VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)
NGUYỄN XUÂN BÌNH - ĐÀM HIẾU CHIẾN

BỒI DƯỠNG TOÁN 7

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN

Vũ Hữu Bình (Chủ biên)

Đàm Hiếu Chiến : *Phần Đại Số*

Nguyễn Xuân Bình : *Phần Hình Học*

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đem đến cho học sinh một cuốn sách Toán chất lượng về nội dung và đẹp về hình thức, các tác giả đã biên soạn bộ sách Bồi dưỡng Toán 7 gồm hai tập.

Đây là bộ sách được biên soạn theo định hướng phát triển năng lực, giúp củng cố, nâng cao kiến thức và bồi dưỡng học sinh vươn lên khá và giỏi, khơi gợi niềm yêu thích môn Toán và giúp học sinh biết thêm nhiều ứng dụng của Toán học trong cuộc sống.

Nội dung bộ sách bám sát Chương trình và Sách giáo khoa Toán hiện hành, mỗi chương gồm nhiều chủ đề, mỗi chủ đề gồm nhiều mục :

Mục Kiến thức cần nhớ hệ thống các kiến thức dưới dạng sơ đồ, vừa giúp dễ nhớ kiến thức một cách trực quan, vừa giúp các em nắm chắc hệ thống các kiến thức cơ bản.

Mục Hỏi đáp nhanh gồm những câu hỏi ngắn gọn yêu cầu học sinh trả lời nhanh để củng cố các kiến thức cơ bản và tránh những sai lầm dễ mắc. Trong các bài tập trắc nghiệm có nhiều phương án A, B, C, D, nếu không có chỉ thị gì, ta quy ước chọn phương án đúng.

Mục Học giải Toán gồm các ví dụ điển hình từ cơ bản đến nâng cao nhằm hình thành phương pháp giải toán cho học sinh. Bên cạnh tuyến chính là các lời giải được trình bày mẫu mực như một bài làm hoàn chỉnh, còn có tuyến phụ gồm các gợi ý, nhận xét, lưu ý, lời bình, các ghi nhớ, kết luận và mở rộng kiến thức với sự tham gia của một số nhân vật hoạt hình nhằm tăng tính hấp dẫn cho cuốn sách.

Mục Bài tập cũng gồm hai loại cơ bản và nâng cao, các bài tập được chọn lọc giúp học sinh nâng cao dần kĩ năng giải toán và năng lực tư duy để vươn lên khá, giỏi trong môn Toán, mặt khác còn giúp học sinh thấy được nhiều ứng dụng thực tế của Toán học.

Mục Em có biết? mang đến cho học sinh nhiều thú vị, gồm những bài toán vui, những câu đố, những thông tin về các nhà toán học có liên quan đến chủ đề đang học, những ứng dụng hoặc thể hiện của Toán học trong đời sống.

Mục Đi xa hơn cung cấp thêm những kiến thức nâng cao để có thể hiểu sâu hơn vấn đề đang học.

Cuối sách là mục **Hướng dẫn giải – Đáp số** giúp học sinh kiểm tra lại bài giải của mình để rút ra những kinh nghiệm trong giải toán.

Với những đổi mới cả về nội dung lẫn hình thức, đáp ứng yêu cầu về tính khoa học, tính sư phạm, tính thực tiễn, tính hấp dẫn, các tác giả hi vọng rằng cuốn sách sẽ là một ấn phẩm thiết thực và bổ ích không chỉ cho các em học sinh, mà còn cho các thầy cô giáo, các bậc cha mẹ học sinh, các nhà quản lí giáo dục và tất cả những ai quan tâm đến sự nghiệp đổi mới giáo dục.

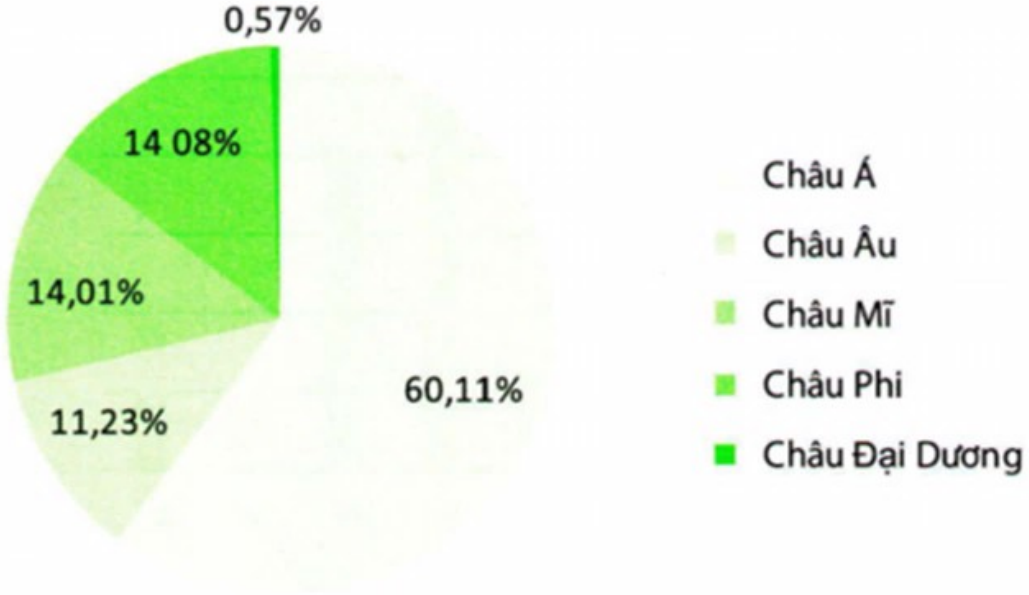
Các tác giả chân thành cảm ơn bạn đọc đã sử dụng cuốn sách này và mong nhận được những góp ý của bạn đọc để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến góp ý xin gửi về : Ban biên tập sách Toán – Tin, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B – Giảng Võ – Đống Đa – Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN
ĐẠI SỐ

Tỉ số phần trăm số dân các châu lục
so với số dân thế giới

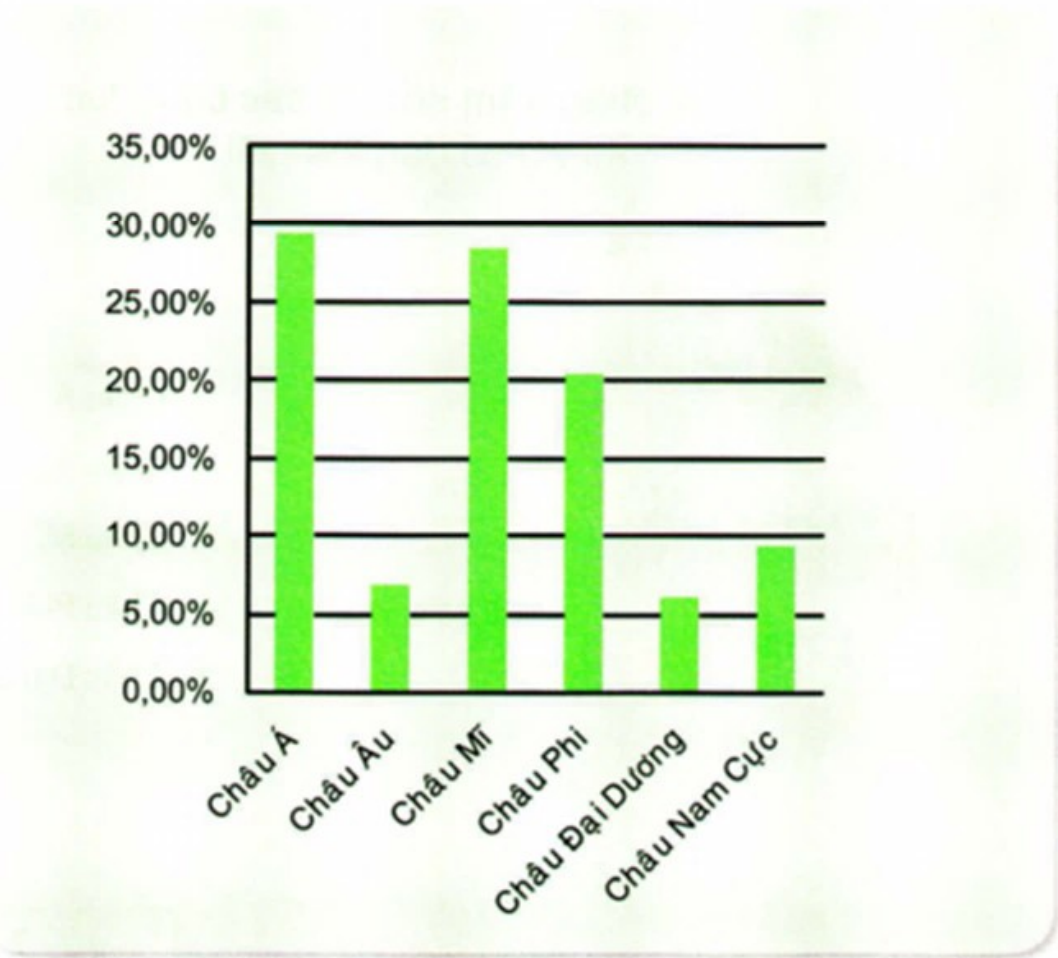


$$x = ?$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

CHƯƠNG III

THỐNG KÊ



- **Số liệu thống kê. Tần số**
- **Biểu đồ. Số trung bình cộng**

CHỦ ĐỀ 1 SỐ LIỆU THỐNG KÊ. TẦN SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bảng số liệu thống kê

Dấu hiệu X (Các vấn đề được quan tâm, hiện tượng được nghiên cứu)

Lớp	Số cây trồng được
7A	35
7B	30
7C	28
7D	30
7E	30

Số đơn vị điều tra (số các giá trị)

Giá trị của dấu hiệu

Bảng "tần số"

Giá trị (x)	28	30	35	
Tần số (n)	1	3	1	N = 5

Số lần xuất hiện một giá trị

Số các giá trị

Tần suất

$$f = \frac{n}{N} = \frac{3}{5} = 60\%$$

Tần suất của giá trị 30

HỎI ĐÁP NHANH

Số trận bão đổ bộ vào Việt Nam trong thập niên thứ nhất của thế kỉ XXI được ghi lại ở bảng A dưới:

Năm	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Số trận bão	3	2	3	2	7	3	8	14	13	7

Bảng A

1. Điền chữ thích hợp vào chỗ chấm (...)

a) Dấu hiệu ở bảng A là .....

b) Số đơn vị được điều tra là .....

c) Số giá trị (khác nhau) của bảng A là .....

• *Các **vấn đề xã hội** được quan tâm, các **hiện tượng tự nhiên** được nghiên cứu gọi là DẤU HIỆU*

• *Mỗi số liệu thống kê là một giá trị của dấu hiệu*

2. Đúng điền Đ, sai điền S

	Khẳng định	Đ/S
a	Bảng "tần số" của giá trị ở bảng A:	
b	Trong 10 giá trị của dấu hiệu có 6 giá trị khác nhau	
c	Bảng tần suất của giá trị ở bảng A:	

Bảng "tần số" của giá trị ở bảng A:

Giá trị (x)	2	3	2	1	1	1	
Tần số (n)	2	3	7	8	13	14	N = 47

Bảng tần suất của giá trị ở bảng A:

Giá trị (x)	2	3	7	8	13	14	
Tần số (n)	2	3	2	1	1	1	N = 10
Tần suất (f)	100%	100%	$\frac{200}{7}$%	0,125%	$\frac{1}{13}$%	$\frac{1}{14}$%	

	Khẳng định	Đ/S
d	Bảng "tần số" và tần suất của giá trị ở bảng A:	

Giá trị (x) (Số trận bão của năm)	2	3	7	8	13	14	
Tần số (n) (Số năm)	2	3	2	1	1	1	N = 10
Tần suất (f)	20%	30%	20%	10%	10%	10%	100%

3. Khoanh vào chữ cái trước khẳng định đúng:

A) Các số liệu thống kê phải được thể hiện bằng các chữ cái (như a, b, c, ...).

B) Số lần xuất hiện một giá trị trong bảng thống kê gọi là tần số của giá trị đó.

C) Tích giữa tần số của một giá trị và tất cả giá trị được thống kê cho ta kết quả là tần suất của giá trị đó.

D) Không thể chuyển bảng "tần số" dạng *ngang* sang bảng *dọc*

Bảng "tần số" là rút gọn của bảng số liệu thống kê, còn được gọi là bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu.

4. Từ bảng "tần số" và tần suất đúng của bảng A viết lại thành bảng "dọc".

Giá trị (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)

Bảng "tần số" giúp dễ có nhận xét về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu như số các giá trị, số các giá trị khác nhau, giá trị lớn/nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất,...

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Số đại biểu Quốc hội khoá XIII của một số thành phố và tỉnh lớn ở Việt Nam được ghi ở bảng sau:

TT	TÊN ĐỊA PHƯƠNG	ĐẠI BIỂU	ĐẠI BIỂU NỮ
1	TP Hà Nội	30	8
2	TP Hồ Chí Minh	30	8
3	TP Hải Phòng	9	1
4	TP Đà Nẵng	6	1
5	TP Cần Thơ	7	2
6	Tỉnh An Giang	10	2
7	Tỉnh Đồng Nai	11	2
8	Tỉnh Nghệ An	13	3
9	Tỉnh Thanh Hoá	16	3
10	Tỉnh Thừa Thiên Huế	7	0

a) Dấu hiệu của bảng là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất ứng với số đại biểu nói chung.

c) Lập bảng "tần số" và tần suất ứng với số đại biểu nữ.

Giải

a) Dấu hiệu X là số đại biểu Quốc hội khoá XIII của một số thành phố và tỉnh lớn ở Việt Nam. Có tất cả 10 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất ứng với số đại biểu:

Giá trị (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)	
6	1	$\frac{1}{10}$	10%
7	2	$\frac{2}{10}$	20%
9	1	$\frac{1}{10}$	10%
10	1	$\frac{1}{10}$	10%
11	1	$\frac{1}{10}$	10%
13	1	$\frac{1}{10}$	10%
16	1	$\frac{1}{10}$	10%
30	2	$\frac{2}{10}$	20%
	N = 10		100%

c) Bảng "tần số" và tần suất ứng với số đại biểu nữ :

Giá trị (x)	0	1	2	3	8	
Tần số (n)	1	2	3	2	2	N = 10
Tần suất (f)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	
	10%	20%	30%	20%	20%	100%

Ví dụ 2

Việt Nam có hai vùng trồng lúa chính là đồng bằng sông Hồng ở phía bắc và đồng bằng sông Cửu Long ở phía nam. Hằng năm sản lượng của cả nước đạt 33 đến 34 triệu tấn thóc. Những năm gần đây xuất khẩu khoảng 6 đến gần 8 triệu tấn, còn lại là tiêu thụ trong nước và bổ sung dự trữ quốc gia.

Số lượng gạo xuất khẩu của Việt Nam trong những năm từ 2009 đến 2013 được ghi ở bảng sau:

Năm	2009	2010	2011	2012	2013
Sản lượng gạo (triệu tấn)	6,05	6,75	7,10	7,70	6,61

a) Dấu hiệu ở bảng là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất của xuất khẩu gạo hằng năm phân theo khoảng như sau:

Sản lượng gạo (triệu tấn)	Dưới 6,5	Từ 6,5 đến 7,0	Trên 7,0

Giải

a) Dấu hiệu X là số lượng gạo xuất khẩu của Việt Nam trong những năm từ 2009 đến 2013. Có tất cả 5 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất (phân theo khoảng) như sau:

Số lượng gạo (triệu tấn)	Tần số	Tần suất
Dưới 6,5	1	$\frac{1}{5} = 20\%$
Từ 6,5 đến 7,0	2	$\frac{2}{5} = 40\%$
Trên 7,0	2	$\frac{2}{5} = 40\%$
	N = 5	100%

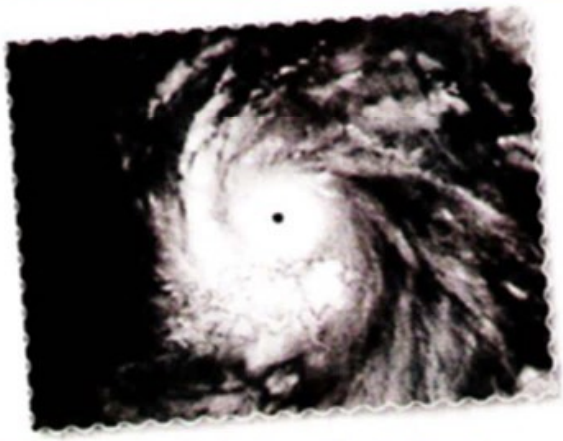
Ví dụ 3

Năm 2008 là năm có số trận bão kỉ lục trong thập niên đầu tiên của thế kỉ XXI đổ bộ vào Việt Nam, với cấp độ bão được ghi trong bảng B.

a) Dấu hiệu X cần điều tra ở bảng thống kê B là gì ?

b) Số đơn vị điều tra là bao nhiêu ?

c) Lập bảng "tần số" và tần suất của các giá trị (lấy chính xác tới hai chữ số thập phân sau dấu phẩy trước khi đổi ra số phần trăm).



Cơn bão số	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Cấp độ bão	7	6	7	7	8	9	6	6	8	10	7	13	6	6

Bảng B

Giải

a) Dấu hiệu X là cấp độ bão đổ bộ vào Việt Nam năm 2008.

b) Số đơn vị được điều tra (số trận bão) là 14.

c) Bảng "tần số" và tần suất như sau:

Cấp độ bão	6	7	8	9	10	13	
Tần số	5	4	2	1	1	1	N = 14
Tần suất	$\frac{5}{14}$ ≈ 36%	$\frac{4}{14}$ ≈ 29%	$\frac{2}{14}$ ≈ 14%	$\frac{1}{14}$ ≈ 7%	$\frac{1}{14}$ ≈ 7%	$\frac{1}{14}$ ≈ 7%	100%

Ví dụ 4*

Các nước có đội bóng tham gia 2014 FIFA World Cup Brasil được viết ở bảng dưới.

TT	TÊN NƯỚC	
1	Algeria	
2	Argentina	
3	Australia	Úc
4	Belgium	Bỉ
5	Bosnia and Herzegovina	
6	BraSil	
7	Cameroon	
8	Chile	
9	Colombia	
10	Costa Rica	
11	Côte d'Ivoire	Bờ Biển Ngà
12	Croatia	
13	Ecuador	
14	England	Anh
15	France	Pháp
16	Germany	Đức
17	Ghana	
18	Greece	Hy Lạp
19	Honduras	
20	Iran	I-ran
21	Italy	Ý
22	Japan	Nhật
23	Korea Republic	Hàn quốc
24	Mexico	
25	Netherlands	Hà Lan
26	Nigeria	
27	Portugal	Bồ Đào Nha
28	Russia	Nga
29	Spain	Tây Ban Nha
30	Switzerland	Thuỵ Sĩ
31	Uruguay	
32	USA	Mĩ

a) Lập bảng thống kê theo mẫu sau:

Châu lục	Số đội bóng tham gia	Tên quốc gia có đội bóng tham gia

b) Dấu hiệu ở bảng vừa lập là gì ? Số các giá trị ở bảng.

c) Lập bảng "tần số" và tần suất của mỗi giá trị.

Giải

a) Bảng thống kê các đội bóng theo châu lục (châu Á và châu Đại Dương được xếp vào một nhóm):

TT	Châu lục	Số đội bóng	Tên các quốc gia có đội bóng tham gia
1	Châu Á và châu Đại Dương	4	Úc, Iran, Hàn Quốc và Nhật Bản.
2	Châu Âu	13	Anh, Bỉ, Bồ Đào Nha, Bosnia and Herzegovina, Croatia, Đức, Hà Lan, Hy Lạp, Nga, Pháp, Tây Ban Nha, Thuỵ Sĩ và Ý.
3	Châu Mĩ	10	Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, Honduras, Mexico, Uruguay và Mĩ.
4	Châu Phi	5	Algeria, Cameroon, Bờ Biển Ngà, Ghana và Nigeria

b) Dấu hiệu X là số đội bóng của mỗi châu lục tham gia 2014 FIFA World Cup Brasil.

Có tất cả 4 giá trị.

c) Bảng "tần số" và tần suất của mỗi giá trị:

TT	Châu lục	Tần số	Tần suất
1	Châu Á và châu Đại Dương	4	$\frac{4}{32} = 12,5\%$
2	Châu Âu	13	$\frac{13}{32} = 40,625\%$
3	Châu Mĩ	10	$\frac{10}{32} = 31,25\%$
4	Châu Phi	5	$\frac{5}{32} = 15,625\%$
		N = 32	100%

Ví dụ 5*

Trong một cuộc điều tra tại một khối lớp 7 có 100 học sinh, trong đó có 60 học sinh thích chương trình "Đừng để tiền rơi", 75 học sinh thích chương trình "Ai là triệu phú".

a) Nếu trong khối lớp đó có 5 học sinh không thích xem cả hai chương trình trên, thì có bao nhiêu học sinh thích xem cả hai chương trình trên?

b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích xem cả hai chương trình ?

c) Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai chương trình?

Bạn BEE chưa biết trả lời các câu hỏi trên thế nào.

Các bạn hãy giúp BEE nhé!

Giải

Sử dụng giản đồ Venn.

a) Số học sinh thích xem ít nhất một chương trình: $100 - 5 = 95$.

Số học sinh thích xem cả hai chương trình: $(60 + 75) - 95 = 40$.

b) Có $60 < 75$, nên có nhiều nhất 60 học sinh thích xem cả hai chương trình.

c) Gọi số học sinh thích xem cả hai chương trình là x, thì

$(60 + 75) - x \leq 100 \Rightarrow x \geq 35$.

Vậy có ít nhất 35 học sinh thích xem cả hai chương trình.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

1.1. Lập danh sách các bạn ở lớp em theo tháng sinh (không tính ngày, năm) và cho biết:

a) Dấu hiệu ở đây là gì ?

b) Có bao nhiêu giá trị của dấu hiệu?

c) Lập bảng "tần số" của các giá trị trên.

1.2. Bạn có biết bức tranh thiên nhiên kì vĩ giữa đại ngàn vùng Tây Bắc (Việt Nam) ?

Ngỡ như thiên nhiên – tạo hoá hình thành nên, sắp đặt những tầng nấc chân ruộng, thế nhưng không phải vậy. Do ở các vùng cao, miền núi hiếm đất bằng để canh tác, nhất là trồng lúa nước, người ta khắc phục bằng cách chọn các sườn đồi, núi có đất màu bạt tam cấp để tạo thành những vạt đất bằng. Sau đó tuỳ vào ý định canh tác mà có thể để khô hoặc dẫn nước từ những đỉnh núi cao hơn về. Đồng bào dân tộc đã sáng tạo ra ruộng bậc thang – kiệt tác hiếm có trong nền văn minh lúa nước Việt Nam. Ruộng bậc thang có nhiều ở các tỉnh vùng Tây Bắc. Đặc biệt, ít ai ngờ rằng chính những tài năng lao động ấy lại tạo nên một bức tranh thiên nhiên kì vĩ giữa đại ngàn Tây Bắc.

Số thư viện năm 2012 do địa phương quản lí phân theo địa phương của vùng Tây Bắc được ghi ở bảng sau:

TT	TÊN ĐỊA PHƯƠNG	SỐ THƯ VIỆN
1	Tỉnh Điện Biên	10
2	Tỉnh Hoà Bình	36
3	Tỉnh Lai Châu	10
4	Tỉnh Lào Cai	10
5	Tỉnh Sơn La	11
6	Tỉnh Yên Bái	16

a) Dấu hiệu của bảng là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất của các giá trị trên.

1.3. Bạn có biết nhà rông – biểu tượng văn hoá cộng đồng các dân tộc Tây Nguyên (Việt Nam) ?

Tây Nguyên là vùng cao nguyên, phía bắc giáp tỉnh Quảng Nam, phía đông giáp các tỉnh Quảng Ngãi, Bình Định, Phú Yên, Khánh Hoà, Ninh Thuận, Bình Thuận, phía nam giáp các tỉnh Đồng Nai, Bình Phước, phía tây giáp với các tỉnh Attapeu (Lào) và Ratanakiri và Mondulkiri (Campuchia). Trong khi Kon Tum có biên giới phía tây giáp với cả Lào và Campuchia, thì Gia Lai, Đắk Lắk và Đắk Nông chỉ có chung đường biên giới với Campuchia. Còn Lâm Đồng không có đường biên giới quốc tế. Vùng Tây Nguyên rộng 54641km².

Số toà soạn báo, tạp chí năm 2011 phân theo địa phương của vùng Tây Nguyên được ghi ở bảng sau:

TT	TÊN ĐỊA PHƯƠNG	SỐ TOÀ SOẠN
1	Tỉnh Đắk Lắk	4
2	Tỉnh Đắk Nông	2
3	Tỉnh Gia Lai	3
4	Tỉnh Kon Tum	2
5	Tỉnh Lâm Đồng	3

a) Dấu hiệu của bảng là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất của các giá trị trên.

1.4. *Các cao nguyên của vùng Tây Nguyên*

Tây Nguyên không phải là một cao nguyên duy nhất mà là một loạt cao nguyên liền kề. Đó là các cao nguyên Kon Tum cao khoảng 500m; cao nguyên Kon Plông, cao nguyên Kon Hà Nừng, Pleiku cao khoảng 800m; cao nguyên M'Drắk cao khoảng 500m, cao nguyên Buôn Ma Thuột cao khoảng 500m, cao nguyên Mơ Nông cao khoảng 900m, cao nguyên Lâm Viên cao khoảng 1500m và cao nguyên Di Linh cao khoảng 900m.

Tên và độ cao các cao nguyên của vùng Tây Nguyên được ghi ở bảng sau:

TT	TÊN CAO NGUYÊN	ĐỘ CAO (mét)
1	Buôn Ma Thuột	500
2	Di Linh	900
3	Kon Plông	800
4	Kon Hà Nừng	800
5	Kon Tum	500
6	Lâm Viên	1500
7	M'Drắk	500
8	Mơ Nông	900
9	Pleiku	800

a) Dấu hiệu của bảng là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu ?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất.

NÂNG CAO

1.5. Sản lượng và năng suất cà phê của Việt Nam trong một vài năm gần đây được ghi ở bảng sau:

Năm	2011	2012	2013
Sản lượng (nghìn tấn)	1200	1560	1497
Năng suất (tấn/ha)	2,18	2,44	2,32

Lập thành hai bảng: bảng sản lượng và bảng năng suất. Lập bảng "tần số" và tần suất ở từng bảng đó.

1.6. *Bạn có biết 15 nước có dự trữ dầu mỏ lớn nhất thế giới ?*

Dầu mỏ *hay* ***dầu thô*** *là một chất lỏng sánh đặc màu nâu hoặc ngả lục, tồn tại trong các lớp đất đá tại một số nơi trong vỏ Trái Đất. Hiện nay dầu mỏ chủ yếu dùng để sản xuất dầu hỏa, diezen và xăng nhiên liệu. Ngoài ra, dầu thô cũng là nguồn nguyên liệu chủ yếu để sản xuất ra các sản phẩm của ngành hoá dầu như dung môi, phân bón hoá học, nhựa, thuốc trừ sâu, nhựa đường... Khoảng 88% dầu thô dùng để sản xuất nhiên liệu, 12% còn lại dùng cho hoá dầu. Do dầu thô là nguồn năng lượng không tái tạo nên nhiều người lo ngại về khả năng cạn kiệt dầu trong một tương lai không xa.*

Khai thác dầu tại mỏ Bạch Hổ (Việt Nam)

Tên nước và dự trữ dầu thô theo đơn vị tỉ thùng được ghi ở bảng C.

TT	TÊN NƯỚC	DỰ TRỮ (tỉ thùng)
1	Saudi Arabia	262,6
2	Venezuela	211,2
3	Canada	175,2
4	Iran	137,0
5	Iraq	115,0
6	Kuwait	104,0
7	Các tiểu vương quốc Ả rập thống nhất (UAE)	97,8
8	Nga	60
9	Libya	44,3
10	Nigeria	37,2
11	Kazakhstan	30
12	Qatar	25,38
13	Mĩ	20,68
14	Trung Quốc	14,8
15	Brasil	12,86

Bảng C

a) Dấu hiệu ở bảng C là gì ? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu ?

b) Đặt dự trữ dầu thô là x (tỉ thùng), hãy lập bảng "tần số" và tần suất theo giá trị của x như sau: $10 < x \leq 100$, $100 < x \leq 150$ và $150 < x \leq 300$.

EM CÓ BIẾT ?

1. Kết quả điểm số (theo thang điểm10) của 20 học sinh một trường trong đợt thi học sinh giỏi toán được cho ở bảng sau:

5	2	8	4	8	1	9	3	5	10
6	5	8	6	2	6	6	7	2	5

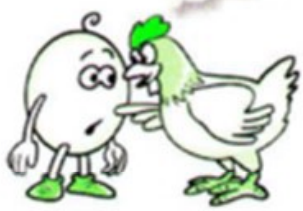
Cách thống kê: Mỗi học sinh có một điểm được đánh dấu bằng một gạch. Chẳng hạn, kiểm tra lần lượt từng học sinh từ trên xuống dưới và từ trái qua phải, học sinh nhận được điểm nào thì đánh dấu vào ô tương ứng. Ví dụ nhìn bảng ta thấy, sau khi hoàn thành bảng thống kê ban đầu, điểm 5 được đánh dấu 4 gạch, có nghĩa là có 4 học sinh nhận điểm 5.

Điểm	Đếm	Số đếm
1	|	1
2	⊏	3
3	|	1
4	|	1
5	□	4
6	□	4
7	|	1
8	⊏	3
9	|	1
10	|	1

2. Tại một cuộc hội thảo khoa học, mỗi nhà khoa học biết ít nhất 1 trong 3 ngoại ngữ: Tiếng Anh, Pháp hoặc Nga. Hãy thống kê có bao nhiêu người tham dự hội thảo và họ nói cụ thể ngoại ngữ nào, nếu biết:

21 người biết tiếng Anh	13 người biết tiếng Anh và Pháp
19 người biết tiếng Pháp	11 người biết tiếng Pháp và Nga
17 người biết tiếng Nga	12 người biết tiếng Nga và Anh
10 người biết cả ba tiếng Anh, Pháp và Nga	

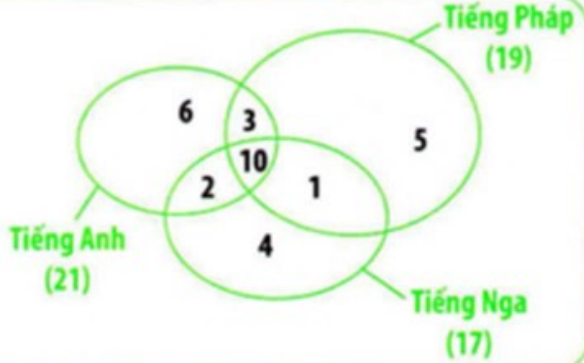
Tớ thống kê các dữ liệu trên, nhưng làm mãi không được. EGG giải đáp hộ tớ với.



LỜI GIẢI CỦA BẠN EGG

Mỗi nhà khoa học nói được một trong ba ngoại ngữ.

Dùng giản đồ Venn để tính trước, rồi mới lập được bảng thống kê.



Số người chỉ biết tiếng Anh và Pháp	Số người chỉ biết tiếng Pháp và Nga	Số người chỉ biết tiếng Nga và Anh
$13 - 10 = 3$	$11 - 10 = 1$	$12 - 10 = 2$
Số người chỉ biết tiếng Anh	**Số người chỉ biết tiếng Pháp**	**Số người chỉ biết tiếng Nga**
$21 - (3 + 10 + 2) = 6$	$19 - (1 + 10 + 3) = 5$	$17 - (1 + 10 + 2) = 4$

Số người tham dự hội thảo:

(Số người chỉ biết 1 ngoại ngữ) + (số người biết 2 ngoại ngữ) + (số người biết 3 ngoại ngữ)

$= (6 + 5 + 4) + (3 + 1 + 2) + 10 = 31$ (người)

BẢNG THỐNG KÊ		
	TỔNG SỐ NGƯỜI DỰ HỘI THẢO	31
	Số người chỉ biết tiếng Anh	6
	Số người chỉ biết tiếng Pháp	5
	Số người chỉ biết tiếng Nga	4
	Số người biết tiếng Anh và Pháp	3
	Số người biết tiếng Pháp và Nga	1
	Số người biết tiếng Nga và Anh	2
	Số người biết cả tiếng Anh, Pháp và Nga	10

SUY NGẪM

Sử dụng các phép toán tập hợp ta có thể viết như sau:

$n(A \cup B \cup C)$

$= [n(A) + n(B) + n(C)] - [n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)] + n(A \cap B \cap C)$

$= (21 + 19 + 17) - (13 + 11 + 12) + 10 = 31,$

trong đó kí hiệu n (M) là số phần tử của tập hợp M.

ĐỐ VUI

Một trường trung học cơ sở có 12 học sinh tham gia HỘI KHOẺ PHÙ ĐỔNG và cả 12 học sinh đều đoạt giải, trong đó:

7 học sinh đoạt ít nhất 2 giải

4 học sinh đoạt ít nhất 3 giải

2 học sinh đoạt ít nhất 4 giải.

Hãy thống kê các dữ liệu trên, cho biết trường đoạt bao nhiêu giải và có bao nhiêu học sinh chỉ đoạt 2 giải, 3 giải và 4 giải.

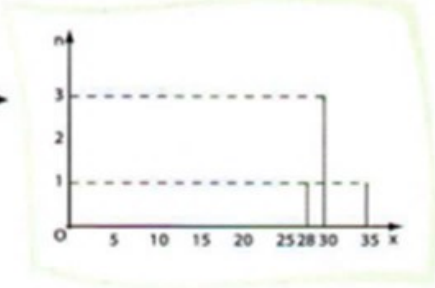
CHỦ ĐỀ 2 BIỂU ĐỒ. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

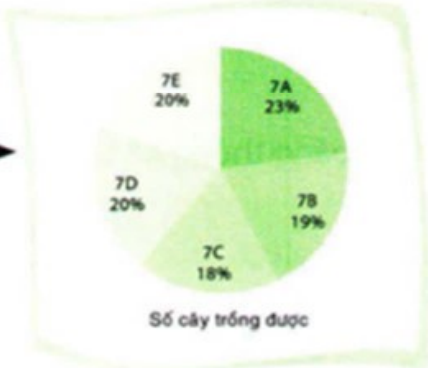
Biểu đồ là hình ảnh minh hoạ giá trị và tần số

BIỂU ĐỒ

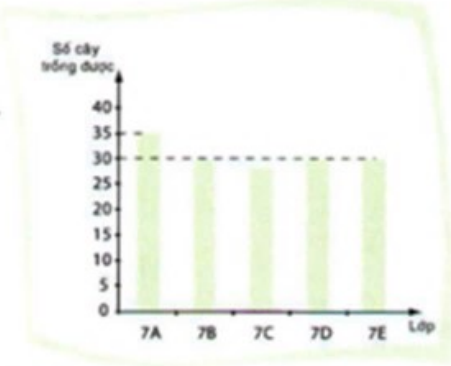
- BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG



- BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT



- BIỂU ĐỒ HÌNH CHỮ NHẬT (CỘT)



SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

Số trung bình cộng

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + ... + x_kn_k}{N}$$

$x_1, x_2, ..., x_k$ là k giá trị khác nhau

$n_1, n_2, ..., n_k$ là k tần số tương ứng

N là số các giá trị và $N = n_1 + n_2 + ... + n_k$

MỐT

Mốt
(giá trị có tần số lớn nhất)
$M_o = 30$

Giá trị (x)	28	30	35	
Tần số (n)	1	3	1	N = 5

HỎI ĐÁP NHANH

1. Đúng điền Đ, sai điền S

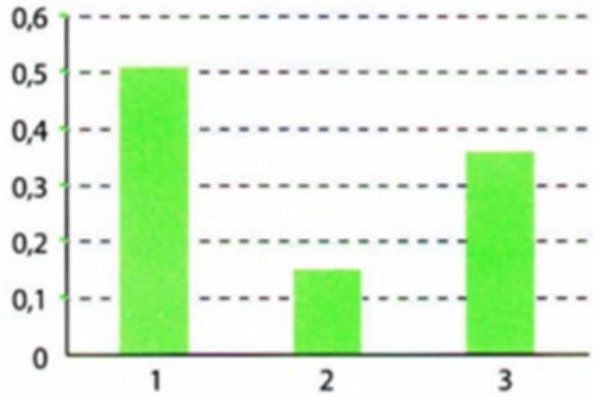
Muốn tính mật độ dân số trung bình ở một vùng lãnh thổ nào đó, ta thực hiện	Đ/S
a) lấy diện tích của lãnh thổ đó cộng với số dân.	
b) lấy diện tích của lãnh thổ đó chia cho số dân.	
c) lấy diện tích của lãnh thổ đó nhân với số dân.	
d) lấy số dân chia cho diện tích của lãnh thổ đó.	

2. Cho bảng thống kê sau về Trái Đất:

Diện tích Trái Đất	510000000 (km^2) $= 0,51.10^9$ (km^2)
Diện tích đất nổi	149000000 (km^2) $= 0,149.10^9$ (km^2)
Diện tích Đại Dương	361000000 (km^2) $= 0,361.10^9$ (km^2)
Khối lượng Trái Đất	$5,98.10^{21}$ (tấn)
Thể tích Trái Đất	$1,08.10^{12}$ (km^3)

Từ bảng trên, phương án đúng là:

A)



B) Trung bình cộng diện tích trên Trái Đất:

$$\frac{0,51+0,149+0,361}{3}.10^9 = 0,34\ (km^2).$$

C) Trung bình cộng thể tích và khối lượng Trái Đất được tính như sau:

$$\frac{5,98.10^{21}+1,08.10^{12}}{2}.$$

D) Diện tích đất nổi so với diện tích Trái Đất:

$$\frac{0,149.10^9}{0,51.10^9}.100\% \approx 30\%.$$

Diện tích Đại Dương so với diện tích Trái Đất:

$$\frac{0,361.10^9}{0,51.10^9}.100\% \approx 70\%.$$

3. Điều tra diện tích và dân số một số thành phố lớn của Việt Nam năm 2012 (theo Tổng cục thống kê), ta có bảng:

Thành phố	Diện tích (km^2)	Dân số (người)
T.P. Hà Nội	3323,6	6844100
T.P. Hồ Chí Minh	2095,6	7681700
T.P. Hải Phòng	1523,9	1904100
T.P. Đà Nẵng	1285,4	973800

Điền chữ thích hợp vào chỗ chấm (...):

a) Mật độ dân số của thành phố Hà Nội là ..... người /km^2

b) Mật độ dân số của Thành phố Hồ Chí Minh là ..... người /km^2

c) Mật độ dân số của thành phố Hải Phòng là ..... người /km^2

d) Mật độ dân số của thành phố Đà Nẵng là ..... người /km^2

4. Nối mỗi tên thành phố ở dòng trên với một giá trị x (người /km^2) chỉ mật độ dân số ở dòng dưới để được một kết luận đúng:

A	B	C	D
T.P. Hà Nội	T.P. Hồ Chí Minh	T.P. Hải Phòng	T.P. Đà Nẵng
$x = 750$	$750 < x \le 1000$	$1000 < x \le 2000$	$x > 2000$
1	2	3	4

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Châu lục hay châu là tổ hợp lớn về đất đai, trên đó có nhiều quốc gia với các phần diện tích thuộc lục địa lẫn các đảo xung quanh. Trên Trái Đất có 6 châu lục: châu Á, châu Âu, châu Mĩ, châu Phi, châu Đại Dương và châu Nam Cực.

Điều tra diện tích và dân số các châu lục (năm 2012) ta được bảng thống kê sau:

Châu lục	Diện tích (km^2)	Dân số (người)
Châu Á	43 810 000	3 800 000 000
Châu Âu	10 400 000	710 000 000
Châu Mĩ	42 330 000	886 000 000
Châu Phi	30 370 000	890 000 000
Châu Đại Dương	9 010 000	35 800 000
Châu Nam Cực	13 720 000	1000

1. a) Tính diện tích các châu lục theo đơn vị là triệu km^2 (lấy đến chữ số thập phân thứ hai). Lập bảng thống kê 1 biểu diễn diện tích của các châu lục.

b) Tính tỉ số phần trăm diện tích từng châu lục so với diện tích toàn thế giới.

c) Vẽ sơ đồ cột theo các dữ liệu ở bảng 1, với trục x là tên của các châu lục và trục y là tỉ số phần trăm diện tích các châu lục so với diện tích toàn thế giới.

2. a) Lập bảng thống kê 2 theo số dân các châu lục (đơn vị triệu người) (không tính châu Nam cực).

b) Vẽ sơ đồ hình quạt biểu diễn tỉ số phần trăm số dân từng châu lục so với dân số thế giới.

c) Tính chung cả thế giới có mật độ trung bình là bao nhiêu người trên 1km^2 ?

d) Châu lục nào có mật độ dân số cao nhất, châu lục nào có mật độ dân số thấp nhất? Những mật độ đó là bao nhiêu ?

Giải

1. a) Bảng thống kê 1

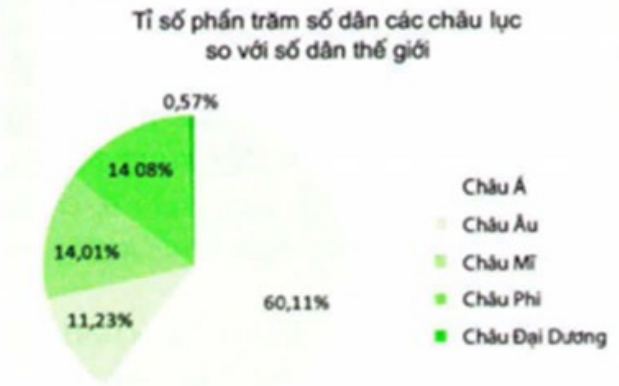
Châu lục	Diện tích (triệu km^2)
Châu Á	43,81
Châu Âu	10,4
Châu Mĩ	42,33
Châu Phi	30,37
Châu Đại Dương	9,01
Châu Nam Cực	13,72

b) Tỉ số phần trăm diện tích từng châu lục so với diện tích toàn thế giới (149,64 triệu km^2)

Châu lục	Tỉ số phần trăm diện tích
Châu Á	$\frac{43,81}{149,64}.100\% \approx 29,28\%$
Châu Âu	$\frac{10,4}{149,64}.100\% \approx 6,95\%$
Châu Mĩ	$\frac{42,33}{149,64}.100\% \approx 28,28\%$
Châu Phi	$\frac{30,37}{149,64}.100\% \approx 20,3\%$
Châu Đại Dương	$\frac{9,01}{149,64}.100\% \approx 6,02\%$
Châu Nam Cực	$\frac{13,72}{149,64}.100\% \approx 9,17\%$

c) Biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn tỉ số phần trăm diện tích các châu lục

b) Biểu đồ hình quạt biểu diễn tỉ số phần trăm số dân các châu lục



2. a) Bảng thống kê 2

Châu lục	Số dân (triệu người)
Châu Á	3800
Châu Âu	710
Châu Mĩ	886
Châu Phi	890
Châu Đại Dương	35,8

Tỉ số phần trăm số dân từng châu lục so với số dân toàn thế giới (6321,8 triệu người)

Châu lục	Tỉ lệ
Châu Á	$\frac{3800}{6321,8}.100\% \approx 60,11\%$
Châu Âu	$\frac{710}{6321,8}.100\% \approx 11,23\%$
Châu Mĩ	$\frac{886}{6321,8}.100\% \approx 14,01\%$
Châu Phi	$\frac{890}{6321,8}.100\% \approx 14,08\%$
Châu Đại Dương	$\frac{35,8}{6321,8}.100\% \approx 0,57\%$

c) Bảng thống kê 3

Châu lục	Số dân (triệu người)	Diện tích (nghìn km²)	Mật độ dân số (người/km²)
Châu Á	3800	43810	**87**
Châu Âu	710	10400	**68**
Châu Mĩ	886	42330	**21**
Châu Phi	890	30370	**29**
Châu Đại Dương	35,8	9010	**4**
THẾ GIỚI (không tính châu Nam Cực)	**6321,8**	**135920**	**47**

Mật độ dân số của thế giới là 47 người/km².

d) Châu Á có mật độ dân số cao nhất (87 người/km²),

châu Đại Dương có mật độ dân số thấp nhất (4 người/km²).

Ví dụ 2

Với số liệu điều tra diện tích và dân số các thành phố lớn của Việt Nam năm 2012 ở câu hỏi 3 mục Hỏi đáp nhanh:

a) Tính mật độ dân số của các thành phố.

b) Thành phố nào có mật độ dân cao nhất, mật độ dân số thấp nhất (chính xác đến hàng đơn vị)?

c) Vẽ sơ đồ hình chữ nhật biểu diễn diện tích các thành phố.

Giải

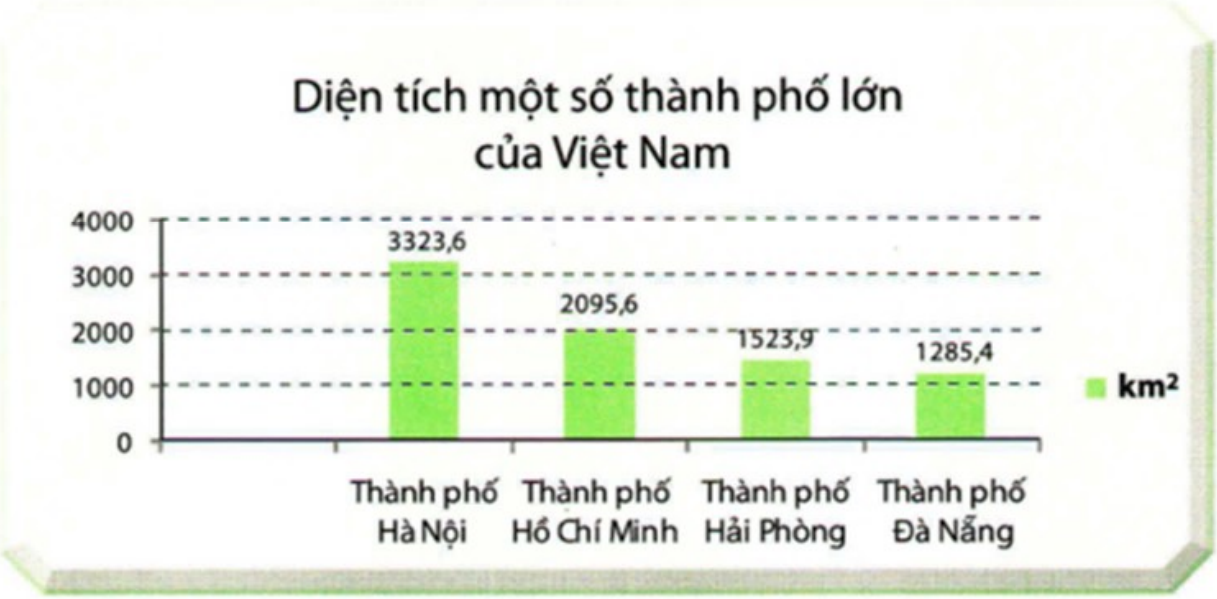
a)

Thành phố	Diện tích (km^2)	Dân số (người)	Mật độ dân số (người/km^2)
Thành phố Hà Nội	3323,6	6844100	2059
Thành phố Hồ Chí Minh	2095,6	7681700	3666
Thành phố Hải Phòng	1523,9	1904100	1249
Thành phố Đà Nẵng	1285,4	973800	758

b) Thành phố Hồ Chí Minh có mật độ dân số cao nhất (3666 người/km^2),

thành phố Đà Nẵng có mật độ dân số thấp nhất (758 người/km^2).

c) Biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn diện tích các thành phố



Ví dụ 3*

Cần bỏ một số nào trong tập hợp

A = {– 1; – 2; – 3; ... ; – 11} để giá trị trung bình của các số còn lại:

a) Không thay đổi ?

b) Bằng – 6,1 ?

Giải

Tổng của 11 số thuộc tập A bằng:

$S = (-1) + (-2) + (-3) + \ldots + (-11)$

$= \dfrac{((-1)+(-11)).11}{2} = -66.$

Giá trị trung bình của các số là

$(-66) : 11 = -6.$

Vậy phải bỏ số (– 6) để giá trị trung bình của các số còn lại không thay đổi.

b) Tổng của 10 số thuộc tập A sau khi bỏ số x là: $S' = (-6,1).10 = -61.$

Vậy số phải bỏ:

$x = S - S' = (-66) - (-61) = -5$ (số $-5 \in A$).

Ví dụ 4*

Biết trung bình cộng của 16 số bằng – 4. Cần thêm số nào để trung bình cộng của chúng bằng – 5 ?

Giải

Biết trung bình cộng của 16 số bằng – 4, nên tổng của 16 số đó là $(-4).16 = -64$.

Gọi số cần thêm vào là x. Khi đó trung bình cộng của 17 số bằng – 5, tức là:

$$\frac{-64 + x}{17} = -5$$

$\Rightarrow \; x = (-5).17 - (-64) = -21.$

Vậy số cần thêm vào là số – 21 để trung bình cộng của 17 số bằng – 5.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

2.1. *Trung bình mỗi người một ngày cần khoảng 100 đến 120 lít nước dùng cho sinh hoạt, chưa kể lượng nước hao phí là 10%.*

a) Để đủ nước sinh hoạt cho một ngày, thì tổng công suất các nhà máy nước mỗi thành phố phải đạt bao nhiêu m^3/ngày, biết số dân của các thành phố trong ví dụ 2 mục Học giải toán ?

b) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật minh hoạ tổng công suất các nhà máy này của mỗi thành phố trong một ngày.

2.2. Trong năm học 2013-2014 Việt Nam có số người trong các bậc học ở bảng sau:

BẬC HỌC	SỐ NGƯỜI
Mầm non	4 701 000
Tiểu học	7 430 000
Trung học cơ sở	4 950 000
Trung học phổ thông	2 720 000
Trung học chuyên nghiệp	520 000
Cao đẳng - Đại học	2 185 000

a) Tính số người của các bậc học trong cả nước (theo đơn vị triệu người).

Làm tròn số các số đến chữ số thứ nhất sau dấu phẩy.

b) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật với trục x là các bậc học, trục y là số người (theo phần b).

2.3. Một bảng thống kê dân số một tỉnh cho thấy tỉ số giữa số nam và nữ trong tỉnh bằng $\frac{11}{10}$. Nếu tuổi trung bình của nam là 32 và của nữ là 34 thì tuổi trung bình của người dân trong tỉnh là bao nhiêu ?

2.4. Bạn BEE đã có một số bài kiểm tra môn Toán. Phấn đấu đạt điểm trung bình là 9 thì bài kiểm tra tới phải được điểm 10. Nhưng do sơ suất nên bài kiểm tra đó bạn BEE chỉ được 7,5 điểm và do đó điểm trung bình chỉ được 8,5. Hỏi bạn BEE trước đó đã có bao nhiêu bài kiểm tra?

2.5. Điểm trung bình môn Toán của một nhóm chưa giỏi toán trong một bài kiểm tra là 5,2. Có một bạn được điểm 7 và được chuyển sang nhóm khác nên điểm trung bình của các bạn còn lại bằng 5. Vậy trong nhóm chưa giỏi toán còn bao nhiêu bạn ?

2.6. Đất nước Việt Nam có 2600 km đường sắt, 42000 km đường thuỷ và 256000 km đường bộ. Hỏi trung bình số ki-lô-mét đường sắt, đường thuỷ và đường bộ trên 1 km^2 diện tích là bao nhiêu (biết diện tích Việt Nam khoảng 329 560 km^2)?

NÂNG CAO

2.7. Thế giới hiện nay có gần 7 tỉ người, phân bố theo các châu lục ở bảng dưới (tính theo năm 2012). Ngoài nước sinh hoạt, con người còn dùng nhiều nước cho các hoạt động khác. Bình quân đầu người mỗi ngày thải 300 lít nước thải ra môi trường.

CHÂU LỤC	SỐ DÂN (triệu người)
Châu Á	3800
Châu Âu	710
Châu Mĩ	886
Châu Phi	890
Châu Đại Dương	35,8

a) Tính mỗi ngày mỗi châu lục thải ra bao nhiêu tấn nước thải, biết 1000 lít nước thải có khối lượng 1 tấn. Tính theo đơn vị triệu tấn và làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt.

2.8. *Dân số thế giới:* Số dân trên thế giới tăng với tốc độ chóng mặt (bảng dưới).

NĂM	SỐ DÂN (tỉ người)
1895	1
1925	2
1955	3
1975	4
1987	5
2000	6
2012	7

a) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật minh hoạ dân số thế giới theo các năm, trục x chỉ các năm và trục y chỉ dân số.

b) Nhìn biểu đồ bạn có nhận xét gì ?

c) Nếu tốc độ tăng dân số hằng năm là 1,2%, thì đến năm nào dân số thế giới sẽ đạt mốc 8 tỉ người ?

2.9. Cả nước có 421 trường đại học và cao đẳng, với 2,2 triệu sinh viên (số liệu năm 2013). Tính xem cứ 100 000 dân thì có bao nhiêu sinh viên, biết dân số Việt Nam là 90 triệu người.

2.10. Cho 7 số xếp theo thứ tự giảm dần. Biết trung bình cộng của 4 số đầu bằng 50, trung bình cộng của 4 số sau bằng 31, còn trung bình cộng của cả 7 số bằng 40. Hỏi số đứng giữa bằng bao nhiêu ?

2.11. Bạn BEE đã có một số bài kiểm tra toán. Nếu thêm 3 điểm 9 và 3 điểm 10 nữa thì điểm trung bình của bạn BEE là 8, còn nếu chỉ được thêm 1 điểm 9 và 2 điểm 10 thì điểm trung bình là 7,5. Hỏi hiện tại điểm trung bình các bài kiểm tra toán của bạn BEE là bao nhiêu?

EM CÓ BIẾT ?

Có các loại biểu đồ nào ?

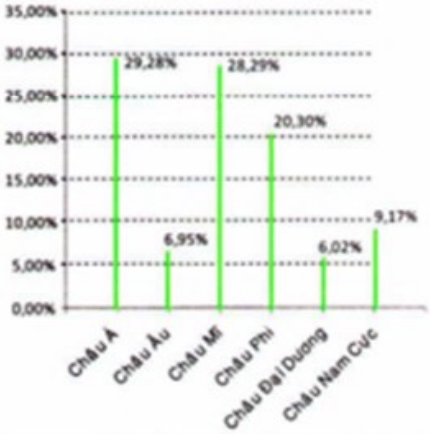
1. TỪ BIỂU ĐỒ TRONG TRƯỜNG HỌC

Bạn CHICKEN hỏi bạn EGG

LỜI GIẢI CỦA BẠN EGG

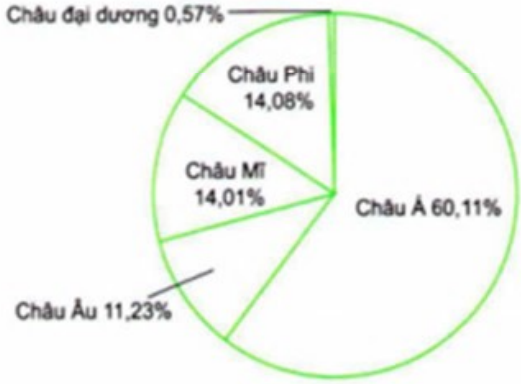
Biểu đồ đoạn thẳng

Tỉ số phần trăm diện tích các châu lục so với diện tích thế giới



Biểu đồ hình quạt

Tỉ số phần trăm số dân các châu lục so với số dân thế giới



2. ĐẾN BIỂU ĐỒ TRONG PHẦN MỀM EXCEL

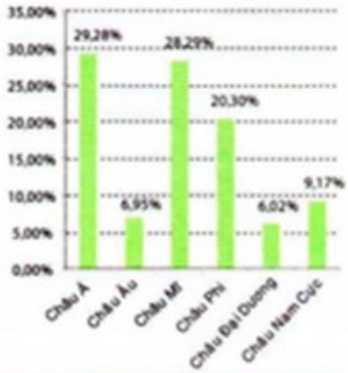
Bạn CHICKEN hỏi bạn EGG

Bạn có biết cách vẽ biểu đồ trong phần mềm Excel không ?

LỜI GIẢI CỦA BẠN EGG

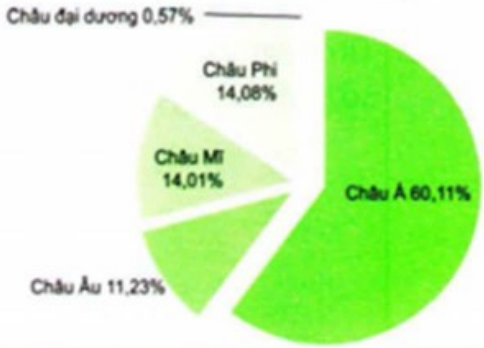
Biểu đồ hình cột:

Tỉ số phần trăm diện tích các châu lục so với diện tích thế giới



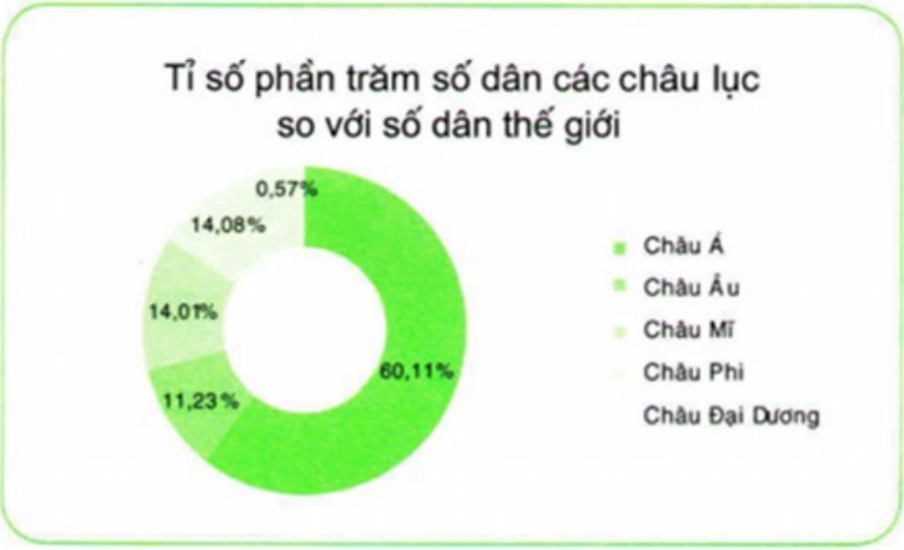
Biểu đồ hình quạt

Tỉ số phần trăm số dân các châu lục so với số dân thế giới



SUY NGẪM

Cả hai bạn CHICKEN và bạn EGG đều thống nhất với nhau là nên học Tin học và vẽ biểu đồ bằng phần mềm Excel, bởi vì vừa chính xác, vừa đẹp và rất nhiều kiểu biểu đồ khác nữa, chẳng hạn:



ĐỐ VUI

1. Bạn có biết trung bình cộng các ước của số 2015 là số lẻ hay số chẵn?

2 0 1 5

2. Tìm năm số lần lượt có 1, 2, 3, 4 và 5 chữ số, biết trung bình cộng của chúng bằng

2 2 2 2 1

CHƯƠNG IV

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

$f(1) = ?$	$f(a) = 0$	$f(x) = 0$
Giá trị của f(x) tại x = 1	a là nghiệm của f(x)	x = ?

- **Biểu thức đại số. Giá trị của một biểu thức đại số**
- **Đơn thức. Đơn thức đồng dạng**
- **Đa thức. Cộng và trừ đa thức**
- **Nghiệm của đa thức một biến**

CHỦ ĐỀ 3

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ. GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cộng, trừ, nhân, chia và luỹ thừa

CÁC SỐ → CÁC PHÉP TOÁN → BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

CÁC CHỮ → BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Các công thức toán, vật lí.

$y = ax + b$

$S = v_o t + \frac{at^2}{2}$

Biến số : đại diện cho các số nào đó

- Khi thực hiện các phép toán trên các chữ, áp dụng những tính chất, quy tắc phép toán như trên các số.
- Trong các biểu thức đại số, đơn vị đo được cho vào trong dấu ngoặc ().

Tính giá trị của một biểu thức :

- *Thay giá trị của biến vào biểu thức rồi làm phép tính.*
- *Loại những giá trị của biến làm mẫu bằng 0.*

HỎI ĐÁP NHANH

1. Điền chữ, biểu thức thích hợp vào chỗ chấm (...):

a) Tích của tổng hai số a và b với hiệu của chúng biểu diễn bằng .....

b) Công thức tính diện tích hình tròn với bán kính R và số π là .....

c) Biểu thức x^2 được gọi là ..... của số x.

d) Vận tốc của một chuyển động được tính theo công thức v = ..., trong đó S là quãng đường mà vật tham gia chuyển động đã đi được trong thời gian t.

2. Nối mỗi công thức ở dòng trên với một ô ở dòng dưới cho thích hợp.

A	B	C	D
a^2 (a là cạnh một hình vuông)	$\frac{1}{2}ah$ (h là chiều cao ứng với cạnh đáy a của một hình tam giác)	$(a-b)^2$	ab (a và b là các cạnh của một hình chữ nhật)

Diện tích hình tam giác	Bình phương của hiệu hai số	Diện tích hình chữ nhật	Diện tích hình vuông
1	2	3	4

3. Đúng điền Đ, sai điền S:

	Khẳng định	Đ / S
a	Biểu thức $\frac{xy}{(1-x)^2}$ có nghĩa với mọi x khác 1.	
b	Biểu thức $\frac{1+ab^2}{(a-2)(a^2+4)}$ có nghĩa với mọi a khác ± 2.	
c	Biểu thức $\frac{x^2+y^2}{x^2-xy}$ có nghĩa với mọi x khác y.	
d	Biểu thức $\frac{1+a}{\lvert 1+a \rvert}$ có nghĩa với mọi a.	

4. Giá trị của biểu thức $\frac{1+x}{3-2x}$ tại x = 0 là:

A) -1 B) $-\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{3}$ D) 1

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho biểu thức $A = 4a^2 - 4a + 1$.

Tính giá trị của biểu thức A với

$a \in \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$.

Giải

Với $a = \frac{-1}{4}$, các bước thực hiện:

Bước 1 $A = 4.\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4.\left(-\frac{1}{4}\right) + 1$

Thay các biến số bằng các giá trị số tương ứng, đặt trong các dấu ngoặc.

Bước 2 $A = 4.\left(\frac{1}{16}\right) - 4.\left(-\frac{1}{4}\right) + 1$

Thực hiện các phép tính về luỹ thừa.

Bước 3 $A = 4.\frac{1}{16} + 4.\frac{1}{4} + 1$

Phá ngoặc, chú ý dấu trừ (–) đặt trước dấu ngoặc

Bước 4 $A = \frac{1}{4} + 1 + 1 = 2\frac{1}{4}$

Thực hiện các phép tính

Tương tự với các giá trị còn lại, ta có bảng:

a	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$4a^2$	$\frac{1}{4}$	1	0	1	4	16
$-4a$	1	2	0	-2	-4	-8
1	1	1	1	1	1	1
A	$2\frac{1}{4}$	4	1	0	1	9

Phép tính nhân, chia phân số dễ thực hiện hơn với số thập phân, vì có thể rút gọn trong khi thực hiện phép tính.

Phép tính cộng, trừ sử dụng số thập phân dễ tính hơn với phân số vì không phải quy đồng mẫu số.

Ví dụ 2

Cho $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Tính f(0), f(0,25), f(0,5), f(1), f(2).

a = 0,25 nên đổi thành phân số $a = \frac{1}{4}$.

Giải

Biết f(0) là giá trị của

$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ tại $x = 0$, ta có:

$f(0) = 4.0^3 + 3.0^2 + 2.0 + 1 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$.

Tương tự, ta có bảng:

x	$0,25 = \frac{1}{4}$	$0,5 = \frac{1}{2}$	1	2
$4x^3$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	4	32
$3x^2$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$	3	12
2x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
1	1	1	1	1
f(x)	$1\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	10	49

Ví dụ 3

Cho biểu thức

$$B = 4x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + y^3.$$

a) Tính giá trị của B,

biết $x = -2$ và $y = -1$;

b) Tính giá trị của B,

biết $|x| = 1$ và $y = 1$;

c) Tính giá trị của B,

biết $|x| = 1$ và $|y| = 2$.

Giải

a) $B = 4.(-2)^3 + 3(-2)^2.(-1) - 2(-2).(-1)^2 + (-1)^3$

$= 4.(-8) + 3.4.(-1) - 2(-2).1 + (-1)$

$= -32 - 12 + 4 - 1 = -41$.

b) Với $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1	$x = 1$	$y = 1$
Trường hợp 2	$x = -1$	$y = 1$

Lập bảng:

	Trường hợp 1		Trường hợp 2	
	$x = 1$	$y = 1$	$x = -1$	$y = 1$
$4x^3$	4		-4	
$3x^2y$	3		3	
$-2xy^2$	-2		2	
y^3		1		1
B	6		2	

c) Với $|x| = 1$ và $|y| = 2 \Rightarrow x = \pm 1$ và $y = \pm 2$. Xét bốn trường hợp:

Trường hợp 1	$x = 1$	$y = 2$
Trường hợp 2	$x = 1$	$y = -2$
Trường hợp 3	$x = -1$	$y = 2$
Trường hợp 4	$x = -1$	$y = -2$

Lập bảng:

	Trường hợp 1		Trường hợp 2		Trường hợp 3		Trường hợp 4	
	$x = 1$	$y = 2$	$x = 1$	$y = -2$	$x = -1$	$y = 2$	$x = -1$	$y = -2$
$4x^3$	4		4		-4		-4	
$3x^2y$	6		-6		6		-6	
$-2xy^2$	-8		-8		8		8	
y^3		8		-8		8		-8
B	10		-18		18		-10	

Ví dụ 4

Tính giá trị của biểu thức $C = 4 - (x - 1)^2 - |x - 1|$, biết $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Giải

$x = -1$ thì $C = 4 - [(-1) - 1]^2 - |(-1) - 1| = 4 - (-2)^2 - |-2| = 4 - 4 - 2 = -2$.

$x = 0$ thì $C = 4 - (0 - 1)^2 - |0 - 1| = 4 - (-1)^2 - |-1| = 4 - 1 - 1 = 2$.

$x = 1$ thì $C = 4 - (1 - 1)^2 - |1 - 1| = 4 - 0^2 - |0| = 4 - 0 - 0 = 4$.

$x = 2$ thì $C = 4 - (2 - 1)^2 - |2 - 1| = 4 - 1^2 - |1| = 4 - 1 - 1 = 2$.

Ví dụ 5*

Viết biểu thức đại số diễn đạt:

a) Số chính phương đứng liền trước số chính phương a;

b) Tích của hiệu hai số với tổng bình phương hai số đó.

c) Diện tích S của một hình tròn, biết chu vi của nó là p.

Giải

a) Đặt hai số chính phương liên tiếp là a, b và a > b thì:

Nếu $a = n^2 \Rightarrow b = (n-1)^2$.

Nếu $a = \left(\sqrt{a}\right)^2 \Rightarrow b = \left(\sqrt{a}-1\right)^2$.

Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên, dãy số chính phương 0, 1, 4, 9, 16, 25,...

Số 4 là số chính phương liền trước của số 9.

Số 16 là số chính phương liền sau của số 9.

b) Đặt hai số đã cho là a và b.

Tích của hiệu hai số với tổng bình phương hai số đó: $(a-b)(a^2+b^2)$.

- *Tổng bình phương hai số khác với bình phương của tổng hai số.*
- *Tổng bình phương hai số, có nghĩa là có bình phương của từng số rồi lập tổng.*
- *Bình phương của tổng hai số, có nghĩa là có tổng hai số rồi mới lấy tổng đó bình phương.*

c) Chu vi của hình tròn $p = 2R\pi \Rightarrow R = \dfrac{p}{2\pi}$

$\Rightarrow$ Diện tích $S = \pi R^2 = \pi\left(\dfrac{p}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{p^2}{4\pi}$.

Ví dụ 6*

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A = 3(x+2)^2 + (1-y)^2 + 2014$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của

$B = \dfrac{-589}{(x-1)^2 + 2015}$.

$3(x+2)^2 \geq 0$ (bình phương của một số là số không âm).

$3(x+2)^2 = 0$ khi và chỉ khi $x = -2$.

Giải

a) Ta có $3(x+2)^2 \geq 0$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -2$.

Tương tự có:

$(1-y)^2 \geq 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 1$.

Vậy $A = 3(x+2)^2 + (1-y)^2 + 2014 \geq 2014$,

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -2$ và $y = 1$.

Suy ra min A = 2014 tại $x = -2$, $y = 1$.

• *Nếu $f(x) \geq m$ (hằng số)*
$f(x) = m$ tại $x = x_0$
thì min $f(x) = m$ tại $x = x_0$
• *Nếu $f(x) \leq M$ (hằng số)*
$f(x) = M$ tại $x = x_0$
thì max $f(x) = M$ tại $x = x_0$

Bình phương của một số là số không âm

Giải

b) $B = \dfrac{-589}{(x-1)^2 + 2015}$

Ta có $(x-1)^2 + 2015 \geq 2015 > 0$,
dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.
Lại có số (-589) là *hằng số âm*.

Vậy $B = \dfrac{-589}{(x-1)^2 + 2015} \geq \dfrac{-589}{2015} = -\dfrac{19}{65}$,
dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra min$B = -\dfrac{19}{65}$ tại $x = 1$.

Cách giải khác

$B = \dfrac{-589}{(x-1)^2 + 2015}$

Ta có $(x-1)^2 \geq 0$ và $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Suy ra: $(x-1)^2 + 2015 \geq 2015 > 0$

$\Rightarrow B = \dfrac{-589}{(x-1)^2 + 2015} < 0$.

Vậy min B $\Leftrightarrow$ max C với $C = |B|$

Có $C = \dfrac{589}{(x-1)^2 + 2015} \leq \dfrac{589}{2015} = \dfrac{19}{65}$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$).

Suy ra max $C = \dfrac{19}{65}$ tại $x = 1$,

hay min $B = -\dfrac{19}{65}$ tại $x = 1$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

3.1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$, biết $a \in \left\{-2; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; 1\right\}$;

b) $B = 9a^2 - 6a + 1$, biết $a \in \left\{-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{4}; 0; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right\}$.

c) $C = 2x^2 - 3xy + 4y^2$, biết:

Trường hợp 1	$x = 2$ và $y = 3$
Trường hợp 2	$\|x\| = 1$ và $y = 2$
Trường hợp 3	$\|x\| = 2$ và $\|y\| = 3$

3.2. Cho $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$.

Tính f(0), f(1), f(2), f(3).

3.3. Tính giá trị của biểu thức

$P = 4 - (1 - x)^2 + |x - 2|$,

biết $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

3.4. Tính

a) $A = \dfrac{3a-2b}{2a-3b}$, biết $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{6}$;

b) $B = \dfrac{3a-b}{2a+13} - \dfrac{3b-a}{2b-13}$,

với $a - b = 13$ và $a \neq -6{,}5$, $b \neq 6{,}5$.

3.5. Tìm giá trị của biến làm các biểu thức sau không có nghĩa:

a) $\dfrac{x^2+2xy+3y^2}{(1-x)^3}$; b) $\dfrac{1+xy^3}{(1-x^2)(y+1)}$;

c) $\dfrac{(x^2+y^2)(x^2+2y)}{(1-2x)^2-25}$; d) $\dfrac{x^2+y}{x^2-xy}$.

3.6. So sánh giá trị của các biểu thức sau, biết $a = -5$ và $b = -3$:

$A = a^2 - ab + b^2$;

$B = (a + b)^2 - 3ab$;

$C = (a^3 + b^3) : (a + b)$.

3.7. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $x^2 + 2015$; b) $(1 - 2x)^2 - 12$;

c) $(x + 2)^2 + |x + 2| + 22$;

d) $(x - 1)^2 + \sqrt{2015}$.

3.8. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $2015 - x^2$; b) $\dfrac{1}{(1-2x)^2+25}$;

c) $\sqrt{2015} - (x - 1)^2$; d) $\dfrac{2015}{|x+2015|+19}$.

NÂNG CAO

3.9. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$, biết $|a| = 2$ và $b = -3$;

b) $B = \dfrac{3ab}{a^2+b^2} - \dfrac{a-b}{a+b}$, biết $|a| = 1$ và $|b| = 2$;

c) $C = \dfrac{1+ab}{2ab-3}$, với $|ab - 1| = 3$;

d) $D = x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3$, biết $x - y = 1$ và $3x = 2y$.

3.10. Tính giá trị các biểu thức sau một cách hợp lí:

a) $A = \dfrac{2a-3b}{3a-2b}$ biết $6a = 5b$;

b) $B = \dfrac{2a+b}{a+124} - \dfrac{a+2b}{b+124}$ với $a + b = 124$ và $a, b \neq -124$;

c) $C = \dfrac{\sqrt{1^3+2^3+3^3+....+10^3}\,(x^2+y^2)(x^3+y^3)(x^4+y^4)}{1^2+2^2+3^2+....+10^2}$, với $x = -0{,}7$ và $y = \dfrac{7}{10}$.

3.11. Tìm số nguyên x, sao cho:

a) Biểu thức $A = \frac{13}{17-x}$ đạt giá trị lớn nhất ;

b) Biểu thức $B = \frac{3}{x-7}$ đạt giá trị nhỏ nhất ;

c) Biểu thức $C = \frac{40-3x}{13-x}$ đạt giá trị lớn nhất ;

d) Biểu thức $D = \frac{20-x}{x-12}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

EM CÓ BIẾT ?

Có những cách nào để tính giá trị của biểu thức $P = \frac{3a-b}{a-3b}$, biết tỉ số $\frac{a}{b} = -\frac{3}{4}$?

NHIỀU CÁCH GIẢI MỘT BÀI TOÁN

1. Bạn CHICKEN hỏi bạn EGG

LỜI GIẢI CỦA BẠN EGG

Bạn EGG đã giải thích với bạn CHICKEN như sau:

Trước hết từ tỉ số $\frac{a}{b} = -\frac{3}{4}$, ta có a và $b \neq 0$, $a = -\frac{3}{4}b$ và $a \neq 3b$ (để biểu thức P có nghĩa).

Cách 1. Từ $\frac{a}{b} = -\frac{3}{4}$, ta suy ra $a = -\frac{3}{4}b$ (hay $b = -\frac{4}{3}a$).

Với $a = -\frac{3}{4}b$, thì $P = \frac{3.\left(-\frac{3}{4}b\right)-b}{\left(-\frac{3}{4}b\right)-3b} = \frac{-\frac{9}{4}b-b}{-\frac{3}{4}b-3b} = \frac{-\frac{13}{4}b}{-\frac{15}{4}b} = \frac{13}{15}$ (do $b \neq 0$).

(Hoặc với $b = -\frac{4}{3}a$, thì $P = \frac{3a-\left(-\frac{4}{3}a\right)}{a-3\left(-\frac{4}{3}a\right)} = \frac{3a+\frac{4}{3}a}{a+4a} = \frac{\frac{13}{3}a}{5a} = \frac{13}{15}$ (do $a \neq 0$))

Cách 2. Làm xuất hiện tỉ số $\frac{a}{b}$, vì đã biết $\frac{a}{b} = -\frac{3}{4}$.

$$P = \frac{\frac{3a-b}{b}}{\frac{a-3b}{b}} = \frac{3.\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}-3} = \frac{3.\left(-\frac{3}{4}\right)-1}{\left(-\frac{3}{4}\right)-3} = \frac{\frac{-13}{4}}{\frac{-15}{4}} = \frac{13}{15}$$ (chia được cho b vì $b \neq 0$).

Cách 3. Từ $\frac{a}{b} = -\frac{3}{4}$ viết thành $\frac{a}{-3} = \frac{b}{4}$ và sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

Có $\frac{a}{-3} = \frac{b}{4} = \frac{3a-b}{3.(-3)-4} = \frac{3a-b}{-13}$ và $\frac{a}{-3} = \frac{b}{4} = \frac{a-3b}{-3-3.4} = \frac{a-3b}{-15}$.

Suy ra $\frac{3a-b}{-13} = \frac{a-3b}{-15}$ hay $\frac{3a-b}{a-3b} = \frac{-13}{-15} = \frac{13}{15}$.

2. Bạn EGG đố bạn CHICKEN, tính được giá trị của biểu thức P bằng nhiều cách.

Tính giá trị của

$$P = \frac{2a+b}{a+403} + \frac{2b+a}{b+403},$$

biết $a + b = 403$ và $a, b \neq -403$.

LỜI GIẢI CỦA BẠN CHICKEN

Bạn CHICKEN đã giải thích với bạn EGG như sau:

Cách 1. Từ $a + b = 403$, ta có $a = 403 - b$, $b = 403 - a$.

Với $a = 403 - b$ thì $P = \frac{2(403-b)+b}{(403-b)+403} + \frac{2b+(403-b)}{b+403} = \frac{806-b}{806-b} + \frac{b+403}{b+403} = 2$

do $a, b \neq -403$ và $b \neq 806$ (nếu $b = 806$ thì $a = -403$).

Với $b = 403 - a$ thì $P = \frac{2a+(403-a)}{a+403} + \frac{2(403-a)+a}{(403-a)+403} = \frac{a+403}{a+403} + \frac{806-a}{806-a} = 2$

do $a, b \neq -403$ và $a \neq 806$ (nếu $a = 806$ thì $b = -403$).

Cách 2. Làm xuất hiện tổng $a + b$.

$P = \frac{a+(a+b)}{a+403} + \frac{b+(b+a)}{b+403} = \frac{a+403}{a+403} + \frac{b+403}{b+403} = 2$ do $a, b \neq -403$.

ĐỐ VUI

LẠ KHÔNG : Viết 7 số và một dấu cộng vào 8 tấm bìa như hình bên.

Từ 8 tấm bìa đó bạn BEE xếp được một phép tính gồm 2 số cho tổng bằng 2014. Các bạn có xếp được không ?

0	1	1	5
6	6	9	+

CHỦ ĐỀ 4 ĐƠN THỨC, ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Số thực khác 0 là đơn thức bậc 0

ĐƠN THỨC

chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến

$$5\ ;\ x\ ;\ 5y^2;\ \frac{13}{4}x^2y^3z$$

Hệ số — Biến — Bậc 6 (= 2 + 3 + 1)

Nhân đơn thức

Phép nhân trên các chữ có tính chất giao hoán và kết hợp

- Nhân các hệ số với nhau,
- Nhân các phần biến với nhau.

$$5x^2z.\frac{4}{3}x^3y^6 = \frac{20}{3}x^5y^6$$

Đơn thức đồng dạng

Mọi số đều là các đơn thức đồng dạng.

- Hệ số khác 0,
- Có cùng phần biến.

$$2x^2y^3z^2\ ;\ x^2y^3z^2\ ;\ \frac{123}{4}x^2y^3z^2$$

Phép tính

1. Cộng (hoặc trừ)

- Cộng (trừ) các hệ số với nhau.
- Giữ nguyên phần biến.

$$2x^2y^3z^2 + x^2y^3z^2 = 3x^2y^3z^2$$

2. Lũy thừa

Nhân hai hoặc nhiều đơn thức đồng dạng.

$$(2x^2y^3z^2)^2 = 8x^4y^6z^4$$

HỎI ĐÁP NHANH

1. Khoanh vào chữ cái trước biểu thức là đơn thức:

A) $(12 - x)x^3$; B) $-\frac{1}{3x}$;

C) $\sqrt{3}x^2$; D) $0,124x^{-3}$;

2. Nối mỗi đơn thức ở dòng trên với một đơn thức đồng dạng với nó ở dòng dưới:

A	B	C	D
$-\frac{2}{3}x^6y^5$	$-\frac{2}{3}x^3y^2$	$-\frac{2}{3}x^5y^4z^2$	$-\frac{2}{3}x^2y^2.(x^3yz)(yz)$
$2014.x^2(xy^2)$	$2014.(xy)^3(x^3y^2)$	$2014.x^5y^4z^2$	$2014x(x^2y^2z)^2$
1	2	3	4

3. Đúng điền Đ, sai điền S :

	Khẳng định	Đ / S
a	Bậc của đơn thức $15xy^5z^{15}$ là 21.	
b	Hệ số của biểu thức $xyz.(-2)^{-2}.(xyz)^2$ là 4.	
c	Bậc của đơn thức 2014 là 2014.	
d	Để nhân các đơn thức người ta chỉ cần nhân các phần biến với nhau.	

4. Điền số/biểu thức thích hợp vào ô trống của bảng dưới đây:

	Đơn thức chưa thu gọn	Rút gọn	Bậc của biến x	Bậc của đơn thức	Hệ số của đơn thức
a	$3^2xyz(3xy)$				
b	$4x^2y^2(-0,5x^2yz^2)^3$				
c	$-\frac{2}{3}a^2x.(-3y)^2.\frac{2}{5}$				

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho các biểu thức sau:

$2xy^2 - 3xy^2 + 4xy^2$ (1)

$\left(\frac{1}{3}xy\right)\left(\frac{1}{2}x^2z\right)y$ (2)

$0,1xy^2 - 0,01(xy)y$ (3)

$\left(\frac{1}{2}x^2y\right)\left(\frac{1}{5}xz\right)y$ (4)

a) Trong các biểu thức trên, biểu thức nào là đơn thức ?

b) Rút gọn các biểu thức trên để được các đơn thức thu gọn. Kí hiệu các đơn thức thu gọn từ các biểu thức trên lần lượt là A, B, C và D. Tìm bậc của các đơn thức;

c) Chỉ ra các đơn thức đồng dạng với nhau;

d) Tìm giá trị của các đơn thức A, B, C và D tại $x = -6$, $y = -1$ và $z = -1$.

ĐƠN THỨC chỉ gồm:
hoặc một số, hoặc một biến
hoặc một tích giữa các số và các biến

Giải

a) Biểu thức (2) và (4) là các đơn thức.

b) Rút gọn các biểu thức trên ta được các đơn thức thu gọn như sau:

Biểu thức (1)

$\Rightarrow A = 3xy^2$ và là đơn thức bậc 3.

Biểu thức (2)

$\Rightarrow B = \frac{1}{6}x^3y^2z$ và là đơn thức bậc 6.

Biểu thức (3)

$\Rightarrow C = 0,09xy^2$ và là đơn thức bậc 3.

Biểu thức (4)

$\Rightarrow D = \frac{1}{10}x^3y^2z$ và là đơn thức bậc 6.

c) Các đơn thức A và C là các đơn thức đồng dạng với nhau, các đơn thức B và D cũng là các đơn thức đồng dạng với nhau.

d)

	Đơn thức A	Đơn thức B	Đơn thức C	Đơn thức D
$x = -6$				
	-18		$-0,54$	
$y = -1$		36		21,6
$z = -1$				

Ví dụ 2

Nhìn đoàn tàu cổ gồm 7 toa mang mã số lần lượt là:

$2x^2y$, $3xyz$, $4x^2y$, $5xyz^2$, $6x^2y$, $7xyz$, $8x^2yz$,

bạn BEE nói là có thể dồn các toa để đoàn tàu chỉ còn 4 toa thôi, mà vẫn mang đầy đủ phần biến của các mã số ban đầu. Bạn có biết vì sao không ?

$2x^2y$ $3xyz$ $4x^2y$ $5xyz^2$ $6x^2y$ $7xyz$ $8x^2yz$

Giải

Rất đơn giản, chỉ việc ghép các toa mang mã số là các đơn thức đồng dạng lại với nhau:

$12x^2y$ $10xyz$ $5xyz^2$ $8x^2yz$

Ví dụ 3

Tính giá trị của các đơn thức sau:

a) $A = 0{,}005x^4y^5$, biết $x = -5$ và $y = 2$;

b) $B = 0{,}0625x^5y^3$, biết $x = -4$ và $y = 0{,}25$.

Tính trực tiếp A và B là điều không dễ dàng nếu như không sử dụng máy tính.

Giải

a) Có thể thấy $(-5).\ 2 = -10$ và một luỹ thừa của 10 dễ nhìn ra kết quả.

Vậy, biến đổi đơn thức A như sau:

$A = 0{,}005x^4y^5 = 0{,}005.(xy)^4.y$

$= 0{,}005.[(-5).2]^4.2 = 0{,}005.10000.2 = 100.$

b) Tương tự

$B = 0{,}0625x^5y^3 = (0{,}25)^2.x^2.(xy)^3$

$= [0{,}25.(-4)]^2.[(-4).0{,}25]^3 = 1.(-1) = -1.$

Ví dụ 4*

Một đơn thức thu gọn có hệ số là 5 và cũng là đơn thức có bậc là 5. Biết đơn thức có đúng 3 biến số là x, y và z. Hỏi có bao nhiêu đơn thức như vậy ?

Giải

Ta có $5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$ và đơn thức đã cho là đơn thức $A = 5x^{\alpha}y^{\beta}z^{\varphi}$.

Các giá trị α, β và φ là các hoán vị vòng quanh của các số (1; 1; 3) và (1; 2; 2).

Vậy ta có 6 đơn thức:

Ứng với bộ số (1; 1; 3) → $5xyz^3$, $5xy^3z$, $5x^3yz$,

Ứng với bộ số (1; 2;2) → $5xy^2z^2$, $5x^2yz^2$, $5x^2y^2z$.

Ví dụ 5*

Trong một cuộc vui tại liên hoan thiếu nhi thế giới, 5 bạn ở 5 châu lục khác nhau mỗi người sở hữu một mật mã là đơn thức (đã thu gọn) đồng dạng với nhau. Họ trao đổi với nhau về đơn thức của mình như sau:

Bạn châu Á nói - Đơn thức của mình chỉ chứa 2 biến số là x và y.

Bạn châu Âu nói - Bậc của đơn thức của mình là bậc 5.

Bạn châu Mĩ nói - Số mũ của biến số y trong đơn thức của mình là số nguyên tố nhỏ nhất.

Bạn châu Phi nói - Các hệ số của 5 đơn thức theo thứ tự là các số chính phương xếp từ nhỏ đến lớn.

Bạn châu Đại Dương nói - Đơn thức của mình có hệ số lớn nhất và là số 25.

Bạn BEE nghe và chẳng hiểu gì cả. Các bạn có giúp BEE biết mật mã của 5 bạn không ?

Giải

Tất cả 5 đơn thức đều là các đơn thức (đã thu gọn) đồng dạng với nhau, mà theo bạn châu Á "Đơn thức của mình chỉ chứa 2 biến số là x và y".

Vậy 5 đơn thức đã cho có dạng: $nx^{\alpha}y^{\beta}$,

$n \neq 0$; α và $\beta \in \mathbf{N}^*$.

Bạn châu Âu nói - Bậc của đơn thức của mình là bậc 5: Có $\alpha + \beta = 5$.

Bạn châu Mĩ nói - Số mũ của biến số y trong đơn thức của mình là số nguyên tố nhỏ nhất:

Số nguyên tố nhỏ nhất là số 2

$\Rightarrow \beta = 2$ và $\alpha = 3$.

Bạn châu Đại Dương nói - Đơn thức của mình có hệ số lớn nhất và là số 25:

Đơn thức bạn châu Đại Dương sở hữu $25x^3y^2$.

Bạn châu Phi nói - Các hệ số của 5 đơn thức theo thứ tự là các số chính phương xếp từ nhỏ đến lớn.

Ta đã có số chính phương lớn nhất là 25.

Các bạn lần lượt sở hữu mật mã như sau:

$$x^3y^2, 4x^3y^2, 9x^3y^2, 16x^3y^2, 25x^3y^2.$$

Ví dụ 6*

Bạn BEE trèo từng bậc cầu thang của nhà. Khi tới các bậc thứ 6, thứ 9 và thứ 12 bạn viết ở mỗi bậc lần lượt các đơn thức $2xy^2z^3$, $3x^2y^3z^4$, $5x^3y^4z^5$. Biết đơn thức viết tiếp có hệ số là 7 và bạn viết hai lần nữa thì tới bậc cầu thang cuối cùng.

Các bạn có biết cầu thang đó có bao nhiêu bậc và bạn BEE viết đơn thức nào ở bậc cầu thang cuối cùng?

Giải

Từ đề bài ta lập được số liệu trong bảng sau (phần tô sẫm màu).

Nhận xét bậc của các đơn thức ứng với số bậc của cầu thang và ta có quy luật như bảng sau:

	Bậc cầu thang	Đơn thức viết			
		Hệ số	Số mũ biến x	Số mũ biến y	Số mũ biến z
Bậc thứ 6 viết đơn thức $2xy^2z^3$	6	2	1	2	3
Bậc thứ 9 viết đơn thức $3x^2y^3z^4$	9	3	2	3	4
Bậc thứ 12 viết đơn thức $5x^3y^4z^5$	12	5	3	4	5
Bậc viết tiếp theo lần 1	15	7	4	5	6
Bậc viết tiếp theo lần 2	18	11	5	6	7

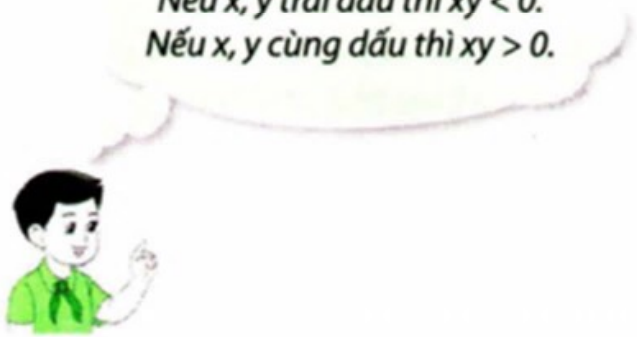
Vậy, cầu thang đó có 18 bậc. Hai đơn thức bạn BEE viết tiếp lần lượt là $7x^4y^5z^6$; $11x^5y^6z^7$.

Ví dụ 7*

a) Xác định dấu của a, biết rằng, $x = -2abc^3$ trái dấu với $y = 3a^2b^3c^5$;

b) Xác định dấu của a, biết rằng hai đơn thức $x = -1\frac{1}{8}a^3b$ và $y = \frac{4}{15}a^2b^3$ cùng dấu.

c) Hai đơn thức $x = -5a^{2n}b$ và $y = 3a^{4n}b^5$ có thể có cùng giá trị âm, được không ?



Giải

Ta có:

a) Vì x và y trái dấu, nên $xy < 0$,

Có $xy = (-2abc^3).(3a^2b^3c^5) = -6a^3b^4c^8 < 0$.

Lại có: $b^4c^8 > 0$ (do b và c khác 0)

nên $-6a^3 < 0$ hay $a^3 > 0$ tức là $a > 0$.

b) Vì x và y cùng dấu, nên $xy > 0$ và a, b khác 0.

Có: $xy = (-1\frac{1}{8}a^3b).(\frac{4}{15}a^2b^3) = -0,3.a^5b^4 > 0$.

Lại có: $b^4 > 0$ (do b khác 0) nên $-0,3.a^5 > 0$ hay $a^5 < 0$ tức là $a < 0$.

c) Xét tích của hai đơn thức

$xy = (-5a^{2n}b).(3a^{4n}b^5) = -15a^{6n}b^6$

$= -15.(a^nb)^6$.

Có $(a^nb)^6 \geq 0$ nên $xy = -15.(a^nb)^6 \leq 0$.

Vì vậy x và y không thể cùng âm được.

Ví dụ 8*

a) Cho $a^{2k} = 5$. Tính $6a^{6k} - 4$.

b) Tìm x, y và z nếu:

$$(5x^2y^4)^3 + (-7y^3z^5)^2 = 0.$$

Giải

a) Có: $6a^{6k} - 4 = 6(a^{2k})^3 - 4 = 6.5^3 - 4$

$= 750 - 4 = 746.$

b) Ta có: $5x^2y^4 \geq 0 \Rightarrow (5x^2y^4)^3 \geq 0$;

$(-7y^3z^5)^2 \geq 0.$

Do đó từ giả thiết suy ra:

$(5x^2y^4)^3 = 0$ và $(-7y^3z^5)^2 = 0$.

Suy ra: $y = 0$ và mọi x, z

hoặc $x = z = 0$ và mọi y.

BÀI TẬP A B

CƠ BẢN

4.1. Cho các biểu thức sau:

$a^2b - 2a^2b + 3a(ab)$ (1)

$\left(\frac{1}{2}ab\right).\left(\frac{1}{5}ac\right)bc$ (2)

$12a(ab) - 123(ab)a$ (3)

$(0,01ab).(0,1abc^2)$ (4)

a) Trong các biểu thức trên, biểu thức nào là đơn thức?

b) Rút gọn các biểu thức từ (1) đến (4) để được các đơn thức thu gọn. Tìm bậc các đơn thức đó;

c) Kí hiệu lần lượt các đơn thức thu gọn đó là A, B, C và D. Chỉ ra các đơn thức đồng dạng với nhau;

d) Tìm giá trị các đơn thức A, B, C, D tại $a = -1$; $b = 2$ và $c = 4$.

4.2. Cho biểu thức $36ab^2c^4$.

Bạn CHICKEN đố bạn EEG phân tích biểu thức trên thành một tích của hai đơn thức, trong đó có một đơn thức là:

a) $18abc$;

b) $9bc^2$;

c) $-6ab^2c^2$.

Các bạn có thể giúp bạn EGG không?

4.3. Rút gọn các biểu thức sau, rồi tính giá trị của biểu thức thu gọn tại $x = -1$ và $y = -1$:

a) $xy - 9xy + 5xy + xy$;

b) $x^{2014}y^4 + 2x^{14}y^4x^{2000} - 4x^{1024}y^4x^{990}$;

c) $x^ny^{2n} - 2x^ny^n(y^n) - 6(xy)^ny^n$ với $n \in \mathbf{N}^*$.

NÂNG CAO

4.4. Cho ba đơn thức sau:

$A = 2xy^2$; $B = -2x^2a^2z^4$; $C = 2z^2x$.

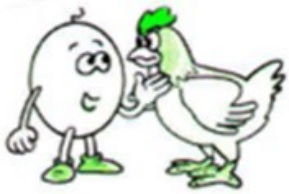
a) Cả ba đơn thức trên có thể cùng dương được không ?

b) Trong ba đơn thức trên có tồn tại chỉ có hai đơn thức cùng có giá trị âm được không?

4.5. Các bạn đố nhau:

a) Biết $a^{2k} = 5$. Bạn CHICKEN đố bạn EGG tính được $P = 2a^{6k} - 4$;

b) Bạn EGG đố lại bạn CHICKEN tính $Q = 2a^{6k} - 4$, nếu $a^{3k} = -5$.



4.6. Tìm x, y và z, biết:

$(2x^2z^2)^3 + (-3xy^3)^2 = 0$.

4.7. Cho chín số: $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$ khác 0. Hỏi tất cả sáu số sau:

$x_1 = a_1b_2c_3$; $x_2 = a_2b_3c_1$; $x_3 = a_3b_1c_2$ và

$y_1 = -a_1b_3c_2$; $y_2 = -a_2b_1c_3$; $y_3 = -a_3b_2c_1$

có thể cùng âm hoặc cùng dương được không ?

EM CÓ BIẾT ?

1. TỪ MỘT BÀI TOÁN

Bạn EGG trao đổi với bạn CHICKEN bài toán sau:

Nếu các đơn thức ab, bc và ca đều khác 0 thì cả ba đơn thức đó không thể cùng âm được.

Bạn EGG đã đưa ra lời giải như sau:

Giả sử cả ba đơn thức đó cùng âm thì tích T của cả ba đơn thức đó là một số âm (vì 3 là một số lẻ), nhưng $T = (ab)(bc)(ca) = (abc)^2 > 0$ (do cả ba đơn thức đó khác 0).

Suy ra điều giả sử là sai, hay cả ba đơn thức đó không thể cùng âm.

Bạn CHICKEN khẳng định bạn EGG làm đúng.

Bạn EGG lại đưa ra bài toán: *Nếu các đơn thức – ab, – bc và – ca đều khác 0 thì cả ba đơn thức đó không thể cùng dương được.*

Giả sử cả ba đơn thức đó cùng dương thì tích T của cả ba đơn thức đó là một số dương, nhưng $T = (-ab)(-bc)(-ca) = -(abc)^2 < 0$ (do cả ba đơn thức đó khác 0).

Suy ra điều giả sử là sai, hay cả ba đơn thức đó không thể cùng dương.

Bạn CHICKEN lại khẳng định tiếp là bạn EGG làm đúng.

Phần khởi, bạn EGG đã kết luận:

Ba đơn thức ab, bc và ca không những không thể cùng âm được, mà cũng chẳng có đơn thức nào là số âm được.

Ba đơn thức – ab, – bc và – ca không những không thể cùng dương được, mà cũng chẳng có đơn thức nào là số dương cả.

Bạn CHICKEN cười và nói bạn EGG kết luận sai, các bạn có biết vì sao không ?

GIẢI THÍCH

Chỗ sai của bạn EGG: Trong ba đơn thức ab, bc và ca khác 0, thì có thể tồn tại hai đơn thức âm và một đơn thức dương, khi đó tích T vẫn là một số dương !

VÍ DỤ	$a = 1$	$b = 2$	$c = -3$
$a = 1$		$ab = 2$	
$b = 2$			$bc = -6$
$c = -3$	$ca = -3$		

Chỗ sai của bạn EGG: Trong ba đơn thức –ab, –bc và –ca khác 0, thì có thể tồn tại hai đơn thức dương và một đơn thức âm, khi đó tích T vẫn là một số âm !

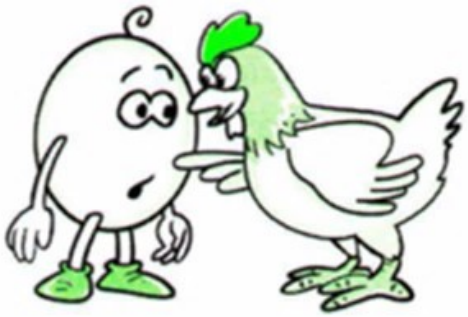
VÍ DỤ	$a = 1$	$b = -2$	$c = -3$
$a = 1$		$-ab = 2$	
$b = -2$			$-bc = -6$
$c = -3$	$-ca = 3$		

2. ĐẾN BÀI TOÁN KHÁC

Từ bài toán trên, bạn EGG và bạn CHICKEN đã đưa ra một số kết luận như sau về các đơn thức (khác 0):

• Cho bốn đơn thức ad, – ac, – bc và – bd. Ta nhận thấy tích của bốn đơn thức trên $T = -(abcd)^2 < 0$ nên cả bốn đơn thức đó không thể cùng dương được, cũng như không thể cùng âm được.

• Với năm đơn thức – ad, – ac, – bc, – bd và a^2b^2. Ta nhận thấy tích của năm đơn thức trên $T = (a^2b^2cd)^2 > 0$ nên cả năm đơn thức không thể cùng âm được.



3. KẾT LUẬN

Hai bạn EGG và CHICKEN đưa ra lời kết luận:

Nếu tích của tất cả các đơn thức là số âm, thì tất cả các đơn thức đó không thể cùng dương được!

Nếu tích một số lẻ các đơn thức là số dương, thì tất cả các đơn thức đó không thể cùng âm được!

ĐỐ VUI

Hai bạn EGG và CHICKEN chưa giải được bài toán tìm trong bốn tập hợp sau thì tập hợp nào có tất cả các phần tử đều là các đơn thức cùng dương.

Các bạn có thể giúp hai bạn EGG và CHICKEN được không ?

A = {– abx, aby, bcx, bcy, cax, cay, xy}.

C = {– abx, – aby, – bcx, – bcy, – cax, cay, xy}.

B = {– abx, – aby, – bcx, bcy, cax, cay, xy}.

D = {– abx, – aby, – bcx, – bcy, – cax, – cay, – xy}.

CHỦ ĐỀ 5 ĐA THỨC. CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

ĐƠN THỨC

ĐA THỨC

ĐA THỨC THU GỌN không còn hai hạng tử nào đồng dạng.

Số 0 là đa thức không (không có bậc)

Bậc (bậc của hạng tử có bậc cao nhất)

Đa thức một biến (tổng các đơn thức cùng một biến)
$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (với $a_n \neq 0$)

$f(x_0) = a_nx_0^n + \ldots + a_1x_0 + a_0$ là giá trị của đa thức f(x) tại $x = x_0$.

Nhị thức bậc nhất $ax + b \quad (a \neq 0)$

Tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Cộng, trừ đa thức (cộng, trừ các đơn thức đồng dạng)

Hai đa thức một biến bằng nhau khi và chỉ khi các hệ số của các hạng tử có bậc tương ứng bằng nhau

Cộng, trừ đa thức một biến

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (với $a_n \neq 0$)

$g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$ (với $b_n \neq 0$)

$f(x) + g(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$

Cộng, trừ các hệ số tương ứng

HỎI ĐÁP NHANH

1. Biểu thức nào sau đây là đa thức?

A) $x^2 + \frac{1}{x^2}$; B) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{5}$; C) $\frac{1}{x-2}$; D) $(124 - x) . \frac{1}{x}$.

2. Đúng điền Đ, sai điền S

	Khẳng định	Đ/S
a	Bậc của đa thức là tổng bậc của tất cả các hạng tử trong dạng thu gọn của đa thức đó.	
b	Số 0 là đa thức có bậc là 0.	
c	Trong đa thức một biến, các hệ số của các hạng tử gọi là hệ số tự do.	
d	Số mũ lớn nhất của các biến trong đa thức một biến (không là đa thức không) là bậc của đa thức đó.	

3. Điền số/chữ thích hợp vào chỗ chấm (...):

Cho các đa thức

$A = a - 2ab + 3abc + 4abcd$,

$B = 2a - 4ab - 3abc$

$C = -3a + 6ab - 4abcd$

	Đa thức	Bậc của đa thức
a	$P = A + B - C$	...
b	$Q = A - B + C$	...
c	$R = A + B + C$	...

4. Nối mỗi đa thức với bậc của nó:

Đa thức	Bậc của đa thức
1) $2x^2y^3 - 2xy^2 + 6(x^2y^2)y + 6xy^2$	a) 2
2) $0,2xy^3 - 0,02x^3y^4 + 0,002xy^3 + 0,0002x^3y^4$	b) 3
3) $0,1xy - 0,01xy^2 + 0,01xy + 10^{-2}xy^2$	c) 5
4) $x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - x^2 - 2x$	d) 7

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho đa thức

$f(x) = x + 7x^2 - 6x^3 + 3x^4 + 2x^2 + 6x - 2x^4 + 1.$

a) Thu gọn, rồi sắp xếp các số hạng của đa thức theo luỹ thừa giảm dần của biến x.

b) Xác định bậc của đa thức, hệ số tự do, hệ số cao nhất.

c) Tính f(– 1), f(0), f(1) và f(– a).

Giải

a) Có đa thức $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 7x + 1$.

b) Đa thức $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 7x + 1$ có bậc 4.

Hệ số tự do là 1 và hệ số cao nhất là 1.

c) Có:

$f(-1) = (-1)^4 - 6.(-1)^3 + 9.(-1)^2 + 7.(-1) + 1$

$= 1 + 6 + 9 - 7 + 1 = 10.$

$f(0) = 0^4 - 6.0^3 + 9.0^2 + 7.0 + 1 = 0 + 0 + 0 - 0 + 1 = 1.$

$f(1) = 1^4 - 6.1^3 + 9.1^2 + 7.1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 7 + 1 = 12.$

$f(-a) = (-a)^4 - 6(-a)^3 + 9(-a)^2 + 7(-a) + 1$

$= a^4 + 6a^3 + 9a^2 - 7a + 1.$

Ví dụ 2

Cho các đa thức:

$A = 5x^2 - 3xy + 7y^2,$

$B = 6x^2 - 8xy + 9y^2.$

a) Tính P = A + B và Q = A – B.

b) Tính giá trị của đa thức M = P – Q tại x = – 1 và y = – 2.

c) Cho đa thức

$N = 3x^2 - 16xy + 14y^2.$

Chứng minh đa thức T = M – N luôn nhận giá trị không âm với mọi giá trị của x và y.

Bạn BEE chưa biết cách tính. Các bạn giúp bạn BEE nhé.

Giải

a) Có:

$P = A + B = (5x^2 - 3xy + 7y^2) + (6x^2 - 8xy + 9y^2)$

$= 5x^2 - 3xy + 7y^2 + 6x^2 - 8xy + 9y^2$

$= 11x^2 - 11xy + 16y^2.$

$Q = A - B = (5x^2 - 3xy + 7y^2) - (6x^2 - 8xy + 9y^2)$

$= 5x^2 - 3xy + 7y^2 - 6x^2 + 8xy - 9y^2$

$= -x^2 + 5xy - 2y^2.$

b) Ta có

$M = P - Q = (11x^2 - 11xy + 16y^2) - (-x^2 + 5xy - 2y^2)$

$= 11x^2 - 11xy + 16y^2 + x^2 - 5xy + 2y^2$

$= 12x^2 - 16xy + 18y^2.$

Giá trị của M tại x = – 1 và y = – 2 là :

$M = 12.(-1)^2 - 16.(-1).(-2) + 18.(-2)^2$

$= 12 - 32 + 72 = 52.$

Có thể tính M theo cách khác

$M = P - Q = (A + B) - (A - B)$

$= A + B - A + B = 2B = 2(6x^2 - 8xy + 9y^2).$

Nhận xét:
$x^2 \geq 0 \Rightarrow 9x^2 \geq 0$ và $9x^2 = 0$ tại $x = 0$.
$y^2 \geq 0 \Rightarrow 4y^2 \geq 0$ và $4y^2 = 0$ tại $y = 0$.

c) Ta có

$T = M - N$

$= (12x^2 - 16xy + 18y^2) - (3x^2 - 16xy + 14y^2)$

$= 9x^2 + 4y^2$.

Suy ra: $T = 9x^2 + 4y^2 \geq 0$ với mọi x, y và $T = 0$ tại $x = y = 0$.

Vậy T luôn nhận giá trị dương hoặc bằng 0, hay nói cách khác là T luôn nhận giá trị không âm với mọi giá trị của x và y.

Ví dụ 3

Cho đa thức

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2013} + x^{2014}.$$

Tính f(– 1), f(0) và f(1).

Giải

Có $f(0) = 1 + 0 + 0^2 + \ldots + 0^{2013} + 0^{2014} = 1$

Có $f(1) = 1 + (1 + 1^2 + \ldots + 1^{2013} + 1^{2014})$

$= 1 + 2014 = 2015$

Có $f(-1) = 1 + [(-1) + (-1)^2 + \ldots$

$+ (-1)^{2013} + (-1)^{2014}]$

$= 1 + [-1 + 1 - 1 + 1 - \ldots - 1 + 1]$

(trong ngoặc vuông có 2014 số hạng)

$= 1 + [(-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots + (-1 + 1)]$

$= 1 + (0 + 0 + \ldots + 0) = 1$.

Ví dụ 4

Cho các đa thức:

$f(x) = x^{2014} - x^{2013} + x^{2012} - x^{2011} + \ldots + x^2 - x + 1$.

$h(x) = -1 + x - x^2 + x^3 - \ldots - x^{2012} + x^{2013} - x^{2014}$.

Biết $\varphi(x) = [f(x) - h(x)].[f(x) + h(x)]$. Hỏi sau khi khai triển thì đa thức $\varphi(x)$ là đa thức bậc mấy ?

Giải

Có $f(x) + h(x)$

$= [x^{2014} - x^{2013} + x^{2012} - x^{2011} + \ldots$

$+ x^2 - x + 1] + [-1 + x - x^2 + x^3 - \ldots$

$- x^{2012} + x^{2013} - x^{2014}] = 0$.

Vậy đa thức $\varphi(x)$ là đa thức 0 và là đa thức không có bậc.

Ví dụ 5*

Cho một dải băng số gồm 10 ô như sau:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}

Biết chìa khoá tìm giá trị các số trong 10 ô như sau: $u_n = u_{n-2} - u_{n-1}$

trong đó $3 \leq n \leq 10$ và $n \in \mathbf{N}$.

Giải

a) Cho $u_1 = a$ và $u_2 = b$. Tính u_{10}.

b) Cho $u_1 = a$ và $u_{10} = 13a$. Tính các số còn lại.

c) Nếu biết u_5 là trung bình cộng của các số $u_1 = a$ và u_{10}. Tính các số còn lại theo a. Tính u_5 nếu $u_1 = -5$.

Giải

a) Có: $u_3 = u_1 - u_2 = a - b$.

$u_4 = u_2 - u_3 = b - (a - b) = 2b - a$.

$u_5 = u_3 - u_4 = (a - b) - (2b - a) = 2a - 3b$.

$u_6 = u_4 - u_5 = (2b - a) - (2a - 3b) = 5b - 3a$.

$u_7 = u_5 - u_6 = (2a - 3b) - (5b - 3a) = 5a - 8b$.

$u_8 = u_6 - u_7 = (5b - 3a) - (5a - 8b) = 13b - 8a$.

$u_9 = u_7 - u_8 = (5a - 8b) - (13b - 8a) = 13a - 21b$.

$u_{10} = u_8 - u_9 = (13b - 8a) - (13a - 21b) = 34b - 21a$.

Các giá trị tuyệt đối của hệ số của biến số a và b lần lượt là 1; 2; 3; 5; 8; 13 và 21. Đó là các số thuộc dãy số Fibonacci.

b) Đặt $u_2 = x$, theo câu a) ta có

$u_{10} = 34x - 21a = 13a$ (do $u_{10} = 13a$) $\Rightarrow x = a$.

Vậy điền các số vào dải băng ta có:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
a	a	0	a	−a	2a	−3a	5a	−8a	13a

c) Đặt $u_2 = x$, theo câu a) ta có

$u_{10} = 34x - 21a$ và $u_5 = 2a - 3x$.

Ta có u_5 là trung bình cộng của các số u_1 và u_{10}, suy ra

$2a - 3x = 0,5.[a + (34x - 21a)]$

$\Rightarrow 2a - 3x = 17x - 10a \Rightarrow x = \frac{3}{5}a$.

Vậy điền các số vào dải băng ta có:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
a	$\frac{3}{5}a$	$\frac{2}{5}a$	$\frac{1}{5}a$	$\frac{1}{5}a$	0	$\frac{1}{5}a$	$-\frac{1}{5}a$	$\frac{2}{5}a$	$-\frac{3}{5}a$

Suy ra, nếu $u_1 = -5$ thì $u_5 = \frac{1}{5}.(-5) = -1$.

Ví dụ 6*

Bạn BEE không biết tính bài toán sau như thế nào, vì tính luỹ thừa 5 của − 0,3 rất khó. Bạn giúp BEE được không ?

Tính f(− 0,3), biết đa thức

$$f(x) = x^5 + 0,027x^2 - 2014.$$

Thay số bằng biến giúp tính toán nhanh hơn.

Giải

Biến đổi đa thức

$f(x) = x^5 - (-0,027)x^2 - 2014$

$= x^5 - (-0,3)^3x^2 - 2014$

$= x^5 - x^3x^2 - 2014 = x^5 - x^5 - 2014$

$= -2014$.

Ví dụ 7*

Bạn BEE khoe mình có thể áp dụng phương pháp thay số bằng biến như ví dụ 6* để giải bài toán sau:

Chứng minh rằng với mọi giá trị của x và y mà $x - 2y = 2$ thì giá trị của đa thức

$P = x^2 - 2xy - 2x + xy^2 - 2y^2 - 2y^3 - 2014$ luôn là một hằng số.

Bạn BEE giải bài toán trên bằng cách thay tất cả số 2 bằng $x - 2y$:

$$P = x^2 - (x - 2y)xy - (x - 2y)x + xy^2 - (x - 2y)y^2 - (x - 2y)y^3 - 2014$$
$$= x^2 - x^2y + 2xy^2 - x^2 + 2xy + xy^2 - xy^2 + 2y^3 - xy^3 + 2y^4 - 2014$$
$$= -x^2y + 2xy^2 + 2xy + 2y^3 - xy^3 + 2y^4 - 2014.$$

Đến đây BEE không biết làm tiếp thế nào nữa. Các bạn có thể giúp BEE không ?

Giải

Không nên thay một cách máy móc, mà cần linh hoạt:

• Thay biến bằng số

$$P = (x^2 - 2xy) - 2x + (xy^2 - 2y^3) - 2y^2 - 2014$$
$$= x(x - 2y) - 2x + y^2(x - 2y) - 2y^2 - 2014$$
$$= 2x - 2x + 2y^2 - 2y^2 - 2014 = -2014.$$

• Thay số bằng biến

$$P = x^2 - 2xy - (x - 2y)x + xy^2 - (x - 2y)y^2 - 2y^3 - 2014$$
$$= x^2 - 2xy - x^2 + 2xy + xy^2 - xy^2 + 2y^3 - 2y^3 - 2014$$
$$= -2014.$$

Như vậy ta luôn có $P = -2014$, hay với mọi giá trị của x và y mà $x - 2y = 2$ thì giá trị của đa thức

$P = x^2 - 2xy - 2x + xy^2 - 2y^2 - 2y^3 - 2014$ luôn là một hằng số.

Ví dụ 8*

Cho các đa thức: $A(x) = (x - 4)^2 + 2014$ và $B(x) = 4|x - 4| - 4$.

a) Tính $A(-4)$, $A(4)$, $B(-4)$ và $B(4)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $f(x) = A(x) + B(x) - 10$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $\varphi(x) = A(x) - B(x) - 14$.

Nhận xét:
$(x - 4)^2 \geq 0$ và $(x - 4)^2 = 0$ khi $x = 4$.
$4|x - 4| \geq 0$ và $4|x - 4| = 0$ tại $x = 4$.

Giải

a) Ta lập bảng:

x	–4	4
$A(x) = (x - 4)^2 + 2014$	2078	2014
$B(x) = 4\|x - 4\| - 4$	28	–4

b) $f(x) = A(x) + B(x) - 10$

$= [(x - 4)^2 + 2014] + [4|x - 4| - 4] - 10$

$= (x - 4)^2 + 4|x - 4| + 2000.$

Suy ra:

$f(x) \geq 2000$ và $f(x) = 2000$ khi $x = 4$.

Vậy min $f(x) = 2000$ tại $x = 4$.

c) $\varphi(x) = A(x) - B(x) - 14$

$= [(x - 4)^2 + 2014] - [4|x - 4| - 4] - 14$

$= (x - 4)^2 - 4|x - 4| + 2004.$

Đặt $a = |x - 4| \Rightarrow (x - 4)^2 = (|x - 4|)^2 = a^2$.

Nếu $f(x) \geq m$ (m là một hằng số) và $f(x) = m$ tại $x = x_0$ thì $\min f(x) = m$ tại $x = x_0$.
Trong phần c)
Nếu biến đổi $\varphi(x) = (x-4)^2 - 4|x-4| + 2004$, dù có $(x-4)^2 \geq 0$ và $4|x-4| \geq 0$ thì ta vẫn không thể kết luận $\varphi(x) \geq 0$, do giữa hai biểu thức $(x-4)^2$ và $4|x-4|$ là dấu trừ "-". Do đó ta phải đặt $a = |x-4|$, rồi sau đó tách $4a = 2a + 2a$, ghép cặp và đưa về bình phương của một biểu thức.

Có $\varphi(x) = A(x) - B(x) - 14 = a^2 - 4a + 2004$

$= a^2 - 4a + 4 + 2000$

$= (a^2 - 2a) - (2a - 4) + 2000$

$= a(a-2) - 2(a-2) + 2000$

$= (a-2)(a-2) + 2000 = (a-2)^2 + 2000.$

Vì $(a-2)^2 \geq 0$ và $(a-2)^2 = 0$ khi $a = 2$.

$a = 2 \Rightarrow |x-4| = 2 \Rightarrow x \in \{2; 6\}$.

Suy ra:

$\varphi(x) \geq 2000$ và $\varphi(x) = 2000$ khi $x \in \{2; 6\}$.

Vậy $\min \varphi(x) = 2000$ tại $x \in \{2; 6\}$.

BÀI TẬP A B

CƠ BẢN

5.1. Cho các đa thức sau:

$A = 3x^2 - 4xy + 5y^2$.

$B = 2x^2 + 5xy - 4y^2$.

$C = 4x^2 - xy + 3y^2$.

a) Tính $P = A + B + C$, $Q = A + B - C$, $R = A - B + C$ và $S = -A + B + C$.

b) Tính giá trị của đa thức $M = (P + Q) - (Q + S)$ tại $x = -1$ và $y = -1$.

c) Cho đa thức $N = -x^2 + 4xy + y^2$. Chứng minh rằng đa thức $T = N - M$ luôn không dương với mọi giá trị của x và y.

5.2. Cho đa thức $f(x) = -x - 7x^2 + 6x^3 - 3x^4 - 2x^2 - 6x + 2x^4 - 1$.

a) Thu gọn, rồi sắp xếp các số hạng của đa thức theo luỹ thừa giảm dần của biến x.

b) Xác định bậc của đa thức, hệ số tự do, hệ số cao nhất.

c) Tính $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ và $f(-a)$.

5.3. Cho đa thức

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2014} + x^{2015}.$$

Tính $f(-1)$, $f(0)$ và $f(1)$.

5.4. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $M = a - \{2b + [c - (d - a)]\} + d - [(a - b) - c]$.

b) $N = 1 - [(m - 1) - (m + 2)] - 3m + \{5m - [2m - (3m - 4)]\}$.

5.5. Tìm đa thức T, biết:

a) $T + (4a^2 - 3ab) = b^2 - 9ab + 6a^2$;

b) $(4b^2 - 4ab) - T = 4a^2 - 12ab + 5b^2$;

c) $T - (2a^2 - 3b^2 + c^2) + (a^2 - b^2 + c^2) = 5a^2 - 2b^2 - 3c^2$.

5.6. Tìm đa thức A(x) và B(x), biết:

$A(x) + B(x) = 3x^2 - 5x + 7$

và $B(x) - A(x) = 7x^2 - 5x + 3$.

NÂNG CAO

5.7. Tính f(– 0,4), biết đa thức

$$f(x) = x^6 + 0{,}064x^3 - 2015.$$

5.8. Cho các đa thức: $A(x) = (x-5)^2 + 2015$ và $B(x) = 5 - 5|x-5|$.

a) Tính A(– 5), A(5), B(– 5) và B(5).

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức

$$\varphi(x) = A(x) - B(x) + 5.$$

5.9. Xác định các tham số a, b và c để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$A = ax^2 - 9x + 6x^2 - (4x^2 - 3x)$

và $B = 2x^2 - 3bx + c - 1$.

5.10. Cho $u_1 = -a$, $u_2 = b$. Biết $u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$, với mọi $n \geq 3$ và $n \in \mathbf{N}$. Tính u_{124}.

5.11. Khai triển biểu thức $P(x) = (3x^3 - 2x^2 + 3x - 4)^{2014}$ được đa thức f(x) sắp xếp theo luỹ thừa giảm dần của biến x. Tính tổng các hệ số của đa thức f(x).

EM CÓ BIẾT ?

BÀI TOÁN 1

Bạn CHICKEN đố bạn EGG: Tìm số $\overline{abc}$ (các chữ số khác nhau và khác 0) biết $\overline{abc} = \frac{1}{2}(\overline{bca} + \overline{cab})$.

Bạn EGG đã đưa ra lời giải như sau:

Từ $\overline{abc} = \frac{1}{2}(\overline{bca} + \overline{cab})$

$\Rightarrow 2(100a + 10b + c) = 101b + 110c + 11a$

$\Rightarrow 7a = 3b + 4c$

$$\Rightarrow a = \frac{3b+4c}{7} = \frac{7b+4c-4b}{7}$$

$$= b + \frac{4(c-b)}{7}$$

Do a là chữ số, nên $\frac{4(c-b)}{7} \in \mathbf{N}$

$\Rightarrow c - b \vdots 7$ và $c > b$ (do b, c là các chữ số khác nhau và khác 0). Lập bảng

c	9	8
b	2	1
a	6	5
$\overline{abc}$	629	518

Ta có hai số thoả mãn đề bài là 518 và 629. *Bạn CHICKEN nói cách giải như vậy còn bỏ sót số. Các bạn có biết vì sao không ?*

Giải thích

Chỗ thiếu sót: $c - b \vdots 7 \Rightarrow c - b = 7$ do b – c là các chữ số khác nhau và khác 0.

Bổ sung:

Do a là chữ số, nên $\frac{4(c-b)}{7} \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow c - b \vdots 7 \Rightarrow c - b \in \{-7; 7\}$. (do c, b là các chữ số khác nhau và khác 0).

Lập bảng

c – b	– 7		7	
c	1	2	9	8
b	8	9	2	1
a	4	5	6	5
$\overline{abc}$	481	591	629	518

Vậy $\overline{abc} \in \{481; 518, 592; 629\}$.

BÀI TOÁN 2

Bạn EGG đố bạn CHICKEN: Tìm số $\overline{abc}$ (các chữ số khác nhau và khác 0) biết $\overline{abc}$ trung bình cộng của tất cả các số lập bởi các chữ số a, b và c đôi một khác nhau.

BÀI TOÁN 3

Tìm số trung bình cộng của các số sau: $\overline{abc}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$. Biết trung bình cộng của tất cả các số đó là một số tự nhiên.

Giải. Ta có tổng của 6 số :

$S = \overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$

$= 122(a + b + c)$.

Đặt x là số trung bình cộng của 6 số trên suy ra

$$x = \frac{1}{6}S = \frac{122(a+b+c)}{6} = \frac{61(a+b+c)}{3}.$$

Do $x \in \mathbf{N}$, mà $(61; 3) = 1 \Rightarrow a+b+c \vdots 3$

$\Rightarrow 6 \le a + b + c < 27$ (do a, b và c đôi một khác nhau).

$\Rightarrow a + b + c \in \{6; 9; 12; 15; 18; 21 ; 24\}$

$\Rightarrow x \in \{122; 183; 244; 305; 366; 427 ; 488\}$.

Giải. Ta có

$$\overline{abc} = \frac{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{cba}}{6}$$

suy ra

$$6\overline{abc} = \overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{cba}$$

Từ đó ta có $7a = 3b + 4c$.

Quay về bài toán trên ta có 4 đáp số là 481; 518; 592 và 629.

Ví dụ, nếu xét $a + b + c = 9$, ta có $a = 1$, $b = 2$, $c = 6$, thì:

$$126 + 261 + 612 + 12 + 26 + 61 = 1098$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{6}.1098 = 183.$$

Ví dụ, nếu $a + b + c = 12$, ta có chẳng hạn $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$, thì:

$$237 + 372 + 723 + 23 + 37 + 72 = 1464$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{6}.1464 = 244.$$

Như vậy ta có 7 số trung bình cộng 122; 183; 244; 305; 366; 427 và 488 của tất cả các số $\overline{abc}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$.

ĐỐ VUI

Một nhóm bạn không có sinh nhật của hai người bất kì nào trong cùng một ngày. Biết tổng ngày sinh và tháng sinh của mỗi người trong nhóm đều bằng 32. Hỏi nhóm đó có nhiều nhất bao nhiêu người ?

CHỦ ĐỀ 6 NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Đa thức

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (với $a_n \neq 0$)

$f(a) = 0$

a là nghiệm
($f(x) = 0$ tại $x = a$)

Tìm nghiệm
là tìm các giá trị của x để
$f(x) = 0$

Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm,... hoặc vô nghiệm (số nghiệm không vượt quá số bậc).

Nghiệm đa thức

Nghiệm đặc biệt

$f(1) = 0$

$a_n + \ldots + a_1 + a_0 = 0$

Tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có nghiệm $x = 1$

$f(-1) = 0$

$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$

Tổng hệ số của các hạng tử bậc lẻ bằng tổng hệ số các hạng tử bậc chẵn thì f(x) có nghiệm $x = -1$

HỎI ĐÁP NHANH

1. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a - b + c = 0$. Khi đó nghiệm của đa thức f(x) là:

A) $x = 1$ B) $x = \pm 1$

C) $x = -1$ D) $x = 0$.

2. Đúng điền Đ, sai điền S

	KHẲNG ĐỊNH	Đ/S
a	Các đa thức $f(x) = x^2$ và $h(x) = (x-1)^2$ đều có nghiệm. Vậy đa thức $\varphi(x) = f(x) + h(x)$ cũng có nghiệm.	
b	Các đa thức $f(x) = x^2 - 1$ và $h(x) = (x-1)^2$ đều có nghiệm. Vậy đa thức $\varphi(x) = f(x) + h(x)$ cũng có nghiệm.	
c	Đa thức $f(x) = x^3 + 125$ là đa thức bậc 3, nên đa thức đó phải có 3 nghiệm	
d	Có thể tìm được 5 nghiệm từ đa thức $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2014$	

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho đa thức $f(x) = -x^4 + x + 7x^2 - 6x^3 + 3x^4 - 6x^2 + 6x^3 - 2x^4 - 6$.

a) Thu gọn, rồi sắp xếp các số hạng của đa thức theo luỹ thừa giảm dần của biến x.

b) Chứng minh rằng các giá trị -2; 1 và 3 không là nghiệm của đa thức f(x).

c) Tìm nghiệm của đa thức f(x).

- *Để biết một giá trị có là nghiệm của một đa thức hay không, ta thay biến bằng giá trị đó, rồi thực hiện phép tính. Nếu kết quả nhận được khác 0 thì giá trị đó không là nghiệm. Ngược lại, giá trị đó là nghiệm của đa thức.*
- *Tập hợp nghiệm của đa thức thường được kí hiệu bằng chữ cái S và được viết là*

$$S = \{x_0; x_1; ...\}.$$

3. Điền số hoặc biểu thức thích hợp vào chỗ chấm (...)

Cho các đa thức $f(x) = 2x + 3$ và $h(x) = 3x + 2$.

a) Đa thức f(x) có nghiệm là .....

b) Nếu x_0 là nghiệm của đa thức f(x), thì ... là nghiệm của đa thức h(x).

c) Đa thức $\varphi(x) = f(x) + h(x)$ có nghiệm là ...

d) Đa thức $\varphi(x) = f(x) - h(x)$ có nghiệm là ...

4. Nối mỗi đa thức ở dòng 2 với nghiệm của nó ở dòng 3

A	B	C	D
$x^2 - 5x + 4$	$x^3 - 2x^2 + 3x - 2$	$\lvert x-1\rvert - 1$	$\sqrt{3x} + \sqrt{3}$
1	-1	-3	0
a	b	c	d

Giải

a) Có đa thức $f(x) = x^2 + x - 6$.

b) Xét $x \in \{-2; 1; 3\}$, ta có:

x	-2	1	3
x^2	4	1	9
x	-2	1	3
-6	-6	-6	-6
$f(x) = x^2 + x - 6$	-4	-4	6

Vậy -2; 1 và 3 không là nghiệm của đa thức f(x).

c) Đặt $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x+3) - 2(x+3)$
$= (x+3)(x-2) = 0.$

Trường hợp thứ nhất: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$.

Trường hợp thứ hai: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Vậy đa thức $f(x) = x^2 + x - 6$ có tập hợp nghiệm $S = \{-3; 2\}$.

Chú ý, ta cũng có thể phân tích

$x^2 - 2x + 3x - 6 = x(x-2) + 3(x-2)$
$= (x-2)(x+3) = 0.$

Ví dụ 2

Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $A = x^3 - 3x$ b) $B = x^2 - 5x + 6$

c) $C = x^3 + x^2 + x + 1$ d) $D = x^2 + \sqrt{2015}$

Để tìm nghiệm của một đa thức ta đặt đa thức đó bằng 0. Biến đổi đa thức thành tích của các nhân tử (các thừa số). Tích bằng 0 khi một trong các thừa số bằng 0.

$x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 + 1 \neq 0\ \forall x$,
hay đa thức $f(x) = x^2 + 1$
không có nghiệm

Giải

a) Ta có $x^3 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0$. $x = 0$ hoặc $x^2 = 3$

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $A = x^3 - 3x$ là $S = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$.

b) Ta có $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

$x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$.

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $B = x^3 - 3x$ là $S = \{2; 3\}$.

c) Ta có $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, suy ra

$x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1) = 0$.

Suy ra $x + 1 = 0$.

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $C = x^3 + x^2 + x + 1$ là $S = \{-1\}$ hay đa thức $C = x^3 + x^2 + x + 1$ tuy là một đa thức bậc ba nhưng lại có duy nhất một nghiệm.

d) Nhận xét: $x^2 \geq 0$ và $\sqrt{2015} > 0$.

Suy ra $D = x^2 + \sqrt{2015} > 0$ hay

$D = x^2 + \sqrt{2015} \neq 0\ \forall x$,

tức là đa thức $D = x^2 + \sqrt{2015}$ không có nghiệm (vô nghiệm).

Ví dụ 3

Xác định giá trị m để đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ có nghiệm là $+1$
$\Rightarrow a + b + c = 0$.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ có nghiệm là -1
$\Rightarrow a - b + c = 0$.

Giải

Cách 1. Đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1

$\Rightarrow f(-1) = m.(-1)^2 - 2.(-1) + 8 = 0$.

$\Rightarrow m + 2 + 8 = 0 \Rightarrow m = -10$.

Vậy khi $m = -10$ thì đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1.

Cách 2. Đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1, suy ra $f(-1) = m - (-2) + 8 = 0$

$\Rightarrow m + 2 + 8 = 0 \Rightarrow m = -10$.

Vậy khi $m = -10$ thì đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1.

Ví dụ 4

Trong tập hợp số {2; 0; 1; 4} thì số nào là nghiệm và số nào không là nghiệm của đa thức sau:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8\,?$$

Giải

Ta lập bảng:

x	2	0	1	4
x^3	8	0	1	64
$-5x^2$	-20	0	-5	-80
$2x$	4	0	2	8
8	8	8	8	8
x^3-5x^2+2x+8	0	8	6	0

Như vậy:

Các số 2 và 4 là nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.

Các số 0 và 1 không là nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

Ví dụ 5*

Cho các đa thức:

$A = 3a^2 - 4a + 5$, $B = 2a^2 + 5a - 4$ và

$C = 4a^2 - a + 3$

a) Tính $P = A + B + C$, $Q = A + B - C$, $R = A - B + C$ và $S = -A + B + C$.

b) Tính giá trị của đa thức $M = P - Q + R - S$ tại $a \in \{-2; -3\}$.

c) Chứng minh rằng đa thức M không có nghiệm.

Giải

a) Phương pháp cộng ngang:

Có $P = A + B + C$

$= (3a^2 - 4a + 5) + (2a^2 + 5a - 4) + (4a^2 - a + 3) = 9a^2 + 4$.

Phương pháp cộng dọc:

	$P = A + B + C$	$Q = A + B - C$	$R = A - B + C$	$S = -A + B + C$
$A = 3a^2 - 4a + 5$	$3a^2 - 4a + 5$	$3a^2 - 4a + 5$	$3a^2 - 4a + 5$	$-3a^2 + 4a - 5$
$B = 2a^2 + 5a - 4$	$2a^2 + 5a - 4$	$2a^2 + 5a - 4$	$-2a^2 - 5a + 4$	$2a^2 + 5a - 4$
$C = 4a^2 - a + 3$	$4a^2 - a + 3$	$-4a^2 + a - 3$	$4a^2 - a + 3$	$4a^2 - a + 3$
	$9a^2 + 4$	$a^2 + 2a - 2$	$5a^2 - 10a + 12$	$3a^2 + 8a - 6$

b) Có: $M = P - Q + R - S$

$= (A + B + C) - (A + B - C) + (A - B + C) - (-A + B + C)$

$= 2A - 2B + 2C = 2(A - B + C) = 2R = 10a^2 - 20a + 24.$

Vậy $M(-2) = 10.(-2)^2 - 20.(-2) + 24 = 104.$

$M(-3) = 10.(-3)^2 - 20.(-3) + 24 = 174.$

c) Có: $M = 10a^2 - 20a + 24 = 10a^2 - 20a + 10 + 14 = 10(a^2 - 2a + 1) + 14$

$= 10(a^2 - a - a + 1) + 14 = 10[a(a - 1) - (a - 1)] + 14$

$= 10(a - 1)^2 + 14 \geq 14.$

Do $M \geq 14 \Rightarrow M \neq 0\ \forall a \Rightarrow$ đa thức M không có nghiệm.

Ví dụ 6*

Cho đa thức

$\varphi(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d\ (a \neq 0).$

a) Tìm sự liên hệ giữa các hệ số a và c, b và d sao cho $\varphi(x)$ có hai nghiệm là -1 và 1.

b) Biết đa thức $\varphi(x)$ có hai nghiệm là ± 2, tìm nghiệm thứ ba còn lại.

Bạn BEE không biết giải bài toán trên. Các bạn có giúp BEE được không ?

Giải

a) Vì ± 1 là nghiệm của đa thức $\varphi(x)$, nên ta có:

$\varphi(1) = a - b + c - d = 0$ (1)

$\varphi(-1) = -a - b - c - d = 0$

hay $a + b + c + d = 0$ (2)

Lấy (1) + (2) $\Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow c = -a.$

Tương tự, lấy (2) – (1) $\Rightarrow b + d = 0$

$\Rightarrow d = -b.$

Vậy, khi $c = -a$ và $d = -b$ thì đa thức $\varphi(x)$ có hai nghiệm là ± 1.

b) Vì ± 2 là nghiệm của đa thức $\varphi(x)$, nên ta có:

$\varphi(2) = 8a - 4b + 2c - d = 0$ (3)

$\varphi(-2) = -8a - 4b - 2c - d = 0$

hay $8a + 4b + 2c + d = 0$ (4)

Lấy (3) + (4) $\Rightarrow 16a + 4c = 0 \Rightarrow c = -4a.$

Tương tự, lấy (4) – (3)

$\Rightarrow 8b + 2d = 0 \Rightarrow d = -4b.$

Do đó, khi $c = -4a$ và $d = -4b$ thì đa thức $\varphi(x)$ có hai nghiệm là ± 2.

Thay $c = -4a$ và $d = -4b$, ta có:

$\varphi(x) = ax^3 - bx^2 - 4ax + 4b.$

$= (ax^3 - bx^2) - (4ax - 4b)$

$= x^2(ax - b) - 4(ax - b)$

$= (ax - b)(x^2 - 4) = 0.$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow (ax - b)(x^2 - 4) = 0$

Nếu $A(x).B(x) = 0$
thì $A(x) = 0$ hoặc $B(x) = 0$

Ngoài nghiệm $x = \pm 2$, do $x^2 - 4 = 0$, ta còn có $ax - b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ (do $a \neq 0$).

Vậy ngoài hai nghiệm là ± 2, đa thức $\varphi(x)$ có nghiệm thứ ba là $\frac{b}{a}$ (nghiệm này có thể trùng nghiệm đã cho).

Ví dụ 7*

Bạn BEE cho rằng đa thức $f(x) = x^3 - 1$ là một đa thức bậc ba, nên ngoài nghiệm là 1 thì đa thức f(x) còn có hai nghiệm nữa.

Các bạn thấy thế nào ?

Giải

Gọi S là tập hợp nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 1$.

Giả sử $a \neq 1$ là một nghiệm nào đó của đa thức $f(x) = x^3 - 1$.

Xét các khoảng giá trị của a, ta thấy:

Nếu $a \leq 0$ thì $a^3 \leq 0$, do đó

$f(a) = a^3 - 1 = a^3 + (-1) < 0$,

nên $f(a) \neq 0 \ \forall \ a \leq 0$, tức là $a \notin S$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $0 < a^3 < 1$, do đó

$f(a) = a^3 - 1 < 0$, nên $f(a) \neq 0$, tức là $a \notin S$.

Nếu $a > 1$ thì $a^3 > 1$, do đó $f(a) = a^3 - 1 > 0$, nên $f(a) \neq 0 \ \forall \ a > 1$, tức là $a \notin S$.

Như vậy ngoài $a = 1$, thì không còn giá trị nào của a nữa để $f(a) = 0$, hay đa thức $f(x) = x^3 - 1$ chỉ có một nghiệm duy nhất là 1, mặc dù đó là đa thức bậc ba.

Đa thức bậc n có số nghiệm không vượt quá n. Đa thức bậc n, có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm, 3 nghiệm, ..., n nghiệm hoặc vô nghiệm.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

6.1. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $f(x) = 2014x - 1$.

b) $h(x) = (x - 2014).(2015 - x)$.

c) $g(x) = x^2 - 81$.

d) $\varphi(x) = 125x - x^4$.

6.2. Trong tập hợp số $\{-3; -2; -1; 0\}$ thì số nào là nghiệm của đa thức:

$f(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$?

6.3. Chứng minh rằng các đa thức sau vô nghiệm (không có nghiệm):

a) $f(x) = x^2 + 2015$.

b) $h(x) = x^2 + 6x + 10$.

6.4. Tìm giá trị của m để:

a) Đa thức $f(x) = mx^3 + x^2 + x + 1$ có nghiệm là 1.

b) Đa thức

$g(x) = x^4 + m^2x^3 + mx^2 + mx - 1$

có nghiệm là 1.

c) Đa thức $h(x) = x^3 - 2x^2 + m$ có nghiệm là -3.

NÂNG CAO

6.5. Cho các đa thức

$A = 3x^2 - 4x + 5$,

$B = 4x^2 - 5x + 6$

và $C = 5x^2 + 6x - 7$.

a) Tính $P = A + B + C$, $Q = A + B - C$,

$R = A - B + C$ và $S = -A + B + C$.

b) Tính giá trị của đa thức

$M = P + Q + R - S$ với $x \in \{0; 0,5; 1\}$.

6.6. Cho đa thức

$f(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ $(a \neq 0)$.

Biết đa thức f(x) có hai nghiệm là ± 3. Tìm nghiệm còn lại.

6.7. Chứng minh rằng đa thức

$f(x) = x^3 + 1$ chỉ có một nghiệm duy nhất là -1.

6.8. Cho các đa thức: $f(x) = ax + b$ và $g(x) = bx + a$ $(a, b \neq 0)$.

Giả sử đa thức f(x) có nghiệm là x_0, tìm nghiệm của đa thức g(x).

6.9. Tìm các hệ số a, b, c và d của đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$, biết

$f(0) = -5$; $f(1) = 4$; $f(2) = 31$; $f(3) = 88$.

EM CÓ BIẾT ?

BÀI TOÁN 1

Bạn CHICKEN hỏi bạn EGG:

Trong hai đa thức $f(x) = x^2 + \sqrt{2}$ và $h(x) = -x^2 - \sqrt{2}$, thì đa thức nào có nghiệm ?

LỜI GIẢI CỦA BẠN EGG

Nhận xét $x^2 \geq 0$ (bình phương của một số là số không âm). Ta có:

$f(x) = x^2 + \sqrt{2} \geq \sqrt{2} > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0, \forall x \Rightarrow$ Đa thức f(x) không có nghiệm.

$h(x) = -x^2 - \sqrt{2} \leq -\sqrt{2} < 0$

$\Rightarrow h(x) \neq 0$ với mọi x

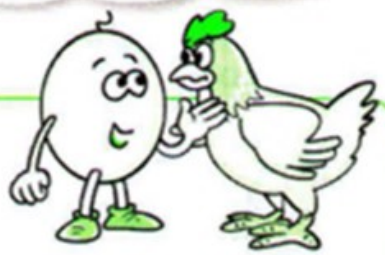
$\Rightarrow$ đa thức h(x) vô nghiệm.

Vậy cả hai đa thức f(x) và h(x) đều không có nghiệm.

BÀI TOÁN 2

Bạn EGG đố bạn CHICKEN

Tìm xem đa thức $f(x) = x^2 + x + 1$ có bao nhiêu nghiệm ?



LỜI GIẢI CỦA BẠN CHICKEN

Cách 1. $f(x) = x^2 + x + 1$

$$= x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right).\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Từ $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ suy ra $f(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0, \forall x$

$\Rightarrow \forall x,\ f(x) \neq 0.$

Vậy đa thức $f(x) = x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

Cách 2. Ta có $4f(x) = 4x^2 + 4x + 4 = 4x^2 + 2x + 2x + 1 + 3 = 2x(2x + 1) + (2x + 1) + 3$
$= (2x + 1)(2x + 1) + 3 = (2x + 1)^2 + 3$.

Vì $(2x + 1)^2 \geq 0$, suy ra $4f(x) = 4x^2 + 4x + 4 = (2x + 1)^2 + 3 \geq 3 > 0 \Rightarrow 4f(x) \neq 0$ hay $f(x) \neq 0, \forall x$

$\Rightarrow$ Đa thức $f(x) = x^2 + x + 1 \neq 0, \forall x$.

Vậy đa thức $f(x) = x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

Cách 3.

Xét từng khoảng giá trị của x là $x > -1$ và $x \leq -1$.

Nếu $x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$.

Có $x + 1 > 0$ và $x^2 \geq 0$, suy ra đa thức $f(x) = x^2 + x + 1 > 0$

hay $f(x) \neq 0$ với mọi $x > -1$ (1)

Nếu $x \leq -1 \Rightarrow x < 0$ và $x + 1 \leq 0 \Rightarrow x(x + 1) \geq 0$.

Có: $f(x) = x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ với mọi $x \leq -1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đa thức $f(x) = x^2 + x + 1 \neq 0, \forall x$

Vậy đa thức $f(x) = x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

Biết các đa thức A(x) và đa thức B(x) có nghiệm.

Nếu ta biết $A(x) \geq 0$ và $B(x) \geq 0$ mà mọi nghiệm của đa thức A(x) đều khác các nghiệm của đa thức B(x) (dấu "=" không đồng thời xảy ra), thì A(x) + B(x) không có nghiệm.

SUY NGẪM

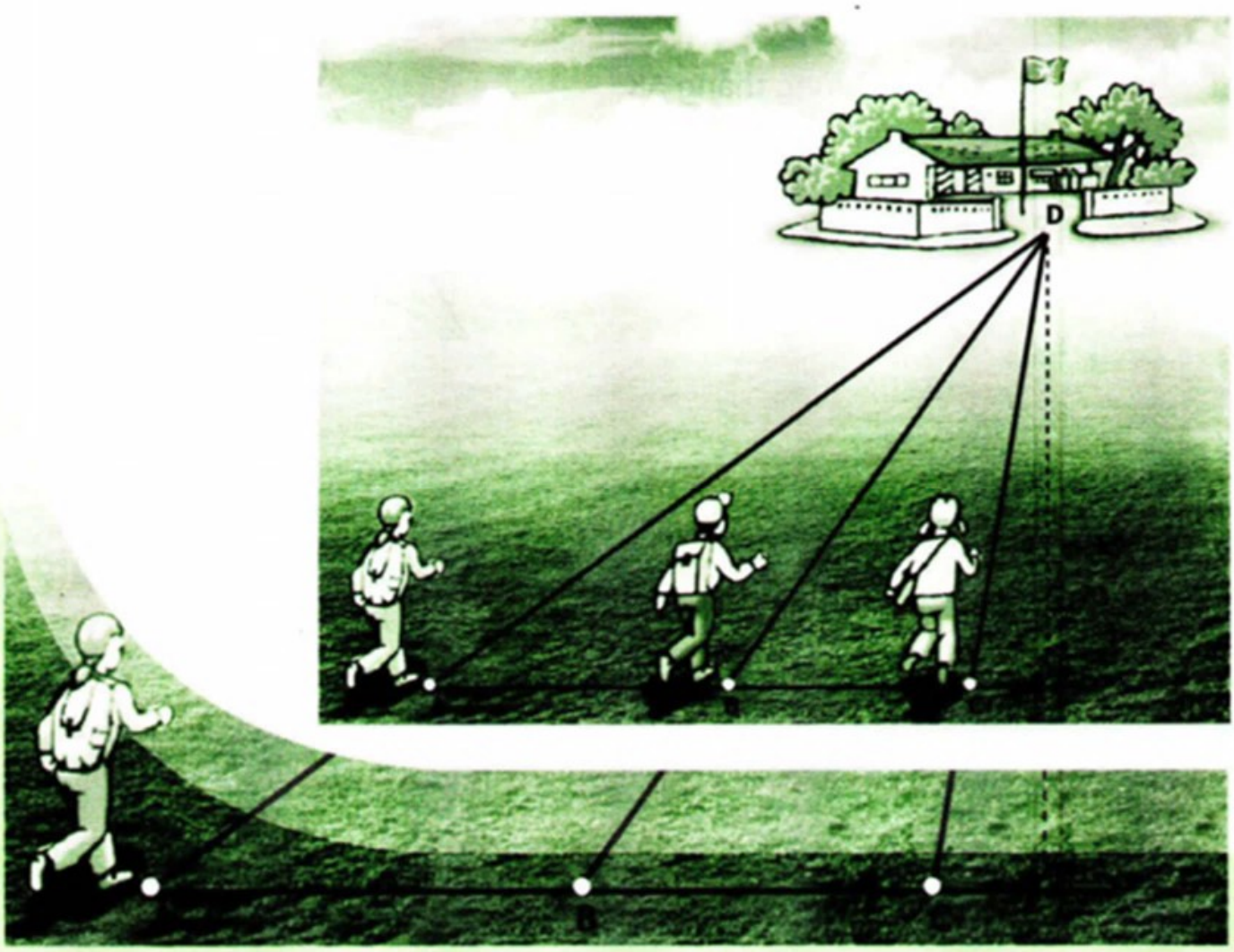
Khi nào biết được hai đa thức có nghiệm mà tổng của chúng lại vô nghiệm ?

ĐỐ VUI

Cho phép toán * như sau: $a * b = a^b + b^a$ với a, b là các số nguyên dương.

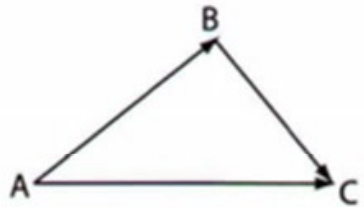
Biết $2 * x = 100$. Tính x.

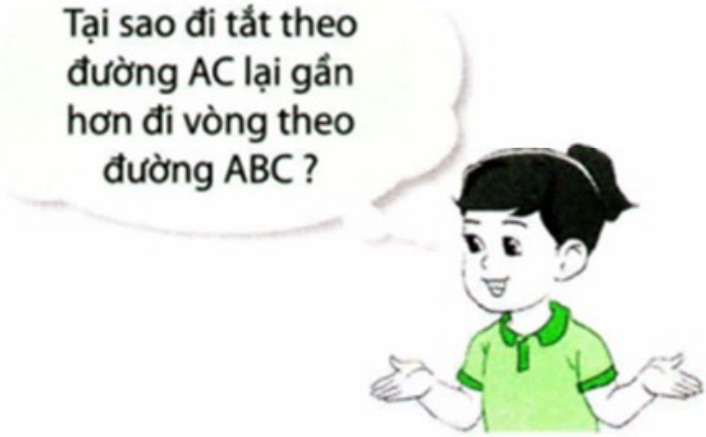
PHẦN
HÌNH HỌC

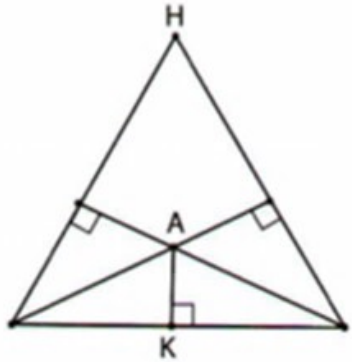


CHƯƠNG III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC





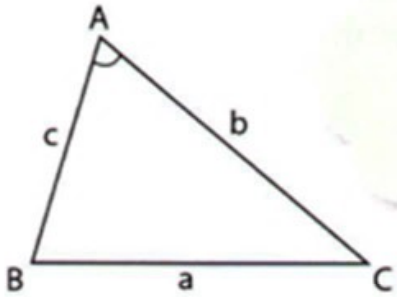


- **Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác**
- **Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu**
- **Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác**
- **Tính chất ba đường trung tuyến, ba đường phân giác, ba đường trung trực, ba đường cao của tam giác**

CHỦ ĐỀ 1 QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$

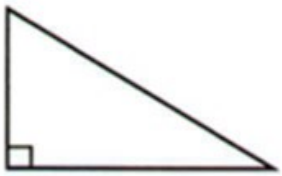


Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn và ngược lại, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Tam giác tù

đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất

Tam giác vuông

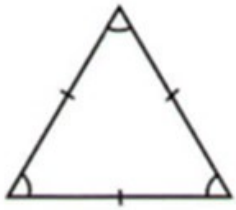


cạnh huyền là cạnh lớn nhất

Tam giác cân

hai cạnh bên bằng nhau, hai góc ở đáy bằng nhau

Tam giác đều



ba cạnh bằng nhau, ba góc bằng nhau

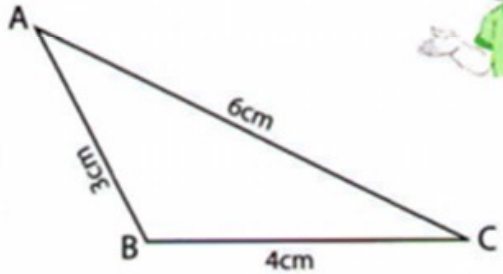
HỎI ĐÁP NHANH

1. Tại sao trong một tam giác, góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn ?
2. Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn nhất có phải là góc tù không ? Lấy ví dụ minh hoạ.
3. Trong một tam giác cân, biết cạnh đáy lớn hơn cạnh bên. Hãy so sánh góc ở đỉnh với 60°.

Hãy thử xét tam giác vuông xem ?

Để ý đến tổng các góc trong tam giác, tính chất tam giác cân.

4. Cho tam giác ABC có : AB = 3cm ; BC = 4cm ; AC = 6cm. Hỏi Δ ABC có góc nào lớn nhất ? Góc nào nhỏ nhất ?



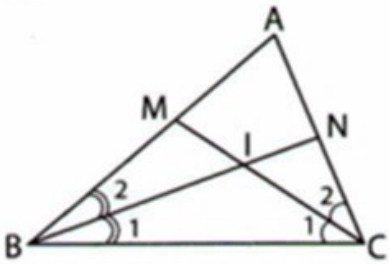
HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho ΔABC có AB > AC. Kẻ BN là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ (N $\in$ AC). Kẻ CM là tia phân giác của $\widehat{ACB}$ (M $\in$ AB), BN và CM cắt nhau tại I.

a) So sánh IC và IB.

b) Một học sinh nhận xét : $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (giả thiết). Vậy AM = MB vì là hai cạnh đối diện với hai góc bằng nhau. Đúng hay sai ? Tại sao ?



Giải

a) Xét ΔABC có AB > AC (gt). Suy ra $\widehat{C} > \widehat{B}$ (định lí). Mà $\widehat{C_1} = \frac{1}{2}\widehat{C}$; $\widehat{B_1} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ nên $\widehat{C_1} > \widehat{B_1}$.

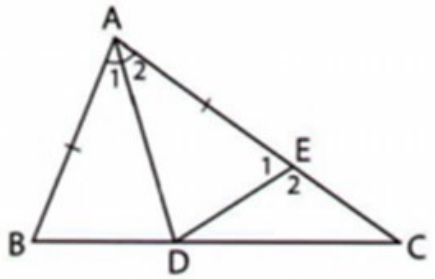
Trong ΔCIB, đối diện với $\widehat{C_1}$ là IB ; đối diện với $\widehat{B_1}$ là IC, mà $\widehat{C_1} > \widehat{B_1}$, vậy IB > IC (định lí).

b) Từ $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ suy ra AM = MB là sai, vì $\widehat{C_1}$ là góc của ΔBCM ; $\widehat{C_2}$ là góc của ΔCMA. Các cạnh AM và MB cũng là cạnh của hai tam giác khác nhau. Định lí ở trên chỉ xét trong một tam giác.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có AB < AC, AD là tia phân giác của góc BAC (D ∈ BC). Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$; b) CD > DB.



Lưu ý giả thiết $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Hãy tạo ra tam giác có hai cạnh bằng CD và BD

Giải

a) Xét ΔABC, có AB < AC (giả thiết) ⇒ $\hat{C} < \hat{B}$ (định lí).

Xét Δ ABD và Δ ACD, có :

$\widehat{A_1} + \hat{B} + \widehat{ADB} = \widehat{A_2} + \hat{C} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc trong tam giác).

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (giả thiết) và $\hat{C} < \hat{B}$ (chứng minh trên)

⇒ $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.

b) Vì AC > AB (giả thiết) nên trên cạnh AC ta lấy được một điểm E sao cho AE = AB. Xét ΔABD và ΔAED, có :

AB = AE (theo cách dựng) ; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (giả thiết) ; AD là cạnh chung.

Do vậy

ΔABD = ΔAED (c.g.c) ⇒ BD = ED (1)

và $\hat{B} = \widehat{E_1}$. (2)

Ta lại có : $\widehat{E_2} = 180^\circ - \widehat{E_1}$ (hai góc kề bù)

$= 180^\circ - \hat{B} = \widehat{BAC} + \hat{C} \Rightarrow \widehat{E_2} > \hat{C}$.

Xét ΔECD, có : $\widehat{E_2} > \hat{C}$ (chứng minh trên)

⇒ CD > ED (định lí). (3)

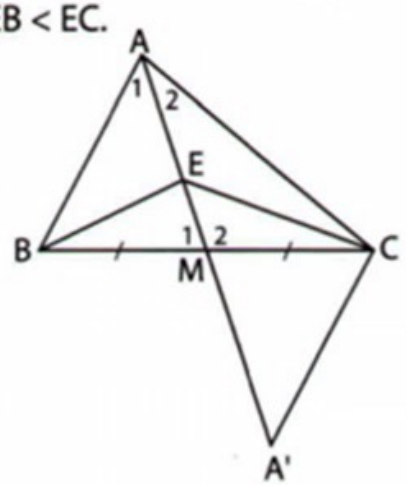
Từ (1) và (3) suy ra : BD < CD.

Ví dụ 3*

Cho tam giác ABC, có AB < AC, M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng : $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$.

b) Trên đoạn AM lấy một điểm E tuỳ ý. Chứng minh : EB < EC.



Giải

a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm A' sao cho M là trung điểm của AA'.

Khi đó, ta có : ΔABM = ΔA'CM (c.g.c)

⇒ A'C = AB (hai cạnh tương ứng)

và $\widehat{A_1} = \widehat{A'}$ (hai góc tương ứng). (1)

Vì AB < AC (giả thiết) nên A'C < AC.

Xét ΔACA', có A'C < AC (chứng minh trên)

⇒ $\widehat{A_2} < \widehat{A'}$ (quan hệ góc – cạnh đối diện). (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$. Lại có $\hat{B} > \hat{C}$ (do AC > AB).

Tình huống câu b) tương tự câu a)

Vậy $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$.

b) Giả sử EB = EC thì ΔEMB = ΔEMC (c.c.c) suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, trái với a)

Giả sử EB > EC. Lập luận tương tự câu a) suy ra $\widehat{M_1} > \widehat{M_2}$, vô lí. Vậy EB < EC.

Nhận xét. Các tam giác AMB và AMC có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, cặp cạnh thứ ba không bằng nhau. Góc M_2 đối diện với cạnh AC lớn hơn nên nó lớn hơn góc M_1. Ta có kết quả tổng quát sau :

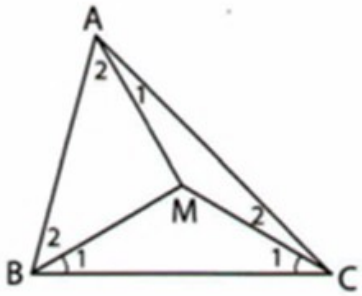
Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau nhưng cặp cạnh thứ ba không bằng nhau thì góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn. Ngược lại, nếu hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau nhưng hai góc xen giữa không bằng nhau thì cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn :

Hai tam giác ABC và A'B'C' có AB = A'B'; AC = A'C', thì :

$BC < B'C' \Leftrightarrow \widehat{A} < \widehat{A'}$.

Ví dụ 4*

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ, \widehat{C} = 45^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = 30^\circ$. Chứng minh rằng AM vuông góc với BM.



So sánh MB và MA, suy ra quan hệ MC và MA

Giải

Ta có

$\widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$

$= 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$ (1)

$\widehat{B_2} = \widehat{ABC} - \widehat{B_1} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$

$\widehat{C_2} = \widehat{ACB} - \widehat{C_1} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Giả sử MA không vuông góc với MB, tức là $\widehat{AMB} \neq 90^\circ$, ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1. $\widehat{AMB} < 90^\circ$.

Xét ΔAMB có :

$\widehat{A_2} = 180^\circ - (\widehat{AMB} + 45^\circ) > 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A_2} > \widehat{B_2} \Rightarrow MB > MA$ (định lí).

Vì ΔMBC cân tại M nên MB = MC

$\Rightarrow MC > MA \Rightarrow \widehat{A_1} > \widehat{C_2}$ (định lí).

Từ đó suy ra : $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} > \widehat{B_2} + \widehat{C_2}$ hay $\widehat{BAC} > 60^\circ$: trái với (1).

Trường hợp 2. $\widehat{AMB} > 90^\circ$: Lập luận tương tự, ta có $\widehat{BAC} < 60^\circ$: trái với (1).

Vậy $\widehat{AMB} = 90^\circ$ hay MA ⊥ MB.

BÀI TẬP A B

CƠ BẢN

1.1. Cho Δ ABC, lấy M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng :

a) Nếu $AM > \frac{1}{2}BC$ thì $\widehat{BAC}$ là góc nhọn.

b) Nếu $AM = \frac{1}{2}BC$ thì $\widehat{BAC}$ là góc vuông.

c) Nếu $AM < \frac{1}{2}BC$ thì $\widehat{BAC}$ là góc tù.

1.2. Cho tam giác ABC, hai tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I.

a) Tìm cạnh lớn nhất của tam giác BIC.

b) Giả sử IB < IC, hãy so sánh AB và AC.

1.3. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D và trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho CE = BD. Chứng minh rằng : BC < DE.

1.4. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90°$; M là trung điểm của cạnh AC. Trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho ME = MB. Chứng minh rằng :

a) $CE \perp AC$ và BC > CE.

b) $\widehat{ABM} > \widehat{MBC}$.

1.5. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90°$. Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và F (không trùng với các đỉnh của tam giác).

Chứng minh : BC > EF.

NÂNG CAO

1.6. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác sao cho $\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$. Chứng minh rằng : DC > DB.

1.7. Cho tam giác ABC, có AB < AC và AD là tia phân giác của góc A (D thuộc BC). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC) và gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng : Tia AD nằm giữa hai tia AH và AM.

1.8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên đáy BC lấy các điểm E và F sao cho BE = EF = FC.

a) So sánh độ lớn của các góc $\widehat{BAE}$; $\widehat{EAF}$; $\widehat{FAC}$.

b) Nếu đoạn thẳng BC được chia thành 4 đoạn nhỏ bằng nhau thì 4 góc đối diện với 4 đoạn nhỏ đó có số đo như thế nào ?

1.9. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75°$, $\widehat{C} = 60°$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho tam giác MBC vuông cân tại M. Chứng minh rằng MA = MB.

1.10. Cho tam giác ABE có AB = a, $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = 15°$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa E, vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB. Lấy D trên tia Ax, lấy E trên tia By sao cho AD = BC = a. Chứng minh rằng tam giác ECD là tam giác đều.

EM CÓ BIẾT ?

CẠNH GÓC VUÔNG BẰNG CẠNH HUYỀN?

Bạn CHICKEN vẽ tam giác ABC vuông tại B, gọi O là giao điểm của tia phân giác góc A và đường trung trực của BC, gọi M, H, K là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến BC, AB, AC.

Bạn đó thấy:

$\Delta OHA = \Delta OKA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HA = KA$ và $OH = OK$;

$\Delta OMB = \Delta OMC$ (c.g.c) $\Rightarrow OB = OC$;

$\Delta OHB = \Delta OKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow HB = KC$.

Suy ra $HA + HB = KA + KC$, tức là $AB = AC$: cạnh góc vuông bằng cạnh huyền!

Tại sao lại như vậy?

GIẢI THÍCH CỦA BẠN EGG

Gọi D là giao điểm của tia phân giác góc A với cạnh BC, M là trung điểm của BC thì D nằm giữa B và M (xem bài 1.7). Do đó đường trung trực của BC cắt tia phân giác của góc A tại điểm O nằm ngoài ΔABC, chứ không nằm trong ΔABC như bạn CHICKEN vẽ. Đó là nguyên nhân dẫn đến sai lầm nói trên.

SUY NGẪM

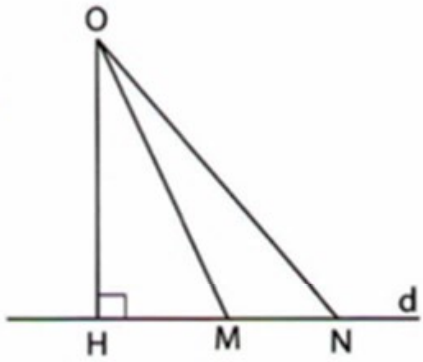
Bài toán của bạn CHICKEN là một bài toán nguỵ biện. Đó là bài toán dẫn đến kết quả vô lí bằng những lập luận tưởng như là đúng. Sai lầm của bài toán nguỵ biện Hình học thường do vẽ hình.

Vẽ hình chính xác giúp định hướng chứng minh. Vẽ hình không chính xác có thể dẫn đến sai lầm.

CHỦ ĐỀ 2 QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN. ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

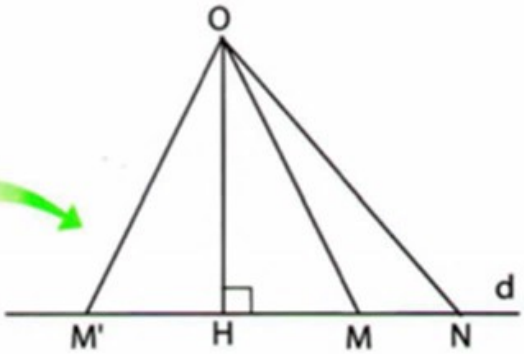
$OH \leq OM, \ \forall M \in d, \ OH = OM \Leftrightarrow M \equiv H$



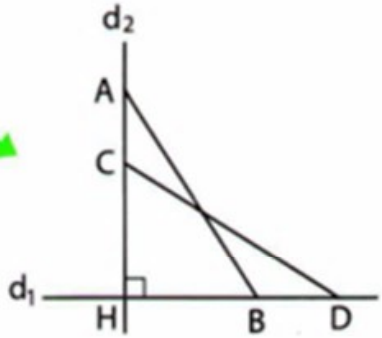
Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên

$OM = OM' \Leftrightarrow HM = HM'$

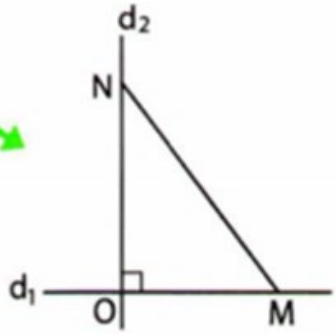
$OM < ON \Leftrightarrow HM < HN$



- Phải so sánh các đường xiên cùng kẻ từ một điểm, các hình chiếu xét trên cùng một đường thẳng.
- Không so sánh được AB và CD.



OM là hình chiếu của MN trên d_1
ON là hình chiếu của MN trên d_2

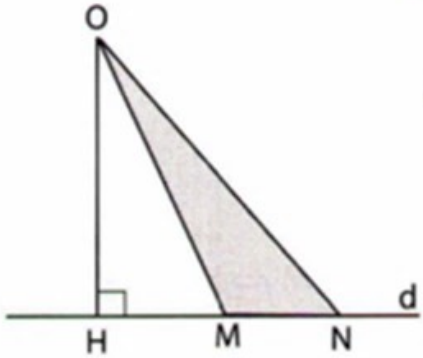


HỎI ĐÁP NHANH

1. Giải thích kết luận *Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên* dựa vào quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác như thế nào ?
2. So sánh đường xiên và hình chiếu của nó trên một đường thẳng. Khi nào đường xiên dài gấp đôi hình chiếu của nó ?
3. Hãy so sánh hai đường xiên thông qua hai hình chiếu dựa vào quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác (chứng tỏ ON > OM trong hình).

So sánh cạnh huyền và cạnh góc vuông

Góc OMN bao giờ cũng tù, góc ONM bao giờ cũng nhọn ?

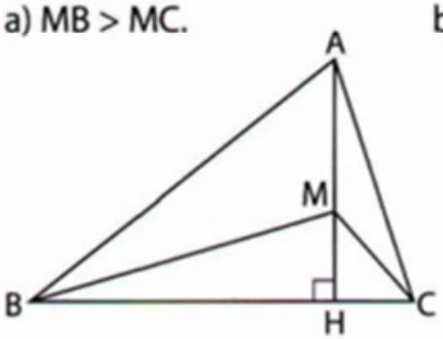


HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho ΔABC có AB > AC. Từ A hạ AH ⊥ BC. Trên đoạn thẳng AH lấy điểm M (M không trùng A, H). Chứng minh rằng :

a) MB > MC. b) BA > BM.



Nhớ vận dụng quan hệ đường xiên và hình chiếu theo hai chiều

Giải

a) Từ AB > AC (giả thiết), suy ra BH > CH (đường xiên lớn hơn thì hình chiếu lớn hơn).

- Xét hai đường xiên MB và MC có BH > CH, vậy MB > MC (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn).

b) Ta xét BH là đường vuông góc với đường thẳng AH thì AH và MH là hình chiếu của BA và BM trên đường thẳng AH.

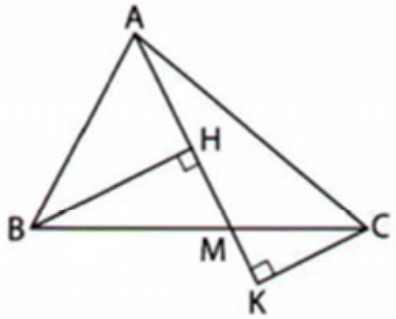
Theo giả thiết M nằm giữa A và H nên HM < HA. Suy ra : BM < BA (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn). Vậy BA > BM.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có hai góc B và C nhọn. Điểm M nằm giữa B và C. Gọi d là tổng khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

a) Chứng minh rằng : $d \leq BC$.

b) Xác định vị trí của điểm M sao cho d có giá trị lớn nhất.



Giải

a) Kẻ $BH \perp AM$ và $CK \perp AM$ ($H, K \in AM$).

Theo đề ra, ta có : $d = BH + CK$.

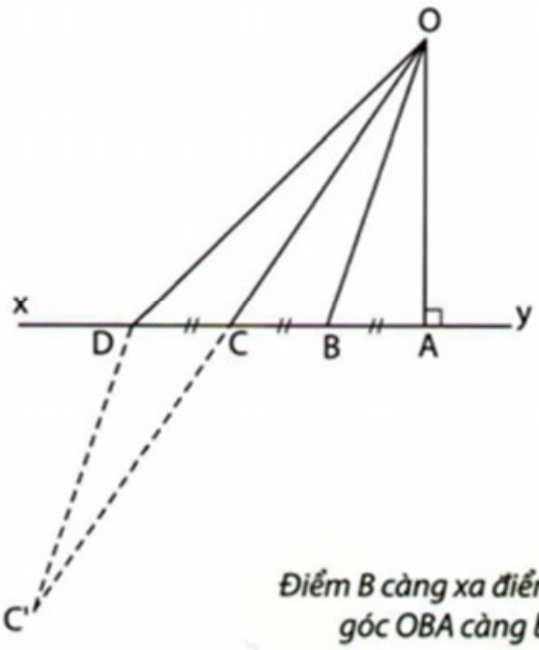
Ta có : $BH \leq BM$ (quan hệ đường vuông góc – đường xiên) và $CK \leq CM$ (quan hệ đường vuông góc – đường xiên).

suy ra : $BH + CK \leq BM + CM = BC$ hay $d \leq BC$.

b) Ta luôn có $d \leq BC$, $d = BC$ khi và chỉ khi $BM = BH$, $CM = CK$ hay đồng thời $H \equiv M$ và $K \equiv M$, tức $AM \perp BC$. Vì hai góc B và C nhọn nên khi đó M nằm giữa B và C, thoả mãn điều kiện. Vậy d có giá trị lớn nhất khi M là hình chiếu của A trên BC.

Ví dụ 3*

Cho một điểm O ở ngoài đường thẳng xy, A là hình chiếu của O trên xy. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ OA, ta kẻ các đường xiên OB, OC, OD sao cho $AB = BC = CD$. Hãy sắp xếp thứ tự các góc AOB, BOC, COD theo số đo của chúng.



Điểm B càng xa điểm A thì góc OBA càng bé

Giải

Ta chứng minh cho một trường hợp, các trường hợp khác được chứng minh tương tự. Chẳng hạn, ta chứng minh $\widehat{DOC} < \widehat{COB}$.

Trên tia OC ta lấy điểm C' sao cho C là trung điểm của OC'. Nối C'D, ta có $\Delta DCC' = \Delta BCO$ (c.g.c) suy ra $DC' = OB$ và $\widehat{DC'C} = \widehat{COB}$ (1).

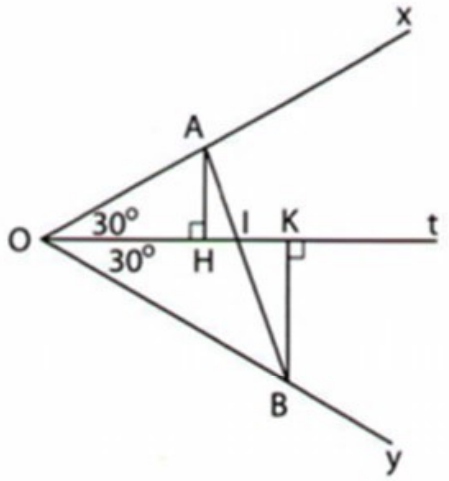
Ta có $OB < OD$ (vì $AB < AD$ theo định lí về quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu của nó), nên $DC' < OD$. Trong tam giác ODC', theo định lí về quan hệ giữa cạnh và góc đối diện ta có : $\widehat{DOC} < \widehat{DC'C}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{DOC} < \widehat{COB}$.

Vậy $\widehat{AOB} > \widehat{BOC} > \widehat{COD}$.

Ví dụ 4*

Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$, A là điểm trên tia Ox, B là điểm trên tia Oy (A, B không trùng với O). Chứng minh rằng : $OA + OB \leq 2AB$.



Giải

Kẻ tia phân giác Ot của góc xOy. Gọi I là giao điểm của AB và Ot ; H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên Ot.

Xét ΔOAH :

Vì $\widehat{AOH} = 30^\circ$ nên $OA = 2AH$.

Vì AH, AI lần lượt là đường vuông góc, đường xiên kẻ từ A đến đường thẳng Ot nên $AH \leq AI$.

Do vậy : $OA \leq 2AI$. (1)

Chứng minh tương tự ta có :

$OB = 2BK \leq 2BI$. (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$OA + OB \leq 2AI + 2BI = 2AB$.

Đẳng thức xảy ra khi

$H \equiv I \equiv K$ hay $AB \perp Ot \Leftrightarrow OA = OB$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

2.1. Cho ΔABC cân tại A. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HA lấy điểm F sao cho HF = HA. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E tuỳ ý. Chứng minh rằng :

a) $AB = AC = FB = FC$.

b) ΔAEF cân.

2.2. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Qua I kẻ đường thẳng d. Biết IH và IK là hình chiếu của đoạn IA và IB trên đường thẳng d.

a) Chứng minh IH = IK.

b) Nếu I không phải là trung điểm của AB mà IA > IB. Chứng minh hình chiếu của IA trên đường thẳng d cũng lớn hơn hình chiếu của IB trên đường thẳng d.

2.3. Hai đoạn thẳng MN = 12cm, PQ = 8cm cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đoạn và góc tạo thành giữa hai đoạn thẳng đó là 60° ($\widehat{MOQ} = 60^\circ$).

a) Nêu cách tìm hình chiếu của đoạn MN trên đường thẳng PQ và cách tìm hình chiếu của đoạn PQ trên đường thẳng MN.

b) Tính độ dài của hai hình chiếu đó.

2.4. Cho ΔABC.

a) Từ A hạ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh $AH < \dfrac{AB + AC}{2}$.

b) Từ B hạ $BK \perp AC$ ($K \in AC$) ; từ C hạ $CI \perp AB$ ($I \in AB$).
Chứng minh rằng AH + BK + CI nhỏ hơn chu vi của ΔABC.

NÂNG CAO

2.5. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông, tổng cạnh huyền và đường cao tương ứng luôn nhỏ hơn tổng hai cạnh góc vuông.

2.6. Cho ΔABC vuông tại A ; Bx là tia phân giác của góc $\widehat{B}$ cắt AC tại D. Tại C kẻ $Cy \perp AC$ (AB và Cy thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ AC). Cy cắt Bx tại N. So sánh chu vi tam giác ABD và chu vi tam giác CDN.

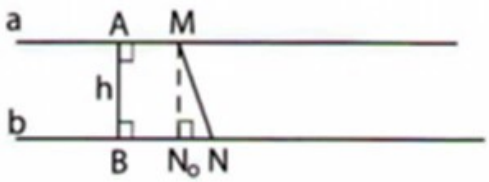
ĐỐ VUI

Nhà bạn Nam ở ven đê của một con sông, từ nhà ra bờ sông phải đi qua một bãi cỏ. Hàng ngày Nam phải ra sông chở nước về tưới rau. Em hãy chỉ giúp bạn Nam đường đi thế nào ngắn nhất.

ĐI XA HƠN

KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Cho hai đường thẳng song song a và b. Khoảng cách h từ một điểm A bất kì trên a đến b là không đổi, không phụ thuộc vào vị trí điểm A. Người ta gọi khoảng cách không đổi đó là *khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b.*



Hai thanh ray của đường tàu hoả là hai "đường thẳng song song" (trên những đoạn đường thẳng), hai thanh ray được bắt vít chặt vào các thanh tà vẹt. Các thanh tà vẹt dài bằng nhau, khoảng cách giữa hai ốc vít trên mỗi thanh tà vẹt đều bằng nhau, chính bằng khoảng cách giữa hai đường ray.

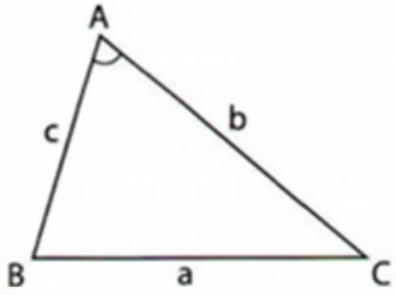
Ta không đề cập đến khoảng cách giữa hai đường thẳng cắt nhau, vì với hai điểm khác nhau M, M' trên a, khoảng cách từ M, M' đến b là khác nhau.

Với M, N bất kì tương ứng thuộc a và b ta có $MN \geq h$, $MN = h \Leftrightarrow MN \perp a$.

CHỦ ĐỀ 3 QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA TAM GIÁC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$|AB - AC| < BC < AB + AC.$



Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì luôn lớn hơn độ dài cạnh còn lại, hiệu độ dài hai cạnh bất kì luôn nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Ba đoạn thẳng a, b, c lập thành một tam giác khi và chỉ khi $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.

MA + MB ≥ AB với ba điểm A, B, M bất kì.
Dấu "=" xảy ra ⇔ M nằm giữa A và B (bất đẳng thức tam giác).

HỎI ĐÁP NHANH

1. Bạn Minh lập luận : Ba đoạn thẳng a = 10cm, b = 4cm, c = 5cm thoả mãn $a + b > c$ nên chúng có thể lập thành một tam giác. Lập luận đó đúng hay sai?
2. Chu vi một tam giác cân là 20cm, một cạnh của tam giác dài 5cm. Hỏi cạnh đó là cạnh bên hay cạnh đáy?
3. Ba điểm A, B, C phân biệt thoả mãn AB – AC = BC thì vị trí ba điểm A, B, C như thế nào ?

Cạnh c có phải là cạnh lớn nhất không ?

Hãy xét hai trường hợp, để ý đến bất đẳng thức tam giác.

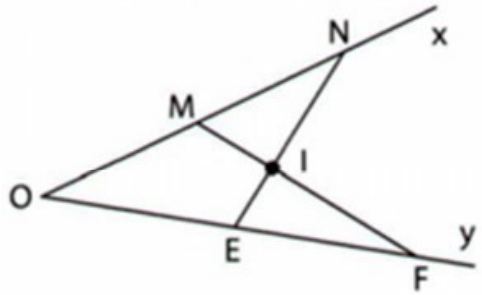
Viết lại hệ thức đã cho để xuất hiện tổng hai đoạn thẳng.

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn, trên Ox lấy hai điểm M và N (điểm M nằm giữa hai điểm O và N). Trên Oy lấy hai điểm E và F (điểm E nằm giữa hai điểm O và F). Chứng minh :

$$MN + EF < MF + NE.$$



Giải

Gọi I là giao điểm của MF và NE.

Xét Δ MIN có : MN < MI + NI (tổng hai cạnh lớn hơn một cạnh). (1)

Xét Δ EIF có : EF < IF + IE (tổng hai cạnh lớn hơn một cạnh). (2)

Từ (1) và (2) có :

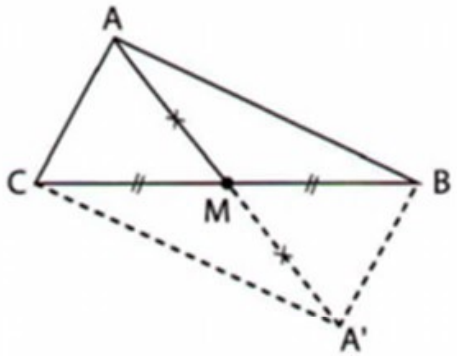
$$MN + EF < MI + NI + IF + IE$$

hay : MN + EF < MF + NE.

Ví dụ 2

Cho ΔABC có AB > AC. Điểm M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

$$\frac{AB - AC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}.$$



Giải

Trên tia đối của tia MA ta lấy A' sao cho MA' = MA.

- Xét hai tam giác ABM và A'MC có :

AM = MA' (cách vẽ) ; BM = MC (giả thiết), $\widehat{AMB} = \widehat{CMA'}$ (đối đỉnh).

Vậy ΔABM = ΔA'CM (c.g.c).

Suy ra AB = A'C (1)

- Xét ΔACA' có : A'C – AC < AA' < AC + A'C, do AB = A'C và AA' = 2AM nên ta có :

$$AB - AC < 2AM < AC + AB.$$

Vậy : $\frac{AB - AC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$.

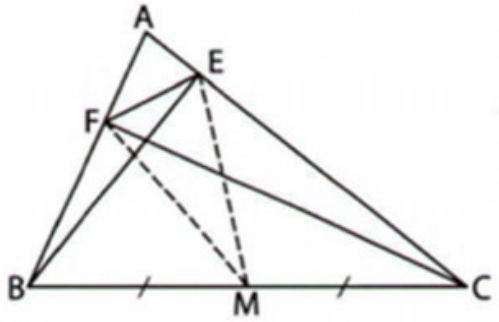
Để chứng minh 2AM < AB + AC, hãy tạo ra đoạn thẳng bằng 2AM

Hệ quả. Trong tam giác, tổng ba đường trung tuyến nhỏ hơn chu vi tam giác.

Ví dụ 3*

Cho tam giác ABC có hai đường cao BE, CF.

Chứng minh rằng : EF < BC.



Giải

Gọi M là trung điểm của BC.

Xét ΔBCE vuông tại E, có trung tuyến EM nên $ME = \frac{1}{2}BC$.

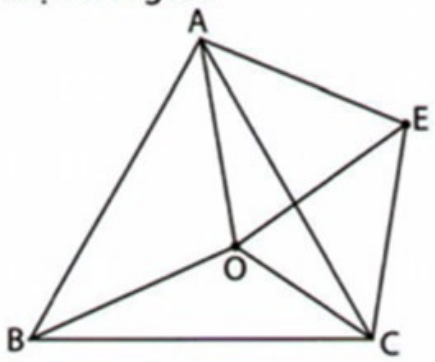
Xét ΔBCF vuông tại F, có trung tuyến FM nên $MF = \frac{1}{2}BC$.

Do đó : ME + MF = BC. Ba điểm M, E, F nằm trên ba cạnh của tam giác ABC và không thể thẳng hàng nên nó tạo thành một tam giác, do đó ME + MF > EF.

Vậy EF < BC.

Ví dụ 4*

Cho tam giác đều ABC, O là điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng OA, OB, OC luôn lập được thành một tam giác.



Hãy tạo ra tam giác có ba cạnh bằng OA, OB, OC.

Giải

Dựng tam giác đều OAE (E và O ở khác phía đối với AC). Xét hai tam giác BAO và CAE. Ta có $\widehat{BAO} = \widehat{CAE}$ $(= 60^\circ - \widehat{OAC})$, BA = CA, OA = EA, do đó hai tam giác này bằng nhau (c. g. c), suy ra OB = CE. Lại có OA = OE (cách dựng). Vì O nằm trong tam giác, $\widehat{OAE} = 60^\circ$ nên ba điểm O, C, E luôn là ba đỉnh của một tam giác. Như vậy OA, OB, OC tương ứng bằng ba cạnh của tam giác OCE, tức chúng luôn lập được thành một tam giác.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

3.1. Tính chu vi của Δ ABC cân, biết :

a) AB = 7cm ; AC = 4cm.

b) AB = 9cm ; AC = 4cm.

3.2. Cho ΔABC có AB > AC. Kẻ tia phân giác AD của góc A (D ∈ BC). Lấy M trên đoạn thẳng AD (M không trùng A). Chứng minh rằng : AB – AC > MB – MC.

3.3. Chứng minh rằng trong một tam giác, độ dài cạnh lớn nhất sẽ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ chu vi của tam giác nhưng nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.

NÂNG CAO

3.4. Chu vi một tam giác cân là 15cm, độ dài các cạnh có số đo là các số nguyên dương. Tính số đo cạnh đáy.

3.5. Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trong tam giác ΔABC thì tổng các khoảng cách từ M đến ba đỉnh của tam giác ấy nhỏ hơn chu vi, nhưng lớn hơn nửa chu vi của tam giác ABC.

3.6. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 3; AC = 4. Gọi I là trung điểm của AC, d là đường trung trực của đoạn AC và M là điểm tuỳ ý trên d.

a) Chứng minh rằng : MA + MB ≥ 5.

b) Xác định vị trí của M để tổng MA + MB nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

3.7. Cho ΔABC cân tại A. Đường thẳng d qua A và song song với BC. Lấy A' là điểm bất kì trên đường thẳng d (A' ≠ A). Chứng minh rằng chu vi ΔABC nhỏ hơn chu vi ΔA'BC.

3.8. Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn. M là điểm thuộc miền trong của góc. Hãy xác định điểm A trên Ox, điểm B trên Oy sao cho chu vi tam giác MAB là nhỏ nhất.

Lấy điểm E và F sao cho Ox là trung trực của ME, Oy là trung trực của MF.

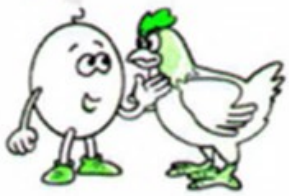
EM CÓ BIẾT ?

Tại sao các cột điện lại thẳng hàng ?

Có nhiều hiện tượng thực tế rất đơn giản nhưng ít người để ý tới, chẳng hạn: *Tại sao các cột điện lại thẳng hàng*? Nhờ kiến thức về bất đẳng thức tam giác, ta sẽ giải thích được hiện tượng này. Giả sử ta cần đi từ địa điểm A đến địa điểm B. Nếu ta không đi theo đoạn thẳng AB mà đi theo đường vòng qua địa điểm C thì đường đi sẽ dài hơn, vì AC + CB > AB. Bây giờ giả sử cần kéo một đường dây điện từ địa điểm A đến địa điểm B. Nếu các cột điện thẳng hàng (tất cả nằm trên đoạn AB) thì độ dài đường dây điện bằng đoạn AB.

Nếu các cột điện không thẳng hàng thì độ dài đường dây điện sẽ lớn hơn AB. Do đó khi tải điện đi xa, người ta cố gắng tìm các vị trí thích hợp để lắp đặt các cột điện sao cho chúng thẳng hàng, tiết kiệm chi phí về đường dây.

Tại sao các cột điện lại thẳng hàng?

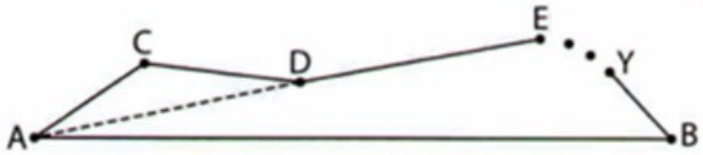


GIẢI THÍCH CỦA BẠN CHICKEN

Giả sử các cột điện trung gian C, D, E,... ,Y không nằm trên đường thẳng AB và A, C, D không thẳng hàng.

Ta có AC + CD > AD, AD + DE ≥ AE, ..., do đó

AC + CD + DE + ...+ YB > AB.



Kết luận tổng quát :
Trong các đường đi từ A đến B, đường thẳng là đường ngắn nhất.

ĐI XA HƠN

Ứng dụng bất đẳng thức tam giác để chứng minh bất đẳng thức số

a) Cho hai số dương a, b. Chứng minh rằng : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

b) Cho hai số dương a, b và a > b. Chứng minh rằng : $\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

CHỨNG MINH CỦA BẠN EGG

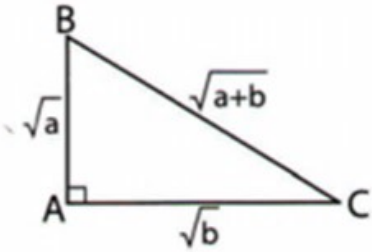
a) Dựng ΔABC vuông tại A, với AB = $\sqrt{a}$, AC = $\sqrt{b}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a + b \Rightarrow BC = \sqrt{a+b}$.

Xét ΔABC, có BC < AB + AC (bất đẳng thức tam giác)

hay $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.



b) Với a > b > 0 ⇒ a – b > 0.

Vẽ ΔMNP vuông tại M, có MN = $\sqrt{b}$, MP = $\sqrt{a-b}$.

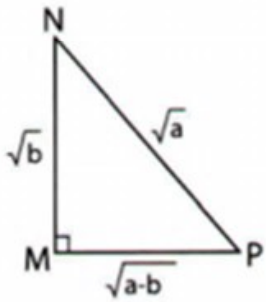
Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$NP^2 = MN^2 + MP^2$

$\Rightarrow NP^2 = b + (a - b) = a \Rightarrow NP = \sqrt{a}$.

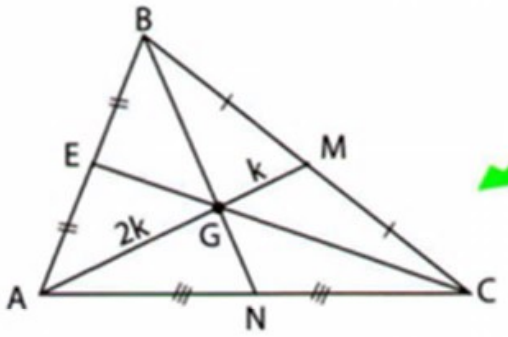
Xét ΔMNP, có : MP > NP – MN (bất đẳng thức tam giác)

$\Leftrightarrow \sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$.



CHỦ ĐỀ 4 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ



Trọng tâm G

$AG = \frac{2}{3}AM$

$BG = \frac{2}{3}BN$

$CG = \frac{2}{3}CE$

*- Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm, điểm đó gọi là **trọng tâm** của tam giác.*

Trọng tâm của tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Phương pháp tìm trọng tâm G của tam giác ABC hoặc chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác:

Cách 1 : Kẻ hai đường trung tuyến, lấy giao điểm G.

Cách 2 : Kẻ một đường trung tuyến AM. Lấy điểm G trên AM sao cho AG = 2GM.

HỎI ĐÁP NHANH

1. Hãy so sánh độ dài hai trung tuyến ứng với cạnh bên trong một tam giác cân.
2. So sánh độ dài ba trung tuyến trong một tam giác đều.
3. Trong tam giác vuông, hãy so sánh trung tuyến ứng với cạnh huyền và cạnh huyền.
4. Trọng tâm của tam giác có thể nằm ngoài tam giác được không ?

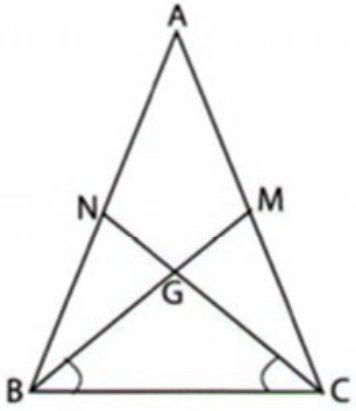
Hãy nhớ đến tính chất của tam giác cân

Các đường trung tuyến luôn nằm trong tam giác

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.



Giải

Giả sử tam giác ABC có hai trung tuyến BM và CN bằng nhau. Gọi G là giao điểm của BM và CN, theo tính chất trọng tâm tam giác ta có $BG = \frac{2}{3}BM$, $CG = \frac{2}{3}CN$, do đó $BG = CG$ (vì $BM = CN$). Tam giác GBC cân tại G nên $\widehat{GBC} = \widehat{GCB}$, suy ra $\Delta MBC = \Delta NCB$ (c. g. c), từ đó $\hat{B} = \hat{C}$ hay tam giác ABC cân.

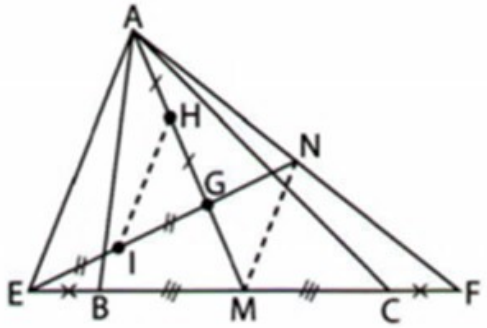
Sử dụng tính chất trọng tâm để tạo ra tam giác cân

Ví dụ 2

Cho ΔABC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $BE = CF$.

a) Chứng minh hai tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm G.

b) AG cắt BC tại M. Lấy H là trung điểm của AG. Nối EG cắt AF tại N. Lấy I là trung điểm của EG. Chứng minh $IH // MN$ và $IH = MN$.



Giải

a) Kẻ trung tuyến AM của ΔABC và trên AM đặt $AG = \frac{2}{3}AM$. Khi đó G là trọng tâm của ΔABC.

Ta có : $MB = MC$ (1) (AM là trung tuyến) ; $BE = CF$ (2) (giả thiết).

Từ (1) và (2) có : $MB + BE = MC + CF$
$\Rightarrow ME = MF$.

Vậy AM là trung tuyến thuộc cạnh EF của ΔAEF. Vì $AG = \frac{2}{3}AM$ nên G cũng là trọng tâm của ΔAEF.

b) Xét ΔGHI và ΔGMN có : $HG = \frac{1}{2}AG$, mà $AG = \frac{2}{3}AM$ nên

$HG = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}AM = \frac{1}{3}AM$; $GM = \frac{1}{3}AM$.

Vậy $HG = GM$.

Tương tự ta có $GI = GN = \frac{1}{3}EN$, $\widehat{HGI} = \widehat{NGM}$ (đối đỉnh).

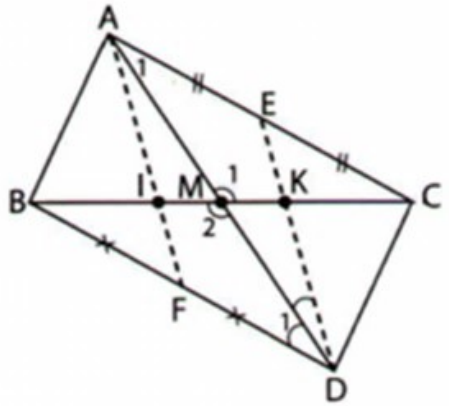
Vậy $\Delta GHI = \Delta GMN$ (c.g.c). Suy ra : HI = NM (cạnh tương ứng) và $\widehat{IHG} = \widehat{NMG}$ (góc tương ứng) $\Rightarrow$ HI//MN (hai góc so le trong bằng nhau).

Ví dụ 3

Cho ΔABC, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA.

a) Chứng minh AB//CD và AB = CD ; AC//BD và AC = BD.

b) Gọi E và F là trung điểm của AC và BD ; AF cắt BC tại I, DE cắt BC tại K, chứng minh : BI = IK = KC.



Lưu ý:

MI = MK, MB = MC

Giải

a) Xét ΔAMC và ΔDMB có AM = MD (giả thiết) ; MC = MB (giả thiết). $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (đối đỉnh).

Vậy $\Delta AMC = \Delta DMB$ (c.g.c).

Suy ra : AC = BD và $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (góc tương ứng)

$\Rightarrow$ AC // BD (hai góc so le trong bằng nhau).

– Tương tự ta có AB = CD và AB//CD.

b) Xét ΔABD có BM là trung tuyến ứng với cạnh AD (AM = MD, giả thiết) và AF là trung tuyến ứng với cạnh BD.

Vậy I là trọng tâm của ΔABD.

Suy ra : $IM = \frac{1}{3}BM$. (1)

Tương tự, K là trọng tâm của ΔACD. Suy ra :

$KM = \frac{1}{3}MC$, (2)

mà BM = MC. (3)

Vậy từ (1), (2) và (3) có : $BI = IK = KC = \frac{1}{3}BC$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

4.1. Chứng minh rằng không tồn tại tam giác có hai đường trung tuyến cùng nhỏ hơn nửa cạnh đối diện.

4.2. Cho ΔABC, trung tuyến BN cắt trung tuyến AI tại O. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho IE = IO. Chứng minh rằng :

a) Độ dài các cạnh của ΔBOE bằng $\frac{2}{3}$ độ dài các đường trung tuyến của Δ ABC.

b) Ta có thể vẽ được một tam giác có độ dài ba cạnh bằng độ dài ba đường trung tuyến của tam giác ABC.

4.3. Cho ΔABC cân tại A. Từ A hạ $AH \perp BC$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm M sao cho HM = AH. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho CN = BC.

a) Chứng minh C là trọng tâm của ΔAMN.

b) AC cắt MN tại I. Chứng minh HI//AN.

4.4. Cho ΔABC, kẻ ba đường trung tuyến AI, BE, CF cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia IA lấy điểm M sao cho IM = IG. Trên tia đối của tia EB lấy điểm N sao cho EN = EG. Trên tia đối của tia FC lấy điểm P sao cho FP = FG.

a) Chứng minh $\Delta MNP = \Delta ABC$.

b) Chứng minh G cũng là trọng tâm của ΔMNP.

NÂNG CAO

4.5. Chứng minh rằng một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

4.6. Chứng minh rằng trong tam giác, tổng độ dài ba đường trung tuyến nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi tam giác đó.

4.7. Cho tam giác ABC có AB < AC, hai trung tuyến BE, CF và trọng tâm G. Chứng minh rằng :

a) BE < CF ; b) $\widehat{GBC} > \widehat{GCB}$.

4.8. Cho tam giác ABC vuông tại A và có AC = b, AB = c. Hai trung tuyến AD, BE cắt nhau tại G. Tìm hệ thức giữa b và c để $AD \perp BE$.

4.9. Về phía ngoài của tam giác nhọn ABC ta dựng các tam giác đều ABE và BCF. Gọi G là trọng tâm tam giác ABE và K là trung điểm của AC. Tính các góc của tam giác GKF.

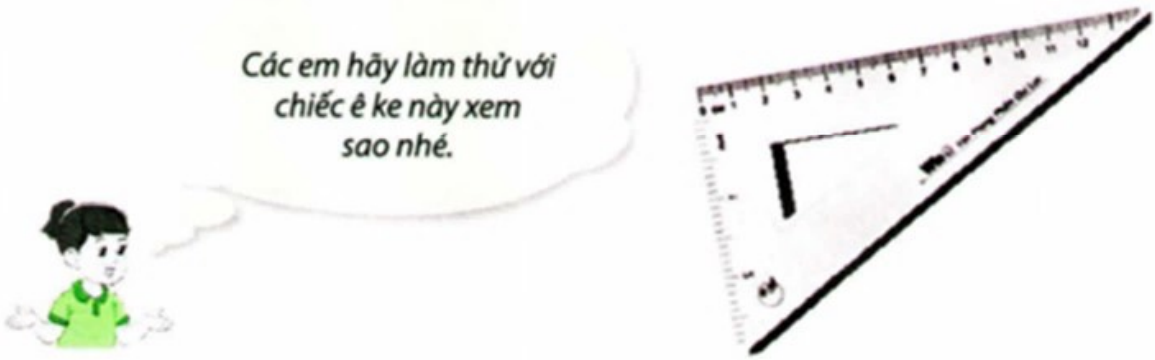
EM CÓ BIẾT ?

Tại sao trọng tâm tam giác bao giờ cũng nằm trong tam giác ?

Vì cả ba đường trung tuyến đều nằm trong tam giác.

Từ "trọng tâm" theo ý nghĩa vật lí là "tâm của trọng lực". Nghĩa là nếu có tấm bìa hình tam giác độ dày như nhau, ta tìm trọng tâm rồi để mũi đinh (đầu ngón tay) vào trọng tâm của tam giác thì tấm bìa sẽ nằm thăng bằng trên mũi đinh. Dù ta có chạm nhẹ vào miếng bìa, miếng bìa dao động rồi lại nằm yên trên mũi đinh. (Các em hãy thực hành thử xem).

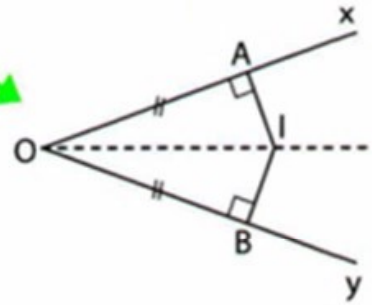
Tuy nhiên, theo ý nghĩa vật lí của trọng tâm, không phải vật thể nào cũng có trọng tâm nằm trên bản thân vật thể đó. Chẳng hạn, nếu ta dùng dây thép uốn gập thành hình tam giác thì trọng tâm của tam giác này không nằm trên dây thép, mà nó là một điểm "lơ lửng" ở ngoài không gian. Điều đó nghĩa là, ta không tìm được một vị trí nào trên dây thép để đặt mũi đinh vào đó sao cho tam giác dây thép nằm ngang ở vị trí thăng bằng được. Trọng tâm của chiếc nhẫn hay chiếc vòng đeo cổ tay cũng không nằm trên vật thể này.



CHỦ ĐỀ 5 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

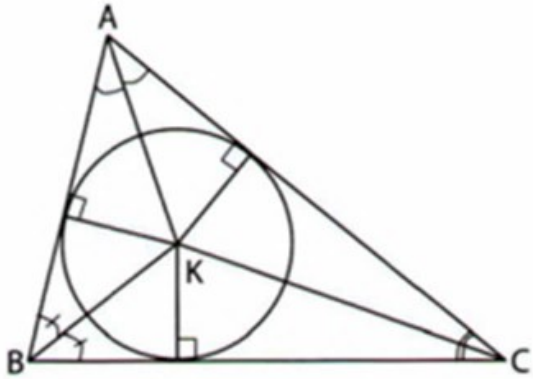
I thuộc phân giác góc xOy ⇔ IA = IB



Tập hợp các điểm nằm trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.

– Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm, điểm này cách đều ba cạnh của tam giác.

– Hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác và phân giác của góc trong còn lại cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác đó.



– Trong tam giác cân : đường phân giác của góc ở đỉnh cũng là đường trung tuyến, đường cao, đường trung trực tương ứng của cạnh đáy.

– Ngược lại : Nếu một tam giác có một đường phân giác đồng thời là đường trung tuyến hoặc đường cao thì tam giác đó là tam giác cân.

HỎI ĐÁP NHANH

1. Muốn tìm điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh, ta làm thế nào ?
2. Tại sao trong tam giác cân, đỉnh, trọng tâm và giao điểm ba đường phân giác thẳng hàng ?
3. Tại sao trong tam giác cân, đường phân giác của góc ngoài ở đỉnh song song với cạnh đáy ?

Trong tam giác cân, đường trung tuyến có là đường phân giác không ?

Lưu ý tính chất góc ngoài của tam giác

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho góc $\widehat{xOy}$, trên Ox lấy hai điểm A và B. Trên Oy lấy hai điểm C và D sao cho OA = OC ; OB = OD. Kẻ Cm và Dm' song song với Ox. Kẻ An và Bn' song song với Oy. Biết An và Cm cắt nhau tại E ; Bn' cắt Dm' tại F. Chứng minh O, E, F thẳng hàng.

E và F cùng nằm trên đường thẳng đi qua O ?

Giải

- Nối OE, xét ΔOAE và ΔOCE có OE chung; $\widehat{O_1} = \widehat{E_2}$ (so le trong) và $\widehat{O_2} = \widehat{E_1}$ (so le trong). Vậy ΔOAE = ΔOCE (g.c.g)

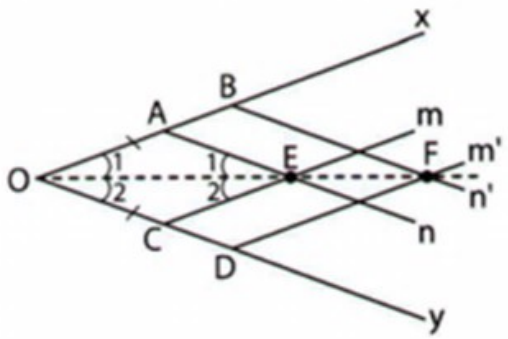
⇒ AE = OC. Mà OA = OC nên OA = AE (cùng bằng OC). Vậy ΔOAE cân tại A

⇒ $\widehat{O_1} = \widehat{E_1}$, mà $\widehat{O_2} = \widehat{E_1}$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

Suy ra OE là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Tương tự, OF là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Vậy OE và OF cùng là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ nên tia OE trùng tia OF hay ba điểm O, E, F thẳng hàng.



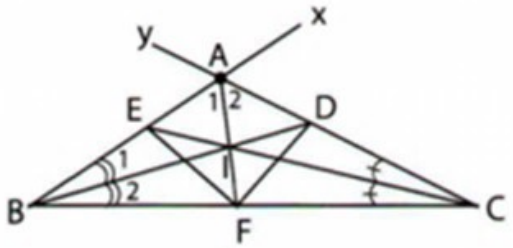
Ví dụ 2*

Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120^\circ$. Hai đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I.

a) Tính số đo góc BIC.

b) Nối AI kéo dài cắt BC tại F. Chứng minh $DF \perp FE$.

Đường nối đỉnh với giao của hai phân giác sẽ là phân giác



Giải

a) Ta có

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \left(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}\right) = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Vậy $\widehat{BIC} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

b) Xét ΔABC có BI và CI là hai đường phân giác của góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ nên AI cũng là phân giác của góc $\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 60^\circ$. (1)

Mà $\widehat{xAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (hai góc kề bù nhau) (2)

Từ (1), (2) suy ra AC là tia phân giác của góc $\widehat{FAx}$.

- Xét ΔABF có BD là tia phân giác của góc $\widehat{B}$ (giả thiết),

AC là tia phân giác của góc $\widehat{FAx}$ (góc ngoài tại A)

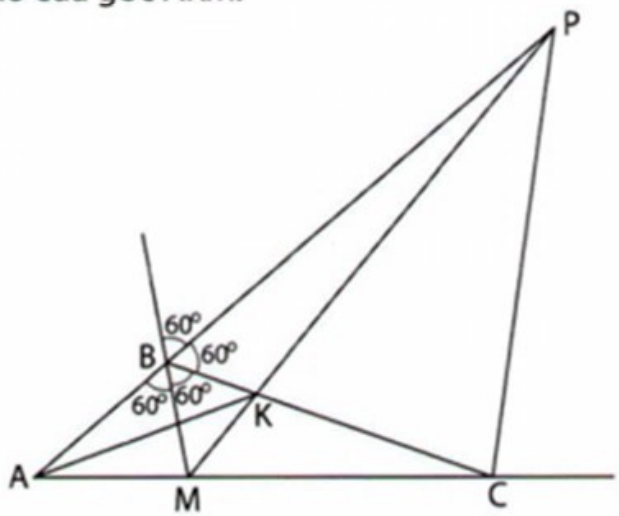
Vậy FD phải là đường phân giác của góc AFC (góc ngoài tại F)

- Chứng minh tương tự, ta có FE là đường phân giác của góc AFB.

Ta có FE và FD là hai tia phân giác của hai góc kề bù. Vậy $FE \perp FD$.

Ví dụ 3*

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 120^\circ$. Kẻ đường phân giác BM. Đường phân giác của góc ngoài ở đỉnh C cắt đường thẳng AB ở P. Đoạn thẳng MP cắt cạnh BC ở K. Tính số đo của góc AKM.



Giải

Theo giả thiết ta có CP và BP là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh C và B của tam giác MBC, suy ra MP là tia phân giác của góc BMC.

Ta cũng có BK và MK là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh B và M của tam giác AMB, suy ra AK là tia phân giác của góc BAC.

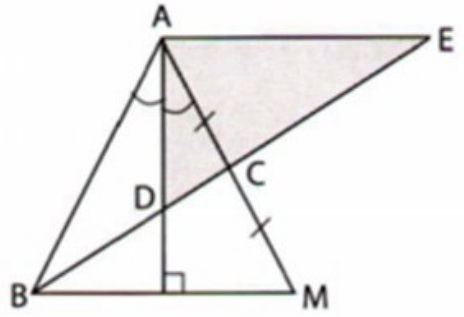
Như vậy $\widehat{AKM} = \widehat{KMC} - \widehat{KAM}$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{BMC} - \widehat{BAM})$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{ABM} = \frac{1}{2}.60^\circ = 30^\circ.$$

Ví dụ 4*

Cho tam giác ABC có phân giác AD thoả mãn BD = 2DC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BC = CE. Chứng minh tam giác ADE là tam giác vuông.



Giải

Kéo dài AC lấy điểm M sao cho CM = CA, ta có ΔACE = ΔMCB (c.g.c).

Trong tam giác ABM có BC là trung tuyến, BD = 2DC nên D là trọng tâm của ΔABM.

Đường thẳng AD chứa trung tuyến, đồng thời là phân giác nên ΔABM cân, do đó AD ⊥ BM.

Ta lại có $\widehat{AEC} = \widehat{MBC}$ (hai góc tương ứng)

⇒ AE // BM ⇒ AD ⊥ AE.

Vậy tam giác ADE vuông.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

5.1. Cho ΔABC có đường trung tuyến AM đồng thời là phân giác của góc $\widehat{A}$. Chứng minh ΔABC cân tại A.

5.2. Cho ΔABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, các đường phân giác của góc B và C cắt nhau tại I. Chứng minh rằng AC = AB + IB.

5.3. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Lấy điểm M trên Ox, điểm N trên Oy sao cho OM = ON. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với Ox, đường thẳng này cắt Oy tại Q. Qua Q kẻ Qn ⊥ Oy. Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với Oy, đường thẳng này cắt Ox tại P. Từ P kẻ Pm ⊥ Ox. Hai đường thẳng Qn và Pm cắt nhau tại F; NP và QM cắt nhau tại E. Chứng minh ba điểm O, E, F thẳng hàng.

5.4. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng AB và CD.

5.5. Cho ΔABC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho EB = BA. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho FC = CA.

Qua E kẻ đường thẳng song song với AB, qua F kẻ đường thẳng song song với AC, hai đường thẳng này cắt nhau tại P.

a) Chứng minh EA là tia phân giác của góc PEB, FA là tia phân giác của góc PFC.

b) PA kéo dài cắt BC tại Q. Chứng minh AQ là tia phân giác của góc BAC.

NÂNG CAO

5.6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 45°$, M là trung điểm của BC sao cho $\widehat{MAC} = 2\widehat{MAB}$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

5.7. Cho ΔABC (AB > AC), tia phân giác góc A là AD và I là giao điểm của ba đường phân giác trong ΔABC. Từ I hạ IH ⊥ BC (H ∈ BC).

Chứng minh : $\widehat{BIH} = \widehat{CID}$.

5.8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D và E là hai điểm lần lượt trên AC và AB sao cho : $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$; $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$.

Gọi I là giao điểm của BD và CE.

Chứng minh rằng : IDE là tam giác cân.

5.9. Cho ΔABC có góc $\widehat{A} = 120^\circ$. Các tia phân giác AD và CE của các góc $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại O. Đường phân giác góc ngoài của tam giác tại đỉnh B cắt đường thẳng AC tại F. Chứng minh :

a) $BO \perp BF$. b) $\widehat{BDF} = \widehat{ADF}$.

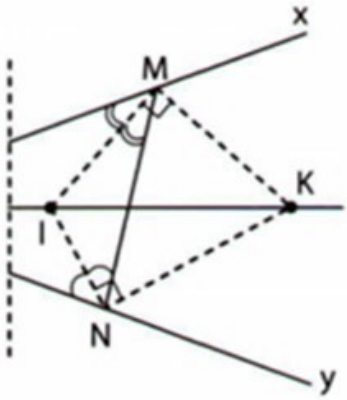
c) Các điểm D, E, F thẳng hàng.

5.10. Cho tam giác ABC nhọn và đường trung tuyến CM, đường phân giác BK, đường cao AH. Chứng minh rằng nếu MHK là tam giác đều thì ABC cũng là tam giác đều.

EM CÓ BIẾT ?

KẺ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA GÓC CÓ ĐỈNH Ở NGOÀI TỜ GIẤY

Cho góc xOy có đỉnh O ở ngoài trang giấy. Làm thế nào để vẽ đường phân giác của góc xOy ?



– Trên Ox lấy điểm M ; trên Oy lấy điểm N sao cho tia phân giác của góc OMN và tia phân giác của góc MNO cắt nhau tại I (I ở trong tờ giấy). Tại M kẻ đường vuông góc với MI. Tại N kẻ đường vuông góc với NI. Hai đường vuông góc đó cắt nhau tại K.

Em hãy giải thích tại sao IK nằm trên đường phân giác của góc xOy.

Các em thử xem còn cách giải quyết nào nữa không?

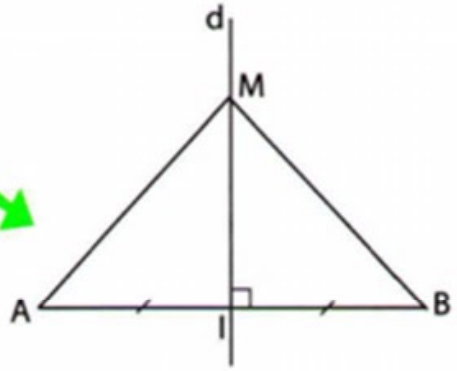
Sử dụng tính chất các tia phân giác của hai góc kề bù, tính chất hai đường phân giác ngoài và đường phân giác trong của tam giác.

CHỦ ĐỀ 6 ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

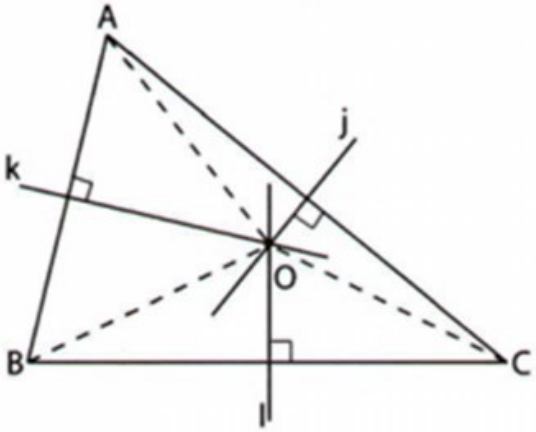
$d \perp AB$, $IA = IB$

$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$



Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó.

Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.



Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

Trong tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến và đường phân giác ứng với cạnh đáy.

Ngược lại, nếu một tam giác có đường trung trực của một cạnh đồng thời là đường trung tuyến hoặc đường phân giác ứng với cạnh đó thì tam giác đã cho là tam giác cân.

HỎI ĐÁP NHANH

1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Khi nào thì các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC cắt nhau ? Song song ?
2. Tại sao trong tam giác, giao điểm ba đường trung trực của ba cạnh cách đều ba đỉnh của tam giác đó ?
3. Trong tam giác vuông thì giao điểm ba đường trung trực là điểm nào ?
4. Trong tam giác đều, giao điểm của ba đường trung trực trùng với giao điểm của ba đường phân giác. Tại sao ? Trong tam giác bất kì, tính chất ấy còn đúng không ? Lấy ví dụ minh hoạ.

Điều kiện để hai đường thẳng song song là gì ?

Liên hệ tính chất trung tuyến của tam giác vuông

Hãy lấy ví dụ tam giác cân có góc ở đỉnh cụ thể.

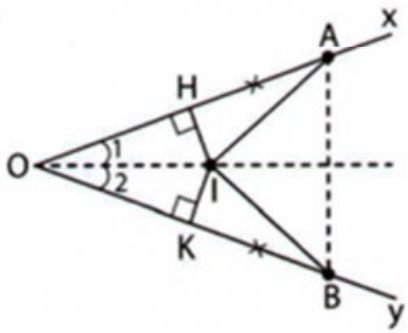
HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn, trên Ox lấy điểm A ; trên Oy lấy điểm B sao cho OA = OB. Đường trung trực của OA và đường trung trực của OB cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) OI là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$;

b) OI là đường trung trực của đoạn AB.



Có thể giải thích câu b) nhờ tam giác OAB cân.

Giải

a) HI là trung trực của OA nên IO = IA (tính chất).

KI là trung trực của OB nên IO = IB (tính chất).

Vậy IO = IA = IB và OA = OB (giả thiết).

Suy ra ΔOIA = ΔOIB (c.c.c). Vậy $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (góc tương ứng). Do đó OI là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

b) Theo giả thiết OA = OB

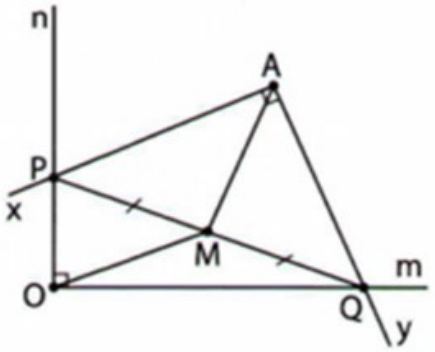
⇒ O cách đều hai mút A và B.

Theo chứng minh trên : IA = IB ⇒ I cách đều hai mút A và B.

Vậy OI là đường trung trực của đoạn AB (có hai điểm cách đều hai mút A và B).

Ví dụ 2

Cho góc vuông mOn và điểm A nằm trong góc. Một góc vuông xAy quay quanh A, các cạnh của nó cắt Om, On tại P và Q. Chứng minh rằng trung điểm M của PQ nằm trên một đường thẳng cố định.

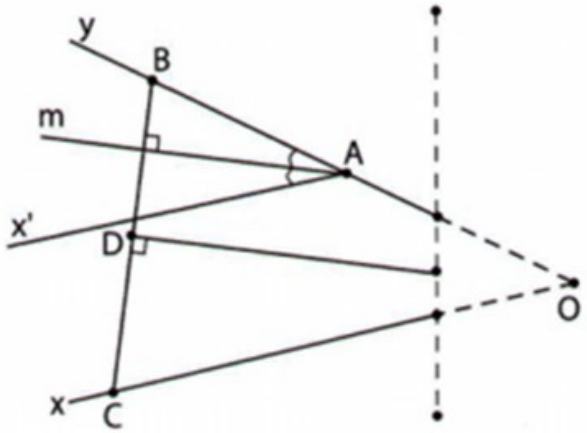


Giải

Ta có AM là trung tuyến của tam giác vuông APQ nên $AM = \frac{1}{2}PQ$, tương tự $OM = \frac{1}{2}PQ$, suy ra MO = MA. Điểm M luôn cách đều O và A, vậy nó nằm trên đường trung trực của OA, đó là một đường thẳng cố định.

Ví dụ 3

Cho góc xOy có đỉnh nằm ngoài tờ giấy. Hãy dựng đường phân giác của góc xOy.



Hãy tạo ra tam giác cân đỉnh O

Giải

Từ điểm A trên Oy kẻ tia Ax' // Ox (tia này nằm trong tờ giấy). Dựng tia phân giác Am của góc x'Ay. Từ điểm B trên Ay dựng đường vuông góc với Am, cắt Ox tại C. Dựng đường trung trực của BC, đường trung trực này chính là đường phân giác của góc xOy.

Thật vậy, theo cách dựng ta có tam giác OBC là tam giác cân tại O, do đó đường trung trực của BC cũng là đường phân giác tại đỉnh O, hay là đường phân giác của góc xOy.

Ví dụ 4*

Cho ΔABC cân tại A. Đường phân giác AH và đường trung trực của cạnh AB cắt nhau tại O. Trên cạnh AB và AC lấy điểm E và F sao cho AE = CF.

a) Chứng minh : OE = OF.

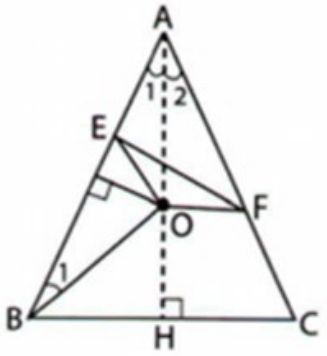
Giải

a) AE + AF = AC = AB (giả thiết) mà AE + BE = AB. Vậy : AF = BE.

Xét ΔBOE và ΔAOF có :

AF = BE (chứng minh trên)

b) Chứng minh khi E và F di động trên hai cạnh AB và AC nhưng AE = CF thì đường trung trực của EF đi qua một điểm cố định.



Xét các vị trí đặc biệt của E và F để dự đoán điểm cố định mà EF đi qua.

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (giả thiết) mà $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (O nằm trên đường trung trực của AB) nên

$\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ (cùng bằng $\widehat{A_1}$);

OB = OA (vì O nằm trên trung trực của AB).

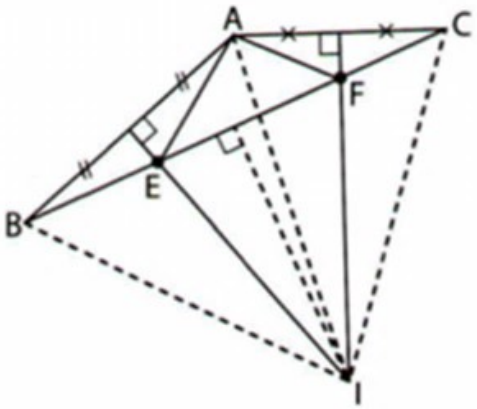
Vậy ΔBOE = ΔAOF (c.g.c) ⇒ OE = OF (cạnh tương ứng).

b) Vì OE = OF nên O nằm trên đường trung trực của EF.

ΔABC cố định nên O cũng cố định. Vậy đường trung trực của EF luôn đi qua O cố định.

Ví dụ 5*

Cho ΔABC có $\widehat{A} = 140^\circ$. Các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I. Tính số đo của góc BIC.



Đường trung trực của cạnh đáy của tam giác cân đồng thời là đường phân giác của góc ở đỉnh.

Giải

Gọi E, F là giao điểm của BC lần lượt với các đường trung trực của AB, AC.

Ta có ΔABE cân tại E, ΔAFC cân tại F.

Vì I là giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ABC nên IA = IB = IC.

Tổng các góc trong của hai tam giác ABI và AIC là 360°, tức là :

$\widehat{IBA} + \widehat{BAI} + \widehat{IAC} + \widehat{ACI} + \widehat{BIC} = 360^\circ$

$\Rightarrow (\widehat{IBA} + \widehat{ICA}) + (\widehat{BAI} + \widehat{IAC}) + \widehat{BIC} = 360^\circ$.

Ta có : $\widehat{IBA} = \widehat{BAI}$ và $\widehat{ICA} = \widehat{IAC}$ (các góc ở đáy của tam giác cân).

Vậy $\widehat{IBA} + \widehat{ICA} = \widehat{BAI} + \widehat{IAC}$

$= \widehat{BAC} = 140^\circ$ (giả thiết).

Thay vào tổng trên có :

$140^\circ + 140^\circ + \widehat{BIC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 80^\circ$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

6.1. Cho điểm A nằm trong góc nhọn xOy. Từ A kẻ các đoạn thẳng AB và AC theo thứ tự vuông góc với các tia Ox và Oy. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua các trung điểm của OA và BC thì vuông góc với BC.

6.2. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường trung trực của cạnh AC cắt tia CB tại D nằm ngoài đoạn BC. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho AE = BD. Chứng minh rằng AD = CE.

6.3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Qua A kẻ đường thẳng xy sao cho xy hợp với AB một góc $\widehat{BAx} = 45^\circ$ (góc $\widehat{BAx}$ nằm ngoài ΔABC). Từ B và C hạ $BK \perp xy$, $CI \perp xy$, M là trung điểm của cạnh huyền BC. Chứng minh :

a) MI và MK thứ tự là đường trung trực của đoạn thẳng AC và AB;

b) $\widehat{IMK} = 90^\circ$.

NÂNG CAO

6.4. Cho ΔABC có góc A tù. Tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại O. Lấy điểm E trên cạnh AB. Từ E hạ $EP \perp BO$ ($P \in BC$). Từ P hạ $PF \perp OC$ ($F \in AC$). Chứng minh rằng :

a) OB và OC thứ tự là đường trung trực của đoạn thẳng EP và PF;

b) BE + CF = BC;

c) Khi E di chuyển trên cạnh AB thì đường trung trực của EF luôn luôn đi qua một điểm cố định.

6.5. Cho ΔABC, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh :

a) Đường trung trực của đoạn thẳng EF qua đỉnh A của Δ ABC.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF vuông góc với AI.

c) Khi H di động trên tia IC của ΔABC cố định thì đường trung trực của EF cố định.

6.6. Cho tam giác ABC cân tại A, có $\hat{B} = 36^\circ$. Gọi O là giao điểm ba đường trung trực và I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC.

Chứng minh rằng BC là đường trung trực của đoạn thẳng OI.

6.7. Cho tam giác ABC có góc A tù. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O và cắt BC theo thứ tự tại M và N.

Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc MAN.

6.8. Cho ΔABC cân tại A có $\hat{A} = 40^\circ$. Đường trung trực của AB cắt BC ở D.

a) Tính $\widehat{CAD}$.

b) Trên tia đối của tia AD lấy điểm M sao cho AM = CD. Chứng minh rằng Δ BMD là tam giác cân.

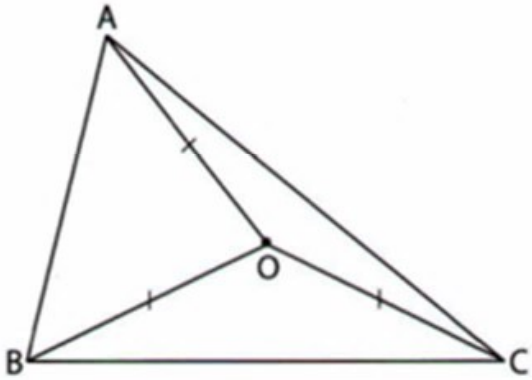
6.9. Cho hai điểm A, B phân biệt, cố định nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Hãy tìm trên đường thẳng d điểm C để tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

EM CÓ BIẾT ?

1.

Nếu O là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác ABC thì OA = OB = OC. Vậy muốn tìm tâm của đường tròn qua ba đỉnh của tam giác ABC, ta chỉ cần kẻ hai đường trung trực của hai cạnh rồi tìm giao điểm O.

Điểm O gọi là *tâm đường tròn ngoại tiếp* tam giác ABC.



2.

Khi nào thì giao điểm của ba đường trung trực nằm trong tam giác ?

Giả sử tồn tại điểm O nằm trong tam giác ABC sao cho OA = OB = OC. Khi đó các tam giác OAB, OAC, OBC là các tam giác cân.

Ta có $\widehat{ACO} = \dfrac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2}, \widehat{BCO} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2}$,

do đó $\hat{C} = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\left(\widehat{AOC} + \widehat{BOC}\right) = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$.

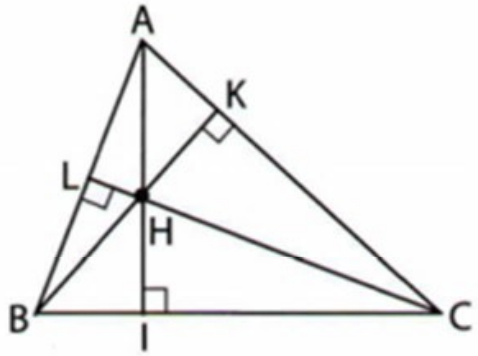
Góc AOB là góc trong tam giác nên luôn nhỏ hơn 180°, do đó $C < 90^\circ$, tức góc C luôn nhọn. Tương tự, các góc A, B cũng luôn nhọn. Vậy giao điểm của ba đường trung trực nằm trong tam giác khi tam giác đó là tam giác nhọn.

Em hãy vẽ một tam giác tù và dựng hai đường trung trực của hai cạnh. Giao điểm hai đường trung trực này nằm ở đâu ?

CHỦ ĐỀ 7 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

AI, BK, CL đồng quy tại H

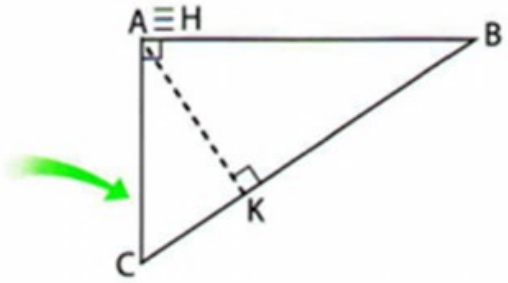


*Ba đường cao của một tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là **trực tâm** của tam giác.*

Trong một tam giác cân, đường cao tương ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến, đường trung trực của tam giác đó.

Đảo lại: Trong một tam giác, nếu có hai trong bốn đường (trung tuyến, phân giác, trung trực, đường cao thuộc một cạnh) trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

HỎI ĐÁP NHANH



1. Nếu tam giác ABC vuông tại A thì trực tâm của tam giác là điểm nào ?

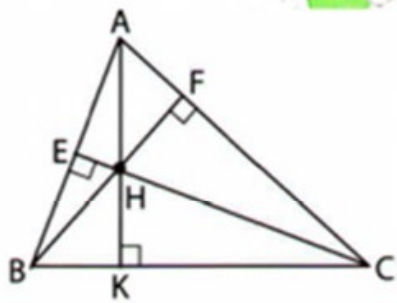
2. Tại sao trong tam giác cân, trọng tâm, trực tâm và đỉnh tam giác cùng nằm trên một đường thẳng?

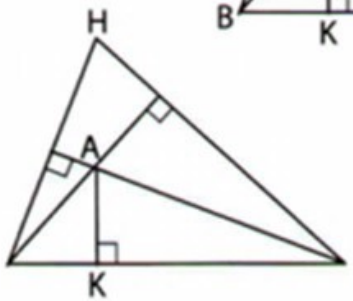
3. Trong tam giác đều, tại sao trực tâm trùng với trọng tâm? Nó còn trùng với các điểm nào nữa ?

4. Trực tâm của tam giác HBC là điểm nào ? Điểm B là trực tâm của tam giác nào ?

5. Đường thẳng AK có đi qua điểm H không ? Tại sao ?

Chúng nằm trên đường thẳng nào ?





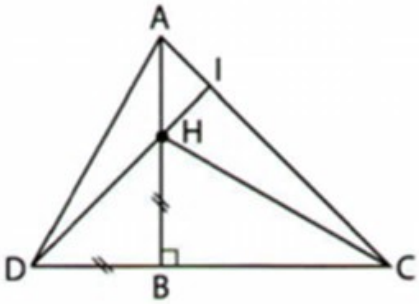
HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho ΔABC vuông cân tại B. Trên cạnh AB lấy điểm H. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BH = BD. Chứng minh rằng :

a) DH ⊥ AC ;

b) CH ⊥ AD.



Giải

a) ΔABC vuông cân tại B, vậy $\hat{C} = 45^o$.

ΔHBD có $\hat{B} = 90^o$ (giả thiết) ; BH = BD (giả thiết).

Vậy ΔDBH vuông cân tại B, suy ra $\hat{D} = 45^o$.

Xét ΔDIC có $\hat{D} = 45^o$; $\hat{C} = 45^o$ (chứng minh trên) vậy

$\hat{C} + \hat{D} = 90^o \Rightarrow \widehat{DIC} = 90^o$. Vậy DH ⊥ AC.

b) ΔADC có AB ⊥ DC (giả thiết) ; DI ⊥ AC (chứng minh a).

Vậy H là trực tâm của ΔADC, suy ra CH là đường cao thứ ba của ΔADC, vậy CH ⊥ AD.

Ví dụ 2

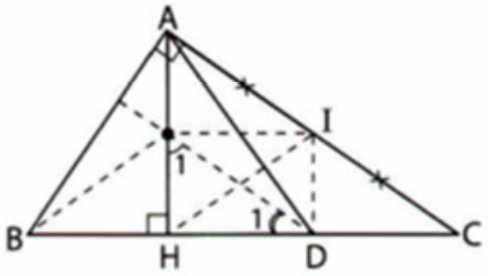
Cho ΔABC vuông tại A. Đường cao AH. Lấy I là trung điểm của AC.

a) Chứng minh I là giao của ba đường trung trực của ΔAHC.

b) Gọi K và D thứ tự là trung điểm của AH và HC. Chứng minh KD//AC.

c) Chứng minh : $BK \perp AD$.

d) Trong hình vẽ thì A là trực tâm của những tam giác nào ?



Giải

a) Dễ dàng chứng minh được $AI = IC = HI = \frac{1}{2}AC$.

Vậy I là giao của ba đường trung trực của ΔAHC.

b) Xét ΔKHD và ΔDIK có KD chung.

$AH \perp BC$; $DI \perp BC \Rightarrow AH//DI \Rightarrow \widehat{HKD} = \widehat{KDI}$ (so le trong)

$IK \perp AH$; $BC \perp AH \Rightarrow KI//BC \Rightarrow \widehat{HDK} = \widehat{IKD}$ (so le).

Vậy $KHD = \Delta DIK$ (g.c.g) $\Rightarrow HK = ID$; $HD = KI$.

- Xét hai tam giác vuông KHD và IDC có HK = ID (chứng minh trên).

HD = DC (DI là trung trực). Vậy $\Delta KHD = \Delta IDC$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{D_1} = \hat{C}$ (góc tương ứng) $\Rightarrow DK//AC$ (hai góc đồng vị bằng nhau).

c) KD//AC (chứng minh b), $AB \perp AC$ (giả thiết) $\Rightarrow KD \perp AB$.

Trong ΔABD có : $AH \perp BD$ (giả thiết), $KD \perp AB$, vậy K là trực tâm của ΔABD, suy ra $BK \perp AD$.

d) A là trực tâm của ΔABC.

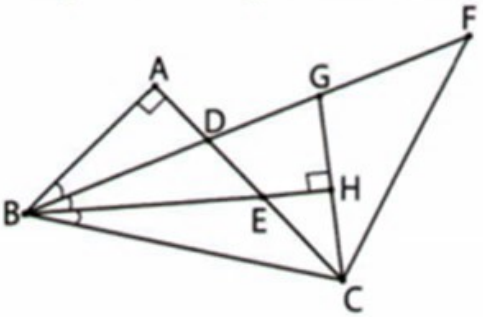
Xét ΔBKD có A thuộc đường cao KH ; A thuộc đường cao qua đỉnh B.

Vậy A là trực tâm của ΔBKD.

Ví dụ 3*

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{DBE} = \widehat{EBC}$. Trên tia đối của tia DB lấy điểm F sao cho DF = BC.

Chứng minh tam giác CDF cân.



Giải

Trên BF đặt đoạn BG = BC thì G nằm giữa D và F và BD = GF. Tam giác BCG cân tại B có BE là tia phân giác nên cũng là đường cao, BE vuông góc với CG tại H.

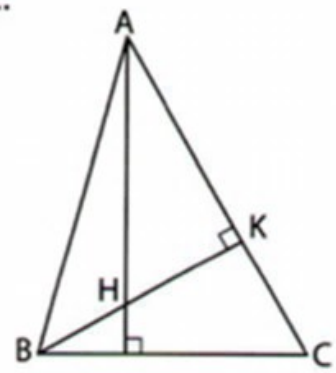
Ta có $\widehat{CDG} = \widehat{CGD}$ $(= 90^\circ - \frac{1}{3}\hat{B})$,

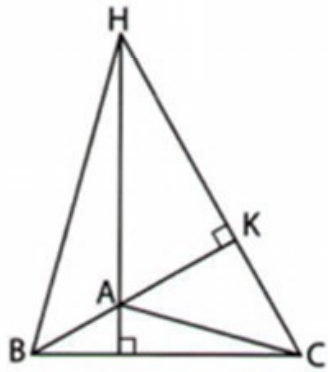
suy ra CD = CG.

Hai tam giác CDB và CGF có CD = CG, BD = GF, $\widehat{CDB} = \widehat{CGF}$ (suy từ trên), nên hai tam giác này bằng nhau (c.g.c), suy ra CB = CF và do đó CF = DF. Vậy tam giác CDF cân.

Ví dụ 4*

Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Biết rằng AH = BC, hãy tính số đo của góc BAC.





Giải

Ta thấy $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$, vì trái lại thì $H \equiv A$

$\Rightarrow AH = 0$: vô lí.

Trường hợp 1 : $\widehat{BAC} < 90^\circ$

Xét hai tam giác vuông AKH và BKC, có :

AH = BC (giả thiết) ; $\widehat{HAK} = \widehat{KBC} \left(= 90^\circ - \hat{C}\right)$.

Do vậy $\Delta AKH = \Delta BKC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow$ AK = BK (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow \Delta AKB$ vuông cân tại A.

Vậy $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Trường hợp 2 : $\widehat{BAC} > 90^\circ$

Chứng minh tương tự trường hợp 1 ta được KH = BK và từ đó suy ra : $\widehat{BHK} = 45^\circ$.

Vì A là trực tâm ΔBHC nên $CA \perp HB \Rightarrow$ hai góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BHC}$ có cạnh tương ứng vuông góc.

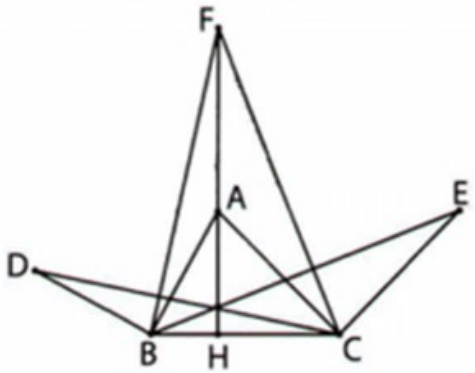
Lại vì $\widehat{BAC} > 90^\circ$ nên $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$.

Từ đó suy ra : $\widehat{BAC} = 135^\circ$.

Ví dụ 5*

Cho tam giác ABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C lấy điểm D sao cho BD = BA và BD vuông góc với BA. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B lấy điểm E sao cho CE = CA và CE vuông góc với CA.

Chứng minh rằng các đường thẳng AH, BE, CD đồng quy.



Giải

Trên tia đối của tia AH lấy điểm F sao cho AF = BC. Dễ dàng chứng minh được

$\Delta DBC = \Delta BAF$ và $\Delta BCE = \Delta FAC$ (c. g. c),

suy ra $BF \perp CD$ và $CF \perp BE$.

Ta có AH, BE và CD là ba đường cao của ΔFBC, vì vậy chúng đồng quy.

Đã có AH là đường cao, cần chứng tỏ BE và CD cũng là các đường cao trong cùng một tam giác

BÀI TẬP

CƠ BẢN

7.1. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của đoạn AH và K là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng : $FK \perp FI$.

b) Biết AH = 6 cm, BC = 8 cm. Tính IK.

7.2. Cho ΔABC có góc A tù. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho CM = CA và lấy điểm N sao cho BN = BA. Đường phân giác của góc B cắt AM tại E. Đường phân giác của góc C cắt AN tại F.

Chứng minh rằng đường phân giác của góc A vuông góc với EF.

7.3. Cho ΔABC có góc A nhọn. Kẻ đường cao BK và CH. Trên tia đối của tia BK lấy điểm E sao cho BE = AC. Trên tia đối của tia CH lấy điểm F sao cho CF = AB. Chứng minh tam giác AEF vuông cân tại A.

NÂNG CAO

7.4. Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên hai tia Ax, By lần lượt lấy các điểm C, D sao cho $AC = \frac{1}{2}BD$. Vẽ BE vuông góc với AD (E thuộc AD) và gọi F là trung điểm của ED.

Chứng minh rằng : $CF \perp BF$.

7.5. Cho tam giác ABC vuông ở C, đường cao CD. Từ một điểm M nằm giữa C và D, ta kẻ một tia song song với CB, cắt DB tại N. Chứng minh rằng AM vuông góc với CN.

7.6. Cho ΔABC. Qua A kẻ đường thẳng $d_1//BC$. Qua B kẻ đường thẳng $d_2//AC$. Qua C kẻ đường thẳng $d_3//AB$. Ba đường thẳng này cắt nhau tại ba điểm E, F và P.

a) Chứng minh các cạnh AB, AC, BC chia Δ EFP thành 4 tam giác bằng nhau.

b) Các đường cao của Δ ABC là các đường trung trực của Δ EFP.

7.7. Cho ΔABC có $\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ$. Trên đường phân giác AD của góc A lấy điểm I. Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho AF = AI. Trên tia đối của tia AC lấy E sao cho AE = AI. Chứng minh :

a) AB và AC lần lượt là các đường trung trực của đoạn thẳng IE và IF.

b) ΔIEF là tam giác đều.

c) $IA \perp EF$.

7.8. Cho ΔABC có $\hat{A} = 90^\circ$, BD là tia phân giác của góc B ($D \in AC$). Từ D hạ $DH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia BA và tia HD cắt nhau tại M.

a) So sánh độ dài hai đoạn AD và DC.

b) Chứng minh $BD \perp MC$.

c) Δ BMC là tam giác gì?

d) Chứng minh : AH//MC.

7.9. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H. Chứng minh rằng :

a) AB + AC > HA + HB + HC.

b) $AB + BC + CA > \frac{3}{2}(HA + HB + HC)$.

7.10. Cho ΔABC, vẽ đường cao AH. Lấy các điểm E và F sao cho AB là đường trung trực của HE, AC là đường trung trực của HF. Nối EF cắt AB tại M và AC tại N. Chứng minh rằng CM, BN và AH đồng quy.

Áp dụng

Cho tam giác ABC nhọn. Hãy tìm một tam giác nội tiếp tam giác ABC, tức là tam giác có ba đỉnh nằm trên ba cạnh của ΔABC, sao cho chu vi của nó nhỏ nhất.

EM CÓ BIẾT ?

1.

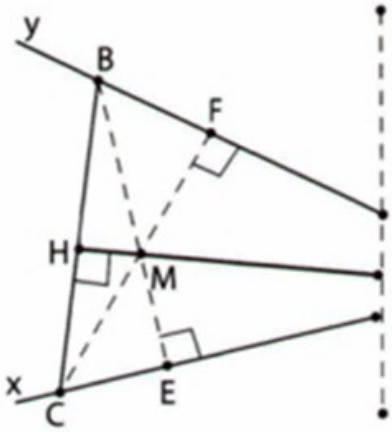
Khi nào trực tâm nằm trong tam giác ?

Để trực tâm tam giác ABC nằm trong tam giác thì cả ba đường cao phải nằm trong tam giác. Chẳng hạn, đường cao AH nằm trong tam giác khi các góc B và C cùng nhọn.

Vậy trực tâm tam giác ABC nằm trong tam giác khi tam giác đó là tam giác nhọn.

2.

Kẻ đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng cắt nhau ngoài tờ giấy.



Cho hai đường thẳng x và y cắt nhau tại điểm A nằm ngoài tờ giấy và điểm M nằm trong tờ giấy. Em có biết cách kẻ qua M một đường thẳng đi qua A ?

Sử dụng tính chất ba đường cao đồng quy dưới dạng : Đường thẳng đi qua trực tâm và vuông góc với một cạnh của tam giác thì đi qua đỉnh đối diện với cạnh đó.

HƯỚNG DẪN - GIẢI
ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chủ đề 1 SỐ LIỆU THỐNG KÊ. TẦN SỐ

1. a) Dấu hiệu của bảng (A) là *số trận bão đổ bộ vào Việt Nam trong thập niên thứ nhất của thế kỉ XXI.*

b) Số đơn vị được điều tra là 10.

c) Số giá trị khác nhau của bảng (A) là 6.

2. Khẳng định đúng: b và d. Khẳng định sai: a và c.

3. Phương án chọn: B.

4.

Giá trị (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
2	2	20%
3	3	30%
7	2	20%
8	1	10%
13	1	10%
14	1	10%
	N = 10	100%

1.1. Học sinh tự thống kê, tuỳ lớp.

1.2. a) Dấu hiệu X ở bảng là số thư viện năm 2012 do địa phương quản lí phân theo địa phương của vùng Tây Bắc. Có tất cả 6 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất ứng với số thư viện năm 2012 do địa phương quản lí phân theo địa phương của vùng Tây Bắc:

Giá trị (x)	10	11	16	36	
Tần số (n)	3	1	1	1	N = 6
Tần suất (f)	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
	≈ 50 %	≈ 16,7 %	≈ 16,7 %	≈ 16,7 %	100%

1.3. a) Dấu hiệu X là số toà soạn báo, tạp chí năm 2011 phân theo địa phương của vùng Tây Nguyên. Có tất cả 5 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất ứng với số toà soạn báo, tạp chí năm 2011 phân theo địa phương của vùng Tây Nguyên:

Giá trị (x)	2	3	4	
Tần số (n)	2	2	1	N = 5
Tần suất (f)	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	
	40%	40%	20%	100%

1.4. a) Dấu hiệu X là độ cao của các cao nguyên vùng Tây Nguyên. Có 9 giá trị trong bảng.

b) Bảng "tần số" và tần suất độ cao của các cao nguyên vùng Tây Nguyên:

Giá trị (x)	500	800	900	1500	
Tần số (n)	3	3	2	1	N = 9
Tần suất (f)	$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	
	≈ 33,3%	≈ 33,3%	≈ 22,2%	≈ 11,1%	100%

1.5. Dấu hiệu X ở bảng là sản lượng và năng suất cà phê của Việt Nam trong 3 năm từ 2011 đến 2013. Có tất cả 3 giá trị.

• Bảng "tần số" và tần suất *sản lượng cà phê* của Việt Nam trong ba năm từ 2011 đến 2013.

Giá trị (x)	1200	1497	1560	
Tần số (n)	1	1	1	N = 3
Tần suất (f)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
	≈ 33,3%	≈ 33,3%	≈ 33,3%	100%

• Bảng "tần số" và tần suất *năng suất cà phê* của Việt Nam trong ba năm từ 2011 đến 2013.

Giá trị (x)	2,18	2,32	2,44	
Tần số (n)	1	1	1	N = 3
Tần suất (f)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
	≈ 33,3%	≈ 33,3%	≈ 33,3%	100%

1.6. a) Dấu hiệu X ở bảng là dự trữ dầu thô lớn nhất của 15 nước trên thế giới. Có 15 giá trị trong bảng.

b) Bảng tần số và tần suất dầu thô lớn nhất của 15 nước trên thế giới:

Giá trị (x)	$10 \le x < 100$	$100 \le x < 150$	$150 \le x < 300$	
Tần số (n)	9	3	3	N = 15
Tần suất (f)	$\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	
	60%	20%	20%	100%

Chủ đề 2 BIỂU ĐỒ. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

1. Khẳng định đúng: d. Khẳng định sai: a, b và c.

2. Phương án chọn: D.

3.

a	2059
b	3365
c	1249
d	758

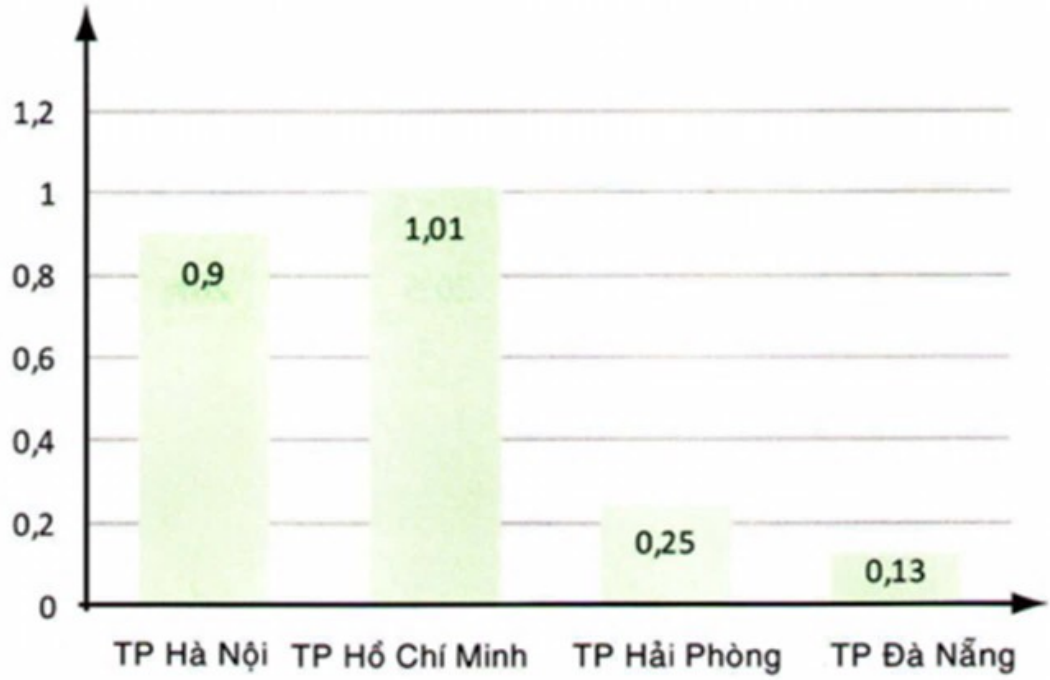
4. A và B → 4 C → 3 D → 2

2.1.

a)

Thành phố	Dân số	Số nước sử dụng 1 ngày	
	(người)	(lít nước)	(triệu m^3 nước)
TP Hà Nội	6844100	903421200	0,90
TP Hồ Chí Minh	7681700	1013984400	1,01
TP Hải Phòng	1904100	251341200	0,25
TP Đà Nẵng	973800	128541600	0,13

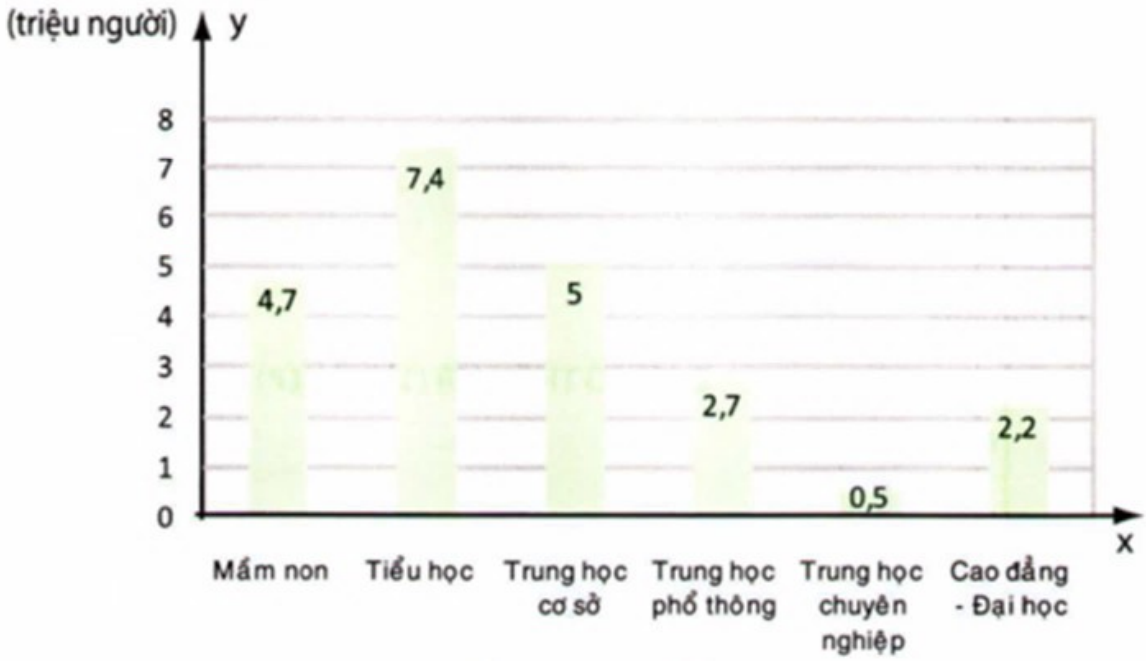
b)



2.2. a)

BẬC HỌC	SỐ NGƯỜI (người)	SỐ NGƯỜI (triệu người, đã làm tròn)	BẬC HỌC	SỐ NGƯỜI (người)	SỐ NGƯỜI (triệu người, đã làm tròn)
Mầm non	4701000	4,7	Trung học phổ thông	2720000	2,7
Tiểu học	7430000	7,4	Trung học chuyên nghiệp	520000	0,5
Trung học cơ sở	4950000	5,0	Cao đẳng - Đại học	2185000	2,2

b)



2.3. Tuổi trung bình của người dân trong tỉnh bằng $32\frac{20}{21}$.

2.4. Bạn BEE đã có 4 bài kiểm tra môn toán.

2.5. Trong nhóm còn lại 9 bạn.

2.6. Bình quân số ki-lô-mét đường sắt, đường thuỷ và đường bộ trên 1 km^2 diện tích khoảng 0,91 km/km^2.

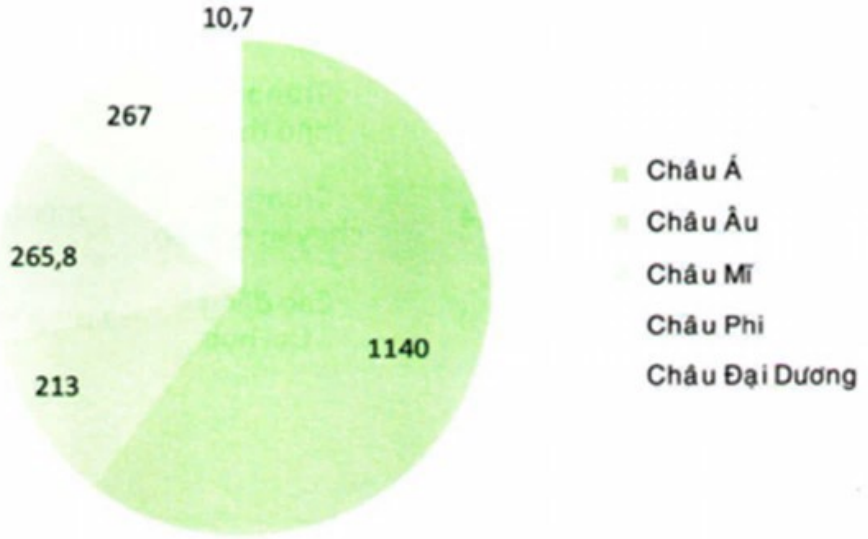
2.7. a)

CHÂU LỤC	SỐ DÂN (triệu người)	Số nước thải (triệu lít)	Số nước thải (triệu tấn)
Châu Á	3800	1140000	1140
Châu Âu	710	213000	213
Châu Mĩ	886	265800	265,8
Châu Phi	890	267000	267
Châu Đại Dương	35,8	10740	10,7

b)

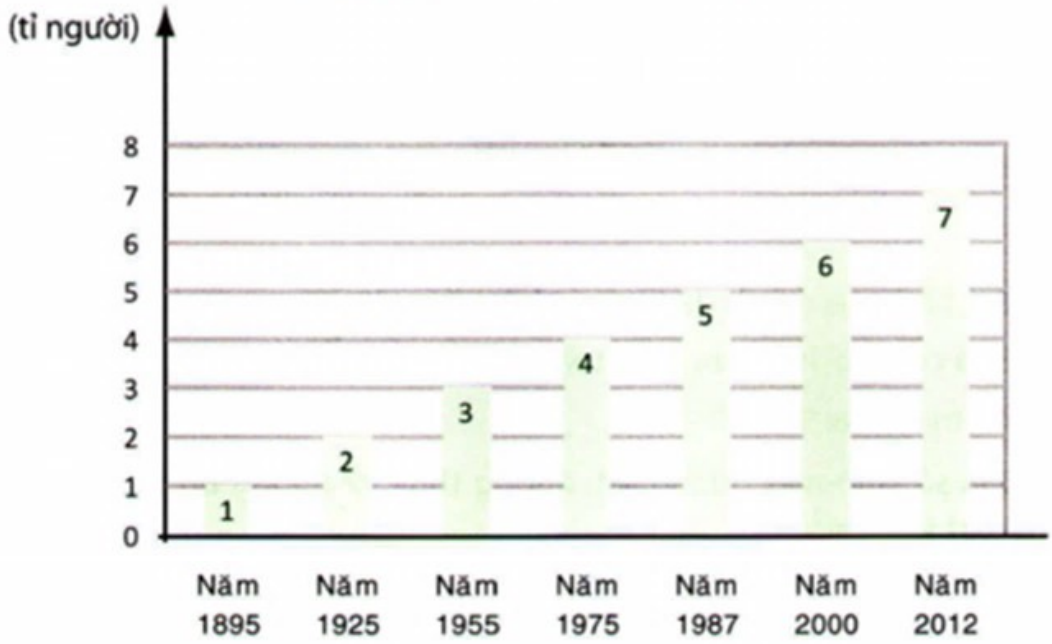
SỐ NƯỚC THẢI BÌNH QUÂN MỘT NGÀY

của các châu lục (triệu tấn)



2.8. a) Biểu đồ

DÂN SỐ THẾ GIỚI (TỈ NGƯỜI)



b) Nhìn sơ đồ ta thấy dân số thế giới tăng với một tốc độ chóng mặt.

c) Nếu tốc độ tăng dân số hằng năm là 1,2%, thì sau khoảng 12 năm nữa (năm 2024) dân số thế giới sẽ đạt mốc 8 tỉ người.

2.9. Có khoảng 2444 sinh viên trên tổng số 100000 người dân

2.10. Số đứng chính giữa bằng 44.

2.11. Điểm trung bình hiện tại của bạn BEE là 6,2.

Chủ đề 3 BIỂU THỨC ĐẠI SỐ. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

1. a) Tích của tổng hai số a và b với hiệu của chúng biểu diễn bằng $(a+b)(a-b)$.

b) Công thức tính diện tích hình tròn với bán kính R và số π là $S = \pi R^2$.

c) Biểu thức x^2 được gọi là *bình phương* của số x.

d) Vận tốc của một chuyển động được tính theo công thức $v = \frac{S}{t}$, trong đó S là quãng đường mà vật tham gia chuyển động đã đi được trong thời gian t.

2. A → 4 B → 1 C → 2 D → 3

3. Khẳng định ĐÚNG: a. Khẳng định SAI: b, c và d.

4. Phương án chọn : C.

3.1.

a) $A(-2) = 31$; $A\left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{15}{16}$; $A\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{61}{81}$; $A(1) = 1$;

b) $B\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{4}$; $B\left(-\frac{1}{4}\right) = 3\frac{1}{16}$; $B(0) = 1$; $B\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$; $B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$;

c) Trường hợp 1: C = 26, trường hợp 2: C = 12 hoặc 24, trường hợp 3: C =26 hoặc 62.

3.2. $f(0) = -27$, $f(1) = -8$, $f(2) = -1$, $f(3) = 0$.

3.3. $P(-2) = -1$, $P(-1) = 3$, $P(0) = 5$, $P(1) = 5$, $P(2) = 3$.

3.4. a) $A = -0{,}375$; b) $B = 0$.

3.5. a) $x = 1$; b) $|x| = 1$ hoặc $y = -1$; c) $x \in \{-2; 3\}$; d) $x = 0$ hoặc $x = y$.

3.6. $A = B = C = 19$.

3.7. a) Min $(x^2 + 2015) = 2015$ tại $x = 0$;

b) Min $((1-2x)^2 - 12) = -12$ tại $x = 0{,}5$;

c) Min $((x+2)^2 + |x+2| + 22) = 22$ tại $x = -2$;

d) Min $((x-1)^2 + \sqrt{2015}) = \sqrt{2015}$ tại $x = 1$.

3.8. a) Max $(2015 - x^2) = 2015$ tại $x = 0$;

b) Max $\frac{1}{(1-2x)^2 + 25} = \frac{1}{25}$ tại $x = 0{,}5$;

c) Max $(\sqrt{2015} - (x-1)^2) = \sqrt{2015}$ tại $x = 1$;

d) Max $\frac{2015}{|x+2015| + 19} = \frac{2015}{19}$ tại $x = -2015$.

3.9. a) $A = 1; 625$; b) $B = 1\frac{4}{5}; 1\frac{8}{15}$; c) $C = \frac{1}{7}; 1$; d) $D = 1000$.

3.10. a) $A = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$; b) $B = 0$; c) $C = 0$.

3.11. a) Max $A = 13$ tại $x = 16$; b) Min $B = -3$ tại $x = 6$;

c) Max $C = 4$ tại $x = 12$; d) Min $D = -9$ tại $x = 11$.

Chủ đề 4 ĐƠN THỨC. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

1. Phương án chọn: C.

2. A → 2 B → 1 C → 4 D → 3

3. Khẳng định ĐÚNG: a. Khẳng định SAI: b, c và d.

4.

	Đơn thức chưa thu gọn	Rút gọn	Bậc của biến x	Bậc của đơn thức	Hệ số của đơn thức
a	$3^2xyz(3xy)$	$27x^2y^2z$	2	5	27
b	$4x^2y^2(-0,5x^2yz^2)^3$	$-\frac{1}{2}x^8y^5z^6$	8	19	$-\frac{1}{2}$
c	$-\frac{2}{3}a^2x.(-3y)^2.\frac{2}{5}$	$-\frac{12}{5}a^2x.y^2$	1	5	$-\frac{12}{5}$

4.1. a) Biểu thức (2) và (4) là các đơn thức.

b) $A = 2a^2b$, bậc 3; $B = 0,1.a^2b^2c^2$, bậc 6; $C = -111a^2b$, bậc 3; $D = 0,001.a^2b^2c^2$, bậc 6.

c) Các đơn thức A và C đồng dạng với nhau. Các đơn thức B và D đồng dạng với nhau.

d)

Đơn thức	a = – 1 b = 2 c = 4
$A = 2a^2b.$	A = 4
$B = 0,1.a^2b^2c^2$	B = 6,4
$C = -111a^2b.$	C = – 222
$D = 0,001.a^2b^2c^2.$	D = 0,064

4.2. $36ab^2c^4 = (18abc).(2bc^3) = (9bc^2).(4abc^2) = (-6ab^2c^2).(-6c^2)$.

4.3.

	Biểu thức	x = – 1 và y = – 1	
a	$A = xy - 9xy + 5xy + xy;$	$A = -2xy$	$A = -2$
b	$B = x^{2014}y^4 + 2x^{14}y^4(x^{2000}) - 4x^{1024}(x^{990}y^4);$	$B = -x^{2014}y^4$	$B = -1$
c	$C = x^ny^{2n} - 2x^ny^n(y^n) - 6(xy)^ny^n$ ($\forall$ n $\in$ **N***)	$C = -7x^ny^{2n}$	$C = 7.(-1)^n$

4.4. a) $ABC = -8a^2x^4y^2z^6 \le 0 \Rightarrow$ cả 3 đơn thức trên không thể cùng dương được.

b) Khi a = 0, $x \le 0$ và y, $z \ne 0$ thì trong 3 đơn thức trên có thể có đúng 2 đơn thức cùng âm.

4.5. a) Có $a^{2k} = 5 \Rightarrow P = 2a^{6k} - 4 = 2(a^{2k})^3 - 4 = 2.5^3 - 4 = 250 - 4 = 246$.

b) Có $a^{3k} = -5 \Rightarrow Q = 2a^{6k} - 4 = 2(a^{3k})^2 - 4 = 2.(-5)^2 - 4 = 50 - 4 = 46$.

4.6. Trường hợp 1: $x = 0$ và y, z bất kì.

Trường hợp 2: $y = z = 0$ và x bất kì.

4.7. Không thể cùng dương hay cùng âm được.

Chủ đề 5 ĐA THỨC. CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC

1. Phương án chọn: B.

2. Khẳng định đúng: d. Khẳng định sai: a, b và c.

3. a) Bậc của đa thức $P = A + B - C = 6a - 12ab + 8abcd$ là *bậc 4.*

b) Bậc của đa thức $Q = A - B + C = -4a + 8ab + 6abc$ là *bậc 3.*

c) Đa thức $R = A + B + C = 0$ là *đa thức không có bậc.*

4. 1 → c (bậc 5) 2 → d (bậc 7) 3 → a (bậc 2) 4 → b (bậc 3).

5.1. a) $P = 9x^2 + 4y^2$; $Q = x^2 + 2xy - 2y^2$;

$R = 5x^2 - 10xy + 12y^2$; $S = 3x^2 + 8xy - 6y^2$.

b) $M = 6x^2 - 8xy + 10y^2$ và giá trị của M tại $x = y = -1$ là 8.

c) $T = N - M = -(2x - 3y)^2 - 3x^2 \le 0$ với mọi x và y.

5.2. a) $f(x) = -x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 7x - 1$.

b) f(x) là đa thức bậc 4, hệ số tự do bằng – 1 và hệ số cao nhất bằng –1.

c) $f(-1) = -10$; $f(0) = -1$; $f(1) = -12$; $f(-a) = -a^4 - 6a^3 - 9a^2 + 7a - 1$.

5.3. $f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(1) = 2016$.

5.4. a) $M = -a - b + 2d$; b) $N = 3m$.

5.5. a) $T = 2a^2 - 6ab + b^2$; b) $T = -4a^2 + 8ab - b^2$;

c) $T = 6a^2 - 4b^2 - 3c^2$.

5.6. $A(x) = -2x^2 + 2$; $B(x) = 5x^2 - 5x + 5$.

5.7. $f(-0,4) = -2015$.

5.8. a) $A(-5) = 2115$; $A(5) = 2015$; $B(-5) = -45$; $B(5) = 5$.

b) $\varphi(x) = (x - 5)^2 + 5|x - 5| + 2010$ và $\min \varphi(x) = 2010$ tại $x = 5$.

5.9. $a = 0$, $b = 2$ và $c = 1$.

5.10. Dãy số có quy luật $u_n = u_{n+6k}$ ($k \in \mathbf{N}$), do đó $u_{124} = u_4 = a$

5.11. Nhận thấy $P(1) = 0$ nên tổng các hệ số của đa thức sau khi khai triển bằng 0.

Chủ đề 6 NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

1. Phương án chọn: C.

2. Khẳng định đúng: b. Khẳng định sai: a, c và d.

3. a) Đa thức f(x) có nghiệm là $-\frac{3}{2}$.

b) Nếu x_0 là nghiệm của đa thức f(x), thì $\frac{1}{x_0}$ là nghiệm của đa thức h(x).

c) Đa thức $\varphi(x) = f(x) + h(x)$ có nghiệm là -1.

d) Đa thức $\varphi(x) = f(x) - h(x)$ có nghiệm là 1.

4. A → a B → a C → d D → b

6.1. a) $\frac{1}{2014}$ b) $x \in \{2014; 2015\}$ c) $x = \pm 9$ d) $x \in \{5; 0\}$.

6.2. Các số $-3; -2; -1$ là nghiệm của đa thức.

6.3. Chứng minh không tìm được giá trị của x để đa thức bằng 0.

6.4. a) $m = 1$ b) $m \in \{-2; 0\}$ c) $m = 45$.

6.5. a) $P = 12x^2 - 3x + 4$ $Q = 2x^2 - 15x + 18$

$R = 4x^2 + 7x - 8$ $S = 6x^2 + 5x - 6$

b) $M = P + Q + R - S = 4A = 12x^2 - 16x + 20$

$x = 0 \Rightarrow M = 20$; $x = 0,5 \Rightarrow M = 15$;

$x = 1 \Rightarrow m = 12 - 16 + 20 = 16$.

6.6. $x = \frac{b}{a}$.

6.7. Thay $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0$. Mặt khác, $x \neq -1$ thì $x^3 \neq -1$ tức là $x^3 + 1 \neq 0$.

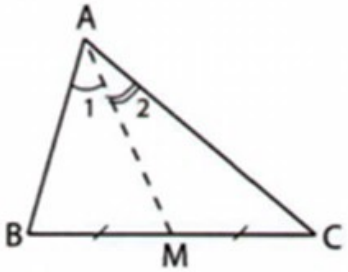
Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất.

6.8. $x = \frac{1}{x_0}$.

6.9. Có đa thức $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$.

PHẦN HÌNH HỌC

Chủ đề 1 QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC



1.1. a) Trong ΔABM có : $AM > BM \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{A_1}$ (1)

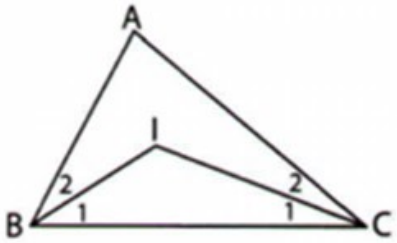
- Trong ΔAMC : vì $AM > MC$ nên $\widehat{C} > \widehat{A_2}$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2) có $\widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A}$.

Mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$ nên $\widehat{A} < 90^o$. Vậy $\widehat{A}$ nhọn.

b), c) Chứng minh tương tự.

Lưu ý. Dựa vào quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác, ta cũng chứng minh được kết quả quen thuộc : Trong tam giác vuông, trung tuyến thuộc cạnh huyền dài bằng nửa cạnh huyền.



1.2. a) Xét ΔBIC, có :

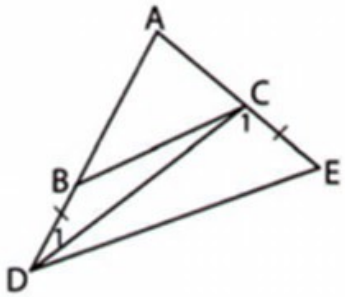
$$\widehat{BIC} = 180^o - \left(\widehat{B_1} + \widehat{C_1}\right) = 180^o - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

$$= 180^o - \frac{180^o - \widehat{A}}{2} = 90^o + \frac{\widehat{A}}{2} > 90^o$$

$\Rightarrow$ BC là cạnh lớn nhất của ΔBIC.

b) Xét ΔBIC, vì $IB < IC \Rightarrow \widehat{B_1} > \widehat{C_1}$ (quan hệ góc – cạnh đối diện)

$\Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ACB} \Rightarrow AC > AB$ (quan hệ góc – cạnh đối diện).



1.3. Vì $\widehat{C_1}$ là góc ngoài của ΔACD tại đỉnh C nên $\widehat{C_1} = \widehat{D_1} + \widehat{A} > \widehat{D_1}$.

Xét ΔECD và ΔDBC, ta có :

CD là cạnh chung ;

$\widehat{C_1} > \widehat{D_1}$ (chứng minh trên) ;

CE = BD (giả thiết).

Do đó DE > BC (xem nhận xét ở ví dụ 3).

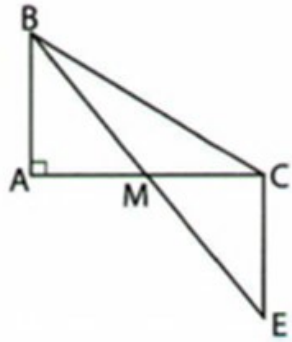
1.4. a) Chứng minh $\Delta ABM = \Delta CEM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{ECM}$ mà $\widehat{BAM} = 90^o$, vậy $\widehat{ECM} = 90^o$

$\Rightarrow \Delta CEM$ vuông tại C.

ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$; BC là cạnh huyền $\Rightarrow BC > AB$;

mà $AB = CE \Rightarrow BC > CE$.



b) $\widehat{ABM} = \widehat{CEM}$ (do $\Delta ABM = \Delta CEM$)

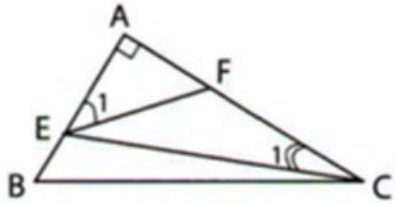
mà $\widehat{CEM} > \widehat{MBC}$ (do $BC > CE$).

Vậy $\widehat{ABM} > \widehat{MBC}$.

1.5. Xét ΔAEF có $\widehat{EFC} = \widehat{A} + \widehat{E_1}$ (góc ngoài).

Mà $\widehat{A} = 90^o \Rightarrow \widehat{EFC} > 90^o$. Trong ΔEFC có góc $\widehat{EFC}$ tù

nên cạnh CE là lớn nhất $\Rightarrow CE > EF$. (1)



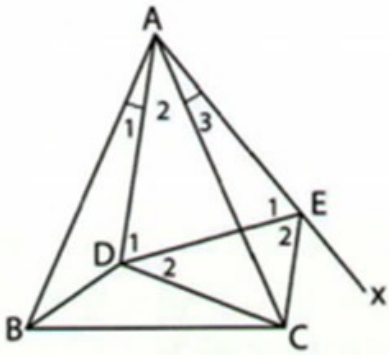
Xét ΔAEC có : $\widehat{BEC} = \widehat{A} + \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{BEC} > 90^o$.

Trong ΔBEC có $\widehat{BEC}$ là góc tù nên cạnh BC là lớn nhất

$\Rightarrow BC > CE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC > EF$.

1.6. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAD}$.



Trên tia Ax, lấy điểm E sao cho AE = AD.

Khi đó : $\Delta ADB = \Delta AEC$ (c.g.c)

$\Rightarrow DB = EC$ (1)

và $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$. (2)

Vì $\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AEC} > \widehat{ADC}$

$\Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} > \widehat{D_1} + \widehat{D_2}$.

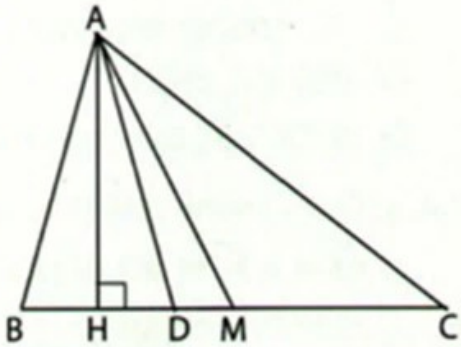
Mặt khác, ta có $\widehat{D_1} = \widehat{E_1}$ (do ΔAED cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{E_2} > \widehat{D_2}$.

Xét ΔCDE, vì $\widehat{E_2} > \widehat{D_2}$ (chứng minh trên) nên $DC > EC$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $DC > DB$ (đpcm).

1.7. Nhận thấy hai điểm M và D luôn nằm trên tia CB.

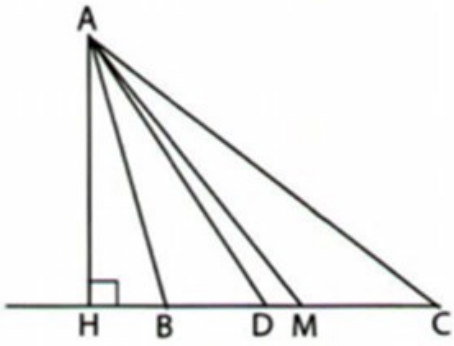


Xét ΔABC, vì $AB < AC$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{C} < \widehat{B} \Rightarrow$ H thuộc tia CB.

Do đó các tia AM, AD, AH cùng thuộc nửa mặt phẳng chứa điểm B có bờ là đường thẳng AC. (*)

Ta sẽ chứng minh : $\widehat{CAM} < \widehat{CAD} < \widehat{CAH}$.

Xét ΔABC, vì $AB < AC$ (giả thiết) và M là trung điểm của BC, nên theo ví dụ 3, ta có :



$\widehat{CAM} < \widehat{BAM} \Rightarrow \widehat{CAM} + \widehat{CAM} < \widehat{BAM} + \widehat{CAM}$

$\Rightarrow 2.\widehat{CAM} < \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{CAM} < \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{CAD}$. (1)

Xét ΔHAC vuông ở H, có :

$\widehat{CAH} = 90^\circ - \hat{C} = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2} - \hat{C}$

$= \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}-\hat{C}}{2} > \dfrac{\hat{A}}{2} = \widehat{CAD}$ (2)

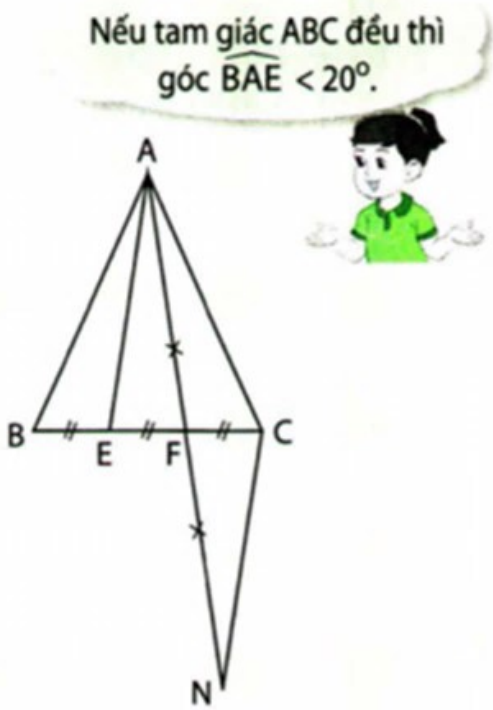
(vì $\dfrac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{2} = 90^\circ$; $\hat{B}-\hat{C} > 0$).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CAM} < \widehat{CAD} < \widehat{CAH}$.

Kết hợp với (*) ta suy ra : Tia AD nằm giữa hai tia AH và AM.

1.8. a) $\widehat{EAF} > \widehat{FAC} = \widehat{BAE}$.

b) Nếu BC chia thành 4 đoạn nhỏ bằng nhau thì góc A được chia thành 4 góc nhỏ trong đó hai góc giữa bằng nhau, hai góc ngoài bằng nhau, hai góc nằm giữa lớn hơn hai góc ngoài.



1.9. Từ giả thiết, ta có :

$\widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$

$= 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$ (1)

$\hat{B}_2 = \widehat{ABC} - \hat{B}_1 = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$

$\hat{C}_2 = \widehat{ACB} - \hat{C}_1 = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

Giả sử $MA \neq MB$, ta xét hai trường hợp :

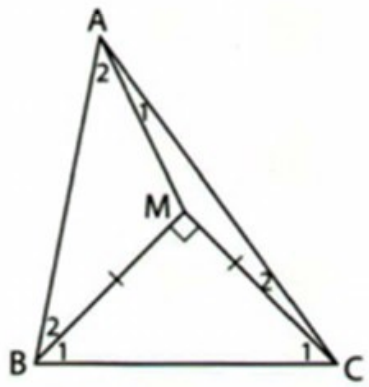
1) Trường hợp $MA < MB$:

Xét ΔMAB, vì $MA < MB$ nên $\hat{B}_2 < \hat{A}_2$.

Vì $MC = MB$ nên $MA < MC$, do đó : $\hat{C}_2 < \hat{A}_1$.

Suy ra : $\hat{B}_2 + \hat{C}_2 < \hat{A}_1 + \hat{A}_2$

hay $30^\circ + 15^\circ = 45^\circ < \widehat{BAC}$: trái với (1).

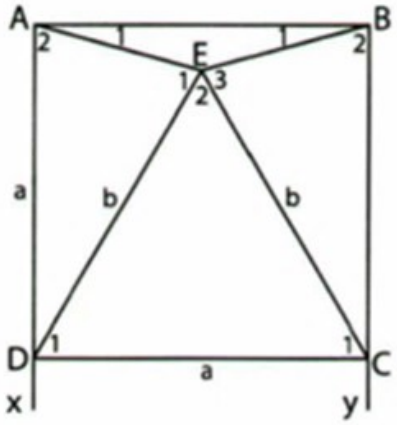


2) Trường hợp $MA > MB$:

Xét tương tự dẫn đến $45^\circ > \widehat{BAC}$: trái với (1).

Vậy $MA = MB$.

1.10. Vì $\Delta AED = \Delta BEC$ (c.g.c) nên $ED = EC = b$.



Ta có : $\widehat{A_2} = 75^\circ, \widehat{AEB} = 150^\circ$.

Ta hãy chứng minh $\widehat{AED} = \widehat{BEC} = 75^\circ$.

Giả sử $\widehat{AED} \neq 75^\circ$, ta xét hai trường hợp :

1) Trường hợp $\widehat{AED} > 75^\circ$:

Xét ΔAED, có : $\widehat{E_1} > 75^\circ = \widehat{A_2} \Rightarrow AD > ED$, tức là $a > b$. (1)

Mặt khác, vì $\widehat{AED} > 75^\circ$ nên $\widehat{E_2} < 60^\circ$.

Tam giác CED cân tại E mà $\widehat{E_2} < 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1} > 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{C_1} > \widehat{E_2} \Rightarrow ED > CD$, tức là $b > a$: mâu thuẫn với (1).

2) Trường hợp $\widehat{AED} < 75^\circ$: Chứng minh tương tự ta cũng dẫn tới mâu thuẫn.

Vậy $\widehat{AED} = 75^\circ$. Từ đó suy ra tam giác CDE đều.

Chú ý : Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp "ngược" như sau:

Lấy trong hình vuông điểm E' sao cho tam giác E'CD là tam giác đều, sau đó chứng minh E' trùng với E.

Chủ đề 2 QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

2.1. a) AB = AC (giả thiết)

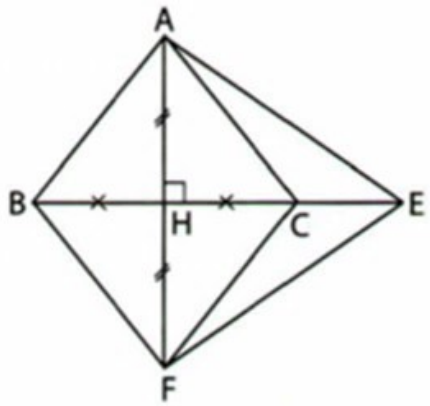
$\Rightarrow$ HB = HC (đường xiên bằng nhau nên hình chiếu bằng nhau)

AH = HF (giả thiết)

$\Rightarrow$ CA = CF và BA = BF

(hình chiếu bằng nhau nên đường xiên bằng nhau).

Từ đó suy ra : AB = AC = CF = BF.



b) AH = HF (giả thiết)

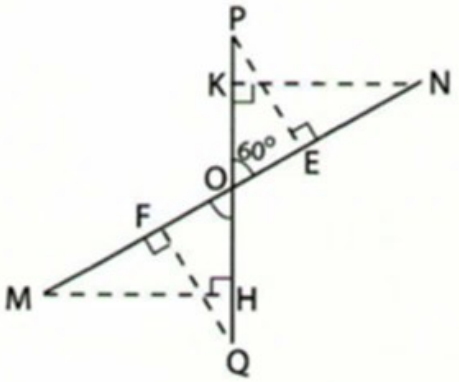
$\Rightarrow$ AE = FE (hình chiếu bằng nhau). Vậy ΔAEF cân tại E.

2.2. *HD :* Sử dụng quan hệ hình chiếu và đường xiên.

2.3. a) Muốn tìm hình chiếu của đoạn MN trên PQ ta tìm hình chiếu của hai điểm M, N trên PQ.

Từ M hạ MH ⊥ PQ và từ N hạ NK ⊥ PQ, ta có HK là hình chiếu của MN trên đường thẳng PQ.

Tương tự đối với hình chiếu của PQ trên đường thẳng MN.



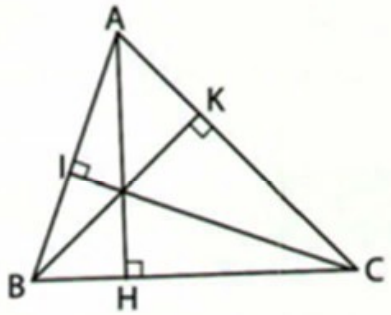
b) *Đáp số :* HK = 6cm, EF = 4cm.

2.4. a) Ta có AH ≤ AC (đẳng thức xảy ra khi $\widehat{C} = 90^o$)

AH ≤ AB (đẳng thức xảy ra khi $\widehat{B} = 90^o$)

Do hai đẳng thức không xảy ra đồng thời nên

$2AH < AC + AB \Rightarrow AH < \dfrac{AB + AC}{2}$. (1)



b) Tương tự có :

$BK < \dfrac{AB + BC}{2}$ (2)

$CI < \dfrac{AC + BC}{2}$ (3)

Cộng theo vế (1) ; (2) ; (3) có :

$AH + BK + CI < \dfrac{AB + AC}{2} + \dfrac{AB + BC}{2} + \dfrac{AC + BC}{2}$.

hay : AH + BK + CI < AB + BC + AC = chu vi Δ ABC.

2.5. Kẻ đường vuông góc AH xuống BC ⇒ H thuộc cạnh BC.

Trên tia CB lấy điểm E sao cho CE = CA.

Trên tia AB lấy điểm F sao cho AF = AH.

Ta có CH < CA nên CH < CE.

Mặt khác, CA < CB nên CE < CB.

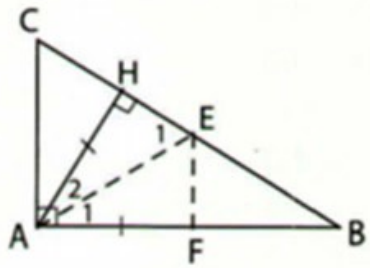
Từ đó, ta có : CH < CE < CB ⇒ E nằm giữa H và B.

Vì AH < AB nên AF < AB ⇒ F nằm giữa A và B.

Lại có CE = CA ⇒ ΔACE cân tại C ⇒ $\widehat{CAE} = \widehat{E_1}$.

Mà $\widehat{CAE} + \widehat{A_1} = 90^o$; $\widehat{E_1} + \widehat{A_2} = 90^o \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Do đó ΔAHE = ΔAFE (c.g.c) ⇒ $\widehat{AHE} = \widehat{AFE}$ (hai góc tương ứng) ⇒ EF ⊥ AB.



Ta có : AH + BC = AF + CE + BE ;

AB + AC = AF + BF + CE.

Mà BE > BF ⇒ AH + BC > AB + AC.

2.6. AB ⊥ AC (giả thiết), Cy ⊥ AC (giả thiết), vậy AB//Cy.

Xét ΔBCN có $\widehat{N} = \widehat{B_1}$ (so le trong), $\widehat{B_2} = \widehat{B_1}$ (giả thiết).

Vậy $\widehat{N} = \widehat{B_2}$ ⇒ ΔBCN cân ⇒ BC = CN.

Tam giác ABC vuông tại A nên AB < BC.

Vậy AB < CN. (1)

Kẻ DH ⊥ BC ta có ΔABD = ΔHBD (cạnh huyền góc nhọn).

Vậy DA = DH, mà DC > DH.

Vậy DC > DA hay DA < DC. (2)

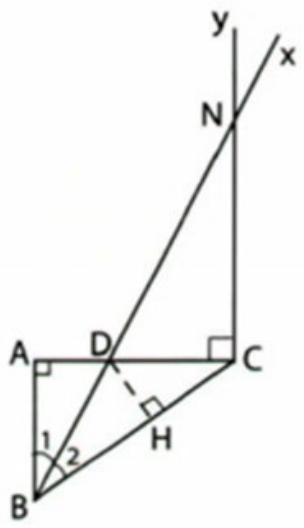
Hai tam giác BCD và NCD có:

CN = BC, CD chung; góc $\widehat{DCN} = 90^\circ > \widehat{BCD}$,

do đó BD < DN. (3).

Cộng (1), (2), (3) theo từng vế ta có :

AB + AD + BD < CN + DC + DN.



Chủ đề 3 QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA TAM GIÁC

3.1. a) Nếu AB là cạnh bên thì ba cạnh là 7cm ; 7 cm và 4cm, thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy chu vi tam giác là 18m.

Nếu AB là cạnh đáy thì ba cạnh là 7cm ; 4cm ; 4cm cũng thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy chu vi là : 15cm.

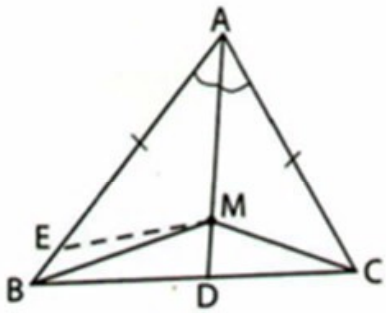
b) Nếu AB là cạnh đáy thì ba cạnh là : 9cm, 4cm, 4cm, không thoả mãn bất đẳng thức tam giác vì 4 + 4 < 9 nên không có trường hợp này.

Nếu AB là cạnh bên thì ba cạnh là 9cm, 9cm, 4cm (thoả mãn bất đẳng thức tam giác). Chu vi là 22cm.

3.2. Trên tia AB lấy điểm E sao cho AE = AC.

Vì AB > AC nên E nằm giữa A và B.

Ta dễ dàng chứng minh được ΔAEM = ΔACM (c.g.c) để suy ra EM = MC. Ta đưa bài toán về xét ΔBEM.



3.3. Giả sử độ dài 3 cạnh là : a, b, c ; a ≥ b ≥ c > 0.

Ta có : a < b + c ⇒ a + a < a + b + c.

Suy ra $a < \frac{a+b+c}{2}$.

Từ a ≥ b ; a ≥ c ta có 3a ≥ a + b + c.

Vậy : $\frac{a+b+c}{3} \le a < \frac{a+b+c}{2}$.

3.4. Gọi cạnh đáy là a (cm) thì độ dài mỗi cạnh bên là $\frac{15-a}{2}$ (cm), suy ra a là số tự nhiên lẻ. Mặt khác, $\frac{15-a}{2}+\frac{15-a}{2}>a$ nên $15-a>a$ hay $a<7,5$.

Vậy a có thể nhận các giá trị 1; 3; 5; 7 (cm).

3.5. Trong ΔAMB có : $AM + MB > c$ (bất đẳng thức trong tam giác),

trong ΔAMC có : $AM + MC > b$,

trong ΔBMC có $BM + MC > a$.

Suy ra $2(AM + MB + MC) > a + b + c$

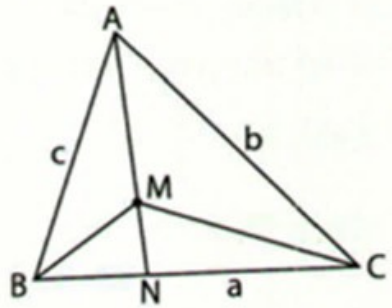
hay : $AM + BM + CM > \frac{a+b+c}{2}$.

Ta lại có $AM + MN < AC + NC$, $BM < MN + NB$

$\Rightarrow MA + MB < CA + CB$.

Tương tự, $MB + MC < AB + AC$, $MC + MA < BC + BA$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức cuối ta được điều phải chứng minh.



3.6. a) Xét ΔABC vuông tại A, có :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$ (định lí Py-ta-go)

$\Rightarrow BC = 5$.

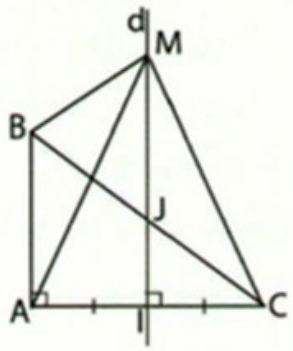
Mặt khác, $\Delta MIA = \Delta MIC$ (c.g.c)

$\Rightarrow MA = MC$ (hai cạnh tương ứng).

Do vậy : $MA + MB = MC + MB$.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có :

$MC + MB \geq BC$ hay $MA + MB \geq 5$.

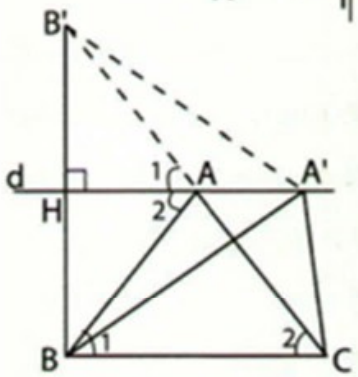


b) Vì $MA + MB \geq 5$ (chứng minh trên)

nên $MA + MB$ nhỏ nhất bằng 5 khi và chỉ khi $MB + MC = BC$

$\Leftrightarrow$ M nằm trên đoạn BC

$\Leftrightarrow M \equiv J$, với J là giao điểm của d và BC.



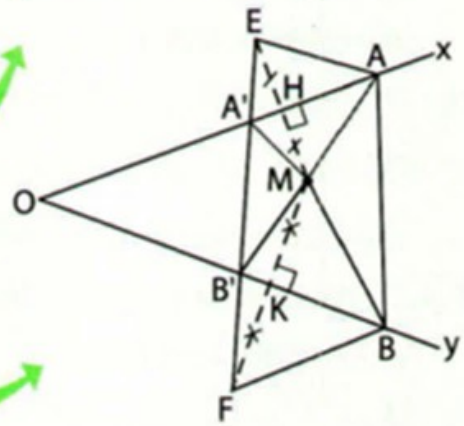
3.7. Lấy điểm B' sao cho d là đường trung trực của BB'.

Ta có B', A, C thẳng hàng.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác và để ý

$AB = AB'$, $A'B = A'B'$.

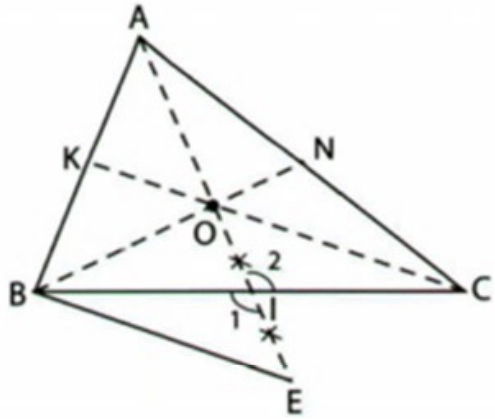
3.8. Chu vi ΔMAB nhỏ nhất khi $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, trong đó A' và B' lần lượt là giao của EF với Ox và Oy.



Chủ đề 4 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

4.1. HD. Sử dụng kết quả : Nếu trung tuyến nhỏ hơn nửa cạnh tương ứng thì góc đối diện với cạnh này là góc tù.

4.2. a) Ta chứng minh ΔBOE có các cạnh bằng $\frac{2}{3}$ độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC. Thật vậy :



- Cạnh $BO = \frac{2}{3}BN$. (1)

- Cạnh OE có $OI = IE = \frac{1}{3}AI \Rightarrow OE = \frac{2}{3}AI$. (2)

- $BE = OC = \frac{2}{3}CK$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.

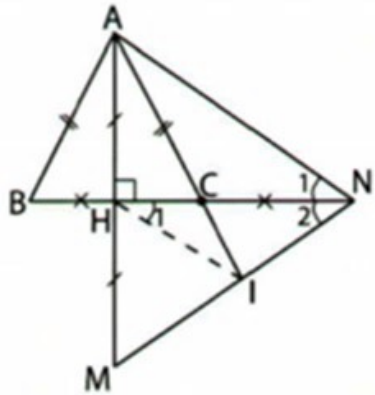
b) ΔBOE tồn tại nên thoả mãn bất đẳng thức tam giác :

$BE - OE < OB < BE + OE$.

Hay : $\frac{2}{3}CK - \frac{2}{3}AI < \frac{2}{3}BN < \frac{2}{3}CK + \frac{2}{3}AI$

$\Rightarrow CK - AI < BN < CK + AI$.Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

4.3. a) NH là trung tuyến (do AH = HM).

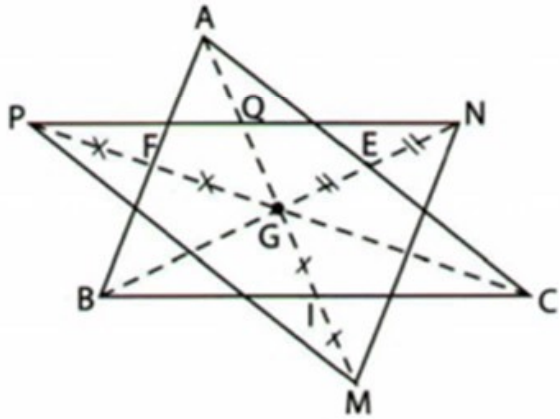


Lại có $CN = \frac{2}{3}HN$.

Vậy C là trọng tâm của Δ ANM.

b) Hãy chứng minh $\widehat{H_1} = \widehat{N_1} \Rightarrow HI//AN$.

4.4. a) Ta chứng minh các cặp tam giác bằng nhau :



$\Delta PGN = \Delta CGB \Rightarrow PN = BC$.

$\Delta PGM = \Delta CGA \Rightarrow PM = CA$.

$\Delta MGN = \Delta AGB \Rightarrow MN = AB$.

Vậy $\Delta ABC = \Delta MNP$ (c.c.c).

b) PN cắt AM tại Q. Hãy chứng minh PQ = QN,

$QG = GI = IM$ hay $QG = \frac{1}{3}QM$.

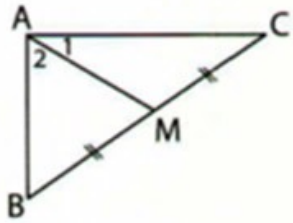
Vậy G là trọng tâm của ΔMNP.

4.5. Từ giả thiết ta có AM = MB = MC.

Vậy ΔAMB cân tại M $\Rightarrow \widehat{A_2} = \hat{B}$, ΔAMC cân tại M $\Rightarrow \widehat{A_1} = \hat{C}$.

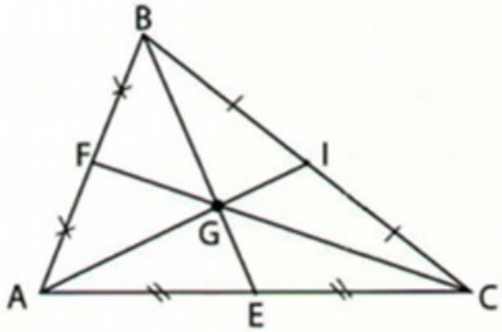
$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \hat{B} + \hat{C}$ mà $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \hat{B} + \hat{C} = 90^o$.



Có thể sử dụng kết quả bài toán này để giải nhiều bài toán khác.

4.6. Xét tam giác ABC có ba đường trung tuyến AI, BE, CF cắt nhau tại G.



Xét ΔBGC có : $BG + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác).

Hay $\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC \Rightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC$ (4)

Tương tự có : $BE + AI > \frac{3}{2}AB$ (5)

$AI + CF > \frac{3}{2}AC$ (6)

Từ (4), (5) và (6) có :

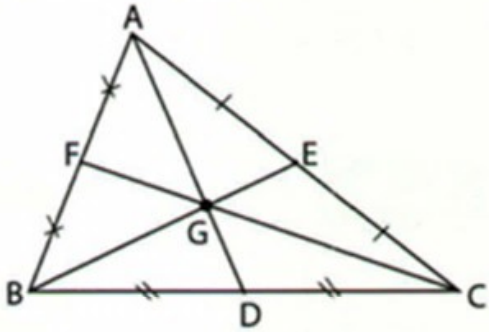
$2BE + 2CF + 2AI > \frac{3}{2}(AB + AC + BC)$

$\Rightarrow BE + CF + AI > \frac{3}{4}(AB + AC + BC)$.

Vậy: $\frac{3}{4}$ chu vi $\Delta ABC < AI + BE + CF$.

Sử dụng ví dụ 2, chủ đề 3 để chứng minh kết quả còn lại.

4.7. a) Vẽ trung tuyến AD đi qua trọng tâm G.



Xét ΔADB và ΔADC, có :

AD : cạnh chung ;

$AB < AC$ (giả thiết) ;

$DB = DC$.

Do đó $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.

Xét ΔGDB và ΔGDC, có :

GD : cạnh chung ; $\widehat{GDB} < \widehat{GDC}$ (chứng minh trên) ; $DB = DC$ (giả thiết).

Do đó $GB < GC$, suy ra đpcm.

b) Trong ΔGBC, có $GB < GC \Rightarrow \widehat{GCB} < \widehat{GBC}$.

4.8. Đặt $a = BC$. Áp dụng định lí Py-ta-go cho ΔABC vuông tại A, ta có :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

Xét ΔABC vuông tại A, trung tuyến AD ứng với cạnh huyền BC

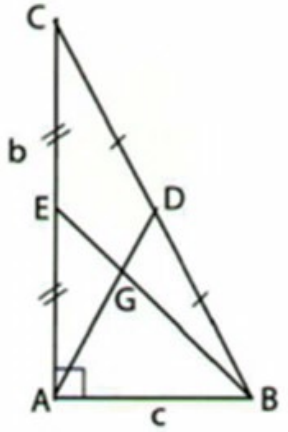
$\Rightarrow AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a.$

Vì G là trọng tâm ΔABC nên ta có :

$AG = \frac{2}{3}AD = \frac{1}{3}a$ và $BG = \frac{2}{3}BE.$

Giả sử $BE \perp AD$. Tiếp tục áp dụng định lí Py-ta-go cho các tam giác vuông GAB và ABE, ta tìm được hệ thức $b^2 = 2c^2$

$\Leftrightarrow b^2 = \left(\sqrt{2}.c\right)^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{2}.c.$



4.9. Dựng điểm H sao cho K là trung điểm của HF thì hai tam giác AKH và CKF bằng nhau, suy ra $AH = CF = BF.$ (1)

Vì G là trọng tâm của tam giác đều ABE nên

$AG = BG.$ (2)

Lại có

$\widehat{GAH} = 360^\circ - \widehat{GAB} - \widehat{BAC} - \widehat{KAH}$

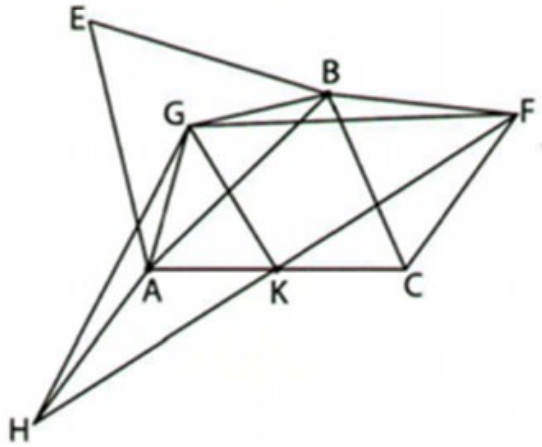
$= 270^\circ - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right)$

$= 90^\circ + \widehat{ABC} = \widehat{GBF}.$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\Delta AGH = \Delta BGF$ (c.g.c)

$\Rightarrow GH = GF$, suy ra $\widehat{GKH} = \widehat{GKF} = 90^\circ.$

Ta lại có $\widehat{HGF} = \widehat{AGB} = 120^\circ$ nên $\widehat{GFK} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{KGF} = 60^\circ.$



Chủ đề 5 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

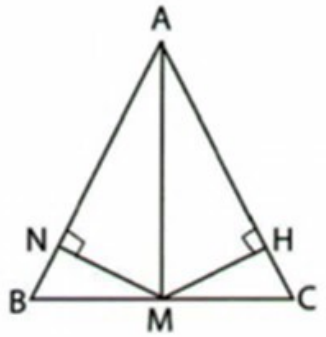
5.1. Từ M hạ $MN \perp AB$ và $MH \perp AC$, vì AM là tia phân giác của góc A nên $MN = MH$.

Xét ΔBMN và ΔCMH là các tam giác vuông có:

$BM = MC$ (AM là trung tuyến) ; $MN = MH$ (chứng minh trên).

Vậy $\Delta BMN = \Delta CMH$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

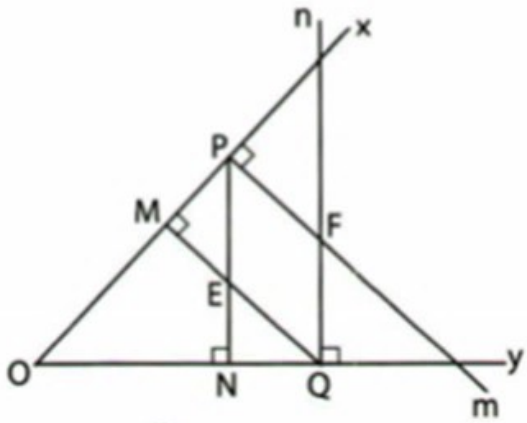
$\Rightarrow \Delta ABC$ cân (có hai góc ở đáy bằng nhau).



5.2. *HD*. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BI$. Hãy chứng minh $\Delta AIE = \Delta AIC$.

5.3. Chứng minh OE và OF đều là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Vậy OE ≡ OF ⇒ O, E, F thẳng hàng.



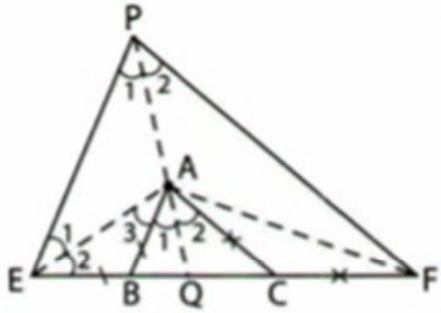
5.4. Tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện cách đều hai đường thẳng cắt nhau tại O là hai đường thẳng xy và x'y', trong đó xy và x'y' là phân giác của các góc AOC, BOD và AOD, COB.

5.5. a) Xét ΔEAB cân tại B

$\Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{A_3}$; $\widehat{E_1} = \widehat{A_3}$ (so le trong).

Vậy $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ ⇒ EA là tia phân giác của $\widehat{PEB}$.

- Tương tự, FA là tia phân giác của $\widehat{PFC}$.



b) Vì EA, FA lần lượt là phân giác của góc E và F của tam giác PEF nên PA là phân giác của góc P.

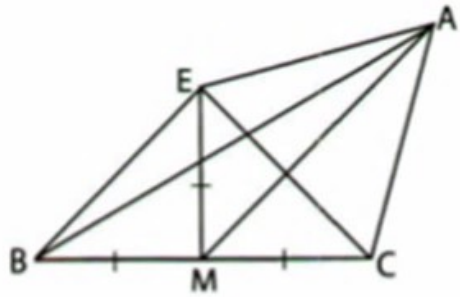
Ta có : $\widehat{P_1} = \widehat{A_1}$, $\widehat{P_2} = \widehat{A_2}$ (đồng vị), mà $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$

nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ ⇒ AQ là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

5.6. Dựng tam giác đều ACE (E và B nằm cùng phía đối với AC), ta có AM là phân giác của góc CAE, suy ra MC = ME = MB, do đó $\widehat{BEC} = 90^o$.

$\widehat{BEA} = 150^o$, $\widehat{ABE} = 15^o$. Lại có EA = EB = EC nên tam giác EBC vuông cân.

Từ đó $\widehat{ABC} = 30^o$ và $\widehat{ACB} = 105^o$.



5.7. Xét ΔBIH có $\widehat{H} = 90^o$.

Vậy $\widehat{BIH} = 90^o - \widehat{B_2}$ hay $\widehat{BIH} = 90^o - \dfrac{\widehat{B}}{2}$. (1)

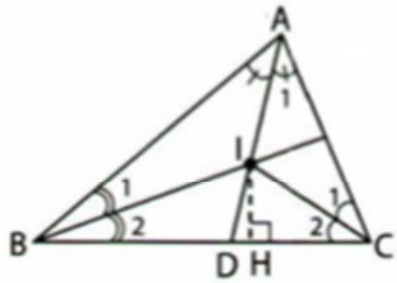
Xét ΔAIC có $\widehat{DIC}$ là góc ngoài

$\Rightarrow \widehat{DIC} = \widehat{A_1} + \widehat{C_1}$.

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = \dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2}$ (vì AI và CI là phân giác).

Vậy $\widehat{DIC} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \dfrac{180^o - \widehat{B}}{2} = 90^o - \dfrac{\widehat{B}}{2}$. (2)

So sánh (1) và (2) có $\widehat{BIH} = \widehat{DIC}$.



5.8. Kẻ các tia phân giác trong của ΔBIC, chúng cắt nhau tại J.

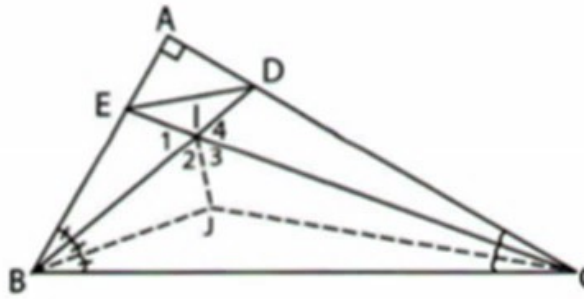
Xét ΔBIC, có : $\widehat{BIC} = 180^o - \widehat{IBC} - \widehat{ICB}$

$= 180^\circ - \frac{2}{3}\widehat{ABC} - \frac{2}{3}\widehat{ACB}$

$= 180^\circ - \frac{2}{3}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right)$

$= 180^\circ - \frac{2}{3}\left(180^\circ - \widehat{A}\right) = 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{I_2} = \widehat{I_3} = \widehat{I_4} = 60^\circ.$



Ta có : $\Delta BEI = \Delta BJI$, $\Delta CDI = \Delta CJI$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ IE = IJ và ID = IJ (hai cạnh tương ứng) suy ra IE = ID. Do đó ΔIDE cân tại I.

5.9. a) AD và CE là hai tia phân giác cắt nhau tại O.

Vậy BO là phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $BO \perp BF$.

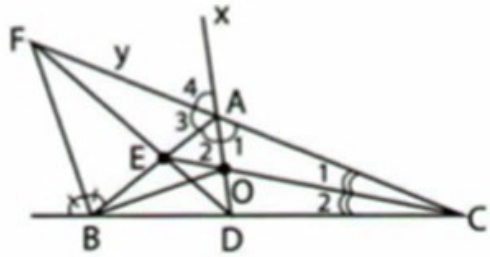
b) $\widehat{A} = 120^\circ$; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 60^\circ$ (giả thiết).

Vậy tính được $\widehat{A_3} = \widehat{A_4} = 60^\circ$

$\Rightarrow$ AF là phân giác của $\widehat{BAx}$ và BF là phân giác (giả thiết).

Vậy F là giao của hai đường phân giác ngoài của $\Delta ABD \Rightarrow$ DF là phân giác góc ADB

$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{FDA}$.



c) ΔADC có AE là phân giác ngoài đỉnh A, CO là phân giác trong đỉnh C

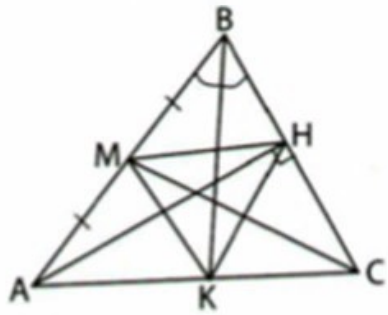
$\Rightarrow$ DE là phân giác của $\widehat{BDA}$, lại có DF là phân giác của $\widehat{BDA}$ (câu b).

Vậy hai tia DE và DF trùng nhau. Do đó D, E, F thẳng hàng.

5.10. Ta có ΔABH vuông tại H nên $HM = \frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow KM = \frac{1}{2}AB$ (vì ΔMHK đều)

$\Rightarrow \Delta ABK$ vuông tại K.



Tam giác ABC có BK là phân giác đồng thời là đường cao nên là tam giác cân (tại B). (1)

Lại có $HK = \frac{1}{2}AC$, $HM = \frac{1}{2}AB$ mà HK = HM

$\Rightarrow$ AC = AB. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔABC là tam giác đều.

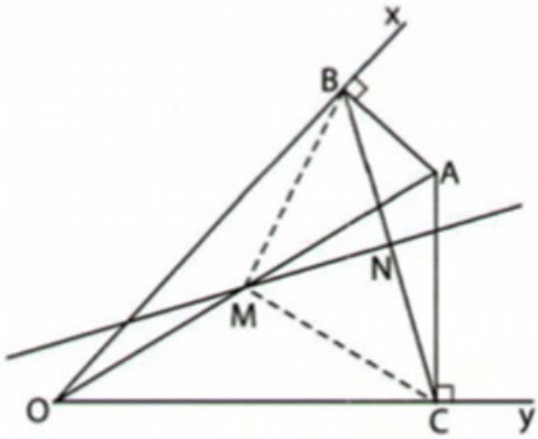
Chủ đề 6 ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

6.1. Gọi M và N thứ tự là trung điểm của OA và BC.

Trong tam giác vuông OBA, BM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $BM = \frac{1}{2}OA$. (1)

Tương tự, ta cũng có $CM = \frac{1}{2}OA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BM = CM, tức là điểm M cách đều hai đầu của đoạn thẳng BC, N lại là trung điểm của BC nên MN là đường trung trực của BC, vậy $MN \perp BC$.



6.2. *HD*. Hãy chứng minh: $\Delta ABD = \Delta CAE$.

6.3. a) Do MA = MB nên M nằm trên đường trung trực của AB.

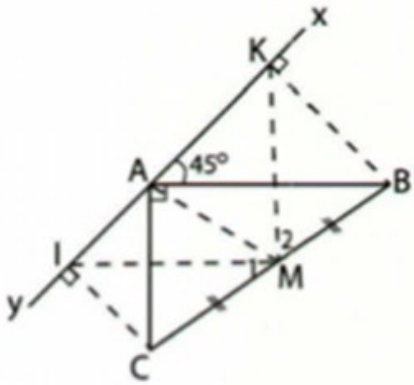
ΔAKB vuông tại K và $\widehat{A} = 45^o$.

Vậy ΔAKB vuông cân

$\Rightarrow KA = KB \Rightarrow$ K nằm trên đường trung trực của AB.

Vậy KM có hai điểm nằm trên đường trung trực của AB nên KM chính là đường trung trực của AB.

Tương tự IM là đường trung trực của AC.



b) AB//MI (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{M_1}$,

AC//MK (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{M_2}$,

mà $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^o$.

Vậy $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 90^o \Rightarrow \widehat{IMK} = 90^o$.

6.4. a) ΔBEP có BO là tia phân giác của góc B và $BO \perp EP$ nên là tam giác cân.

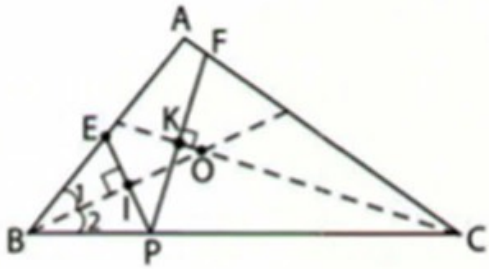
Vậy BO là trung trực của EP.

Tương tự, CO là trung trực của PF.

b) Vì BE = BP, CF = PC nên BE + CF = BC.

c) Theo chứng minh a) : O nằm trên trung trực của EP nên : OE = OP, O nằm trên trung trực của FP nên : OP = OF.

Suy ra OE = OF, do đó O nằm trên đường trung trực của EF. Vì ΔABC cố định nên O cố định. Vậy đường trung trực của EF luôn qua O cố định.



6.5. a) Chứng minh tam giác AEF cân

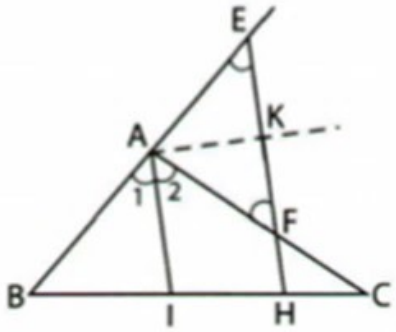
$\Rightarrow$ A nằm trên trung trực của EF.

b) ΔAEF cân nên AK vừa là trung trực của EF vừa là phân giác của $\widehat{EAF}$, mà $\widehat{EAF}$ và $\widehat{BAC}$ kề bù nhau nên

$AI \perp AK$.

c) ΔABC cố định nên AI cố định $\Rightarrow AK \perp AI$ cố định.

H chuyển động trên IC thì đường trung trực của EF là AK luôn cố định.



6.6. Gọi E là trung điểm của BC

$\Rightarrow AE \perp BC$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

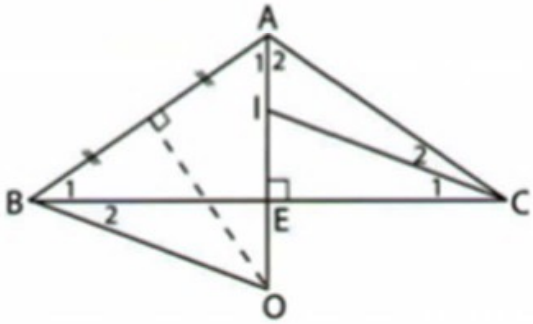
Vì $\widehat{B_1} = 36^\circ$ nên $\widehat{A_1} = 54^\circ$.

Vì ΔAOB cân tại O nên : $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{B_2} = 18^\circ$.

Mặt khác : $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \dfrac{36^\circ}{2} = 18^\circ \Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{C_1}$.

Do vậy $\Delta BEO = \Delta CEI$ (g.c.g) $\Rightarrow EO = EI$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy BC là đường trung trực của đoạn OI.



6.7. Vì M, O thuộc đường trung trực của AB nên MA = MB, OA = OB.

Do vậy $\Delta AMO = \Delta BMO$ (c.c.c)

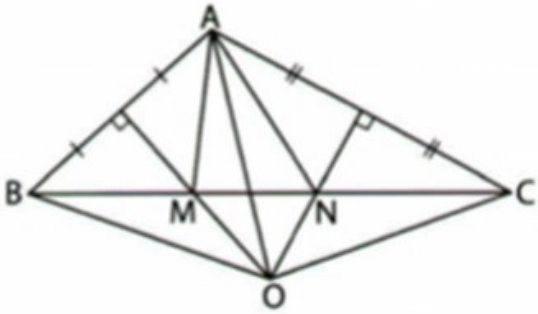
$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO}$ (hai góc tương ứng). (1)

Tương tự $\widehat{NAO} = \widehat{NCO}$ (2)

Vì OB = OC (O là giao ba đường trung trực của ΔABC) nên ΔBOC cân tại O

$\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{NCO}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $\widehat{MAO} = \widehat{NAO}$ hay AO là tia phân giác của góc MAN.



6.8. a) ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = 40^\circ$.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

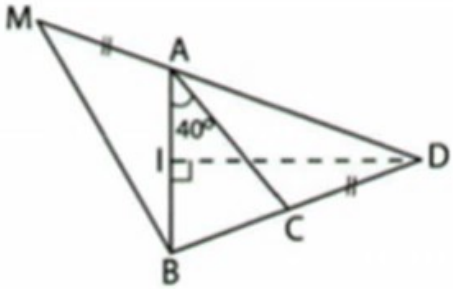
D nằm trên đường trung trực của AB nên DA = DB

$\Rightarrow \Delta ADB$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{BAD} = 70^\circ$.

Vậy $\widehat{CAD} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

b) Xét ΔAMB và ΔCDA có :

AM = CD (giả thiết),

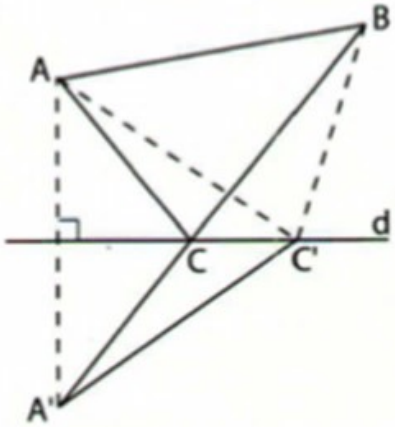


$\widehat{MAB} = \widehat{ACD}$ (cùng bù với góc 70°) ;

AB = AC (ΔABC cân).

Vậy ΔAMB = ΔCDA (c.g.c) suy ra BM = AD, mà AD = BD (câu a),

suy ra : BM = BD (= AD) ⇒ Δ MBD cân tại B.



6.9. Lấy điểm A' sao cho d là đường trung trực của đoạn AA'. Gọi C là giao điểm của đường thẳng d và đoạn A'B. Ta có C là điểm cần tìm.

Thật vậy, giả sử trên đường thẳng d lấy một điểm C' tuỳ ý khác điểm C. Hãy chứng minh : chu vi tam giác ABC' lớn hơn chu vi tam giác ABC.

Chủ đề 7 TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

7.1. a) Xét ΔAFH vuông ở F, có $FI = \frac{1}{2}AH = IA$.

Do đó ΔFAI cân tại I ⇒ $\widehat{IFA} = \widehat{IAF}$. (1)

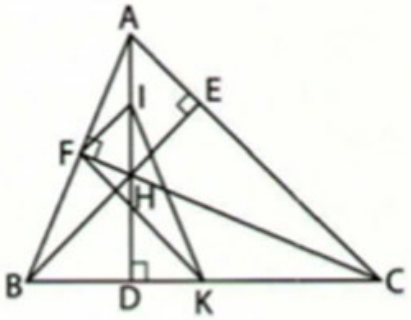
Xét ΔBFC vuông ở F, có trung tuyến FK

⇒ $FK = \frac{1}{2}BC = BK$.

Do đó ΔFBK cân tại K ⇒ $\widehat{KFB} = \widehat{KBF}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IFA} + \widehat{KFB} = \widehat{IAF} + \widehat{KBF} = 90^o$ (vì ΔADB vuông tại D).

Từ đó suy ra : $\widehat{IFK} = 90^o$. Vậy FI ⊥ FK.



b) Từ chứng minh trên ta có ΔIFK vuông tại F và $FI = \frac{1}{2}AH = 3cm$; $FK = \frac{1}{2}BC = 4cm$.

Áp dụng định lí Py-ta-go cho ΔIFK vuông tại F, ta có : $IK^2 = FI^2 + FK^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow IK = 5$ cm.

7.2. Góc A tù nên BC > AB và BC > AC.

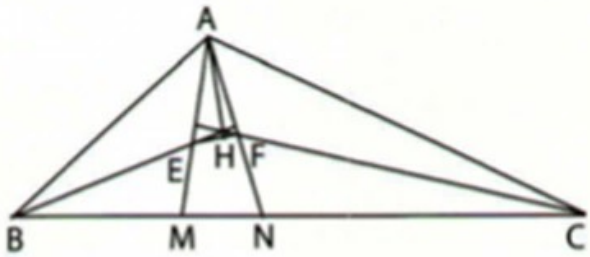
Vậy M và N nằm giữa B và C.

BN = AB nên ΔABN cân tại B; BE là phân giác nên BE cũng là đường cao. Vậy BE ⊥ AN.

Tương tự CF ⊥ AM.

Xét ΔAEF có : BE ⊥ AN ; CF ⊥ AM. Gọi H là giao của BE và CF thì H là trực tâm của ΔAEF, nên AH ⊥ EF.

AH cũng chính là phân giác góc A của ΔABC vì BE, CF là các phân giác của ΔABC.



7.3. Xét ΔABE và ΔFCA có :

$AB = CF$ (giả thiết),

$BE = AC$ (giả thiết),

$\widehat{ABE} + \widehat{ABK} = 180^o$, $\widehat{ACF} + \widehat{ACH} = 180^o$,

mà $\widehat{ABK} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ với góc A)

nên $\widehat{ABE} = \widehat{ACF} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta FCA$ (c.g.c).

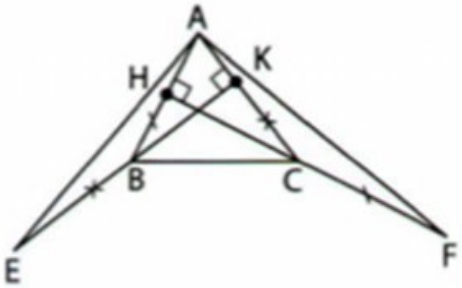
Suy ra $AE = AF$ và $\widehat{AEK} = \widehat{CAF}$. (1)

Ta có $\widehat{AEK} + \widehat{EAK} = 90^o$ ($\hat{K} = 90^o$).

Thay (1) vào ta có :

$\widehat{EAK} + \widehat{CAF} = 90^o$ hay $\widehat{EAF} = 90^o$.

Vậy ΔAEF vuông cân.



7.4. Gọi H là trung điểm của BE

$\Rightarrow HF \,//\, BD$ và $HF = \frac{1}{2}BD$.

Mà $BD \perp AB$ (giả thiết) nên suy ra : $HF \perp AB$.

Từ đó ta có H là trực tâm của ΔABF

$\Rightarrow AH \perp BF$ (tính chất ba đường cao của tam giác). (1)

Từ $HF = \frac{1}{2}BD$ (chứng minh trên) và $AC = \frac{1}{2}BD$ (giả thiết) suy ra $HF = AC$.

Lại vì $HF \,//\, BD$ (chứng minh trên) và $AC \,//\, BD$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow HF \,//\, AC$

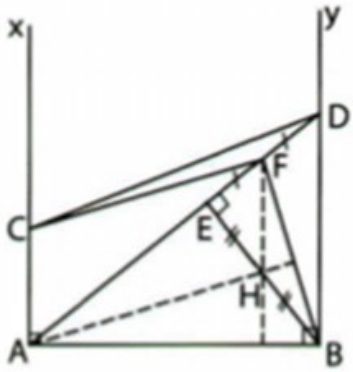
$\Rightarrow \widehat{CAF} = \widehat{HFA}$ (hai góc so le trong).

Do đó, $\Delta ACF = \Delta FHA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CFA} = \widehat{HAF}$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên suy ra $CF \,//\, AH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BF \perp CF$.

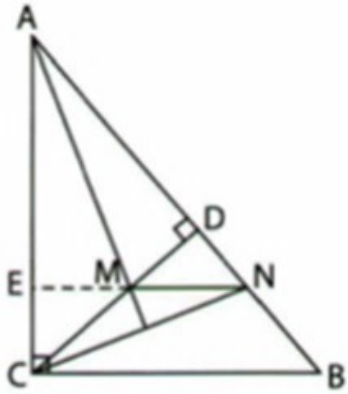


7.5. $MN \,//\, CB$ mà $CB \perp AC$ (giả thiết) nên $MN \perp AC$.

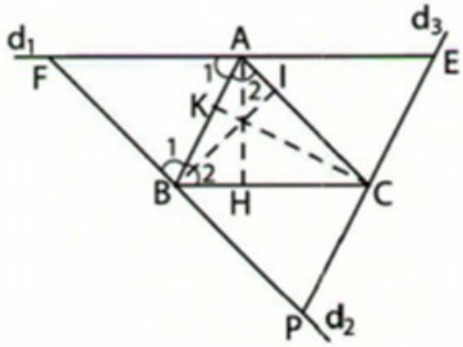
Gọi giao điểm của MN và AC là E.

ΔACN có CD và NE là hai đường cao cắt nhau tại M nên M là trực tâm của ΔACN.

Suy ra $AM \perp CN$.



7.6. a) Xét ΔABF và ΔBAC có:



AB chung, $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$; $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ (so le trong).

Vậy $\Delta ABF = \Delta BAC$ (g.c.g) $\Rightarrow AF = BC$; $BF = AC$. (1)

Tương tự ta chứng minh được:

$AE = BC$; $CE = AB$; (2)

$CP = AB$; $BP = AC$. (3)

Vậy ΔABF, ΔCEA và ΔPCB cùng bằng ΔABC

$\Rightarrow$ bốn tam giác đó bằng nhau.

b) Từ (1) và (2) suy ra : $AF = AE$ (cùng bằng BC), lại có $BC // EF$ (giả thiết) nên nếu $AH \perp BC$ thì $AH \perp EF$.

Suy ra đường cao AH của ΔABC là trung trực của FE (theo định nghĩa).

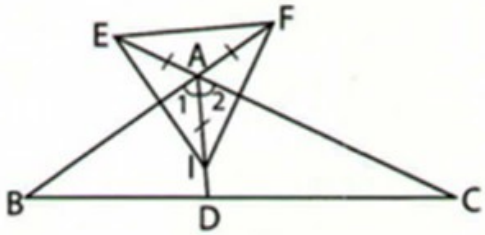
- Tương tự : đường cao BI của ΔABC là trung trực của FP, đường cao CK của ΔABC là trung trực của EP.

Vậy ba đường cao AH ; BI và CK của Δ ABC là ba đường trung trực của ΔFEP.

7.7. a) Do $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^o$ (giả thiết) nên $\widehat{BAC} = 120^o$.

Mà AI là phân giác nên : $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 60^o$

$\Rightarrow \widehat{EAB} = 60^o = \widehat{A_1}$.



ΔEAI cân ($AE = AI$) mà AB là phân giác nên AB là trung trực của EI.

Tương tự, AC là trung trực của IF.

b) E nằm trên trung trực của IF nên $EI = EF$.

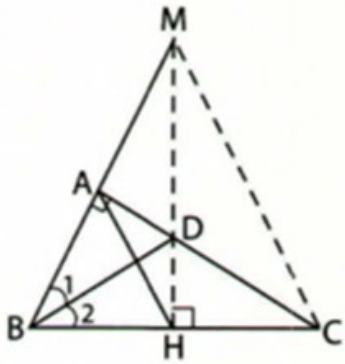
F nằm trên trung trực của EI nên $EF = FI$.

Vậy $EI = EF = FI \Rightarrow \Delta EIF$ đều.

c) Trong ΔEIF có $FB \perp EI$; $EC \perp IF$, vậy A là trực tâm nên $IA \perp EF$.

7.8. a) $DA = DH$. Trong ΔDHC có : $DC > DH$ (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông). Vậy $DC > AD$.

b) Xét ΔBMC có $MH \perp BC$ (giả thiết) ; $CA \perp BM$ (giả thiết). Vậy D là trực tâm của ΔBMC nên $BD \perp MC$.



c) ΔBMC có BD là phân giác của góc B (giả thiết), BD lại là đường cao (chứng minh b).

Vậy ΔBMC là tam giác cân tại B.

d) Dễ thấy $\Delta DBA = \Delta DBH$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow BA = BH$.

Vậy ΔABH cân tại B, có BD là phân giác nên BD cũng là đường cao. Vậy $BD \perp AH$. Mà $BD \perp CM$. Vậy AH//CM (cùng vuông góc với BD.)

7.9. a) Qua H kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB ở F, kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở E. Dễ dàng chứng minh được

$AF = EH$, $AE = FH$.

Vì $BH \perp AC$ và FH // AC nên $BH \perp FH$

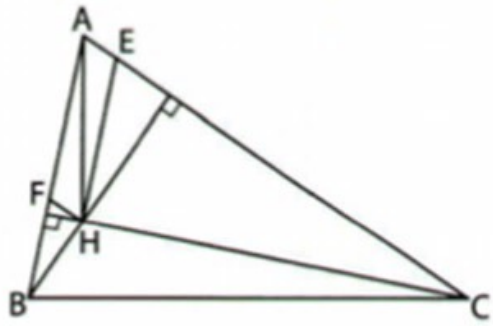
$\Rightarrow BF > BH$ (quan hệ đường xiên – đường vuông góc).

Tương tự, ta có : $CE > CH$.

Xét ΔAEH, có : $AE + EH > HA$ (bất đẳng thức tam giác)

Từ đó :

$AB + AC = AE + AF + FB + EC > HA + HB + HC$.



b) Sử dụng kết quả câu a).

7.10. a) Nếu $\widehat{A} = 90^\circ$:

Hiển nhiên vì M, N trùng với A.

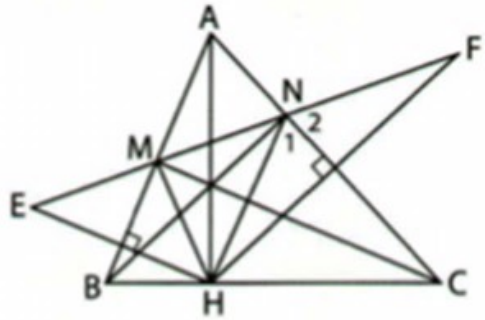
b) Nếu $\widehat{A} < 90^\circ$

Tam giác NHF cân nên $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$.

Vì vậy AC là phân giác ngoài của ΔHMN.

Tương tự ta có AB là phân giác ngoài của ΔHMN.

Suy ra AH là phân giác trong của ΔHMN (AH đi qua giao điểm hai phân giác ngoài của ΔHMN), suy ra BC là phân giác ngoài của HMN vì $BC \perp AH$.



Ta có các phân giác ngoài của ΔHMN là BC và AC cắt nhau ở C.

Do đó MC là phân giác trong của ΔHMN.

Vì phân giác trong của một góc vuông góc với phân giác ngoài của góc đó nên $MC \perp AB$.

Tương tự ta có $BN \perp AC$. Vậy CM, BN, AH đồng quy (vì là ba đường cao của ΔABC).

c) Nếu $\widehat{A} > 90^\circ$, chứng minh tương tự phần trên.

Tam giác có chu vi nhỏ nhất chính là tam giác có ba đỉnh là chân các đường cao của tam giác.

MỤC LỤC

Lời nói đầu

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III. Thống kê 6

Chủ đề 1. Số liệu thống kê. Tần số 7

Chủ đề 2. Biểu đồ. Số trung bình cộng 19

Chương IV. Biểu thức đại số 29

Chủ đề 3. Biểu thức đại số. Giá trị của một biểu thức đại số 30

Chủ đề 4. Đơn thức. Đơn thức đồng dạng 40

Chủ đề 5. Đa thức. Cộng và trừ đa thức 49

Chủ đề 6. Nghiệm của đa thức một biến 58

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác. Các đường đồng quy trong tam giác 68

Chủ đề 1. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác 69

Chủ đề 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu 75

Chủ đề 3. Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác 80

Chủ đề 4. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác 85

Chủ đề 5. Tính chất ba đường phân giác của tam giác 90

Chủ đề 6. Đường trung trực của một đoạn thẳng. Tính chất ba đường trung trực của tam giác 95

Chủ đề 7. Tính chất ba đường cao của tam giác 101

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ 107

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGƯT. NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS. VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Giám đốc Công ti CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập :
PHAN THỊ MINH NGUYỆT - HOÀNG VIỆT
Thiết kế sách :
NGUYỄN THỊ HỒNG VI
Trình bày bìa :
LÊ THẾ HẢI
Sửa bản in :
PHAN THỊ MINH NGUYỆT - HOÀNG VIỆT
Chế bản :
CTCP Mĩ thuật và Truyền thông

Công ti cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội -
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

BỒI DƯỠNG TOÁN 7 - TẬP HAI

Mã số : T7T73H4 - NBE
Số đăng kí KHXB : 568 - 2014/CXB/45-349/GD.
In 10.000 bản, (QĐ68TK), khổ 17 x 24 cm.
Tại Công ty TNHH In & DVTM Phú Thịnh.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2014.