sqrt{10} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = \sqrt{40}. \text{ Do } 40 < 41 \text{ nên } \sqrt{40} < \sqrt{41} \text{ hay } 2\sqrt{10} < \sqrt{41}.$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} = \sqrt{\frac{52}{117}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}; \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \text{ Do } \frac{2}{3} > \frac{1}{3} \text{ và } \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \text{ nên } \frac{2}{3} > \frac{1}{4}$$

$$\text{hay } \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} > \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

- c) Ta có:  $-\frac{1}{3}\sqrt{63} = -\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 63} = -\sqrt{7}$ ;  $-2\sqrt{2} = -\sqrt{2^2 \cdot 2} = -\sqrt{8}$ . Do  $7 < 8$  nên  $\sqrt{7} < \sqrt{8}$ . Suy ra  $-\sqrt{7} > -\sqrt{8}$  hay  $-\frac{1}{3}\sqrt{63} > -2\sqrt{2}$ .
- d) Ta có:  $-3\sqrt{7} = -\sqrt{3^2 \cdot 7} = -\sqrt{63}$ ;  $-\frac{1}{2}\sqrt{260} = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 260} = -\sqrt{65}$ . Do  $63 < 65$  nên  $\sqrt{63} < \sqrt{65}$ . Suy ra  $-\sqrt{63} > -\sqrt{65}$  hay  $-3\sqrt{7} > -\frac{1}{2}\sqrt{260}$ .

### C. BÀI TẬP

11. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một bình phương, hãy tính:

- a)  $\sqrt{2^2 \cdot (-9)^2}$ ;      b)  $\sqrt{(\sqrt{11} - 4)^2}$ ;  
 c)  $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ ;      d\*)  $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ .

12. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

- a)  $\sqrt{\frac{9}{100} \cdot 121}$ ;      b)  $\sqrt{17 \cdot 51 \cdot 27}$ ;  
 c)  $\sqrt{600} \cdot \sqrt{11^2 - 5^2}$ ;      d)  $\sqrt{\sqrt{7} + 3} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{7}}$ .

13. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

- a)  $\sqrt{\frac{1,21}{0,49}}$ ;      b)  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$ ;      c)  $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$ ;      d)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4^4 \cdot 2^3}}$ .

14. Rút gọn biểu thức:

- a)  $\sqrt{\frac{13^2 - 12^2}{225}}$ ;      b)  $\frac{\sqrt{(6,2)^2 - (5,9)^2}}{\sqrt{2,43}}$ ;  
 c)  $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ;      d\*)  $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$ .

15. So sánh:

- a)  $\frac{\sqrt{1404}}{\sqrt{351}}$  và  $\sqrt{\frac{98}{25}}$ ;      b)  $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$  và  $6\sqrt{\frac{1}{35}}$ ;  
 c)  $-5\sqrt{8}$  và  $-\sqrt{190}$ ;      d)  $16$  và  $\sqrt{15} \cdot \sqrt{17}$ .

16. Sắp xếp  $4\sqrt{3}$ ;  $3\sqrt{4}$ ;  $4\sqrt{5}$ ;  $5\sqrt{4}$ ;  $3\sqrt{6}$  theo thứ tự tăng dần.

17. Cho các biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{35^3 + 1}}{\sqrt{35^2 - 34}}$ ;  $B = \left( \frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ .

Chứng minh:  $A = 6$ ;  $B = -2$ .

18. Rút gọn biểu thức:

a)  $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$ ;

b)  $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2 + \sqrt{120}$ ;

c)  $(3\sqrt{5} + \sqrt{13})(\sqrt{45} - \sqrt{13})$ ;

d)  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60}$ .

19. Cho  $a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  và  $b = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ . Chứng minh:

a)  $a - b$  là một số nguyên;

b)  $ab$  là một số tự nhiên.

20. So sánh:

a)  $\sqrt{2\,024} - \sqrt{2\,023}$  và  $\sqrt{2\,023} - \sqrt{2\,022}$ ;

b)  $\sqrt{a+b}$  và  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  với  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

21. Tốc độ  $v$  (m/s) cần có của một vệ tinh để giữ nó chuyển động tròn ổn định trên quỹ

đạo với bán kính  $r$  (m) quanh Trái Đất được cho bởi công thức  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ . Tính

tốc độ của một vệ tinh cách tâm Trái Đất  $15,92796 \cdot 10^6$  m, biết hằng số hấp dẫn là  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> và khối lượng Trái Đất là  $M = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg.

22. Độ dài đường chéo của một hình vuông lớn hơn độ dài cạnh của nó là 4 cm. Tính độ dài cạnh của hình vuông đó.

23. Tốc độ  $v$  (m/s) của một tàu lượn siêu tốc di chuyển trên một cung tròn bán kính  $r$  (m) được cho bởi công thức  $v = \sqrt{ar}$ , trong đó  $a$  (m/s<sup>2</sup>) là gia tốc hướng tâm.

a) Nếu tàu lượn đang di chuyển với tốc độ 14 m/s và muốn đạt mức gia tốc hướng tâm tối đa là 7 m/s<sup>2</sup> thì bán kính tối thiểu của cung tròn phải là bao nhiêu để tàu lượn không văng ra khỏi đường ray?

b) Nếu tàu lượn đang di chuyển với tốc độ 8 m/s trên cung tròn bán kính 25 m thì gia tốc hướng tâm là bao nhiêu?



## CĂN THỨC BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC BA CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Căn thức bậc hai

– Với  $A$  là một biểu thức đại số, người ta gọi  $\sqrt{A}$  là căn thức bậc hai của  $A$ , còn  $A$  được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn.

– Điều kiện xác định cho căn thức bậc hai  $\sqrt{A}$  là  $A \geq 0$ .

#### Căn thức bậc ba

– Với  $A$  là một biểu thức đại số, người ta gọi  $\sqrt[3]{A}$  là căn thức bậc ba của  $A$ , còn  $A$  được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn.

– Điều kiện xác định cho căn thức bậc ba  $\sqrt[3]{A}$  chính là điều kiện xác định của biểu thức  $A$ .

*Chú ý:* Các số, biến số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, khai căn (bậc hai hoặc bậc ba) làm thành một biểu thức đại số.

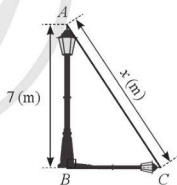
### B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  ở Hình 3 mô tả cột đèn với chiều cao  $AB = 7$  (m) và khoảng cách  $AC = x$  (m). Viết công thức tính độ dài bóng  $BC$  của cột đèn theo  $x$ .

*Giải*

Do tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  nên  $AC^2 = AB^2 + BC^2$  hay  $BC^2 = AC^2 - AB^2$ . Suy ra

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{x^2 - 7^2} = \sqrt{x^2 - 49} \text{ (m)}.$$



Hình 3

**Ví dụ 2** Tính giá trị của  $\sqrt{x^2 - 49}$  tại:

- a)  $x = 8$ ;                      b)  $x = -9$ ;                      c)  $x = \sqrt{50}$ .

*Giải*

a) Thay  $x = 8$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt{8^2 - 49} = \sqrt{15}$ .

b) Thay  $x = -9$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt{(-9)^2 - 49} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$ .

c) Thay  $x = \sqrt{50}$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt{(\sqrt{50})^2 - 49} = \sqrt{50 - 49} = \sqrt{1} = 1$ .

**Ví dụ 3** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau:

- a)  $\sqrt{\frac{x}{19}}$ ;                      b)  $\sqrt{x - 2\,023}$ ;                      c)  $\sqrt{2\,024 - x}$ .

*Giải*

- a)  $\sqrt{\frac{x}{19}}$  xác định khi  $\frac{x}{19} \geq 0$  hay  $x \geq 0$ .  
b)  $\sqrt{x - 2\,023}$  xác định khi  $x - 2\,023 \geq 0$  hay  $x \geq 2\,023$ .  
c)  $\sqrt{2\,024 - x}$  xác định khi  $2\,024 - x \geq 0$  hay  $x \leq 2\,024$ .

**Ví dụ 4**

- a) Tính giá trị của  $\sqrt[3]{\frac{-x}{5}}$  tại  $x = -135$ ;  $x = 320$ .  
b) Tính giá trị của  $\sqrt[3]{\frac{1}{3x+1}}$  tại  $x = 21$ ;  $x = \frac{7}{3}$ .

*Giải*

- a) Thay  $x = -135$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt[3]{\frac{-(-135)}{5}} = \sqrt[3]{27} = 3$ .

Thay  $x = 320$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt[3]{\frac{-320}{5}} = \sqrt[3]{-64} = -4$ .

- b) Thay  $x = 21$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt[3]{\frac{1}{3 \cdot 21 + 1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$ .

Thay  $x = \frac{7}{3}$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt[3]{\frac{1}{3 \cdot \frac{7}{3} + 1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 5** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau:

- a)  $\sqrt[3]{2\,023 + x}$ ;                      b)  $\sqrt[3]{\frac{2\,022}{x^2}}$ ;                      c)  $\sqrt[3]{\frac{5}{x-4}}$ .

*Giải*

- a)  $\sqrt[3]{2\,023 + x}$  xác định với mọi số thực  $x$  vì  $2\,023 + x$  xác định với mọi số thực  $x$ .  
b)  $\sqrt[3]{\frac{2\,022}{x^2}}$  xác định với  $x \neq 0$  vì  $\frac{2\,022}{x^2}$  xác định với  $x^2 \neq 0$  hay  $x \neq 0$ .  
c)  $\sqrt[3]{\frac{5}{x-4}}$  xác định với  $x \neq 4$  vì  $\frac{5}{x-4}$  xác định với  $x - 4 \neq 0$  hay  $x \neq 4$ .

## C. BÀI TẬP

24. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a)  $\sqrt{2x+7}$  tại  $x=1$ ;  $x=\frac{2}{3}$ ;  $x=2\sqrt{3}$ ;

b)  $\sqrt{-x^2+2x+11}$  tại  $x=0$ ;  $x=\frac{1}{2}$ ;  $x=\sqrt{5}$ ;

c)  $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}$  tại  $x=-1$ ;  $x=-\frac{1}{3}$ ;  $x=\sqrt{2}$ .

25. Tìm điều kiện xác định cho mỗi biểu thức sau:

a)  $\sqrt{x+2024}$ ;      b)  $\sqrt{-7x+1}$ ;      c)  $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$ ;      d)  $\sqrt{\frac{x^2+1}{1-2x}}$ ;  
e)  $\sqrt[3]{x^2+5}$ ;      g)  $\sqrt[3]{\frac{1}{32-x}}$ ;      h)  $\sqrt[3]{\frac{4}{x+3}}$ ;      i)  $\sqrt[3]{\frac{2024}{x^2+10}}$ .

26. Điện áp  $U$  (V) yêu cầu cho một mạch điện được cho bởi công thức  $U = \sqrt{P \cdot R}$ , trong đó  $P$  (W) là công suất tiêu thụ của điện trở và  $R$  ( $\Omega$ ) là giá trị điện trở.

a) Tính điện áp để thắp sáng cho bóng đèn A có công suất tiêu thụ là 100 W và giá trị điện trở là 110  $\Omega$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của vôn).

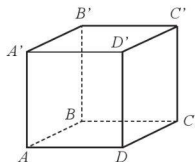
b) Bóng đèn B có điện áp 110 V và giá trị điện trở là 88  $\Omega$ . Công suất tiêu thụ của bóng đèn B có lớn hơn công suất tiêu thụ của bóng đèn A hay không? Vì sao?

27. Tốc độ  $v$  (m/s) của một chiếc ca nô được tính theo độ dài đường sóng nước sau đuôi  $l$  (m) của ca nô bởi công thức  $v = 5\sqrt{l}$ .

a) Một ca nô để lại đường sóng nước sau đuôi dài 4 m thì tốc độ của nó là bao nhiêu kilômét trên giờ?

b) Khi ca nô di chuyển với tốc độ 54 km/h thì đường sóng nước sau đuôi dài bao nhiêu mét?

28. Một chất điểm di chuyển từ đỉnh  $A'$  đến đỉnh  $C$  trên bề mặt của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài cạnh 1 dm (Hình 4). Quảng đường ngắn nhất mà chất điểm đó di chuyển là bao nhiêu decimét?



Hình 4

29. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = 5 + \sqrt{2x-1}$ .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $B = 2024 - \sqrt{5x+2}$ .



30\*. Tìm  $x$  không âm, biết:

a)  $2\sqrt{x} = 14$ ;

b)  $\sqrt{0,9x} = 6$ ;

c)  $\sqrt{25x} = \sqrt{3}$ ;

d)  $\sqrt{x} < 3$ ;

e)  $\sqrt{x} > 1$ ;

g)  $\sqrt{5x} \leq 6$ .



## MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Căn thức bậc hai của một bình phương

Với mỗi biểu thức  $A$ , ta có:  $\sqrt{A^2} = |A|$ , tức là:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

#### Căn thức bậc hai của một tích

Với các biểu thức  $A, B$  không âm, ta có:  $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ .

#### Căn thức bậc hai của một thương

Với biểu thức  $A$  không âm và biểu thức  $B$  dương, ta có:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ .

#### Trục căn thức ở mẫu

– Phép biến đổi làm mất căn thức ở mẫu thức của một biểu thức được gọi là trục căn thức ở mẫu của biểu thức đó.

– Với các biểu thức  $A, B$  mà  $B > 0$ , ta có:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

– Với các biểu thức  $A, B, C$  mà  $B \geq 0$  và  $A^2 \neq B$ , ta có:

$$\frac{C}{A + \sqrt{B}} = \frac{C(A - \sqrt{B})}{A^2 - B}; \quad \frac{C}{A - \sqrt{B}} = \frac{C(A + \sqrt{B})}{A^2 - B}.$$

Lưu ý:  $A - \sqrt{B}$  được gọi là biểu thức liên hợp của  $A + \sqrt{B}$  và ngược lại.

– Với các biểu thức  $A, B, C$  mà  $A \geq 0, B \geq 0$  và  $A \neq B$ , ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}.$$

Lưu ý:  $\sqrt{A} - \sqrt{B}$  được gọi là biểu thức liên hợp của  $\sqrt{A} + \sqrt{B}$  và ngược lại.

## B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a)  $2\sqrt{x^2}$  với  $x < 0$ ;

b)  $\sqrt{x^8}$ ;

c)  $\sqrt{(x-5)^2}$  với  $x \leq 5$ ;

d)  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$  với  $x \geq \frac{1}{2}$ .

*Giải*

a)  $2\sqrt{x^2} = 2|x| = -2x$  (vì  $x < 0$ ).

b)  $\sqrt{x^8} = \sqrt{(x^4)^2} = |x^4| = x^4$  (vì  $x^4 \geq 0$  với mọi số thực  $x$ ).

c)  $\sqrt{(x-5)^2} = |x-5| = 5-x$  (vì  $x-5 \leq 0$  khi  $x \leq 5$ ).

d)  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = 2x-1$  (vì  $2x-1 \geq 0$  khi  $x \geq \frac{1}{2}$ ).

**Ví dụ 2** Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích, hãy rút gọn biểu thức:

a)  $\sqrt{13x} \cdot \sqrt{\frac{52}{x}}$  với  $x > 0$ ;

b)  $(3+x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2}$  với  $x \geq 0$ ;

c)  $5\sqrt{25x^2} - 25x$  với  $x \leq 0$ ;

d)  $\sqrt{16x^4} + 6x^2$ .

*Giải*

a)  $\sqrt{13x} \cdot \sqrt{\frac{52}{x}} = \sqrt{13x \cdot \frac{52}{x}} = \sqrt{13 \cdot 13 \cdot 4} = \sqrt{13^2} \cdot \sqrt{4} = 13 \cdot 2 = 26$ .

b) Do  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x^2} = |x| = x$ . Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} (3+x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2} &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 - \sqrt{0,2 \cdot 180x^2} = 9 + 6x + x^2 - \sqrt{36x^2} \\ &= 9 + 6x + x^2 - \sqrt{36} \cdot \sqrt{x^2} = 9 + 6x + x^2 - 6x = x^2 + 9. \end{aligned}$$

c) Do  $x \leq 0$  nên  $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ . Khi đó, ta có:

$$5\sqrt{25x^2} - 25x = 5\sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} - 25x = 5 \cdot 5 \cdot (-x) - 25x = -25x - 25x = -50x.$$

d)  $\sqrt{16x^4} + 6x^2 = \sqrt{16} \cdot \sqrt{(x^2)^2} + 6x^2 = 4|x^2| + 6x^2 = 4x^2 + 6x^2 = 10x^2$ .

**Ví dụ 3** Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a)  $\frac{\sqrt{28x^6}}{\sqrt{7x^4}}$  với  $x < 0$ ;

b)  $\frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^3 x^3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})x}}$  với  $x > 0$ ;

c)  $\sqrt{\frac{x^4 y^2}{169x^2}}$ ;

d)  $\sqrt{\frac{225}{(x-6)^2}}$  với  $x < 6$ .

*Giải*

a) Do  $x < 0$  nên  $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ . Khi đó, ta có:

$$\frac{\sqrt{28x^6}}{\sqrt{7x^4}} = \sqrt{\frac{28x^6}{7x^4}} = \sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2 \cdot (-x) = -2x.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^3 x^3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})x}} &= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^3 x^3}{(2-\sqrt{3})x}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 x^2} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{x^2} \\ &= |2-\sqrt{3}| \cdot |x| = (2-\sqrt{3})x \text{ (vì } 2-\sqrt{3} > 0 \text{ và } x > 0). \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{x^4 y^2}{169x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 y^2}{169}} = \frac{\sqrt{x^2 y^2}}{\sqrt{169}} = \frac{\sqrt{(xy)^2}}{13} = \frac{|xy|}{13}.$$

$$\text{d) } \sqrt{\frac{225}{(x-6)^2}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{(x-6)^2}} = \frac{15}{|x-6|} = \frac{15}{6-x} \text{ (vì } x-6 < 0 \text{ khi } x < 6).$$

**Ví dụ 4** Trục căn thức ở mẫu:

a)  $\frac{2\,023}{\sqrt{x-25}}$  với  $x > 25$ ;

b)  $\frac{3}{\sqrt{5-\sqrt{2}}}$ ;

c)  $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ;

d)  $\frac{x-36}{\sqrt{x}-6}$  với  $x \geq 0, x \neq 36$ .

*Giải*

$$\text{a) } \frac{2\,023}{\sqrt{x-25}} = \frac{2\,023\sqrt{x-25}}{\sqrt{x-25} \cdot \sqrt{x-25}} = \frac{2\,023\sqrt{x-25}}{x-25}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3}{\sqrt{5-\sqrt{2}}} &= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} = \sqrt{5} + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{5 - 2\sqrt{5 \cdot 3} + 3}{5 - 3} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}. \\
 \text{d) } \frac{x-36}{\sqrt{x}-6} &= \frac{(x-36)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}+6)} = \frac{(x-36)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x})^2 - 6^2} \\
 &= \frac{(x-36)(\sqrt{x}+6)}{x-36} = \sqrt{x} + 6.
 \end{aligned}$$

**Ví dụ 5** Cho hai số không âm  $a, b$ . Chứng minh:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ .

Áp dụng:

a) Cho  $x + y = 10$  với  $x \geq 0, y \geq 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $xy$ .

b) Cho  $xy = 5$  với  $x \geq 0, y \geq 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $x + y$ .

Giải

Với  $a \geq 0, b \geq 0$ , xét hiệu:

$$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

Ta có  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$  với  $a \geq 0, b \geq 0$  nên  $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$ . Do đó  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$  hay  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ , suy ra  $a = b$ .

a) Với  $x \geq 0, y \geq 0$ , ta có:  $2\sqrt{xy} \leq x + y$ . Suy ra  $2\sqrt{xy} \leq 10$  hay  $\sqrt{xy} \leq 5$ .

Do đó  $xy \leq 25$ . Vậy giá trị lớn nhất của  $xy$  là 25 khi  $x = y = \frac{10}{2} = 5$ .

b) Với  $x \geq 0, y \geq 0$ , ta có:  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ . Suy ra  $x + y \geq 2\sqrt{5}$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $x + y$  là  $2\sqrt{5}$  khi  $x = y = \sqrt{5}$ .

## C. BÀI TẬP

31. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a)  $\sqrt{25 - 10x + x^2}$  với  $x \leq 5$ ;

b)  $\sqrt{(9 + 12x + 4x^2)^2}$ ;

c)  $\sqrt{(3x + 1)^6}$  với  $x \geq -\frac{1}{3}$ ;

d)  $\sqrt{\frac{49x^2(x+5)^2}{16}}$  với  $x \geq 0$ .

32. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích và một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a)  $\sqrt{98x^2} \cdot \sqrt{y^3}$  với  $x < 0, y \geq 0$ ;

b)  $\sqrt{x^3(x-1)^2}$  với  $x \geq 1$ ;

c)  $\sqrt{x^4} \cdot \sqrt{(x-7)^2}$  với  $x > 7$ ;

d)  $\sqrt{\frac{x^2}{36-12x+x^2}}$  với  $x > 6$ ;

e)  $\frac{\sqrt{1250(x-5)^3}}{\sqrt{2(x-5)^5}}$  với  $x < 5$ ;

g)  $\sqrt{\frac{1+x-2\sqrt{x}}{1+x+2\sqrt{x}}}$  với  $x \geq 0$ .

33. Trục căn thức ở mẫu:

a)  $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ ;

b)  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ;

c)  $\frac{8}{3\sqrt{5}+3}$ ;

d\*)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$ .

34. Trục căn thức ở mẫu:

a)  $\frac{2}{\sqrt{3x-1}}$  với  $x > \frac{1}{3}$ ;

b)  $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ ;

c)  $\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$  với  $x \geq 0, x \neq 7$ ;

d)  $\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

35. Chứng minh:

a)  $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{13-\sqrt{5}}{2}$ ;

b)  $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x-y$  với  $x > 0, y > 0, x \neq y$ .

36. a) Cho biểu thức:

$$A = \frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}.$$

Chứng minh:  $A = 5$ .

b\*) Cho biểu thức:  $B = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ .

Chứng minh:  $B = \sqrt{6}$ .

37. a) Cho biểu thức:  $C = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}} + \frac{1}{\sqrt{25}}$ .

Chứng minh:  $C > \frac{24}{5}$ .

b\*) Cho biểu thức:  $D = \left( \frac{y-2}{y+2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1}$  với  $y > 0, y \neq 1$ .

Chứng minh:  $D = \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}}$ .

38. Cho biểu thức:  $M = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức  $M$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $M$  tại  $x = \frac{4}{9}$ .

c\*) Tìm giá trị của  $x$  để  $|M| = \frac{1}{3}$ .

39. Cho biểu thức:  $N = \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0$ .

a) Rút gọn biểu thức  $N$ .

b\*) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $N$ .

40. Cho biểu thức:  $P = \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5-\sqrt{x}}{x-1}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $P$  tại  $x = 4$ .

c\*) Tìm giá trị của  $x$  để  $P$  có giá trị là số nguyên.

41\*. Tìm  $x$ , biết:

a)  $\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{9x} + 24\sqrt{\frac{x}{64}} = -17$  với  $x \geq 0$ ;

b)  $\sqrt{\frac{x}{5}} = 4$  với  $x \geq 0$ ;

c)  $\sqrt{25x^2} = 10$ ;

d)  $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$ ;

e)  $2 - \sqrt[3]{5-x} = 0$ .

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

42. Đưa thừa số vào dấu căn bậc hai của  $3\sqrt{5}$  ta được

A.  $\sqrt{15}$ .

B. 15.

C.  $\sqrt{45}$ .

D. 45.

43. Giá trị của biểu thức  $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$  bằng

A. 0.

B. 4.

C.  $2\sqrt{2}$ .

D.  $-2\sqrt{2}$ .

44. Nếu  $x^3 = -2$  thì  $x$  bằng

A. -8.

B.  $\sqrt{2}$ .

C.  $-\sqrt[3]{2}$ .

D.  $\sqrt[3]{2}$ .

45. So sánh:

a)  $5\sqrt{2}$  và  $4\sqrt{3}$ ;

b)  $\sqrt{36+16}$  và  $\sqrt{36} + \sqrt{16}$ ;

c)  $\frac{1}{\sqrt{60}}$  và  $2\sqrt{\frac{1}{15}}$ ;

d\*)  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$  và 1.

46. Tốc độ lẫn  $v$  (m/s) của vật thể có khối lượng  $m$  (kg) chịu tác động từ lực  $E_k$  (J)

được cho bởi công thức  $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$ .

a) Tính tốc độ lẫn của quả bóng nặng 3 kg khi một người tác động lực  $E_k = 18$  J lên quả bóng.

b) Muốn lẫn một quả bóng 3 kg với tốc độ 6 m/s thì cần tác động lực bao nhiêu jun lên quả bóng đó?

47. Rút gọn biểu thức:

a)  $\left(5\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}\right)\sqrt{5}$ ;

b)  $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{9}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}$ ;

c)  $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$ ;

d)  $\frac{\sqrt{312^2 - 191^2}}{\sqrt{503}}$ ;

e)  $\sqrt{27 \cdot (1 - \sqrt{3})^4} : 3\sqrt{15}$ ;

g\*)  $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$ .

48\*. Cho biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

- a) Rút gọn biểu thức  $A$ .
- b) Tính giá trị của biểu thức  $A$  tại  $x = 121$ .
- c) Tìm giá trị của  $x$  để  $A = \frac{1}{2}$ .
- d) Tìm giá trị của  $x$  để  $A = \sqrt{x} - 1$ .

49. Cho biểu thức:

$$B = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x > 0.$$

- a) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- b\*) Tính giá trị của biểu thức  $B$  tại  $x = 3 - 2\sqrt{2}$ .
- c\*) Tìm giá trị của  $x \in \mathbb{N}^*$  để  $B$  có giá trị là số nguyên.

50. Cho biểu thức:

$$C = \left( \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

- a) Rút gọn biểu thức  $C$ .
- b\*) Tìm giá trị lớn nhất của  $C$ .
- c\*) Tìm giá trị của  $x$  để  $C$  có giá trị là số dương.

51\*. Tìm  $x$ , biết:

- a)  $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} - 2 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$  với  $x \geq 0$ ;
- b)  $\sqrt{9x^2} = |-18|$ ;
- c)  $x^2 - 8 = 0$ ;
- d)  $\sqrt{x^2 - 49} - \sqrt{x-7} = 0$  với  $x \geq 7$ .



## LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Phát biểu ở các câu b, c, d là đúng. Phát biểu ở câu a là sai.

2. a) 12 và  $-12$ .                      b) 1,6 và  $-1,6$ .                      c)  $\frac{13}{9}$  và  $-\frac{13}{9}$ .

3. a) 7.                      b)  $-0,8$ .                      c)  $\frac{3}{5}$ .

4. a)  $\sqrt{41} > 6$ .                      b)  $\sqrt{0,82} > 0,9$ .                      c)  $\sqrt{\frac{6}{7}} < \sqrt{\frac{7}{6}}$ .  
d)  $\sqrt[3]{-65} < \sqrt[3]{-64}$ .                      e)  $\sqrt[3]{3,03} < \sqrt[3]{3,3}$ .                      g)  $-8 > \sqrt[3]{-888}$ .

5. a) Ta có:  $(\sqrt{2\,025} - \sqrt{2\,024})(\sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024})$   
 $= (\sqrt{2\,025})^2 - (\sqrt{2\,024})^2 = 2\,025 - 2\,024 = 1$ .

Vậy  $(\sqrt{2\,025} - \sqrt{2\,024})(\sqrt{2\,025} + \sqrt{2\,024}) = 1$ .

b) Ta có:  $(\sqrt[3]{3} - 1)[(\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} + 1] = (\sqrt[3]{3})^3 - 1^3 = 3 - 1 = 2$ .

Vậy  $(\sqrt[3]{3} - 1)[(\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} + 1] = 2$ .

c) Ta có:  $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)^2 = [(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)]^2$   
 $= [(\sqrt{3})^2 - 2^2]^2 = (3 - 4)^2 = (-1)^2 = 1$ .

Vậy  $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)^2 = 1$ .

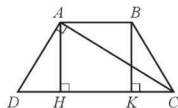
6. Kẻ  $AH$ ,  $BK$  vuông góc với  $CD$  lần lượt tại  $H$ ,  $K$  (Hình 5). Khi đó, ta chứng minh được  $ABKH$  là hình chữ nhật. Suy ra  $HK = AB = 5$  cm.

Do  $\triangle ADH = \triangle BCK$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

nên  $HD = KC = \frac{CD - HK}{2} = 3$  cm.

Do  $\triangle ACD \sim \triangle HAD$  nên  $\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{HD}$  hay  $AD^2 = CD \cdot HD$ . Suy ra

$$AD = \sqrt{CD \cdot HD} = \sqrt{33} \text{ cm.}$$



Hình 5

7. Áp dụng định lý Pythagore cho các tam giác vuông  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ,  $ODE$ ,  $OEG$ , ta tính được  $OB = \sqrt{8}$  cm,  $OC = \sqrt{12}$  cm,  $OD = 4$  cm,  $OE = \sqrt{20}$  cm,  $OG = \sqrt{24}$  cm.



$$\begin{aligned} d*) \sqrt{6+2\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} &= \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} \\ &= \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 1 - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$15. a) \frac{\sqrt{1404}}{\sqrt{351}} > \sqrt{\frac{98}{25}}. \quad b) \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} > 6\sqrt{\frac{1}{35}}. \quad c) -5\sqrt{8} < -\sqrt{190}.$$

$$d) \text{Ta có: } 16 = \sqrt{256}; \sqrt{15} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{15 \cdot 17} = \sqrt{255}.$$

$$\text{Do } 256 > 255 \text{ nên } \sqrt{256} > \sqrt{255} \text{ hay } 16 > \sqrt{15} \cdot \sqrt{17}.$$

$$16. \text{Ta có: } 4\sqrt{3} = \sqrt{48}; 3\sqrt{4} = \sqrt{36}; 4\sqrt{5} = \sqrt{80}; 5\sqrt{4} = \sqrt{100}; 3\sqrt{6} = \sqrt{54}. \text{ Do } 36 < 48 < 54 < 80 < 100 \text{ nên } \sqrt{36} < \sqrt{48} < \sqrt{54} < \sqrt{80} < \sqrt{100} \text{ hay}$$

$$3\sqrt{4} < 4\sqrt{3} < 3\sqrt{6} < 4\sqrt{5} < 5\sqrt{4}.$$

$$\text{Vậy ta có sắp xếp theo thứ tự tăng dần là: } 3\sqrt{4}; 4\sqrt{3}; 3\sqrt{6}; 4\sqrt{5}; 5\sqrt{4}.$$

17. Học sinh tự làm.

$$18. a) 0. \quad b) 11. \quad c) 32. \quad d) 6 - \sqrt{15}.$$

$$19. \text{Ta có: } a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2} - 1;$$

$$b = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2} + 1.$$

$$a) a - b = (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} + 1) = -2.$$

Vậy  $a - b$  là một số nguyên.

$$b) ab = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1.$$

Vậy  $ab$  là một số tự nhiên.

$$20. a) \text{Ta có: } (\sqrt{2024} - \sqrt{2023})(\sqrt{2024} + \sqrt{2023}) = 2024 - 2023 = 1. \text{ Suy ra}$$

$$\sqrt{2024} - \sqrt{2023} = \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2023}}.$$

$$\text{Tương tự, ta chứng minh được } \sqrt{2023} - \sqrt{2022} = \frac{1}{\sqrt{2023} + \sqrt{2022}}.$$

$$\text{Do } \sqrt{2024} > \sqrt{2022} \text{ nên } \sqrt{2024} + \sqrt{2023} > \sqrt{2023} + \sqrt{2022}.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2023}} < \frac{1}{\sqrt{2023} + \sqrt{2022}} \text{ hay}$$

$$\sqrt{2024} - \sqrt{2023} < \sqrt{2023} - \sqrt{2022}.$$

b) Với  $a > 0, b > 0$ , ta có:  $(\sqrt{a+b})^2 = a+b; (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$ .

Do  $a+b < a+b+2\sqrt{ab}$  nên  $(\sqrt{a+b})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ . Mặt khác, ta lại có  $\sqrt{a+b} > 0$  và  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$  nên  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

21. Tốc độ của vệ tinh đó là:

$$\sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{15,92796 \cdot 10^6}} = \sqrt{2,5 \cdot 10^7} = \sqrt{25 \cdot 10^6} = 5\,000 \text{ (m/s)}.$$

22. Gọi  $x$  (cm) là độ dài cạnh của hình vuông với  $x > 0$ . Khi đó, độ dài đường chéo của hình vuông đó là  $x\sqrt{2}$  (cm). Ta lập được phương trình:  $x\sqrt{2} - x = 4$ . Giải phương trình, ta tìm được  $x = \frac{4}{\sqrt{2}-1} = 4(\sqrt{2}+1)$  (thỏa mãn  $x > 0$ ). Vậy độ dài cạnh của hình vuông đó là  $4(\sqrt{2}+1)$  cm.

23. a) 28 m.

b)  $2,56 \text{ m/s}^2$ .

24. Học sinh tự làm.

25. a)  $x \geq -2\,024$ .

b)  $x \leq \frac{1}{7}$ .

c)  $x \neq 0$ .

d)  $x < \frac{1}{2}$ .

e)  $x \in \mathbb{R}$ .

g)  $x \neq 32$ .

h)  $x \neq -3$ .

i)  $x \in \mathbb{R}$ .

26. a) Khoảng 105 V.

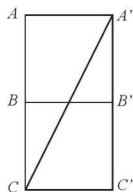
b) Thay  $U = 110$  (V) và  $R = 88$  ( $\Omega$ ) vào  $U = \sqrt{P \cdot R}$ , ta tính được  $P = 137,5$  (W). Do  $137,5 > 100$  nên công suất tiêu thụ của bóng đèn B lớn hơn công suất tiêu thụ của bóng đèn A.

27. a) 36 km/h.

b) 9 m.

28. Giả sử chất điểm đó di chuyển qua các mặt  $ABB'A'$  và  $BCC'B'$  của hình lập phương (các trường hợp khác tương tự). Hình 6 là hình khai triển của các mặt  $ABB'A'$  và  $BCC'B'$ . Do tam giác  $AA'C$  vuông tại  $A$  nên  $A'C^2 = AA'^2 + AC^2$ .

Suy ra  $A'C^2 = AA'^2 + (AB + BC)^2 = 1^2 + (1 + 1)^2 = 5$ . Do đó  $A'C = \sqrt{5}$  (dm). Vậy quãng đường ngắn nhất mà chất điểm đó di chuyển là  $\sqrt{5}$  dm.



Hình 6

29. a) Điều kiện xác định:  $x \geq \frac{1}{2}$ . Khi đó, ta có  $\sqrt{2x-1} \geq 0$  nên  $5 + \sqrt{2x-1} \geq 5$  hay  $A \geq 5$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A$  là 5 khi  $2x - 1 = 0$  hay  $x = \frac{1}{2}$ .

b) Điều kiện xác định:  $x \geq -\frac{2}{5}$ . Khi đó, ta có  $\sqrt{5x+2} \geq 0$  nên  $-\sqrt{5x+2} \leq 0$ . Suy ra  $2024 - \sqrt{5x+2} \leq 2024$  hay  $B \leq 2024$ . Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức  $B$  là 2024 khi  $5x + 2 = 0$  hay  $x = -\frac{2}{5}$ .

30\*. Với  $x \geq 0$ , ta có:

a)  $2\sqrt{x} = 14$

$$\sqrt{x} = 7$$

$$x = 7^2$$

$$x = 49;$$

b)  $\sqrt{0,9x} = 6$

$$0,9x = 6^2$$

$$0,9x = 36$$

$$x = 40;$$

c)  $\sqrt{25x} = \sqrt{3}$

$$25x = 3$$

$$x = 0,12;$$

d)  $\sqrt{x} < 3$

$$0 \leq x < 3^2$$

$$0 \leq x < 9;$$

e)  $\sqrt{x} > 1$

$$x > 1^2 > 0$$

$$x > 1;$$

g)  $\sqrt{5x} \leq 6$

$$0 \leq 5x \leq 6^2$$

$$0 \leq 5x \leq 36$$

$$0 \leq x \leq 7,2.$$

31. a)  $5 - x.$

b)  $(3 + 2x)^2.$

c)  $(3x + 1)^3.$

d)  $\frac{7x(x+5)}{4}.$

32. a)  $-7xy\sqrt{2y}.$

b)  $x(x-1)\sqrt{x}.$

c)  $x^2(x-7).$

d)  $\frac{x}{x-6}.$

e)  $\frac{25}{5-x}.$

g)  $\frac{|1-\sqrt{x}|}{1+\sqrt{x}}.$

33. a)  $\frac{2\sqrt{5}-5}{5}.$

b)  $3 + 2\sqrt{2}.$

c)  $\frac{2\sqrt{5}-2}{3}.$

$$\begin{aligned} \text{d*) } \frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}} &= \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{7} + (\sqrt[3]{7})^2}{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7})[(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{7} + (\sqrt[3]{7})^2]} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7^2}}{(\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{7})^3} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{49}}{3+7} \\ &= \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{49}}{10}. \end{aligned}$$

34. a)  $\frac{2\sqrt{3x-1}}{3x-1}.$

b)  $\sqrt{x}.$

c)  $\frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{7}}{x-7}.$

$$d) \frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{1-(\sqrt{x})^3}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})[1+\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2]}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + x.$$

35. Học sinh tự làm.

$$36. a) \text{ Ta có: } A = \frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} \\ = 3 + \sqrt{8} - \sqrt{8} - \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + 2 = 5.$$

Vậy  $A = 5$ .

$$b*) \text{ Ta có: } B = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} \\ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \\ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3-1} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}.$$

Vậy  $B = \sqrt{6}$ .

37. a) Do  $2 < 3 < 4 < \dots < 24 < 25$  nên  $\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} < \dots < \sqrt{24} < \sqrt{25}$ . Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \dots > \frac{1}{\sqrt{24}} > \frac{1}{\sqrt{25}}. \text{ Do đó}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}} + \frac{1}{\sqrt{25}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{25}} + \frac{1}{\sqrt{25}} + \frac{1}{\sqrt{25}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}} + \frac{1}{\sqrt{25}}}_{\text{gồm 24 số hạng } \frac{1}{\sqrt{25}}}.$$

$$\text{Vậy } C > 24 \cdot \frac{1}{\sqrt{25}} \text{ hay } C > \frac{24}{5}.$$

$$b*) \text{ Ta có: } D = \left( \frac{y-2}{y+2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1} = \frac{y-2+\sqrt{y}}{\sqrt{y}(\sqrt{y}+2)} \cdot \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1}.$$

$$\text{Ta xét: } y-2+\sqrt{y} = (y-1) + (\sqrt{y}-1) = (\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1) + (\sqrt{y}-1) \\ = (\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1+1) = (\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+2).$$

$$\text{Do đó } D = \frac{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+2)(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{y}(\sqrt{y}+2)(\sqrt{y}-1)} = \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}}.$$

$$\text{Vậy } D = \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}}.$$

$$38. \text{ a) } M = \frac{-1}{\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{b) Giá trị của biểu thức } M \text{ tại } x = \frac{4}{9} \text{ là } \frac{-3}{5}.$$

$$\text{c*) Với } x \geq 0, x \neq 1, \text{ để } |M| = \frac{1}{3} \text{ thì } \left| \frac{-1}{\sqrt{x}+1} \right| = \frac{1}{3}. \text{ Suy ra } |\sqrt{x}+1| = 3. \text{ Mà}$$

$$\sqrt{x}+1 > 0, \text{ suy ra } \sqrt{x}+1 = 3 \text{ hay } \sqrt{x} = 2. \text{ Do đó } x = 4 \text{ (thỏa mãn } x \geq 0, x \neq 1).$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ thì } |M| = \frac{1}{3}.$$

$$39. \text{ a) } N = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{b*) Ta có: } N = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}}. \text{ Do } \sqrt{x} > 0 \text{ và } \frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \text{ với } x > 0 \text{ nên}$$

$$\text{theo kết quả Ví dụ 5 (trang 65), ta có: } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} \text{ hay } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2,$$

$$\text{suy ra } \sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2+1 \text{ hay } N \geq 3. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } N \text{ là 3 khi } \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{hay } x = 1 \text{ (thỏa mãn } x > 0).$$

$$40. \text{ a) } P = \frac{5}{\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{b) Giá trị của biểu thức } P \text{ tại } x = 4 \text{ là } \frac{5}{3}.$$

$$\text{c*) Với } x \geq 0, x \neq 1, \text{ ta có } \sqrt{x}+1 \geq 1 \text{ nên } \frac{5}{\sqrt{x}+1} > 0 \text{ và } \frac{5}{\sqrt{x}+1} \leq 5. \text{ Do đó}$$

$$0 < P \leq 5. \text{ Vì vậy, để } P \text{ có giá trị là số nguyên thì } P \in \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

$$\text{Nếu } P = 1 \text{ thì } \frac{5}{\sqrt{x}+1} = 1. \text{ Suy ra } \sqrt{x}+1 = 5 \text{ hay } \sqrt{x} = 4. \text{ Do đó } x = 4^2 \text{ hay}$$

$$x = 16 \text{ (thỏa mãn } x \geq 0, x \neq 1). \text{ Tương tự với các trường hợp còn lại, ta tìm được}$$

$$x = \frac{9}{4}; x = \frac{4}{9}; x = \frac{1}{16}; x = 0 \text{ đều thỏa mãn } x \geq 0, x \neq 1.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0\right\} \text{ thì } P \text{ có giá trị là số nguyên.}$$

$$41^*. \text{ a) } x = 289.$$

$$\text{b) } x = 80.$$

$$\text{c) } x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

$$\text{d) } x = 2 \text{ hoặc } x = -1.$$

$$\text{e) } x = -3.$$

42. C.

43. D.

44. C.

45. a)  $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$ .      b)  $\sqrt{36+16} < \sqrt{36} + \sqrt{16}$ .      c)  $\frac{1}{\sqrt{60}} < 2\sqrt{\frac{1}{15}}$ .

đ\*) Xét hiệu:  $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 1 = 7 - 2\sqrt{12} = \sqrt{49} - \sqrt{48}$ . Do  $\sqrt{49} - \sqrt{48} > 0$  nên  $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 > 1$ . Mà  $\sqrt{6} - \sqrt{2} > 0$ , suy ra  $\sqrt{6} - \sqrt{2} > 1$ .

46. a)  $2\sqrt{3}$  m/s.

b) 54 J.

47. a) 5.      b)  $\frac{5}{7}$ .      c)  $\frac{1}{6}$ .      d) 11.      e)  $\frac{4\sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{5}$ .

g\*)  $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{135}{5}} - \sqrt[3]{54 \cdot 4} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{216} = 3 - 6 = -3$ .

48\*. a) Ta có:  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$   
 $= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$   
 $= \frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}.$

Ta xét:  $2x - 3\sqrt{x} + 1 = (2x - 2\sqrt{x}) - (\sqrt{x} - 1) = 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 1)$   
 $= (\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1).$

Do đó  $A = \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$

b) Giá trị của biểu thức A tại  $x = 121$  là  $\frac{21}{12}$ .

c) Để  $A = \frac{1}{2}$  thì  $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$ . Mà  $\sqrt{x} + 1 > 0$ , suy ra  $2(2\sqrt{x} - 1) = \sqrt{x} + 1$  hay  $\sqrt{x} = 1$ . Do đó  $x = 1$  (không thỏa mãn  $x \geq 0, x \neq 1$ ).

Vậy không có giá trị nào của x để  $A = \frac{1}{2}$ .

d) Để  $A = \sqrt{x} - 1$  thì  $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 1$ . Mà  $\sqrt{x} + 1 > 0$ , suy ra

$$2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \text{ hay } 2\sqrt{x} - 1 = x - 1.$$



Do đó  $x - 2\sqrt{x} = 0$  hay  $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$ . Suy ra  $\sqrt{x} = 0$  hoặc  $\sqrt{x} = 2$ . Vì vậy  $x = 0$  (thỏa mãn  $x \geq 0, x \neq 1$ ) hoặc  $x = 4$  (thỏa mãn  $x \geq 0, x \neq 1$ ).

Vậy  $x = 0$  hoặc  $x = 4$  thì  $A = \sqrt{x} - 1$ .

49. a)  $B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ .

b\*) Ta có:  $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$ . Suy ra  $\sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$ .

Do đó giá trị của biểu thức  $B$  tại  $x = 3 - 2\sqrt{2}$  là:

$$\frac{(\sqrt{2} - 1) - 2}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{2 + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3}{2 - 1} = -1 - 2\sqrt{2}.$$

c\*) Ta có:  $B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ . Với  $x \in \mathbb{N}^*$  thì  $B$  có giá trị là số nguyên khi

$2 \mid \sqrt{x}$ . Mà  $\sqrt{x} > 0$  với  $x > 0$ , suy ra  $\sqrt{x} = 1$  hoặc  $\sqrt{x} = 2$ . Do đó  $x = 1$  hoặc  $x = 4$  (đều thỏa mãn  $x > 0$ ).

Vậy  $x \in \{1; 4\}$  thì  $B$  có giá trị là số nguyên.

50. a)  $C = \sqrt{x} - x$ .

b\*) Ta có:  $C = \sqrt{x} - x = \frac{1}{4} - \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2$ .

Với  $x \geq 0, x \neq 1$ , ta có:  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$  hay  $\frac{1}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ . Vậy giá trị lớn nhất của  $C$  là  $\frac{1}{4}$  khi  $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$  hay  $x = \frac{1}{4}$  (thỏa mãn  $x \geq 0, x \neq 1$ ).

c\*) Ta có:  $C = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$ . Do  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $C > 0$  khi  $\sqrt{x} > 0$  và  $1 - \sqrt{x} > 0$  hay  $x > 0$  và  $\sqrt{x} < 1$ . Suy ra  $x > 0$  và  $x < 1$ .

Vậy  $0 < x < 1$  thì  $C$  có giá trị là số dương.

51\*. a)  $x = \frac{12}{5}$ .

b)  $x = 6$  hoặc  $x = -6$ .

c)  $x = 2\sqrt{2}$  hoặc  $x = -2\sqrt{2}$ .

d) Ta có:  $\sqrt{x^2 - 49} - \sqrt{x - 7} = \sqrt{(x - 7)(x + 7)} - \sqrt{x - 7}$   
 $= \sqrt{x - 7} \cdot \sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 7}$  (vì  $x \geq 7$  hay  $x - 7 \geq 0$ )  
 $= \sqrt{x - 7}(\sqrt{x + 7} - 1)$ .

Do đó  $\sqrt{x^2 - 49} - \sqrt{x - 7} = 0$  khi  $\sqrt{x - 7} = 0$  hoặc  $\sqrt{x + 7} - 1 = 0$ . Suy ra  $x = 7$  (thỏa mãn  $x \geq 7$ ) hoặc  $x = -6$  (không thỏa mãn  $x \geq 7$ ).

Vậy  $x = 7$ .

# Chương IV

## HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

### §1 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### Tỉ số lượng giác của góc nhọn

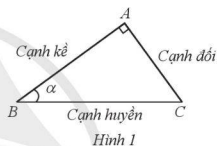
Cho góc nhọn  $\alpha$ . Xét tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{B} = \alpha$  (Hình 1).

– Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là **sin** của góc  $\alpha$ , kí hiệu  $\sin \alpha$ .

– Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là **côsin** của góc  $\alpha$ , kí hiệu  $\cos \alpha$ .

– Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là **tang** của góc  $\alpha$ , kí hiệu  $\tan \alpha$ .

– Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là **côtang** của góc  $\alpha$ , kí hiệu  $\cot \alpha$ .



##### Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Hai góc nhọn có tổng bằng  $90^\circ$  được gọi là hai góc phụ nhau.

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

##### Bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt

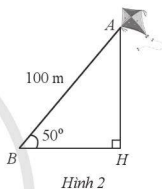
| Tỉ số lượng giác \ $\alpha$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \alpha$               | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |

| Tỉ số lượng giác $\alpha$ | $30^\circ$           | $45^\circ$ | $60^\circ$           |
|---------------------------|----------------------|------------|----------------------|
| $\tan \alpha$             | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1          | $\sqrt{3}$           |
| $\cot \alpha$             | $\sqrt{3}$           | 1          | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Tam giác vuông  $ABH$  mô tả hình ảnh một chiếc điều với dây thả dài 100 m, dây thả tạo với phương ngang một góc  $50^\circ$  (Hình 2).

- $\sin 50^\circ$  bằng tỉ số của hai đoạn thẳng nào?
- Tính chiều cao  $AH$  của chiếc điều (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Giải

a) Tam giác  $ABH$  vuông tại  $H$  nên  $\sin 50^\circ = \frac{AH}{AB}$ .

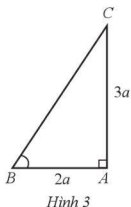
b) Do  $\sin 50^\circ = \sin B = \frac{AH}{AB}$  nên

$$AH = AB \cdot \sin 50^\circ = 100 \cdot \sin 50^\circ \approx 76,6 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao  $AH$  của chiếc điều khoảng 76,6 m.

**Ví dụ 2** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 2a$ ,  $AC = 3a$  (Hình 3).

- Tính độ dài cạnh  $BC$ .
- Tính các tỉ số lượng giác của góc  $B$ .
- Tính số đo góc  $B$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Giải

a) Do tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (theo định lí Pythagore). Suy ra  $BC^2 = (2a)^2 + (3a)^2 = 13a^2$ . Do đó  $BC = \sqrt{13a^2} = a\sqrt{13}$ .

b) Xét tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3a}{a\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13};$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2};$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{2a}{a\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13};$$

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

c) Do  $\tan B = \frac{3}{2}$  nên  $\widehat{B} \approx 56^\circ$ .

**Ví dụ 3** Sử dụng bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt, tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a)  $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$ ;

b)  $1 + \tan^2 60^\circ$ .

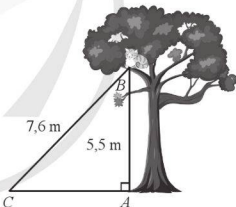
*Giải*

a)  $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

b)  $1 + \tan^2 60^\circ = 1 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4.$

### C. BÀI TẬP

1. Hình 4 mô tả một con mèo bị mắc kẹt ở vị trí  $B$  trên cành cây với độ cao  $AB = 5,5$  m. Để đưa con mèo xuống, người ta cần phải đặt thang dựa vào cành cây đó. Khoảng cách từ chân thang đến điểm chạm vào cành cây là  $BC = 7,6$  m. Góc giữa thang với phương nằm ngang là góc  $BCA$ . Tính các tỉ số lượng giác của góc  $BCA$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 4

2. Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = \sqrt{2}$  cm,  $BC = \sqrt{5}$  cm,  $AC = \sqrt{3}$  cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc  $B$ , từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc  $C$ .
3. Sử dụng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, tính giá trị mỗi biểu thức sau:
- a)  $\frac{\sin 39^\circ}{\cos 51^\circ}$ ;
- b)  $\cos 37^\circ 30' - \sin 52^\circ 30'$ ;
- c)  $\tan 73^\circ - \cot 17^\circ$ ;
- d)  $\cot 44^\circ \cdot \cot 46^\circ$ .

4. Sử dụng bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt, tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a)  $2 \sin 30^\circ - 2 \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ ;      b)  $\sin 45^\circ + \cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$ .

5. Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a)  $A = \sin^2 79^\circ + \cos^2 79^\circ$ ;

b)  $B = \tan 73^\circ \cdot \tan 37^\circ \cdot \tan 53^\circ \cdot \tan 17^\circ$ ;

c)  $C = \cos^2 73^\circ + \cos^2 53^\circ + \cos^2 17^\circ + \cos^2 37^\circ$ ;

d)  $D = \sin 59^\circ + \cos 59^\circ - \sin 31^\circ - \cos 31^\circ$ .

6. Sử dụng máy tính cầm tay để tính các tỉ số lượng giác của mỗi góc sau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

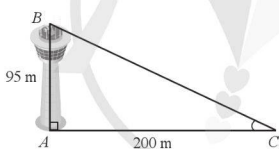
a)  $47^\circ$ ;

b)  $52^\circ 18'$ ;

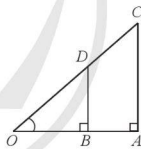
c)  $63^\circ 36'$ ;

d)  $60^\circ 27' 46''$ .

7. Một đài quan sát không lưu có độ cao là  $AB = 95$  m. Ở một thời điểm nào đó vào ban ngày, Mặt Trời chiếu tạo bóng dài  $AC = 200$  m trên mặt đất. Góc tạo bởi tia sáng Mặt Trời và phương nằm ngang là góc  $BCA$  (Hình 5). Tính số đo góc  $BCA$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



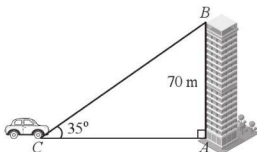
Hình 5



Hình 6

8. Cho Hình 6 có  $AB = 3$  cm,  $CD = 4$  cm. Tính số đo góc  $AOC$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

9. Từ vị trí B của toà nhà cao 70 m, một tia sáng chiếu xuống một ô tô đang đỗ tại vị trí C. Góc tạo bởi tia sáng và phương nằm ngang là  $\widehat{ACB} = 35^\circ$  (Hình 7). Hỏi ô tô đỗ cách chân toà nhà (ở vị trí A) bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 7



# MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

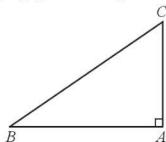
### Tính cạnh góc vuông theo cạnh huyền và tỉ số lượng giác của góc nhọn

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin của góc đối hoặc nhân với cosin của góc kề.

Trong Hình 8, ta có:

$$AC = BC \cdot \sin B = BC \cdot \cos C;$$

$$AB = BC \cdot \sin C = BC \cdot \cos B.$$



Hình 8

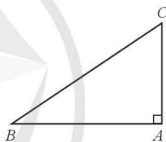
### Tính cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông còn lại và tỉ số lượng giác của góc nhọn

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang của góc đối hoặc nhân với cotang của góc kề.

Trong Hình 9, ta có:

$$AC = AB \cdot \tan B = AB \cdot \cot C;$$

$$AB = AC \cdot \tan C = AC \cdot \cot B.$$



Hình 9

## B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Một chiếc thước thợ có dạng hình tam giác vuông. Khi sử dụng gặp sự cố nên phần góc vuông của chiếc thước đó bị gãy (Hình 10). Tính độ dài các cạnh góc vuông của chiếc thước ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét nếu cần).

*Giải*

Giả sử chiếc thước thợ có dạng là tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  (Hình 11).

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên

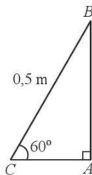
$$AB = BC \cdot \sin C = 0,5 \cdot \sin 60^\circ \approx 0,43 \text{ (m)};$$

$$AC = BC \cdot \cos C = 0,5 \cdot \cos 60^\circ = 0,25 \text{ (m)}.$$

Vậy độ dài các cạnh góc vuông của chiếc thước ban đầu là khoảng 0,43 m và 0,25 m.

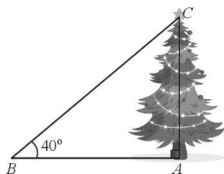


Hình 10



Hình 11

**Ví dụ 2** Để trang trí một cây thông Noel cao 4 m, người ta dùng 10 đoạn dây bằng nhau có gắn đèn trang trí. Mỗi dây nối từ ngôi sao trên đỉnh cây xuống mặt đất và góc giữa mỗi dây với phương nằm ngang bằng  $40^\circ$  (minh hoạ ở Hình 12). Tính số mét dây cần dùng để trang trí cây thông Noel đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 12

*Giải*

Ở Hình 12, độ dài mỗi đoạn dây có gắn đèn trang trí là  $BC$ , chiều cao của cây thông là  $AC = 4$  m và góc giữa dây với phương nằm ngang là  $\widehat{ABC} = 40^\circ$ .

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $AC = BC \cdot \sin B$ .

$$\text{Suy ra } BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{4}{\sin 40^\circ} \text{ (m)}.$$

Vậy số mét dây cần dùng để trang trí cây thông Noel đó là:  $\frac{4}{\sin 40^\circ} \cdot 10 \approx 62,2$  (m).

**Ví dụ 3** Từ điểm  $A$  trên một con tàu, người ta nhìn thấy đỉnh tháp hải đăng cao  $BH = 40$  m theo một góc là  $\widehat{BAH} = 2^\circ 10'$  (Hình 13). Tính khoảng cách  $AH$  từ con tàu đến tháp hải đăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Hình 13

*Giải*

Vì tam giác  $ABH$  vuông tại  $H$  nên

$$AH = BH \cdot \cot \widehat{BAH} = 40 \cdot \cot 2^\circ 10' \approx 1\,057 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách  $AH$  từ con tàu đến tháp hải đăng là khoảng 1 057 m.

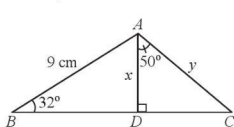
## C. BÀI TẬP

10. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  có  $AC = \frac{5}{13}AB$ . Tính  $\sin A$  và  $\tan B$ .

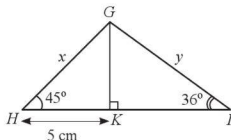
11. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 21$  cm,  $\widehat{C} = 47^\circ$ . Tính độ dài đường phân giác  $BD$  của tam giác  $ABC$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimet).

12. Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6$  cm,  $\widehat{A} = 15^\circ$ ,  $\widehat{B} = 35^\circ$ . Tính độ dài đường cao  $CH$  của tam giác  $ABC$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimét).

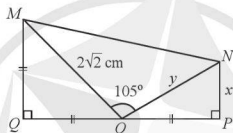
13. Tìm  $x, y$  trong mỗi hình 14a, 14b, 14c (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của centimét).



a)



b)



c)

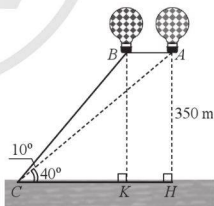
Hình 14

14. Chứng minh diện tích của tam giác đều cạnh  $a$  là  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

15. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Chứng minh:

$$\tan \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}.$$

16. Hai khinh khí cầu được thả lên cùng độ cao là 350 m (ở hai vị trí  $A$  và  $B$ ). Tại vị trí  $C$  trên mặt đất, người ta quan sát và đo được  $\widehat{ACH} = 40^\circ$ ,  $\widehat{ACB} = 10^\circ$  (Hình 15). Tính khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

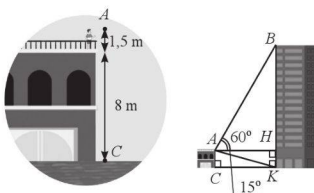


Hình 15

17. Bạn Đức đứng trên nóc ngôi nhà ở độ cao 8 m. Vị trí mắt bạn Đức (tại vị trí  $A$ ) cách nóc nhà 1,5 m. Bạn nhìn thấy vị trí  $B$  cao nhất của một toà nhà với góc tạo bởi tia  $AB$  và tia  $AH$  theo phương nằm ngang là  $\widehat{BAH} = 60^\circ$ . Bạn Đức cũng nhìn



thấy vị trí  $K$  tại chân toà nhà đó với góc tạo bởi tia  $AK$  và tia  $AH$  là  $\widehat{HAK} = 15^\circ$ ,  $AH$  vuông góc với  $BK$  tại  $H$  (Hình 16). Tính chiều cao  $BK$  của toà nhà (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 16

## §3 ỨNG DỤNG CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ứng dụng của tỉ số lượng giác của góc nhọn trong thực tế rất đa dạng và phong phú. Những ứng dụng của tỉ số lượng giác của góc nhọn là:

- Ước lượng khoảng cách;
- Ước lượng độ dài.

### B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Một máy bay đang bay ở độ cao 10 km so với mặt đất. Khi hạ cánh xuống mặt đất, đường bay của máy bay tạo một góc nghiêng so với phương nằm ngang.

- a) Nếu phi công muốn tạo góc nghiêng  $5^\circ$  thì khi máy bay cách sân bay bao nhiêu kilômét phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?
- b) Nếu máy bay cách sân bay 350 km bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

*Giải*

Hình 17 minh họa máy bay đang ở vị trí  $B$ , độ cao  $AB = 10$  km và góc nghiêng so với phương nằm ngang là  $\widehat{C}$ .



Hình 17

a) Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $AB = BC \cdot \sin C$ .

$$\text{Suy ra } BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{10}{\sin 5^\circ} \approx 114,74 \text{ (km)}.$$

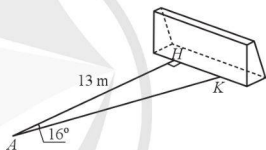
Vậy phi công muốn tạo góc nghiêng  $5^\circ$  thì khi máy bay cách sân bay khoảng 114,74 km phải bắt đầu cho máy bay hạ cánh.

b) Trong tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , ta có:  $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{350} = \frac{1}{35}$ .

$$\text{Suy ra } \widehat{C} \approx 1,64^\circ.$$

Vậy khi máy bay cách sân bay 350 km bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng khoảng  $1,64^\circ$ .

**Ví dụ 2** Một cầu thủ đứng ở vị trí  $A$  trước khung thành với khoảng cách  $AH = 13$  m. Cầu thủ đá quả bóng nghiêng một góc là  $\widehat{HAK} = 16^\circ$  (Hình 18). Tính khoảng cách từ cầu thủ tới vị trí  $K$  và độ dài  $HK$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 18

*Giải*

Vì tam giác  $AHK$  vuông tại  $H$  nên  $\cos \widehat{HAK} = \frac{AH}{AK}$  và  $HK = AH \cdot \tan \widehat{HAK}$ .

$$\text{Suy ra } AK = \frac{AH}{\cos \widehat{HAK}} = \frac{13}{\cos 16^\circ} \approx 13,5 \text{ (m)} \text{ và } HK = 13 \cdot \tan 16^\circ \approx 3,7 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách từ cầu thủ tới vị trí  $K$  và độ dài  $HK$  lần lượt khoảng 13,5 m và 3,7 m.

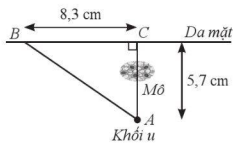
## C. BÀI TẬP

18. Tính chiều cao của cột cờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét), biết bóng của cột cờ được chiếu bởi ánh sáng Mặt Trời xuống mặt đất dài 10,5 m và góc tạo bởi tia sáng với phương nằm ngang là  $36^\circ$ .

19. Một khối u (ở vị trí  $A$ ) của một bệnh nhân cách da mặt 5,7 cm, được chiếu bởi một chùm tia gamma. Để tránh làm tổn thương mô, bác sĩ đặt nguồn tia (ở vị trí  $B$ ) cách hình chiếu của khối u (ở vị trí  $C$ ) trên da mặt là 8,3 cm (Hình 19).

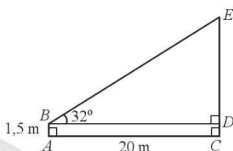
a) Hỏi góc tạo bởi chùm tia gamma với da mặt là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Chùm tia phải đi một đoạn dài bao nhiêu centimet để đến được khối u (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



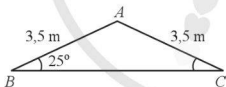
Hình 19

20. Một người đứng chào cờ (ở vị trí  $A$ ) cách cột cờ (ở vị trí  $C$ ) với  $AC = 20$  m. Người đó đặt mắt tại vị trí  $B$  cách mặt đất một khoảng là  $AB = 1,5$  m. Người đó nhìn lên đỉnh cột cờ (ở vị trí  $E$ ) theo phương  $BE$  tạo với phương nằm ngang  $BD$  một góc là  $\widehat{EBD} = 32^\circ$  (Hình 20). Tính chiều cao của cột cờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

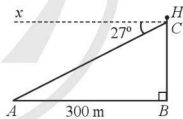


Hình 20

21. Bạn Hoà vẽ mặt cắt đứng phần mái của một ngôi nhà có dạng tam giác cân  $ABC$  (mái hai dốc). Biết rằng góc tạo bởi phần mái nhà và mặt phẳng nằm ngang là  $\widehat{ABC} = 25^\circ$  và độ dài mỗi bên dốc mái là 3,5 m (Hình 21). Tính độ dài đoạn thẳng  $BC$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hình 21

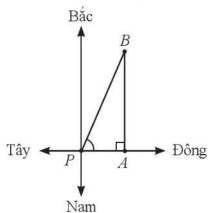


Hình 22

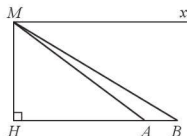
22. Trên mặt biển, khi khoảng cách từ ca nô đến chân tháp hải đăng là  $AB = 300$  m, một người đứng trên tháp hải đăng đó, đặt mắt tại vị trí  $C$  và nhìn về phía ca nô theo phương  $CA$  tạo với phương nằm ngang  $Cx$  một góc là  $\widehat{ACx} = 27^\circ$  (minh hoạ ở Hình 22). Tính chiều cao  $BH$  của tháp hải đăng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét), biết  $AB \parallel Cx$  và độ cao từ tầm mắt của người đó đến đỉnh tháp hải đăng là  $CH = 2,1$  m.

23. Một chiếc thuyền đi với tốc độ 20 km/h theo hướng Đông trong 1 giờ 30 phút từ vị trí  $P$  đến vị trí  $A$ . Sau đó, nó sẽ đi theo hướng Bắc với cùng tốc độ trong 3 giờ 30 phút

đến vị trí  $B$  (Hình 23). Tính góc so với hướng Đông mà thuyền đi từ vị trí  $P$  đến vị trí  $B$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).



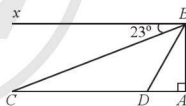
Hình 23



Hình 24

24. Từ một máy bay trực thăng, một người đặt mắt tại vị trí  $M$  ở độ cao  $MH = 920$  m. Người đó nhìn hai vị trí  $A$  và  $B$  của hai đầu một cây cầu theo phương  $MA$  và  $MB$  tạo với phương nằm ngang  $Mx$  các góc lần lượt là  $\widehat{AMx} = 37^\circ$  và  $\widehat{BMx} = 31^\circ$  với  $Mx \parallel AB$  (Hình 24). Hỏi độ dài  $AB$  của cây cầu là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

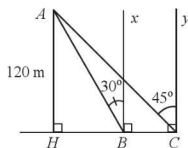
25. Từ một đài quan sát, một người đặt mắt tại vị trí  $B$ . Người đó nhìn thấy một chiếc ô tô ở vị trí  $C$  theo phương  $BC$  tạo với phương nằm ngang  $Bx$  một góc là  $\widehat{CBx} = 23^\circ$  với  $Bx \parallel AC$ . Khi đó, khoảng cách giữa ô tô và chân đài quan sát là  $AC = 1\,284$  m. Nếu ô tô từ vị trí  $C$  tiếp tục đi về phía chân đài quan sát với tốc độ  $60$  km/h thì sau  $1$  phút, người đó nhìn thấy ô tô ở vị trí  $D$  với góc  $\widehat{DBx} = \alpha$  (Hình 25).



Hình 25

- Tính chiều cao của đài quan sát (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét), biết độ cao từ tầm mắt của người đó đến đỉnh đài quan sát là  $3$  m.
  - Tính số đo góc  $\alpha$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).
  - Tính khoảng cách từ mắt người quan sát đến vị trí  $D$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).
26. Flycam là từ viết tắt của Fly camera. Đây là thiết bị bay không người lái có lắp camera hay máy ảnh để quay phim hoặc chụp ảnh từ trên cao. Một chiếc Flycam đang ở vị trí  $A$  cách cây cầu  $BC$  (theo phương thẳng đứng) một khoảng

$AH = 120$  m. Biết góc tạo bởi phương  $AB, AC$  với các phương vuông góc với mặt cầu tại  $B, C$  lần lượt là  $\widehat{ABx} = 30^\circ$ ,  $\widehat{ACy} = 45^\circ$  (Hình 26). Tính độ dài  $BC$  của cây cầu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Hình 26

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

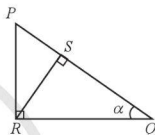
27. Cho tam giác  $PQR$  vuông tại  $R$  có đường cao  $RS$  và  $\widehat{Q} = \alpha$  (Hình 27). Tỉ số lượng giác  $\sin \alpha$  bằng

A.  $\frac{PR}{RS}$ .

B.  $\frac{PR}{QR}$ .

C.  $\frac{PS}{RS}$ .

D.  $\frac{RS}{QR}$ .



Hình 27

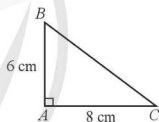
28. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm (Hình 28). Tỉ số lượng giác  $\cot C$  bằng

A.  $\frac{4}{3}$ .

B.  $\frac{3}{5}$ .

C.  $\frac{4}{5}$ .

D.  $\frac{3}{4}$ .



Hình 28

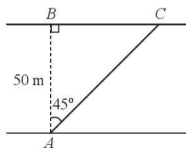
29. Một chiếc thang dài 6 m được đặt dựa vào tường và tạo với phương nằm ngang một góc  $60^\circ$ . Khi đó, khoảng cách giữa chân thang và chân tường là

A. 3 m.

B.  $3\sqrt{3}$  m.

C.  $3\sqrt{2}$  m.

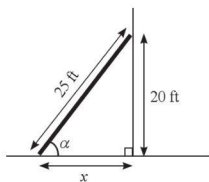
D.  $2\sqrt{3}$  m.



Hình 29

30. Một con sông có bề rộng  $AB = 50$  m. Một chiếc thuyền đi thẳng từ vị trí  $A$  bên này bờ sông đến vị trí  $C$  bên kia bờ sông với góc tạo bởi phương  $AC$  và phương  $AB$  là  $\widehat{BAC} = 45^\circ$  (Hình 29). Hỏi độ dài đoạn thẳng  $BC$  là bao nhiêu mét?

31. Một người lính cứu hoả dựng một chiếc thang dài 25 ft dựa vào tường với góc tạo bởi thang và phương nằm ngang là góc  $\alpha$ . Biết đỉnh của chiếc thang cách mặt đất là 20 ft (Hình 30). Tính khoảng cách  $x$  từ chân thang đến chân tường và số đo góc  $\alpha$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Hình 30

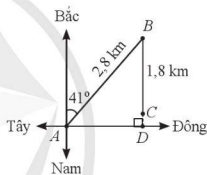
32. Sử dụng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, tính giá trị mỗi biểu thức sau:

a)  $\sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 65^\circ$ ;

b)  $\cot 20^\circ \cdot \cot 40^\circ \cdot \cot 50^\circ \cdot \cot 70^\circ$ .

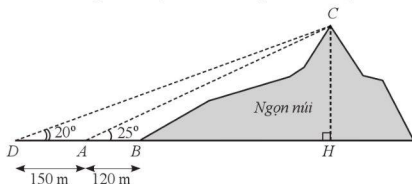
33. Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 70^\circ$ ,  $AB = 10$  cm,  $AC = 15$  cm. Tính độ dài cạnh  $BC$ .

34. Một thủy thủ lái thuyền từ bờ (ở vị trí  $A$ ) ra biển theo hướng Đông Bắc với góc nghiêng so với hướng Bắc là  $41^\circ$ . Đi được 2,8 km thì người đó phát hiện sắp hết nhiên liệu (ở vị trí  $B$ ), vội quay thuyền vào bờ theo hướng Nam. Người đó đi tiếp được 1,8 km thì thuyền bị tắt máy (ở vị trí  $C$ ) (Hình 31). Hỏi lúc đó thuyền còn cách bờ bao xa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của kilômét)?



Hình 31

35. Một người (ở vị trí  $A$ ) đứng cách chân núi (ở vị trí  $B$ ) là 120 m. Người này đo được góc tạo bởi phương  $AC$  và phương nằm ngang là  $\widehat{BAC} = 25^\circ$  với vị trí  $C$  là đỉnh núi. Sau đó, người này di chuyển thêm 150 m ra phía xa ngọn núi hơn đến vị trí  $D$  và đo được góc tạo bởi phương  $DC$  và phương nằm ngang là  $\widehat{BDC} = 20^\circ$  (Hình 32). Tính chiều cao  $CH$  của ngọn núi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Hình 32

## LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Trong tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{27,51} \text{ (m)}; \quad \sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC} \approx 0,72;$$

$$\cos \widehat{BCA} = \frac{AC}{BC} \approx 0,69; \quad \tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} \approx 1,05;$$

$$\cot \widehat{BCA} = \frac{AC}{AB} \approx 0,95.$$

2. Vì  $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 2 + 3 = 5 = (\sqrt{5})^2$  nên  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .

Suy ra tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Do  $\widehat{B}$  và  $\widehat{C}$  là hai góc phụ nhau nên

$$\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}; \quad \cos B = \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5};$$

$$\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad \cot B = \tan C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

3. a) 1.      b) 0.      c) 0.      d) 1.

4. a) 1.      b)  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ .

5. Xét tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  với  $\widehat{B} = \alpha$ , ta có:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ,  $\sin \alpha = \frac{AC}{BC}$   
và  $\cos \alpha = \frac{AB}{BC}$ . Suy ra

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1.$$

a)  $A = \sin^2 79^\circ + \cos^2 79^\circ = 1.$

b) Do  $73^\circ + 17^\circ = 90^\circ$ ;  $37^\circ + 53^\circ = 90^\circ$  nên

$$\begin{aligned} B &= \tan 73^\circ \cdot \tan 37^\circ \cdot \tan 53^\circ \cdot \tan 17^\circ = (\tan 73^\circ \cdot \tan 17^\circ)(\tan 37^\circ \cdot \tan 53^\circ) \\ &= (\tan 73^\circ \cdot \cot 73^\circ)(\tan 37^\circ \cdot \cot 37^\circ) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) C &= \cos^2 73^\circ + \cos^2 53^\circ + \cos^2 17^\circ + \cos^2 37^\circ \\ &= (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 53^\circ + \cos^2 37^\circ) \\ &= (\sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\sin^2 37^\circ + \cos^2 37^\circ) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

d) Do  $59^\circ + 31^\circ = 90^\circ$  nên

$$\begin{aligned} D &= \sin 59^\circ + \cos 59^\circ - \sin 31^\circ - \cos 31^\circ \\ &= (\sin 59^\circ - \cos 31^\circ) + (\cos 59^\circ - \sin 31^\circ) \\ &= (\sin 59^\circ - \sin 59^\circ) + (\sin 31^\circ - \sin 31^\circ) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

6. Học sinh tự làm.

7. Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} = \frac{95}{200} = 0,475$ .

Suy ra  $\widehat{BCA} \approx 25^\circ$ .

8. Tam giác  $OAC$  có  $BD \parallel AC$  (hai góc đồng vị bằng nhau) nên  $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ .

$$\text{Suy ra } \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA - OB}{OC - OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}.$$

Vì tam giác  $OAC$  vuông tại  $A$  nên  $\cos \widehat{AOC} = \frac{OA}{OC} = \frac{3}{4}$ . Suy ra  $\widehat{AOC} \approx 41^\circ$ .

9. Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC}$ .

$$\text{Suy ra } AC = \frac{AB}{\tan \widehat{ACB}} = \frac{70}{\tan 35^\circ} \approx 99,97 \text{ (m)}.$$

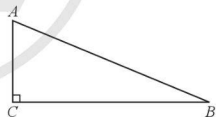
Vậy ô tô đỗ cách chân toà nhà khoảng 99,97 m.

10. (Hình 33)

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  nên

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \frac{12}{13}AB.$$

$$\text{Vậy } \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}; \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}.$$



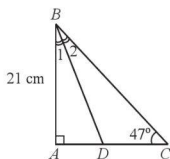
Hình 33

11. (Hình 34)

Do  $\widehat{C} = 47^\circ$  nên ta tính được  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 21,5^\circ$ .

Vì tam giác  $ABD$  vuông tại  $A$  nên  $\cos B_1 = \frac{AB}{BD}$ .

$$\text{Suy ra } BD = \frac{AB}{\cos B_1} = \frac{21}{\cos 21,5^\circ} \approx 22,57 \text{ (cm)}.$$



Hình 34



12. (Hình 35)

Vì tam giác  $ACH$  vuông tại  $H$  nên

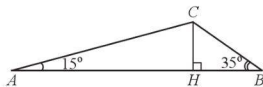
$$AH = CH \cdot \cot \widehat{A} = CH \cdot \cot 15^\circ.$$

Vì tam giác  $BCH$  vuông tại  $H$  nên

$$BH = CH \cdot \cot \widehat{B} = CH \cdot \cot 35^\circ.$$

Mà  $AH + BH = AB$ , suy ra

$$CH = \frac{AB}{\cot 15^\circ + \cot 35^\circ} = \frac{6}{\cot 15^\circ + \cot 35^\circ} \approx 1,16 \text{ (cm)}.$$



Hình 35

13. a)  $x \approx 4,8$  cm;  $y \approx 7,4$  cm.

b) Ta chứng minh được tam giác  $GHK$  vuông cân tại  $K$  nên  $GK = HK = 5$  cm. Từ đó, tính được  $x \approx 7,1$  cm;  $y \approx 8,5$  cm.

c) Tam giác  $MOQ$  vuông cân tại  $Q$  nên ta tính được  $OP = OQ = MQ = 2$  cm;  $\widehat{MOQ} = 45^\circ$ ;  $\widehat{NOP} = 30^\circ$ . Từ đó, tính được  $x \approx 1,2$  cm;  $y \approx 2,3$  cm.

14. Xét tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$  với đường cao  $AH$ .

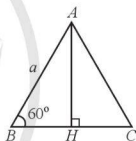
Khi đó, ta có  $AB = BC = a$  và  $\widehat{B} = 60^\circ$  (Hình 36).

Vì tam giác  $ABH$  vuông tại  $H$  nên

$$AH = AB \cdot \sin \widehat{B} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy diện tích của tam giác  $ABC$  là:

$$\frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



Hình 36

15. Kẻ đường phân giác  $BD$  của tam giác  $ABC$ . Khi

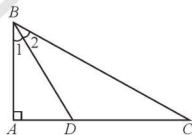
đó, ta có  $\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2}$  (Hình 37).

Vì tam giác  $ABD$  vuông tại  $A$  nên  $\tan B_1 = \frac{AD}{AB}$ .

Theo tính chất đường phân giác, ta có:  $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$ . Suy ra

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD + CD}{AB + BC} = \frac{AC}{AB + BC}.$$

Vậy  $\tan B_1 = \frac{AC}{AB + BC}$  hay  $\tan \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$ .



Hình 37

16. Vì tam giác  $ACH$  vuông tại  $H$  nên  $CH = AH \cdot \cot \widehat{ACH} = 350 \cdot \cot 40^\circ$ .

Vì tam giác  $BCK$  vuông tại  $K$  nên  $CK = BK \cdot \cot \widehat{BCK} = 350 \cdot \cot 50^\circ$ .

Ta chứng minh được  $ABKH$  là hình bình hành. Suy ra khoảng cách giữa hai khinh khí cầu là:

$$AB = HK = CH - CK = 350(\cot 40^\circ - \cot 50^\circ) \approx 123 \text{ (m)}.$$

17. Ta chứng minh được  $ACKH$  là hình chữ nhật. Suy ra  $HK = AC = 1,5 + 8 = 9,5 \text{ (m)}$ .

Vì tam giác  $AHK$  vuông tại  $H$  nên  $AH = HK \cdot \cot \widehat{HAK} = 9,5 \cdot \cot 15^\circ$ .

Vì tam giác  $AHB$  vuông tại  $H$  nên  $BH = AH \cdot \tan \widehat{BAH} = 9,5 \cdot \cot 15^\circ \cdot \tan 60^\circ$ .

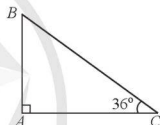
Chiều cao của toà nhà là:

$$BK = HK + BH = 9,5 + 9,5 \cdot \cot 15^\circ \cdot \tan 60^\circ \approx 70,9 \text{ (m)}.$$

18. Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ở Hình 38 mô tả cột cờ  $AB$  có bóng nắng của cột cờ trên mặt đất là  $AC = 10,5 \text{ m}$  và góc tạo bởi tia nắng với phương nằm ngang là  $\widehat{ACB} = 36^\circ$ .

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên

$$AB = AC \cdot \tan \widehat{ACB} = 10,5 \cdot \tan 36^\circ \approx 7,63 \text{ (m)}.$$



Hình 38

19. Theo đề bài, ta có: độ dài đường đi của chùm tia gamma tới khối u là  $AB$ ; góc tạo bởi chùm tia gamma với da mặt là góc  $ABC$ .

a) Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  nên  $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{5,7}{8,3} = \frac{57}{83}$ .

Suy ra  $\widehat{ABC} = 34,5^\circ$ . Vậy góc tạo bởi chùm tia gamma với da mặt xấp xỉ  $34,5^\circ$ .

b) Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  nên

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(5,7)^2 + (8,3)^2} \approx 10,1 \text{ (cm)}.$$

20. Ta chứng minh được  $ABDC$  là hình chữ nhật. Suy ra  $CD = AB = 1,5 \text{ m}$  và  $BD = AC = 20 \text{ m}$ .

Vì tam giác  $BDE$  vuông tại  $D$  nên  $DE = BD \cdot \tan \widehat{EBD} = 20 \cdot \tan 32^\circ$ .

Vậy chiều cao của cột cờ là:  $CE = CD + DE = 1,5 + 20 \cdot \tan 32^\circ \approx 14 \text{ (m)}$ .

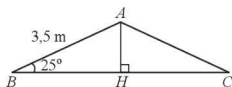
21. Kẻ đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$  (Hình 39).

Vì tam giác  $ABH$  vuông tại  $H$  nên

$$BH = AB \cdot \cos \widehat{ABH} = 3,5 \cdot \cos 25^\circ.$$

Do  $\triangle ABH = \triangle ACH$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên  $BH = CH$ . Suy ra

$$BC = 2 BH = 2 \cdot 3,5 \cdot \cos 25^\circ \approx 6,3 \text{ (m)}.$$



Hình 39

22. Do  $AB \parallel Cx$  nên  $\widehat{BAC} = \widehat{ACx} = 27^\circ$ .

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  nên  $BC = AB \cdot \tan \widehat{BAC} = 300 \cdot \tan 27^\circ$ .

Chiều cao của tháp hải đăng là:

$$BH = BC + CH = 300 \cdot \tan 27^\circ + 2,1 \approx 154,96 \text{ (m)}.$$

23. Đổi: 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ; 3 giờ 30 phút = 3,5 giờ.

Theo đề bài, ta có góc so với hướng Đông mà thuyền đi từ vị trí  $P$  đến vị trí  $B$  là góc  $APB$ .

Quãng đường  $PA$  là:  $PA = 20 \cdot 1,5 = 30 \text{ (km)}$ .

Quãng đường  $AB$  là:  $AB = 20 \cdot 3,5 = 70 \text{ (km)}$ .

Xét tam giác  $ABP$  vuông tại  $A$ , ta có:  $\tan \widehat{APB} = \frac{AB}{PA} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3}$ .

Suy ra  $\widehat{APB} \approx 66^\circ 48'$ .

Vậy góc so với hướng Đông mà thuyền đi từ vị trí  $P$  đến vị trí  $B$  xấp xỉ  $66^\circ 48'$ .

24. Do  $Mx \parallel AB$  nên  $\widehat{HAM} = \widehat{AMx} = 37^\circ$ ;  $\widehat{HBM} = \widehat{BMx} = 31^\circ$ .

Vì tam giác  $AMH$  vuông tại  $H$  nên  $AH = MH \cdot \cot \widehat{HAM} = 920 \cdot \cot 37^\circ$ .

Vì tam giác  $BMH$  vuông tại  $H$  nên  $BH = MH \cdot \cot \widehat{HBM} = 920 \cdot \cot 31^\circ$ .

Mà  $AB = BH - AH$ , suy ra  $AB = 920(\cot 31^\circ - \cot 37^\circ) \approx 310 \text{ (m)}$ .

Vậy độ dài  $AB$  của cây cầu khoảng 310 m.

25. a) Do  $Bx \parallel AC$  nên  $\widehat{ACB} = \widehat{CBx} = 23^\circ$ .

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $AB = AC \cdot \tan \widehat{ACB} = 1284 \cdot \tan 23^\circ \approx 545 \text{ (m)}$ .

Vậy chiều cao của đài quan sát khoảng:  $3 + 545 = 548 \text{ (m)}$ .

b) Đổi:  $60 \text{ km/h} = 1\,000 \text{ m/phút}$ .

Do  $Bx \parallel AC$  nên ta tính được  $\widehat{ABx} = 90^\circ$ .

Quãng đường  $CD$  là:  $CD = 1\,000 \cdot 1 = 1\,000 \text{ (m)}$ .

Suy ra  $AD = AC - CD = 1\,284 - 1\,000 = 284 \text{ (m)}$ .

Xét tam giác  $ABD$  vuông tại  $A$ , ta có:  $\tan \widehat{ABD} = \frac{AD}{AB} \approx \frac{284}{545}$ .

Suy ra  $\widehat{ABD} \approx 27^\circ 31'$ .

Mà  $\widehat{DBx} + \widehat{ABD} = \widehat{ABx} = 90^\circ$ , suy ra  $\alpha = 90^\circ - \widehat{ABD} \approx 90^\circ - 27^\circ 31' = 62^\circ 29'$ .

c) Vì tam giác  $ABD$  vuông tại  $A$  nên  $AB = BD \cdot \cos \widehat{ABD}$ . Suy ra

$$BD = \frac{AB}{\cos \widehat{ABD}} \approx \frac{545}{\cos 27^\circ 31'} \approx 615 \text{ (m)}.$$

26. Ta chứng minh được  $AH \parallel Bx \parallel Cy$ . Suy ra

$$\widehat{BAH} = \widehat{ABx} = 30^\circ \text{ và } \widehat{CAH} = \widehat{ACy} = 45^\circ.$$

Vì tam giác  $ABH$  vuông tại  $H$  nên

$$BH = AH \cdot \tan \widehat{BAH} = 120 \cdot \tan 30^\circ = 40\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

Vì tam giác  $ACH$  vuông tại  $H$  nên

$$CH = AH \cdot \tan \widehat{CAH} = 120 \cdot \tan 45^\circ = 120 \text{ (m)}.$$

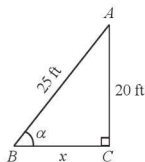
Vậy độ dài của cây cầu là:  $BC = CH - BH = 120 - 40\sqrt{3} \approx 50,72 \text{ (m)}$ .

27. D.      28. A.      29. A.

30. Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  nên

$$BC = AB \cdot \tan \widehat{BAC} = 50 \cdot \tan 45^\circ = 50 \text{ (m)}.$$

31. Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  ở Hình 40 mô tả chiếc thang dài  $AB = 25 \text{ ft}$  dựa vào tường với góc tạo bởi thang và phương nằm ngang là góc  $\widehat{ABC} = \alpha$ , đỉnh của chiếc thang cách mặt đất là  $AC = 20 \text{ ft}$ ; khoảng cách từ chân thang đến chân tường là  $BC = x$ .



Hình 40

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  nên

$$x = BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ (ft)};$$

$$\sin \alpha = \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}, \text{ suy ra } \alpha \approx 53^\circ.$$

32. a) Do  $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$ ;  $35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$  nên

$$\begin{aligned} & \sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 65^\circ \\ &= (\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ) + (\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ) \\ &= (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) + (\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

b) Do  $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$ ;  $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$  nên

$$\begin{aligned} & \cot 20^\circ \cdot \cot 40^\circ \cdot \cot 50^\circ \cdot \cot 70^\circ \\ &= (\cot 20^\circ \cdot \cot 70^\circ)(\cot 40^\circ \cdot \cot 50^\circ) \\ &= (\tan 70^\circ \cdot \cot 70^\circ)(\tan 50^\circ \cdot \cot 50^\circ) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

33. Kẻ đường cao  $BH$  của tam giác  $ABC$  (Hình 41).

Vì tam giác  $ABH$  vuông tại  $H$  nên

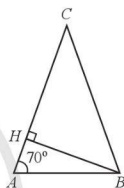
$$BH = AB \cdot \sin \widehat{A} = 10 \cdot \sin 70^\circ \approx 9,397 \text{ (cm)};$$

$$AH = AB \cdot \cos \widehat{A} = 10 \cdot \cos 70^\circ \approx 3,42 \text{ (cm)}.$$

Mà  $CH = AC - AH$ , suy ra  $CH \approx 15 - 3,42 = 11,58 \text{ (cm)}$ .

Vì tam giác  $BCH$  vuông tại  $H$  nên

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{BH^2 + CH^2} \\ &\approx \sqrt{(9,397)^2 + (11,58)^2} \approx 15 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$



Hình 41

34. Gọi tia  $Ax$  là hướng Bắc (Hình 42). Khi đó, ta có:

$$\widehat{BAx} = 41^\circ; AB = 2,8 \text{ km}; BC = 1,8 \text{ km}.$$

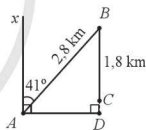
Ta tính được  $\widehat{BAD} = 49^\circ$ .

Vì tam giác  $ABD$  vuông tại  $D$  nên

$$BD = AB \cdot \sin \widehat{BAD} = 2,8 \cdot \sin 49^\circ.$$

Vậy khoảng cách giữa thuyền và bờ là:

$$CD = BD - BC = 2,8 \cdot \sin 49^\circ - 1,8 \approx 0,3 \text{ (km)}.$$



Hình 42

35. Vì tam giác  $ACH$  vuông tại  $H$  nên  $AH = CH \cdot \cot \widehat{CAH} = CH \cdot \cot 25^\circ$ .

Vì tam giác  $DCH$  vuông tại  $H$  nên  $DH = CH \cdot \cot \widehat{CDH} = CH \cdot \cot 20^\circ$ .

Mà  $DH - AH = AD$ , suy ra  $CH(\cot 20^\circ - \cot 25^\circ) = 150$ .

Vậy chiều cao của ngọn núi là:

$$CH = \frac{150}{\cot 20^\circ - \cot 25^\circ} \approx 249 \text{ (m)}.$$

# Chương V

## ĐƯỜNG TRÒN

### §1 ĐƯỜNG TRÒN.

## VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Khái niệm đường tròn

Trong mặt phẳng, đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  là tập hợp các điểm cách điểm  $O$  một khoảng bằng  $R$  ( $R > 0$ ), kí hiệu là  $(O; R)$ .

#### Liên hệ giữa đường kính và dây của đường tròn

- Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là *dây* (hay *dây cung*) của đường tròn.
- Dây đi qua tâm là *đường kính* của đường tròn. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

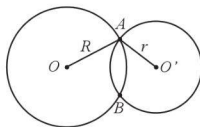
#### Tính đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mỗi đường thẳng đi qua tâm là một trục đối xứng của đường tròn đó.

#### Vị trí tương đối của hai đường tròn

– Hai đường tròn cắt nhau:

- + Hai đường tròn có đúng hai điểm chung được gọi là hai đường tròn cắt nhau.
- + Hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  cắt nhau tại hai điểm  $A$  và  $B$  (Hình 1).



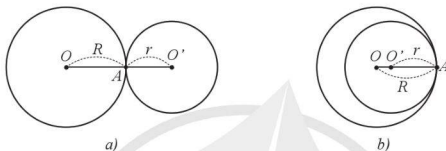
Hình 1

– Hai đường tròn tiếp xúc nhau:

+ Hai đường tròn có đúng một điểm chung được gọi là hai đường tròn tiếp xúc nhau (tại điểm chung đó).

+ Ta có hai trường hợp về hai đường tròn tiếp xúc nhau:

- Hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  tiếp xúc ngoài tại tiếp điểm  $A$  (Hình 2a);
- Hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  tiếp xúc trong tại tiếp điểm  $A$  (Hình 2b).



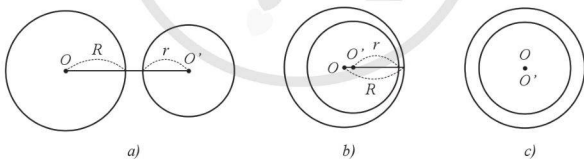
Hình 2

– Hai đường tròn không giao nhau:

+ Hai đường tròn không có điểm chung được gọi là hai đường tròn không giao nhau.

+ Ta có hai trường hợp về hai đường tròn không giao nhau:

- Hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  ở ngoài nhau (Hình 3a);
- Đường tròn  $(O; R)$  đựng đường tròn  $(O'; r)$  với  $R > r$  (Hình 3b).



Hình 3

*Nhận xét*

Ta có thể nhận biết vị trí tương đối của hai đường tròn  $(O; R)$ ,  $(O'; r)$  ( $R \geq r$ ) thông qua hệ thức giữa  $OO'$  với  $R$  và  $r$  được tóm tắt trong bảng sau:

| Vị trí tương đối của hai đường tròn ( $O; R$ ) và ( $O'; r$ ) ( $R \geq r$ )                     | Số điểm chung | Hệ thức giữa $OO'$ với $R$ và $r$  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|------------------------------------|
| Hai đường tròn cắt nhau                                                                          | 2             | $R - r < OO' < R + r$              |
| Hai đường tròn tiếp xúc nhau:<br>– Tiếp xúc ngoài<br>– Tiếp xúc trong                            | 1             | $OO' = R + r$<br>$OO' = R - r > 0$ |
| Hai đường tròn không giao nhau:<br>– ( $O$ ) và ( $O'$ ) ở ngoài nhau<br>– ( $O$ ) đựng ( $O'$ ) | 0             | $OO' > R + r$<br>$OO' < R - r$     |

## B. VÍ DỤ

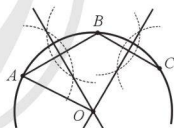
**Ví dụ 1** Có một chi tiết (đường viền ngoài có dạng là đường tròn) bị gãy được minh hoạ như Hình 4. Làm thế nào để xác định được bán kính của đường viền này?

*Giải*

Lấy ba điểm  $A, B, C$  bất kì trên đường tròn. Kẻ đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$  và đoạn thẳng  $BC$ . Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường trung trực. Khi đó, độ dài đoạn thẳng  $OA$  là bán kính của đường viền chi tiết máy (Hình 5).



Hình 4



Hình 5

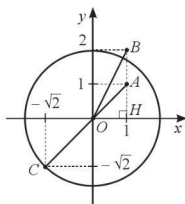
**Ví dụ 2** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $A(1; 1)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ . Xét vị trí của các điểm  $A, B, C$  với đường tròn ( $O; 2$ ).

*Giải*

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $Ox$  (Hình 6). Khi đó, ta có:  $AH = 1$ ,  $OH = 1$ .

Vì tam giác  $OAH$  vuông tại  $H$  nên  $OA^2 = AH^2 + OH^2$  (theo định lý Pythagore).

Suy ra  $OA = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .



Hình 6



Tương tự, ta tính được:

$$OB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5};$$

$$OC = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2.$$

Ta có:  $OA < 2$  (vì  $\sqrt{2} < 2$ ) nên điểm  $A$  nằm trong đường tròn  $(O; 2)$ ;

$OB > 2$  (vì  $\sqrt{5} > 2$ ) nên điểm  $B$  nằm ngoài đường tròn  $(O; 2)$ ;

$OC = 2$  nên điểm  $C$  nằm trên đường tròn  $(O; 2)$ .

**Ví dụ 3** Cho hai đường tròn  $(O; 3 \text{ cm})$  và  $(O'; 1 \text{ cm})$  với  $OO' = 3 \text{ cm}$ . Hỏi hai đường tròn đó có cắt nhau hay không?

*Giải*

Ta thấy bán kính của hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  lần lượt là  $R = 3 \text{ cm}$ ,  $r = 1 \text{ cm}$ .

Do  $R - r = 3 - 1 = 2 \text{ (cm)}$ ,  $R + r = 3 + 1 = 4 \text{ (cm)}$  và  $2 < 3 < 4$  nên

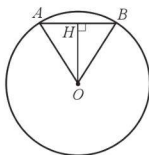
$$R - r < OO' < R + r.$$

Vậy hai đường tròn  $(O; 3 \text{ cm})$  và  $(O'; 1 \text{ cm})$  cắt nhau.

## C. BÀI TẬP

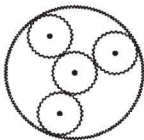
1. Cho đường tròn  $(O; 25 \text{ cm})$ . Tính độ dài dây lớn nhất của đường tròn đó.
2. Cho hai đường tròn  $(O; 4 \text{ cm})$ ,  $(O'; 1 \text{ cm})$ . Xét vị trí tương đối của hai đường tròn trong mỗi trường hợp sau:  
a)  $OO' = 4,5 \text{ cm}$ ;                      b)  $OO' = 6 \text{ cm}$ ;                      c)  $OO' = 2 \text{ cm}$ .
3. Cho hai đường tròn  $(O; 3,5 \text{ cm})$  và  $(O'; 4,5 \text{ cm})$ . Tìm độ dài  $OO'$  sao cho hai đường tròn đó tiếp xúc ngoài.
4. Cho hai đường tròn  $(O; 17 \text{ cm})$  và  $(O'; 10 \text{ cm})$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Biết rằng  $OO' = 21 \text{ cm}$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .
5. Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Chứng minh tứ giác  $OA O'B$  là hình thoi; từ đó, suy ra  $AB$  cắt  $OO'$  tại trung điểm của mỗi đường.

6. Hình 7 mô tả công trình xây dựng cây cầu bắc qua một hồ nước với mặt hồ có dạng hình tròn tâm  $O$  bán kính 2 km. Cây cầu có hai đầu cầu là hai điểm  $A, B$  nằm trên đường tròn tâm  $O$ . Tính chiều dài của cây cầu để khoảng cách từ tâm  $O$  của hồ nước đến cây cầu là  $OH = 1\,732$  m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

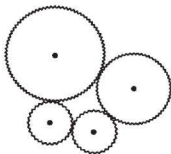


Hình 7

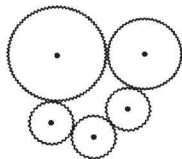
7. Hai hòn đảo được xem như hai hình tròn có khoảng cách từ tâm hòn đảo này đến tâm hòn đảo kia là khoảng 950 m. Biết rằng hòn đảo lớn có bán kính khoảng 500 m, còn đảo nhỏ có bán kính khoảng 300 m. Người ta cần xây dựng một cây cầu bắc từ đảo này sang đảo kia. Hãy chọn vị trí để xây cầu sao cho chiều dài cây cầu là ngắn nhất, khi đó tính chiều dài cây cầu.
8. Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $OA$  và đường tròn tâm  $O'$  đường kính  $OA$ .
- Xét vị trí tương đối của hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .
  - Dây  $AD$  của đường tròn  $(O)$  cắt đường tròn  $(O')$  tại  $C$ . Chứng minh  $AC = CD$ .
9. Cho đường tròn  $(O; 3\text{ cm})$  và  $(O'; 2\text{ cm})$  tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$ . Một đường thẳng đi qua  $A$  cắt  $(O)$  và  $(O')$  lần lượt tại  $B$  và  $C$  ( $B$  và  $C$  khác  $A$ ).
- Chứng minh  $OB \parallel O'C$ .
  - Cho  $AB = 5\text{ cm}$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AC$ .
10. Trong mỗi hình 8a, 8b, 8c, các bánh xe tròn có răng cưa được khớp với nhau. Hình nào có hệ thống bánh răng chuyển động được? Hình nào có hệ thống bánh răng không chuyển động được?



a)



b)



c)

Hình 8



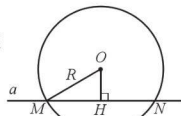
## VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

– Khi đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn cắt nhau.

– Đường thẳng  $a$  cắt đường tròn  $(O; R)$  khi khoảng cách từ tâm  $O$  đến đường thẳng  $a$  nhỏ hơn  $R$  và ngược lại (Hình 9).

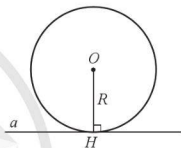


Hình 9

#### Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

– Khi đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm chung đó.

– Đường thẳng  $a$  tiếp xúc với đường tròn  $(O; R)$  khi khoảng cách từ tâm  $O$  đến đường thẳng  $a$  bằng  $R$  và ngược lại (Hình 10).

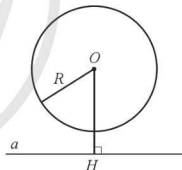


Hình 10

#### Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

– Khi đường thẳng và đường tròn không có điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

– Đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O; R)$  không giao nhau khi khoảng cách từ tâm  $O$  đến đường thẳng  $a$  lớn hơn  $R$  và ngược lại (Hình 11).



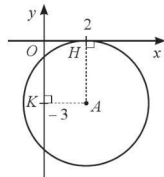
Hình 11

### B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(2; -3)$ . Xác định vị trí tương đối của đường tròn  $(A; 3)$  với các trục tọa độ.

*Giải*

Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  trên  $Ox, Oy$  (Hình 12). Khi đó, ta có: khoảng cách từ điểm  $A$  đến trục  $Ox$  là  $AH = 3$  và khoảng cách từ điểm  $A$  đến trục  $Oy$  là  $AK = 2$ .



Hình 12

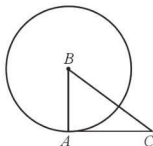
Do  $AH = 3$  nên đường tròn  $(A; 3)$  và trục  $Ox$  tiếp xúc với nhau.

Do  $AK < 3$  (vì  $2 < 3$ ) nên đường tròn  $(A; 3)$  và trục  $Oy$  cắt nhau.

**Ví dụ 2** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm,  $BC = 10$  cm. Đường thẳng  $AC$  có tiếp xúc với đường tròn  $(B; 6$  cm) hay không? Vì sao?

*Giải.* (Hình 13)

Ta có:  $BC^2 = 10^2 = 100$ ;  $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$ . Suy ra  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Do đó, tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  hay  $AB$  vuông góc với  $AC$  tại  $A$ . Suy ra khoảng cách từ điểm  $B$  đến đường thẳng  $AC$  là  $AB = 6$  cm. Vậy đường thẳng  $AC$  tiếp xúc với đường tròn  $(B; 6$  cm).



Hình 13

**Ví dụ 3** Cho điểm  $O$  và đường thẳng  $a$  thỏa mãn khoảng cách từ điểm  $O$  đến đường thẳng  $a$  là 5,3 cm. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O; R)$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $R = 5,1$  cm;

b)  $R = 5,3$  cm;

c)  $R = 5,4$  cm.

*Giải*

Gọi  $d$  là khoảng cách từ điểm  $O$  đến đường thẳng  $a$ . Khi đó, ta có:  $d = 5,3$  cm.

a) Vì  $d = 5,3$  cm;  $R = 5,1$  cm nên  $d > R$ . Vậy đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O; R)$  không giao nhau.

b) Vì  $d = 5,3$  cm;  $R = 5,3$  cm nên  $d = R$ . Vậy đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O; R)$  tiếp xúc nhau.

c) Vì  $d = 5,3$  cm;  $R = 5,4$  cm nên  $d < R$ . Vậy đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O; R)$  cắt nhau.

## C. BÀI TẬP

11. Cho đường thẳng  $a$  và điểm  $O$  với khoảng cách từ điểm  $O$  đến đường thẳng  $a$  là 1 cm. Vẽ đường tròn tâm  $O$  bán kính 3 cm.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$ .

b) Gọi  $A$  và  $B$  là các giao điểm của đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

12. Cho  $\widehat{xOy} = 30^\circ$  và điểm  $O'$  thuộc tia  $Ox$  sao cho  $OO' = 4$  cm.

a) Tính khoảng cách từ điểm  $O'$  đến tia  $Oy$ .

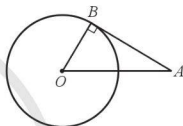
b) Xác định vị trí tương đối của tia  $Oy$  và đường tròn  $(O'; R)$  tùy theo độ dài  $R$  với  $R \leq 4$  cm.

13. Cho hình thang vuông  $ABCD$  ( $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ) có  $AB = 4$  cm,  $BC = 13$  cm,  $CD = 9$  cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng  $AD$ .

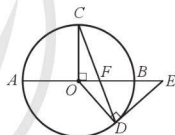
b) Đường thẳng  $AD$  có tiếp xúc với đường tròn đường kính  $BC$  hay không? Vì sao?

14. Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $A$  sao cho  $OA = 2R$ . Kẻ tiếp tuyến  $AB$  của đường tròn  $(O; R)$  với  $B$  là tiếp điểm (Hình 14). Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$  theo  $R$ .



Hình 14

15. Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB = 2R$ , bán kính  $OC$  vuông góc với  $AB$  tại  $O$ . Lấy điểm  $F$  thuộc đoạn thẳng  $OB$ , tia  $CF$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$ . Tiếp tuyến tại  $D$  của đường tròn  $(O)$  cắt  $AB$  tại  $E$  (Hình 15). Chứng minh  $EF = ED$ .



Hình 15

16. Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên đường chéo  $BD$ , lấy điểm  $H$  sao cho  $BH = AB$ . Qua điểm  $H$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BD$  cắt  $AD$  tại  $O$ .

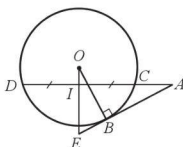
a) So sánh  $OA, OH, HD$ .

b) Xác định vị trí tương đối của  $BD$  và đường tròn  $(O; OA)$ .

17. Từ điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O)$  vẽ tiếp tuyến  $AB$  của đường tròn với  $B$  là tiếp điểm. Lấy các điểm  $C, D$  thuộc đường tròn  $(O)$  sao cho  $C$  nằm giữa  $A$  và  $D$ ,  $O$  không thuộc  $AD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $CD$ , tia  $OI$  cắt  $AB$  tại  $E$  (Hình 16). Chứng minh:

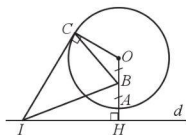
a)  $EB \cdot EA = EI \cdot EO$ ;

b)  $AB^2 = AC \cdot AD$ .



Hình 16

18. Cho đường tròn  $(O; 4 \text{ cm})$  và đường thẳng  $d$  sao cho khoảng cách từ điểm  $O$  đến đường thẳng  $d$  là  $OH = 5 \text{ cm}$ . Đường thẳng  $OH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . Gọi  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $OA$ . Trên đường thẳng  $d$ , lấy một điểm  $I$  (khác  $H$ ), kẻ tiếp tuyến  $IC$  của đường tròn  $(O)$  với  $C$  là tiếp điểm (Hình 17). Chứng minh tam giác  $IBC$  cân tại  $I$ .



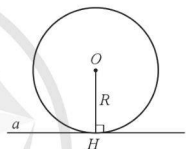
Hình 17

## §3 TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

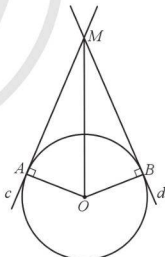
- Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.
- Ở Hình 18 có đường thẳng  $a$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; R)$ .



Hình 18

#### Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

- Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:
  - + Điểm đó cách đều hai tiếp điểm;
  - + Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;
  - + Tia kẻ từ tâm đường tròn đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.
- Ở Hình 19 có hai đường thẳng  $c, d$  là hai tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $A, B$  và cắt nhau tại  $M$ .



Hình 19

### B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Một bánh xe có dạng hình tròn bán kính 25 cm lăn đến bức tường hợp với mặt đất một góc  $56^\circ$  (Hình 20). Tính khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường A (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của centimet).

Giải

Hình 21 mô tả bánh xe có tâm  $O$  bán kính  $OB = OC = 25$  cm, bánh xe chạm vào bức tường thì không di chuyển vào thêm nữa. Tức là khoảng cách  $OA$  từ tâm bánh xe đến góc tường ngắn nhất là khi bánh xe tiếp xúc với bức tường  $AB$  và mặt đất  $AC$ . Khi đó, ta có:  $\widehat{BAC} = 56^\circ$ .

Vì  $AB, AC$  là các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  nên

$$\widehat{OAB} = \widehat{OAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{56^\circ}{2} = 28^\circ.$$

Do  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $B$  nên  $OB \perp AB$ .

Xét tam giác  $OAB$  vuông tại  $B$ , ta có:  $OB = OA \cdot \sin \widehat{OAB}$ . Suy ra

$$OA = \frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{25}{\sin 28^\circ} \approx 53,3 \text{ (cm)}.$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường  $A$  xấp xỉ 53,3 cm.

**Ví dụ 2** Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $AC$  tùy ý. Kẻ hai tiếp tuyến của đường tròn tại  $B$  và tại  $C$ , hai tiếp tuyến này cắt nhau tại  $P$ . Chứng minh  $PO \parallel AC$ .

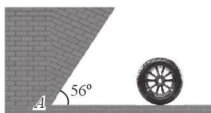
Giải

Gọi  $I$  là giao điểm của  $OP$  và  $BC$  (Hình 22).

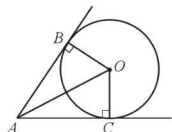
Vì  $C$  thuộc đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  nên tam giác  $ABC$  có  $CO$  là đường trung tuyến ứng với cạnh  $AB$  và  $CO = \frac{AB}{2}$ . Suy ra tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

Do  $PB, PC$  là các tiếp tuyến của  $(O)$  nên  $PB = PC$  và  $OB = OC$ . Suy ra  $OP$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$  hay  $OP \perp BC$ .

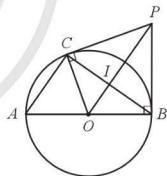
Ta có:  $\widehat{OIB} = \widehat{ACB} = 90^\circ$  nên  $PO \parallel AC$  (hai góc đồng vị bằng nhau).



Hình 20



Hình 21



Hình 22

## C. BÀI TẬP

19. Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính 15 cm. Điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn sao cho  $OA = 25$  cm. Kẻ tiếp tuyến  $AB$  của đường tròn  $(O)$ . Kẻ dây  $BC$  vuông góc với  $OA$  tại  $H$ .

- a) Chứng minh  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .  
b) Tính độ dài các cạnh của tam giác  $ABC$ .

20. Cho đường tròn  $(O)$  và dây  $AB$  khác đường kính. Kẻ bán kính  $OC$  đi qua trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$ . Vẽ đường tròn  $(C; CI)$ . Kẻ tiếp tuyến  $BD$  của đường tròn  $(C)$  với  $D$  là tiếp điểm và  $D$  khác  $I$ . Chứng minh:

- a) Bốn đỉnh của tứ giác  $BDCI$  cùng nằm trên một đường tròn;  
b)  $BD$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

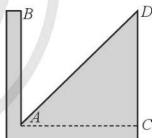
21. Cho đường tròn  $(O; R)$  có đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $AC$  sao cho  $\widehat{CAB} = 30^\circ$ . Lấy điểm  $M$  sao cho  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $OM$ . Chứng minh:

- a)  $MC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ ;  
b)  $MC = R\sqrt{3}$ .

22. Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $A$  nằm trên đường tròn. Lấy điểm  $B$  sao cho  $A$  là trung điểm của đoạn thẳng  $OB$ . Kẻ hai tiếp tuyến  $BM, BN$  của đường tròn  $(O)$ .

- a) Tính số đo góc  $MBN$  và độ dài đoạn thẳng  $BM$  theo  $R$ .  
b) Tứ giác  $AMON$  là hình gì? Vì sao?  
c) Tính độ dài đoạn thẳng  $OH$  theo  $R$  với  $H$  là giao điểm của  $OA$  và  $MN$ .

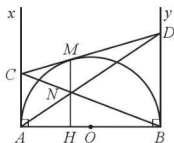
23. Hình 23 minh họa thước phân giác. Thước gồm hai thanh gỗ ghép lại thành góc vuông  $BAC$  và một tấm gỗ có dạng hình tam giác  $ACD$  với  $AD$  là tia phân giác của góc  $BAC$ . Có thể dùng thước phân giác để tìm tâm của một hình tròn hay không? Vì sao?



Hình 23

24. Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Kẻ các tiếp tuyến  $Ax, By$  của đường tròn  $(O)$ . Qua điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt  $Ax, By$  lần lượt tại  $C, D$ . Gọi  $N$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$  và  $H$  là giao điểm của  $MN$  và  $AB$  (Hình 24). Chứng minh:

- a)  $MN \perp AB$ ;  
b)  $MN = NH$ .



Hình 24

25. Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$  với  $R \neq r$ . Đường nối  $OO'$  lần lượt cắt hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tại  $B$  và  $C$ . Đường thẳng  $a$



lần lượt tiếp xúc với hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tại  $D$  và  $E$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $BD$  và  $CE$ . Chứng minh:

- $\widehat{DME} = 90^\circ$ ;
- $MA$  tiếp xúc với hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ ;
- $MD \cdot MB = ME \cdot MC$ .

26. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$ . Hình chiếu của  $H$  trên  $AB, AC$  lần lượt là  $D, E$ . Gọi  $(O)$  là đường tròn đường kính  $HB$  và  $(O')$  là đường tròn đường kính  $HC$ . Chứng minh:

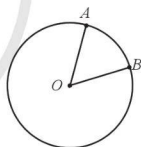
- Điểm  $D$  thuộc đường tròn  $(O)$  và điểm  $E$  thuộc đường tròn  $(O')$ ;
- Hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài;
- $AH$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ ;
- $AH = DE$ ;
- Diện tích tứ giác  $DEO'O$  bằng nửa diện tích tam giác  $ABC$ .

## S4 GÓC Ở TÂM. GÓC NỘI TIẾP

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Góc ở tâm

- Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.
- Ở Hình 25 có góc  $AOB$  là góc ở tâm.



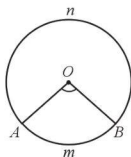
Hình 25

#### Cung. Số đo của cung

– *Cung*:

- Phần đường tròn nối liền hai điểm  $A, B$  trên đường tròn được gọi là một cung (hay cung tròn)  $AB$ , kí hiệu là  $\widehat{AB}$ .
- Trong Hình 26:

- Cung nằm bên trong góc ở tâm  $AOB$  được gọi là cung nhỏ, kí hiệu là  $\widehat{AmB}$ . Ta còn nói  $\widehat{AmB}$  là cung bị chắn bởi góc  $AOB$  hay góc  $AOB$  chắn cung nhỏ  $AmB$ .



Hình 26

- Cung nằm bên ngoài góc ở tâm  $AOB$  được gọi là cung lớn, kí hiệu là  $\widehat{AnB}$ .
- Nếu có điểm  $C$  (khác  $A$  và  $B$ ) thuộc  $\widehat{AmB}$  thì ta cũng nói cung này là  $\widehat{ACB}$ .
- Nếu có điểm  $D$  (khác  $A$  và  $B$ ) thuộc  $\widehat{AnB}$  thì ta cũng nói cung này là  $\widehat{ADB}$ .

– *Số đo của cung:*

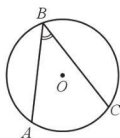
- + Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- + Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa  $360^\circ$  và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
- + Số đo của nửa đường tròn bằng  $180^\circ$ .
- + Số đo của cung  $AB$  được kí hiệu là  $sđ\widehat{AB}$ .
- + So sánh hai cung:
  - Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau;
  - Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

## Góc nội tiếp

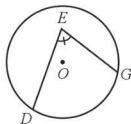
- *Định nghĩa:* Góc nội tiếp là góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.
- *Định lí:* Mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.
- *Hệ quả:* Trong một đường tròn, góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng  $90^\circ$ .

## B. VÍ DỤ

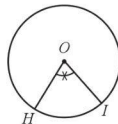
**Ví dụ 1** Trong các góc  $ABC$ ,  $DEG$ ,  $HOI$ ,  $PKQ$ ,  $MON$  lần lượt ở các hình 27a, 27b, 27c, 27d, 27e, góc nào là góc ở tâm, góc nào không là góc ở tâm? Vì sao?



a)

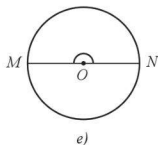
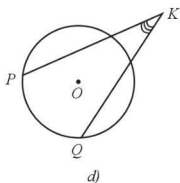


b)



c)

Hình 27



Hình 27

Giải

Đường tròn ở các hình 27a, 27b, 27c, 27d, 27e đều có tâm  $O$  nên các góc  $HOI, MON$  là góc ở tâm; các góc  $ABC, DEG, PKQ$  không là góc ở tâm.

**Ví dụ 2** Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

- Trong một đường tròn, góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.
- Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.
- Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
- Trong một đường tròn, mỗi góc nội tiếp có số đo gấp hai lần số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

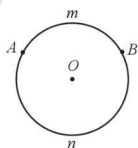
Giải

Phát biểu ở các câu a, c là đúng. Phát biểu ở các câu b, d là sai.

**Ví dụ 3** Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai điểm  $A, B$  nằm trên đường tròn sao cho

$$\text{sđ}\widehat{AmB} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AnB} \quad (\text{Hình 28}).$$

- Tính  $\text{sđ}\widehat{AnB}$ .
- Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$  theo  $R$ .



Hình 28

Giải

- Do  $\text{sđ}\widehat{AmB} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AnB}$  và  $\text{sđ}\widehat{AmB} + \text{sđ}\widehat{AnB} = 360^\circ$  nên  $\frac{3}{2} \text{sđ}\widehat{AnB} = 360^\circ$   
hay  $\text{sđ}\widehat{AnB} = 240^\circ$ .

- Kẻ  $OH$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$ , tia  $OH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $K$  (Hình 29).

Do  $\text{sđ}\widehat{AnB} = 240^\circ$  nên  $\text{sđ}\widehat{AmB} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AnB} = 120^\circ$ . Suy ra  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ .

Xét hai tam giác vuông  $OAH$  và  $OBH$ , ta có:

$OH$  là cạnh chung;  $OA = OB$  (vì cùng bằng  $R$ ).

Suy ra  $\triangle OAH = \triangle OBH$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Do đó  $AH = BH = \frac{AB}{2}$  và  $\widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = 60^\circ$ .

Tam giác  $OAK$  có  $OA = OK$  (vì cùng bằng  $R$ ) nên tam giác  $OAK$  cân tại  $O$ . Mà  $\widehat{AOK} = 60^\circ$ , suy ra tam giác  $OAK$  đều. Do đó  $AK = OA = OK = R$ .

Tương tự, ta chứng minh được  $BK = OB = OK = R$ .

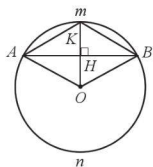
Tứ giác  $OAKB$  có  $OA = AK = BK = OB$  (vì cùng bằng  $R$ ) nên  $OAKB$  là hình thoi.

Suy ra  $AB$  cắt  $OK$  tại trung điểm  $H$  của mỗi đường. Do đó  $OH = \frac{OK}{2} = \frac{R}{2}$ .

Xét tam giác  $OAH$  vuông tại  $H$ , ta có:  $OA^2 = AH^2 + OH^2$ . Suy ra

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Mà  $AH = \frac{AB}{2}$ , suy ra  $AB = 2AH = R\sqrt{3}$ .



Hình 29

**Ví dụ 4** Cho hai đường tròn  $(B; R)$ ,  $(C; r)$  với điểm  $B$  nằm trên đường tròn tâm  $C$  và  $R < r$ . Lấy các điểm  $A, M, N$  nằm trên đường tròn  $(B)$  sao cho  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(C)$  và  $M, N$  nằm trong đường tròn  $(C)$ . Tia  $BM, BN$  cắt đường tròn  $(C)$  lần lượt tại  $P, Q$  (Hình 30).

a) Chứng minh  $\widehat{PCQ} = 4\widehat{MAN}$ .

b) Tính số đo các góc  $PCQ, MAN$ . Biết rằng  $\widehat{MBN} = 58^\circ$ .

*Giải*

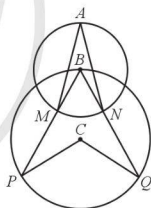
a) Xét đường tròn  $(B)$ , ta có:  $\widehat{MBN} = 2\widehat{MAN}$  (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ  $MN$ ).

Xét đường tròn  $(C)$ , ta có:  $\widehat{PCQ} = 2\widehat{PBQ}$  (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ  $PQ$ ) hay  $\widehat{PCQ} = 2\widehat{MBN}$ .

Mà  $\widehat{MBN} = 2\widehat{MAN}$ , suy ra  $\widehat{PCQ} = 4\widehat{MAN}$ .

b) Theo câu a, ta có:  $\widehat{PCQ} = 2\widehat{MBN} = 2 \cdot 58^\circ = 116^\circ$ ;

$$\widehat{MBN} = 2\widehat{MAN} \text{ hay } \widehat{MAN} = \frac{\widehat{MBN}}{2} = \frac{58^\circ}{2} = 29^\circ.$$



Hình 30

**Ví dụ 5** Cho đường tròn  $(O; R)$  có hai đường kính  $AB, CD$  vuông góc với nhau. Gọi  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $OC$ ,  $M$  là giao điểm của tia  $BK$  với đường tròn  $(O)$ ,  $I$  là giao điểm của  $MD$  và  $AB$ .

a) Chứng minh  $sđ\widehat{AM} = sđ\widehat{BD} - sđ\widehat{CM}$ .

b) Tính diện tích của các tam giác  $ABM, BIK$  theo  $R$ .

Giải. (Hình 31)

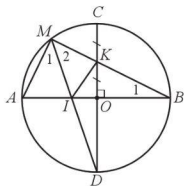
a) Do hai đường kính  $AB, CD$  vuông góc với nhau nên

$$\widehat{AC} = \widehat{AD} = \widehat{BC} = \widehat{BD}.$$

Do  $M$  thuộc cung nhỏ  $AC$  nên

$$sđ\widehat{AM} = sđ\widehat{AC} - sđ\widehat{CM}.$$

$$\text{Suy ra } sđ\widehat{AM} = sđ\widehat{BD} - sđ\widehat{CM}.$$



Hình 31

b) Xét đường tròn  $(O)$ , ta có:  $\widehat{AMB} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$$\text{Vì } K \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } OC \text{ nên } OK = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}.$$

Do tam giác  $ABM$  vuông tại  $M$  và tam giác  $BKO$  vuông tại  $O$  nên

$$\tan B_1 = \frac{AM}{BM} = \frac{OK}{OB} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } BM = 2AM.$$

Mặt khác, ta lại có:  $AM^2 + BM^2 = AB^2$  (áp dụng định lý Pythagore cho tam giác

$ABM$  vuông tại  $M$ ). Do đó  $5AM^2 = 4R^2$  hay  $AM = \frac{2R\sqrt{5}}{5}$ . Suy ra  $BM = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$ .

Diện tích của tam giác  $ABM$  là:

$$\frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4R\sqrt{5}}{5} = \frac{4R^2}{5}.$$

Do  $\widehat{AD} = \widehat{BD}$  nên  $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$  (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Xét tam giác  $ABM$  có  $MI$  là đường phân giác, ta có:

$$\frac{AI}{BI} = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2} \text{ hay } AI = \frac{BI}{2}.$$

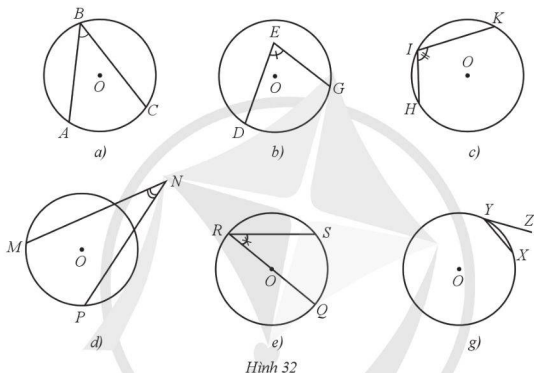
$$\text{Mà } AI + BI = AB, \text{ suy ra } \frac{3BI}{2} = 2R \text{ hay } BI = \frac{4R}{3}.$$

Diện tích của tam giác  $BIK$  là:

$$\frac{1}{2} \cdot OK \cdot BI = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{4R}{3} = \frac{R^2}{3}.$$

### C. BÀI TẬP

27. Trong các góc  $ABC$ ,  $DEG$ ,  $HIK$ ,  $MNP$ ,  $QRS$ ,  $XYZ$  lần lượt ở các hình 32a, 32b, 32c, 32d, 32e, 32g, góc nào là góc nội tiếp? Vì sao?

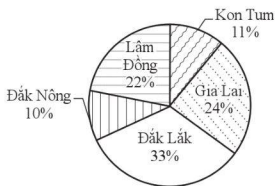


Hình 32

28. Nhận định nào sau đây là **sai**?

- A. Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.
- B. Góc nội tiếp là góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.
- C. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng  $90^\circ$ .
- D. Số đo của cung  $AB$  được kí hiệu là  $s\widehat{AB}$ .

29. Biểu đồ hình quạt tròn ở Hình 33 biểu diễn số lớp học cấp trung học cơ sở của năm tỉnh Tây Nguyên tính đến ngày 30/9/2021



Hình 33

(tính theo tỉ số phần trăm). Hãy cho biết các cung tương ứng với phần biểu diễn số lớp học cấp trung học cơ sở của các tỉnh Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng tính đến ngày 30/9/2021 lần lượt có số đo là bao nhiêu độ?

30. Cho đường tròn  $(O)$  và ba điểm  $A, B, C$  nằm trên đường tròn sao cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  và  $\widehat{BAC} = 50^\circ$ . So sánh các cung nhỏ  $AB, BC$ .

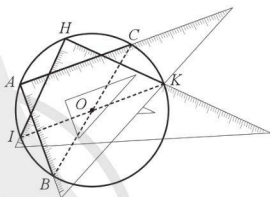
31. Bạn An hỏi bạn Bình: “Hãy xác định tâm của đường tròn mà chỉ dùng ê ke.”

Bạn Bình đã xác định tâm  $O$  của đường tròn như sau:

– Lần thứ nhất: đặt góc vuông của ê ke tại điểm  $A$ , hai cạnh góc vuông của ê ke lần lượt cắt đường tròn tại hai điểm (gọi hai điểm đó là  $B, C$ );

– Lần thứ hai: đặt góc vuông của ê ke tại điểm  $H$ , hai cạnh góc vuông của ê ke lần lượt cắt đường tròn tại hai điểm (gọi hai điểm đó là  $I, K$ ).

Quan sát Hình 34 và chứng minh rằng bằng cách làm hai lần như trên thì bạn Bình đã giải được câu hỏi của bạn An.



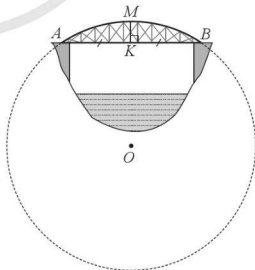
Hình 34

32. Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai điểm  $A, B$  nằm trên đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến tại  $A$  và  $B$  của đường tròn  $(O)$ , hai tiếp tuyến đó cắt nhau tại  $M$ .

a) Tính số đo cung nhỏ  $AB$  và số đo cung lớn  $AB$  nếu  $\widehat{AMB} = 40^\circ$ .

b) Tính diện tích của tứ giác  $OAMB$  theo  $R$  nếu số đo cung nhỏ  $AB$  bằng  $120^\circ$ .

33. Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R)$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$ . Kẻ đường kính  $AC$  của đường tròn  $(O)$  và đường kính  $AD$  của đường tròn  $(O')$ . So sánh độ dài dây  $BC$  của đường tròn  $(O)$  và độ dài dây  $BD$  của đường tròn  $(O')$ .



Hình 35

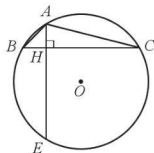
34. Một chiếc cầu được thiết kế như một cung  $AB$  của đường tròn  $(O)$  với độ dài  $AB = 40$  m và chiều cao  $MK = 6$  m (Hình 35). Tính bán kính của đường tròn chứa cung  $AMB$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

35. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$ . Vẽ đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AC$ . Trên tia  $BH$ , lấy điểm  $D$  sao cho  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BD$ . Nối  $A$  với  $D$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$ . Chứng minh:

- a)  $CH$  là tia phân giác của góc  $ACE$ ;  
b)  $OH \parallel EC$ .

36. Cho đường tròn  $(O; 1 \text{ dm})$  và ba điểm  $A, B, C$  nằm trên đường tròn sao cho  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ ,  $\widehat{ACB} = 15^\circ$ . Kẻ  $AH$  vuông góc với  $BC$  tại  $H$ , tia  $AH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$  (Hình 36). Tính:

- a) Số đo cung nhỏ  $CE$  và số đo cung lớn  $BC$ ;  
b) Độ dài các đoạn thẳng  $AC, BC$ .



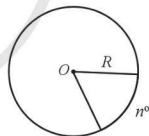
Hình 36

## §5 ĐỘ DÀI CUNG TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Độ dài cung tròn

- Chu vi của đường tròn bán kính  $R$  là  $C = 2\pi R$ .
- Trong một đường tròn bán kính  $R$ , độ dài của cung tròn có số đo  $n^\circ$  là:  $l = \frac{\pi R n}{180}$  (Hình 37).

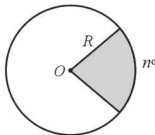


Hình 37

#### Diện tích hình quạt tròn

- Hình quạt tròn (hay còn gọi tắt là hình quạt) là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.
- Diện tích của hình tròn bán kính  $R$  là  $S = \pi R^2$ .
- Diện tích hình quạt tròn bán kính  $R$ , cung có số đo  $n^\circ$  là:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ (Hình 38).}$$



Hình 38

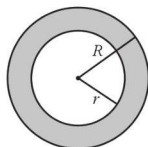


## Diện tích hình vành khuyên

– Hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm được gọi là hình vành khuyên.

– Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn ( $O; R$ ) và ( $O; r$ ) (với  $R > r$ ) có diện tích là:

$$S = \pi(R^2 - r^2) \text{ (Hình 39).}$$



Hình 39

## B. VÍ DỤ

**Ví dụ 1** Trái Đất quay xung quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo là gần giống đường tròn. Giả thiết quỹ đạo này là đường tròn với bán kính khoảng 150 triệu km. Cứ hết một năm (365 ngày) thì Trái Đất quay được hết một vòng quanh Mặt Trời. Tính quãng đường đi được của Trái Đất sau 1 giờ (làm tròn kết quả đến hàng nghìn của kilômét).

*Giải*

Quãng đường đi được của Trái Đất sau 1 giờ khoảng:

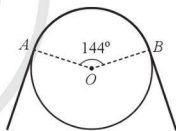
$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 150\,000\,000}{365 \cdot 24} \approx 108\,000 \text{ (km).}$$

**Ví dụ 2** Bánh xe của một ròng rọc có dạng hình tròn với chu vi là 460 mm. Dây Curoa (Courroie) bao bánh xe theo cung  $AB$ . Tính độ dài phần dây Curoa bao bánh xe theo cung  $AB$ , biết  $\widehat{AOB} = 144^\circ$  (Hình 40).

*Giải*

Độ dài phần dây Curoa bao bánh xe theo cung  $AB$  là:

$$l = \frac{460 \cdot 144}{360} = 184 \text{ (mm).}$$



Hình 40

**Ví dụ 3** Cho hai đường tròn ( $O; 2$  cm) và ( $O'; 1$  cm) tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng  $d$  lần lượt cắt đường tròn ( $O$ ) và ( $O'$ ) tại  $M$  và  $N$  ( $d$  không đi qua  $O$  và  $O'$ ). Chứng minh độ dài của cung nhỏ  $AM$  của đường tròn ( $O$ ) gấp đôi độ dài của cung nhỏ  $AN$  của đường tròn ( $O'$ ).

*Giải. (Hình 41)*

Hai đường tròn ( $O$ ) và ( $O'$ ) tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$  nên ba điểm  $O, A, O'$  thẳng hàng.

Hai điểm  $A, M$  thuộc đường tròn  $(O)$  nên  $OA = OM$  hay tam giác  $OAM$  cân tại  $O$ . Suy ra  $\widehat{OAM} = \widehat{OMA}$ .

Mặt khác, ta lại có:  $\widehat{AOM} + \widehat{OAM} + \widehat{OMA} = 180^\circ$  (tổng các góc trong tam giác  $OAM$ ). Suy ra

$$\widehat{AOM} = 180^\circ - 2\widehat{OAM}.$$

Tương tự, ta chứng minh được  $\widehat{AO'N} = 180^\circ - 2\widehat{O'AN}$ .

Mà  $\widehat{OAM} = \widehat{O'AN}$  (hai góc đối đỉnh), suy ra

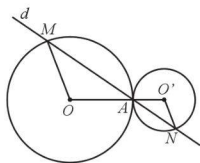
$$\widehat{AOM} = \widehat{AO'N}.$$

Đặt  $\widehat{AOM} = \widehat{AO'N} = n^\circ$ .

Độ dài cung nhỏ  $AM$  của đường tròn  $(O)$  là:  $l_1 = \frac{\pi \cdot 2 \cdot n}{180} = \frac{2\pi n}{180}$ .

Độ dài cung nhỏ  $AN$  của đường tròn  $(O')$  là:  $l_2 = \frac{\pi \cdot 1 \cdot n}{180} = \frac{\pi n}{180}$ .

Ta thấy  $l_1 = 2l_2$  nên độ dài của cung nhỏ  $AM$  của đường tròn  $(O)$  gấp đôi độ dài của cung nhỏ  $AN$  của đường tròn  $(O')$ .

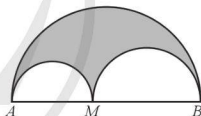


Hình 41

**Ví dụ 4** Cho các nửa đường tròn đường kính  $AB$ , đường kính  $AM$  và đường kính  $BM$ . Biết  $AM = 6$  cm,  $BM = 8$  cm (Hình 42).

a) Chứng minh tổng chu vi của các nửa đường tròn đường kính  $AM$  và đường kính  $BM$  bằng chu vi của nửa đường tròn đường kính  $AB$ .

b) Tính diện tích của phần tô màu xám (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimét vuông).



Hình 42

*Giải*

a) Ta có:  $AB = AM + BM = 6 + 8 = 14$  (cm).

Bán kính của đường tròn đường kính  $AB$ , đường kính  $AM$ , đường kính  $BM$  lần lượt là 7 cm, 3 cm, 4 cm.

Tổng chu vi của các nửa đường tròn đường kính  $AM$  và đường kính  $BM$  là:

$$C_1 = \pi \cdot 3 + \pi \cdot 4 = 7\pi \text{ (cm)}.$$

Chu vi của nửa đường tròn đường kính  $AB$  là:

$$C_2 = \pi \cdot 7 = 7\pi \text{ (cm)}.$$

Ta thấy  $C_1 = C_2$  nên tổng chu vi của các nửa đường tròn đường kính  $AM$  và đường kính  $BM$  bằng chu vi của nửa đường tròn đường kính  $AB$ .

b) Diện tích phần tô màu xám là:

$$\frac{\pi \cdot 7^2}{2} - \left( \frac{\pi \cdot 3^2}{2} + \frac{\pi \cdot 4^2}{2} \right) = 12\pi \approx 38 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

**Ví dụ 5** Diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn ( $O$ ;  $R$ ) và ( $O$ ;  $r$ ) (với  $R > r$ ) là  $628 \text{ dm}^2$  (Hình 43). Tính  $R$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của decimet), biết  $r = \frac{4}{7}R$ .

*Giải*

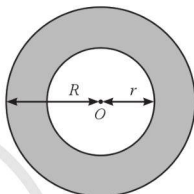
Do diện tích hình vành khuyên là  $628 \text{ dm}^2$  nên

$$\pi(R^2 - r^2) = 628.$$

$$\text{Mà } r = \frac{4}{7}R, \text{ suy ra } \pi \left[ R^2 - \left( \frac{4}{7}R \right)^2 \right] = 628$$

$$\text{hay } \frac{33\pi}{49}R^2 = 628.$$

$$\text{Do đó } R^2 = \frac{30\,772}{33\pi} \text{ hay } R = \sqrt{\frac{30\,772}{33\pi}} \approx 17,2 \text{ (dm)}.$$



Hình 43

## C. BÀI TẬP

37. Hoàn thành số liệu ở bảng sau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của đơn vị đo đã cho nếu cần, lấy  $\pi \approx 3,14$ ):

| Bán kính đường tròn ( $R$ ) | Chu vi đường tròn ( $C$ ) | Diện tích hình tròn ( $S$ ) | Số đo của cung tròn ( $n^\circ$ ) | Độ dài của cung tròn có số đo $n^\circ$ | Diện tích của hình quạt tròn có số đo $n^\circ$ |
|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| ?                           | ?                         | $12,56 \text{ cm}^2$        | $135^\circ$                       | ?                                       | ?                                               |
| $0,6 \text{ cm}$            | ?                         | ?                           | ?                                 | $1,256 \text{ cm}$                      | ?                                               |
| ?                           | ?                         | $50,24 \text{ cm}^2$        | ?                                 | ?                                       | $6,28 \text{ cm}^2$                             |
| $3 \text{ cm}$              | ?                         | ?                           | ?                                 | ?                                       | $0,942 \text{ cm}^2$                            |

38. Chuyển động của Mặt Trăng quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là gần giống đường tròn với tốc độ không đổi. Giả thiết quỹ đạo này là đường tròn với bán kính khoảng 385 nghìn km. Thời gian Mặt Trăng quay một vòng quanh Trái Đất khoảng 27,3 ngày.

- a) Tính quãng đường đi được của Mặt Trăng sau 1 ngày (làm tròn kết quả đến hàng nghìn của kilômét).
- b) Tính tốc độ của Mặt Trăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét trên giây).

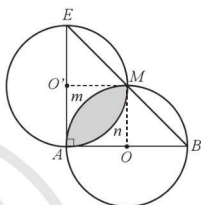
39. Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh  $AB = 5$  cm, đường chéo  $AC = 8$  cm. Vẽ các đường tròn ( $A$ ; 5 cm), ( $C$ ; 3 cm). Đường tròn ( $C$ ) cắt  $BC$ ,  $CD$  lần lượt tại  $E$ ,  $F$ . Tính tỉ số độ dài của cung nhỏ  $BD$  của đường tròn ( $A$ ) và cung nhỏ  $EF$  của đường tròn ( $C$ ).

40. Cho tam giác  $ABE$  vuông cân tại  $A$  với  $AB = AE = 2a$ .

Vẽ đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  và đường tròn tâm  $O'$  đường kính  $AE$ . Gọi  $M$  là giao điểm khác  $A$  của hai đường tròn ( $O$ ), ( $O'$ ) (Hình 44).

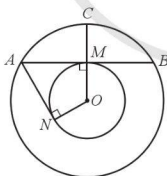
Tính theo  $a$ :

- a) Độ dài cung  $AmM$  và cung  $AnM$  tương ứng của đường tròn ( $O$ ) và ( $O'$ );
- b) Diện tích của phần tô màu xám theo  $a$ .

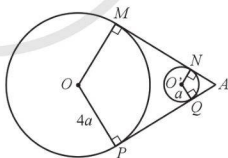


Hình 44

41. Cho hai đường tròn ( $O$ ;  $R$ ) và ( $O$ ;  $2R$ ). Một dây cung  $AB$  của đường tròn ( $O$ ;  $2R$ ) tiếp xúc với đường tròn ( $O$ ;  $R$ ) tại  $M$ . Kẻ tiếp tuyến thứ hai  $AN$  của đường tròn ( $O$ ;  $R$ ). Gọi  $S_1$  là diện tích của hình tạo bởi cung  $ACB$  và dây  $AB$  của đường tròn ( $O$ ;  $2R$ ),  $S_2$  là diện tích của hình tạo bởi hai tiếp tuyến  $AM$ ,  $AN$  và cung nhỏ  $MN$  của đường tròn ( $O$ ;  $R$ ) và  $S_3$  là diện tích của hình tròn ( $O$ ;  $R$ ) (Hình 45). Chứng minh  $S_1 + S_2 = S_3$ .



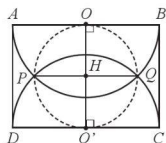
Hình 45



Hình 46

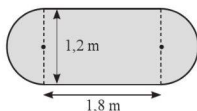
42. Hai ròng rọc có dạng hình tròn ( $O$ ;  $4a$ ) và ( $O'$ ;  $a$ ) với hai tiếp tuyến chung  $MN$  và  $PQ$  cắt nhau tại  $A$  sao cho  $\widehat{MAP} = 60^\circ$  (Hình 46). Tìm độ dài của dây Curoa mắc qua hai ròng rọc theo  $a$ .

43. Cho hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = 10$  cm. Vẽ hai nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  và tâm  $O'$  đường kính  $CD$  cắt nhau tại  $P, Q$ . Biết rằng đường tròn tâm  $H$  đường kính  $PQ$  tiếp xúc với  $AB$  và  $CD$  (Hình 47). Tính diện tích phần chung của hai nửa đường tròn  $(O), (O')$ .



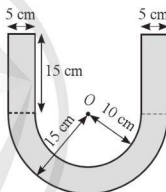
Hình 47

44. Bác Long dự định mua gỗ để làm một mặt bàn. Mặt bàn có dạng ở giữa là hình chữ nhật với chiều rộng 1,2 m, chiều dài 1,8 m và hai đầu là hai nửa hình tròn có đường kính là chiều rộng của hình chữ nhật như Hình 48. Tính số tiền bác Long phải trả để làm được mặt bàn đó (làm tròn kết quả đến hàng nghìn của đồng), biết giá gia công mỗi mét vuông mặt bàn là 100 000 đồng.



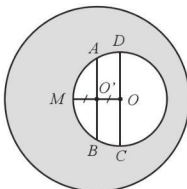
Hình 48

45. Hình 49 mô tả mặt cắt của một chi tiết máy ép nhựa có dạng ở giữa là nửa hình vành khuyên giới hạn bởi hai nửa đường tròn  $(O; 15$  cm),  $(O; 10$  cm) và hai đầu là hai hình chữ nhật có chiều dài 15 cm, chiều rộng 5 cm. Tính diện tích mặt cắt của chi tiết máy ép nhựa đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimet vuông).



Hình 49

46. Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $OM = 8$  cm. Gọi  $O'$  là trung điểm của đoạn thẳng  $OM$ , vẽ đường tròn tâm  $O'$  bán kính 16 cm. Trong đường tròn  $(O)$ , kẻ dây  $AB$  đi qua  $O'$ , vuông góc với  $OM$  và đường kính  $CD$  song song với  $AB$  (Hình 50). Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của centimet vuông):
- Diện tích phần hình giới hạn bởi dây  $AB$ , cung nhỏ  $AD$ , đường kính  $CD$  và cung nhỏ  $BC$  của đường tròn  $(O)$ ;
  - Diện tích của phần tô màu xám.



Hình 50

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

47. Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(1; 1)$ . Khi đó, đường tròn  $(A; 1)$

- A. Tiếp xúc với trục  $Ox$  và cắt trục  $Oy$  tại 2 điểm phân biệt.
- B. Tiếp xúc với trục  $Oy$  và cắt trục  $Ox$  tại 2 điểm phân biệt.
- C. Tiếp xúc với cả hai trục  $Ox$  và trục  $Oy$ .
- D. Đi qua gốc tọa độ  $O$ .

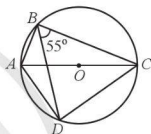
48. Cho các điểm  $A, B, C, D$  thuộc đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AC = 2$  cm với  $\widehat{CBD} = 55^\circ$  (Hình 51).

a) Số đo góc  $CAD$  là

- A.  $35^\circ$ .
- B.  $145^\circ$ .
- C.  $55^\circ$ .
- D.  $125^\circ$ .

b) Độ dài đoạn thẳng  $CD$  là

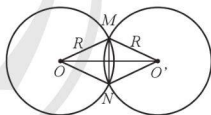
- A.  $2 \cos 55^\circ$  cm.
- B.  $2 \sin 55^\circ$  cm.
- C.  $2 \tan 55^\circ$  cm.
- D.  $2 \cot 55^\circ$  cm.



Hình 51

49. Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R)$  cắt nhau tại hai điểm  $M, N$  với  $OO' = 24$  cm và  $MN = 10$  cm (Hình 52). Khi đó,  $R$  bằng

- A. 26 cm.
- B. 13 cm.
- C. 14 cm.
- D. 34 cm.



Hình 52

50. Trong 20 giây, bánh xe của một chiếc xe máy quay được 80 vòng. Độ dài bán kính của bánh xe đó là 25 cm. Khi đó, quãng đường xe máy đi được trong 3 phút là:

- A.  $36\,000\pi$  m.
- B.  $360\pi$  m.
- C.  $18\,000\pi$  m.
- D.  $180\pi$  m.

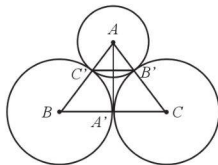
51. Diện tích hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn  $(O; 12$  cm) và  $(O'; 7$  cm) là:

- A.  $95\pi$  cm<sup>2</sup>.
- B.  $193\pi$  cm<sup>2</sup>.
- C.  $5\pi$  cm<sup>2</sup>.
- D.  $19\pi$  cm<sup>2</sup>.

52. Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  và điểm  $M$  di chuyển trên đường tròn ( $M$  khác  $A$  và  $B$ ). Vẽ đường tròn  $(M)$  tiếp xúc với  $AB$  tại  $H$ . Từ  $A$  và  $B$  kẻ hai tiếp tuyến  $AC, BD$  của đường tròn  $(M)$  lần lượt tại  $C, D$ .

- a) Chứng minh  $AC + BD$  không đổi khi  $M$  di chuyển trên đường tròn  $(O)$ .  
 b) Chứng minh  $CD$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

53. Cho ba đường tròn  $(A; 10 \text{ cm})$ ,  $(B; 15 \text{ cm})$ ,  $(C; 15 \text{ cm})$  tiếp xúc ngoài với nhau đôi một. Đường tròn  $(A)$  tiếp xúc với  $(B)$  và  $(C)$  lần lượt tại  $C'$  và  $B'$ . Đường tròn  $(B)$  tiếp xúc với  $(C)$  tại  $A'$  (Hình 53).



Hình 53

- a) Chứng minh  $AA'$  là tiếp tuyến chung của đường tròn  $(B)$  và  $(C)$ .  
 b) Tính độ dài đoạn thẳng  $AA'$  và diện tích tam giác  $AB'C'$ .

54. Cho đường tròn  $(O; R)$  và ba điểm  $A, B, C$  nằm trên đường tròn với  $AB < AC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Trên cung  $BC$  không chứa điểm  $A$ , lấy điểm  $D$  sao cho  $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$ .

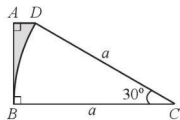
- a) Chứng minh  $\widehat{ADB} = \widehat{CDM}$ .  
 b) Gọi  $E$  là giao điểm của tia  $OM$  và cung  $BC$ . Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi các bán kính  $OE, OC$  và cung nhỏ  $CE$  theo  $R$ , biết  $BC = R\sqrt{2}$ .

55. Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Gọi  $C, D$  lần lượt là điểm chính giữa của cung  $AB, AC$ .

- a) Chứng minh  $\widehat{BAC} = \widehat{COD} = \widehat{ABC} = \widehat{ACO}$ .  
 b) Lấy điểm  $M$  thuộc cung  $CD$ . Chứng minh  $AM > CM$  và  $\widehat{COM} = 2\widehat{CAM}$ .  
 c) Khi  $M$  di chuyển trên cung nhỏ  $AC$ , tìm vị trí của điểm  $M$  để diện tích của tam giác  $MAC$  lớn nhất.

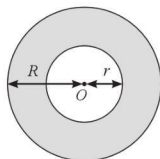
56. Thành phố Hồ Chí Minh có vĩ độ là  $10^\circ 10'$  Bắc. Tìm độ dài cung kinh tuyến từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Xích Đạo (làm tròn kết quả đến hàng trăm của kilômét), biết mỗi kinh tuyến là một nửa vòng Trái Đất và có độ dài khoảng 20 000 km.

57. Cho hình thang vuông  $ABCD$  ( $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ ) với  $\widehat{C} = 30^\circ$ ,  $BC = CD = a$ . Vẽ một phần đường tròn  $(C; CD)$  (Hình 54). Tính diện tích của phần tô màu xám theo  $a$ .



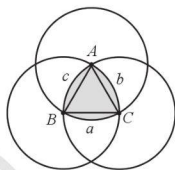
Hình 54

58. Cho hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn  $(O; R)$ ,  $(O; r)$  với  $R + r = 1,2$  dm,  $R > r$  và diện tích hình vành khuyên đó là  $1,5072$  dm<sup>2</sup> (Hình 55). Tính  $R$  và  $r$ , lấy  $\pi \approx 3,14$ .



Hình 55

59. Tam giác Reuleaux là hình tạo nên từ phần giao nhau của ba đường tròn cùng bán kính, tâm của mỗi đường tròn chính là giao điểm của hai đường tròn còn lại. Tạo tam giác Reuleaux từ ba đường tròn  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  (Hình 56). Tính số đo các cung nhỏ  $BaC$ ,  $CbA$ ,  $AcB$  của tam giác Reuleaux. Nêu nhận xét về số đo của các cung tròn đó.



Hình 56

60. Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai điểm  $A, B$  nằm trên đường tròn sao cho độ dài cung nhỏ  $AB$  bằng  $\frac{5\pi R}{6}$ .

- Xác định điểm  $C$  trên cung lớn  $AB$  sao cho khi kẻ  $CH$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$  thì  $AH = CH$ .
- Tính độ dài các cung  $AC, BC$  theo  $R$ .
- Kẻ  $OK$  vuông góc với  $AB$  tại  $K$ , tia  $OK$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$ . Tính diện tích hình quạt tròn  $EOB$  (giới hạn bởi cung nhỏ  $BE$  và hai bán kính  $OE, OB$ ) theo  $R$ .
- Tính tỉ số phần trăm giữa diện tích hình quạt tròn  $BOC$  (giới hạn bởi cung nhỏ  $BC$  và hai bán kính  $OB, OC$ ) và diện tích hình quạt tròn  $AOC$  (giới hạn bởi cung nhỏ  $AC$  và hai bán kính  $OA, OC$ ).



## LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

- Đường kính của đường tròn là 50 cm. Vì độ dài dây nhỏ hơn hoặc bằng độ dài đường kính của đường tròn nên độ dài dây lớn nhất của đường tròn là 50 cm.
- Gọi  $R = 4$  cm và  $r = 1$  cm, ta có:
  - $R - r < OO' < R + r$ :  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau;
  - $OO' > R + r$ :  $(O)$  và  $(O')$  ở ngoài nhau;
  - $OO' < R - r$ :  $(O)$  đựng  $(O')$ .
- Hai đường tròn  $(O; 3,5$  cm) và  $(O'; 4,5$  cm) tiếp xúc ngoài khi

$$OO' = 3,5 + 4,5 = 8 \text{ (cm)}.$$

- Gọi  $H$  là giao điểm của  $OO'$  với  $AB$  (Hình 57). Khi đó, ta chứng minh được  $OO'$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$  hay  $AH = BH = \frac{AB}{2}$  và  $OO'$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$ .

Đặt  $OH = x$  (cm) thì  $O'H = 21 - x$  (cm).

Ta có:

$$OA^2 - OH^2 = O'A^2 - O'H^2 \text{ (cùng bằng } AH^2 \text{)}.$$

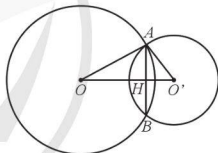
Suy ra

$$17^2 - x^2 = 10^2 - (21 - x)^2 \text{ hay } x = 15 \text{ (cm)}.$$

Do tam giác  $OA'H$  vuông tại  $H$  nên

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 8 \text{ cm}.$$

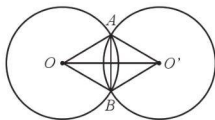
Vậy  $AB = 2AH = 16$  cm.



Hình 57

- (Hình 58)

Tứ giác  $OA'O'B$  có  $OA = OB = O'A = O'B$  (cùng bằng bán kính của  $(O)$  và  $(O')$ ) nên  $OA'O'B$  là hình thoi. Suy ra  $AB$  cắt  $OO'$  tại trung điểm của mỗi đường.



Hình 58

- Ta có:  $OA = OB = 2$  km = 2 000 m và  $OH = 1$  732 m.

Ta chứng minh được  $AH = BH = \frac{AB}{2}$ .

Do tam giác  $OA'H$  vuông tại  $H$  nên  $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{1\,000\,176}$  m.

Vậy  $AB = 2AH \approx 2\,000$  m.

7. Gọi hòn đảo lớn là đường tròn ( $O$ ; 500 m) và hòn đảo nhỏ là đường tròn ( $O'$ ; 300 m). Lấy  $A$  thuộc đường tròn ( $O$ ) và  $B$  thuộc đường tròn tâm ( $O'$ ) là hai vị trí đầu cầu (Hình 59). Khi đó,  $AB$  là chiều dài cây cầu và  $OO' = 950$  m,  $OA = 500$  m,  $O'B = 300$  m.

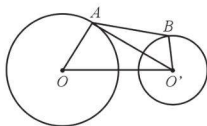
Xét ba điểm  $O', A, B$ , ta có:  $AB \geq O'A - O'B$ .

Xét ba điểm  $O, O', A$ , ta có:  $O'A \geq OO' - OA$ .

Do đó  $AB \geq OO' - OA - O'B$  hay  $AB \geq 150$  m.

Dấu “=” xảy ra khi bốn điểm  $O, A, B, O'$  thẳng hàng theo thứ tự đó.

Vậy ta nên đặt cầu trên đoạn nối tâm của hai đảo thì cây cầu có chiều dài ngắn nhất là 150 m.



Hình 59

8. (Hình 60)

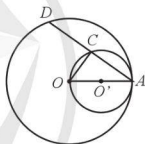
a) Do  $OO' = OA - O'A$  nên hai đường tròn ( $O$ ) và ( $O'$ ) tiếp xúc trong tại  $A$ .

b) Xét tam giác  $ACO$ , ta có

$$O'A = O'C = OO' \text{ hay } O'C = \frac{1}{2}AO.$$

Suy ra tam giác  $ACO$  vuông tại  $C$  hay  $OC \perp AD$ .

Vì  $\triangle AOC = \triangle DOC$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên  $AC = CD$ .



Hình 60

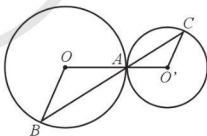
9. (Hình 61)

a) Do hai tam giác  $OAB$  và  $O'AC$  là tam giác cân nên ta chứng minh được  $\widehat{ABO} = \widehat{ACO'}$ .

Do đó  $OB \parallel O'C$ .

b) Vì  $\triangle OAB \sim \triangle O'AC$  nên  $\frac{AB}{AC} = \frac{OA}{O'A}$  hay  $\frac{5}{AC} = \frac{3}{2}$ .

Do đó  $AC = \frac{10}{3}$  cm.



Hình 61

10. Hệ thống bánh răng ở các hình 8a, 8b chuyển động được. Hệ thống bánh răng ở Hình 8c không chuyển động được.

11. a) Kẻ  $OH$  vuông góc với  $a$  tại  $H$  (Hình 62). Khi đó, ta có:  $OH = 1$  cm. Suy ra  $OH < 3$  cm. Vậy đường thẳng  $a$  và đường tròn ( $O$ ) cắt nhau.

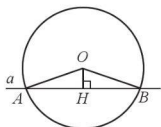
b) Vì  $\triangle OAH = \triangle OBH$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$$\text{nên } AH = BH = \frac{AB}{2}.$$

Do tam giác  $OAH$  vuông tại  $H$  nên

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$\text{Vậy } AB = 2AH = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$



Hình 62

12. Kẻ  $O'H$  vuông góc với  $Oy$  tại  $H$  (Hình 63). Khi đó, ta có:  $O'H$  là khoảng cách từ điểm  $O'$  đến tia  $Oy$ .

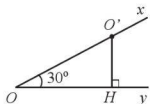
a) Do tam giác  $O'OH$  vuông tại  $H$  nên

$$O'H = OO' \cdot \sin \widehat{O'OH} = 4 \cdot \sin 30^\circ = 2 \text{ (cm).}$$

b) Nếu  $R < 2$  cm thì đường tròn ( $O'$ ) và tia  $Oy$  không giao nhau.

Nếu  $R = 2$  cm thì đường tròn ( $O'$ ) và tia  $Oy$  tiếp xúc nhau.

Nếu  $2 \text{ cm} < R \leq 4 \text{ cm}$  thì đường tròn ( $O'$ ) và tia  $Oy$  cắt nhau.



Hình 63

13. Kẻ  $BH$  vuông góc với  $CD$  tại  $H$ , gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ , kẻ  $IK$  vuông góc với  $AD$  tại  $K$ , gọi  $M$  là giao điểm của  $IK$  và  $BH$  (Hình 64). Khi đó, ta chứng minh được:  $IK \parallel CD$ ; các tứ giác  $ABHD$ ,  $ABMK$  là hình chữ nhật.

a) Do tứ giác  $ABHD$  là hình chữ nhật nên

$$AD = BH \text{ và } DH = AB = 4 \text{ cm.}$$

Ta có:  $CH = CD - DH = 5$  cm.

Do tam giác  $BCH$  vuông tại  $H$  nên  $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = 12$  cm.

Vậy  $AD = 12$  cm.

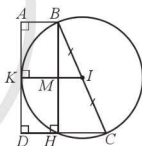
b) Ta có đường tròn đường kính  $BC$  có tâm  $I$  và bán kính  $R = \frac{BC}{2} = 6,5$  cm và khoảng cách từ tâm  $I$  đến  $AD$  là  $d = IK$ .

Do tứ giác  $ABMK$  là hình chữ nhật nên  $KM = AB = 4$  cm.

Xét tam giác  $BCH$  có  $IM \parallel CH$  nên  $\frac{IM}{CH} = \frac{BI}{BC} = \frac{1}{2}$ . Suy ra  $IM = \frac{1}{2}CH = 2,5$  cm.

Ta có:  $IK = KM + IM = 6,5$  cm.

Do đó  $d = R$ . Vậy đường thẳng  $AD$  tiếp xúc với đường tròn đường kính  $BC$ .



Hình 64

14.  $AB = R\sqrt{3}$ .

15. Do tam giác  $OCD$  cân tại  $O$  nên  $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$  hay  $\widehat{OCF} = \widehat{ODF}$ .

Mà  $\widehat{OCF} + \widehat{OFC} = 90^\circ$  và  $\widehat{OFC} = \widehat{DFE}$ , suy ra  $\widehat{ODF} + \widehat{DFE} = 90^\circ$ .

Ta lại có  $\widehat{ODF} + \widehat{EDF} = 90^\circ$  nên  $\widehat{DFE} = \widehat{EDF}$ .

Do đó  $\triangle EDF$  cân tại  $E$ . Suy ra  $EF = ED$ .

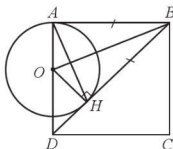
16. (Hình 65)

a) Vì  $\triangle OAB = \triangle OHB$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên  $OA = OH$ .

Tam giác  $OHD$  vuông tại  $H$  có  $\widehat{ODH} = 45^\circ$  nên tam giác  $OHD$  vuông cân tại  $H$ . Suy ra  $HD = OH$ .

Vậy  $OA = OH = HD$ .

b) Vì  $OA = OH$  và  $OH$  vuông góc với  $BD$  tại  $H$  nên  $BD$  là tiếp tuyến đường tròn  $(O; OA)$ . Vậy  $BD$  tiếp xúc với đường tròn  $(O; OA)$ .



Hình 65

17. a) Do  $\triangle OIC = \triangle OID$  (c.c.c) nên  $\widehat{OIC} = \widehat{OID} = 90^\circ$ .

Vì  $\triangle EOB \sim \triangle EAI$  nên  $\frac{EB}{EI} = \frac{EO}{EA}$ .

Do đó  $EB \cdot EA = EI \cdot EO$ .

b) Do  $\triangle OAB$  vuông tại  $B$  nên  $AB^2 = OA^2 - OB^2 = OA^2 - R^2$ .

Mặt khác, ta có:  $AC \cdot AD = (AI - CI)(AI + DI)$ . Mà  $CI = DI$ , suy ra

$$\begin{aligned} AC \cdot AD &= AI^2 - CI^2 = AI^2 - (OC^2 - OI^2) = AI^2 - OC^2 + OI^2 \\ &= AI^2 - R^2 + OA^2 - AI^2 = OA^2 - R^2. \end{aligned}$$

Do đó  $AB^2 = AC \cdot AD$  (vì cùng bằng  $OA^2 - R^2$ ).

18. Ta có:  $BH = OH - OB = OH - \frac{OA}{2} = 3 \text{ cm}$ .

Do  $\triangle IBH$  vuông tại  $H$  nên  $IB^2 = IH^2 + BH^2 = IH^2 + 9$ .

Do  $\triangle ICO$  vuông tại  $C$  nên

$$IC^2 = IO^2 - OC^2 = (OH^2 + IH^2) - OC^2 = (5^2 + IH^2) - 4^2 = IH^2 + 9.$$

Do đó  $IB^2 = IC^2$  (vì cùng bằng  $IH^2 + 9$ ).

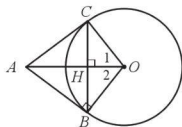
Vậy  $IB = IC$  hay tam giác  $IBC$  cân tại  $I$ .

19. (Hình 66)

a) Vì  $\triangle OCH = \triangle OBH$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ .

Từ đó, ta chứng minh được  $\triangle OAC = \triangle OAB$  (c.g.c).

Suy ra  $\widehat{OCA} = \widehat{OBA} = 90^\circ$  hay  $AC$  vuông góc với  $OC$  tại  $C$ . Vậy  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .



Hình 66

b) Do tam giác  $OAB$  vuông tại  $B$  nên

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = 20 \text{ cm.}$$

Vì  $\triangle OBH \sim \triangle OAB$  nên  $\frac{BH}{AB} = \frac{OB}{OA}$  hay  $BH = \frac{OB \cdot AB}{OA} = 12 \text{ cm.}$

Do  $\triangle OCH = \triangle OBH$  nên  $BH = CH = \frac{BC}{2}$  hay  $BC = 2BH = 24 \text{ cm.}$

Do  $\triangle OAC = \triangle OAB$  nên  $AC = AB = 20 \text{ cm.}$

Vậy tam giác  $ABC$  có  $AB = AC = 20 \text{ cm}$  và  $BC = 24 \text{ cm.}$

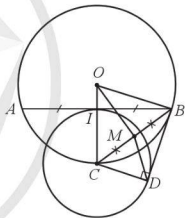
20. a) Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$  (Hình 67).

Ta chứng minh được  $OC$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .

Do tam giác  $BIC$  vuông tại  $I$  và tam giác  $BCD$  vuông tại  $D$  nên

$$IM = DM = CM = BM = \frac{BC}{2}.$$

Do đó bốn đỉnh của tứ giác  $BDCI$  cùng nằm trên đường tròn đường kính  $BC$ .



Hình 67

b) Do  $BI, BD$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$  nên  $\widehat{BCI} = \widehat{BCD}$ .

Mà  $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$  (vì tam giác  $OBC$  cân tại  $O$ ) hay  $\widehat{OBC} = \widehat{BCI}$ , suy ra  $\widehat{OBC} = \widehat{BCD}$ .

Ta lại có  $\widehat{CBD} + \widehat{BCD} = 90^\circ$  nên  $\widehat{CBD} + \widehat{OBC} = 90^\circ$  hay  $\widehat{OBD} = 90^\circ$ .

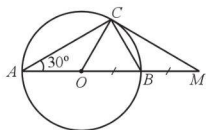
Suy ra  $BD$  vuông góc với  $OB$  tại  $B$ . Vậy  $BD$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

21. (Hình 68)

a) Ta chứng minh được tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  và  $\widehat{ACO} = 30^\circ$ .

Suy ra  $\widehat{OCB} = 60^\circ$ .

Mà tam giác  $OBC$  cân tại  $O$ , suy ra tam giác  $OBC$  đều hay  $BC = OB = \frac{OM}{2}$ . Do đó tam giác  $OCM$  vuông tại  $C$  hay  $MC$  vuông góc với  $OC$  tại  $C$ . Vậy  $MC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .



Hình 68

b) Do tam giác  $OCM$  vuông tại  $C$  nên

$$CM = \sqrt{OM^2 - OC^2} = R\sqrt{3}.$$

## 22. (Hình 69)

a) Do  $BM, BN$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  nên

$$BM = BN \text{ và } \widehat{OBM} = \widehat{OBN} = \frac{\widehat{MBN}}{2}.$$

Vì tam giác  $MBO$  vuông tại  $M$  nên

$$\sin \widehat{OBM} = \frac{OM}{OB} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra  $\widehat{OBM} = 30^\circ$ . Do đó

$$\widehat{MBN} = 2\widehat{OBM} = 60^\circ.$$

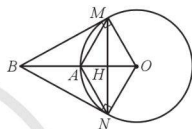
Do tam giác  $OBM$  vuông tại  $M$  nên

$$BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = R\sqrt{3}.$$

b) Ta chứng minh được các tam giác  $OAM, OAN$  đều.

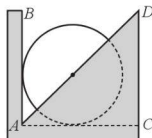
Suy ra  $AM = OM = ON = AN$ . Do đó tứ giác  $AMON$  là hình thoi.

c) Do tứ giác  $AMON$  là hình thoi nên  $OH = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$ .



Hình 69

23. Để tìm tâm của một hình tròn, ta đặt hình tròn đó tiếp xúc với hai cạnh  $AB$  và  $AC$ . Vạch theo  $AD$  ta được một đường thẳng đi qua tâm của hình tròn. Xoay hình tròn và làm tương tự, ta được một đường thẳng nữa đi qua tâm của hình tròn. Giao điểm của hai đường vừa kẻ là tâm của hình tròn (Hình 70).



Hình 70

24. a) Ta chứng minh được  $Ax \parallel By$ .

Do  $Ax, By, CD$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  nên  $AC = CM, BD = DM$ .

Mà  $\frac{NA}{ND} = \frac{AC}{BD}$  (vì tam giác  $ANC$  có  $AC \parallel BD$ ), suy ra  $\frac{NA}{ND} = \frac{CM}{DM}$ .



c) Do  $AH$  vuông góc với  $OO'$  tại  $H$  nên  $AH$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .

d) Ta chứng minh được tứ giác  $ADHE$  là hình chữ nhật. Suy ra  $AH = DE$ .

e) Do  $\triangle ODI = \triangle OHI$  (c.c.c) nên  $\widehat{ODI} = \widehat{OHI} = 90^\circ$  hay  $OD \perp DE$ .

Tương tự, ta chứng minh được  $O'E \perp DE$ .

Do đó tứ giác  $DEO'O$  là hình thang có  $DE$  là đường cao.

Diện tích hình thang  $DEO'O$  và tam giác  $ABC$  lần lượt là:

$$S_1 = \frac{DE(OD + O'E)}{2} \text{ và } S_2 = \frac{AH \cdot BC}{2}.$$

Mà  $DE = AH$  và  $BC = BH + CH = 2(OD + O'E)$ , suy ra  $S_1 = \frac{1}{2}S_2$ .

Vậy diện tích tứ giác  $DEO'O$  bằng nửa diện tích tam giác  $ABC$ .

27. Do góc nội tiếp là góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó nên các góc  $ABC$ ,  $HIK$ ,  $QRS$  là góc nội tiếp.

28. D.

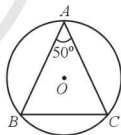
29. Các cung tương ứng với phần biểu diễn số lớp học cấp trung học cơ sở của các tỉnh Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng tính đến ngày 30/9/2021 lần lượt có số đo là:  $39,6^\circ$ ;  $86,4^\circ$ ;  $118,8^\circ$ ;  $36^\circ$ ;  $79,2^\circ$ .

30. (Hình 73)

Do tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 65^\circ.$$

Ta có: số đo cung nhỏ  $AB$  bằng  $130^\circ$ , số đo cung nhỏ  $BC$  bằng  $100^\circ$ . Vậy cung nhỏ  $AB$  lớn hơn cung nhỏ  $BC$ .



Hình 73

31. Ta có:  $\widehat{BAC} = \widehat{IHK} = 90^\circ$  nên  $\widehat{BAC}$  và  $\widehat{IHK}$  là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Suy ra  $BC$  và  $HK$  là hai đường kính của đường tròn  $(O)$ . Khi đó,  $BC$  cắt  $HK$  tại tâm  $O$  của đường tròn.

32. (Học sinh tự vẽ hình)

a) Do  $\widehat{AMB} = 40^\circ$  nên  $\widehat{AOB} = 140^\circ$ . Suy ra số đo cung nhỏ  $AB$  bằng  $140^\circ$  và số đo cung lớn  $AB$  bằng  $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ .



b) Do số đo cung nhỏ  $AB$  bằng  $120^\circ$  suy ra  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ . Do đó  $\widehat{BOM} = 60^\circ$ .

Do tam giác  $OBM$  vuông tại  $B$  nên  $BM = OB \cdot \tan \widehat{BOM} = R\sqrt{3}$ .

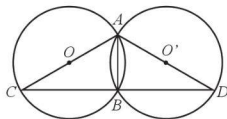
Vì  $\triangle OAM = \triangle OBM$  (c.c.c) nên diện tích tứ giác  $OAMB$  là:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot BM = R^2 \sqrt{3}.$$

### 33. (Hình 74)

Ta có:  $AC, AD$  lần lượt là đường kính của đường tròn  $(O), (O')$  nên  $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$ . Do đó  $\triangle ABC = \triangle ABD$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông). Suy ra  $BC = BD$ .

Vậy độ dài dây  $BC$  của đường tròn  $(O)$  bằng độ dài dây  $BD$  của đường tròn  $(O')$ .



Hình 74

### 34. Kẻ đường kính $MN$ của đường tròn $(O)$

(Hình 75). Khi đó,  $MN$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$  và cắt  $AB$  tại  $K$ . Suy ra điểm  $O$  thuộc  $MN$  và  $AK = BK = \frac{AB}{2} = 20$  m.

Do  $\triangle AKM \sim \triangle NKB$  nên  $\frac{AK}{NK} = \frac{MK}{BK}$

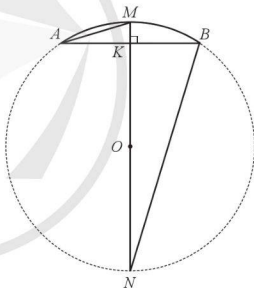
$$\text{hay } NK = \frac{AK \cdot BK}{MK} = \frac{400}{6} \text{ m.}$$

Gọi  $R$  là bán kính của đường tròn  $(O)$ .

$$\text{Ta có: } 2R = MN = MK + NK = \frac{218}{3} \text{ m.}$$

Vậy bán kính của đường tròn chứa cung  $AMB$

$$\text{là } \frac{109}{3} \approx 36,3 \text{ (m).}$$

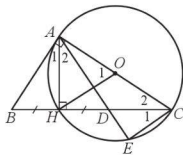


Hình 75

### 35. (Hình 76)

a) Do  $\triangle ABH = \triangle ADH$  (c.c.c). Suy ra  $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ .

Mà  $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$  (vì cùng phụ  $\widehat{CAH}$ )



Hình 76

và  $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung  $EH$ ), suy ra  $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ .

Vậy  $CH$  là tia phân giác của góc  $ACE$ .

b) Do  $\widehat{O_1} = 2\widehat{C_2}$  (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung  $AH$ ) và  $\widehat{OCE} = 2\widehat{C_2}$  (vì  $CH$  là tia phân giác của góc  $ACE$ ) nên  $\widehat{O_1} = \widehat{OCE}$ .

Vậy  $OH \parallel CE$  (hai góc đồng vị bằng nhau).

36. Kẻ  $OM$  vuông góc với  $BC$  tại  $M$  (Hình 77).

a) Ta có:  $\widehat{CAH} + \widehat{ACH} = 90^\circ$  nên  $\widehat{CAH} = 75^\circ$ .

Do đó số đo cung nhỏ  $CE$  bằng  $2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$ .

Ta lại có:  $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$  nên

$$\widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Do đó số đo cung lớn  $BC$  bằng  $2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$ .

b) Ta có:  $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 90^\circ$ .

Suy ra tam giác  $OAC$  vuông cân tại  $O$ .

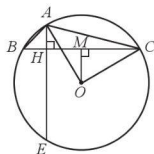
Do đó  $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{2}$  dm.

Do  $\triangle OBM = \triangle OCM$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên  $BM = CM = \frac{BC}{2}$ .

Ta có:  $\widehat{OCM} = \widehat{OCA} - \widehat{ACB} = 30^\circ$ .

Do tam giác  $OCM$  vuông tại  $M$  nên  $CM = OC \cdot \cos \widehat{OCM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  dm.

Vậy  $BC = 2CM = \sqrt{3}$  dm.



Hình 77

37.

| Bán kính đường tròn (R) | Chu vi đường tròn (C) | Diện tích hình tròn (S) | Số đo của cung tròn ( $n^\circ$ ) | Độ dài của cung tròn có số đo $n^\circ$ | Diện tích của hình quạt tròn có số đo $n^\circ$ |
|-------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 2 cm                    | 12,56 cm              | 12,56 cm <sup>2</sup>   | 135°                              | 4,71 cm                                 | 4,71 cm <sup>2</sup>                            |
| 0,6 cm                  | 3,768 cm              | 1,1304 cm <sup>2</sup>  | 120°                              | 1,256 cm                                | 0,3768 cm <sup>2</sup>                          |
| 4 cm                    | 25,12 cm              | 50,24 cm <sup>2</sup>   | 45°                               | 3,14 cm                                 | 6,28 cm <sup>2</sup>                            |
| 3 cm                    | 18,84 cm              | 28,26 cm <sup>2</sup>   | 12°                               | 0,628 cm                                | 0,942 cm <sup>2</sup>                           |

38. a) Quãng đường đi được của Mặt Trăng sau 1 ngày khoảng:

$$\frac{2\pi \cdot 385\,000}{27,3} \approx 89\,000 \text{ (km)}.$$

b) Tốc độ của Mặt Trăng khoảng:

$$\frac{2\pi \cdot 385\,000 \cdot 1\,000}{27,3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 1\,026 \text{ (m/s)}.$$

39. (Học sinh tự vẽ hình)

Do  $ABCD$  là hình thoi nên  $\widehat{A} = \widehat{C}$ . Đặt  $\widehat{A} = \widehat{C} = n^\circ$ .

Độ dài của cung nhỏ  $BD$  của đường tròn ( $A$ ) là:  $l_1 = \frac{\pi \cdot 5 \cdot n}{180}$  (cm).

Độ dài của cung nhỏ  $EF$  của đường tròn ( $C$ ) là:  $l_2 = \frac{\pi \cdot 3 \cdot n}{180}$  (cm).

Vậy tỉ số độ dài của cung nhỏ  $BD$  của đường tròn ( $A$ ) và cung nhỏ  $EF$  của đường tròn ( $C$ ) là  $\frac{5}{3}$ .

40. a) Ta chứng minh được tứ giác  $AOMO'$  là hình vuông. Suy ra

$$\widehat{AOM} = \widehat{AO'M} = 90^\circ.$$

Do đó, độ dài cung  $AmM$  và cung  $AnM$  tương ứng của đường tròn ( $O$ ) và ( $O'$ ) cùng bằng  $\frac{\pi a \cdot 90}{180} = \frac{\pi a}{2}$ .

b) Diện tích của phần tô màu xám là:

$$2 \cdot \left( \frac{\pi a^2 \cdot 90}{360} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{(\pi - 2)a^2}{2}.$$

41. Do tam giác  $OAM$  vuông tại  $M$  nên  $AM = \sqrt{OA^2 - OM^2}$  và  $\cos \widehat{AOM} = \frac{OM}{OA}$ .

Suy ra  $AM = R\sqrt{3}$  và  $\widehat{AOM} = 60^\circ$ .

Vì  $\triangle OAM = \triangle OBM$  (cạnh huyền - cạnh góc vuông) nên

$$AM = BM = \frac{AB}{2} \text{ và } \widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{\widehat{AOB}}{2}.$$

Suy ra  $AB = 2AM = 2R\sqrt{3}$  và  $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOM} = 120^\circ$ .

Do  $AM, AN$  là hai tiếp tuyến của đường tròn ( $O; R$ ) nên

$$\widehat{AOM} = \widehat{AON} = \frac{\widehat{MON}}{2} \text{ hay } \widehat{MON} = 2\widehat{AOM} = 120^\circ.$$

Ta có:

$$S_1 = \text{Diện tích hình quạt tròn } AOB - \text{Diện tích tam giác } OAB = R^2 \left( \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right);$$

$$S_2 = 2 \cdot \text{Diện tích tam giác } OAM - \text{Diện tích hình quạt tròn } MON = R^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right);$$

$$S_3 = \text{Diện tích hình tròn } (O; R) = \pi R^2.$$

$$\text{Vậy } S_1 + S_2 = S_3.$$

42. Độ dài cung nhỏ  $NQ$  là:  $l_1 = \frac{\pi a \cdot 120}{180} = \frac{2\pi a}{3}.$

$$\text{Độ dài cung lớn } MP \text{ là: } l_2 = \frac{\pi \cdot 4a \cdot 240}{180} = \frac{16\pi a}{3}.$$

$$\text{Ta có: } MN = PQ = AM - AN = OM \cdot \cot \widehat{OAM} - ON \cdot \cot \widehat{OAM} = 3a\sqrt{3}.$$

Độ dài của dây Curoa mắc qua hai ròng rọc là:

$$\frac{2\pi a}{3} + \frac{16\pi a}{3} + 2 \cdot 3a\sqrt{3} = 6a(\pi + \sqrt{3}).$$

43. Diện tích hình quạt tròn  $OPQ$  là:  $S_1 = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90}{360} = \frac{25\pi}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$

Ta chứng minh được tứ giác  $POQO'$  là hình vuông.

Suy ra diện tích tam giác  $OPQ$  là:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \text{Diện tích hình vuông } POQO' = \frac{1}{2} \cdot 5^2 = \frac{25}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích phần hình tạo bởi cung nhỏ  $PQ$  của đường tròn  $(O)$  và dây  $PQ$  là:

$$S_3 = S_1 - S_2 = \frac{25}{4}(\pi - 2) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích phần chung của hai nửa đường tròn  $(O), (O')$  là:

$$S = 2S_3 = \frac{25}{2}(\pi - 2) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

44. Diện tích mặt bàn là:  $1,8 \cdot 1,2 + \pi \cdot 0,6^2 = 2,16 + 0,36\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

Số tiền bác Long phải trả để làm được mặt bàn đó là:

$$100\,000 \cdot (2,16 + 0,36\pi) \approx 329\,000 \text{ (đồng)}.$$

45. Diện tích mặt cắt của chi tiết máy ép nhựa đó là:

$$2 \cdot 15 \cdot 5 + \frac{1}{2}\pi \cdot (15^2 - 10^2) \approx 346,35 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

46. a) Ta chứng minh được tứ giác  $AOBM$  là hình thoi. Ta tính được  $\widehat{AOM} = 60^\circ$ ,  
 $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 30^\circ$ ,  $OO' = 4$  cm,  $AB = 8\sqrt{3}$  cm.

Diện tích tam giác  $OAB$  là:  $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$  (cm<sup>2</sup>).

Do  $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$  nên diện tích hình quạt tròn  $OAD$  và diện tích hình quạt tròn  $OBC$  bằng nhau và bằng:

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 30}{360} = \frac{16\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích phần hình giới hạn bởi dây  $AB$ , cung nhỏ  $AD$ , đường kính  $CD$  và cung nhỏ  $BC$  của đường tròn ( $O$ ) là:

$$S_3 = S_1 + 2S_2 \approx 61 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Diện tích của phần tô màu xám là:

$$\pi \cdot 16^2 - \pi \cdot 8^2 \approx 603 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

47. C.      48. a) C.      b) B.      49. B.      50. B.      51. A.

52. (Hình 78)

a) Do  $AC, AH$  là hai tiếp tuyến của đường tròn ( $M$ ) nên  $AC = AH$ . Tương tự, ta chứng minh được

$$BD = BH.$$

Do đó  $AC + BD = AH + BH = AB$  (không đổi).

b) Ta có:  $\widehat{AMC} = \widehat{AMH}$ ,  $\widehat{BMD} = \widehat{BMH}$

và  $\widehat{AMH} + \widehat{BMH} = \widehat{AMB} = 90^\circ$

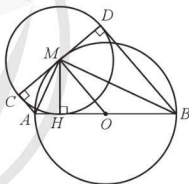
nên  $\widehat{CMD} = 180^\circ$

hay ba điểm  $C, M, D$  thẳng hàng.

Do tam giác  $OBM$  cân tại  $O$  nên  $2\widehat{OBM} + \widehat{BOM} = 180^\circ$ .

Ta lại có:  $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ$  nên  $\widehat{AOM} = 2\widehat{OBM} = \widehat{ABD}$ .

Do đó  $OM \parallel BD$  (hai góc đồng vị bằng nhau). Suy ra  $\widehat{OMC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$  hay  $CD$  vuông góc với  $OM$  tại  $M$ . Vậy  $CD$  là tiếp tuyến của đường tròn ( $O$ ).



Hình 78

53. a) Ta có  $AB = AC' + BC' = 25$  cm và  $AC = AB' + CB' = 25$  cm nên  $AB = AC$ . Mặt khác,  $BA' = CA' = 15$  cm nên  $AA'$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$ .

Suy ra  $AA'$  vuông góc với  $BC$  tại  $A'$ .

Vậy  $AA'$  là tiếp tuyến chung của đường tròn ( $B$ ) và ( $C$ ).

b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AA'$  và  $B'C'$  (Hình 79).

Do tam giác  $ABA'$  vuông tại  $A'$  nên

$$AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = 20 \text{ cm.}$$

Ta có:  $BC = BA' + CA' = 30 \text{ cm.}$

Tam giác  $ABC$  có  $\frac{AC'}{AB} = \frac{AB'}{AC}$  nên  $B'C' \parallel BC$ .

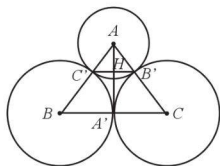
$$\text{Suy ra } \frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AC}$$

$$\text{hay } B'C' = \frac{AB' \cdot BC}{AC} = 12 \text{ cm.}$$

Tam giác  $ACA'$  có  $HB' \parallel CA'$  nên  $\frac{AH}{AA'} = \frac{AB'}{AC}$  hay  $AH = \frac{AB' \cdot AA'}{AC} = 8 \text{ cm.}$

Ta chứng minh được  $AH \perp B'C'$  nên diện tích tam giác  $AB'C'$  là:

$$\frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot AH = 48 \text{ cm}^2.$$



Hình 79

#### 54. (Hình 80)

a) Do  $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$  nên  $\widehat{BAM} = \widehat{DAC}$ .

Ta lại có:  $\widehat{ABM} = \widehat{ADC}$  nên  $\triangle ABM \sim \triangle ADC$ .

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{CD} = \frac{CM}{CD}.$$

Mà  $\widehat{BAD} = \widehat{MCD}$ , suy ra  $\triangle ABD \sim \triangle CMD$ .

Do đó  $\widehat{ADB} = \widehat{CDM}$ .

b) Do  $\triangle OBM = \triangle OCM$  (c.c.c) nên ta tính được

$$CM = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ và } \widehat{OMC} = 90^\circ.$$

Vì tam giác  $OCM$  vuông tại  $M$  nên

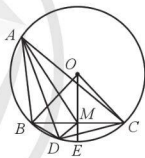
$$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó  $OM = CM$ .

Vì vậy, tam giác  $OCM$  vuông cân tại  $M$ . Suy ra  $\widehat{COE} = 45^\circ$ .

Diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi các bán kính  $OE$ ,  $OC$  và cung nhỏ  $CE$  là:

$$S = \frac{\pi R^2 \cdot 45}{360} = \frac{\pi R^2}{8}.$$



Hình 80

55. Gọi  $K$  là giao điểm của  $AC$  và  $OD$ , kẻ  $MN$  vuông góc với  $AC$  tại  $N$  (Hình 81).

a) Do  $C, D$  lần lượt là điểm chính giữa của cung  $AB, AC$  nên

$$\text{sđ}\widehat{AC} = \text{sđ}\widehat{BC} = 90^\circ; \text{sđ}\widehat{CD} = \text{sđ}\widehat{AD} = 45^\circ.$$

Từ đó, ta tính được

$$\widehat{BAC} = \widehat{COD} = \widehat{ABC} = \widehat{ACO} = 45^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{BAC} = \widehat{COD} = \widehat{ABC} = \widehat{ACO}.$$

b) Do  $M$  thuộc cung nhỏ  $CD$  nên  $\text{sđ}\widehat{AM} > 45^\circ$  và  $\text{sđ}\widehat{CM} < 45^\circ$ . Suy ra

$$\widehat{ACM} > \widehat{CAM}.$$

Tam giác  $ACM$  có  $\widehat{ACM} > \widehat{CAM}$  nên  $AM > CM$ .

Xét đường tròn  $(O)$ , ta có:  $\widehat{COM} = 2\widehat{CAM}$  (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ  $CM$ ).

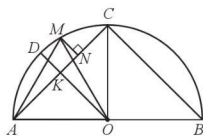
c) Diện tích của tam giác  $MAC$  là:  $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot MN$ .

Do đó  $S$  lớn nhất khi  $MN$  lớn nhất.

Ta lại có:  $MN + OK \leq OM$  và  $OM = OD = DK + OK$  nên  $MN \leq DK$ .

Do  $DK$  không đổi nên  $MN$  lớn nhất khi  $M$  là điểm chính giữa của cung  $AC$ .

Vậy diện tích của tam giác  $MAC$  lớn nhất bằng  $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot DK$  khi  $M$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $AC$ .



Hình 81

56. Đổi  $10^\circ 10' = \left(\frac{61}{6}\right)^\circ$ .

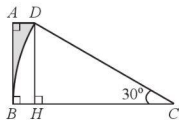
Độ dài cung kinh tuyến từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Xích Đạo là:

$$\frac{20\,000 \cdot \frac{61}{6}}{180} \approx 1\,100 \text{ (km)}.$$

57. Kẻ  $DH$  vuông góc với  $BC$  tại  $H$  (Hình 82).

Do tam giác  $CDH$  vuông tại  $H$  nên

$$DH = CD \cdot \sin C = \frac{a}{2} \text{ và } CH = CD \cdot \cos C = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 82

Ta có:  $BH = BC - CH = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2}$ .

Ta chứng minh được tứ giác  $ABHD$  là hình chữ nhật. Suy ra

$$AB = DH = \frac{a}{2}; AD = BH = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2}.$$

Diện tích của hình thang  $ABCD$  là:  $S_1 = \frac{AB(AD + BC)}{2} = \frac{a^2(4 - \sqrt{3})}{8}$ .

Diện tích hình quạt tròn  $BCD$  là:  $S_2 = \frac{\pi a^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi a^2}{12}$ .

Diện tích của phần tô màu xám là:  $S = S_1 - S_2 = \frac{a^2(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi)}{24}$ .

58. Do diện tích hình vành khuyên đó là  $1,5072 \text{ dm}^2$  nên  $3,14(R^2 - r^2) = 1,5072$  hay  $(R - r)(R + r) = 0,48$ . Mà  $R + r = 1,2$  nên  $R - r = 0,4$ . Từ đó, ta tính được  $R = 0,8 \text{ (dm)}$  và  $r = 0,4 \text{ (dm)}$ .

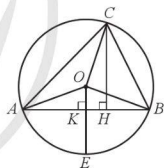
59. Do tam giác  $ABC$  đều nên  $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ . Do đó, số đo các cung nhỏ  $BaC$ ,  $CbA$ ,  $AcB$  của tam giác Reuleaux đều bằng  $120^\circ$ .

60. (Hình 83)

a) Đặt  $\widehat{AOB} = n^\circ$ . Khi đó, ta có số đo  $\widehat{AB} = n^\circ$ . Do đó  $\frac{\pi R n}{180} = \frac{5\pi R}{6}$ . Suy ra  $\widehat{AOB} = 150^\circ$  hay số đo  $\widehat{AB} = 150^\circ$ .

Tam giác  $ACH$  có  $\widehat{AHC} = 90^\circ$ ,  $AH = CH$  nên tam giác  $ACH$  vuông cân tại  $H$ . Suy ra

$$\widehat{BAC} = 45^\circ \text{ hay số đo } \widehat{BC} = 90^\circ.$$



Hình 83

b) Độ dài cung nhỏ  $AC$  và cung nhỏ  $BC$  lần lượt là  $\frac{2\pi R}{3}$  và  $\frac{\pi R}{2}$ .

c) Diện tích hình quạt tròn  $EOB$  là  $\frac{5\pi R^2}{24}$ .

d) Diện tích các hình quạt tròn  $BOC$  và diện tích hình quạt tròn  $AOC$  lần lượt là  $\frac{\pi R^2}{4}$  và  $\frac{\pi R^2}{3}$ . Vậy tỉ số phần trăm giữa diện tích hình quạt tròn  $BOC$  và diện tích hình quạt tròn  $AOC$  là 75%.



# MỤC LỤC

|                                                                       | <i>Trang</i> |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>CHƯƠNG I. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT</b>             | <b>5</b>     |
| §1. Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn                  | 5            |
| §2. Phương trình bậc nhất hai ẩn. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn | 10           |
| §3. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn                          | 15           |
| Bài tập cuối chương I                                                 | 21           |
| Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số                                         | 24           |
| <b>CHƯƠNG II. BẤT ĐẲNG THỨC.<br/>BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN</b> | <b>30</b>    |
| §1. Bất đẳng thức                                                     | 30           |
| §2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn                                  | 37           |
| Bài tập cuối chương II                                                | 43           |
| Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số                                         | 45           |
| <b>CHƯƠNG III. CĂN THỨC</b>                                           | <b>50</b>    |
| §1. Căn bậc hai và căn bậc ba của số thực                             | 50           |
| §2. Một số phép tính về căn bậc hai của số thực                       | 54           |
| §3. Căn thức bậc hai và căn thức bậc ba của biểu thức đại số          | 59           |
| §4. Một số phép biến đổi căn thức bậc hai của biểu thức đại số        | 62           |
| Bài tập cuối chương III                                               | 68           |
| Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số                                         | 70           |

**CHƯƠNG IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG** 79

§1. Tỉ số lượng giác của góc nhọn 79

§2. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông 83

§3. Ứng dụng của tỉ số lượng giác của góc nhọn 86

Bài tập cuối chương IV 90

Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 92

**CHƯƠNG V. ĐƯỜNG TRÒN** 99

§1. Đường tròn. Vị trí tương đối của hai đường tròn 99

§2. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn 104

§3. Tiếp tuyến của đường tròn 107

§4. Góc ở tâm. Góc nội tiếp 110

§5. Độ dài cung tròn, diện tích hình quạt tròn, diện tích hình vành khuyên 117

Bài tập cuối chương V 123

Lời giải – Hướng dẫn – Đáp số 126

# NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thủy, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội

Điện thoại: 024.37547735

Email: nxb@hnue.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

## *Chịu trách nhiệm xuất bản:*

Giám đốc – Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

## *Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:*

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

## *Biên tập:*

LÊ HUY ĐAN – NGUYỄN THỊ QUÝ – PHẠM THỊ DIỆU THUÝ

## *Thiết kế sách:*

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN

## *Trình bày bìa:*

NGUYỄN THỊ HƯƠNG

## *Sửa bản in:*

VŨ THỊ MINH THẢO

# BÀI TẬP TOÁN 9 - TẬP MỘT

Mã số:

ISBN: .....

In ..... cuốn, khổ 17 x 24cm, tại .....

Địa chỉ: .....

Số xác nhận đăng ký xuất bản:

Quyết định xuất bản số: ...../QĐ-NXBDHSP ngày ...../...../2024

In xong và nộp lưu chiểu năm 2024.

Mang cuộc sống vào bài học  
Đưa bài học vào cuộc sống



## BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 9 Cánh Diều

1. Ngữ văn 9 (Tập một, Tập hai)
2. Toán 9 (Tập một, Tập hai)
3. Giáo dục công dân 9
4. Lịch sử và Địa lí 9
5. Khoa học tự nhiên 9
6. Công nghệ 9 – Định hướng nghề nghiệp
7. Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp Mô đun Trồng cây ăn quả
8. Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp Mô đun Chế biến thực phẩm
9. Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp Mô đun Lắp đặt mạng điện trong nhà
10. Tin học 9
11. Giáo dục thể chất 9
12. Âm nhạc 9
13. Mĩ thuật 9
14. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 9
15. Tiếng Anh 9 Explore English

### TÌM ĐỌC

CÁC SÁCH BỔ TRỢ VÀ THAM KHẢO LỚP 9 (Cánh Diều)  
THEO TỪNG MÔN HỌC

SỬ DỤNG  
TEM CHỐNG GIẢ

Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập  
website bộ sách Cánh Diều: [www.hoc10.com](http://www.hoc10.com)

ISBN 978-604-486-413-6



**Giá: 31.000đ**

Bản in thử