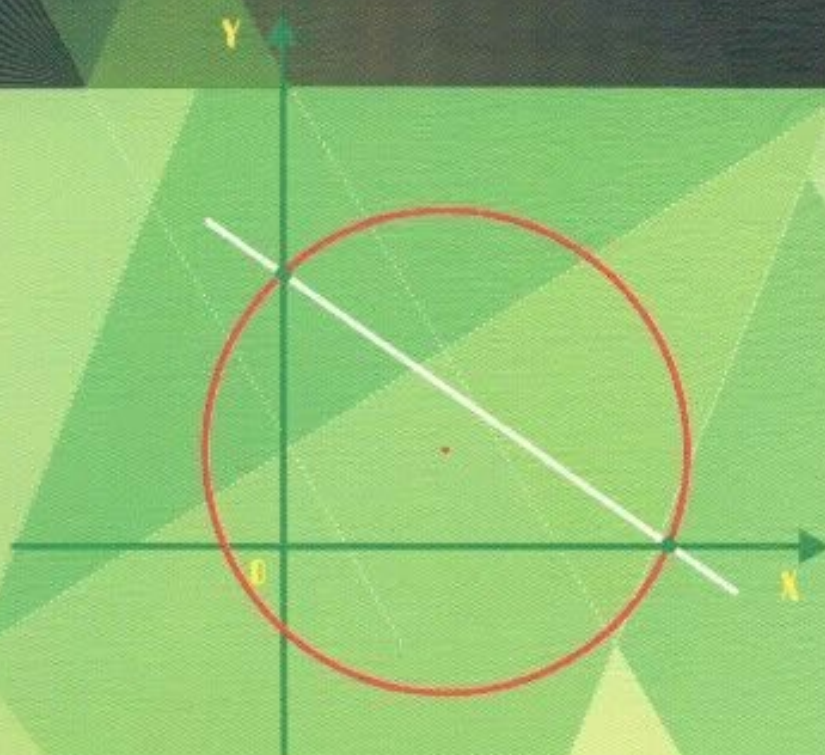


LÊ NHỨT - HUỖNH BÌNH TƯỜNG

GIẢI BÀI TẬP

TOÁN



9

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ NHỨT - HUỖNH ĐỊNH TƯỜNG

Giải bài tập

TOÁN 9

Tập một



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty Sách hoa hồng

Lời nói đầu

Quyển sách **GIẢI BÀI TẬP TOÁN 9** tập một này được biên soạn theo chương trình sách giáo khoa hiện hành, nhằm giúp các em có tài liệu tham khảo để ôn tập, củng cố kiến thức, đồng thời vận dụng để làm những bài tập có dạng tương tự hoặc nâng cao đạt kết quả tốt.

Quý thầy cô và quý phụ huynh có thể xem quyển sách này như tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I.

CĂN BẬC HAI - CĂN BẬC BA

§1. CĂN BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Căn bậc hai

- *Định nghĩa:* Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = (\sqrt{a})^2 = a \end{cases}$$

- *Nhận xét:* Mỗi số thực a dương có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: Số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$, số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

Ta có: $\sqrt{0} = 0$

Số âm không có căn bậc hai.

2. Căn bậc hai số học

- *Định nghĩa:* Căn bậc hai số học của số thực a không âm là số không âm x mà $x^2 = a$.

- *Nhận xét 1:*

Với $a \geq 0$, ta có: Số x là căn bậc hai số học của a thì $x = \sqrt{a}$

Ta có: $\sqrt{a} \geq 0$ và $(\sqrt{a})^2 = a$

- *Nhận xét 2:*

Phương trình $\sqrt{x} = a$: Có nghiệm $x = a^2$ nếu $a \geq 0$

Vô nghiệm nếu $a < 0$

3. Liên hệ giữa phép khai phương và thứ tự

Định lý: Với a, b là các số không âm, ta có:

a) Nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

b) Nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Số nào có bình phương bằng các số sau đây?

- a) 0; b) 9; c) $\frac{4}{9}$; d) 0,25.

2. Tính: a) $\sqrt{49}$; b) $\sqrt{0,01}$; c) $\sqrt{0,0016}$.

3. Trong các số $\sqrt{(-7)^2}$; $\sqrt{7^2}$; $-\sqrt{(-7)^2}$ số nào là căn bậc hai số học của 49?

Giải

1. a) Ta có: $0^2 = 0$

b) $3^2 = 9$; $(-3)^2 = 9$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

d) $(0,5)^2 = 0,25$; $(-0,5)^2 = 0,25$

2. a) Ta có: $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

b) $\sqrt{0,01} = \sqrt{(0,1)^2} = 0,1$

c) $\sqrt{0,0016} = \sqrt{(0,04)^2} = 0,04$

3. Vì căn bậc hai số học của một số dương là một số dương nên căn bậc hai số học của 49 là $\sqrt{(-7)^2}$ hoặc $\sqrt{7^2}$.

B. Bài tập căn bản

1. Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng:
121; 144; 169; 225; 256; 324; 361; 400.

2. So sánh: a) 2 và $\sqrt{3}$; b) 6 và $\sqrt{41}$; c) 7 và $\sqrt{47}$.

3. Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $x^2 = 2$; b) $x^2 = 3$; c) $x^2 = 3,5$; d) $x^2 = 4,12$.

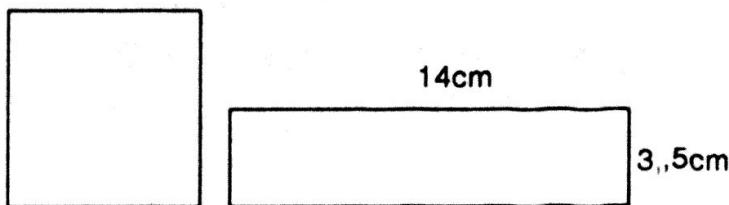
* *Hướng dẫn*: Nghiệm của phương trình $x^2 = a$ (với $a \geq 0$) là các căn bậc hai của a .

4. Tìm số x không âm, biết:

a) $\sqrt{x} = 15$; b) $2\sqrt{x} = 14$; c) $\sqrt{x} < \sqrt{2}$; d) $\sqrt{2x} < 4$.

5. **Đố**: Tính cạnh một hình

vuông biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3,5m và chiều dài 14m (hình vẽ).



Giải

1. Ta có căn bậc hai số học của 121 là $\sqrt{121} = 11$ vì $11 > 0$ và $11^2 = 121$.

Tương tự: $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{169} = 13$; $\sqrt{225} = 15$; $\sqrt{256} = 16$;

$$\sqrt{324} = 18; \quad \sqrt{361} = 19; \quad \sqrt{400} = 20.$$

2. a) $2 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$ Vì $4 > 3 \Rightarrow \sqrt{4} > \sqrt{3} \Rightarrow 2 > \sqrt{3}$
- b) $6 = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{41}}$ Vì $41 > 36 \Rightarrow \sqrt{41} > \sqrt{36} \Rightarrow \sqrt{41} > 6$
- c) $7 = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{47}}$ Vì $\sqrt{49} > \sqrt{47} \Rightarrow 7 > \sqrt{47}$

4. a) $\sqrt{x} = 15 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 15^2 \Leftrightarrow x = 225$

b) $2\sqrt{x} = 14 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 7^2 \Leftrightarrow x = 49$

c) $\sqrt{x} < \sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 < (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 2$

d) $\sqrt{2x} < \sqrt{4} \Leftrightarrow (\sqrt{2x})^2 < 4^2 \Leftrightarrow 0 \leq 2x < 16 \Leftrightarrow 0 \leq x < 8.$

5. Diện tích của hình chữ nhật bằng: $3,5\text{m} \times 14\text{m} = 49 \text{ (m}^2\text{)}$

Vì diện tích hình chữ nhật bằng diện tích hình vuông nên cạnh hình vuông bằng $\sqrt{49} = 7\text{(m)}.$

Cách khác: Có thể nhẩm theo cách giải hình học là "cắt" đối hình chữ nhật thành hai hình chữ nhật có kích thước $3,5\text{m} \times 7\text{m}$ và ghép lại được thành hình vuông cạnh $7\text{m}.$

§2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẸNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Căn thức bậc hai:** Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A , còn A là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.

2. Điều kiện để $\sqrt{A}$ có nghĩa: ($\sqrt{A}$ xác định)

$\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$

3. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$: • $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

• Hay $\sqrt{A^2} = A$ khi $A \geq 0$

$\sqrt{A^2} = -A$ khi $A < 0$

$$4. \text{ Cho } A \geq 0: \bullet X^2 \leq A \Leftrightarrow |X| \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow -\sqrt{A} \leq X \leq \sqrt{A}$$

$$\bullet X^2 \geq A \Leftrightarrow |X| \geq \sqrt{A} \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq \sqrt{A} \\ X \leq -\sqrt{A} \end{cases}$$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Với giá trị nào của a thì các căn thức sau đây có nghĩa?

a) $\sqrt{\frac{a}{2}}$; b) $\sqrt{-3a}$; c) $\sqrt{a^2 + 1}$ d) $\sqrt{3-a}$; e) $\sqrt{\frac{1}{a-1}}$

2. Tính: a) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$;

b) $\sqrt{3a^2}$ với $a < 0$;

c) $5\sqrt{a^4}$ với $a < 0$;

d) $\frac{1}{3}\sqrt{c^6}$ với $c < 0$.

Giải

1. a) $\sqrt{\frac{a}{2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{a}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$

b) $\sqrt{-3a}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -3a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$

c) Ta có: $a^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$. Do đó: $\sqrt{a^2 + 1}$ có nghĩa với mọi $a \in \mathbb{R}$

d) $\sqrt{3-a}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 3$.

e) $\sqrt{\frac{1}{a-1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{1}{a-1} \geq 0 \Leftrightarrow a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

2. a) Với $a \geq 0$, ta có: $2\sqrt{a^2} = 2|a| = 2a$

b) Với $a < 0$, ta có: $3a^2 = (\sqrt{3} \cdot a)^2$

Khi đó, ta có: $\sqrt{3a^2} = \sqrt{(\sqrt{3} \cdot a)^2} = |\sqrt{3} \cdot a| = |\sqrt{3}| \cdot |a| = \sqrt{3} \cdot (-a) = -\sqrt{3} \cdot a$

c) Với $a < 0$, ta có: $5\sqrt{a^4} = 5\sqrt{(a^2)^2} = 5|a^2| = 5a^2$ (vì $a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$)

d) Với $c < 0$, ta có: $\frac{1}{3}\sqrt{(c^3)^2} = \frac{1}{3}(-c^3) = -\frac{1}{3}c^3$.

B. Bài tập căn bản

6. Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$; b) $\sqrt{-5a}$; c) $\sqrt{4-a}$; d) $\sqrt{3a+7}$.

7. Tính:

a) $\sqrt{(0,1)^2}$; b) $\sqrt{(-0,3)^2}$; c) $-\sqrt{(-1,3)^2}$; d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$

8. Rút gọn các biểu thức sau đây:

a) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$;

b) $\sqrt{(3 - \sqrt{11})^2}$;

c) $2\sqrt{a^2}$ với $a > 0$;

d) $3\sqrt{(a - 2)^2}$ với $a < 2$.

9. Tìm x, biết:

a) $\sqrt{x^2} = 7$;

b) $\sqrt{x^2} = |8|$;

c) $\sqrt{4x^2} = 6$;

d) $\sqrt{9x^2} = |-12|$

10. Chứng minh:

a) $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$;

Giải

6. a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{a}{3} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$

b) $\sqrt{-5a}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -5a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$

c) $\sqrt{4 - a}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 4 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 4$

d) $\sqrt{3a + 7}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3a + 7 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{7}{3}$

7. a) $\sqrt{(0,1)^2} = |0,1| = 0,1$

b) $\sqrt{(-0,3)^2} = |-0,3| = 0,3$

c) $-\sqrt{(-1,3)^2} = -|-1,3| = -(1,3) = -1,3$

d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2} = -0,4|-0,4| = -0,4(0,4) = -0,16$.

8. a) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$ (vì $2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$)

b) $\sqrt{(3 - \sqrt{11})^2} = |3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = \sqrt{11} - 3$

(vì $3 - \sqrt{11} = \sqrt{9} - \sqrt{11} < 0$)

c) Với $a \geq 0$, ta có: $2\sqrt{a^2} = 2|a| = 2a$

d) Với $a < 2 \Rightarrow a - 2 < 0$, ta có:

$$3\sqrt{(a - 2)^2} = 3|a - 2| = 3|-(a - 2)| = -3(a - 2) = 6 - 3a$$

9. a) $\sqrt{x^2} = 7 \Leftrightarrow |x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7$

b) $\sqrt{x^2} = |-8| \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = 8 \Leftrightarrow |x| = 8 \Leftrightarrow x = \pm 8$

c) $\sqrt{4x^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2x)^2} = 6 \Leftrightarrow |2x| = 6 \Leftrightarrow 2|x| = 6 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sqrt{9x^2} &= |-12| \Leftrightarrow \sqrt{(3x)^2} = 12 \Leftrightarrow |3x| = 12 \\ &\Leftrightarrow 3|x| = 12 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4 \end{aligned}$$

$$10. \text{ a) } VT = (\sqrt{3} - 1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{3} = VP \text{ (đpcm)}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } VT &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3} - \sqrt{3} = \sqrt{1^2 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = |1 - \sqrt{3}| - \sqrt{3} = -(1 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = -1 = VP \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$

Luyện tập

$$11. \text{ Tính: a) } \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49};$$

$$\text{b) } 36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169};$$

$$\text{c) } \sqrt{\sqrt{81}};$$

$$\text{d) } \sqrt{3^2 + 4^2}.$$

12. Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa:

$$\text{a) } \sqrt{2x+7};$$

$$\text{b) } \sqrt{-3x+4};$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{1}{-1+x}};$$

$$\text{d) } \sqrt{1+x^2}$$

13. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } 2\sqrt{a^2} - 5a \text{ với } a < 0;$$

$$\text{b) } \sqrt{25a^2} + 3a \text{ với } a \geq 0;$$

$$\text{c) } \sqrt{9a^4} + 3a^2;$$

$$\text{d) } 5\sqrt{4a^6} - 3a^3 \text{ với } a < 0.$$

14. Phân tích thành nhân tử:

$$\text{a) } x^2 - 3;$$

$$\text{b) } x^2 - 6;$$

$$\text{c) } x^2 + 2\sqrt{3} \cdot x + 3;$$

$$\text{d) } x^2 - 2\sqrt{5} \cdot x + 5.$$

Hướng dẫn: Dùng kết quả: Với $a \geq 0$ thì $a = (\sqrt{a})^2$

$$15. \text{ Giải các phương trình: a) } x^2 - 5 = 0;$$

$$\text{b) } x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0;$$

16. **Đố:** Hãy tìm chỗ sai trong phép chứng minh

"Con muỗi nặng bằng con voi" dưới đây.

Giả sử con muỗi nặng m (gam), còn con voi nặng V (gam).

$$\text{Ta có: } m^2 + V^2 = V^2 + m^2$$

Cộng cả hai vế với $-2mV$, ta có:

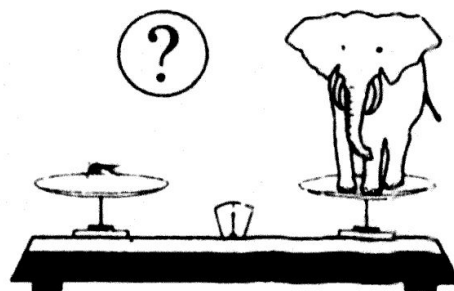
$$m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2$$

$$\text{hay } (m - V)^2 = (V - m)^2$$

Lấy căn bậc hai mỗi vế của đẳng thức trên, ta được:

$$\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2} \Rightarrow m - V = V - m$$

Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi (!).



Giải

11. a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49} = 4 \cdot 5 + 14 : 7 = 20 + 2 = 22$
 b) $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169} = 36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 9 \cdot 2} - \sqrt{169} = 36 : \sqrt{2^2 \cdot 3^4} - \sqrt{13^2}$
 $= 36 : (2 \cdot 3^2) - 13 = 36 : 18 - 13 = 2 - 13 = -11$
 c) $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{\sqrt{9^2}} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$
 d) $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$
12. a) $\sqrt{2x+7}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$.
 b) $\sqrt{-3x+4}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -3x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$
 c) $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{1}{-1+x} \geq 0 \Leftrightarrow -1+x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
 d) Ta có $x^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2 > 0$. Suy ra $\sqrt{1+x^2}$ luôn có nghĩa với mọi $x \in \mathbb{R}$.
13. a) Với $a < 0$, ta có: $2\sqrt{a^2} - 5a = 2|a| - 5a = -2a - 5a = -7a$
 b) Với $a \geq 0$, ta có: $\sqrt{25a^2} + 3a = \sqrt{(5a)^2} + 3a = |5a| + 3a = 5a + 3a = 8a$
 c) Ta có: $\sqrt{9a^4} + 3a^2 = \sqrt{(3a^2)^2} + 3a^2 = |3a^2| + 3a^2 = 3a^2 + 3a^2 = 6a^2$
 d) Ta có: $5\sqrt{4a^6} - 3a^3 = 5\sqrt{(2a^3)^2} - 3a^3 = 5|2a^3| - 3a^3$ (1)
 * Với $a < 0$, ta có $|2a^3| = -2a^3$
 Khi đó (1) $= 5 \cdot |2a^3| - 3a^3 = 5 \cdot (-2a^3) - 3a^3 = -10a^3 - 3a^3 = -13a^3$.
14. a) $x^2 - 3 = (x^2) - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
 b) $x^2 - 6 = (x^2) - (\sqrt{6})^2 = (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$
 c) $x^2 + 2\sqrt{3} \cdot x + 3 = x^2 + 2\sqrt{3} \cdot x + (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})^2$
 d) $x^2 - 2\sqrt{5} \cdot x + 5 = x^2 - 2\sqrt{5} \cdot x + (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})^2$
15. a) $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. Vậy $S = \{\pm\sqrt{5}\}$
 b) $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{11}x + (\sqrt{11})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{11})^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x - \sqrt{11} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{11}$. Vậy $S = \{\sqrt{11}\}$.
16. Sai lầm ở chỗ từ $(m - V)^2 = (V - m)^2$, khi lấy căn bậc hai mỗi vế ta được kết quả: $|m - V| = |V - m|$ chứ không thể có kết quả: $m - V = V - m$.
 Do đó, con muỗi không thể nặng bằng con voi được.

§3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khai phương một tích

a) Định lí: Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

b) Quy tắc: Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

2. Nhân các căn thức bậc hai

Quy tắc: Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (a \geq 0; b \geq 0)$$

3. Chú ý: Định lí và các quy tắc trên cũng đúng khi thay các số không âm bởi các biểu thức có giá trị không âm.

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0 \text{ và } B \geq 0).$$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Tính: a) $\sqrt{49 \cdot 100}$; b) $\sqrt{12 \cdot 1.360}$ c) $\sqrt{0,09 \cdot 64}$;
d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$; e) $\sqrt{2^4 \cdot (-7)^2}$

2. Rút gọn các biểu thức sau (với a, b không âm):

- a) $\sqrt{3a^3} \cdot \sqrt{12a}$; b) $\sqrt{2a \cdot 32ab^2}$.

Giải

1. a) $\sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{10^2} = 7 \cdot 10 = 70$
b) $\sqrt{12 \cdot 1.360} = \sqrt{121 \cdot 36} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{36} = \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{6^2} = 11 \cdot 6 = 66$
c) $\sqrt{0,09 \cdot 64} = \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{64} = \sqrt{0,3^2} \cdot \sqrt{8^2} = 0,3 \cdot 8 = 2,4$
d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{(3^2)^2} = 2 \cdot 3^2 = 18$
e) $\sqrt{2^4 \cdot (-7)^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{(-7)^2} = 2^2 \cdot |-7| = 4 \cdot 7 = 28$
2. Với $a \geq 0; b \geq 0$, ta có:
a) $\sqrt{3a^3} \cdot \sqrt{12a} = \sqrt{3a^3 \cdot 12a} = \sqrt{36a^4} = \sqrt{(6a^2)^2} = |6a^2| = 6a^2$
b) $\sqrt{2a \cdot 32ab^2} = \sqrt{64a^2b^2} = \sqrt{(8ab)^2} = |8ab| = 8ab.$

B. Bài tập căn bản

17. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{0,09.64}$; b) $\sqrt{2^4.(-7)^2}$; c) $\sqrt{121.360}$; d) $\sqrt{2^2.3^4}$

18. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính:

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{63}$; b) $\sqrt{2.5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{48}$ c) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{6,4}$; d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{1,5}$

19. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{0,36a^2}$ với $a < 0$; b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$;
c) $\sqrt{27.48(1-a)^2}$ với $a > 1$; d) $\frac{1}{a-b} \cdot \sqrt{a^4(a-b)^2}$ với $a > b$

20. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$; b) $\sqrt{13a} \cdot \sqrt{\frac{52}{a}}$ với $a > 0$
c) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$; d) $(3-a)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180a^2}$.

21. Khai phương tích 12.30.40 được:

A) 1200; B) 120; C) 12; D) 240

Hãy chọn kết quả đúng.

Giải

17. a) $\sqrt{0,09.64} = \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{64} = \sqrt{(0,3)^2} \cdot \sqrt{8^2} = |0,3| \cdot |8| = 2,4$

b) $\sqrt{2^4.(-7)^2} = \sqrt{(2^2)^2} \cdot \sqrt{(-7)^2} = |2^2| \cdot |-7| = 4.7 = 28$

c) $\sqrt{121.360} = \sqrt{121.36} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{36} = \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{6^2} = |11| \cdot |6| = 66$

d) $\sqrt{2^2.3^4} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{(3^2)^2} = |2| \cdot |3^2| = 2.9 = 18$

18. a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{63} = \sqrt{7.63} = \sqrt{441} = \sqrt{21^2} = 21$

b) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{2,5.30.48} = \sqrt{25.3.48} = \sqrt{25.144}$
 $= \sqrt{25} \cdot \sqrt{144} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{12^2} = 5.12 = 60$

c) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{6,4} = \sqrt{0,4.6,4} = \sqrt{2,56} = \sqrt{1,6^2} = 1,6$

d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{1,5} = \sqrt{2,7.5.1,5} = \sqrt{20,25} = \sqrt{4,5^2} = 4,5$

19. a) Với $a < 0$, ta có: $\sqrt{0,36a^2} = \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{a^2} = 0,6 \cdot |a| = -0,6a$

b) Với $a \geq 3 \Leftrightarrow 3 - a \leq 0$, ta có:

$$\sqrt{a^4(3-a)^2} = \sqrt{(a^2)^2} \cdot \sqrt{(3-a)^2} = |a^2| \cdot |3-a| = a^2 \cdot |-(3-a)| = a^2(a-3)$$

c) Với $a > 1 \Leftrightarrow 1 - a < 0$, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{27.48(1-a)^2} &= \sqrt{1296.(1-a)^2} = \sqrt{1296}.\sqrt{(1-a)^2} \\ &= \sqrt{36^2}.\sqrt{(1-a)^2} = 36.|1-a| = 36[-(1-a)] = 36(a-1)\end{aligned}$$

d) Với $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b} \cdot \sqrt{a^4(a-b)^2} &= \frac{1}{a-b} \sqrt{(a^2)^2} \cdot \sqrt{(a-b)^2} \\ &= \frac{1}{a-b} |a^2| \cdot |a-b| = \frac{1}{a-b} \cdot a^2(a-b) = a^2\end{aligned}$$

20. a) Với $a \geq 0$, ta có: $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}} = \sqrt{\frac{2a}{3} \cdot \frac{3a}{8}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{a}{2}$

b) Với $a > 0$, ta có: $\sqrt{13a} \cdot \sqrt{\frac{52}{a}} = \sqrt{13a \cdot \frac{52}{a}} = \sqrt{13 \cdot 52} = \sqrt{676} = \sqrt{26^2} = 26$

c) Với $a \geq 0$, ta có: $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a = \sqrt{5a \cdot 45a} - 3a = \sqrt{225a^2} - 3a$
 $= \sqrt{225} \cdot \sqrt{a^2} - 3a = 15 \cdot |a| - 3a = 15a - 3a = 12a$

d) Với a bất kì ($a \geq 0$ hoặc $a < 0$), ta có:

$$\begin{aligned}(3-a)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180a^2} &= (3-a)^2 - \sqrt{0,2 \cdot 180a^2} \\ &= 9 - 6a + a^2 - \sqrt{36a^2} = 9 - 6a + a^2 - 6|a| \quad (1)\end{aligned}$$

* Khi $a \geq 0$, ta có: $9 - 6a + a^2 - 6|a| = 9 - 6a + a^2 - 6a = a^2 - 12a + 9$

* Khi $a < 0$, ta có: $9 - 6a + a^2 - 6|a| = 9 - 6a + a^2 + 6a = a^2 + 9$

21. Theo đề bài, ta đi tính:

$$\sqrt{12.30.40} = \sqrt{12.3.10.4.10} = \sqrt{12^2 \cdot 10^2} = \sqrt{12^2} \cdot \sqrt{10^2} = 12 \cdot 10 = 120$$

Vậy chọn câu B.

Luyện tập

22. Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi tính:

a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$ c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$; d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$

23. Chứng minh:

a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$

b) Hai số $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005})$ và $(\sqrt{2006} + \sqrt{2005})$ là hai số nghịch đảo nhau.

24. Rút gọn và tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) của các căn thức sau:

a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2}$ tại $x = -\sqrt{2}$

b) $\sqrt{9a^2(b^2 + 4 - 4b)}$ tại $a = -2, b = -\sqrt{3}$

25. Tìm x, biết: a) $\sqrt{16x} = 8$; b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$
 c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$; d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$
26. a) So sánh $\sqrt{25+9}$ và $\sqrt{25} + \sqrt{9}$
 b) Với $a > 0$ và $b > 0$, chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
27. So sánh: a) 4 và $2\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{5}$ và -2.

Giải

22. a) $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13+12)(13-12)} = \sqrt{25} = 5$
 b) $\sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{(17+8)(17-8)} = \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 3 = 15$
 c) $\sqrt{117^2 - 108^2} = \sqrt{(117+108)(117-108)} = \sqrt{225 \cdot 9} = \sqrt{225} \cdot \sqrt{9} = 15 \cdot 3 = 45$
 d) $\sqrt{313^2 - 312^2} = \sqrt{(313+312)(313-312)} = \sqrt{625 \cdot 1} = \sqrt{25^2} = 25$

23. a) VT = $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1 =$ VP (đpcm)

Vậy $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$

- b) Hướng dẫn: Cho hai số a, b $\neq 0$. Ta bảo hai số a và b là nghịch đảo của nhau khi $a \cdot b = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (\sqrt{2006} - \sqrt{2005}) \cdot (\sqrt{2006} + \sqrt{2005}) &= (\sqrt{2006})^2 - (\sqrt{2005})^2 \\ &= 2006 - 2005 = 1 \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005})$ và $(\sqrt{2006} + \sqrt{2005})$ là hai số nghịch đảo của nhau.

24. a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2} = \sqrt{2^2[(1+3x)^2]^2}$
 $= \sqrt{2^2 \cdot [(1+3x)^2]^2} = 2 |(1+3x)^2| = 2(1+3x)^2$

Khi $x = -\sqrt{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{4(1+6x+9x^2)^2} &= 2(1+3x)^2 = 2[1+3(-\sqrt{2})]^2 \\ &= 2(1-3\sqrt{2})^2 = 2(1-6\sqrt{2}+18) = 2(19-6\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Tính giá trị gần đúng với 3 chữ số sau dấu phẩy.

$$\begin{aligned} \sqrt{4(1+6x+9x^2)^2} &= 2(19-6\sqrt{2}) = 38-12\sqrt{2} \\ &= 38-12 \cdot 1,414 = 38-16,968 = 21,032 \end{aligned}$$

- b) $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)} = \sqrt{(3a)^2 \cdot (b-2)^2} = \sqrt{(3a)^2} \cdot \sqrt{(b-2)^2} = |3a| \cdot |b-2|$

Khi $a = -2$ và $b = -\sqrt{3}$, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{9a^2(b^2 + 4 - 4b)} &= |3a| \cdot |b - 2| = |3(-2)| \cdot |\sqrt{3} - 2| \\ &= 6(\sqrt{3} + 2) = 6(1,732 + 2) = 6 \cdot 3,732 = 22,392\end{aligned}$$

25. a) $\sqrt{16x} = 8$ (đk: $16x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{16x})^2 = 8^2 \Leftrightarrow 16x = 64 \Leftrightarrow x = 4. \text{ Vậy } x = 4.$$

b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$ (đk: $4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x})^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}. \text{ Vậy } x = \frac{5}{4}.$$

c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$ (đk: $9(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{9(x-1)})^2 = 21^2 \Leftrightarrow 9(x-1) = 441 \Leftrightarrow x-1 = 49 \Leftrightarrow x = 50$$

Vậy $x = 50$.

d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4(1-x)^2} = 6 \Leftrightarrow 2|1-x| = 6$

* Khi $1-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x$

Ta có: $2|1-x| = 6 \Leftrightarrow 2(1-x) = 6 \Leftrightarrow 2-2x = 6 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$ (nhận)

* Khi $1-x < 0 \Leftrightarrow 1 < x$

Ta có: $2|1-x| = 6 \Leftrightarrow 2|-(1-x)| = 6 \Leftrightarrow 1-x = -3 \Leftrightarrow x = 4$ (nhận)

Vậy $x = -2$ hoặc $x = 4$.

26. a) So sánh $\sqrt{25+9}$ và $\sqrt{25} + \sqrt{9}$

Ta có: $(\sqrt{25+9})^2 = 25+9 = 34$

Và $(\sqrt{25} + \sqrt{9})^2 = 25 + 2 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} + 9 = 25 + 30 + 9 = 64$

Vì $64 > 34$ nên $\sqrt{25} + \sqrt{9} > \sqrt{25+9}$.

b) Vì $a > 0$ và $b > 0$ nên $\sqrt{a+b} > 0$

Ta có: $(\sqrt{a+b})^2 = a+b$

Và $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a^2} + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{b^2} = a + b + 2\sqrt{ab}$

Vì $a+b < a+b+2\sqrt{ab}$

nên $(\sqrt{a+b})^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Rightarrow \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

27. a) $4 = \sqrt{4^2} = \sqrt{16}$

$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$

Vì $\sqrt{12} < \sqrt{16}$. Suy ra $2\sqrt{3} < 4$.

b) $-\sqrt{5}$

$-2 = -\sqrt{2^2} = -\sqrt{4}$

Vì $-\sqrt{4} > -\sqrt{5}$. Suy ra $-2 > -\sqrt{5}$.

§4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khai phương một thương

a) *Định lý:* Nếu $a \geq 0$; $b > 0$ thì: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b) *Quy tắc:* Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó a là số không âm, b là số dương thì ta khai phương số a và khai phương số b , rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

2. Chia hai căn thức bậc hai

Quy tắc: Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho căn bậc hai của số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0; b > 0)$$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Tính: a) $\sqrt{\frac{225}{256}}$; b) $\sqrt{0,0196}$.
2. Rút gọn: a) $\sqrt{\frac{2a^2b^4}{50}}$ (với a, b bất kì) b) $\frac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ (với $a > 0, b$ bất kì)

Giải

1. a) $\sqrt{\frac{225}{256}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{15^2}}{\sqrt{16^2}} = \frac{15}{16}$

b) $\sqrt{0,0196} = \sqrt{\frac{196}{10000}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{14^2}}{\sqrt{100^2}} = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$

2. a) Với a, b bất kì, ta có: $\sqrt{\frac{2a^2b^4}{50}} = \frac{\sqrt{2a^2b^4}}{\sqrt{50}} = \frac{|a|b^2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{25 \cdot 2}} = \frac{|a|b^2 \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{|a|b^2}{5}$

b) Với $a > 0, b$ bất kì, ta có: $\frac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}} = \frac{|b|\sqrt{2a}}{\sqrt{81 \cdot 2}} = \frac{|b|\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}}{9 \cdot \sqrt{2}} = \frac{|b| \cdot \sqrt{a}}{9}$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN

LC / 2983

B. Bài tập căn bản

Tính:

28. a) $\sqrt{\frac{289}{225}}$; b) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$; c) $\sqrt{\frac{0,25}{9}}$; d) $\sqrt{\frac{8,1}{1,6}}$
29. a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$; c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$; d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$.

30. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$; b) $2y^2 \cdot \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$
- c) $5xy \cdot \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0, y > 0$; d) $0,2x^3y^3 \cdot \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $x \neq 0, y \neq 0$.

31. a) So sánh $\sqrt{25-16}$ và $\sqrt{25}-\sqrt{16}$;
b) Chứng minh rằng với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$

Giải

28. a) $\sqrt{\frac{289}{225}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{225}} = \frac{\sqrt{17^2}}{\sqrt{15^2}} = \frac{17}{15}$
- b) $\sqrt{2\frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{\sqrt{8^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{8}{5}$
- c) $\sqrt{\frac{0,25}{9}} = \sqrt{\frac{25}{100 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{25}{900}} = \sqrt{\left(\frac{5}{30}\right)^2} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$
- d) $\sqrt{\frac{8,1}{1,6}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{9}{4}$
29. a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$
- b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}} = \sqrt{\frac{15}{735}} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$
- c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}} = \sqrt{\frac{12500}{500}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$
- d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}} = \sqrt{\frac{6^5}{2^3 \cdot 3^5}} = \sqrt{\frac{(2 \cdot 3)^5}{2^3 \cdot 3^5}} = \sqrt{\frac{2^5 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^5}} = \sqrt{2^2} = 2$

30. a) Với $x > 0, y \neq 0$, ta có: $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} = \frac{y}{x} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{(y^2)^2}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{1}{y}$

b) Với $y < 0$, ta có: $2y^2 \cdot \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}} = 2y^2 \cdot \frac{\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{4y^2}} = 2y^2 \cdot \frac{x^2}{2|y|} = \frac{2y^2 \cdot x^2}{-2y} = -x^2y$

c) Với $x < 0, y > 0$, ta có:

$$5xy \cdot \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}} = 5xy \cdot \frac{\sqrt{25x^2}}{\sqrt{y^6}} = \frac{5xy \cdot 5|x|}{\sqrt{(y^3)^2}} = \frac{-25x^2y}{|y^3|} = \frac{-25x^2y}{y^3} = \frac{-25x^2}{y^2}$$

d) Với $x \neq 0, y \neq 0$, ta có: $0,2x^3y^3 \cdot \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}} = 0,2x^3y^3 \cdot \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{x^4y^8}} = \frac{0,2x^3y^3 \cdot 4}{\sqrt{(x^2y^4)^2}}$

$$= \frac{0,8x^3y^3}{|x^2y^4|} = \frac{0,8x^3y^3}{x^2y^4} = \frac{0,8x}{y}$$

31. a) $\sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

$$\sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$$

Vì $3 > 1$ nên $\sqrt{25 - 16} > \sqrt{25} - \sqrt{16}$

b) Với $a > b > 0 \Rightarrow a - b > 0$, ta có: $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a - b} \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{a - b} + \sqrt{b} \quad (2)$$

Để chứng minh (1), ta đi chứng minh điều tương đương (2) sẽ dễ dàng hơn.

Ta có: $(\sqrt{a - b} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{(a - b)^2} + 2\sqrt{b(a - b)} + \sqrt{b^2}$

$$= |a - b| + 2\sqrt{b(a - b)} + |b| = a - b + b + 2\sqrt{b(a - b)}$$

$$= a + 2\sqrt{b(a - b)} > a = (\sqrt{a})^2.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a - b} + \sqrt{b} > \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \sqrt{a - b} > \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ (dpcm).}$$

Luyện tập

32. Tính: a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}$;

b) $\sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4}$

c) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$;

d) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$

33. Giải phương trình:

a) $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0$;

b) $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3} = \sqrt{12} + \sqrt{27}$

$$c) \sqrt{3}x^2 - \sqrt{12} = 0;$$

$$d) \frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0$$

34. Rút gọn các biểu thức sau đây:

$$a) ab^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}} \text{ với } a < 0; b \neq 0;$$

$$b) \sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}} \text{ với } a > 3;$$

$$c) \sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}} \text{ với } b < 0 \text{ và } a > -1,5;$$

$$d) (a-b) \cdot \sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}} \text{ với } a < b < 0$$

$$35. \text{ Tìm } x, \text{ biết: } a) \sqrt{(x-3)^2} = 9;$$

$$b) \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6$$

36. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

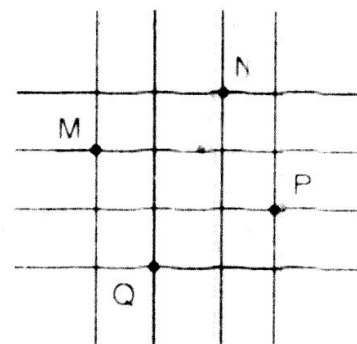
$$a) 0,01 = \sqrt{0,0001};$$

$$b) -0,5 = \sqrt{-0,25};$$

$$c) \sqrt{39} < 7 \text{ và } \sqrt{39} > 6;$$

$$d) (4 - \sqrt{13})2x < \sqrt{3}(4 - \sqrt{13}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$$

37. Đố: Trên lưới ô vuông, mỗi ô vuông cạnh 1 cm, cho bốn điểm M, N, P, Q (hình bên). Hãy xác định số đo cạnh, đường chéo và diện tích của tứ giác MNPQ.



Giải

$$32. a) \sqrt{1 \frac{9}{16} \cdot 5 \frac{4}{9} \cdot 0,01} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{49}{9} \cdot \frac{1}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{16}} \cdot \sqrt{\frac{49}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{1}}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{100}} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{7}{24}$$

$$b) \sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4} = \sqrt{1,44(1,21 - 0,4)}$$

$$= \sqrt{1,44 \cdot 0,81} = \sqrt{\frac{144}{100} \cdot \frac{81}{100}} = \sqrt{\frac{144}{100}} \cdot \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{12}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{108}{100} = 1,08$$

$$c) \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} = \sqrt{\frac{(165 + 124)(165 - 124)}{164}}$$

$$= \sqrt{\frac{289 \cdot 41}{164}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{17^2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{17}{2}$$

$$d) \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} = \sqrt{\frac{(149 + 76)(149 - 76)}{(457 + 384)(457 - 384)}} = \sqrt{\frac{225 \cdot 73}{841 \cdot 73}}$$

$$= \sqrt{\frac{225}{841}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \frac{\sqrt{15^2}}{\sqrt{29^2}} = \frac{15}{29}$$

$$33. \text{ a) } \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 2,5 \cdot \sqrt{2} \approx 5. \text{ Vậy } S = \{5\}.$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \cdot (x + \sqrt{3}) = \sqrt{12} + \sqrt{27} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot (x + 1) = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot (x + 1) = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 4. \text{ Vậy } S = \{4\}.$$

$$\text{c) } \sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{12} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } S = \{\pm \sqrt{2}\}.$$

$$\text{d) } \frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{100} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{10}. \text{ Vậy } S = \{\pm \sqrt{10}\}.$$

34. a) Với $a < 0$; $b \neq 0$, ta có:

$$ab^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}} = ab^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(ab^2)^2}} = \frac{ab^2 \cdot \sqrt{3}}{[ab^2]} = \frac{ab^2 \sqrt{3}}{b^2 \cdot [a]} = \frac{ab^2 \sqrt{3}}{ab^2} = -\sqrt{3}$$

b) Với $a > 3$ hay $a - 3 > 0$, ta có:

$$\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}} = \sqrt{\frac{9(a-3)^2}{16}} = \frac{\sqrt{9(a-3)^2}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{(a-3)^2}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} \cdot |a-3| = \frac{3(a-3)}{4}$$

c) Với $b < 0$ và $a > -1,5 \Leftrightarrow a + 1,5 > 0 \Leftrightarrow 2a + 3 > 0$

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{9 + 12a + 4a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{(3 + 2a)^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|3 + 2a|}{|b|} = \frac{3 + 2a}{-b} = -\frac{2a + 3}{b}$$

d) Với $b < 0$ và $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$, ta có:

$$(a - b) \cdot \sqrt{\frac{ab}{(a - b)^2}} = (a - b) \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{(a - b)^2}} = (a - b) \cdot \frac{\sqrt{ab}}{[a - b]} = \frac{(a - b) \cdot \sqrt{ab}}{-(a - b)} = -\sqrt{ab}$$

$$35. \text{ a) } \sqrt{(x - 3)^2} = 9 \Leftrightarrow |x - 3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 9 \\ x - 3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy $x = -6$ hoặc $x = 12$.

$$\text{b) } \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2x + 1)^2} = 6$$

$$\Leftrightarrow |2x + 1| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 6 \\ 2x + 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5 \\ 2x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{7}{2}.$$

36. a) $0,01 = \sqrt{0,0001}$: đúng vì: $\sqrt{0,0001} = \sqrt{(0,01)^2} = 0,01$

b) $-0,5 = \sqrt{-0,25}$: sai vì: $\sqrt{-0,25}$ không có nghĩa (số âm không có căn bậc hai)

c) $\sqrt{39} < 7$ và $\sqrt{39} > 6$: đúng, vì :

• $\sqrt{39} < 7 \Leftrightarrow (\sqrt{39})^2 < 7^2 \Leftrightarrow 39 < 49$ (đúng)

• $\sqrt{39} > 6 \Leftrightarrow (\sqrt{39})^2 > 6^2 \Leftrightarrow 39 > 36$ (đúng)

d) $(4 - \sqrt{13})2x < \sqrt{3}(4 - \sqrt{13})(1) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}(2)$: đúng

Do ta nhân hai số của bất phương trình (2) với cùng số dương $(4 - \sqrt{13})$.

37. Tứ giác MNPQ có 4 cạnh bằng nhau vì mỗi cạnh là đường chéo của hình chữ nhật do hai ô vuông ghép lại, do đó:

$$MN = NP = PQ = QM \quad (1)$$

Vậy MNPQ là hình thoi.

Ta thấy hình thoi MNPQ có hai đường chéo MP và NQ là đường chéo của hình chữ nhật do ba ô vuông ghép lại, do đó đường chéo $MP = NQ$.

(2)

Từ (1) và (2), suy ra hình thoi MNPQ là một hình vuông.

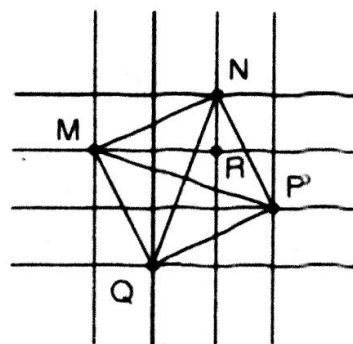
- Tính cạnh hình vuông MNPQ:

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông.

Ta có: $MN^2 = MR^2 + NR^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow MN = \sqrt{5}$ (cm);

$$MP^2 = MN^2 + NP^2 = 2MN^2 = 2.5 = 10 \Rightarrow MP = \sqrt{10}$$
 (cm)

- Diện tích hình vuông MNPQ là: $S = MN^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ (cm²).



§6. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A| \cdot \sqrt{B}$ ($B \geq 0$)

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn: $A \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A^2 \cdot B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$)

$A \cdot \sqrt{B} = -\sqrt{A^2 \cdot B}$ (với $A < 0$ và $B \geq 0$)

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Đưa nhân tử ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{12.15}$; b) $\sqrt{28.a^4b^2}$

2. Đưa nhân tử vào trong dấu căn:

a) $15\sqrt{2}$; b) $2ab^2\sqrt{4a}$ với $a > 0$; c) $ab^2\sqrt{-a}$ với $a < 0$

Giải

1. a) $\sqrt{12.15} = \sqrt{4.3.3.5} = \sqrt{2^2.3^2.5} = \sqrt{2^2}.\sqrt{3^2}.\sqrt{5} = 2.3.\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

b) $\sqrt{28.a^4b^2} = \sqrt{4.7.a^4.b^2} = \sqrt{2^2.7.(a^2)^2.b^2}$
 $= \sqrt{2^2}.\sqrt{(a^2)^2}.\sqrt{b^2}.\sqrt{7} = 2.\|a^2\|.\|b\|.\sqrt{7} = 2\sqrt{7}.a^2.\|b\|$

2. a) $15\sqrt{2} = \sqrt{15^2.2} = \sqrt{225.2} = \sqrt{450}$

b) Với $a > 0$, ta có: $2ab^2\sqrt{4a} = \sqrt{(2a)^2.(b^2)^2.4a} = \sqrt{16a^3.b^4}$

c) Với $a < 0$, ta có: $ab^2\sqrt{-a} = -\sqrt{a^2.(-a).(b^2)^2} = -\sqrt{-a^3b^4}$

B. Bài tập căn bản

43. Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

a) $\sqrt{54}$; b) $\sqrt{108}$; c) $0,1\sqrt{20000}$

d) $-0,05\sqrt{28800}$; e) $\sqrt{7.63.a^2}$.

44. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

$3\sqrt{5}$; $-5\sqrt{2}$; $-\frac{2}{3}\sqrt{xy}$ với $xy \geq 0$; $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ với $x > 0$.

45. So sánh: a) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$; b) 7 và $3\sqrt{5}$;

c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$

46. Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$; b) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$.

47. Rút gọn: a) $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x \neq y$;

b) $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$ với $a > 0,5$

Giải

43. a) $\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$

b) $\sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$

c) $0,1\sqrt{20000} = 0,1\sqrt{10000 \cdot 2} = 0,1 \cdot 100\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

d) $-0,05\sqrt{28800} = -0,05 \cdot \sqrt{2 \cdot 14400} = -0,05\sqrt{2 \cdot 120^2} = -0,05 \cdot 120\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$

e) $\sqrt{7.63 \cdot a^2} = \sqrt{441 \cdot a^2} = \sqrt{(21a)^2} = |21a| = 21|a| = \begin{cases} 21 \cdot a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -21 \cdot a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$

44. a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$

b) $-5\sqrt{2} = -\sqrt{5^2 \cdot 2} = -\sqrt{50}$

c) $-\frac{2}{3}\sqrt{xy} = -\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot xy} = -\sqrt{\frac{4}{9}xy}$

d) Với $x > 0$, ta có: $x\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{2}{x}} = \sqrt{2x}$

45. a) $\left. \begin{array}{l} 3\sqrt{3} \\ \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \end{array} \right\} \text{ vì } 3\sqrt{3} > 2\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} > \sqrt{12}$

b) $\left\{ \begin{array}{l} 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45} \\ 7 = \sqrt{7^2} = \sqrt{49} \\ \text{Vì } \sqrt{45} < \sqrt{49} \text{ nên } 3\sqrt{5} < 7 \end{array} \right.$

c) Ta có: $\left(\frac{1}{3}\sqrt{51}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 51 = \frac{51}{9} = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

và $\left(\frac{1}{5}\sqrt{150}\right)^2 = \frac{1}{25} \cdot 150 = 6$

Vì $5\frac{2}{3} < 6 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\sqrt{51}\right)^2 < \left(\frac{1}{5}\sqrt{150}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{51} < \frac{1}{5}\sqrt{150}$

d) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ và $\left(6\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 6^2 \cdot \frac{1}{2} = 18$

Vì $1\frac{1}{2} < 18 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 < \left(6\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6} < 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

46. a) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x} = (2 - 4 - 3)\sqrt{3x} + 27 = -5\sqrt{3x} + 27$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28 &= 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{4 \cdot 2x} + 7\sqrt{9 \cdot 2x} + 28 \\
 &= 3\sqrt{2x} - 10\sqrt{2x} + 21\sqrt{2x} + 28 \\
 &= (3 - 10 + 21)\sqrt{2x} + 28 = 14\sqrt{2x} + 28 = 14(\sqrt{2x} + 2)
 \end{aligned}$$

47. a) Với $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x \neq y$, ta có:

$$\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}} = \frac{2}{(x+y)(x-y)} \cdot (x+y) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2}{x-y} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

b) Với $a > 0,5 \Rightarrow a - 0,5 > 0 \Rightarrow 2a - 1 > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)} &= \frac{2}{2a-1} \cdot |a| \cdot \sqrt{5(2a-1)^2} \\
 &= \frac{2a}{2a-1} \cdot |2a-1| \cdot \sqrt{5} = \frac{2a(2a-1)}{2a-1} \cdot \sqrt{5} = 2a\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

§7. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI (tiếp theo)

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Tổng quát: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|} \quad (AB \geq 0, B \neq 0)$

4. Trục căn thức ở mẫu

- Trường hợp mẫu là biểu thức dạng tích các căn thức và các số:
Ta phân tích tử thành dạng tích có thừa số là căn thức ở mẫu để giản ước.

Tổng quát: $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$

- Trường hợp mẫu là biểu thức dạng tổng có chứa căn:
Ta phân tích tử thành dạng tích có thừa số là biểu thức chứa căn ở mẫu để giản ước.
Hoặc ta nhân tử và mẫu với lượng liên hợp của biểu thức ở mẫu để có thể làm mất căn thức ở mẫu.

$$\frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{A - B} \quad (a \geq 0; B \geq 0; A \neq B)$$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Khử mẫu ở các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{4}{5}}$;

b) $\sqrt{\frac{3}{2a}}$ với $a > 0$

2. Trục căn thức ở mẫu trong các biểu thức:

a) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$; $\frac{2}{\sqrt{b}}$ với $b > 0$

b) $\frac{5}{5-2\sqrt{3}}$; $\frac{2a}{1-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$

Giải

1. a) $\sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) Với $a > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{3}{2a}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2a}{2a \cdot 2a}} = \frac{\sqrt{6a}}{\sqrt{(2a)^2}} = \frac{\sqrt{6a}}{2a}$

2. a) $\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

* Với $b > 0$, ta có: $\frac{2}{\sqrt{b}} = \frac{2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{2\sqrt{b}}{b}$

b) $\frac{5}{5-2\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (5+2\sqrt{3})}{(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})} = \frac{5(5+2\sqrt{3})}{5^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{5(5+2\sqrt{3})}{25-12} = \frac{5(5+2\sqrt{3})}{13}$

* Với $a \geq 0$ và $a \neq 1$, ta có:

$$\frac{2a}{1-\sqrt{a}} = \frac{2a(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} = \frac{2a((1+\sqrt{a}))}{1-(\sqrt{a})^2} = \frac{2a(1+\sqrt{a})}{1-a}$$

B. Bài tập căn bản

Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn (giả thiết các biểu thức đã cho có nghĩa)

48. $\sqrt{\frac{1}{600}}$; $\sqrt{\frac{11}{540}}$; $\sqrt{\frac{3}{50}}$; $\sqrt{\frac{5}{98}}$; $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$

49. $ab \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$; $\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}$; $\sqrt{\frac{9a^3}{36b}}$; $3xy \cdot \sqrt{\frac{2}{xy}}$.

Trục căn thức ở mẫu.

50. $\frac{5}{\sqrt{10}}$; $\frac{5}{2\sqrt{5}}$; $\frac{1}{3\sqrt{20}}$; $\frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}$; $\frac{y+b\sqrt{y}}{b \cdot \sqrt{y}}$ với $b \neq 0$, $y > 0$

$$51. \frac{3}{\sqrt{3}+1}; \frac{2}{\sqrt{3}-1}; \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}};$$

$$\frac{b}{3+\sqrt{b}} \text{ với } b \geq 0; \frac{p}{2\sqrt{p}-1} \text{ với } p \geq 0 \text{ và } p \neq \frac{1}{4}$$

$$52. \frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq y;$$

$$\frac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \text{ với } a \geq 0, b \geq 0 \text{ và } a \neq b.$$

Giải

$$48. * \sqrt{\frac{1}{600}} = \sqrt{\frac{600}{600 \cdot 600}} = \frac{\sqrt{600}}{\sqrt{600^2}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2}}{600} = \frac{2 \cdot 5 \sqrt{6}}{600} = \frac{\sqrt{6}}{60}$$

$$* \sqrt{\frac{11}{540}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 540}{540 \cdot 540}} = \frac{\sqrt{11 \cdot 540}}{540} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}}{540} = \frac{6\sqrt{165}}{540} = \frac{\sqrt{165}}{90}$$

$$* \sqrt{\frac{3}{50}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 50}{50 \cdot 50}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 50}}{50} = \frac{\sqrt{150}}{50} = \frac{\sqrt{5^2 \cdot 2 \cdot 3}}{50} = \frac{5\sqrt{6}}{50} = \frac{\sqrt{6}}{10}$$

$$* \sqrt{\frac{5}{98}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 98}{98 \cdot 98}} = \frac{\sqrt{490}}{98} = \frac{\sqrt{7^2 \cdot 10}}{98} = \frac{7\sqrt{10}}{98} = \frac{\sqrt{10}}{14}$$

$$* \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}} = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{27}} = \frac{|1-\sqrt{3}|}{\sqrt{9 \cdot 3}} = \frac{|1-\sqrt{3}|}{3\sqrt{3}} = \frac{-(1-\sqrt{3})\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{9}$$

$$49. * ab \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = ab \cdot \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = ab \cdot \frac{\sqrt{ab}}{|b|} = \begin{cases} a\sqrt{ab} & \text{nếu } b > 0 \\ -a\sqrt{ab} & \text{nếu } b < 0 \end{cases} \quad (\text{dk: } ab \geq 0; b \neq 0)$$

$$* \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{ab}{a^2}} = \frac{a\sqrt{ab}}{b|a|} \quad (\text{dk: } ab > 0)$$

$$* \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}} = \sqrt{\frac{b+1}{b^2}} = \frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{b+1}}{|b|} \quad (\text{dk: } b \geq -1, b \neq 0)$$

$$* \sqrt{\frac{9a^3}{36b}} = \frac{\sqrt{9a^2 \cdot a}}{\sqrt{36b}} = \frac{|a|\sqrt{ab}}{2|b|} \quad (\text{dk: } ab \geq 0; b \neq 0)$$

$$* 3xy \cdot \sqrt{\frac{2}{xy}} = 3xy \cdot \sqrt{\frac{2xy}{(xy)^2}} = \frac{3xy\sqrt{2xy}}{|xy|} = 3\sqrt{2xy} \quad (\text{dk: } xy > 0)$$

$$50. * \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$* \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2.5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$* \frac{1}{3\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{3\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{60} = \frac{\sqrt{5}}{30}$$

$$* \frac{2\sqrt{2} + 2}{5\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2} + 2) \cdot \sqrt{2}}{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2.5} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2.5} = \frac{2 + \sqrt{2}}{5}$$

* Với $b \neq 0$; $y > 0$, ta có:

$$\frac{y + b\sqrt{y}}{b \cdot \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}(y + b\sqrt{y})}{b \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{y}} = \frac{y\sqrt{y} + by}{by} = \frac{y(\sqrt{y} + b)}{b \cdot y} = \frac{\sqrt{y} + b}{b}$$

51. HD: Nhân tử và mẫu với lượng liên hợp của mẫu số:

$$* \frac{3}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$* \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{3} + 1$$

$$* \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{4 - 3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

* Với $b > 0$, ta có:

$$\frac{b}{3 + \sqrt{b}} = \frac{b(3 - \sqrt{b})}{(3 + \sqrt{b})(3 - \sqrt{b})} = \frac{b(3 - \sqrt{b})}{3^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{b(3 - \sqrt{b})}{9 - b}$$

* Với $p \geq 0$ và $p \neq \frac{1}{4}$, ta có:

$$\frac{p}{2\sqrt{p} - 1} = \frac{2(\sqrt{p} + 1) \cdot p}{(2\sqrt{p} - 1)(2\sqrt{p} + 1)} = \frac{(2\sqrt{p} + 1) \cdot p}{(2\sqrt{p})^2 - 1^2} = \frac{p(2\sqrt{p} + 1)}{4p - 1}$$

52. * $\frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{5})}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{5})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{5})$

$$* \frac{3}{\sqrt{10} + \sqrt{7}} = \frac{3(\sqrt{10} - \sqrt{7})}{(\sqrt{10} + \sqrt{7})(\sqrt{10} - \sqrt{7})} = \frac{3(\sqrt{10} - \sqrt{7})}{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{3(\sqrt{10} - \sqrt{7})}{10 - 7} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{7}}{10 - 7}$$

* Với $x > 0$, $y \geq 0$, $x \neq y$, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$$

Với $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $a \neq b$, ta có

$$\frac{2ab}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{2ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{2ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{2ab(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

Luyện tập

53. Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

a) $\sqrt{18(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$; b) $ab\sqrt{1 + \frac{1}{a^2b^2}}$; c) $\frac{a}{\sqrt{b^3}} + \frac{a}{b^4}$; d) $\frac{a + \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

54. Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

a) $\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}}$; c) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2}$;
d) $\frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}$; e) $\frac{p - 2\sqrt{p}}{\sqrt{p} - 2}$

55. Phân tích thành nhân tử (với x, y, a, b là các số không âm):

a) $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$; b) $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$

56. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

a) $3\sqrt{5}, 2\sqrt{6}, \sqrt{29}, 4\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{2}, \sqrt{38}, 3\sqrt{7}, 2\sqrt{14}$.

57. $\sqrt{15x} - \sqrt{16x} = 9$ khi x bằng:

A) 1; B) 3; C) 9; D) 81.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

53. a) $\sqrt{18(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$
 $= 3\sqrt{2}|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (Vì $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$)

b) $ab\sqrt{1 + \frac{1}{a^2b^2}} = ab\sqrt{\frac{a^2b^2 + 1}{a^2b^2}} = ab \frac{\sqrt{a^2b^2 + 1}}{|ab|}$
 $= \begin{cases} \sqrt{a^2b^2 + 1} & \text{nếu } a.b > 0 \\ -\sqrt{a^2b^2 + 1} & \text{nếu } a.b < 0 \end{cases}$

c) $\sqrt{\frac{a}{b^3}} + \frac{a}{b^4} = \sqrt{\frac{ab + a}{b^4}} = \frac{\sqrt{ab + a}}{|b^2|} = \frac{1}{b^2} \sqrt{ab + a}$

d) * Cách 1:

$$\begin{aligned}\frac{a + \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{(a + \sqrt{ab})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{a\sqrt{a} - a\sqrt{b} + \sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} \\&= \frac{a\sqrt{a} - a\sqrt{b} + |a|\sqrt{b} - |b|\sqrt{a}}{|a| - |b|} \\&= \frac{a\sqrt{a} - a\sqrt{b} + a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{a - b} \quad (\text{do } a \geq 0, b \geq 0 \text{ và nếu } a \neq b) \\&= \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}}{a - b} = \frac{\sqrt{a}(a - b)}{a - b} = \sqrt{a}\end{aligned}$$

* Cách 2:

$$\frac{a + \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^2} + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} \quad (\text{do } \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0)$$

54. a) $\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2^2} + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{-(\sqrt{3} - 1)} = -\sqrt{5}$

c) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{6}}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{-(\sqrt{a} - 1)} = -\sqrt{a} \quad (\text{điều kiện } a \neq 1)$

e) $\frac{p - 2\sqrt{p}}{\sqrt{p} - 2} = \frac{\sqrt{p}(\sqrt{p} - 2)}{\sqrt{p} - 2} = \sqrt{p} \quad (\text{điều kiện } p \neq 4).$

55. a) $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1 = b(a + \sqrt{a}) + \sqrt{a} + 1$
 $= b\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) + (\sqrt{a} + 1) = (\sqrt{a} + 1)(b\sqrt{a} + 1)$

b) $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2} = |x|\sqrt{x} - |y|\sqrt{y} + |x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{x}$
 $= x\sqrt{x} + x\sqrt{y} - y\sqrt{x} - y\sqrt{y} \quad (\text{do } x \geq 0, y \geq 0)$
 $= x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)$

56. a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$

$$2\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{24}$$

$$4\sqrt{2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = \sqrt{32}$$

Vì $\sqrt{24} < \sqrt{29} < \sqrt{32} < \sqrt{45}$ nên ta sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau: $2\sqrt{6}$; $\sqrt{29}$; $4\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$.

$$b) 6\sqrt{2} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = \sqrt{72}$$

$$3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}$$

$$2\sqrt{14} = \sqrt{2^2 \cdot 14} = \sqrt{56}$$

Vì $\sqrt{38} < \sqrt{56} < \sqrt{63} < \sqrt{72}$ nên ta sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau: $\sqrt{38}$; $2\sqrt{14}$; $3\sqrt{7}$; $6\sqrt{2}$

$$57. \quad \sqrt{25x} - \sqrt{16x} = 9 \text{ (đk: } x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x} - 4\sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x}(5 - 4) = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 9^2 \Leftrightarrow x = 81.$$

Ta chọn câu D.

§8. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Phương pháp:

Cần ôn tập để vận dụng tổng hợp các phép tính và các phép biến đổi đã học.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

$$1. \text{ Rút gọn biểu thức: } \sqrt{6x} + \sqrt{\frac{6}{x}} - \sqrt{\frac{2x}{3}} \text{ với } x > 0$$

$$2. \text{ Giải phương trình: } 2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x} \quad (1)$$

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ Với } x > 0, \text{ ta có: } \sqrt{6x} + \sqrt{\frac{6}{x}} - \sqrt{\frac{2x}{3}} &= \sqrt{6x} + \sqrt{\frac{6x}{x^2}} - \sqrt{\frac{6x}{3^2}} \\ &= \sqrt{6x} + \frac{1}{x} \sqrt{6x} - \frac{1}{3} \sqrt{6x} = \frac{2}{3} \sqrt{6x} + \frac{1}{x} \sqrt{6x} = \sqrt{6x} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$2. 2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} = 27$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x}(2 - 4 + 3) = 27 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 27$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x})^2 = 27^2 \Leftrightarrow 3x = 729 \Leftrightarrow x = 243 \text{ (nhận)}$$

Vậy $S = \{243\}$.

B. Bài tập căn bản

58. Rút gọn biểu thức:

a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$;

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$

c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$;

d) $0,1\sqrt{200} + 2\sqrt{0,08} + 0,4\sqrt{50}$

59. Rút gọn các biểu thức sau (với $a > 0, b > 0$):

a) $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a}$

b) $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$.

60. Cho biểu thức: $B = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$ với $x \geq -1$

a) Rút gọn biểu thức B;

b) Tìm x sao cho B có giá trị là 16.

61. Chứng minh đẳng thức:

a) $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

b) $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3} \text{ (với } x > 0)$

Giải

58. a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5} = 5\sqrt{\frac{5}{5^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{5}$

$$= \frac{5}{5}\sqrt{5} + \frac{2}{2}\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{2}} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}(1 + 3 + 5) = 9\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} = \sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{9 \cdot 5} + 3\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2}$

$$= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

d) $0,1\sqrt{200} + 2\sqrt{0,08} + 0,4\sqrt{50} = 0,1\sqrt{100 \cdot 2} + 2\sqrt{0,04 \cdot 2} + 0,4\sqrt{25 \cdot 2}$

$$= 0,1 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot 0,2 \sqrt{2} + 0,4 \cdot 5 \sqrt{2} = \sqrt{2} + 0,4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3,4\sqrt{2}$$

59. Với $a > 0$, $b > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a} \\
 &= 5\sqrt{a} - 4.5.b.a\sqrt{a} + 5.4.a.b\sqrt{a} - 2.3\sqrt{a} \\
 &= 5\sqrt{a} - 20ab\sqrt{a} + 20ab\sqrt{a} - 6\sqrt{a} = -\sqrt{a} \\
 \text{b) } 5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b} \\
 &= 5.8.a.b\sqrt{ab} - \sqrt{36a^2b^2}.ab + 2.3.a.b\sqrt{ab} - 5.9.b.a\sqrt{ab} \\
 &= 40ab\sqrt{ab} - 6ab\sqrt{ab} + 6ab\sqrt{ab} - 45ab\sqrt{ab} \\
 &= (40 - 6 + 6 - 45)ab\sqrt{ab} = -5ab\sqrt{ab}
 \end{aligned}$$

60. a) Rút gọn B:

$$\begin{aligned}
 B &= \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1} \\
 &= \sqrt{16(x+1)} - \sqrt{9(x+1)} + \sqrt{4(x+1)} + \sqrt{x+1} \\
 &= 4\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} \\
 &= \sqrt{x+1}(4 - 3 + 2 + 1) = 4\sqrt{x+1}
 \end{aligned}$$

b) Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned}
 B = 16 &\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = 16 \quad (x \geq -1) \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 = 4^2 \Leftrightarrow x+1 = 16 \Leftrightarrow x = 15 \text{ (nhận)}
 \end{aligned}$$

Vậy $x = 15$.

$$\begin{aligned}
 \text{61. a) Ta có: VT} &= \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2.3}{9}} - 4\sqrt{\frac{3.2}{4}} \\
 &= \frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{2}{3}\sqrt{6} - 2\sqrt{6} \\
 &= \sqrt{6}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - 2\right) = \frac{(9+4-12)}{6} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \text{VP (dpcm)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) VT} &= \left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} \quad (\text{với } x > 0) \\
 &= \left(x\sqrt{\frac{6x}{x^2}} + \sqrt{\frac{6x}{9}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = \left(\frac{x}{x}\sqrt{6x} + \frac{1}{3}\sqrt{6x} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} \\
 &= \left(\sqrt{6x} + \frac{1}{3}\sqrt{6x} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = \sqrt{6x}\left(1 + \frac{1}{3} + 1\right) : \sqrt{6x} \\
 &= \frac{7}{3}\sqrt{6x} : \sqrt{6x} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} = \text{VP}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3} \text{ (dpcm).}$$

Luyện tập

Rút gọn các biểu thức sau:

62. a) $\frac{1}{2} \sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$;

b) $\sqrt{150} + \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{60} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$;

c) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$;

d) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

63. a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$ với $a > 0$ và $b > 0$

b) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$ với $m > 0$ và $x \neq 1$

64. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$

b) $\frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$

65. Rút gọn rồi so sánh giá trị của M với 1, biết:

$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1$$

66. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ bằng:

A) $\frac{1}{2}$;

B) 1;

C) -4;

D) 4

Chọn câu trả lời đúng.

Giải

62. a) $\frac{1}{2} \sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{16 \cdot 3} - 2\sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{\frac{33}{11}} + 5\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{4}{2} \sqrt{3} - 10\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4 \cdot 3}{3^2}} = 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{10}{3} \sqrt{3}$$

$$= (2 - 10 - 1 + \frac{10}{3}) \sqrt{3} = \left(\frac{10}{3} - 9\right) \sqrt{3} = -\frac{17}{3} \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sqrt{150} + \sqrt{1,6 \cdot 60} + 4,5 \sqrt{2 \frac{2}{3}} - \sqrt{6} &= \sqrt{25 \cdot 6} + \sqrt{1,6 \cdot 60} + 4,5 \sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{6} \\
 &= 5\sqrt{6} + \sqrt{16 \cdot 6} + 4,5 \frac{\sqrt{8 \cdot 3}}{(\sqrt{3})^2} - \sqrt{6} = 5\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 4,5 \frac{2\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6} \\
 &= (5 + 4 + 3 - 1) \sqrt{6} = 11\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7} \sqrt{7} + \sqrt{84} &= \sqrt{28 \cdot 7} - 2\sqrt{3 \cdot 7} + \sqrt{7 \cdot 7} + \sqrt{4 \cdot 21} \\
 &= \sqrt{14^2} - 2\sqrt{21} + \sqrt{7^2} + 2\sqrt{21} = 14 - 2\sqrt{21} + 7 + 2\sqrt{21} = 21
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \sqrt{6} + \sqrt{5} \sqrt{2} - \sqrt{120} &= (\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6 \cdot 5} + (\sqrt{5})^2 - \sqrt{4 \cdot 30} \\
 &= 6 + 2\sqrt{30} + 5 - 2\sqrt{30} = 11
 \end{aligned}$$

63. a) Với $a > 0$, $b > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{a}} &= \sqrt{\frac{ab}{b^2}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b} \sqrt{\frac{ab}{a^2}} \\
 &= \frac{1}{b} \sqrt{ab} + \sqrt{ab} + \frac{1}{b} \sqrt{ab} = \left(1 + \frac{2}{b}\right) \cdot \sqrt{ab}
 \end{aligned}$$

b) Với $m > 0$ và $x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}} &= \sqrt{\frac{m}{(1-x)^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m(1-2x+x^2)}{81}} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{(1-x)^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m(1-x)^2}{9^2}} = \frac{1}{|1-x|} \cdot \sqrt{m} \cdot \frac{2|1-x|}{9} \cdot \sqrt{m} = \frac{2}{9} m.
 \end{aligned}$$

64. a) Với $a \neq 1$ và $a \geq 0$ biến đổi vế trái, ta có:

$$\begin{aligned}
 \text{VT} &= \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 = \frac{1-a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a}{1-\sqrt{a}} \cdot \frac{(1-\sqrt{a})^2}{(1-a)^2} \\
 &= \frac{(1-a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a)(1-\sqrt{a})}{(1-a)^2} = \frac{(1-a)(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})}{(1-a)^2} \\
 &= \frac{(1-a)(1-a)}{(1-a)^2} = 1 = \text{VP}.
 \end{aligned}$$

b) Với $a+b > 0$, $b \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
 \text{VT} &= \frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{(ab^2)^2}{(a+b)^2}} \\
 &= \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|ab^2|}{|a+b|} = \frac{(a+b)}{b^2} \cdot \frac{|a| \cdot b^2}{(a+b)} = |a| = \text{VP (dpcm)}
 \end{aligned}$$

65. a) Với $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} * \quad M &= \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right] : \frac{\sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a} - 1)^2} = \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a} + 1} = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

* So sánh giá trị của M với 1.

$$\text{Ta có: } M = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} < 1 \quad (\text{Vì } \frac{1}{\sqrt{a}} > 0 \text{ nên } 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} < 1)$$

$$66. \text{ Ta có: } \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{4}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4}{4 - 3} = 4$$

Vậy chọn câu D.

§9. CĂN BẬC BA

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa căn bậc ba

Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$

$$\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = a$$

* Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba.

* Nhận xét: – Căn bậc ba của số dương là số dương
– Căn bậc ba của số âm là số âm
– Căn bậc ba của số 0 là chính số 0.

$$\text{Ta có: } (\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$$

2. Tính chất của căn bậc ba

a) Liên hệ giữa thứ tự và căn bậc ba.

$$\text{Nếu } a < b \text{ thì } \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$$

b) Liên hệ giữa phép nhân và phép khai căn bậc ba.

$$\text{Với } a, b \text{ bất kỳ thì } \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

c) Liên hệ giữa phép chia và phép khai căn bậc ba.

$$\text{Với } a, b \text{ bất kỳ, } b \neq 0 \text{ thì } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

67. Hãy tìm: $\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{-729}$; $\sqrt[3]{0,064}$; $\sqrt[3]{-0,216}$; $\sqrt[3]{-0,008}$.

68. Tính: a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$;

b) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$

69. So sánh: a) 5 và $\sqrt[3]{123}$;

b) $5\sqrt[3]{6}$ và $6\sqrt[3]{5}$

Giải

67. a) $\sqrt[3]{512} = 8$ vì $8^3 = 512$

b) $\sqrt[3]{-729} = -9$ vì $(-9)^3 = -729$

c) $\sqrt[3]{0,064} = 0,4$ vì $(0,4)^3 = 0,064$

d) $\sqrt[3]{-0,216} = -0,6$ vì $(-0,6)^3 = -0,216$

e) $\sqrt[3]{-0,008} = -0,2$ vì $(-0,2)^3 = -0,008$

68. a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{(-2)^3} - \sqrt[3]{5^3} = 3 - (-2) - 5 = 0$

b) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{135}{5}} - \sqrt[3]{54 \cdot 4} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{216} = 3 - 6 = -3$

69. a) Ta có: $\left. \begin{array}{l} 5 = \sqrt[3]{125} \\ \text{Mà } 125 > 123 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{125} > \sqrt[3]{123}$

Vậy $5 > \sqrt[3]{123}$.

b) $\left. \begin{array}{l} 5 \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{750} \\ \text{và } 6 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{1080} \\ \text{mà } 1080 > 750 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{1080} > \sqrt[3]{750}$

Vậy $6\sqrt[3]{5} > 5\sqrt[3]{6}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. Tóm tắt lý thuyết

Bảng tóm tắt

Các công thức biến đổi căn thức

$$1) \sqrt{A^2} = |A|$$

$$2) \sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$$

$$3) \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$$

$$4) \sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} \quad (B \geq 0)$$

$$5) A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} \quad (\text{với } A \geq 0 \text{ và } B \geq 0)$$

$$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B} \quad (\text{với } A < 0 \text{ và } B \geq 0)$$

$$6) \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \quad (AB \geq 0, B \neq 0)$$

$$7) \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$$

$$8) \frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2} \quad (\text{với } A \geq 0 \text{ và } A \neq B^2)$$

$$9) \frac{1}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}{A - B} \quad (A \geq 0, B \geq 0 \text{ và } A \neq B)$$

B. Bài tập căn bản

70. Tìm giá trị các biểu thức sau bằng cách biến đổi, rút gọn thích hợp:

$$a) \sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}};$$

$$b) \sqrt{3 \frac{1}{16} \cdot 2 \frac{14}{25} \cdot 2 \frac{34}{81}};$$

$$c) \frac{\sqrt{640} \cdot \sqrt{34,3}}{\sqrt{567}};$$

$$d) \sqrt{21,6} \cdot \sqrt{810} \cdot \sqrt{11^2 - 5^2}.$$

71. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5};$$

$$b) 0,2 \sqrt{(-10)^2 \cdot 3} + 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2};$$

$$c) \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{4}{5} \cdot \sqrt{200} \right) : \frac{1}{8};$$

$$d) 2\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{2(-3)^2} - 5\sqrt{(-1)^4}$$

72. Phân tích thành nhân tử (với các số x, y, a, b không âm và $a \geq b$)

a) $xy - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1$;

b) $\sqrt{ax} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay}$;

c) $\sqrt{a+b} + \sqrt{a^2-b^2}$;

d) $12 - \sqrt{x} - x$.

73. Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{-9a} - \sqrt{9+12a+4a^2}$ tại $a = -9$;

b) $1 + \frac{3m}{m-2} \sqrt{m^2-4m+4}$ tại $m = 1,5$;

c) $\sqrt{1-10a+25a^2} - 4a$ tại $a = \sqrt{2}$;

d) $4x - \sqrt{9x^2+6x+1}$ tại $x = -\sqrt{3}$

74. Tìm x, biết: a) $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$;

b) $\frac{5}{3} \sqrt{15x} - \sqrt{15x} - 2 = \frac{1}{3} \sqrt{15x}$

75. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -1,5$;

b) $\left[\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right] : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$

c) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = a-b$ với a, b dương và $a \neq b$;

d) $\left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right) = 1-a$ ($a \geq 0$ và $a \neq 1$)

76. Cho biểu thức: $Q = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \right) : \frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$ với $a > b > 0$

a) Rút gọn Q;

b) Xác định giá trị của Q khi $a = 3b$.

Giải

70. a) $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}} = \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{14}{3}\right)^2} = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 14}{9 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{40}{27}$

b) $\sqrt{3 \cdot \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot \frac{14}{25} \cdot 2 \cdot \frac{34}{81}} = \sqrt{\frac{49}{16} \cdot \frac{64}{25} \cdot \frac{196}{81}} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{14}{9}\right)^2} = \frac{7}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{14}{9} = \frac{196}{45}$

c) $\frac{\sqrt{640} \cdot \sqrt{34,3}}{\sqrt{567}} = \frac{\sqrt{640 \cdot 34,3}}{\sqrt{567}} = \frac{\sqrt{64 \cdot 343}}{\sqrt{567}} = \frac{\sqrt{8^2 \cdot 7^2 \cdot 7}}{\sqrt{(3^2)^2 \cdot 7}} = \frac{8 \cdot 7}{9} = \frac{56}{9}$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sqrt{21,6} \cdot \sqrt{810} \cdot \sqrt{11^2 - 5^2} &= \sqrt{21,6 \cdot 810(11+5)(11-5)} = \sqrt{216 \cdot 81 \cdot 16 \cdot 5} \\ &= \sqrt{1296 \cdot 81 \cdot 16} = \sqrt{(36 \cdot 9 \cdot 4)^2} = 36 \cdot 9 \cdot 4 = 1296 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{71. a) } (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} &= (-\sqrt{2} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}) \sqrt{2} - \sqrt{5} \\ &= -2 + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,2\sqrt{(-10)^2} \cdot 3 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} &= 2\sqrt{3} + 2|\sqrt{3} - \sqrt{5}| \\ &= 2\sqrt{3} + 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{4}{5} \cdot \sqrt{200} \right) : \frac{1}{8} &= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{8}} - \frac{\frac{3}{2} \sqrt{2}}{\frac{1}{8}} + \frac{\frac{4}{5} \sqrt{200}}{\frac{1}{8}} \\ &= 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - 12\sqrt{2} + \frac{32}{5} \sqrt{100 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} - 12\sqrt{2} + \frac{320\sqrt{2}}{5} \\ &= 2\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 64\sqrt{2} = 54\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{2(-3)^2} - 5\sqrt{(-1)^4} &= 2|\sqrt{2} - 3| + 3\sqrt{2} - 5 \\ &= 2(3 - \sqrt{2}) + 3\sqrt{2} - 5 = 6 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5 = \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

72. a) Với $x, y \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} xy - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 &= y\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 \\ &= y\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x} - 1)(y\sqrt{x} + 1) \end{aligned}$$

b) Với $x, y, a, b \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay} &= \sqrt{a}\sqrt{x} - \sqrt{b}\sqrt{y} + \sqrt{b}\sqrt{x} - \sqrt{a}\sqrt{y} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{y}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{a+b} + \sqrt{a^2 - b^2} &= \sqrt{a+b} + \sqrt{(a-b)(a+b)} \\ &= \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a+b} = \sqrt{a+b}(1 + \sqrt{a-b}) \end{aligned}$$

($a+b$ và $a-b$ đều không âm)

$$\begin{aligned} \text{d) } \text{Với } x \geq 0, \text{ ta có: } 12 - \sqrt{x} - x &= 3 - \sqrt{x} + 9 - x = (3 - \sqrt{x}) + 3^2 - (\sqrt{x})^2 \\ &= (3 - \sqrt{x}) + (3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x}) \\ &= (3 - \sqrt{x})(1 + 3 + \sqrt{x}) = (3 - \sqrt{x})(4 + \sqrt{x}) \end{aligned}$$

73. a) Với $a = -9$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{-9a} - \sqrt{9 + 12a + 4a^2} &= 3\sqrt{-a} - \sqrt{(2a+3)^2} \\ &= 3\sqrt{-a} - |2a+3| = 3\sqrt{-(-9)} - |2(-9)+3| = 9 - |-15| = 9 - 15 = -6 \end{aligned}$$

b) Với $m = 1,5$, ta có:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3m}{m-2} \sqrt{m^2 - 4m + 4} &= 1 + \frac{3m}{m-2} \cdot \sqrt{(m-2)^2} = 1 + \frac{3m \cdot |m-2|}{m-2} \\ &= 1 + \frac{3 \cdot 1,5 \cdot |1,5 - 2|}{1,5 - 2} = 1 + \frac{4,5 \cdot 0,5}{-0,5} = 1 + \frac{4,5 \cdot 0,5}{0,5} = 1 - 4,5 = -3,5 \end{aligned}$$

c) Với $a = \sqrt{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 10a + 25a^2} - 4a &= \sqrt{(1 - 5a)^2} - 4a = |1 - 5a| - 4a \\ &= |1 - 5\sqrt{2}| - 4\sqrt{2} = -(1 - 5\sqrt{2}) - 4\sqrt{2} \quad (\text{do } 1 - 5\sqrt{2} < 0) \\ &= -1 + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

d) Với $x = -\sqrt{3}$, ta có:

$$\begin{aligned} 4x - \sqrt{9x^2 + 6x + 1} &= 4x - \sqrt{(3x+1)^2} = 4x - |3x+1| \\ &= 4(-\sqrt{3}) - |3(-\sqrt{3})+1| = -4\sqrt{3} - (3\sqrt{3} - 1) \\ &= -4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 1 = 1 - 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

74. a) $\sqrt{(2x-1)^2} = 3 \Leftrightarrow |2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = \pm 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \\ 2x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$

Vậy $x = -1$ hoặc $x = 2$.

b) $\frac{5}{3} \sqrt{15x} - \sqrt{15x} - 2 = \frac{1}{3} \sqrt{15x} \quad (\text{dk: } x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} \sqrt{15x} - \sqrt{15x} - \frac{1}{3} \sqrt{15x} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3} - 1 - \frac{1}{3} \right) \sqrt{15x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \sqrt{15x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{15x} = 6 \Leftrightarrow (\sqrt{15x})^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow 15x = 36 \Leftrightarrow x = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

75. a) VT $= \left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \left[\frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{36 \cdot 6}}{3} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{6} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$= -\frac{3}{2} = -1,5 = \text{VP (dpem)}.$$

b) $\left[\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right] : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \left[\frac{\sqrt{7}(\sqrt{2} - 1)}{-(\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{-(\sqrt{3} - 1)} \right] : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

$$= -(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

$$= -[(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2] = -(7 - 5) = -2 = VP.$$

$$\text{c) VT} = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \quad (a, b > 0 \text{ và } a \neq b)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2b} + \sqrt{ab^2}}{\sqrt{ab}} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$= (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b = VP.$$

$$\text{d) VT} = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$$

$$= \left[1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right] \left[1 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1}\right] \quad (\text{Với } a > 0 \text{ và } a \neq 1)$$

$$= (1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a}) = 1 - (\sqrt{a})^2 = 1 - a = VP.$$

$$76. \text{ a) } Q = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a^2 - (a^2 - b^2)}{b\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{b^2}{b\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= \frac{a - b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{(\sqrt{a - b})^2}{\sqrt{(a + b)(a - b)}} \quad (a > b > 0 \text{ nên } a - b > 0)$$

$$= \frac{\sqrt{a - b} \cdot \sqrt{a - b}}{\sqrt{a - b} \cdot \sqrt{a + b}} = \frac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b}}$$

b) Xác định giá trị Q khi $a = 3b$. Thay $a = 3b$ vào Q, ta có:

$$Q = \frac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b}} = \frac{\sqrt{3b - b}}{\sqrt{3b + b}} = \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{4b}} = \sqrt{\frac{2b}{4b}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Chọn câu trả lời đúng. Căn bậc hai số học của 0,01 là :
 A) 0,1 (B) -0,1 (C) 0,1 và -0,1 (D) 0,01.
2. Chọn câu trả lời đúng. Cho $\sqrt{x} = 11$, giá trị x không âm là :
 A) 11 (B) -11 (C) 121 (D) -121.
3. Chọn câu trả lời đúng. Cho biểu thức $M = \frac{\sqrt{3-6x}}{\sqrt{10-\sqrt{x}-5}}$. Tìm x để M có nghĩa.
 A) $x \leq \frac{1}{2}$ (B) $x \geq 5$ và $x \neq 15$
 C) $x \geq \frac{1}{2}$ và $x \neq 15$ (D) $x \in \emptyset$.
4. Chọn câu trả lời đúng. Phương trình $\sqrt{x^4} = 2$ có tập nghiệm :
 A) $S = \{2\}$ (B) $S = \{-2\}$
 C) $S = \{\sqrt{2}\}$ (D) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.
5. Chọn câu trả lời đúng.
 Giá trị biểu thức $M = 2\sqrt{3}(\sqrt{2}-2) + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}$ là
 A) 4 (B) 5 (C) $2\sqrt{2} - 4$ (D) $3\sqrt{6} - 5$.
6. Chọn câu trả lời đúng. Tính $\sqrt{\frac{1,21}{1,44}} =$
 A) $\frac{11}{1,2}$ (B) $\frac{11}{12}$ (C) $\frac{1,1}{12}$ (D) $\pm \frac{11}{12}$.
7. Chọn câu trả lời đúng. Tính $\sqrt{113} =$
 A) 10 (B) 11,64 (C) 10,6301 (D) 10,56.
8. Chọn câu trả lời đúng. Tính $\sqrt{(-\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} - \sqrt{5+2\sqrt{6}} =$
 A) 0 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$.
9. Chọn câu trả lời đúng. Rút gọn : $\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}}\right)^2 : (\sqrt{3}-2) =$
 A) -2 (B) 4 (C) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{3} + 2$.
10. Chọn câu trả lời đúng. Cho $Q = \frac{1}{x - \sqrt{x} + 2}$. Xác định x để Q đạt giá trị lớn nhất.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. Chọn câu trả lời đúng. Phương trình $\sqrt[3]{3x^2 + 7x + 17} = 3$ có tập nghiệm là:

(A) $S = \{1\}$ (B) $S = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$
 (C) $S = \left\{1; -\frac{10}{3}\right\}$ (D) $S = \left\{1; \frac{10}{3}\right\}$

12. Chọn câu trả lời đúng.

Phương trình $\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = 3$ với $x \geq 0$;

$x \neq 1$ có tập nghiệm là :

(A) $S = \{16\}$ (B) $S = \{3\}$ (C) $S = \{4\}$ (D) $S = \emptyset$.

13. Chọn câu trả lời đúng.

Rút gọn $A = \left[\frac{1-a\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1-a)} - \frac{\sqrt{a}}{1-a}\right] : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$ với $a \geq 0$; $a \neq 1$

(A) $\sqrt{a}$ (B) $\frac{1+a}{a}$ (C) $\frac{\sqrt{a}(1+a)}{a}$ (D) $\frac{1}{a}$

14. Chọn câu trả lời đúng.

Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18} - 8\sqrt{2}}}$ =

(A) $\sqrt{3} - 1$ (B) $\sqrt{3} + 1$ (C) $2 - \sqrt{3}$ (D) $2 + \sqrt{3}$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÂU HỎI CHƯƠNG I

1. Chọn câu B.

2. $\sqrt{x} = 11 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 11^2 \Leftrightarrow x = 121$. Chọn câu C.

3. M có nghĩa khi $\begin{cases} 3-6x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \\ \sqrt{10}-\sqrt{x-5} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 5 \\ x \neq 15 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$. Chọn câu D.

4. $\sqrt{x^4} = 2 \Leftrightarrow |x^2| = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Chọn câu D.

5. $M = 2\sqrt{3}(\sqrt{2}-2) + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{6} + 3 + 4\sqrt{3} = 5$. Chọn câu B.

6. $\sqrt{\frac{1,21}{1,44}} = \sqrt{\frac{121.0,01}{144.0,01}} = \sqrt{\frac{121}{144}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}} = \frac{11}{12}$. Chọn câu B.

7. Chọn câu C.

8.
$$\begin{aligned} \sqrt{(-\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} &= |-\sqrt{3} - \sqrt{2}| - \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3.2} + (\sqrt{2})^2} \\ &= (-\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - |\sqrt{3} + \sqrt{2}| \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0. \text{ Chọn câu A.} \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} \left(\frac{3\sqrt{3} - 1}{4 + \sqrt{3}} \right)^2 : (\sqrt{3} - 2) &= \left[\frac{(3\sqrt{3} - 1)(4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} \right]^2 : (\sqrt{3} - 2) \\ &= \left(\frac{12\sqrt{3} - 9 - 4 + \sqrt{3}}{13} \right)^2 \cdot \frac{1(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} = \left(\frac{13\sqrt{3} - 13}{13} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{-1} = -(3 - 2\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 2) \\ &= -(3\sqrt{3} + 6 - 6 - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2) = -2. \text{ Chọn câu A.} \end{aligned}$$

10. Ta có: $x - \sqrt{x} + 2 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4}$.

Ta có: $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} + 2$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{7}{4}$ và giá trị này đạt được khi $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Suy ra $\frac{1}{x - \sqrt{x} + 2}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{4}{7}$ khi $x = \frac{1}{4}$. Chọn câu B.

11.
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3x^2 + 7x + 17} = 3 &\Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 17 = 27 \Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 17 - 27 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 7x - 10 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 10x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(x - 1) + 10(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x + 10) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Chọn câu C.

12.
$$\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x^3 - 1}} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{x^3}}{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x^3}-1} \right) \cdot \left(\frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1} \right) (1-2\sqrt{x}+x) = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = 3 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16.$$

Chọn câu A.

$$\begin{aligned} 13. \quad A &= \frac{1-a\sqrt{a}-\sqrt{a}(1-\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1-a)} : \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)-\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \\ &= \frac{1-a\sqrt{a}-\sqrt{a}+a}{(1-\sqrt{a})(1-a)} : \frac{a-\sqrt{a}-a-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \\ &= \frac{(1-\sqrt{a})(1+a)}{(1-\sqrt{a})(1-a)} : \frac{-2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{-2\sqrt{a}} \\ &= \frac{1+a}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \cdot \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{-\sqrt{a}} = \frac{1+a}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}+a}{a} \end{aligned}$$

Chọn câu C.

$$\begin{aligned} 14. \quad A &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}} \\ &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{16-2\cdot 4\cdot \sqrt{2}+2}}} \\ &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{(4-\sqrt{2})^2}}} = \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+4-\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{12}+4}} = \sqrt{6-2\sqrt{2\sqrt{3}+4}} = \sqrt{6-2\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1}} \\ &= \sqrt{6-2\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} = \sqrt{6-2(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{6-2\sqrt{3}-2} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1. \text{ Chọn câu A.} \end{aligned}$$

HÀM SỐ BẬC NHẤT

§1. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hàm số

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.
- Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc cho bằng công thức...

2. Đồ thị của hàm số:

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả những điểm $M(x, y)$ trên mặt phẳng tọa độ sao cho x, y nghiệm đúng hệ thức $y = f(x)$.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến:

Với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ và giả sử $x_1 < x_2$ thì:

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi $f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng (a, b) khi và chỉ khi $f(x_1) > f(x_2)$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 5$. Tính $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(-2)$; $f(-10)$.

2. Cho hàm số $y = f(x) = 4x$.

Trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$, lấy các giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$. Hãy chứng tỏ rằng $f(x_1) < f(x_2)$. Từ đó suy ra rằng hàm số $y = f(x) = 4x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

1. Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 5$

$$\bullet f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 5 = 5;$$

$$\bullet f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 5 = \frac{11}{2}$$

$$\bullet f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 5 = 6;$$

$$\bullet f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + 5 = \frac{13}{2}$$

$$\bullet f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2) + 5 = 4;$$

$$\bullet f(-10) = \frac{1}{2} \cdot (-10) + 5 = 0$$

2. Với x_1, x_2 bất kì thuộc R , giả sử $x_1 < x_2$.

Ta có: $f(x_1) = 4x_1, f(x_2) = 4x_2$ và $f(x_1) - f(x_2) = 4x_1 - 4x_2 = 4(x_1 - x_2)$ (*)

Vì $x_1 < x_2$ (giả thiết) nên $x_1 - x_2 < 0$. Suy ra $4(x_1 - x_2) < 0$.

Thay vào (*) ta được $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Suy ra $f(x_1) < f(x_2)$ (đpcm)

Vậy, theo định nghĩa, hàm số $y = f(x) = 4x$ đồng biến trên tập R .

B. Bài tập căn bản

1. a) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x$. Tính: $f(-2); f(-1); f(0); f(\frac{1}{2}); f(1); f(2); f(3)$

b) Cho hàm số $y = g(x) = \frac{2}{3}x + 3$. Tính: $g(-2); g(-1); g(0); g(\frac{1}{2}); g(1); g(2); g(3)$.

c) Có nhận xét gì về giá trị của hai hàm số đã cho ở trên khi biến x lấy cùng một giá trị?

2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

a) Tính các giá trị tương ứng của y theo các giá trị của x rồi điền vào bảng sau:

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y = -\frac{1}{2}x + 3$											

b) Hàm số đã cho là hàm số đồng biến hay nghịch biến? Vì sao?

3. Cho hai hàm số $y = 2x$ và $y = -2x$.

a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng tọa độ đồ thị của hai hàm số đã cho.

b) Trong cả hai hàm số đã cho, hàm số nào đồng biến? Hàm số nào nghịch biến? Vì sao?

Giải

1. a) b) Tính giá trị của hàm số $f(x) = \frac{2}{3}x$ và $g(x) = \frac{2}{3}x + 3$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = f(x) = \frac{2}{3}x$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2
$y = g(x) = \frac{2}{3}x + 3$	$-\frac{4}{3} + 3$	$-\frac{2}{3} + 3$	$0 + 3$	$\frac{1}{3} + 3$	$\frac{2}{3} + 3$	$\frac{4}{3} + 3$	$2 + 3$

c) Nhận xét:

- Các hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x$ và $y = g(x) = \frac{2}{3}x + 3$ là hai hàm số đồng biến vì khi x lấy giá trị tăng thì y cũng nhận các giá trị tương ứng tăng lên.

- c) Cùng một giá trị của biến x , giá trị của hàm số $y = g(x)$ luôn luôn lớn hơn giá trị tương ứng của hàm số $y = f(x)$ là 3 đơn vị.

2. a) Với $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, ta có:

$$f(-2,5) = -\frac{1}{2}(-2,5) + 3 = \frac{2,5 + 6}{2} = \frac{8,5}{2} = 4,25$$

$$f(-2) = -\frac{1}{2}(-2) + 3 = 4$$

$$f(-1,5) = -\frac{1}{2}(-1,5) + 3 = \frac{1,5 + 6}{2} = \frac{7,5}{2} = 3,75$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}(-1) + 3 = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$f(-0,5) = -\frac{1}{2}(-0,5) + 3 = \frac{0,5 + 6}{2} = \frac{6,5}{2} = 3,25$$

$$f(0) = -\frac{1}{2}(0) + 3 = 3$$

$$f(0,5) = -\frac{1}{2}(0,5) + 3 = \frac{-0,5 + 6}{2} = \frac{5,5}{2} = 2,75$$

$$f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 3 = \frac{-1 + 6}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$f(1,5) = -\frac{1}{2} \cdot 1,5 + 3 = \frac{-1,5 + 6}{2} = \frac{4,5}{2} = 2,25$$

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 2$$

$$f(2,5) = -\frac{1}{2} \cdot 2,5 + 3 = \frac{-2,5 + 6}{2} = \frac{3,5}{2} = 1,75$$

Điền vào bảng, ta được:

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y = -\frac{1}{2}x + 3$	4,25	4	3,75	3,5	3,25	3	2,75	2,5	2,25	2	1,75

b) Hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 3$ là hàm số nghịch biến vì khi giá trị của biến x

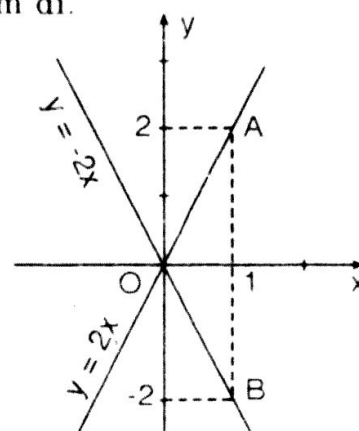
tăng thì giá trị tương ứng của hàm y lại giảm đi.

3. a) Vẽ đồ thị hàm số:

* $y = 2x$: Đồ thị hàm số $y = 2x$ là một đường thẳng đi qua hai điểm: $O(0;0)$ và $A(1;2)$.

* $y = -2x$: Đồ thị hàm số $y = -2x$ là một đường thẳng đi qua hai điểm: $O(0;0)$ và $B(1;-2)$.

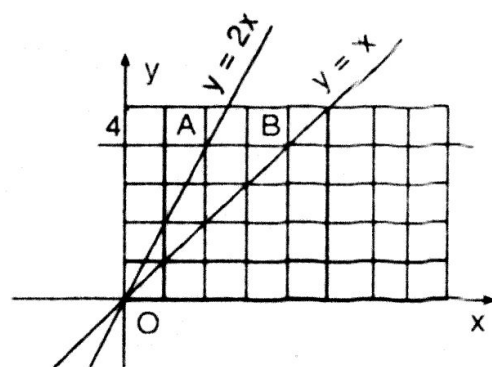
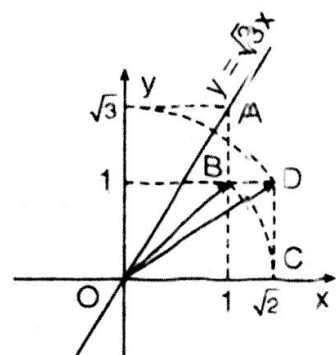
b) Hàm số $y = 2x$ là hàm số đồng biến vì khi giá trị của biến x tăng lên thì giá trị tương ứng của y cũng tăng lên.



Hàm số $y = -2x$ là hàm số nghịch biến vì khi giá trị của biến x tăng lên thì giá trị tương ứng của y lại giảm đi.

Luyện tập

4. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{3} \cdot x$ được vẽ bằng compa và thước thẳng ở hình bên. Hãy tìm hiểu và trình bày lại các bước thực hiện vẽ đồ thị đó.
5. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x$ và $y = 2x$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy (hình bên).
b) Đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y = 4$ lần lượt cắt các đường thẳng $y = 2x$, $y = x$ tại hai điểm A và B. Tìm tọa độ các điểm A, B và tính chu vi, diện tích của tam giác OAB theo đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét.



6. Cho các hàm số $y = 0,5x$ và $y = 0,5x + 2$.
- a) Tính giá trị y tương ứng của mỗi hàm số theo giá trị đã cho của biến x rồi điền vào bảng sau:
- | | | | | | | | | | |
|----------------|------|-------|------|----|---|---|-----|------|-----|
| x | -2,5 | -2,25 | -1,5 | -1 | 0 | 1 | 1,5 | 2,25 | 2,5 |
| $y = 0,5x$ | | | | | | | | | |
| $y = 0,5x + 2$ | | | | | | | | | |
- b) Có nhận xét gì về các giá trị tương ứng của hai hàm số đó khi biến x lấy cùng một giá trị?
7. Cho hàm số $y = f(x) = 3x$. Cho x hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$. Hãy chứng minh $f(x_1) < f(x_2)$ rồi rút ra kết luận hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

4. - Trước hết ta xác định điểm B có tọa độ (1; 1) trên mặt phẳng tọa độ và ta tính được $OB = \sqrt{2}$.
- Quay một cung tròn tâm O, bán kính $OB = \sqrt{2}$, cắt trục Ox tại điểm C có giá trị bằng $\sqrt{2}$.
- Dựng điểm D($\sqrt{2}$; 1), ta tính được $OD = \sqrt{3}$
Vẽ cung tròn tâm O, bán kính $OD = \sqrt{3}$, cắt trục Oy tại điểm có tọa độ (0; $\sqrt{3}$).

Xác định điểm A có tọa độ $(1; \sqrt{3})$

Nối O với A, ta được đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}x$.

5. a) * Vẽ đồ thị $y = x$

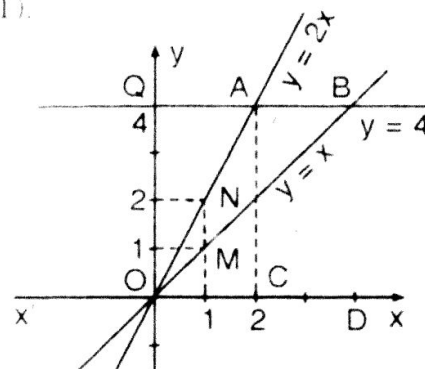
Cho $x = 1$, ta có $y = 1$, ta được điểm $M(1; 1)$.

Đồ thị hàm số $y = x$ là đường thẳng đi qua điểm $O(0; 0)$ và điểm $M(1; 1)$

* Vẽ đồ thị $y = 2x$

Cho $x = 1$, ta có $y = 2.1 = 2$, ta được điểm $N(1; 2)$.

Đồ thị hàm số $y = 2x$ là đường thẳng đi qua điểm $O(0; 0)$ và điểm $N(1; 2)$.



b) Tìm tọa độ điểm A và B

- Vì A là giao điểm của đường thẳng $y = 4$ và đường thẳng $y = 2x$ nên phương trình hoành độ giao điểm của chúng là: $4 = 2x$. Suy ra $x = 2$.

Vậy tọa độ điểm A là $(2; 4)$.

- Vì B là giao điểm của đường thẳng $y = 4$ và đường thẳng $y = x$ nên phương trình hoành độ giao điểm của chúng là $x = 4$.

Vậy tọa độ điểm B là $(4; 4)$

* Chu vi của $\triangle OAB$:

Ta có: $AB = 2$

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông OAC, ta có:

$$OA^2 = OC^2 + CA^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow OA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông OBD, ta có:

$$OB^2 = OD^2 + DB^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow OB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Vậy chu vi $\triangle OAB$ là: $OA + AB + BO = 2\sqrt{5} + 2 + 4\sqrt{2}$ (cm)

* Diện tích $\triangle OAB$:

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OQB} - S_{\triangle OQA} = \frac{1}{2} OQ \cdot QB - \frac{1}{2} OQ \cdot QA$$

$$= \frac{1}{2} OQ \cdot (QB - QA) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 - 2) = 4$$

Vậy $S_{\triangle OAB} = 4$ (cm²)

6. a) Tính các giá trị của y, ta được:

x	-2,5	-2,25	-1,5	-1	0	1	1,5	2,25	2,5
$y = 0,5x$	-1,25	-1,125	-0,75	-0,5	0	0,5	0,75	1,125	1,25
$y = 0,5x + 2$	0,75	0,875	1,25	1,5	2	2,5	2,75	3,125	3,25

b) Ta nhận thấy rằng giá trị của hàm số $y = 0,5x + 2$ luôn luôn lớn hơn giá trị của hàm số $y = 0,5x$ là 2 đơn vị khi x lấy cùng một giá trị.

7. Với hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$, ta có:

$$f(x_1) - f(x_2) = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2) < 0 \quad (\text{Vì } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0)$$

Vậy $f(x_1) - f(x_2) < 0$

Suy ra $f(x_1) < f(x_2)$

Điều này chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = 3x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Hàm số bậc nhất là hàm số cho bởi công thức: $y = ax + b$, trong đó a và b là các số thực xác định và $a \neq 0$.

* Khi $b = 0$ hàm số có dạng $y = ax$.

2. Tính chất

a) Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$.

b) Trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$, hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy xác định các hệ số a, b của chúng:

a) $y = 1 - x$; b) $y = -\frac{1}{2}x$ c) $y = \sqrt{3}(x+1)$; d) $y = x + \frac{1}{x}$

2. Cho hàm số $y = f(x) = ax$

a) Tính $f(x_1)$; $f(x_2)$; $f(kx_1)$; $f(x_1+x_2)$

b) Suy ra các hệ thức sau: $f(kx_1) = k \cdot f(x_1)$; $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Giải

1. * Các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất:

a) $y = 1 - x$ với $a = -1$; $b = 1$.

b) $y = -\frac{1}{2}x$ với $a = -\frac{1}{2}$; $b = 0$.

c) $y = \sqrt{3}(x+1) = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ với $a = \sqrt{3}$; $b = \sqrt{3}$

* Hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ không phải là hàm số bậc nhất vì không có dạng $y = ax + b$.

2. a) Ta có: $y = f(x) = ax$

Khi đó: $f(x_1) = ax_1; f(x_2) = ax_2$

$$f(kx_1) = a(kx_1) = k(ax_1)$$

$$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2$$

b) Từ kết quả trên, ta suy ra: $f(kx_1) = kf(x_1)$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

B. Bài tập căn bản

8. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy xác định các hệ số a, b của chúng và xét xem hàm số bậc nhất nào đồng biến, nghịch biến.

a) $y = 1 - 5x;$

b) $y = -0,5x;$

c) $y = \sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{3};$

d) $y = 2x^2 + 3.$

9. Cho hàm số bậc nhất $y = (m - 2)x + 3$

a) Tìm các giá trị của m để hàm số đồng biến.

b) Tìm các giá trị của m để hàm số nghịch biến.

10. Một hình chữ nhật có các kích thước là 20cm và 30cm. Người ta bớt mỗi kích thước của hình đó đi x (cm) được hình chữ nhật mới có chu vi là y (cm). Hãy lập công thức tính y theo x .

Giải

8. a) Hàm số $y = 1 - 5x$ là hàm số bậc nhất với $a = -5; b = 1$.

Hàm số $y = 1 - 5x$ là hàm số nghịch biến vì $a = -5 < 0$

b) Hàm số $y = -0,5x$ là hàm số bậc nhất với $a = -0,5; b = 0$ và là hàm số nghịch biến vì $a = -0,5 < 0$.

c) Hàm số $y = \sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{3} = \sqrt{2}x - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là hàm số bậc nhất với $a = \sqrt{2}; b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ và là hàm số đồng biến vì $a = \sqrt{2} > 0$.

d) Hàm số $y = 2x^2 + 3$ không phải là hàm số bậc nhất vì không có dạng $y = ax + b$. (Đó là hàm số bậc 2 - Các em sẽ gặp lại ở phần sau).

9. a) Hàm số $y = (m - 2)x + 3$ đồng biến khi $m - 2 > 0$, suy ra $m > 2$.

b) Hàm số $y = (m - 2)x + 3$ nghịch biến khi $m - 2 < 0$, suy ra $m < 2$.

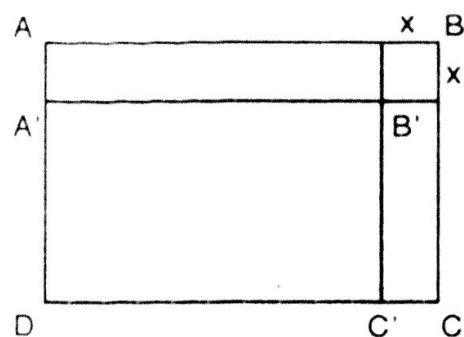
10. Gọi hình chữ nhật ban đầu ABCD có kích thước là $AB = 30\text{cm}; BC = 20\text{cm}$.

- Sau khi bớt các kích thước của hình chữ nhật x (cm), ta có hình chữ nhật mới là $A'B'C'D'$ với kích thước là:

$$A'B' = 30 - x; B'C' = 20 - x.$$

- Gọi y là chu vi của hình chữ nhật $A'B'C'D'$, ta có:

$$y = 2[(30 - x) + (20 - x)] = 2(50 - 2x) \text{ hay } y = -4x + 100.$$



Vậy y là hàm số của x và là hàm số bậc nhất với biến số x . (Vì y có dạng $y = ax + b$ với $a \neq 0$).

11. Hãy biểu diễn các điểm sau trên mặt phẳng tọa độ: A(-3;0), B(-1;1), C(0;3), D(1;1), E(3;0), F(1;-1), G(0;-3), H(-1;-1).

12. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$. Tìm hệ số a , biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2,5$.

13. Với những giá trị nào của m thì mỗi hàm số sau là hàm số bậc nhất?

a) $y = \sqrt{5-m}(x-1)$; b) $y = \frac{m+1}{m-1}x + 3,5$

14. Cho hàm số bậc nhất $y = (1 - \sqrt{5})x - 1$.

a) Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$? Vì sao?

b) Tính giá trị của y khi $x = 1 + \sqrt{15}$

c) Tính giá trị tương ứng của x khi $y = \sqrt{5}$.

14. a) Ta có: $a = 1 - \sqrt{5} < 0$ nên hàm số $y = (1 - \sqrt{5})x - 1$ nghịch biến trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

b) Khi $x = 1 + \sqrt{5}$ thì:

$$y = (1 - \sqrt{5})x - 1 = (1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) - 1 = 1 - 5 - 1 = -5$$

Vậy $y = -5$.

c) Khi $y = \sqrt{5}$ thì: $\sqrt{5} = (1 - \sqrt{5})x - 1 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{5})x = 1 + \sqrt{5}$

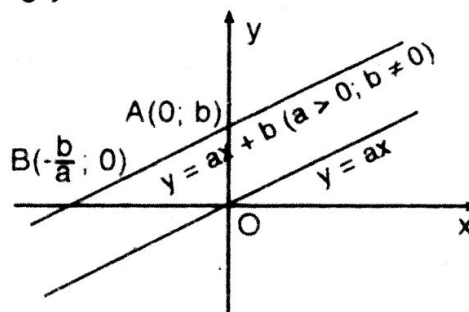
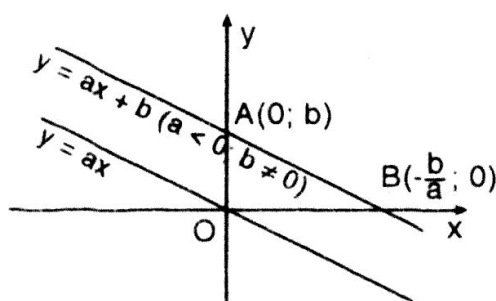
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{-4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$$

Vậy $x = -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$.

§3. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. *Định nghĩa:* Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b và song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$ và trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.



2. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0, b \neq 0$)

- * *Phương pháp chung:* Xác định hai điểm phân biệt $M(x_1, y_1); N(x_2, y_2)$ bất kỳ thuộc đồ thị, rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.
- * *Phương pháp thường dùng:* Xác định giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ bằng cách:
 - Cho $x = 0$, tính được $y = b$. Ta được điểm $A(0; b)$.
 - Cho $y = 0$, tính được $x = -\frac{b}{a}$. Ta xác định được điểm $B(-\frac{b}{a}; 0)$.

Nối A và B, ta được đồ thị hàm số $y = ax + b$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

a) $y = 2x - 3$;

b) $y = -2x + 3$.

Giải

- a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - 3$

Cho $x = 0$, ta tính được $y = -3$, ta được điểm $A(0; -3)$.

Cho $y = 0$, ta tính được $x = \frac{3}{2}$, ta được điểm $B(\frac{3}{2}; 0)$.

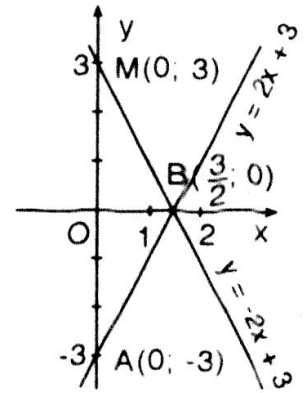
Vẽ đường thẳng qua A và B, ta được đồ thị hàm số $y = 2x - 3$

- b) Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x + 3$

Cho $x = 0$, ta tính được $y = 3$, ta có điểm $M(0; 3)$.

Cho $y = 0$, ta tính được $x = \frac{3}{2}$, ta có điểm $N(\frac{3}{2}; 0)$

Vẽ đường thẳng qua M và N, ta được đồ thị hàm số $y = -2x + 3$.



B. Bài tập căn bản

15. a) Vẽ đồ thị của các hàm số: $y = 2x$; $y = 2x + 5$; $y = -\frac{2}{3}x$ và $y = -\frac{2}{3}x + 5$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Bốn đường thẳng trên cắt nhau tạo thành tứ giác OABC (O là gốc tọa độ). Tứ giác OABC có phải là hình bình hành không? Vì sao?
16. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x$ và $y = 2x + 2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Gọi A là giao điểm của hai đồ thị nói trên, tìm tọa độ điểm A.
- c) Vẽ qua điểm $B(0; 2)$ một đường thẳng song song với trục Ox, cắt đường thẳng $y = x$ tại điểm C. Tìm tọa độ của điểm C rồi tính diện tích tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).

Giải

15. a) Vẽ đồ thị các hàm số:

* $y = 2x$: Đồ thị hàm số $y = 2x$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $M(1; 2)$

* $y = 2x + 5$

– Cho $x = 0$; tính được $y = 5$.

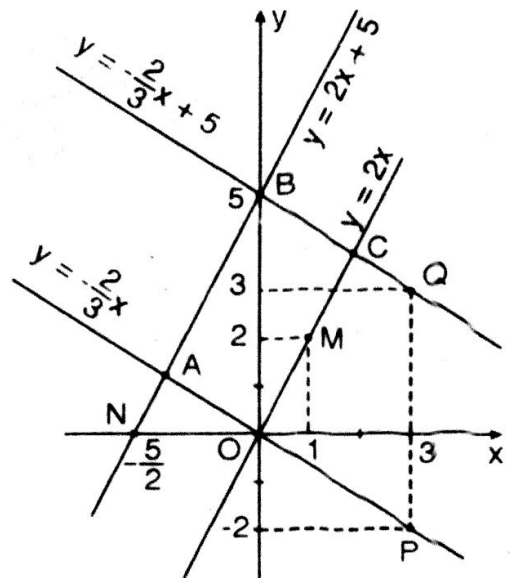
Ta xác định điểm $B(0; 5)$.

– Cho $y = 0$, tính được $x = -\frac{5}{2}$.

Ta xác định điểm $N(-\frac{5}{2}; 0)$

Đồ thị hàm số $y = 2x + 5$ là đường thẳng đi qua hai điểm N và B.

* $y = -\frac{2}{3}x$: Đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{3}x$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và đi qua điểm $P(3; -2)$.



$$y = -\frac{2}{3}x + 5$$

Cho $x = 0$, tính được $y = 5$, ta xác định được điểm $B(0;5)$.

Cho $x = 3$, ta tính được $y = 3$, ta xác định được điểm $Q(3;3)$.

Đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{3}x + 5$ là một đường thẳng đi qua hai điểm B và Q .

b) Bốn đường thẳng đã cho ở trên cắt nhau tại các điểm O, A, B, C .

Vì đường thẳng $y = 2x$ song song với đường thẳng $y = 2x + 5$ và đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x$ song song với đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x + 5$ nên tứ giác $OABC$ là hình bình hành (vì chúng có hai cặp cạnh đối song song).

16 a) Vẽ đồ thị các hàm số:

* $y = x$: Đồ thị hàm số $y = x$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $O(0;0)$ và $(1;1)$.

* $y = 2x + 2$

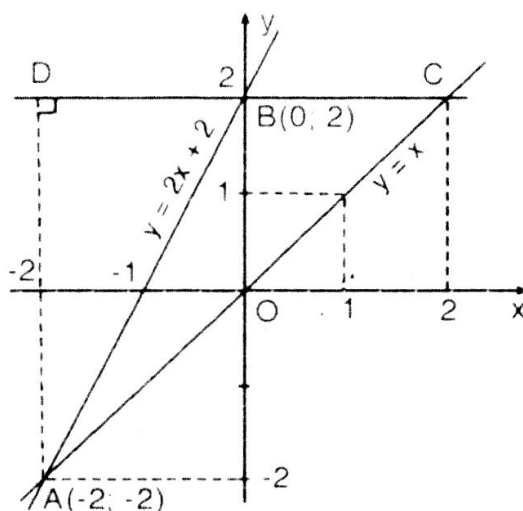
Cho $x = 0$, tính được $y = 2$.

Ta xác định được điểm $(0;2)$

Cho $y = 0$, tính được $x = -1$.

Ta xác định được điểm $(-1; 0)$

Đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm có tọa độ vừa xác định.



b) Tìm tọa độ điểm A .

Hoành độ của điểm A là nghiệm của phương trình: $2x + 2 = x \Leftrightarrow x = -2$

Thay $x = -2$ vào phương trình $y = x$, ta được $y = -2$

Vậy giao điểm A có tọa độ là $(-2; -2)$

c) Tìm tọa độ điểm C .

Qua $B(0;2)$ vẽ đường thẳng song song với trục Ox , đường thẳng này có phương trình $y = 2$ cắt đường thẳng $y = x$ tại điểm C .

Vì $y = x$ mà $y = 2$ nên $x = 2$

Vậy tọa độ điểm C là $(2;2)$

* Tính diện tích ΔABC

Nếu BC là đáy của ΔABC thì AD là chiều cao ứng với đáy BC , ta có:

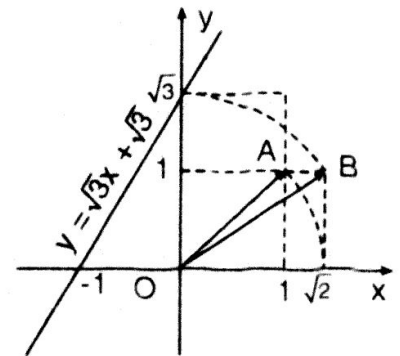
$$BC = 2$$

$$AD = 2 + 2 = 4$$

$$\text{Suy ra: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Luyện tập

17. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
 b) Hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A và B. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C.
 c) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).
18. a) Biết rằng với $x = 4$ thì hàm số $y = 3x + b$ có giá trị là 11. Tìm b. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị b vừa tìm được.
 b) Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + 5$ đi qua điểm A(-1;3). Tìm a. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị a vừa tìm được.
19. a) Đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ được vẽ bằng compa và thước thẳng (hình bên).
 Hãy tìm hiểu cách vẽ đó rồi nêu lại các bước thực hiện.
 b) Áp dụng: Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{5}x + \sqrt{5}$ bằng compa và thước thẳng
 Hướng dẫn: Tìm điểm trên trục tung có tung độ bằng $\sqrt{5}$.



Giải

17. a) Vẽ đồ thị các hàm số:

* $y = x + 1$.

- Cho $x = 0$, tính được $y = 1$. Ta xác định được điểm M(0;1).

- Cho $y = 0$, ta tính được $x = -1$. Ta xác định được điểm A(-1;0).

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm M và A, ta được đồ thị của hàm số $y = x + 1$.

* $y = -x + 3$

- Cho $x = 0$, tính được $y = 3$.

Ta xác định được điểm N(0;3).

- Cho $y = 0$, ta tính được $x = 3$.

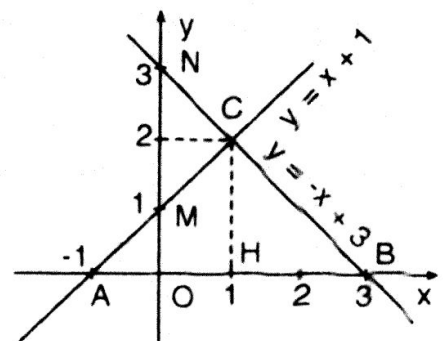
Ta xác định được điểm B(3;0).

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm N và B, ta được đồ thị của hàm số $y = -x + 3$.

- b) Tìm tọa độ của các điểm A, B, C

* *Tọa độ của điểm A:* Đồ thị hàm số $y = x + 1$ cắt trục hoành Ox tại điểm A có tọa độ là (-1;0)

* *Tọa độ điểm B:* Đồ thị hàm số $y = -x + 3$ cắt trục hoành Ox tại điểm B có tọa độ là (3;0)



- * **Tọa độ điểm C:** Đồ thị hàm số $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ cắt nhau tại C, do đó hoành độ của điểm C là nghiệm của phương trình:

$$x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào phương trình $y = x + 1$ ta có: $y = 1 + 1 = 2$

Vậy tọa độ điểm C là (1;2).

- * **Tính chu vi ΔABC**

Trong tam giác vuông HAC, ta có:

$$AC^2 = HA^2 + HC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Tương tự trong tam giác vuông HBC, ta có: $BC = 2\sqrt{2}$

Ta có $AB = 4$

Vậy chu vi tam giác ABC bằng:

$$Cv_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{2}$$

$$Cv_{\Delta ABC} = 4(1 + \sqrt{2}) \text{ (cm)}$$

- * **Tính diện tích ΔABC .**

Ta có
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

- 18 a) * Thay $x = 4$ và $y = 11$ vào phương trình $y = 3x + b$, ta có:

$$11 = 3 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 11 - 12 = -1$$

Vậy $b = -1$.

Khi đó, ta có hàm số $y = 3x - 1$

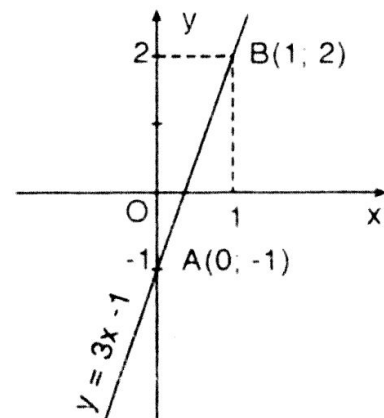
– Cho $x = 0$, tính được $y = -1$.

Ta xác định được điểm $A(0; -1)$

– Cho $y = 2$, tính được $x = 1$.

Ta xác định được điểm $B(1; 2)$.

Đồ thị hàm số $y = 3x - 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm A và B.



- b) * Vì đồ thị hàm số $y = ax + 5$ đi qua điểm $M(-1; 3)$ nên tọa độ điểm $M(-1; 3)$ nghiệm đúng phương trình: $3 = a(-1) + 5 \Leftrightarrow a = 2$

Vậy $a = 2$

Khi đó ta có hàm số $y = 2x + 5$

- * **Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x + 5$**

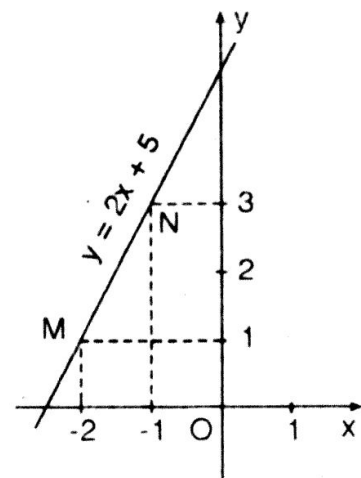
– Cho $x = -2$ ta tính được $y = 1$.

Ta xác định được điểm $M(-2; 1)$

– Cho $y = 3$ ta tính được $x = -1$.

Ta xác định được điểm $N(-1; 3)$

Đồ thị hàm số $y = 2x + 5$ là đường thẳng đi qua hai điểm M và N.



19. a) Nêu các bước vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ bằng thước và compa.

– Trước hết ta tìm điểm $\sqrt{3}$ trên trục Oy, bằng cách:

Dựng điểm A(1;1), áp dụng định lí Py-ta-go ta tính được: $OA = \sqrt{2}$

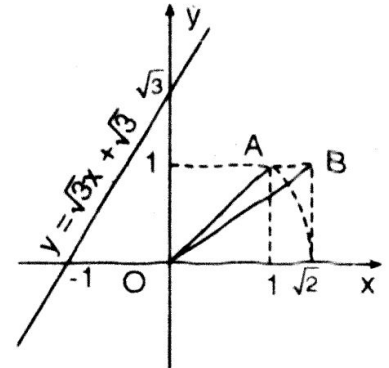
Quay một cung tròn tâm O, bán kính $OA = \sqrt{2}$, ta được điểm biểu diễn $\sqrt{2}$ trên trục Ox.

Dựng điểm B($\sqrt{2}$;1) ta tính được $OB = \sqrt{3}$.

Vẽ cung tròn tâm O, bán kính $OB = \sqrt{3}$, cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; \sqrt{3})$

– Lấy điểm O làm tâm, vẽ cung tròn có bán kính bằng 1, cắt trục hoành Ox tại điểm có hoành độ $(-1;0)$.

Đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ là đường thẳng đi qua hai điểm có tọa độ là $(0; \sqrt{3})$ và $(-1;0)$



b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{5}x + \sqrt{5}$

* Hướng dẫn: Cách vẽ tương tự câu a), bằng cách tìm điểm trên trục tung có tung độ bằng $\sqrt{5}$.

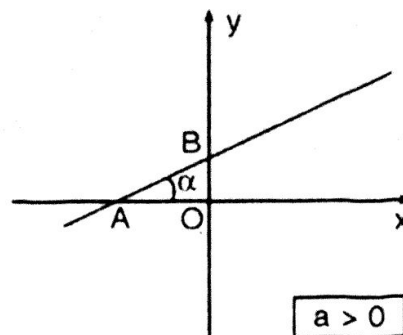
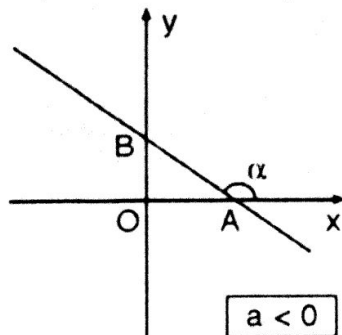
§4. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có hệ số góc a .

- $a > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- $a < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Với α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ với chiều dương trục hoành Ox nằm trên trục hoành.



* Nhận xét: Các đường thẳng có cùng hệ số a (a là hệ số của x) thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

2. Xét hai đường thẳng

$$y = ax + b \text{ (d)}$$

$$y = a'x + b' \text{ (d')}$$

- Ta có:
- $(d) // (d') \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b \neq b'$
 - $(d) \text{ cắt } (d') \Leftrightarrow a \neq a'$
 - $(d) \text{ trùng với } (d') \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho hàm số $y = ax + 3$. Hãy xác định hệ số a nếu:

- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -x$
- Khi $x = 4$ thì hàm số có giá trị bằng 1.

Giải

- Vì đồ thị hàm số $y = ax + 3$ song song với đồ thị hàm số $y = -x$ nên $a = -1$. Khi đó ta có hàm số $y = -x + 3$.
- Hàm số có giá trị bằng 1 tức là $y = 1$.

Với $x = 4$; $y = 1$, thay vào phương trình $y = ax + 3$, ta được:

$$1 = 4a + 3 \Leftrightarrow 4a = 1 - 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } a = -\frac{1}{2}$$

B. Bài tập căn bản

20. Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng cắt nhau và các cặp đường thẳng song song với nhau trong số các đường thẳng sau:

- | | | |
|---------------------|---------------------|-------------------|
| a) $y = 1,5x + 2$; | b) $y = x + 2$; | c) $y = 0,5x - 3$ |
| d) $y = x - 3$; | e) $y = 1,5x - 1$; | g) $y = 0,5x + 3$ |

21. Cho hai hàm số bậc nhất $y = mx + 3$ và $y = (2m + 1)x - 5$.

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là:

- Hai đường thẳng song song với nhau;
- Hai đường thẳng cắt nhau.

22. Cho hàm số $y = ax + 3$. Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -2x$.
- Khi $x = 2$ thì hàm số có giá trị $y = 7$.

Giải

20. * Các cặp đường thẳng cắt nhau khi $a \neq a'$, đó là các cặp đường thẳng ở các câu: a và b; a và c; a và d; a và g; b và c; b và e; b và g; c và d; c và e; d và e; d và g. (Em có thể chọn ra cặp bất kì trong các cặp trên).
- * Các cặp đường thẳng song song với nhau khi $a = a'$ và $b \neq b'$, đó là các cặp đường thẳng ở các câu: a và e; b và d; c và g.

21. a) Hai đường thẳng $y = mx + 3$ và $y = (2m + 1)x - 5$ song song với nhau khi và chỉ khi: $m = 2m + 1$ ($a = a'$; $b \neq b'$)

$$\Leftrightarrow m = -1$$

Vậy $m = -1$ thì hai đường thẳng trên song song với nhau.

- b) Hai đường thẳng $y = mx + 3$ và $y = (2m + 1)x - 5$ cắt nhau khi và chỉ khi: $m \neq 2m + 1 \Leftrightarrow m \neq -1$

Vậy $m \neq -1$ thì hai đường thẳng trên cắt nhau.

22. a) Vì đồ thị hàm số $y = ax + 3$ song song với đường thẳng $y = -2x$ nên $a = -2$. Ta có hàm số $y = -2x + 3$

- b) Thay $x = 2$; $y = 7$ vào hàm số $y = ax + 3$, ta được:

$$7 = 2a + 3 \Leftrightarrow 2a = 7 - 3 = 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

Vậy $a = 2$.

Luyện tập

23. Cho hàm số $y = 2x + b$. Hãy xác định hệ số b trong mỗi trường hợp sau:

- a) Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 ;
b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $A(1;5)$.

24. Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1)x + 2k - 3$.

Tìm điều kiện đối với m và k để đồ thị của hai hàm số là:

- a) Hai đường thẳng cắt nhau;
b) Hai đường thẳng song song với nhau;
c) Hai đường thẳng trùng nhau.

25. a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:

$$y = \frac{2}{3}x + 2 \quad (1); \quad y = -\frac{3}{2}x + 2 \quad (2)$$

- b) Một đường thẳng song song với trục hoành Ox , cắt trục tung Oy tại điểm có tung độ bằng 1 , cắt hai đường thẳng (1) và (2) theo thứ tự tại hai điểm M và N . Tìm tọa độ của hai điểm M và N .

26. Cho hàm số bậc nhất $y = ax - 4$ (1). Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

- a) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2 .
b) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = -3x + 2$ tại điểm có tung độ bằng 5 .

Giải

23. a) Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ $= -3$, nghĩa là $x = 0$, $y = -3$.

Thay vào phương trình ta có: $-3 = 2.0 + b \Rightarrow b = -3$.

- b) Đồ thị hàm số $y = 2x + b$ đi qua điểm $A(1; 5)$ nghĩa là tọa độ điểm $A(1;5)$ nghiệm đúng phương trình:

$$y = 2x + b \text{ hay } 5 = 2.1 + b \Leftrightarrow b = 3.$$

Vậy $b = 3$.

24. a Hai đường thẳng $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1)x + 2k - 3$ cắt nhau khi:

$$2 \neq 2m + 1 \Leftrightarrow 2m \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

- b Hai đường thẳng $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1)x + 2k - 3$ song song với nhau khi ($a = a'$ và $b \neq b'$):

$$2 = 2m + 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ và } 3k \neq 2k - 3 \Leftrightarrow k \neq -3$$

- c Hai đường thẳng $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1)x + 2k - 3$ trùng nhau khi ($a = a'$ và $b = b'$):

$$2 = 2m + 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$3k = 2k - 3 \Leftrightarrow k = -3$$

25. a Vẽ đồ thị hàm số:

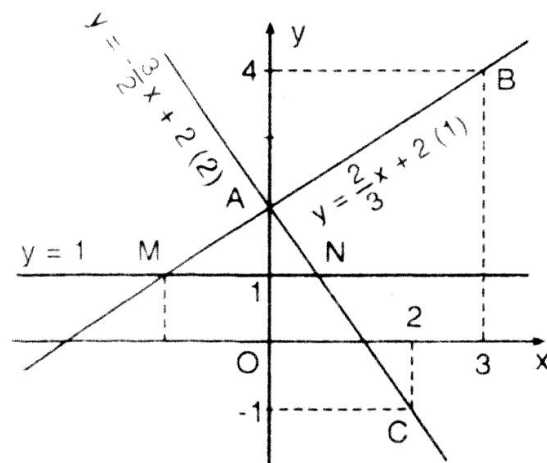
$$* y = \frac{2}{3}x + 2 \quad (1)$$

- Cho $x = 0$, tính được $y = 2$.
Ta xác định được điểm $A(0; 2)$.

- Cho $x = 3$, tính được $y = 4$.
Ta xác định được điểm $B(3; 4)$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x + 2$ là đường

thẳng đi qua hai điểm A và B.



$$* y = -\frac{3}{2}x + 2 \quad (2)$$

- Cho $x = 0$, tính được $y = 2$. Ta xác định được điểm $A(0; 2)$
- Cho $x = 2$, tính được $y = -1$. Ta xác định được điểm $C(2; -1)$

Đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm A và C.

- b Vẽ đường thẳng $y = 1$

- * Tính tọa độ điểm M.

Đường thẳng $y = 1$ cắt đường thẳng $y = \frac{2}{3}x + 2$ tại M, khi đó tọa độ điểm $M(x_0; 1)$ nghiệm đúng phương trình (1), nghĩa là:

$$1 = \frac{2}{3}x_0 + 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x_0 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{3}{2}. \text{ Vậy } M(-\frac{3}{2}; 1)$$

- * Tính tọa độ điểm N.

Tương tự, đường thẳng $y = 1$ cắt đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x + 2$ tại N khi đó tọa độ điểm $N(x_1; 1)$ nghiệm đúng phương trình (2), nghĩa là:

$$1 = -\frac{3}{2}x_1 + 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } N(\frac{2}{3}; 1)$$

26. a) Gọi $A(2; y_A)$ là giao điểm của đồ thị hàm số (1) với đường thẳng $y = 2x - 1$.
Theo đề bài ta có: $y_A = 2x_A - 1 \Leftrightarrow y_A = 2.2 - 1 = 3$
- Vì đường thẳng $y = ax - 4$ (1) cũng đi qua điểm $A(2;3)$ nên tọa độ điểm $A(2;3)$ nghiệm đúng phương trình (1)
 $3 = a.2 - 4 \Leftrightarrow 2a = 7 \Leftrightarrow a = 3,5$
Vậy $a = 3,5$
- b) Gọi $B(x_B; y_B = 5)$ là giao điểm của đồ thị hàm số (1) với đường thẳng $y = -3x + 2$. Theo đề bài ta có:
 $y_B = -3x_B + 2 \Leftrightarrow 5 = -3x_B + 2 \Leftrightarrow 3x_B = 2 - 5 = -3 \Leftrightarrow x_B = -1$
- Vì đường thẳng $y = ax - 4$ (1) đi qua điểm $B(-1;5)$ nên tọa độ điểm $B(-1;5)$ nghiệm đúng phương trình (1).
 $5 = ax_B - 4 \Leftrightarrow 5 = a.(-1) - 4 \Leftrightarrow a = -9$
Vậy $a = -9$.

§5. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

$y = ax + b$ ($a \neq 0$)

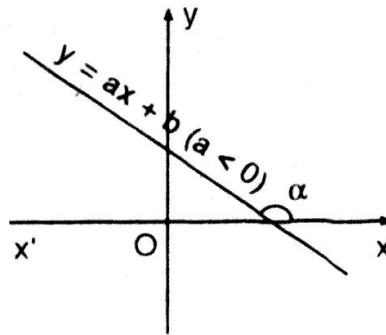
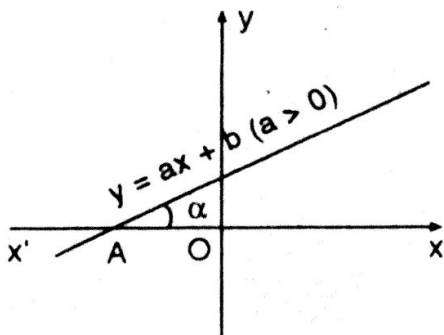
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

a) Góc hợp bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox :

Góc α hợp bởi trục Ox và nửa đường thẳng nằm trong nửa mặt phẳng bởi $x'x$ và chứa trục Oy .

- Khi $a > 0$ thì α là góc nhọn ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).
- Khi $a < 0$ thì α là góc tù ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).



b) Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$

Ứng với mỗi giá trị của hệ số a trong hàm số $y = ax + b$, có một góc α được xác định bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox .

Vì hệ số a của x có liên quan với góc α hợp bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox nên người ta gọi a là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$.

c) Lưu ý:

- Khi hệ số $a > 0$ thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc nhọn.

Hệ số a càng lớn thì góc α càng lớn nhưng vẫn nhỏ hơn 90° .

- Khi hệ số $a < 0$ thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc tù.

Hệ số a càng lớn thì góc α càng lớn nhưng vẫn nhỏ hơn 180° .

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho hàm số $y = x + 1$

a) Vẽ đồ thị hàm số.

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = x + 1$ và trục Ox .

Giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x + 1$

- Cho $x = 0$, tính được $y = 1$

Ta xác định được điểm $A(0;1)$

- Cho $x = -1$, tính được $y = 0$.

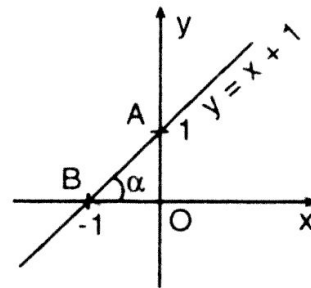
Ta xác định được điểm $B(-1;0)$

Đồ thị hàm số $y = x + 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm A và B .

b) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = x + 1$ và trục Ox .

Ta có $\alpha = \widehat{ABO}$.

Xét tam giác vuông OBA , ta có: $\tan \alpha = \frac{OA}{OB} = 1$. Suy ra $\alpha = 45^\circ$.



B. Bài tập cần bản

27. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$

a) Xác định hệ số góc a , biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(2;6)$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số.

28. Cho hàm số $y = -2x + 3$

a) Vẽ đồ thị của hàm số ;

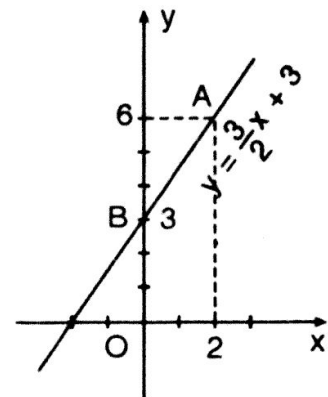
b) Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục Ox (làm tròn đến phút).

Giải

27. a) Vì đồ thị của hàm số $y = ax + 3$ đi qua điểm $A(2; 6)$ nên tọa độ điểm A nghiệm đúng phương trình:

$$y_A = ax_A + 3 \Leftrightarrow 6 = a \cdot 2 + 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Ta được hàm số $y = \frac{3}{2}x + 3$.

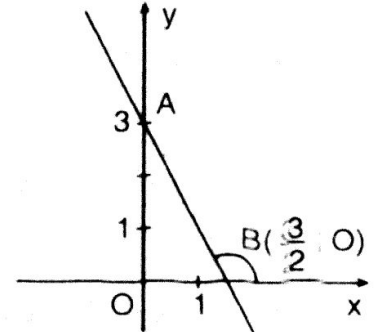


b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2}x + 3$

- Cho $x = 0$, tính được $y = 3$. Ta xác định được điểm $B(0; 3)$.
 - Cho $x = 2$, tính được $y = 6$. Ta xác định được điểm $A(2; 6)$.
- Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; 6)$, $B(0; 3)$.

28. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x + 3$

- Cho $x = 0$, tính được $y = 3$.
Ta xác định được điểm $A(0; 3)$
- Cho $y = 0$, tính được $x = \frac{3}{2}$
Ta xác định được điểm $B(\frac{3}{2}; 0)$



Đồ thị hàm số $y = -2x + 3$ là đường thẳng đi qua hai điểm A, B .

b) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục Ox , ta có

$$\alpha = \widehat{ABx}. \text{ Xét tam giác vuông } AOB, \text{ ta có: } \operatorname{tg} \widehat{ABO} = \frac{AO}{OB} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

Suy ra $\widehat{ABO} = 63^{\circ}26'$.

Vậy $\alpha = 180^{\circ} - 63^{\circ}26' = 116^{\circ}34'$.

Luyện tập

29. Xác định hàm số bậc nhất $y = ax + b$ trong mỗi trường hợp sau:

- $a = 2$ và đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1,5.
- $a = 3$ và đồ thị hàm của hàm số đi qua điểm $A(2; 2)$.
- Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ và đi qua điểm $B(1; \sqrt{3} + 5)$.

30. a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng tọa độ đồ thị của các hàm số sau:

$$y = \frac{1}{2}x + 2; \quad y = -x + 2$$

- Gọi giao điểm của hai đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 2$ và $y = -x + 2$ với trục hoành theo thứ tự là A, B và gọi giao điểm của hai đường thẳng đó là C . Tính các góc của tam giác ABC (làm tròn đến độ).
- Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).

31. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x + 1$; $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

b) Gọi α, β, γ lần lượt là các góc tạo bởi các đường thẳng trên và trục Ox .

Chứng minh rằng $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{3}$.

Tính số đo các góc α, β, γ .

Giải

- 29 a) - Thay $a = 2$ vào hàm số $y = ax + b$, ta được: $y = 2x + b$ (1)

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1,5 nghĩa là điểm có tọa độ (1,5;0). Thay tọa độ (1,5;0) vào (1), ta được:

$$0 = 2.1,5 + b \Leftrightarrow b = -3$$

Vậy hàm số tìm được là: $y = 2x - 3$

- b) Thay $a = 3$ vào hàm số $y = ax + b$, ta được: $y = 3x + b$ (2)

Đồ thị đi qua điểm (2;2) nên tọa độ (2;2) nghiệm đúng phương trình (2), nghĩa là: $2 = 3.2 + b \Leftrightarrow b = -4$

Vậy hàm số tìm được là: $y = 3x - 4$

- c) Vì đồ thị của hàm số $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ nên $a = \sqrt{3}$. Thay $a = \sqrt{3}$ vào, ta được hàm số $y = \sqrt{3}x + b$ (3)

Vì đường thẳng (3) đi qua điểm $(1; \sqrt{3} + 5)$ nên tọa độ $(1; \sqrt{3} + 5)$ nghiệm đúng phương trình $y = \sqrt{3}x + b$, nghĩa là:

$$\sqrt{3} + 5 = \sqrt{3}.1 + b \Leftrightarrow b = 5$$

Vậy hàm số tìm được là $y = \sqrt{3}x + 5$

- 30 a) Vẽ đồ thị các hàm số:

* $y = \frac{1}{2}x + 2$

- Cho $x = 0$, tính được $y = 2$. Ta xác định được điểm C(0;2)

- Cho $y = 0$, tính được $x = -4$. Ta xác định được

điểm A(-4;0). Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x + 2$ là

đường thẳng đi qua hai điểm A và C.

* $y = -x + 2$

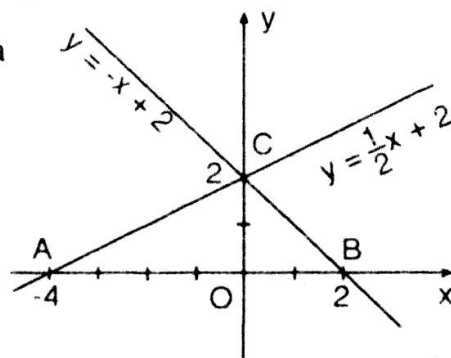
- Cho $x = 0$, tính được $y = 2$.

Ta xác định được điểm C(0;2).

- Cho $y = 0$, tính được $x = 2$.

Ta xác định được điểm B(2;0).

Đồ thị hàm số $y = -x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm B và C.



- b) Tính các góc của tam giác ABC:

- Ta có: $\tan \widehat{CAO} = \frac{OC}{OA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Suy ra: $\widehat{CAB} = 26^{\circ}33' \approx 27^{\circ}$

- Ta có: $\tan \widehat{CBO} = \frac{OC}{OB} = \frac{2}{2} = 1$. Suy ra: $\widehat{CBA} = 45^{\circ}$

- Ta có: $\widehat{ACB} = 180^{\circ} - (\widehat{CBA} + \widehat{CAB})$

hay $\widehat{ACB} = 180^{\circ} - (27^{\circ} + 45^{\circ}) = 108^{\circ}$

c) Tính chu vi và diện tích ΔABC :

- Ta có $AB = 6(\text{cm})$; $OC = 2(\text{cm})$

$$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Khi đó:

$$\text{Chu vi } \Delta ABC = AB + AC + BC = 6 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{Diện tích } \Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

31. * Vẽ đồ thị hàm số:

- Hàm số $y = x + 1$

Đồ thị hàm số $y = x + 1$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(-1;0)$.

- Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$.

Đồ thị hàm số là một đường thẳng đi qua hai điểm $C(0; \sqrt{3})$ và $D(-3;0)$

- Hàm số $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

Đồ thị hàm số là một đường thẳng đi qua hai điểm $E(0; -\sqrt{3})$ và $F(1;0)$

* Chứng minh:

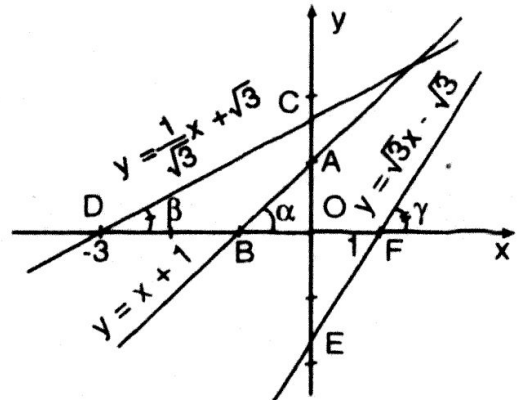
- Với hàm số $y = x + 1$,
ta có: $a = 1 = \text{tg}\alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

- Với hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$,

ta có: $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg}\beta \Rightarrow \beta = 30^\circ$

- Với hàm số $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$,

ta có: $a = \sqrt{3} = \text{tg}\gamma \Rightarrow \gamma = 60^\circ$.

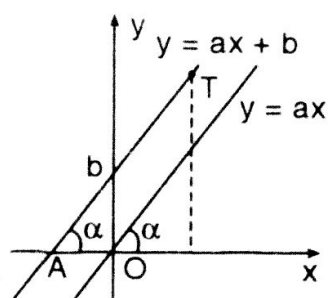


ÔN TẬP CHƯƠNG II

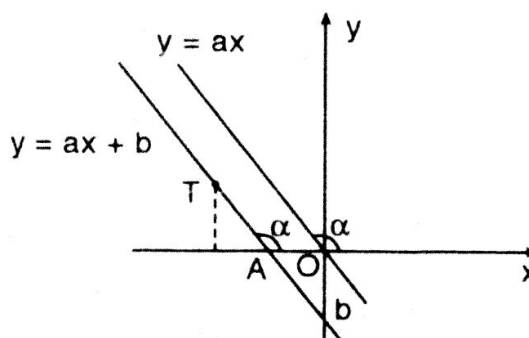
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.
2. Hàm số thường được cho bằng bảng hoặc bằng công thức.
3. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

4. Hàm số có dạng $y = ax + b$ với $a \neq 0$ được gọi là hàm số bậc nhất đối với biến số x .
5. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị của x và có tính chất: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.
6. Góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox là góc tạo bởi tia Ax và tia AT , trong đó A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox , T là điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương (hình dưới).



Trường hợp $a > 0$



Trường hợp $a < 0$

7. a được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)
8. Với hai đường thẳng $y = ax + b$ (d) và $y = a'x + b'$ (d'), trong đó a và a' khác 0, ta có:
 - $a \neq a' \Leftrightarrow (d)$ và (d') cắt nhau;
 - $a = a'$ và $b \neq b' \Leftrightarrow (d)$ và (d') song song với nhau;
 - $a = a'$ và $b = b' \Leftrightarrow (d)$ và (d') trùng nhau.

II. Bài tập căn bản

32. a) Với những giá trị nào của m thì hàm số bậc nhất:

$$y = (m - 1)x + 3$$
 đồng biến?
 b) Với những giá trị nào của k thì hàm số bậc nhất $y = (5 - k)x + 1$ nghịch biến?
33. Với những giá trị nào của m thì đồ thị các hàm số $y = 2x + (3 + m)$ và $y = 3x + (5 - m)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung?
34. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng:

$$y = (a - 1)x + 2 \quad (a \neq 1) \text{ và } y = (3 - a)x + 1 \quad (a \neq 3)$$
 song song với nhau.
35. Xác định k và m để hai đường thẳng sau đây trùng nhau:

$$y = kx + (m - 2) \quad (k \neq 0); \quad y = (5 - k)x + (4 - m) \quad (k \neq 5).$$
36. Cho hai hàm số bậc nhất $y = (k + 1)x + 3$ và $y = (3 - 2k)x + 1$.
 - a) Với giá trị nào của k thì đồ thị của hai hàm số là hai đường thẳng song song với nhau?
 - b) Với giá trị nào của k thì đồ thị của hai hàm số là hai đường thẳng cắt nhau?
 - c) Hai đường thẳng nói trên có thể trùng nhau được không? Vì sao?
37. a) Vẽ đồ thị hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:

$$y = 0,5x + 2 \quad (1); \quad y = 5 - 2x \quad (2)$$

- b) Gọi giao điểm của các đường thẳng $y = 0,5x + 2$ và $y = 5 - 2x$ với trục hoành theo thứ tự là A, B và gọi giao điểm của hai đường thẳng đó là C. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C.
- c) Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC và BC (đơn vị đo trên trục tọa độ là xentimet) (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).
- d) Tính các góc tạo bởi các đường thẳng có phương trình (1) và (2) với trục Ox (làm tròn đến phút).
- 38.** a) Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:
 $y = 2x$ (1); $y = 0,5x$ (2); $y = -x + 6$ (3)
- b) Gọi các giao điểm của đường thẳng có phương trình (3) với hai đường thẳng có phương trình (1) và (2) theo thứ tự là A và B. Tìm tọa độ của hai điểm A và B.
- c) Tính các góc của tam giác OAB.
 Hướng dẫn câu c): – Tính OA, OB rồi chứng tỏ tam giác OAB cân.
 – Tính $\widehat{AOB} = \widehat{AOx} - \widehat{BOx}$.

Giải

- 32.** a) Hàm số $y = (m - 1)x + 3$ là hàm số bậc nhất đối với x khi $m - 1 \neq 0$ hay $m \neq 1$. Do đó hàm số đồng biến khi hệ số của x dương, nghĩa là:
 $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$
 Vậy khi $m > 1$ thì hàm số $y = (m - 1)x + 3$ đồng biến.
- b) Hàm số $y = (5 - k)x + 1$ là hàm số bậc nhất đối với x khi $5 - k \neq 0$ hay $k \neq 5$. Do đó, hàm số nghịch biến khi hệ số của x âm, nghĩa là:
 $5 - k < 0 \Leftrightarrow k > 5$. Vậy khi $k > 5$ thì hàm số $y = (5 - k)x + 1$ nghịch biến.
- 33.** Các hàm số $y = 2x + (3 + m)$ và $y = 3x + (5 - m)$ đều là hàm số bậc nhất đối với x vì hệ số của x đều khác 0. Đồ thị của chúng là các đường thẳng cắt trục tung tại một điểm có tung độ là b. Do đó, hai đường thẳng cắt nhau tại cùng một điểm trên trục tung, khi và chỉ khi tung độ gốc của chúng bằng nhau, nghĩa là: $3 + m = 5 - m \Leftrightarrow m = 1$.
 Vậy khi $m = 1$ thì hai đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm chung trên trục tung.
- 34.** Hai đường thẳng $y = (a - 1)x + 2$ và $y = (3 - a)x + 1$ có tung độ gốc khác nhau ($2 \neq 1$), do đó chúng song song với nhau khi hệ số của x bằng nhau, nghĩa là: $a - 1 = 3 - a \Leftrightarrow a = 2$.
 Vậy khi $a = 2$ thì hai đường thẳng song song với nhau.
- 35.** Hai đường thẳng $y = kx + (m - 2)$ và $y = (5 - k)x + (4 - m)$ trùng nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} k = 5 - k & (1) \\ m - 2 = 4 - m & (2) \end{cases}$$

 Từ (1), ta có: $2k = 5 \Leftrightarrow k = 2,5$
 Từ (2), ta có: $2m = 6 \Leftrightarrow m = 3$
 Vậy điều kiện để hai đường thẳng trùng nhau là: $k = 2,5$ và $m = 3$.

36. a) Hai đường thẳng $y = (k + 1)x + 3$ và $y = (3 - 2k)x + 1$ song song với nhau khi:

$$k + 1 = 3 - 2k \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

- b) Hai đường thẳng $y = (k + 1)x + 3$ và $y = (3 - 2k)x + 1$ cắt nhau khi:

$$k + 1 \neq 3 - 2k \Leftrightarrow k \neq \frac{2}{3}$$

- c) Hai đường thẳng $y = (k + 1)x + 3$ và $y = (3 - 2k)x + 1$ không thể trùng nhau được vì chúng có tung độ góc khác nhau ($b = 3 \neq b' = 1$)

37. a) Vẽ đồ thị hàm số:

* $y = 0,5x + 2$ (1)

- Cho $x = 0$, tính được $y = 2$.

Ta xác định được điểm $D(0;2)$ thuộc đồ thị.

- Cho $y = 0$, tính được $x = -4$.

Ta xác định được điểm $A(-4;0)$ thuộc đồ thị.

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm $D(0;2)$ và $A(-4;0)$

* $y = 5 - 2x$ (2)

- Cho $x = 0$, tính được $y = 5$. Ta xác định được điểm $E(0;5)$ thuộc đồ thị.

- Cho $y = 0$, tính được $x = 2,5$. Ta xác định được điểm $B(2,5; 0)$ thuộc đồ thị.

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm E và B .

- b) Ở câu a) ta đã tính được tọa độ của điểm A và B là $A(-4;0)$ và $B(2,5;0)$

- * Ta tìm tọa độ điểm C như sau: Vì đồ thị hai hàm số (1) và (2) cắt nhau tại C nên phương trình hoành độ giao điểm của chúng là:

$$0,5x + 2 = 5 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} = 1,2$$

Thay $x = 1,2$ vào phương trình (1), ta được:

$$y = 0,5x + 2 = 0,5 \cdot 1,2 + 2 = 2,6$$

Vậy tọa độ điểm C là $(1,2;2,6)$.

- c) Tính độ dài các đoạn thẳng AB , BC và AC .

$$AB = AO + OB = 4 + 2,5 = 6,5 \text{ (cm)}$$

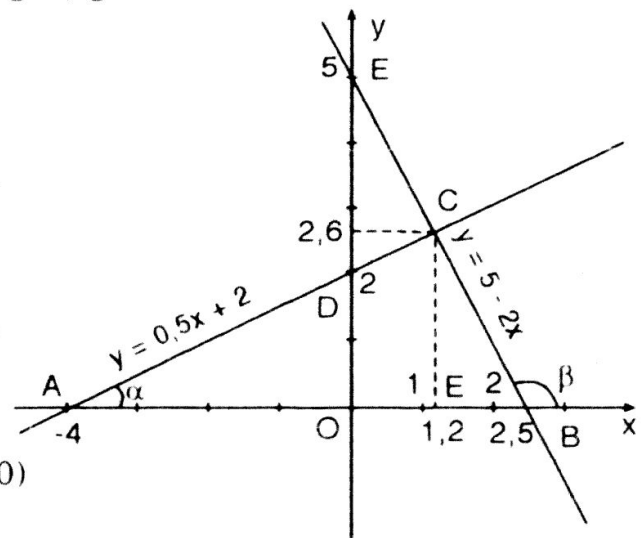
Gọi E là hình chiếu của C trên Ox , ta có: $OE = 1,2$ (cm)

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông EAC :

$$AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{5,2^2 + 2,6^2} = \sqrt{33,8} \approx 5,81 \text{ (cm)}$$

$$BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \sqrt{1,3^2 + 2,6^2} = \sqrt{8,45} \approx 2,91 \text{ (cm)}$$

- d) Gọi α là góc hợp bởi đường thẳng $y = 0,5x + 2$ với tia Ox , ta có:



$$\operatorname{tg} \alpha = 0,5 \Leftrightarrow \alpha = 26^{\circ}34'$$

- Gọi β là góc hợp bởi đường thẳng $y = 5 - 2x$ với tia Ox . Ta có β là góc tù. Gọi β' là góc kề bù với góc β , ta có:

$$\operatorname{tg} \beta' = -(-2) = 2 \Leftrightarrow \beta' = 63^{\circ}26'$$

$$\text{Vậy } \beta = 180^{\circ} - \beta' = 180^{\circ} - 63^{\circ}26' = 116^{\circ}34'$$

38. a) Vẽ đồ thị hàm số:

* $y = 2x$ (1)

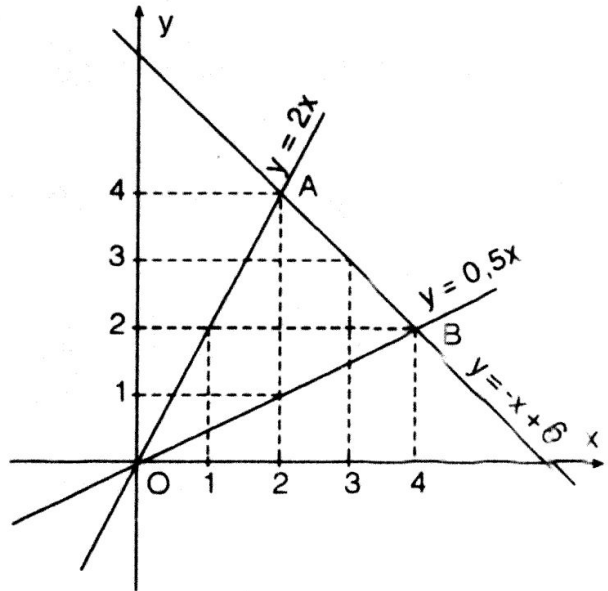
Đồ thị hàm số $y = 2x$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và đi qua điểm $(1;2)$

* $y = 0,5x$ (2)

Đồ thị hàm số $y = 0,5x$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và đi qua điểm $(2;1)$

* Hàm số $y = -x + 6$ (3)

Đồ thị hàm số $y = -x + 6$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(3;3)$ và $(2;4)$



b) Gọi A là giao điểm của đường thẳng (3) với đường thẳng (1), ta có:

$$-x + 6 = 2x \Rightarrow x = 2$$

Thế $x = 2$ vào $y = 2x$, ta tính được $y = 4$

Vậy tọa độ điểm A là $(2;4)$

• Gọi B là giao điểm của đường thẳng (3) với đường thẳng (2), ta có:

$$-x + 6 = 0,5x \Rightarrow x = 4$$

Thế $x = 4$ vào $y = 0,5x$, ta được $y = 2$.

Vậy tọa độ điểm B là $(4;2)$

c) Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông thích hợp, ta có:

$$OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20};$$

$$OB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

Ta có $OA = OB$. Vậy tam giác AOB cân tại O

Suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$

- Đặt $\widehat{AOx} = \alpha$. Ta có $\operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63^{\circ}26'$

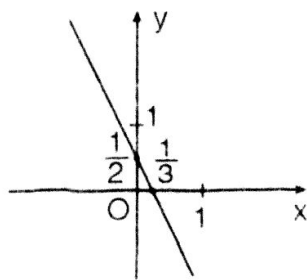
- Đặt $\widehat{BOx} = \beta$. Ta có $\operatorname{tg} \beta = 0,5 \Rightarrow \beta = 26^{\circ}34'$

- Ta có: $\widehat{AOB} = \alpha - \beta = 63^{\circ}26' - 26^{\circ}34' = 36^{\circ}52'$

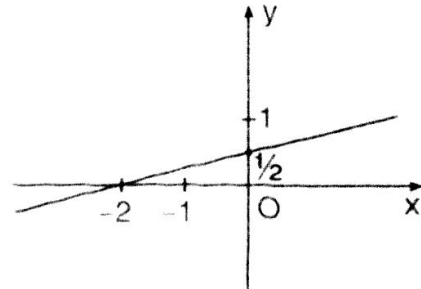
$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180^{\circ} - 36^{\circ}52'}{2} = 71^{\circ}34'$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

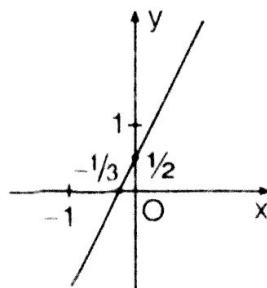
1. Chọn câu trả lời đúng. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x + 4$. Tính $f(-2)$.
- (A) $f(-2) = 7$ (B) $f(-2) = \frac{11}{2}$ (C) $f(-2) = \frac{5}{2}$ (D) $f(-2) = 1$.
2. Chọn câu trả lời đúng. Cho hai hàm số $y = \sqrt{3}x + 1$ và $y = 3x - 4$.
- (A) Cả hai hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- (B) Cả hai hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- (C) Hàm số $y = \sqrt{3}x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $y = 3x - 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- (D) Hàm số $y = \sqrt{3}x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $y = 3x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
3. Chọn câu trả lời đúng. Cho hàm số $y = (3 - m)x + 2$. Xác định m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- (A) $m > 3$ (B) $m > 2$ (C) $m < 2$ (D) $m < 3$.
4. Chọn câu trả lời đúng. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x - 2$. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm thuộc đồ thị hàm số là :
- (A) $(15 ; -7)$ (B) $(66 ; 20)$ (C) $(\sqrt{2} - 1 ; \sqrt{3})$ (D) $(3 ; 1)$.
5. Chọn câu trả lời đúng. Đồ thị của hàm số $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ là :



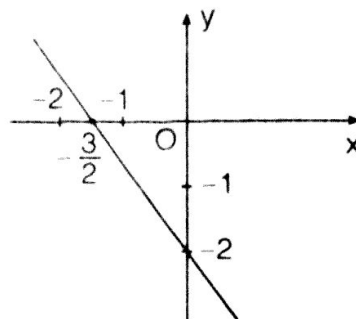
Hình a



Hình b



Hình c



Hình d

- (A) Hình a (B) Hình b (C) Hình c (D) Hình d.

6. Chọn câu trả lời đúng. Cho các đường thẳng :

$$(I) : y = 2x + 3 ; \quad (II) : y = -2x - 2.$$

$$(III) : y = \frac{1}{2}x + 3 ; \quad (IV) : y = 2x - 2.$$

Hãy chỉ ra cặp đường thẳng song song với nhau trong các đường thẳng trên.

(A) (I) và (II) (B) (III) và (IV) (C) (II) và (III) (D) (I) và (IV).

7. Chọn câu trả lời đúng. Cho hai hàm số bậc nhất : $y = 2(m - 1)x + 1$ và $y = (m + 1)x - 1$. Tìm giá trị m để đồ thị của hai hàm số là hai đường thẳng song song với nhau :

(A) $m = 1$ (B) $m = -1$ (C) $m = 2$ (D) $m = 3$.

8. Chọn câu trả lời đúng. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(-1 ; -2)$. Xác định đường thẳng đi qua gốc tọa độ và đi qua A.

(A) $y = -2x$ (B) $y = 2x$ (C) $y = x$ (D) $y = -x$.

9. Chọn câu trả lời đúng. Tìm hệ số góc a , biết rằng đồ thị hàm số $y = ax - 1$ đi qua điểm $M(1 ; 2)$.

(A) $a = 3$ (B) $a = 1$ (C) $a = \frac{3}{2}$ (D) $a = 2$.

10. Chọn câu trả lời đúng. Cho đường thẳng $y = (2m - 1)x + 3$. Xác định m để góc tạo bởi đường thẳng này và trục Ox là góc nhọn.

(A) $m = \frac{1}{2}$ (B) $m > \frac{1}{2}$ (C) $m < \frac{1}{2}$ (D) $m > 2$.

11. Chọn câu trả lời đúng. Cho đường thẳng $y = (m + 1)x + 2$. Xác định m để góc tạo bởi đường thẳng này và trục Ox là góc tù.

(A) $m > -1$ (B) $m < -1$ (C) $m = 1$ (D) $m > 2$.

12. Chọn câu trả lời đúng. Gọi α và β lần lượt là góc tạo bởi các đường thẳng $y = x + 1$ và $y = 2x - 3$ với trục Ox, ta có :

(A) $\alpha = \beta$ (B) $\alpha < \beta < 90^\circ$
(C) $\alpha > \beta > 90^\circ$ (D) $\beta < \alpha < 90^\circ$.

13. Chọn câu trả lời đúng. Gọi α và β lần lượt là góc tạo bởi các đường thẳng $y = -3x + 1$ và $y = -2x - 1$ với trục Ox, ta có :

(A) $\alpha < \beta < 90^\circ$ (B) $90^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$
(C) $90^\circ < \beta < \alpha < 180^\circ$ (D) $\beta < \alpha < 90^\circ$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. $f(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2) + 4 = -3 + 4 = 1$. Chọn câu D.

2. Với $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, giả sử $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$

$$* y = \sqrt{3}x + 1$$

$$y_1 - y_2 = \sqrt{3}x_1 + 1 - (\sqrt{3}x_2 + 1) = \sqrt{3}(x_1 - x_2) < 0$$

$\Rightarrow y_1 - y_2 < 0 \Rightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• $y = 3x - 4$

$$y_1 - y_2 = 3x_1 - 4 - (3x_2 - 4) = 3(x_1 - x_2) < 0$$

$\Rightarrow y_1 - y_2 < 0 \Rightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. *Chọn câu B.*

3. $y = (3 - m)x + 2$ có $a = 3 - m$; $b = 2$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3$. *Chọn câu D.*

4. *Chọn câu B.*

5. *Chọn câu A.*

6. Hai đường thẳng song song với nhau khi $a = a'$. *Chọn câu D.*

7. Hàm số $y = 2(m - 1)x + 1$ có các hệ số $a = 2(m - 1)$; $b = 1$

Hàm số $y = (m + 1)x - 1$ có các hệ số $a' = m + 1$; $b' = -1$.

Đồ thị của hai hàm số là hai đường thẳng song song

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m - 1) = m + 1 \\ 1 \neq -1 \text{ (hiển nhiên)} \end{cases} \Leftrightarrow 2m - 2 = m + 1 \Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn câu D.

8. Đường thẳng đi qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Vì đường thẳng đi qua $A(-1 ; -2)$ nên toạ độ của điểm A phải thoả mãn $y = ax$.

$$\Leftrightarrow -2 = a(-1) \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy đường thẳng cần tìm : $y = 2x$. *Chọn câu B.*

9. Hàm số $y = ax - 1$ có đồ thị đi qua $M(1 ; 2)$ nên :

$$y_M = ax_M - 1 \Leftrightarrow 2 = a.1 - 1 \Leftrightarrow a = 3. \text{ *Chọn câu A.*}$$

10. Góc α tạo bởi đường thẳng $y = (2m - 1)x + 3$ với trục Ox là góc nhọn khi $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow 2m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$. *Chọn câu B.*

11. Góc tạo bởi đường thẳng $y = (m + 1)x + 2$ với trục Ox là góc tù khi $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$. *Chọn câu B.*

12. Đường thẳng $y = x + 1$ có hệ số $a = 1 \Rightarrow 0 < \alpha < 90^\circ$

Đường thẳng $y = 2x - 3$ có hệ số $a' = 2 \Rightarrow 0 < \beta < 90^\circ$

Mà $a = 1$; $a' = 2 \Rightarrow a < a' \Rightarrow \alpha < \beta$. Vậy $\alpha < \beta < 90^\circ$. *Chọn câu B.*

13. Đường thẳng $y = -3x + 1$ có hệ số $a = -3 \Rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Đường thẳng $y = -2x - 1$ có hệ số $a' = -2 \Rightarrow 90^\circ < \beta < 180^\circ$.

$a = -3$; $a' = -2 \Rightarrow a' > a \Rightarrow \beta > \alpha$. Vậy $90^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$. *Chọn câu B.*

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

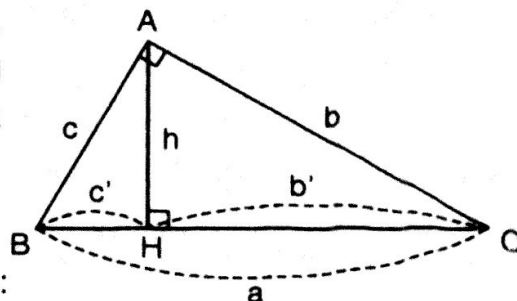
§1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ thức liên hệ giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền:

- * Định lí 1: Trong một tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

Công thức: $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$



2. Một số hệ thức liên quan tới đường cao:

- * Định lí 2: Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Công thức: $h^2 = b' \cdot c'$

- * Định lí 3: Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.

Công thức: $b \cdot c = a \cdot h$

- * Định lí 4: Trong một tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.

Công thức: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho tam giác vuông, trong đó các cạnh góc vuông dài 6cm và 8cm. Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông và độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông lên cạnh huyền.

Giải

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64$$

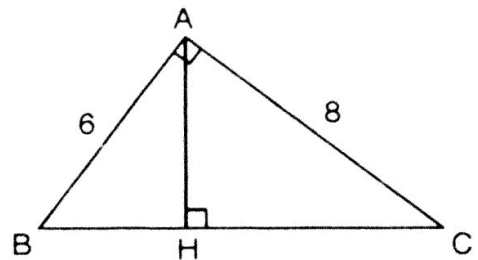
$$BC^2 = 100$$

Suy ra $BC = 10$ (cm)

* Tính $AH = ?$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} \text{ hay } AH = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8 \text{ (cm)}$$



* Tính $BH = ?$

Trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ (cm)}$$

* Tính $CH = ?$

Trong tam giác vuông ABC, ta có:

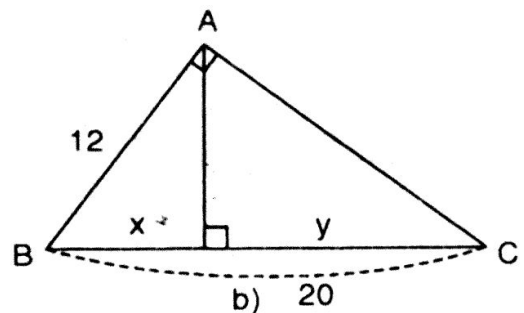
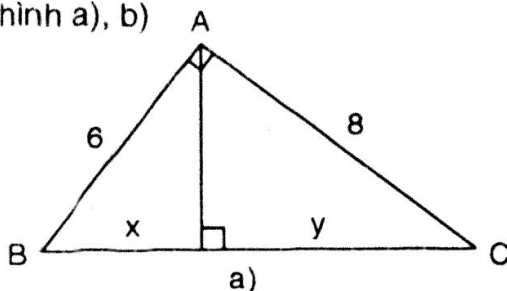
$$AC^2 = BC \cdot CH \Rightarrow CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{8^2}{10} = 6,4 \text{ (cm)}$$

$$\text{hay } CH = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ (cm)}$$

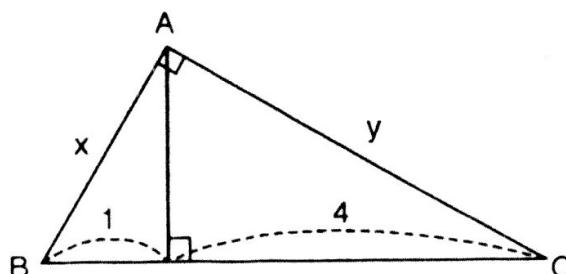
B. Bài tập cần bản

Hãy tính x và y trong mỗi hình sau:

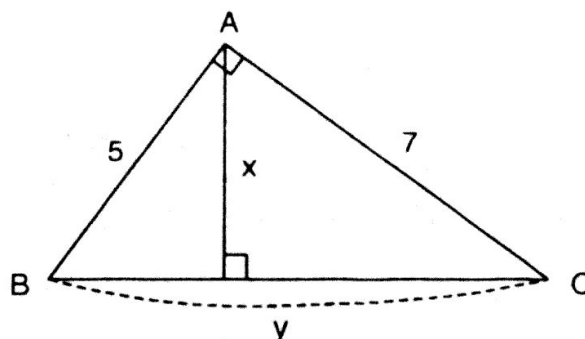
1. Các hình a), b)



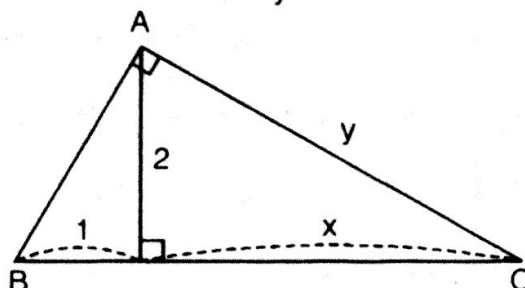
2. Hình sau.



3. Hình bên.



4. Hình bên.



Giải

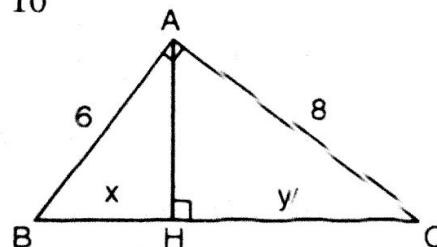
1. a) Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

* Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABH, ta có:

$$AB^2 = BC \cdot BH \text{ hay } 6^2 = 10 \cdot x$$

$$\Rightarrow x = \frac{6^2}{10} = 3,6$$



* Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC^2 = BC \cdot CH \text{ hay } 8^2 = 10 \cdot y \Rightarrow y = \frac{8^2}{10} = 6,4.$$

Vậy $x = 3,6$ và $y = 6,4$.

b) Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144$$

$$AC^2 = 256$$

$$\Rightarrow AC = 16$$

* Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

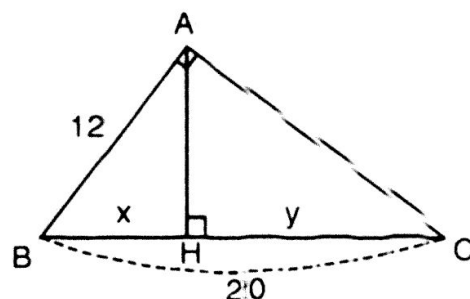
$$AB^2 = BC \cdot BH$$

$$\text{hay } 12^2 = 20 \cdot x \Rightarrow x = \frac{144}{20} = 7,2$$

$$\text{và } AC^2 = BC \cdot CH$$

$$\text{hay } y = \frac{256}{20} = 12,8$$

Vậy $x = 7,2$ và $y = 12,8$.



2. Ta có: $BC = BH + CH = 1 + 4 = 5$

* Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

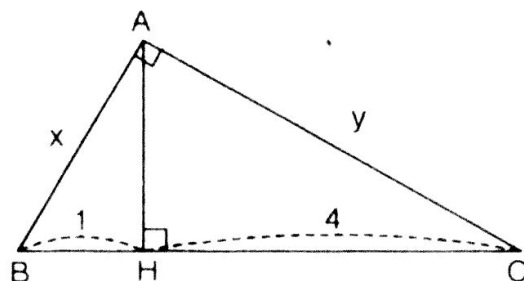
$$AB^2 = BC.BH = 5.1 = 5$$

$$\text{hay } x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$\text{và } AC^2 = BC.CH = 5.4 = 20$$

$$\text{hay } y^2 = 20 \Rightarrow y = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } x = \sqrt{5} \text{ và } y = 2\sqrt{5}.$$



3. * Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\text{hay } y^2 = 5^2 + 7^2$$

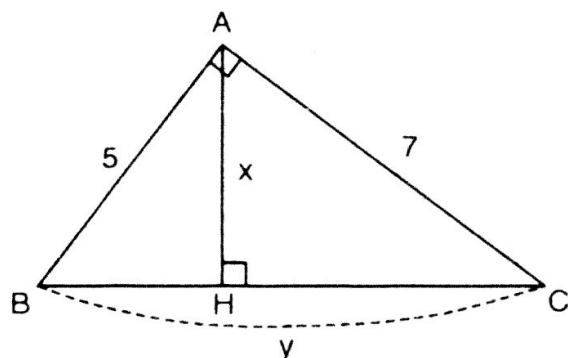
$$y^2 = 25 + 49 = 74 \Rightarrow y = \sqrt{74}$$

* Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC.AH = AB.AC$$

$$\text{hay } \sqrt{74}.x = 5.7 \Rightarrow x = \frac{35}{\sqrt{74}} = \frac{35.\sqrt{74}}{74}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{35\sqrt{74}}{74} \text{ và } y = \sqrt{74}$$



4. * Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

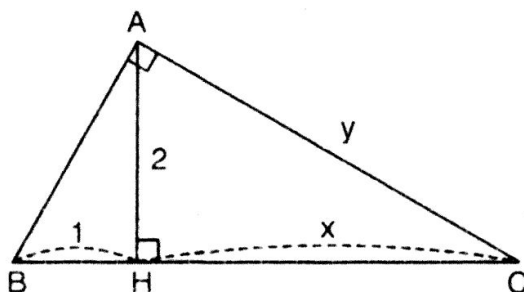
$$AH^2 = HB.HC \text{ hay } 2^2 = 1.x \Rightarrow x = 4$$

* Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông HAC, ta có:

$$AC^2 = HA^2 + HC^2$$

$$\text{hay } y^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow y = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

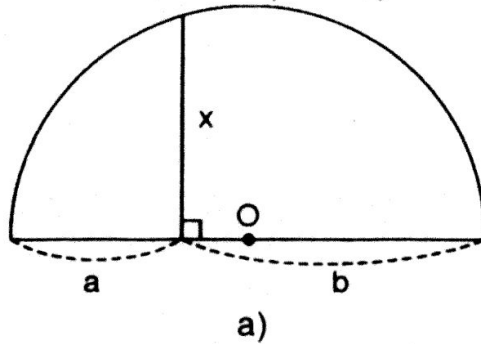
$$\text{Vậy } x = 4 \text{ và } y = 2\sqrt{5}.$$



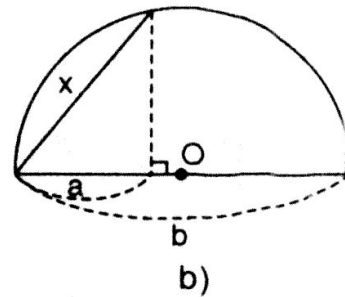
Luyện tập

- Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 và 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.
- Đường cao của một tam giác vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 1 và 2. Hãy tính các cạnh góc vuông của tam giác này.
- Người ta đưa ra hai cách vẽ đoạn trung bình nhân x của hai đoạn thẳng a, b (tức là $x^2 = a.b$) như trong hai hình sau:

CÁCH 1 (hình a)



CÁCH 2 (hình b)

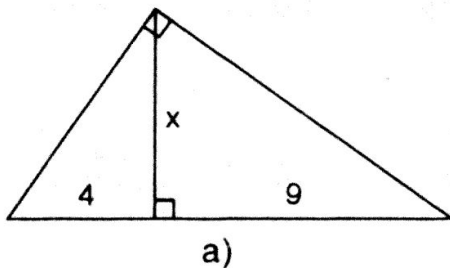


Dựa vào các hệ thức (1) và (2) hãy chứng minh các cách vẽ trên là đúng.

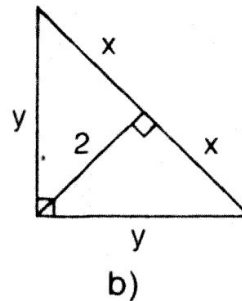
Gợi ý: Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác ấy là tam giác vuông.

8. Tìm x và y trong mỗi hình sau:

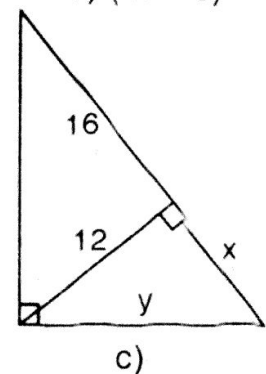
a) (hình a)



b) (hình b)



c) (hình c)



9. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D vuông góc với DI. Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh rằng

a) Tam giác DIL là một tam giác cân;

b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

Giải

5. Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2$$

$$BC^2 = 25$$

Suy ra $BC = 5$

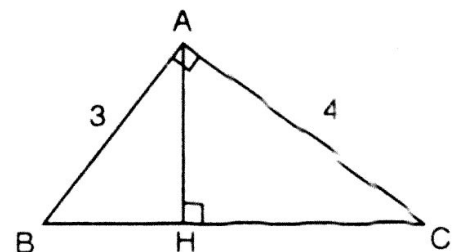
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4$$

$$* AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5} = 1,8$$

$$* AC^2 = BC \cdot HC \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{5} = 3,2$$

Vậy $AH = 2,4$; $BH = 1,8$; $HC = 3,2$



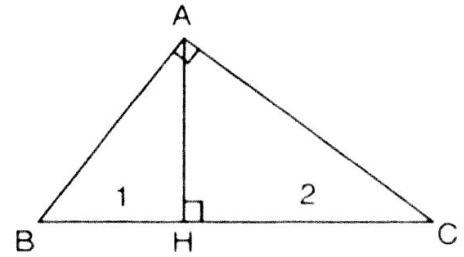
6. Ta có $BC = BH + HC = 1 + 2 = 3$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC , ta có:

$$* AB^2 = BC.BH = 3.1 = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$$

$$* AC^2 = BC.CH = 3.2 = 6 \Rightarrow AC = \sqrt{6}$$

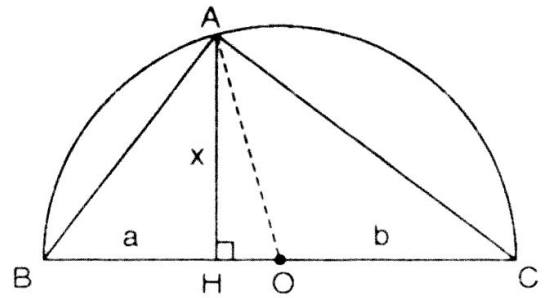
$$\text{Vậy } AB = \sqrt{3}; AC = \sqrt{6}.$$



7. * Cách 1:

Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác ấy vuông.

Gọi O là trung điểm BC . Lấy O làm tâm dựng một cung tròn có bán kính bằng $\frac{BC}{2} = \frac{a+b}{2}$, cắt đường thẳng vuông góc với BC ở H tại điểm A . Nối A với B, C . Ta có $\triangle ABC$.

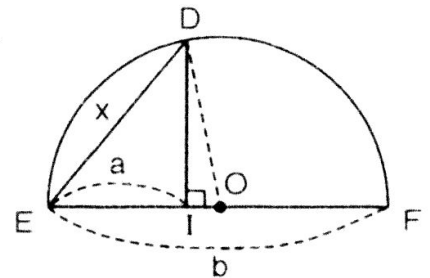


Ta có cách dựng tam giác ABC có trung tuyến AO bằng một nửa cạnh BC , do đó $\triangle ABC$ vuông tại A .

$$\text{Vậy } AH^2 = BH.CH \text{ hay } x^2 = a.b$$

* Cách 2: Tương tự, theo cách dựng $\triangle DEF$ có đường trung tuyến DO bằng một nửa cạnh EF , do đó $\triangle DEF$ vuông tại D .

$$\text{Vậy } DE^2 = EI.EF \text{ hay } x^2 = a.b$$



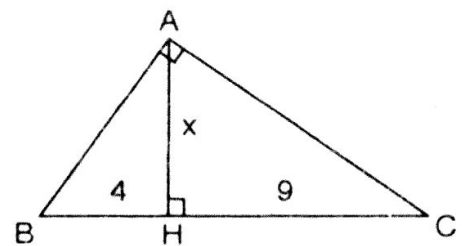
8 a) Hình a:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC , ta có:

$$AH^2 = BH.CH \text{ hay } x^2 = 4.9 = 36$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{Vậy } x = 6.$$



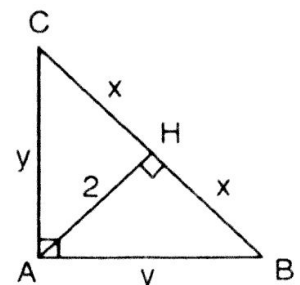
b) Hình b: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC , ta có:

$$AH^2 = HB.HC$$

$$\text{hay } 2^2 = x.x = x^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{và } y^2 = AH^2 + HB^2 = 2^2 + x^2 = 8$$

$$\Rightarrow y = 2\sqrt{2}$$



c) Hình c: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AH^2 = HB.HC$$

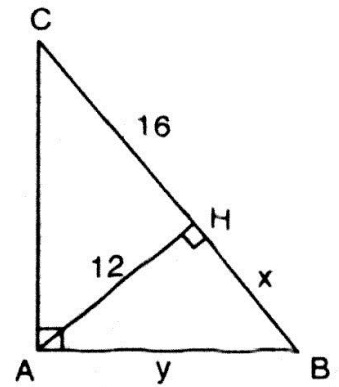
$$\text{hay } 12^2 = x.16 \Rightarrow x = \frac{12^2}{16} = \frac{144}{16} = 9$$

Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông AHB, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$\text{hay } y^2 = 12^2 + 9^2 = 225 \Rightarrow y = 15$$

Vậy $x = 9$; $y = 15$.



9. a) Xét hai tam giác vuông $\triangle AID$ và $\triangle CLD$, ta có:

$$DC = AD \text{ (gt)}$$

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \text{ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).}$$

Vậy $\triangle AID = \triangle CLD$ (g.c.g)

Suy ra: $DI = DL$

Xét $\triangle DIL$, ta có: $DI = DL$

Vậy $\triangle DIL$ cân tại D.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông DLK, ta có:

$$\frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2}$$

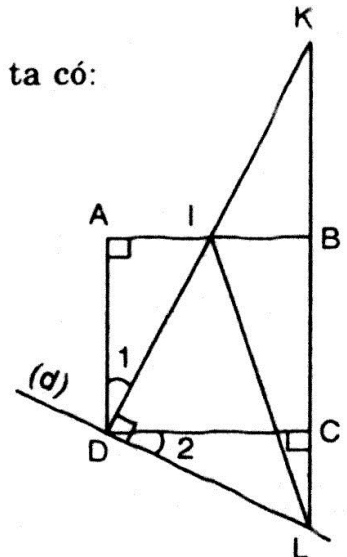
Mà $DL = DI$ nên:

$$\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2} = \text{không đổi (đpcm)}$$

(Vì hình vuông ABCD, các cạnh có độ dài

không đổi, do đó $\frac{1}{DC^2}$ cũng có độ dài không

đổi khi I thay đổi trên AB).



§2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

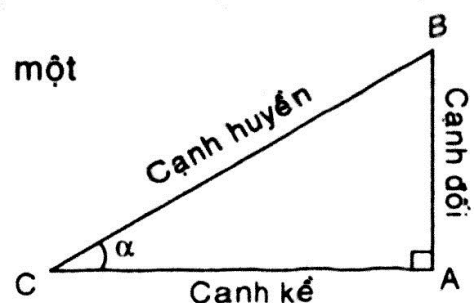
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

Cho góc nhọn α với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Dựng một tam giác vuông có góc nhọn α . Ta có:

$$\sin \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{kề}}; \quad \cot \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}$$



• Chú ý:

– Với mọi góc α nhọn thì $\cos \alpha < 1$ và $\sin \alpha < 1$

– Nếu hai góc nhọn α và β có:

$$\sin \alpha = \sin \beta \quad \text{hoặc} \quad \cos \alpha = \cos \beta$$

$$\text{hoặc} \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \quad \text{hoặc} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$$

thì $\alpha = \beta$

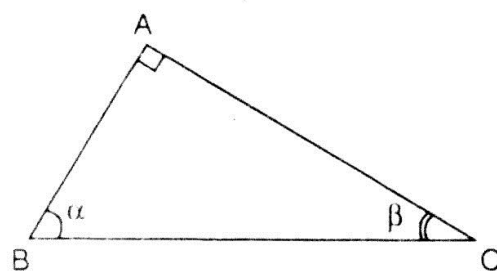
– Ở cấp Trung học phổ thông: $\operatorname{tg} \alpha$ viết là $\tan \alpha$

$\operatorname{cotg} \alpha$ viết là $\cot \alpha$

2. Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Định lí: Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

- Nếu $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì: $\sin \alpha = \cos \beta$;
 $\cos \alpha = \sin \beta$;
 $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$;
 $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$



3. Bảng tỷ số lượng giác của các góc thông dụng:

TSLG \ α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	II
$\operatorname{cotg} \alpha$	II	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, có $\hat{B} = \alpha$. Hãy tính tỷ số lượng giác của góc B trong các trường hợp sau:

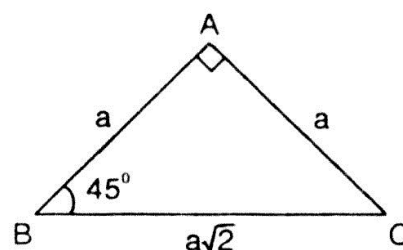
a) $\alpha = 45^\circ$;

b) $\alpha = 60^\circ$.

Giải

a) Với $\alpha = \hat{B} = 45^\circ$

$$\sin 45^\circ = \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos 45^\circ = \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\operatorname{cotg} 45^\circ = \operatorname{cotg} B = \frac{AB}{AC} = 1$$

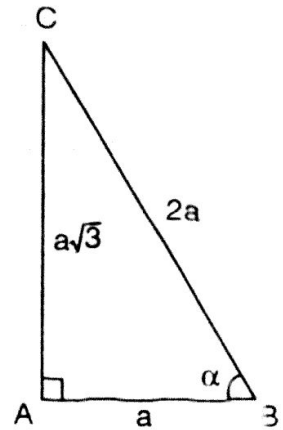
b) Với $\alpha = \hat{B} = 60^\circ$

$$\sin 60^\circ = \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} 60^\circ = \operatorname{cotg} B = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



B. Bài tập căn bản

10. Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn 34° rồi viết các tỉ số lượng giác của góc 34° .
11. Cho tam giác ABC vuông tại C, trong đó $AC = 0,9\text{m}$, $BC = 1,2\text{m}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.
12. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :

$$\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \operatorname{cotg} 82^\circ, \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Giải

10. Giả sử ta vẽ được tam giác ABC vuông tại A, có $\hat{C} = 34^\circ$.

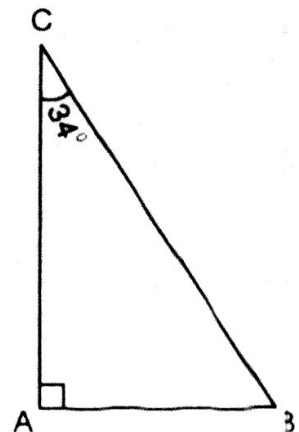
Khi đó, các tỉ số lượng giác của góc 34° là:

$$\sin 34^\circ = \sin C = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos 34^\circ = \cos C = \frac{AC}{BC}$$

$$\operatorname{tg} 34^\circ = \operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC}$$

$$\operatorname{cotg} 34^\circ = \operatorname{cotg} C = \frac{AC}{AB}$$



11. Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 = 0,9^2 + 1,2^2 = 2,25$$

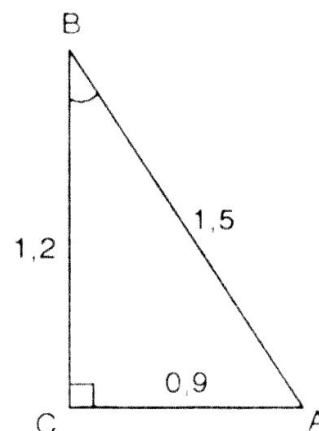
$$\Rightarrow AB = \sqrt{2,25} = 1,5 \text{ (m)}$$

$$\text{Vậy } \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{0,9}{1,5} = \frac{3}{5};$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{0,9}{1,2} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cotg} B = \frac{BC}{AC} = \frac{1,2}{0,9} = \frac{4}{3}$$



* Vì $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc phụ nhau (do ΔABC vuông tại C)

$$\sin A = \cos B = \frac{4}{5}; \quad \sin B = \cos A = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{cotg} B = \frac{4}{3}; \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} A = \frac{3}{4}$$

- 12.** – Vì góc 60° và góc 30° là hai góc phụ nhau, nên: $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$
 – Tương tự, 75° và 15° là hai góc phụ nhau, nên: $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$
 – Góc $52^\circ 30'$ và góc $37^\circ 30'$ là hai góc phụ nhau nên: $\sin 52^\circ 30' = \cos 37^\circ 30'$
 – Góc 82° và góc 8° là hai góc phụ nhau, nên: $\operatorname{cotg} 82^\circ = \operatorname{tg} 8^\circ$
 – Góc 80° và góc 10° là hai góc phụ nhau nên: $\operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{cotg} 10^\circ$

Luyện tập

13. Dựng góc nhọn α , biết:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; b) $\cos \alpha = 0,6$; c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; d) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{2}$.

14. Sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác của một góc nhọn để chứng minh rằng: Với góc nhọn α tùy ý, ta có:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$;

b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

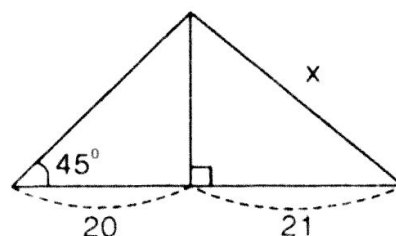
Gợi ý: Sử dụng định lý Py-ta-go.

15. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\cos B = 0,8$, hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C.

Gợi ý: Sử dụng bài tập 14.

16 Cho tam giác vuông có một góc 60° và cạnh huyền có độ dài là 8. Hãy tìm độ dài của cạnh đối diện với góc 60° .

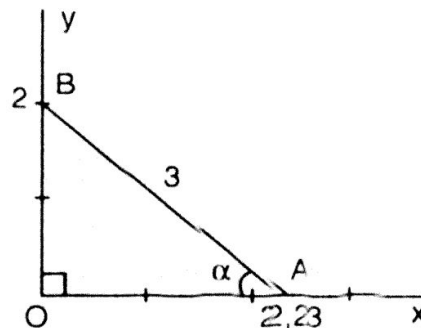
17 Tìm x trong hình bên.



Giải

13. a) Dụng góc nhọn α , biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$

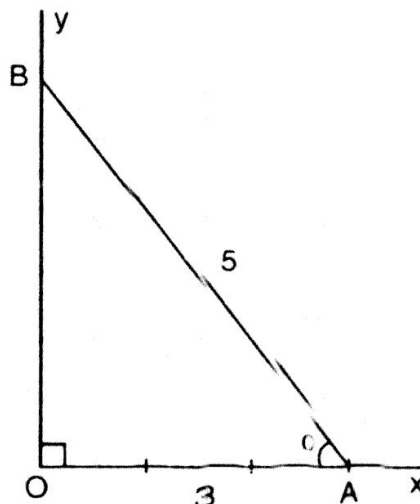
- Trước hết ta dựng góc vuông xOy . Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị. Trên tia Oy ta lấy điểm B sao cho $OB = 2$. Dụng đoạn $BA = 3$ (đơn vị ($A \in Ox$)). Góc $\widehat{BAO}$ là góc α cần dựng.



- Thật vậy, ta có: $\sin \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{2}{3}$.

b) $\cos \alpha = 0,6$ ($\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$)

- Trước hết dựng góc $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị. Trên tia Ox ta lấy một điểm A sao cho $OA = 3$. Dụng đoạn $AB = 5$ (đơn vị) với $B \in Oy$. Góc $\widehat{BAO}$ là góc α cần dựng.



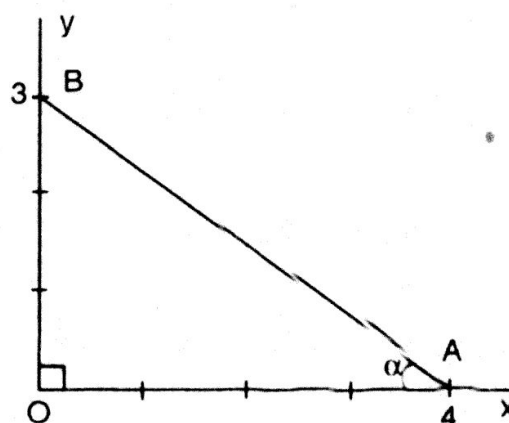
- Thật vậy, ta có: $\cos \alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{3}{5}$.

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.

- Trước hết dựng góc vuông $\widehat{xOy}$. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị. Trên tia Ox ta lấy một điểm A sao cho $OA = 4$ (đơn vị), trên tia Oy lấy một điểm B sao cho $OB = 3$ (đơn vị).

Góc $\widehat{OAB}$ là góc α cần dựng.

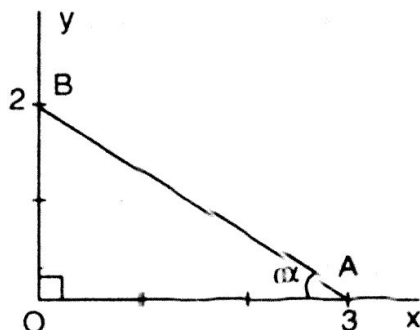
- Thật vậy, ta có: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{3}{4}$



d) $\cot \alpha = \frac{3}{2}$

- Trước hết ta dựng góc vuông $\widehat{xOy}$. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị. Trên tia Ox ta lấy một điểm A sao cho $OA = 3$ (đơn vị), trên tia Oy lấy một điểm B sao cho $OB = 2$ (đơn vị). Góc $\widehat{OAB}$ là góc α cần dựng.

- Thật vậy, ta có: $\cot \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{2}$.



14. Dựng góc nhọn $xOy = \alpha$.

Trên tia Ox ta lấy một điểm B bất kì, hạ BA ($A \in Oy$) vuông góc với Oy .

Ta có: $\sin \alpha = \frac{AB}{OB}$; $\cos \alpha = \frac{OA}{OB}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA}$; $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{OA}{AB}$

a) • Ta có: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{AB}{OB}}{\frac{OA}{OB}} = \frac{AB}{OA} = \operatorname{tg} \alpha$ (dpcm)

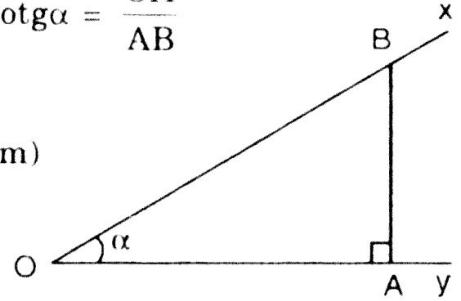
• Ta có: $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{OA}{OB}}{\frac{AB}{OB}} = \frac{OA}{AB} = \operatorname{cotg} \alpha$ (dpcm)

• Ta có: $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = \frac{AB}{OA} \cdot \frac{OA}{AB} = 1$ (dpcm)

b) Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông OAB , ta có:

$$OB^2 = AB^2 + OA^2$$

Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{AB^2}{OB^2} + \frac{OA^2}{OB^2} = \frac{AB^2 + OA^2}{OB^2} = \frac{OB^2}{OB^2} = 1$ (dpcm)



15. Ta có: $\cos B = 0,8 \Rightarrow \hat{B} = 36^\circ 52'$.

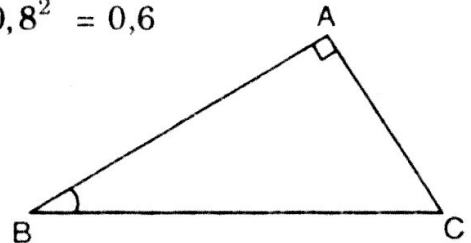
Tam giác ABC vuông tại A , nên $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$.

Ta có: $\sin C = \cos B = 0,8$

mà $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ nên $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C}$
 $\Rightarrow \cos C = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cotg} C = \frac{1}{\operatorname{tg} C} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

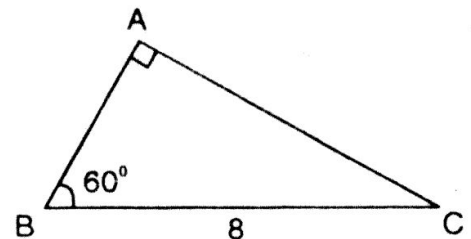


16. Vẽ tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), thỏa mãn điều kiện của đề bài ($\hat{B} = 60^\circ$, $BC = 8$). Tìm AC ?

Ta có: $\sin B = \frac{AC}{BC}$

$$\Rightarrow AC = BC \cdot \sin B = 8 \cdot \sin 60^\circ$$

$$AC = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$



17. Vì ΔAHB vuông ở H và có $\hat{B} = 45^\circ$, nên ΔAHB vuông cân tại H .

Suy ra $HB = HA = 20$

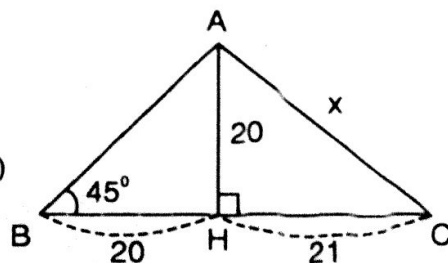
- Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông HAC , ta có:

$$AC^2 = HA^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{HA^2 + HC^2}$$

$$= \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{841} = 29 \text{ (đvdd)}$$

Vậy $x = 29$ (đvdd)



§3. BẢNG LƯỢNG GIÁC VÀ MÁY TÍNH BỎ TÚI

A. Bài tập căn bản

18. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm các tỉ số lượng giác sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):
 a) $\sin 40^\circ 12'$; b) $\cos 52^\circ 54'$; c) $\tan 63^\circ 36'$; d) $\cot 25^\circ 18'$.
19. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm số đo của góc nhọn x (làm tròn đến phút), biết rằng:
 a) $\sin x = 0,2368$; b) $\cos x = 0,6224$; c) $\tan x = 2,154$; d) $\cot x = 3,251$.

Giải

18. a) $\sin 40^\circ 12' \approx 0,6455$; b) $\cos 52^\circ 54' \approx 0,6032$;
 c) $\tan 63^\circ 36' \approx 2,0145$; d) $\cot 25^\circ 18' \approx 2,1155$.
19. a) $\sin x = 0,2368 \Rightarrow x = 13^\circ 42'$; b) $\cos x = 0,6224 \Rightarrow x = 51^\circ 30'$;
 c) $\tan x = 2,154 \Rightarrow x = 65^\circ 6'$; d) $\cot x = 3,251 \Rightarrow x = 17^\circ 6'$.

B. Luyện tập

20. Dùng bảng lượng giác (có sử dụng phần hiệu chính) hoặc máy tính bỏ túi, hãy tìm các tỉ số lượng giác sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):
 a) $\sin 70^\circ 13'$; b) $\cos 25^\circ 32'$; c) $\tan 43^\circ 10'$; d) $\cot 32^\circ 15'$.
21. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm góc nhọn x (làm tròn kết quả đến độ), biết rằng:
 a) $\sin x = 0,3495$; b) $\cos x = 0,5427$;
 c) $\tan x = 1,5142$; d) $\cot x = 3,163$.
22. So sánh:
 a) $\sin 20^\circ$ và $\sin 70^\circ$; b) $\cos 25^\circ$ và $\cos 63^\circ 15'$;
 c) $\tan 73^\circ 20'$ và $\tan 45^\circ$; d) $\cot 2^\circ$ và $\cot 37^\circ 40'$.
23. Tính: a) $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}$; b) $\tan 58^\circ - \cot 32^\circ$
24. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần:
 a) $\sin 78^\circ$, $\cos 14^\circ$, $\sin 47^\circ$, $\cos 87^\circ$;
 b) $\tan 73^\circ$, $\cot 25^\circ$, $\tan 62^\circ$, $\cot 38^\circ$.

25. So sánh:

- a) $\operatorname{tg}25^0$ và $\sin25^0$;
c) $\operatorname{tg}45^0$ và $\cos45^0$;

- b) $\operatorname{cotg}32^0$ và $\cos32^0$;
d) $\operatorname{cotg}60^0$ và $\sin30^0$.

Giải

20. a) $\sin70^013' = 0,9410$

b) $\cos25^032' = 0,9023$

c) $\operatorname{tg}43^010' = 0,9380$

d) $\operatorname{cotg}32^015' = 1,5849$

21. a) $\sin x = 0,3495 \Rightarrow x \approx 20^0$

b) $\cos x = 0,5427 \Rightarrow x \approx 57^0$

c) $\operatorname{tg} x = 1,5142 \Rightarrow x \approx 57^0$

d) $\operatorname{cotg} x = 3,163 \Rightarrow x \approx 18^0$

22. a) Vì góc nhọn tăng thì sin tăng, do đó:

$$\sin20^0 < \sin70^0 \text{ (vì } 20^0 < 70^0 \text{)}$$

b) Vì góc nhọn tăng thì cosin giảm, do đó:

$$\cos25^0 > \cos63^015' \text{ (vì } 25^0 < 63^015' \text{)}$$

c) Vì góc nhọn tăng thì tang tăng, do đó:

$$\operatorname{tg}73^020' > \operatorname{tg}45^0 \text{ (vì } 73^020' > 45^0 \text{)}$$

d) Vì góc nhọn tăng thì cotg giảm, do đó:

$$\operatorname{cotg}2^0 > \operatorname{cotg}37^040' \text{ (vì } 2^0 < 37^040' \text{)}$$

23. a) Ta có: $\frac{\sin25^0}{\cos65^0} = \frac{\sin25^0}{\sin(90^0 - 65^0)} = \frac{\sin25^0}{\sin25^0} = 1$

(do góc 65^0 và góc 25^0 là hai góc phụ nhau, do đó $\cos65^0 = \sin25^0$)

b) Tương tự, ta có 58^0 và 32^0 là hai góc phụ nhau, nên:

$$\operatorname{tg}58^0 - \operatorname{cotg}32^0 = \operatorname{tg}58^0 - \operatorname{tg}58^0 = 0$$

24. a) Ta có: $\sin78^0 = \cos12^0$ (vì $78^0 + 12^0 = 90^0$)

$$\sin47^0 = \cos43^0 \text{ (vì } 47^0 + 43^0 = 90^0 \text{)}$$

Vì góc nhọn tăng thì cosin giảm và $12^0 < 14^0 < 43^0 < 87^0$.

$$\text{Suy ra } \cos12^0 > \cos14^0 > \cos43^0 > \cos87^0$$

$$\text{hay } \sin78^0 > \cos14^0 > \sin47^0 > \cos87^0.$$

b) Ta có: $\operatorname{cotg}25^0 = \operatorname{tg}65^0$ (vì $25^0 + 65^0 = 90^0$)

$$\operatorname{cotg}38^0 = \operatorname{tg}52^0 \text{ (vì } 38^0 + 52^0 = 90^0 \text{)}$$

Vì góc nhọn tăng thì tang tăng và $52^0 < 62^0 < 65^0 < 73^0$

$$\text{Suy ra } \operatorname{tg}52^0 < \operatorname{tg}62^0 < \operatorname{tg}65^0 < \operatorname{tg}73^0$$

$$\text{hay } \operatorname{cotg}38^0 < \operatorname{tg}62^0 < \operatorname{cotg}25^0 < \operatorname{tg}73^0.$$

25. a) Vì $\operatorname{tg}25^0 = \frac{\sin25^0}{\cos25^0}$, mà $\cos25^0 < 1$ nên $\operatorname{tg}25^0 > \sin25^0$.

b) Vì $\operatorname{cotg}32^0 = \frac{\cos32^0}{\sin32^0}$, mà $\sin32^0 < 1$ nên $\operatorname{cotg}32^0 > \cos32^0$.

c) $\operatorname{tg}45^0 = 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos45^0$. Vậy $\operatorname{tg}45^0 > \cos45^0$.

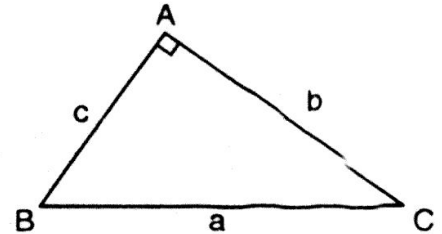
d) Ta có $\operatorname{cotg}60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2} = \sin30^0$. Vậy $\operatorname{cotg}60^0 > \sin30^0$.

§4. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý: Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

- Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề.
- Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.



2. Hệ thức: Cho tam giác ABC vuông tại A có:

$$\hat{A} = 90^\circ; BC = a, AC = b \text{ và } AB = c.$$

Ta có các hệ thức:

$$\begin{aligned} b &= a \cdot \sin B = a \cdot \cos C \\ c &= a \cdot \sin C = a \cdot \cos B \\ \text{và} \quad b &= c \cdot \tan B = c \cdot \cot C \\ c &= b \cdot \tan C = b \cdot \cot B \end{aligned}$$

3. Áp dụng giải tam giác vuông:

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai yếu tố (trong đó có ít nhất một yếu tố về cạnh và không kể góc vuông) thì ta sẽ tìm được tất cả các yếu tố còn lại của tam giác vuông đó.

Bài toán như vậy gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

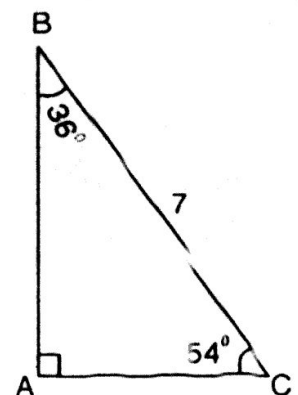
Cho tam giác ABC vuông tại A, có cạnh huyền $BC = 7$; $\hat{B} = 36^\circ$. Hãy giải tam giác vuông ABC.

Giải

- Trong tam giác vuông ABC có $\hat{A} = 90^\circ$ nên:
 $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.
- Theo hệ thức giữa cạnh, góc trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = BC \cdot \sin 54^\circ = 7 \cdot 0,8090 \approx 5,663$$

$$AC = BC \cdot \sin 36^\circ = 7 \cdot 0,5878 \approx 4,114$$

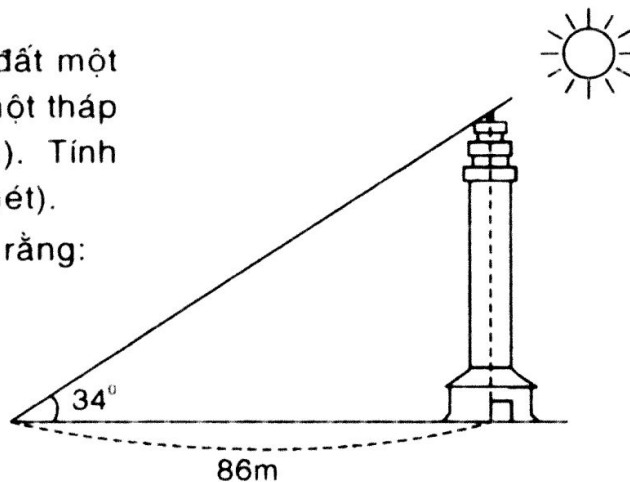


B. Bài tập căn bản

26. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34° và bóng của một tháp trên mặt đất dài 86m (hình bên). Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét).

27. Giải tam giác ABC vuông tại A biết rằng:

- a) $b = 10\text{cm}$, $\hat{C} = 30^\circ$;
- b) $c = 10\text{cm}$, $\hat{C} = 45^\circ$;
- c) $a = 20\text{cm}$, $\hat{B} = 35^\circ$;
- d) $c = 21\text{cm}$, $b = 18\text{cm}$.



Giải

26. Từ đỉnh tháp ta vẽ một đường thẳng vuông góc với mặt đất, khoảng cách từ đỉnh đến mặt đất được gọi là chiều cao tháp và khoảng cách từ chân tường đến giao điểm các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất chính là bóng của tháp trên mặt đất.

Khi đó, ta có chiều cao của tháp bằng: $86 \cdot \tan 34^\circ \approx 58(\text{m})$

Dáp số: 58 mét.

27. a) Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Và } c = b \cdot \tan C = 10 \cdot \tan 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 5,774 (\text{m})$$

$$a = \frac{b}{\sin B} = \frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 11,547 (\text{m})$$

b) Tương tự ta có: $\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

Do đó, tam giác ABC là tam giác vuông cân nên:

$$b = c = 10 (\text{cm}) \text{ và } a = b\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \approx 14,142 (\text{cm})$$

c) Tương tự, ta có; $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

$$\text{và } b = a \sin B = 20 \sin 35^\circ = 20 \cdot 0,5738 \approx 11,472 (\text{cm})$$

$$c = a \sin C = 20 \cdot \sin 55^\circ = 20 \cdot 0,8192 \approx 16,383 (\text{cm})$$

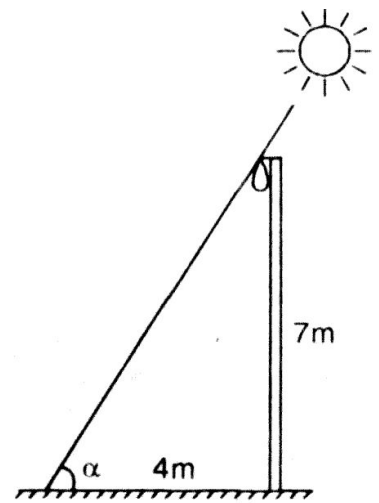
d) Tương tự, ta có: $\tan B = \frac{b}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7} \Rightarrow \hat{B} \approx 41^\circ$

$$\text{và } \hat{C} = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

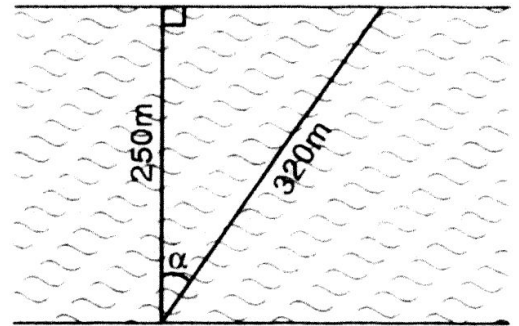
$$a = \frac{b}{\sin B} = \frac{18}{\sin 41^\circ} = \frac{18}{0,656} \approx 27,437 (\text{cm})$$

Luyện tập

28. Một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất (góc α trong hình vẽ bên).



29. Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một chiếc đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu độ? (hình bên)



30. Cho tam giác ABC, trong đó $BC = 11\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC. Hãy tính:

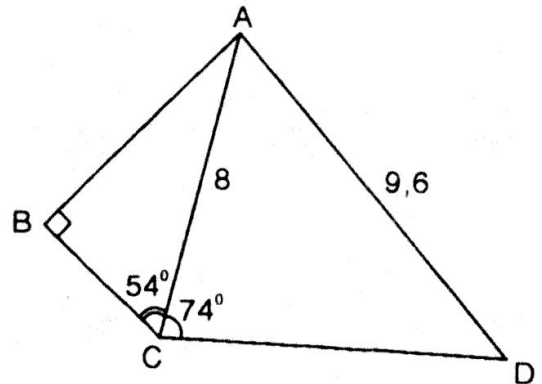
a) Đoạn thẳng AN;

b) Cạnh AC.

Gợi ý: Kẻ BK vuông góc với AC.

31. Trong hình vẽ bên, $AC = 8\text{cm}$, $AD = 9,6\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 54^\circ$ và $\widehat{ACD} = 74^\circ$.

Hãy tính: a) AB; b) $\widehat{ADC}$.



32. Một con thuyền với vận tốc 2km/h. vượt qua một khúc sông nước chảy mạnh mất 5 phút. Biết rằng đường đi của con thuyền tạo với bờ một góc 70° . Từ đó đã có thể tính được chiều rộng của khúc sông chưa? Nếu có thể hãy tính kết quả (làm tròn đến mét).

Giải

28. Ta biết rằng cột đèn, bóng cột đèn trên mặt đất và tia sáng mặt trời tạo thành tam giác vuông.

Khi đó, $\text{tg} \alpha = \frac{7}{4} \Rightarrow \alpha \approx 60^\circ 15'$. Vậy $\alpha \approx 60^\circ 15'$.

29. Căn cứ vào đề bài và hình vẽ, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{250}{320} = \frac{25}{32} \Rightarrow \alpha \approx 38^\circ 37'$$

Vậy $\alpha \approx 38^\circ 37'$.

30. Kẻ $BK \perp AC$ ($K \in AC$).

Trong tam giác vuông BKC có $\widehat{KBC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

suy ra $\widehat{KBA} = 60^\circ - 38^\circ = 22^\circ$, $BC = 11$ (cm) nên $BK = \frac{BC}{2} = 5,5$ (cm).

Vậy $AB = \frac{BK}{\cos \widehat{KBA}} = \frac{5,5}{\cos 22^\circ} = 5,932$ (cm).

a) Trong tam giác vuông NAB ($\widehat{N} = 90^\circ$), ta có:

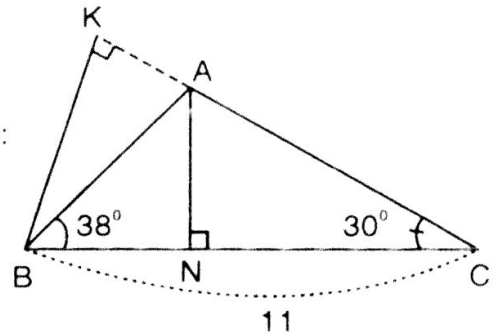
$$AN = AB \cdot \sin 38^\circ = 5,932 \cdot 0,6157$$

$$AN \approx 3,652 \text{ cm.}$$

b) Trong tam giác vuông NAC ($\widehat{N} = 90^\circ$), ta có:

$$AN = AC \cdot \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AN}{\sin 30^\circ} \approx \frac{3,652}{\frac{1}{2}} = 7,304 \text{ (cm)}$$



$$\text{Vậy } AN \approx 3,652 \text{ (cm); } AC \approx 7,304 \text{ (cm)}$$

31. a) Trong tam giác vuông ABC , ta có:

$$AB = AC \cdot \sin 54^\circ = 8 \cdot 0,809$$

$$AB \approx 6,472 \text{ (cm)}$$

b) Trong $\triangle ACD$, kẻ đường cao AH , ta có:

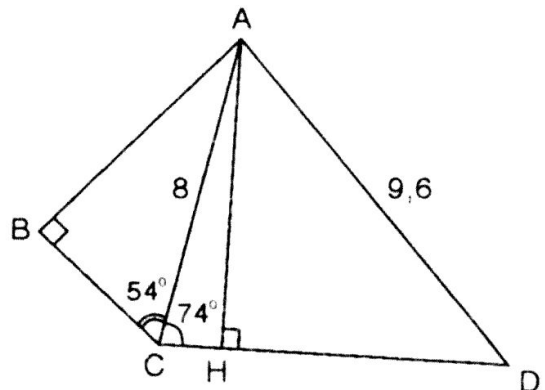
$$AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = 8 \cdot \sin 74^\circ$$

$$AH \approx 8 \cdot 0,96 = 7,69 \text{ (cm)}$$

Ta cũng có:

$$\sin D = \frac{AH}{AD} \approx \frac{7,69}{9,6} \approx 0,801$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ADC} = \widehat{D} \approx 53^\circ.$$



32. Căn cứ vào đề bài ta có thể mô tả khúc sông và đường đi của chiếc thuyền như hình vẽ với:

AB là chiều rộng của khúc sông.

AC là đoạn đường đi của chiếc thuyền.

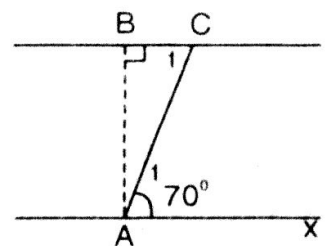
Theo đề bài, thuyền qua sông mất 5 phút với vận tốc là $2\text{km/giờ} \approx 33\text{mét/phút}$.

$$\text{Do đó: } AC \approx 33 \cdot 5 = 165 \text{ (m)}$$

Trong tam giác vuông ABC ($\widehat{B} = 90^\circ$), ta có $\widehat{C}_1 = 70^\circ$ (vì $BC \parallel Ax$ và $\widehat{C}_1$ so le trong với $\widehat{A}_1$) và $AC \approx 165$ (m).

Do đó chiều rộng của khúc sông là:

$$AB = AC \cdot \sin C = 165 \cdot \sin 70^\circ = 165 \cdot 0,94 \approx 155 \text{ (m)}$$



ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông.

Cho tam giác ABC vuông tại A

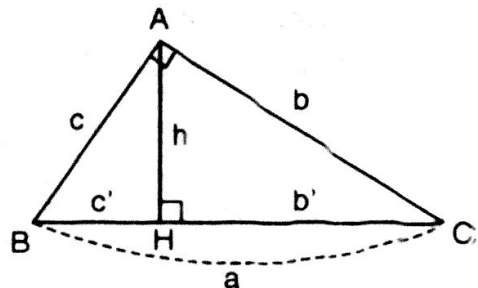
Khi đó, ta có:

$$1) b^2 = ab'; c^2 = ac';$$

$$2) h^2 = b'c'$$

$$3) ha = bc$$

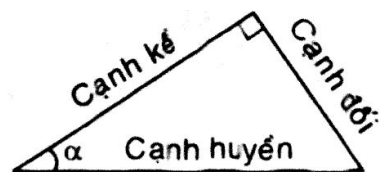
$$4) \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$



2. Định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn

$$\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \quad \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$



3. Một số tính chất của tỉ số lượng giác

Cho hai góc α và β phụ nhau. Khi đó:

$$\sin \alpha = \cos \beta; \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

4. Các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông.

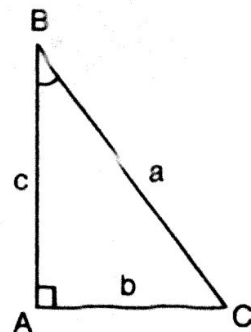
Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi đó:

$$b = a \sin B; \quad c = a \sin C;$$

$$b = a \cos C; \quad c = a \cos B;$$

$$b = c \tan B; \quad c = b \tan C;$$

$$b = c \cot C; \quad c = b \cot B.$$



II. BÀI TẬP

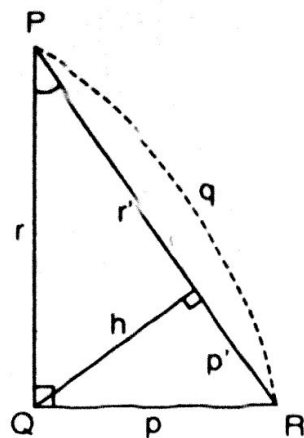
A. Câu hỏi

1. Cho hình bên. Hãy viết hệ thức giữa:

- Cạnh huyền, cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền;
- Các cạnh góc vuông p, r và đường cao h;
- Đường cao h và hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền p', r'.

2. Cho hình bên.

- Hãy viết công thức tính các tỉ số lượng giác của góc α .



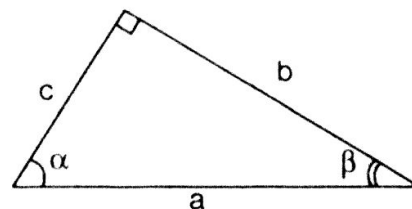
b) Hãy viết hệ thức giữa các tỉ số lượng giác của góc α và các tỉ số lượng giác của góc β .

3. Xem hình bên.

a) Hãy viết công thức tính các cạnh góc vuông b và c theo cạnh huyền a và tỉ số lượng giác của các góc α, β ;

b) Hãy viết công thức tính mỗi cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông kia và tỉ số lượng giác của các góc α, β .

4. Để giải một tam giác vuông, cần biết ít nhất mấy góc và cạnh? Có lưu ý gì về số cạnh?



Giải

1. a) $p^2 = p' \cdot q$
 $r^2 = r' \cdot q$

b) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{r^2}$

c) $h^2 = p' \cdot r'$

2. a) $\sin \alpha = \frac{b}{a}$; $\cos \alpha = \frac{c}{a}$; $\tan \alpha = \frac{b}{c}$; $\cot \alpha = \frac{c}{b}$

b) Vì α và β là hai góc phụ nhau nên: $\sin \alpha = \cos \beta$; $\sin \beta = \cos \alpha$;
 $\tan \alpha = \cot \beta$; $\tan \beta = \cot \alpha$.

3. a) $b = a \cdot \sin \alpha$; $c = a \cdot \sin \beta$;
 $b = a \cdot \cos \beta$; $c = a \cdot \cos \alpha$

b) $b = c \cdot \tan \alpha = c \cdot \cot \beta$
 $c = b \cdot \cot \alpha = b \cdot \tan \beta$

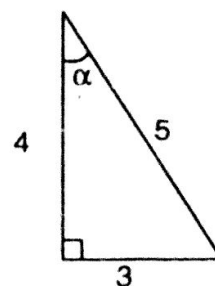
4. Để giải một tam giác vuông, cần biết hai yếu tố, trong đó có ít nhất một yếu tố là cạnh.

B. Bài tập căn bản

33. Chọn kết quả đúng trong các kết quả dưới đây:

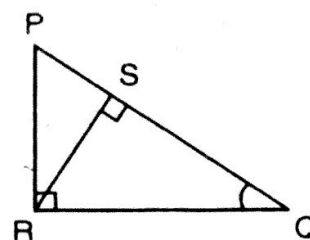
a) Trong hình bên, $\sin \alpha$ bằng:

- A) $\frac{5}{3}$; B) $\frac{5}{4}$;
 C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{3}{4}$.



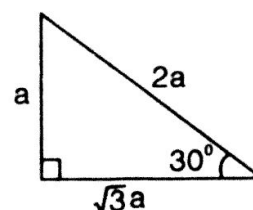
b) Trong hình bên, $\sin Q$ bằng:

- A) $\frac{PR}{RS}$; B) $\frac{PR}{RQ}$;
 C) $\frac{PS}{SR}$; D) $\frac{SR}{QR}$.



c) Trong hình bên, $\cos 30^\circ$ bằng:

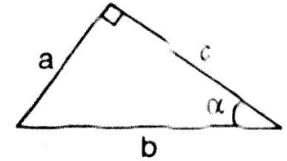
- A) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$;
 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $2\sqrt{3}a^2$.



34. a) Trong hình bên, hệ thức nào trong các hệ thức sau là đúng?

A) $\sin \alpha = \frac{b}{c}$; B) $\cot \alpha = \frac{b}{c}$;

C) $\tan \alpha = \frac{a}{c}$; D) $\cot \alpha = \frac{a}{c}$.



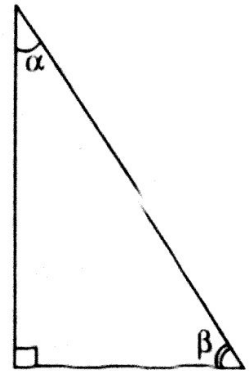
b) Trong hình bên, hệ thức nào trong các hệ thức sau không đúng?

A) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

B) $\sin \alpha = \cos \beta$;

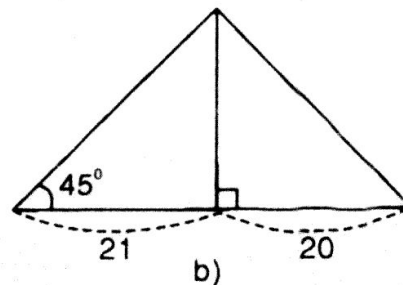
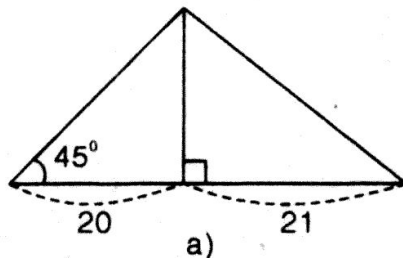
C) $\cos \beta = \sin(90^\circ - \alpha)$;

D) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.



35. Tỷ số giữa hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông bằng 19 : 28. Tìm các góc của nó.

36. Cho tam giác có một góc bằng 45° . Đường cao chia một cạnh kề với góc đó thành các phần 20cm và 21cm. Tính cạnh lớn trong hai cạnh còn lại (lưu ý hai trường hợp hình a và hình b).



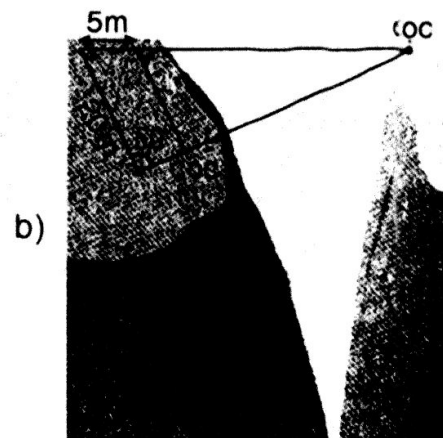
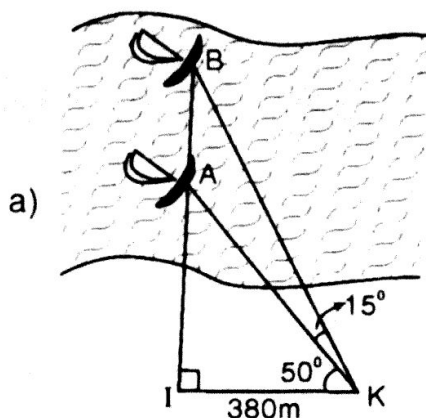
37. Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 4,5\text{cm}$, $BC = 7,5\text{cm}$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A. Tính các góc B, C và đường cao AH của tam giác đó.

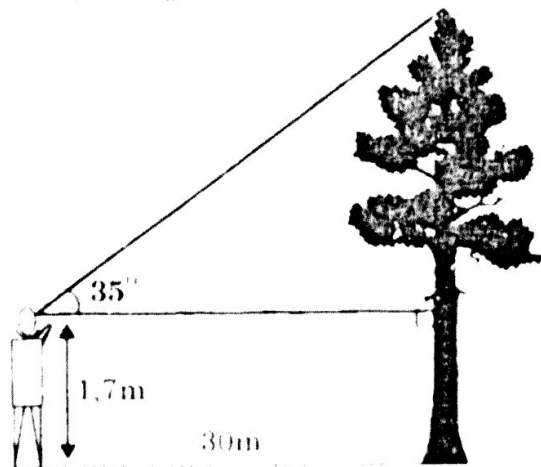
b) Hỏi rằng điểm M mà diện tích tam giác MBC bằng diện tích tam giác ABC nằm trên đường nào?

38. Hai chiếc thuyền A, B có vị trí như trong hình a. Tính khoảng cách giữa chúng (làm tròn đến mét).

39. Tìm khoảng cách giữa hai cọc để căng dây vượt qua vực trong hình b (làm tròn đến mét).



40. Tính chiều cao của cây trong hình dưới (làm tròn đến đêximét).



41. Tam giác ABC vuông tại C có $AC = 2\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $\widehat{BAC} = x$, $\widehat{ABC} = y$. Dùng các thông tin sau (nếu cần) để tìm x và y :

$$\sin 23^{\circ}36' = 0,4;$$

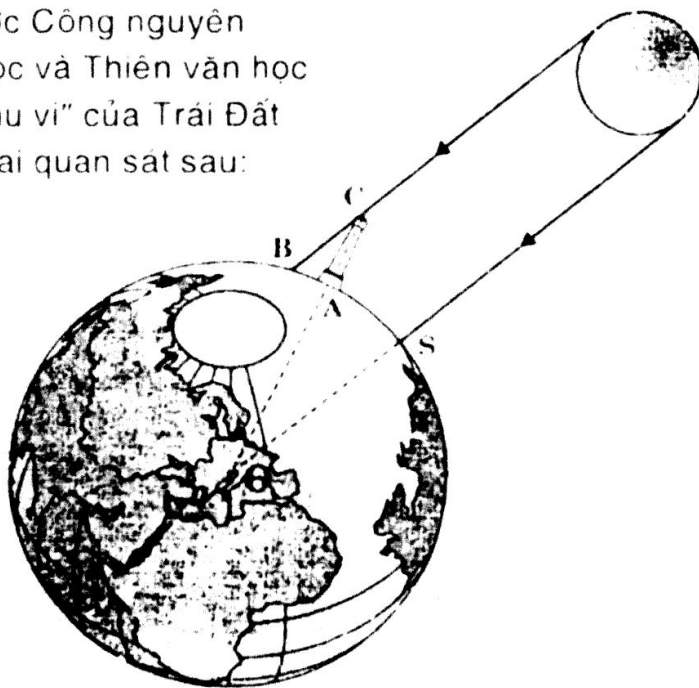
$$\cos 66^{\circ}24' = 0,4;$$

$$\text{tg} 21^{\circ}48' = 0,4.$$

42. Ở một cái thang dài 3m người ta ghi: "Để đảm bảo an toàn khi dùng thang, phải đặt thang này tạo với mặt đất một góc có độ lớn từ 60° đến 70° ". Đo góc thì khó hơn đo độ dài. Vậy hãy cho biết: Khi dùng thang đó, chân thang phải đặt cách tường khoảng bao nhiêu mét để đảm bảo an toàn?

43. Đố: Vào khoảng năm 200 trước Công nguyên O-ra-tô-xten, một nhà Toán học và Thiên văn học Hi Lạp, đã ước lượng được "chu vi" của Trái Đất (chu vi đường xích đạo) nhờ hai quan sát sau:

- 1) Một ngày trong năm, ông ta để ý thấy Mặt Trời chiếu thẳng các đáy giếng ở Thành phố Xy-en (nay gọi là Át-xu-an), tức là tia sáng chiếu thẳng đứng.
- 2) Cùng lúc đó ở Thành phố A-lếch-xăng-đrì-a cách Xy-en 800km, một tháp cao 25m có bóng trên mặt đất dài 3,1m.



Từ hai quan sát trên, em hãy tính xấp xỉ "chu vi" của trái đất.

(Trên hình trên, điểm S tượng trưng cho Thành phố Xy-en, điểm A tượng trưng cho Thành phố A-lếch-xăng-đrì-a, bóng của tháp trên mặt đất được coi là đoạn thẳng AB).

Giải

33. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Chọn câu C.

b) $\sin Q = \frac{RS}{RQ}$. Chọn câu D.

c) $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}.a}{2.a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. Chọn câu C.

34. a) $\sin \alpha = \frac{a}{b}$. Câu A : Sai.

$\cot \alpha = \frac{c}{a}$. Câu B : Sai

$\tan \alpha = \frac{a}{c}$. Câu C: Đúng

$\cot \alpha = \frac{c}{a}$. Câu D : Sai.

Vậy chọn câu C.

b) Câu C không đúng vì: $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì $\cos \beta = \sin \alpha$ hoặc $\sin \beta = \cos \alpha$.

Do đó: $\cos \beta = \sin(90^\circ - \alpha)$ là biểu thức SAI.

Vậy chọn câu C.

35. Ta biết rằng trong một tam giác vuông, tỉ số giữa hai cạnh góc vuông là tang của góc nhọn này và là cotang của góc nhọn kia.

Giả sử, gọi α là số đo của góc nhọn ACB, ta có:

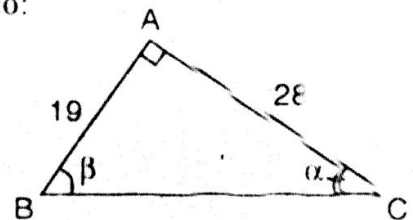
$$\tan \alpha = \frac{19}{28} \approx 0,6786 \Rightarrow \alpha \approx 34^\circ 10'$$

Trong tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), ta có:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

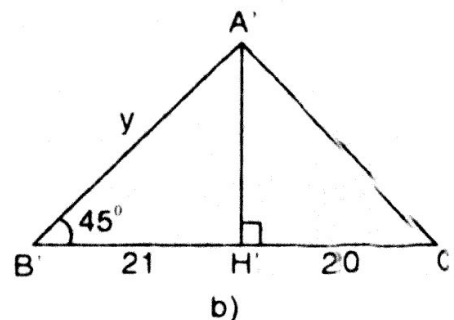
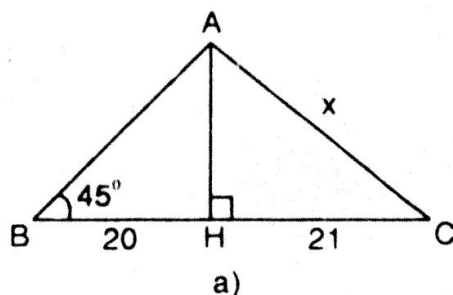
$$\text{hay } \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 34^\circ 10' = 55^\circ 50'$$

Vậy các góc nhọn của tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) có số đo là: $\alpha = 34^\circ 10'$ và $\beta = 55^\circ 50'$.



36. Giả sử, ta vẽ được hai tam giác ABC và A'B'C' thỏa mãn các giả thiết đã cho trong đề bài.

Có hai trường hợp:



* Trường hợp 1: Cạnh lớn trong hai cạnh còn lại ở mỗi tam giác là cạnh đối diện với góc 45° . Ta gọi cạnh đó là x.

Trong tam giác vuông HAB ($\hat{H} = 90^\circ$), ta có:

$$AH = BH \cdot \tan 45^\circ = 20 \cdot 1 = 20$$

Trong tam giác vuông AHC ($\widehat{H} = 90^\circ$), ta có: $AC^2 = AH^2 + HC^2$

Hay $x^2 = 20^2 + 21^2 = 841 \Rightarrow x = \sqrt{841} = 29$ (cm)

- * *Trường hợp 2:* Cạnh lớn trong hai cạnh còn lại là cạnh kề với góc 45° .
Ta gọi cạnh đó là y .

Trong tam giác vuông $H'A'B'$ ($\widehat{H} = 90^\circ$) ta có:

$$B'H' = A'B' \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow A'B' = \frac{B'H'}{\cos 45^\circ}$$

hay $y = \frac{21}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{42}{\sqrt{2}} = \frac{42}{1,41} \approx 29,7$ (cm).

37. a) Xét tam giác ABC , ta có:

$$BC^2 = 7,5^2 = 56,25 \text{ (cm)}$$

$$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 4,5^2 = 36 + 20,25 = 56,25 \text{ (cm)}$$

Suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A .

- * Tính $\widehat{B} = ?$ và $\widehat{C} = ?$ $AH = ?$

Vì tam giác ABC vuông tại A nên:

- $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4,5}{7,5} = 0,6 \Rightarrow \widehat{B} \approx 37^\circ$

- $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{7,5} = 0,8 \Rightarrow \widehat{C} \approx 53^\circ$

Trong tam giác vuông BAH ($\widehat{H} = 90^\circ$), ta có:

- $\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin B = 6 \cdot 0,6 = 3,6$ (cm)

- b) Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$ (1)

Lấy một điểm M bất kì, vẽ $MK \perp BC$, ta có: $S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2} MK \cdot BC$ (2)

Theo đề bài ta có: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle MBC}$ hay $\frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} MK \cdot BC \Rightarrow MK = AH$

Điều này chứng tỏ rằng điểm M cách đường thẳng BC một đoạn bằng AH . Vậy điểm M nằm trên hai đường thẳng (d) và (d') song song với BC và cách BC một đoạn thẳng bằng $AH = 3,6$ (cm).

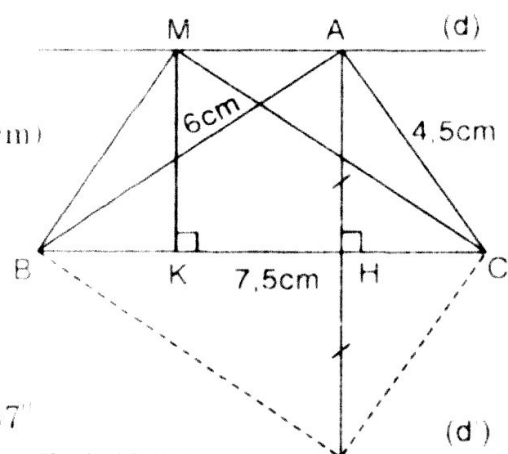
38. Trong tam giác vuông IKB , ta có:

$$IB = IK \cdot \tan \widehat{IKB} = 380 \cdot \tan(50^\circ + 15^\circ) = 380 \cdot \tan 65^\circ \approx 380 \cdot 2,14 \approx 815 \text{ (m)}$$

Trong tam giác vuông IKA , ta có:

$$IA = IK \cdot \tan \widehat{IKA} = 380 \cdot \tan 50^\circ = 380 \cdot 1,19 \approx 453 \text{ (m)}$$

Vậy khoảng cách giữa hai thuyền là: $AB = IB - IA = 815 - 453 = 362$ (m)



39. Vì $CK \perp ED$, ta có $CK = DB = 5(\text{m})$

Trong tam giác vuông DAE ($\hat{D} = 90^\circ$), ta có:

$$DE = AE \cdot \cos 50^\circ$$

$$\Rightarrow AE = \frac{DE}{\cos 50^\circ} = \frac{20}{0.64} \approx 31,25 (\text{m})$$

Trong tam giác vuông CEK

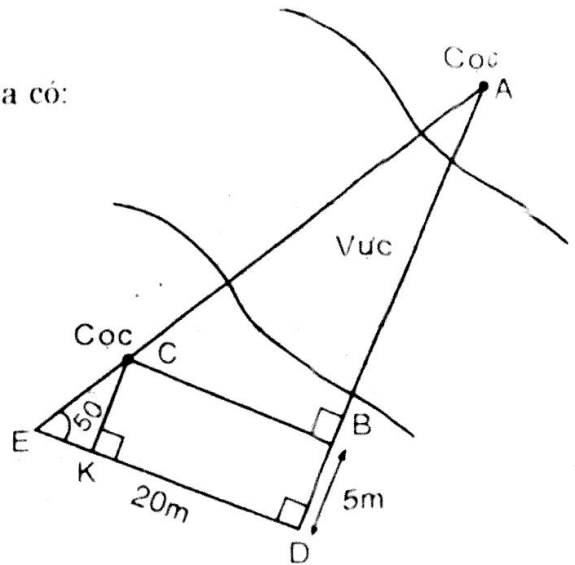
($\hat{K} = 90^\circ$), ta có:

$$CK = CE \cdot \sin 50^\circ$$

$$\Rightarrow CE = \frac{CK}{\sin 50^\circ} = \frac{5}{0.77} \approx 6,49 (\text{m})$$

Vậy khoảng cách giữa hai cột để căng dây vượt qua vực là:

$$AC = AE - CE = 31,25 - 6,49 \approx 25 (\text{m})$$



40. Chiều cao của cây là:

$$1,7 + 30 \cdot \tan 35^\circ = 1,7 + 30 \cdot 0,70 = 1,7 + 21 = 22,7 (\text{m}) = 227 (\text{dm})$$

Đáp số: 227 dèximét.

41. Trong tam giác vuông ABC tại C , ta có:

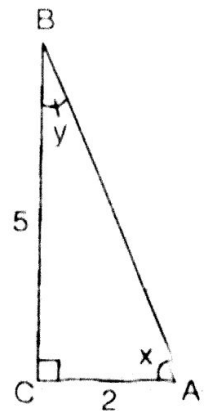
$$\tan B = \frac{CA}{CB} = \frac{2}{5} = 0,4 \approx \tan 21^\circ 48' \Rightarrow y = 21^\circ 48'$$

Ta có: $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - \hat{B}$

$$\text{hay } x = 90^\circ - 21^\circ 48'$$

$$x = 68^\circ 12'$$

$$\text{Vậy } x - y = 68^\circ 12' - 21^\circ 48' = 46^\circ 24'.$$



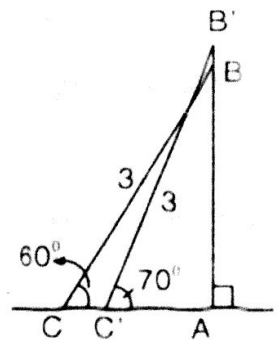
42. Trong tam giác vuông ABC tại A , ta có:

$$AC = BC \cdot \cos C = 3 \cdot \cos 60^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 (\text{m})$$

Trong tam giác vuông $AB'C'$ tại A , ta có:

$$AC' = B'C' \cdot \cos C' = 3 \cdot \cos 70^\circ = 3 \cdot 0,34 \approx 1,03 (\text{m})$$

Vậy khi dùng thang, phải đặt thang cách chân tường một khoảng từ 1,03 mét đến 1,5 mét để đảm bảo an toàn.



43. Vì $SO \parallel CB$ (gt), $\hat{O}$ và $\hat{C}$ là hai góc

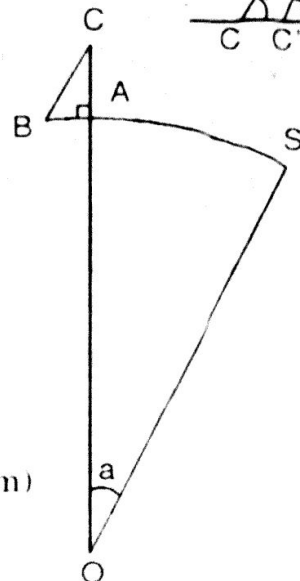
so le trong nên $\hat{O} = \hat{C}$

Mặt khác, với tam giác ABC , ta có:

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{3,1}{25} = 0,124 \Rightarrow \hat{C} \approx 7,07^\circ$$

Do $\hat{O} = \hat{C}$ nên ta có $a = 7,07^\circ$

$$\text{Vậy } CV = 800 \cdot \frac{360^\circ}{a} = 800 \cdot \frac{360^\circ}{7,07^\circ} \approx 40736 (\text{km})$$

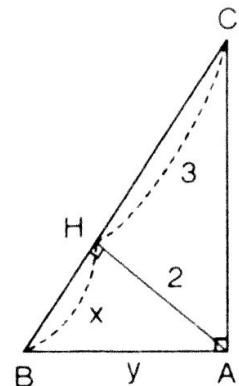


CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Chọn câu trả lời đúng. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh BC = 10 (cm), AB = 6 (cm). Độ dài cạnh AC là
 (A) 16 (cm) (B) 12 (cm) (C) 10 (cm) (D) 8 (cm).

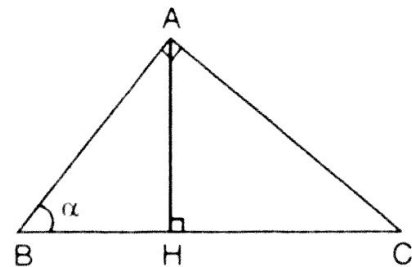
2. Chọn câu trả lời đúng. Tính x ; y trong hình bên :

- (A) $x = \frac{4}{3}$; $y = \frac{2\sqrt{11}}{3}$
 (B) $x = \frac{4}{3}$; $y = \frac{2\sqrt{13}}{3}$
 (C) $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{2\sqrt{13}}{3}$
 (D) $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{2\sqrt{11}}{3}$.



3. Chọn câu trả lời sai. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi góc $\widehat{ABC} = \alpha$.

- (A) $\sin \alpha = \frac{AC}{BC}$ (B) $\sin \alpha = \frac{HC}{AC}$
 (C) $\cos \alpha = \frac{BH}{AB}$ (D) $\cos \alpha = \frac{AH}{HC}$.



4. Chọn câu trả lời đúng. Cho góc nhọn α và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính $\cos \alpha$.

- (A) $\cos \alpha = \frac{8}{13}$ (B) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ (C) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ (D) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

5. Chọn câu trả lời đúng. Dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng tính để tìm số đo của góc α . (Làm tròn đến phút) biết $\cot \alpha = 1,0728$.

- (A) $39^\circ 59'$ (B) $40^\circ 59'$ (C) $41^\circ 59'$ (D) $42^\circ 59'$.

6. Chọn câu trả lời sai.

- (A) $\sin 41^\circ < \sin 42^\circ$ (B) $\cos 41^\circ < \cos 42^\circ$
 (C) $\tan 41^\circ < \tan 42^\circ$ (D) $\cot 41^\circ > \cot 42^\circ$.

7. Chọn câu trả lời đúng.

- (A) $\sin 80^\circ > \sin 90^\circ$ (B) $\cos 80^\circ < \cos 85^\circ$
 (C) $\tan 43^\circ > \tan 52^\circ$ (D) $\cot 27^\circ > \cot 72^\circ$.

8. Chọn câu trả lời sai. Với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, ta có :

- (A) $\tan \alpha > \sin \alpha$ (B) $\cot \alpha > \cos \alpha$
 (C) $\sin^2 \alpha > \sin \alpha$ (D) $\cos \alpha > \cos^2 \alpha$.

9. Chọn câu trả lời đúng.

- (A) Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với cosin góc đối.

- (B) Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với cotang góc kề.
- (C) Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối.
- (D) Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với cosin góc kề.

10. Chọn câu trả lời đúng.

$$\text{Tính : } \sin^2 41^\circ + \sin^2 43^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 47^\circ + \sin^2 49^\circ.$$

- (A) 5 (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Áp dụng định lý Pi-ta-go, ta được :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Leftrightarrow AC = 8 \text{ (cm)}.$$

Chọn câu D.

2. $AH^2 = HB.HC \Rightarrow HB = \frac{4}{3}$

$$BA = \sqrt{HB^2 + HA^2} = \frac{2\sqrt{13}}{3}. \text{ Chọn câu B.}$$

3. Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{HAC} = \alpha$ (cùng phụ với góc $\widehat{BAH}$)

$$\Rightarrow \cos \alpha = \cos \widehat{HAC} = \frac{AH}{AC}. \text{ Chọn câu D.}$$

4. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{13} \text{ (vì } \alpha \text{ là góc nhọn)}. \text{ Chọn câu C}$$

5. Chọn câu D.

6. Chọn câu B.

7. Chọn câu D.

8. Chọn câu C.

9. Chọn câu A.

10. Ta có : $\sin^2 41^\circ = \cos^2 49^\circ$ (hai góc phụ nhau)

$$\sin^2 43^\circ = \cos^2 47^\circ$$

$$\sin^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin^2 41^\circ + \sin^2 43^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 47^\circ + \sin^2 49^\circ &= \\ &= (\sin^2 49^\circ + \cos^2 49^\circ) + (\sin^2 47^\circ + \cos^2 47^\circ) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Chọn câu C.

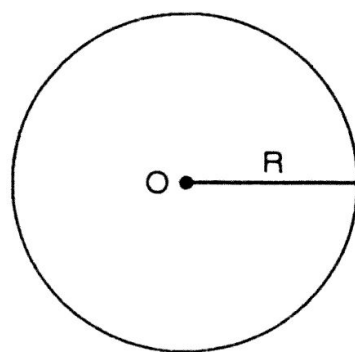
ĐƯỜNG TRÒN

§1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Đường tròn tâm O có bán kính R là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R , trong đó $R > 0$.

Kí hiệu: $(O; R)$ hoặc (O) .



2. Cách xác định đường tròn

- a) Định lí: Qua 3 điểm không thẳng hàng bao giờ cũng vẽ được một đường tròn và chỉ một mà thôi.

Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C của $\triangle ABC$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Khi đó $\triangle ABC$ gọi là tam giác nội tiếp trong đường tròn.

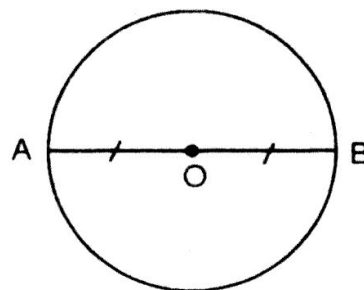
- b) Các cách xác định một đường tròn

- Cách 1: Một điểm O cho trước và một số thực dương R cho trước, ta xác định được duy nhất một đường tròn tâm O bán kính R .
- Cách 2: Ba điểm không thẳng hàng, ta xác định được duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm đó.

3. Tâm đối xứng – Trục đối xứng

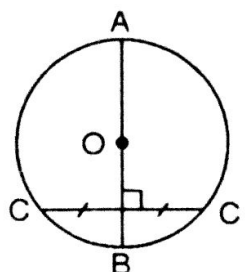
- a) Tâm đối xứng

Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.



- b) Trục đối xứng

Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.



II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho tam giác đều ABC. Gọi M, P và S lần lượt là trung điểm của ba cạnh AB, BC và AC.

Chứng minh rằng bốn điểm B, M, S và C cũng nằm trên một đường tròn có tâm là P.

Giải

Nối PM và PS.

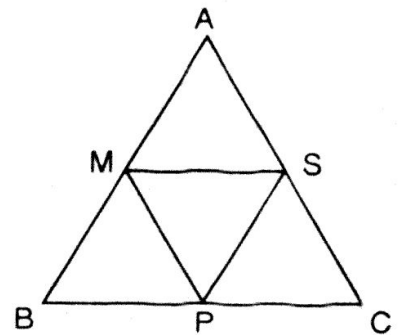
Vì M, P, S lần lượt là trung điểm của AB, BC và AC nên PM và PS là các đường trung bình của tam giác đều ABC.

$$\text{Do đó: } PM = \frac{AC}{2} = \frac{BC}{2}$$

$$PS = \frac{AB}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow PM = PS = \frac{BC}{2} \quad (1)$$

Vì P là trung điểm của BC nên:

$$PB = PC = \frac{BC}{2} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) ta có: $PB = PM = PS = PC (= \frac{BC}{2})$

Vậy bốn điểm B, M, S, C cùng cách P một đoạn không đổi bằng $\frac{BC}{2}$ nên

bốn điểm B, M, S, C cùng nằm trên đường tròn tâm P, bán kính bằng $\frac{BC}{2}$.

B. Bài tập căn bản

- Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 12\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.
- Hãy nối mỗi ô ở cột trái với một ô ở cột phải để được khẳng định đúng:

(1) Nếu tam giác có ba góc nhọn	(4) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó nằm bên ngoài tam giác.
(2) Nếu tam giác có góc vuông	(5) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó nằm bên trong tam giác.
(3) Nếu tam giác đó có góc tù	(6) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là trung điểm của cạnh lớn nhất.
	(7) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là trung điểm của cạnh nhỏ nhất.

- Chứng minh các định lý sau:

a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.

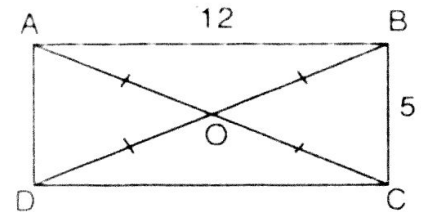
- b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.
4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định vị trí của mỗi điểm $A(-1; -1)$, $B(1; -2)$, $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ đối với đường tròn tâm O bán kính 2.
5. **Đố:** Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy tìm lại tâm của hình tròn đó.

Giải

1. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của hình chữ nhật ABCD.

Suy ra: $OA = OB = OC = OD$.

Vậy bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn (tâm O, bán kính OA).



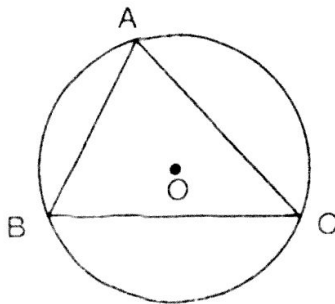
Trong tam giác vuông ABC ($\hat{B} = 90^\circ$), ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (cm)}$$

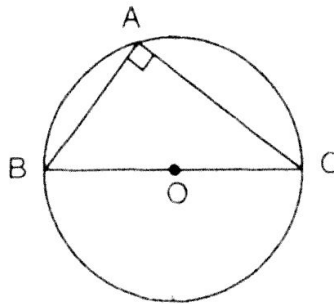
$$\Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = \frac{13}{2} = 6,5 \text{ (cm)}$$

Vậy bán kính của đường tròn bằng 6,5cm.

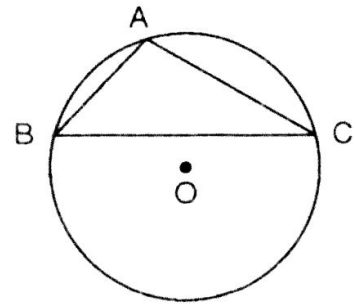
2.



Tam giác nhọn



Tam giác vuông



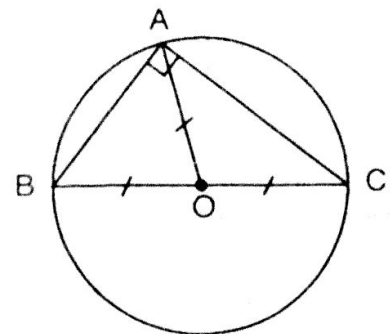
Tam giác tù

Như vậy: Nối (1) với (5); (2) với (6); (3) với (4)

3. a) Trong tam giác vuông ABC, ta có AO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên:

$$OA = OB = OC = \frac{BC}{2}$$

Vậy trung điểm O của cạnh huyền là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông đó.



- b) Xét $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, đường kính BC. Nối AO, khi đó AO là đường trung tuyến của $\triangle ABC$.

$$\text{Suy ra: } AO = OB = OC = \frac{BC}{2}$$

Mà trong một tam giác đường trung tuyến ứng với một cạnh và bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường tròn (O; 2).

Vị trí các điểm A, B, C được xác định như hình vẽ.

Thật vậy:

$$\text{Ta có: } OA^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{2} < 2 = R$$

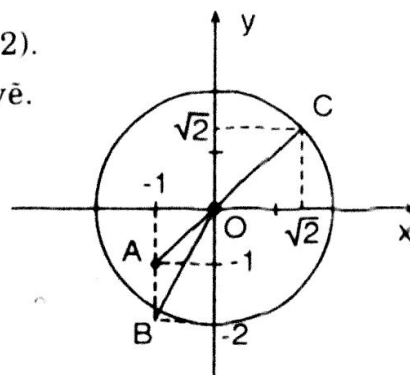
Vậy điểm A nằm bên trong (O).

$$\text{Ta có: } OB^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow OB = \sqrt{5} > 2 = R.$$

Vậy điểm B nằm ngoài đường tròn (O).

$$\text{Ta có: } OC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 \Rightarrow OC = 2 = R$$

Vậy điểm C nằm trên đường tròn (O).

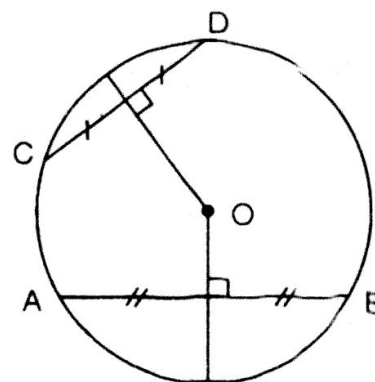


5. Ta xác định tâm của đường tròn bằng cách:

Vẽ hai dây AB và CD bất kì của đường tròn.

Vẽ hai đường trung trực của chúng. Giao

điểm hai đường trung trực của hai dây đó là tâm của đường tròn cần tìm.

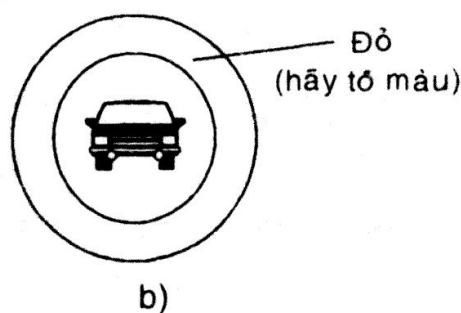
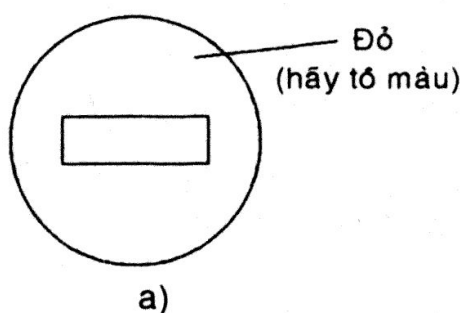


Luyện tập

6. Trong các biển giao thông sau, biển nào có tâm đối xứng, biển nào có trục đối xứng?

a) Biển cấm đi ngược chiều (hình a);

b) Biển cấm ô tô (hình b)



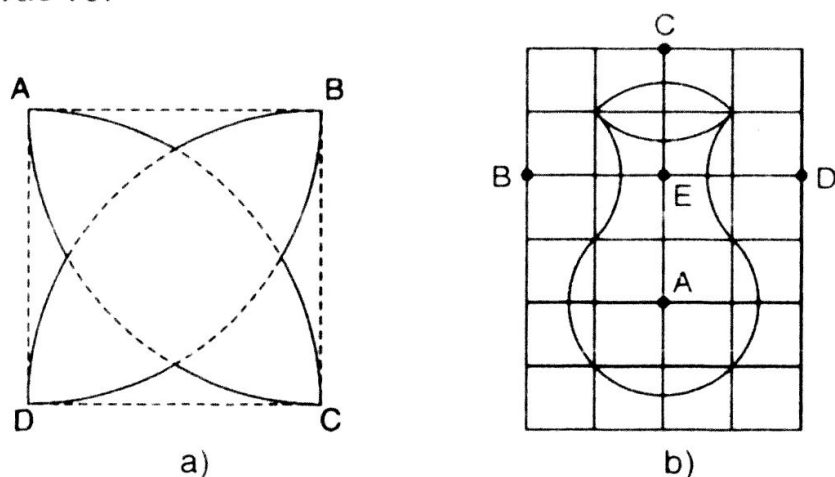
7. Hãy nối mỗi ý (1), (2), (3) với một trong các ý (4), (5), (6), (7) để được câu đúng:

(1) Tập hợp các điểm có khoảng cách đến điểm A cố định bằng 2cm.	(4) là đường tròn tâm A bán kính 2cm.
(2) Đường tròn tâm A bán kính 2cm gồm tất cả những điểm	(5) có khoảng cách đến điểm A nhỏ hơn hoặc bằng 2cm
(3) Hình tròn tâm A bán kính 2cm gồm tất cả những điểm	(6) có khoảng cách đến điểm A bằng 2cm.
	(7) có khoảng cách đến điểm A lớn hơn 2cm.

8. Cho góc nhọn xAy và hai điểm B, C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) đi qua B và C sao cho tâm O nằm trên tia Ay.

9. Đố:

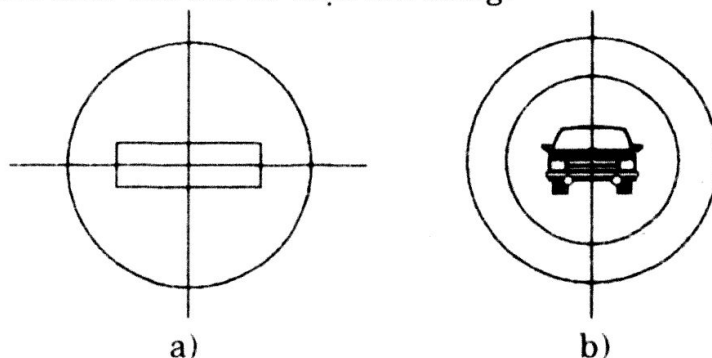
- a) Vẽ hình hoa bốn cánh. Hình hoa bốn cánh trên hình a được tạo bởi các cung có tâm A, B, C, D (trong đó A, B, C, D là các đỉnh của một hình vuông và tâm của cung là tâm của đường tròn chứa cung đó). Hãy vẽ lại hình a vào vở.



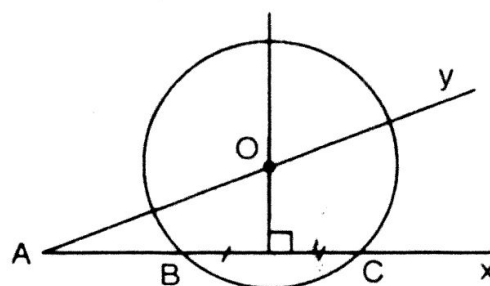
- b) Vẽ lọ hoa. Chiếc lọ hoa trên hình b được vẽ trên giấy kẻ ô vuông bởi năm cung có tâm A, B, C, D, E. Hãy vẽ lại hình b vào giấy kẻ ô vuông.

Giải

6. a) Hình a: Biển cấm đi ngược chiều có một tâm đối xứng (Tâm đường tròn) và có hai trục đối xứng (là 2 đường kính đi qua trung điểm các cạnh đối của hình chữ nhật).
b) Hình b: Biển cấm ô tô chỉ có trục đối xứng.



7. Ta nối các ý: (1) và (4); (2) và (6); (3) và (5) sẽ được các câu đúng.
8. Giả sử ta dựng được đường tròn (O) thỏa mãn điều kiện của đề bài.
Dựng góc $\widehat{xAy}$, trên tia Ax lấy hai điểm B và C. Dựng đường trung trực của đoạn BC, cắt tia Ay tại O. Ta được O là tâm đường tròn đi qua hai điểm B và C.
Thật vậy, O là giao điểm của tia Ay với đường trung trực của đoạn BC nên $OB = OC$. Điều này chứng tỏ rằng hai điểm B và C nằm trên đường tròn (O).
Vậy tâm O là giao điểm của tia Ay với đường trung trực của BC.



9. Học sinh tự vẽ.

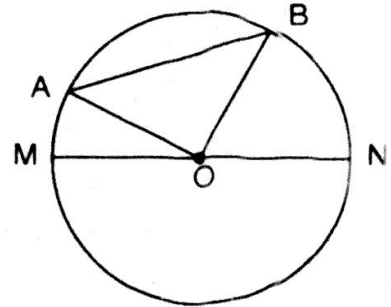
§2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Định lý 1: Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

$$AB \leq MN = 2R$$

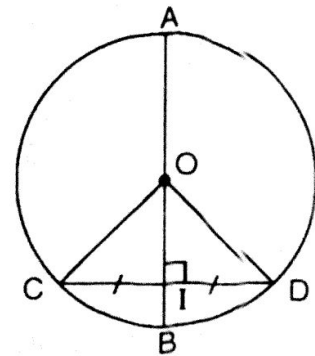


2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

Định lý 2: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

$$AB \perp CD \Rightarrow IC = ID$$

Định lý 3: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.



II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

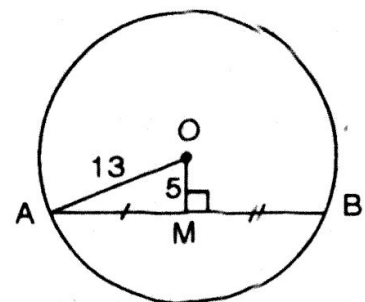
Cho đường tròn O và dây AB (không đi qua O). Gọi M là trung điểm của dây AB. Cho biết $OA = 13\text{cm}$; $OM = 5\text{cm}$. Hãy tính độ dài dây AB.

Giải

- Vì dây AB không đi qua tâm O và $MA = MB$ nên $OM \perp AB$.
Vậy tam giác MAO vuông tại M.
- Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông MAO, ta có:

$$\begin{aligned} OA^2 &= OM^2 + MA^2 \\ \Rightarrow MA^2 &= OA^2 - OM^2 \\ &= 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \\ \Rightarrow MA &= \sqrt{144} = 12 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } AB = 2MA = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (cm)}$$



B. Bài tập căn bản

10. Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE.

Chứng minh rằng:

- Bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.
- $DE < BC$.

11. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng $CH = DK$.
Gợi ý: Kẻ OM vuông góc với CD .

Giải

10. a) Gọi O là trung điểm của BC.

Vì tam giác BEC vuông tại E, nên EO là đường trung tuyến.

Suy ra $OE = OB = OC$ (1)

- Vì tam giác BDC vuông tại D, nên DO là đường trung tuyến.

Suy ra: $OD = OB = OC$ (2)

- Từ (1) và (2) suy ra: $OB = OE = OD = OC$

Vậy bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn tâm O, bán kính bằng $\frac{BC}{2}$.

- b) Vì bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC nên ED là một dây của đường tròn (O).

Suy ra $DE < BC$ (đpcm)

11. Kẻ $OM \perp CD$

- Tứ giác AHKB là hình thang vuông.

$$\left. \begin{array}{l} AH \perp CD \\ OM \perp CD \\ BK \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow AH \parallel OM \parallel BK$$

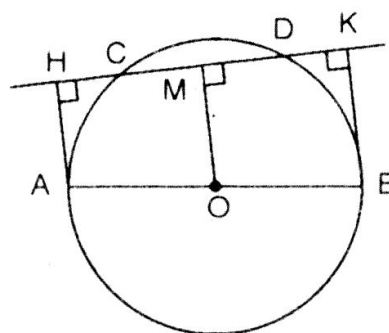
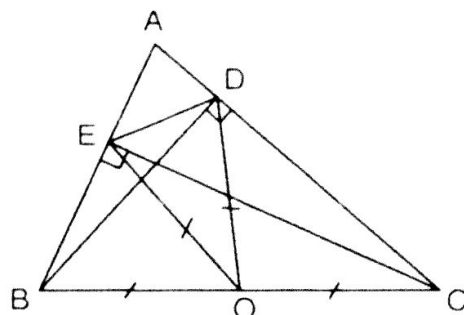
Vì O là trung điểm của AB và $OM \parallel AH$ và BK nên OM là đường trung bình của hình thang AHKB.

$$\Rightarrow MH = MK \quad (1)$$

- Ta còn có $OM \perp CD$ nên: $MC = MD$ (2)

Trừ (1) cho (2) theo vế, ta được:

$$MH - MC = MK - MD \text{ hay } CH = DK \text{ (đpcm)}$$



§3. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

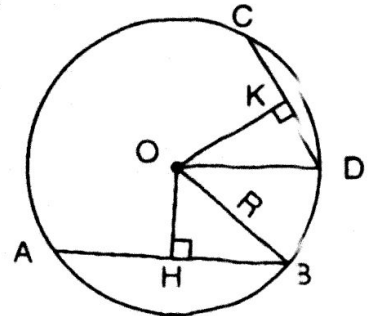
Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Định lý 1: Trong một đường tròn:

- a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
- b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Định lý 2: Trong hai dây của một đường tròn:

- a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
- b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.



II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho tam giác ABC, O là giao điểm các đường trung trực của tam giác; D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, AC. Cho biết $OD > OE$ và $OE = OF$. Hãy so sánh các độ dài:

a) BC và AC;

b) AB và AC.

Giải

a) So sánh BC và AC.

Vì A, B, C không thẳng hàng, nên ta vẽ được đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, tâm đường tròn là giao điểm 3 đường trung trực của ba cạnh $\triangle ABC$.

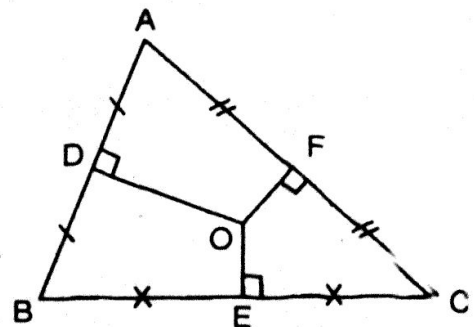
Vì $OE = OF$ (gt) nên hai dây BC và AC cách đều tâm O thì bằng nhau.

Vậy $BC = AC$.

b) So sánh AB và AC.

Vì $OD > OE$ nên dây BC gần tâm O hơn dây AB. Vậy $BC > AB$.

Mà $BC = AC$ nên $AC > AB$.



B. Bài tập căn bản

12. Cho đường tròn tâm O bán kính 5cm, dây AB bằng 8cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1$ cm. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB. Chứng minh rằng $CD = AB$.

13. Cho đường tròn (O) có các dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại điểm E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:
- a) $EH = EK$; b) $EA = EC$.

Giải

12. a) Vẽ $OH \perp AB$

Khi đó OH là khoảng cách từ tâm O đến dây AB và $HA = HB = 4\text{cm}$.
Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông HOB, ta có:

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \text{ (cm)}$$

Vậy $OH = 3\text{cm}$.

- b) Chứng minh $CD = AB$

Ta có: $HI = HA - IA = 4 - 1 = 3 \text{ (cm)}$

Vẽ $OK \perp CD$

Xét tứ giác OHIK, ta có: $\widehat{K} = \widehat{I} = \widehat{H} = 90^\circ$.

Vậy OHIK là hình chữ nhật (1)

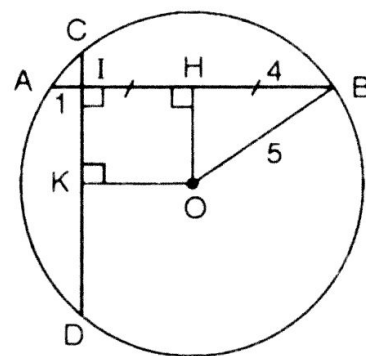
Ta có: $OH = HI = 3 \text{ (cm)}$ (2)

Vì hình chữ nhật OHIK có hai cạnh liên tiếp bằng nhau nên OHIK là hình vuông.

Suy ra $OH = OK$

Vì $OH = OK$ (khoảng cách từ tâm đến 2 dây bằng nhau),

Suy ra $AB = CD$ (đpcm)



13. a) Trong đường tròn (O), ta có $AB = CD$ (gt)

$\Rightarrow OH = OK$ (hai dây bằng nhau thì cách đều tâm đường tròn)

Xét hai tam giác vuông OEH và OEK, ta có:

$$OK = OH \text{ (cmt)}$$

OE: cạnh huyền chung.

Vậy $\triangle OEH = \triangle OEK$. Suy ra $EH = EK$ (đpcm) (1)

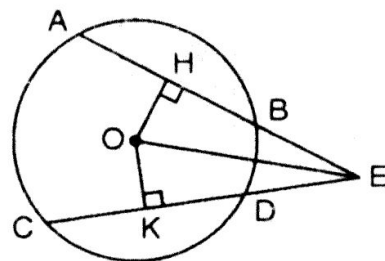
$$b) \text{ Vì } OH \perp AB \text{ nên } HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$$

$$\text{và } OK \perp CD \text{ nên } KC = KD = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$$

Suy ra $HA = KC$ (2)

Lấy (1) cộng với (2) theo vế, ta có:

$$EH + HA = EK + KC \text{ hay } EA = EC \text{ (đpcm).}$$

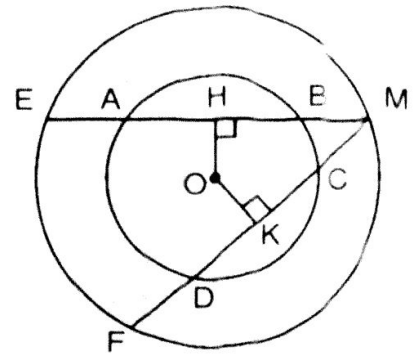


Luyện tập

14. Cho đường tròn tâm O bán kính 25cm, dây $AB = 40\text{cm}$. Vẽ dây CD song song với AB và có khoảng cách đến AB bằng 22cm.
Tính độ dài dây CD.

15. Cho hình bên trong đó hai đường tròn cùng có tâm là O. Cho biết $AB > CD$. Hãy so sánh các độ dài:

- a) OH và OK;
b) ME và MF;
c) MH và MK.



16. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại A. Vẽ dây EF bất kì đi qua A và không vuông góc với AC. Hãy so sánh độ dài hai dây BC và EF.

Giải

14. Vẽ $OH \perp AB \Rightarrow HA = HB = 20$ (cm).

Tam giác vuông AHO cho ta:

$$OH^2 = OA^2 - HA^2 = 25^2 - 20^2 = 225$$

Suy ra: $OH = \sqrt{225} = 15$ (cm).

Vẽ $OI \perp AE$.

- Xét tứ giác OHAI, ta có:

$$\widehat{H} = \widehat{A} = \widehat{I} = 90^\circ$$

Vậy tứ giác OHAI là hình chữ nhật

$$\Rightarrow OH = AI = 15 \text{ (cm)}$$

$$\text{và } AH = OI = 20 \text{ (cm)}$$

- Tương tự vẽ $OK \perp CD$

Tứ giác KOIM có: $\widehat{K} = \widehat{M} = \widehat{I} = 90^\circ$

Vậy tứ giác KOIM là hình chữ nhật $\Rightarrow IM = OK$

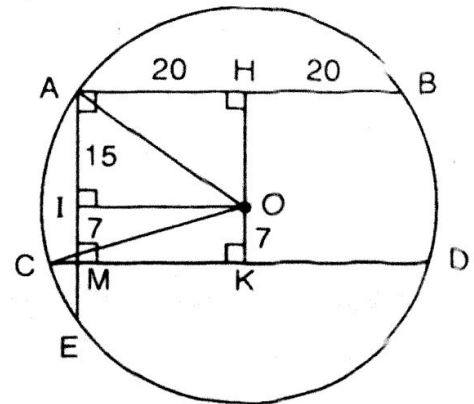
$$\text{Và } IM = OK = AM - AI = 22 - 15 = 7 \text{ (cm)}$$

- Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông KOC, ta có:

$$CK = \sqrt{OC^2 - OK^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ (cm)}$$

- Ta có: $CD = 2CK = 2.24 = 48$ (cm)

$$\text{Vậy } CD = 48 \text{ cm.}$$



15. a) Trong đường tròn nhỏ tâm O, theo đề bài ta có: $AB > CD$.

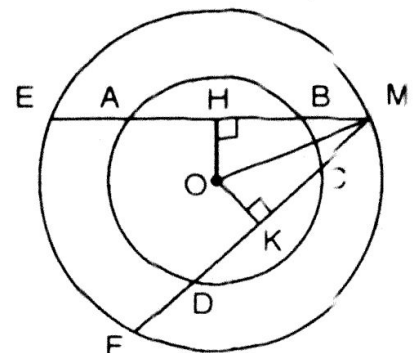
Suy ra $OH < OK$

- b) Trong đường tròn nhỏ tâm O, theo câu a) ta có: $OH < OK$

Suy ra $ME > MF$

- c) Trong đường tròn lớn tâm O, ta có $ME > MF$

$$\text{Suy ra } \frac{ME}{2} > \frac{MF}{2} \text{ hay } MH > MK$$

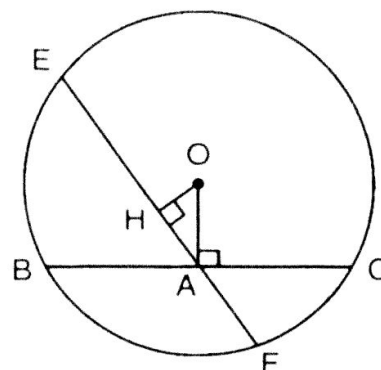


16. Kẻ $OH \perp EF$

Trong tam giác vuông HOA tại H thì OA là cạnh huyền nên:

$$OA > OH$$

Ta có OA là khoảng cách từ tâm O đến dây BC và OH là khoảng cách từ tâm O đến dây EF , mà $OA > OH$ nên $BC < EF$.

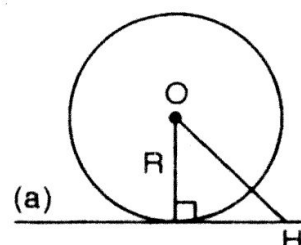
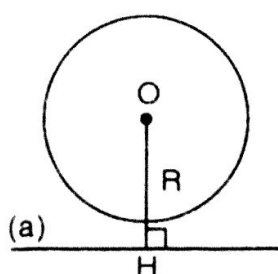
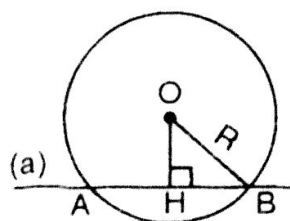


§4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

- Đường thẳng và đường tròn cắt nhau.
- Đường thẳng và đường tròn không giao nhau.
- Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau.



2. Hệ thức giữa khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính đường tròn.

Gọi d là khoảng cách từ tâm O của đường tròn $(O; R)$ đến đường thẳng a .

Ta có bảng tóm tắt sau:

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R .
1. Đường thẳng và đường tròn cắt nhau.	2	$d < R$
2. Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau.	1	$d = R$
3. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau.	0	$d > R$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho đường thẳng a và một điểm O cách a là 3cm. Vẽ đường tròn tâm O có bán kính 5cm.

- Đường thẳng a có vị trí như thế nào đối với đường tròn (O) ? Vì sao?
- Gọi B và C là các giao điểm của đường thẳng a và đường tròn (O) . Tính độ dài BC .

Giải

- Ta có: $d = 3\text{cm}$ và $R = 5\text{cm}$

Vì $3 < 5$ hay $d < R$

nên đường thẳng a cắt đường tròn (O) .

- Vì $OA \perp BC$ nên ta có $IB = IC = \frac{BC}{2}$

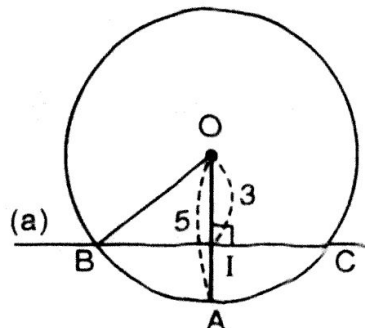
Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông OBI ($\widehat{I} = 90^\circ$), ta có:

$$OB^2 = OI^2 + IB^2 \Rightarrow IB^2 = OB^2 - OI^2$$

$$\text{hay } IB^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow IB = 4 \text{ (cm)}$$

$$\text{Ta có } BC = 2BI = 2.4 = 8 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } BC = 8\text{cm.}$$



B. Bài tập căn bản

- Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng):

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5cm	3cm	...
6cm	...	Tiếp xúc nhau
4cm	7cm	...

- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3; 4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(A; 3)$ và các trục tọa độ.
- Cho đường thẳng xy . Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm và tiếp xúc với đường thẳng xy nằm trên đường nào?
- Cho đường tròn tâm O bán kính 6cm và một điểm A cách O là 10cm. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB .

Giải

17.

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5cm	3cm	Đường thẳng cắt đường tròn ($d < R$)
6cm	6cm	Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn ($d = R$)
4cm	7cm	Đường thẳng và đường tròn không giao nhau ($d > R$)

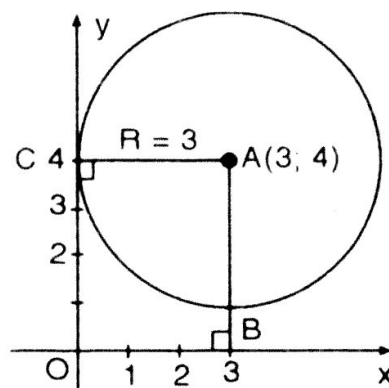
18. Kẻ $AB \perp Ox$ và $AC \perp Oy$

* Ta có: $AB = 4 > 3 = R$

Vậy đường tròn $(A; 3)$ và trục hoành Ox không giao nhau.

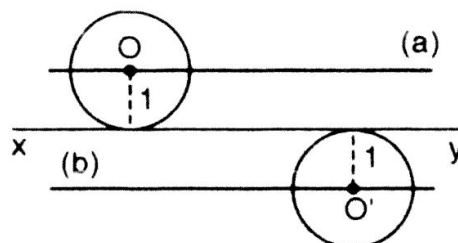
* Ta có: $AC = 3 = R$

Vậy đường tròn tâm $(A; 3)$ và trục tung Oy tiếp xúc nhau.



19. Gọi O là tâm của một đường tròn bất kì có bán kính bằng 1cm và tiếp xúc với đường thẳng xy .

Theo đề bài ta có: $d = R$. Vì tâm O cách đường thẳng xy cố định 1cm nên O nằm trên các đường thẳng (a) và (b) song song với xy và cách xy một khoảng là 1cm.



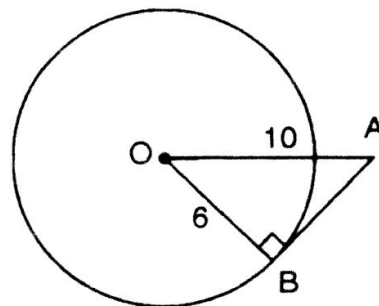
20. Vì AB là tiếp tuyến của $(O; 6\text{cm})$ (B là tiếp điểm). Do đó $OB \perp AB$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông BAO , ta có: $OA^2 = OB^2 + AB^2$

$$\Rightarrow AB^2 = OA^2 - OB^2 = 10^2 - 6^2 = 64$$

$$AB = \sqrt{64} = 8 \text{ (cm)}$$

Vậy $AB = 8\text{cm}$.



§5. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

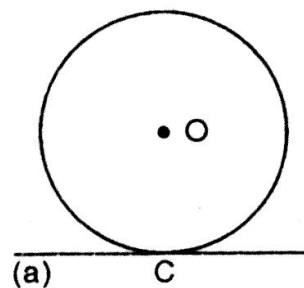
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn ấy.

- Đường thẳng a gọi là tiếp tuyến.

- Điểm C gọi là tiếp điểm.

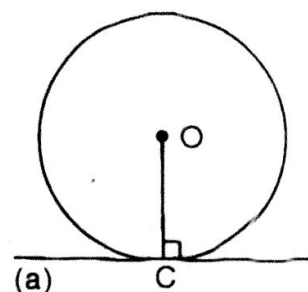


2. Các dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

* Định lí 1: (Tính chất của tiếp tuyến)

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

$$\begin{cases} a \text{ là tiếp tuyến của } (O) \\ C \text{ là tiếp điểm} \end{cases} \Rightarrow a \perp OC.$$



* Định lí 2: (Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến)

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho đường tròn (O) , điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Gọi M là trung điểm của AO . Vẽ đường tròn $(M; MO)$, cắt đường tròn (O) tại B và C . Chứng minh rằng AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) .

* Chú ý: Các thao tác ở bài tập trên cho ta cách dựng tiếp tuyến của một đường tròn kẻ từ một điểm nằm bên ngoài đường tròn đó.

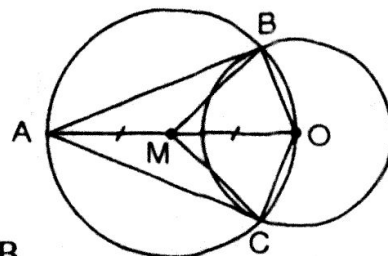
Giải

a) Trong $\triangle ABO$, ta có: BM là đường trung tuyến

$$\text{và } BM = MA = MO = \frac{AO}{2}$$

Vậy $\triangle ABO$ là tam giác vuông tại B hay $AB \perp OB$.

Đường thẳng AB vuông góc với bán kính OB ($B \in (O)$) nên AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



b) Tương tự; $\triangle ACO$ có đường trung tuyến CM bằng $\frac{AO}{2}$ nên $\widehat{ACO} = 90^\circ$

hay $AC \perp OC$.

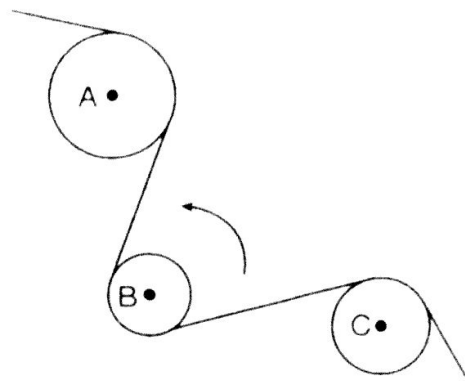
Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

B. Bài tập căn bản

21. Cho tam giác ABC có $AB = 3$; $AC = 4$; $BC = 5$. Vẽ đường tròn $(B; BA)$. Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn.

22. Cho đường thẳng d , điểm A nằm trên đường thẳng d , điểm B nằm ngoài đường thẳng d . Hãy dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và tiếp xúc với đường thẳng d tại A .

23. **Đố:** Dây cua-roa trên hình bên có những phần là tiếp tuyến của các đường tròn tâm A, B, C. Chiều quay của đường tròn tâm B được vẽ trên hình. Tìm chiều quay của đường tròn tâm A và đường tròn tâm C (cùng chiều quay hay ngược chiều quay của kim đồng hồ).



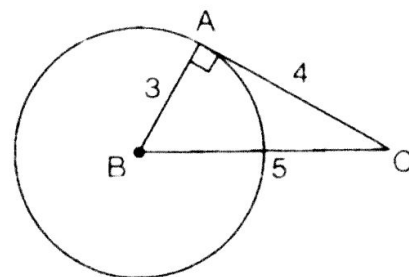
Giải

21. Trong tam giác ABC, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = BC^2$$

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại A hay $CA \perp BA$.

Vì CA vuông góc với bán kính BA tại A nên CA là tiếp tuyến của đường tròn tâm B.



22. Giả sử ta dựng được đường tròn (O) đi qua điểm B và tiếp xúc với đường thẳng d tại A.

- Cách dựng:

Qua A ($A \in (d)$) vẽ một đường thẳng vuông góc với (d).

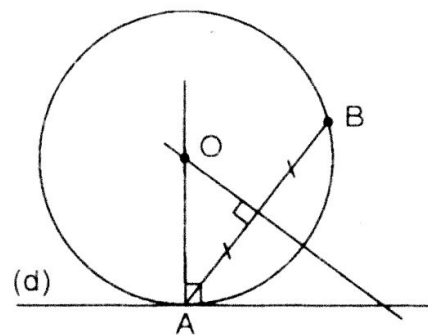
Nối AB. Vẽ đường trung trực của AB.

Hai đường thẳng này cắt nhau tại O.

Lấy O làm tâm, vẽ đường tròn tâm O, bán kính OA. Đường tròn (O; OA) là đường tròn phải dựng.

- Chứng minh: Đường thẳng qua A và vuông góc với (d) là một đường kính của đường tròn. Đường thẳng là đường trung trực của đoạn AB cũng là một đường kính của đường tròn.

Hai đường này cắt nhau tại O. Vậy O là tâm của đường tròn cần dựng.



23. Chiều quay của đường tròn tâm A và đường tròn tâm C theo chiều quay của kim đồng hồ.

Luyện tập

24. Cho đường tròn (O), dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ở điểm C.
- Chứng minh rằng CB là tiếp tuyến của đường tròn.
 - Cho bán kính của đường tròn bằng 15cm, $AB = 24$ cm. Tính độ dài OC.
25. Cho đường tròn (O) có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.
- Tứ giác OCAB là hình gì? Vì sao?
 - Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, nó cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

Giải

24. a) Gọi I là giao điểm của AB và OC.

Xét $\triangle OAB$, ta có: $OA = OB = R$.

Do đó $\triangle OAB$ cân tại O và đường cao OI, nên OI cũng là đường phân giác của $\widehat{O}$.

$$\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

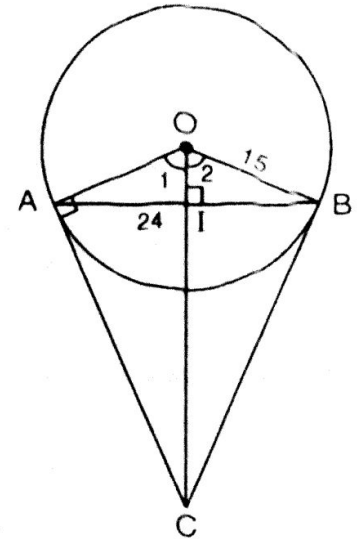
Xét hai tam giác AOC và $\triangle BOC$, ta có:

$$OA = OB = R;$$

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \text{ và } OC : \text{cạnh chung}$$

$$\text{Vậy } \triangle AOC = \triangle BOC \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OAC} = 90^\circ$$

Do đó, CB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



b) Ta có: $OI \perp AB$ nên $IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12\text{cm}$.

- Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông IOA, ta có:

$$OI^2 = OA^2 - AI^2 = 15^2 - 12^2 = 81$$

$$\Rightarrow OI = \sqrt{81} = 9 \text{ (cm)}$$

- Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOC, ta có:

$$OA^2 = OC \cdot OI \Rightarrow OC = \frac{OA^2}{OI} = \frac{15^2}{9} = \frac{225}{9} = 25 \text{ (cm)}$$

Vậy $OC = 25\text{cm}$.

25. a) Ta có bán kính OA vuông góc với dây BC tại M nên $MB = MC$.

Xét tứ giác OCAB ta có: $MO = MA$ (gt)

$$MB = MC \text{ (cmt).}$$

Vậy tứ giác OCAB là hình bình hành. Hơn nữa, hình bình hành OCAB có $OA \perp BC$ nên tứ giác OCAB là hình thoi.

b) - Vì tứ giác OCAB là hình thoi nên $OB = BA = OA = R$

Vậy $\triangle OAB$ là tam giác đều.

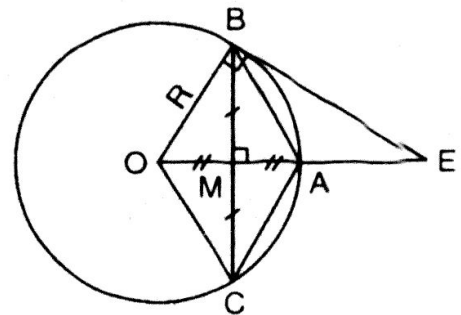
$$\text{Suy ra: } \widehat{AOB} = 60^\circ.$$

- Trong $\triangle OBE$ vuông tại B, ta có:

$$BE = OB \cdot \tan \widehat{AOB}$$

$$\text{Hay } BE = R \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } BE = R\sqrt{3}.$$



§6. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

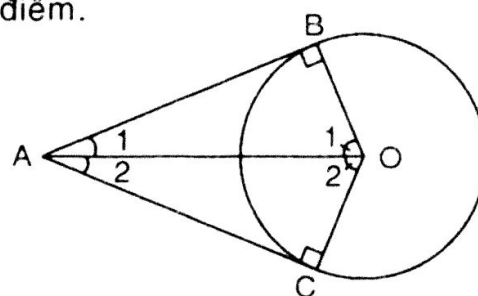
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

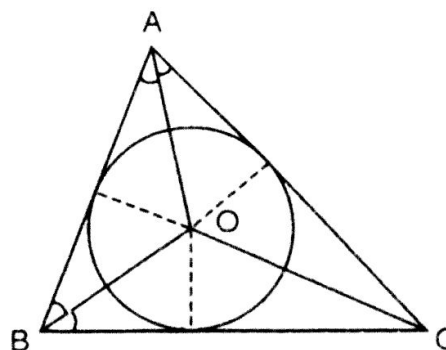
- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

GT	(O)
	AB, AC là tiếp tuyến
KL	$AB = AC$ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$



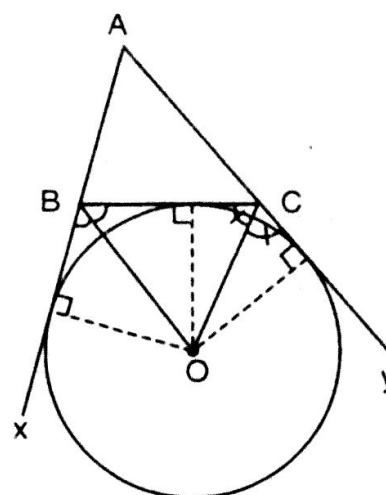
2. Đường tròn nội tiếp trong tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của hai trong ba đường phân giác trong của tam giác.



3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác hai góc ngoài tại B và C của tam giác, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác góc ngoài tại B (hoặc C). Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.



II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Từ một điểm A ở ngoài đường tròn tâm O, kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B và C là tiếp điểm). Chứng minh rằng:

- 1) $AB = AC$
- 2) AO là đường phân giác của góc BAC và OA là đường phân giác của góc BOC.
- 3) AO là đường trung trực của BC.

Giải

- 1) Chứng minh $AB = AC$

Vì AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên:

$$AB \perp OB \text{ và } AC \perp OC.$$

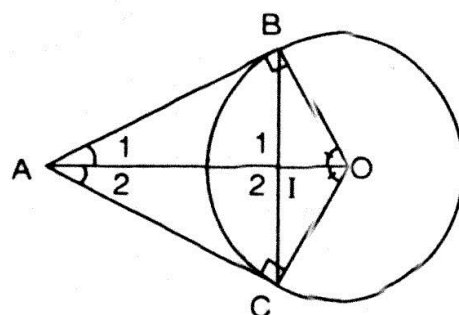
Xét hai tam giác vuông ABO và ACO ta có:

AO : cạnh chung

$$OB = OC = R$$

$$\text{Vậy } \triangle ABO = \triangle ACO$$

$$\text{Suy ra } AB = AC.$$



- 2) - Vì $\triangle ABO = \triangle ACO$ nên: $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$

Vậy AO là đường phân giác của góc BAC

- Vì $\triangle ABO = \triangle ACO$ nên: $\widehat{BOA} = \widehat{COA}$

Vậy OA là đường phân giác của góc BOC.

- 3) Xét hai tam giác ABI và ACI, ta có: $AB = AC$

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$

AI : cạnh chung.

$$\text{Vậy } \triangle ABI = \triangle ACI$$

$$\text{Vì } \widehat{I_1} \text{ và } \widehat{I_2} \text{ là hai góc kề bù} \Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{I_2} = 90^\circ \quad (1)$$

$$\text{Và } IB = IC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra AO là đường trung trực của BC.

B. Bài tập căn bản

26. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng OA vuông góc với BC.

b) Vẽ đường kính CD. Chứng minh rằng BD song song với AO.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC, biết $OB = 2\text{cm}$, $OA = 4\text{cm}$.

27. Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), nó cắt các tiếp tuyến AB và AC theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng chu vi tam giác ADE bằng $2AB$.

28. Cho góc xAy khác góc bẹt. Tâm của các đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của góc xAy nằm trên đường nào?
29. Cho góc xAy khác góc bẹt, điểm B thuộc tia Ax. Hãy dựng đường tròn (O) tiếp xúc với Ax tại B và tiếp xúc với Ay.

Giải

26. a) Vì AB và AC là hai tiếp tuyến của (O) nên $AB = AC$.

Suy ra $\triangle ABC$ cân tại A.

Ta còn có AO là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ của tam giác cân ABC nên AO cũng là đường cao.

Vậy $AO \perp BC$.

- b) Gọi I là giao điểm của AO với BC.

Ta có $\triangle IBA = \triangle ICA$ (ch-gn)

$$\Rightarrow IB = IC$$

Trong tam giác BCD ta có:

$$\left. \begin{array}{l} IB = IC \\ OC = OD \end{array} \right\} \Rightarrow OI \text{ là đường trung bình của } \triangle BCD$$

Nên $IA \parallel BD$ hay $AO \parallel BD$

Vậy $AO \parallel BD$ (đpcm)

- c) Vì AB là tiếp tuyến của (O) với B là tiếp điểm nên $AB \perp OB$ và $AB = AC$. Vậy $\triangle OAB$ vuông tại B.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông OAB, ta có:

$$AO^2 = AB^2 + BO^2 \Rightarrow AB^2 = AO^2 - BO^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

- Trong tam giác vuông OAB ta có:

$$\sin \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OAB} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{OAB} = 2.30^\circ = 60^\circ$$

- Tam giác ABC cân tại A và có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ là tam giác đều.

$$\text{Suy ra } AB = BC = CA = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

27. Theo đề bài ta có AB và AC là hai tiếp tuyến của (O) nên:

$$AB = AC$$

và BD và DM là hai tiếp tuyến với đường tròn (O) nên:

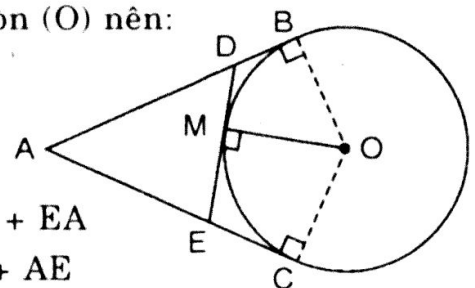
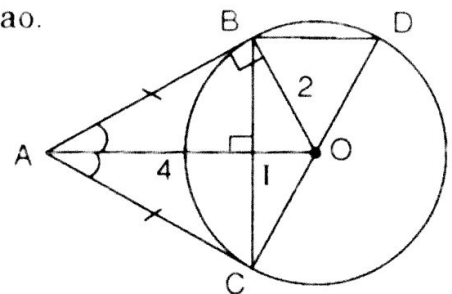
$$DB = DM$$

Tương tự: $EM = EC$

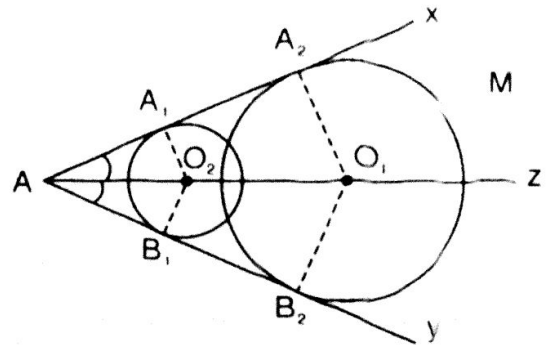
Ta có chu vi tam giác ADE bằng:

$$\begin{aligned} AD + DE + EA &= AD + DM + ME + EA \\ &= AD + DB + EC + AE \\ &= AB + AC = 2AB \end{aligned}$$

Vậy chu vi $\triangle ABC = 2AB$.

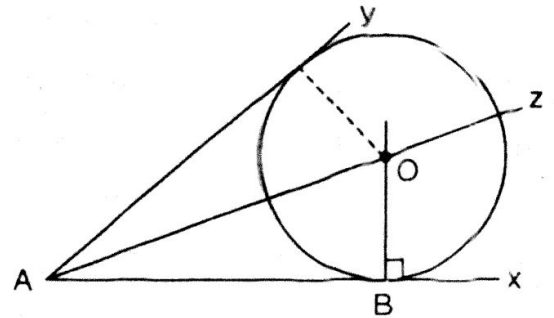


28. Gọi O là tâm của đường tròn bất kì tiếp xúc với hai cạnh Ax, Ay của $\widehat{xAy}$. Khi đó, khoảng cách từ O đến hai cạnh Ax, Ay đều bằng nhau. Vậy tâm O các đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của góc xAy nằm trên tia phân giác của góc xAy .



29. Giả sử bài toán được dựng xong:
Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với Ax tại B và tiếp xúc với Ay .

Dựng tia phân giác Az của góc xAy .
Qua $B \in Ax$, dựng đường vuông góc với Ax cắt Az tại O . Vậy O là tâm của đường tròn cần dựng.



Chứng minh: Vì tâm O của đường tròn nằm trên đường phân giác Az của $\widehat{xAy}$ nên đường tròn (O) tiếp xúc với Ax tại B và tiếp xúc với tia Ay

Luyện tập

30. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB (đường kính của một đường tròn chia đường tròn đó thành hai nửa đường tròn). Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua một điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Ax và By theo thứ tự ở C và D . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{COD} = 90^\circ$

b) $CD = AC + BD$

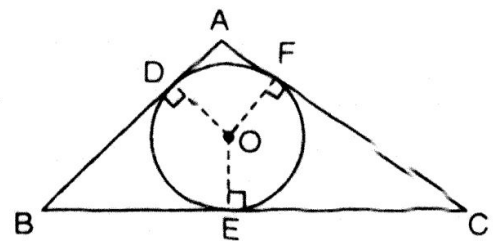
c) Tích $AC \cdot BD$ không đổi khi điểm M di chuyển trên nửa đường tròn.

31. Trên hình bên, tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O) .

a) Chứng minh rằng:

$$2AD = AB + AC - BC$$

b) Tìm các hệ thức tương tự như hệ thức ở câu a)



32. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn bán kính 1cm . Diện tích của tam giác ABC bằng:

A) 6cm^2 ;

B) $\sqrt{3}\text{cm}^2$;

C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$;

D) $3\sqrt{3}\text{cm}^2$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

30. a) Theo đề bài, ta có:

CM và CA là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên OC là tia phân giác của góc AOM.

Tương tự, OD là tia phân giác của góc BOM.

Vì OC và OD là hai tia phân giác của hai góc kề bù AOM và BOM nên $OC \perp OD$. Vậy $\widehat{COD} = 90^\circ$.

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn, ta có:

$$CM = AC \text{ và } MD = BD \quad (1)$$

$$\text{Mà } CD = CM + MD = AC + BD$$

$$\text{Vậy } CD = AC + BD \text{ (đpcm)}$$

c) Chứng minh tích $AC \cdot BD =$ không đổi.

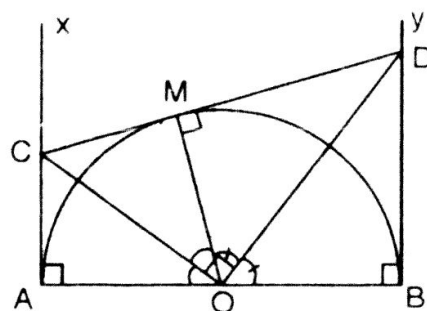
$$\text{Từ (1), ta có: } AC \cdot BD = CM \cdot MD \quad (2)$$

Xét tam giác vuông COD ($\widehat{O} = 90^\circ$), ta có:

$$OM^2 = CM \cdot MD$$

$$\text{hay } CM \cdot MD = R^2 \text{ (R là bán kính đường tròn (O))}$$

Vậy $AC \cdot BD = R^2$ (không đổi) khi điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (O).



31. a) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn, ta có:

$$\begin{aligned} AB + AC - BC &= (AD + DB) + (AF + FC) - (BE + EC) \\ &= (AD + AF) + (DB - BE) + (FC - EC) \quad (*) \end{aligned}$$

Mà $BD = BE$; $FC = EC$ thay vào (*), ta được:

$$\begin{aligned} AB + AC - BC &= (AD + AF) + (DB - DB) + (FC - FC) \\ &= AD + AF = 2AD \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AB + AC - BC = 2AD \text{ (đpcm)}$$

b) Tìm các hệ thức tương tự:

$$BA + BC - AC = 2BE$$

$$\text{và } CA + CB - AB = 2CF$$

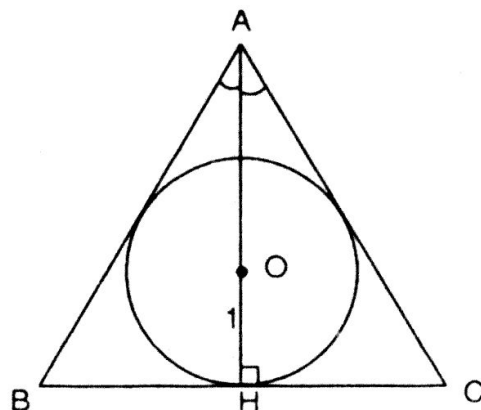
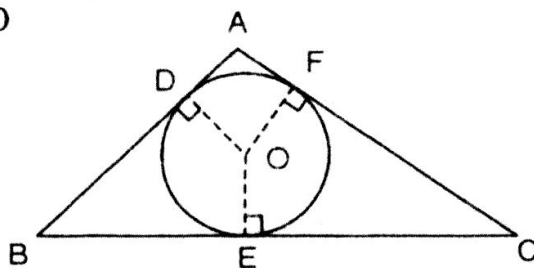
32. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC và H là tiếp điểm ($H \in BC$).

Đường phân giác AH của góc A cũng là đường cao của tam giác nên A, O, H thẳng hàng, ta có:

$$HB = HC$$

$$\widehat{HAC} = 30^\circ$$

$AH = 3OH = 3(\text{cm})$ (Vì O là giao điểm 3 đường phân giác của 3 góc trong tam giác



ABC, mà trong tam giác đều 3 đường phân giác cũng là 3 đường trung tuyến nên $AH = 3OH$).

Trong tam giác vuông HAC, ta có:

$$HC = AH \cdot \tan 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2HC \cdot AH = HC \cdot AH = \sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$

Vậy $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$

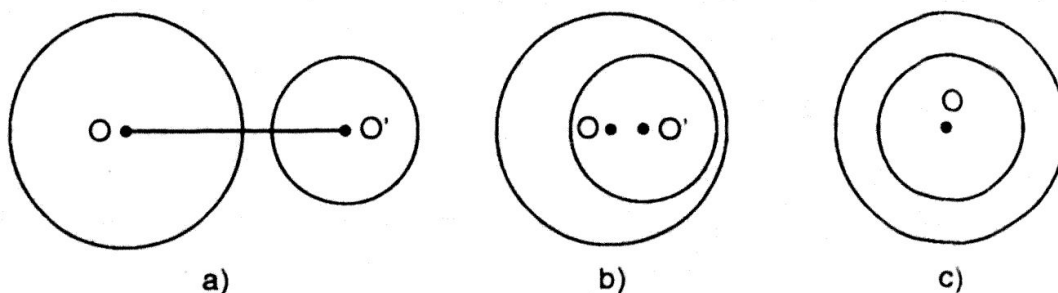
Do đó ta chọn câu D.

§7-§8. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

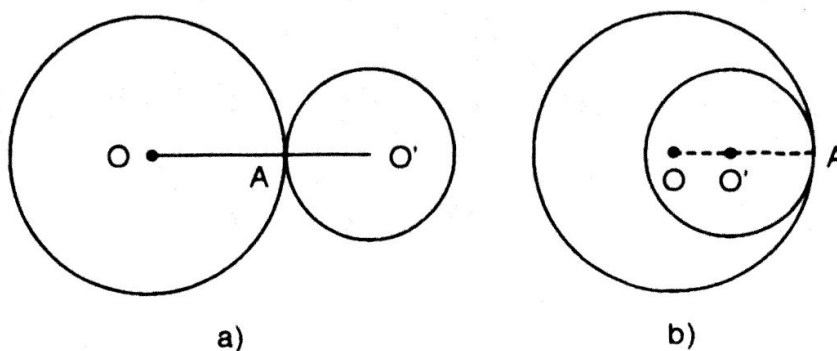
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn

- Hai đường tròn không có điểm chung gọi là hai đường tròn không giao nhau.
- Hai đường tròn chỉ có một điểm chung gọi là hai đường tròn tiếp xúc nhau. Điểm chung đó gọi là tiếp điểm.
- Hai đường tròn có hai điểm chung gọi là hai đường tròn cắt nhau. Hai điểm chung đó gọi là hai giao điểm. Đoạn thẳng nối hai điểm đó gọi là dây chung.



Hình 1

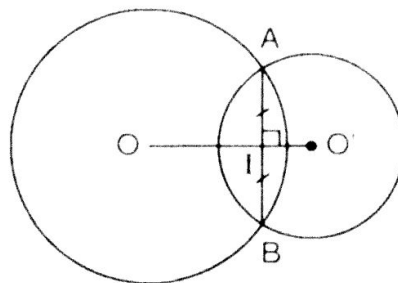


Hình 2

2. Tính chất đường nối tâm

Định lý Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm vuông góc với dây chung và đi qua trung điểm của dây chung.

GT	(O) và (O')
	cắt nhau tại A và B
KL	1/ $OO' \perp AB$
	2/ $IA = IB$



3. Hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính:

Vị trí tương đối của hai đường tròn (O; R) và (O'; r) ($R \geq r$)	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau: - Tiếp xúc ngoài - Tiếp xúc trong	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r > 0$
Hai đường tròn không giao nhau: - Ở ngoài nhau - (O) đựng (O')	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho hai đường tròn đồng tâm (O) và một đường tròn (O') tiếp xúc với cả hai đường tròn tại A và B.

- Chứng minh rằng 4 điểm A, B, O, O' thẳng hàng.
- Tính bán kính của đường tròn tâm (O') khi bán kính của hai đường tròn đồng tâm là 5cm và 9cm.

Giải

- Vì (O; OA) và (O'; O'A) tiếp xúc ngoài tại A nên:

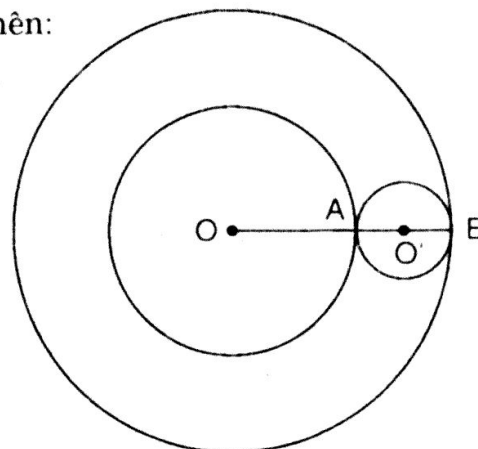
$$OO' = OA + AO'$$

Vậy ba điểm O, A, O' thẳng hàng (1).

Vì (O; OB) và (O'; OB) tiếp xúc trong tại B, nên: $OO' = OB - O'B$

Vậy ba điểm O, O', B thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm O, A, O', B thẳng hàng.



b) Giả sử $OB = 9\text{cm}$; $OA = 5\text{cm}$

Ta có: $OO' = OB - O'B$

hay $OA + O'A = OB - O'B$ (với $O'A = O'B$)

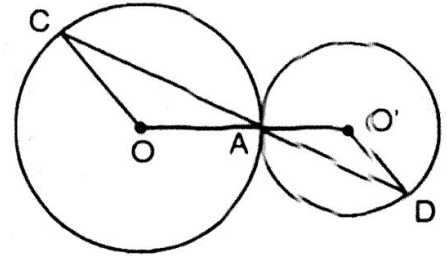
$$\Rightarrow 2O'A = OB - OA = 9 - 5 = 4 \Rightarrow O'A = 2 (\text{cm}).$$

Vậy bán kính đường tròn nhỏ là 2cm .

B. Bài tập căn bản

33. Trên hình bên, hai đường tròn tiếp xúc nhau tại A.

Chứng minh rằng $OC \parallel O'D$.



34. Cho hai đường tròn $(O; 20\text{cm})$ và $(O'; 15\text{cm})$ cắt nhau tại A và B. Tính đoạn nối tâm OO' , biết rằng $AB = 24\text{cm}$. (Xét hai trường hợp: O và O' nằm khác phía đối với AB; O và O' nằm cùng phía đối với AB).

35. Điền vào các ô trống trong bảng, biết rằng hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ có $OO' = d$, $R > r$.

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d, R, r
$(O; R)$ đựng $(O'; r)$		
		$d > R + r$
Tiếp xúc ngoài		
		$d = R - r$
	2	

36. Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') có đường kính OA.

a) Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C. Chứng minh rằng $AC = CD$.

37. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Dây AB của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C và D. Chứng minh rằng $AC = BD$.

Giải

33. Xét $\triangle OAC$, ta có: $OC = OA =$ bán kính (O)

Vậy $\triangle OAC$ cân tại O

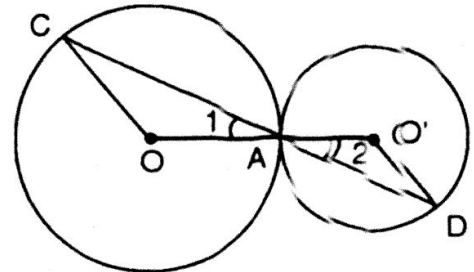
Suy ra $\hat{C} = \hat{A}_1$ (1)

Tương tự, $\triangle O'AD$ cân tại O'

Suy ra: $\hat{A}_1 = \hat{D}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\hat{C} = \hat{D}$ và $\hat{C}, \hat{D}$ là hai góc so le trong.

Suy ra $OC \parallel O'D$ (đpcm).



34. Gọi I là giao điểm của OO' và AB. Ta có:

$$OO' \perp AB \text{ và } IA = IB = \frac{AB}{2} = 12$$

* Trường hợp điểm D nằm giữa A và B.

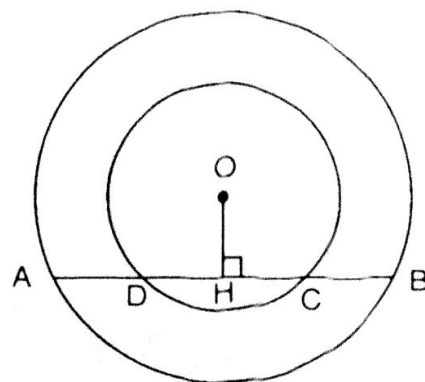
Kẻ $OH \perp CD$, ta có:

$$HA = HB \text{ và } HC = HD$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$AH + HC = BH + HD$$

$$\text{hay } AC = BD \text{ (đpcm)}$$



Luyện tập

38. Điền các từ thích hợp vào chỗ trống:

a) Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm tiếp xúc ngoài với đường tròn (O; 3cm) nằm trên...

b) Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm tiếp xúc trong với đường tròn (O; 3cm) nằm trên...

39. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

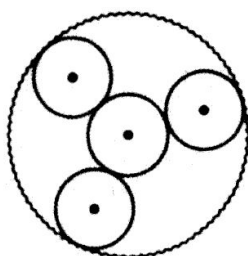
a) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

b) Tính số đo góc IOO' .

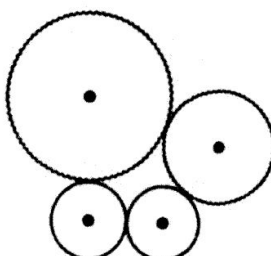
c) Tính độ dài BC biết $OA = 9\text{cm}$, $O'A = 4\text{cm}$.

40. **Đố:** Trên các hình a, b, c các bánh xe tròn có răng của được khớp với nhau. Trên hình nào hệ thống bánh răng chuyển động được?

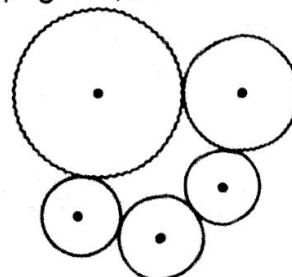
Trên hình nào hệ thống bánh răng không chuyển động được?



a)



b)



c)

Giải

38. a) đường tròn (O; 4cm).

b) đường tròn (O; 2cm).

39. a) Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

Đối với (O) : $IA = IB$

Đối với (O') : $IA = IC$

Suy ra: $IA = IB = IC$

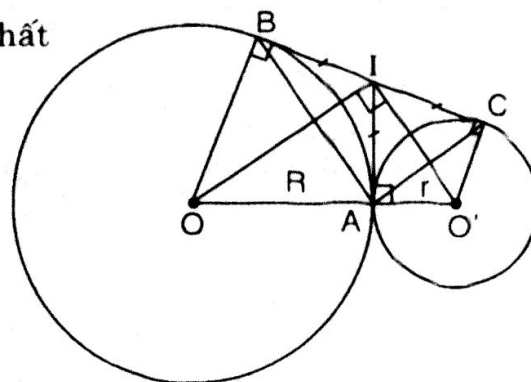
Xét tam giác ABC, ta có: $IB = IC$

nên AI là đường trung tuyến

và $IA = IB = IC$

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại A. Suy ra $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

b) Ta có IO, IO' là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\widehat{BIA}$ và $\widehat{AIC}$ nên $IO \perp IO'$. Vậy $\widehat{OIO'} = 90^\circ$.



- c) Tam giác OIO' vuông tại I và có đường cao IA . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OIO' , ta có:

$$IA^2 = OA \cdot O'A = 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow IA = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } BC = 2IA = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (cm)}.$$

40. * Trả lời: Trên các hình a, b hệ thống bánh răng chuyển động được.

Trên hình c hệ thống bánh răng không chuyển động được.

- * Giải thích: Chúng ta biết rằng: Nếu hai đường tròn tiếp xúc ngoài thì hai bánh xe quay theo chiều khác nhau (một bánh xe quay theo chiều kim đồng hồ thì bánh xe kia quay ngược chiều kim đồng hồ). Nếu hai đường tròn tiếp xúc trong thì hai bánh xe quay theo chiều như nhau. Do đó chỉ có hệ thống bánh răng xe trên hình a, b là chuyển động được. Còn hệ thống bánh răng xe trên hình c là không chuyển động được.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. Tóm tắt kiến thức cần nhớ

* Các định nghĩa

1. Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R .
2. Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

* Các định lý

1. a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.
b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.
2. a) Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
b) Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.
3. Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.
4. Trong một đường tròn:
a) Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
b) Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.
5. Trong một đường tròn:
a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm, hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
b) Dây lớn hơn thì gần tâm hơn, dây gần tâm hơn thì lớn hơn.
6. a) Nếu một đường thẳng là một tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
b) Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

7. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:
- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
 - Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
 - Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.
8. Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

II. Bài tập căn bản

A. Câu hỏi (Các em tự trả lời các câu hỏi giáo khoa).

B. Bài tập

41. Cho đường tròn (O) có đường kính BC, dây AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF.
- Hãy xác định vị trí tương đối của các đường tròn: (I) và (O), (K) và (O), (I) và (K).
 - Tứ giác AEHF là hình gì? Vì sao?
 - Chứng minh đẳng thức $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
 - Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).
 - Xác định vị trí điểm H để EF có độ dài lớn nhất?
42. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A, BC là tiếp tuyến chung ngoài, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt BC ở điểm M. Gọi E là giao điểm của OM và AB, F là giao điểm của O'M và AC. Chứng minh rằng:
- Tứ giác AEMF là hình chữ nhật.
 - $ME \cdot MO = MF \cdot MO'$.
 - OO' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là BC.
 - BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là OO'.
43. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) cắt nhau tại A và B ($R > r$). Gọi I là trung điểm của OO'. Kẻ đường thẳng vuông góc với IA tại A, đường thẳng này cắt các đường tròn (O; R) và (O'; r) theo thứ tự tại C và D (khác A).
- Chứng minh rằng $AC = AD$.
 - Gọi K là điểm đối xứng với điểm A qua điểm I. Chứng minh rằng KB vuông góc với AB.

Giải

41. a) Vị trí tương đối của các đường tròn.
(Xác định mối quan hệ giữa d, R, r).

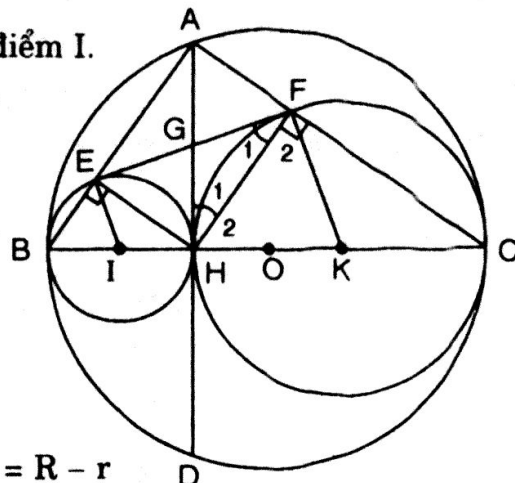
* (I) và (O):

Ta có: $OI = OB - IB$ hay $d = R - r$

Vậy (I) tiếp xúc trong với (O) tại B.

* (K) và (O): Ta có: $OK = OC - KC$ hay $d = R - r$

Vậy (K) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại (C)



* (I) và (K): Ta có: $IK = IH + HK$ hay $d = R + r$

Vây (I) và (K) tiếp xúc ngoài tại H.

b) Xét tứ giác EAFH ta có: $\hat{E} = \hat{F} = 90^0$ (gt)

$\widehat{A} = 90^0$ (vì ΔABC nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính BC).

Tứ giác EAFH có $\hat{E} = \hat{F} = \hat{A} = 90^0$. Vậy EAFH là hình chữ nhật.

c) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB, ta có:

$$AH^2 = AE \cdot AB \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHC, ta có:

$$AH^2 = AF.AC \quad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta có: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ (đpcm)

d) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K).

* Gọi G là giao điểm của EF và AH

– Ta có EAFH là hình chữ nhật nên $AH = EF$

Vì G là giao điểm của hai đường chéo nên suy ra được $GH = GF$.

Vậy ΔHGF là tam giác cân tại G. Suy ra $\widehat{GFH} = \widehat{GHF}$ (1).

- Tam giác KHF là tam giác cân tại K nên $\widehat{FKH} = \widehat{HFK}$ (2)

Cộng (1) và (2) theo vế, ta có: $\widehat{GFH} + \widehat{HFK} = \widehat{GHF} + \widehat{FHK} = 90^0$

Vậy $\widehat{GFK} = 90^0$

Suy ra $EF \perp KF$ hay EF là tiếp tuyến của đường tròn (K) (*)

* Chứng minh tương tự: ΔGEH là tam giác cân tại E nên $\widehat{GEH} = \widehat{GHE}$

$\triangle EIH$ là tam giác cân tại I nên $\widehat{HEI} = \widehat{EHI}$

Cộng vế theo vế, ta có: $\widehat{GEH} + \widehat{HEI} = \widehat{GHE} + \widehat{EHI} = 90^0$ hay $\widehat{GEI} = 90^0$

Vậy $EF \perp IE$ hay EF là tiếp tuyến của đường tròn (I) (**).

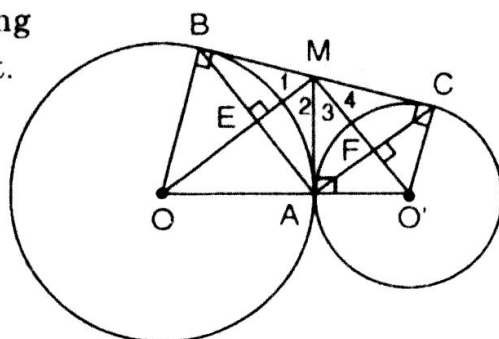
Từ (*) và (**) chứng tỏ rằng EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

e) Vì đường tròn (O) cố định nên bán kính OA có độ dài không đổi.

Vì tứ giác EAFH là hình chữ nhật nên: $EF = AH < OA$ (không đổi)

Suy ra: $EF = OA$ khi và chỉ khi H trùng với O . Mà $H \equiv O$ khi và chỉ khi AD đi qua O , nghĩa là dây AD trở thành đường kính AD .

Vậy khi dây AD vuông góc với đường kính BC tại O thì EF có độ dài lớn nhất.



42 a) Chứng minh AEMF là hình chữ nhật:

– Vì MA và MB là hai tiếp tuyến của (O) nên MO là tia phân

giác của $\widehat{AMB} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$

và $ME \perp AB$ hay $\widehat{AEM} = 90^0$.

Chứng minh tương tự, ta có: $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4$ và $\widehat{AFM} = 90^\circ$

- Theo chứng minh trên ta có ME và MF là hai đường phân giác của hai góc kề bù $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ nên $ME \perp MF$ hay $\widehat{EMF} = 90^\circ$.
Tứ giác AEMF có ba góc vuông. Vậy AEMF là hình chữ nhật.

b) Chứng minh: $ME \cdot MO = MF \cdot MO'$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM, ta có: $ME \cdot MO = MA^2$ (1)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MAO', ta có: $MF \cdot MO' = MA^2$ (2)

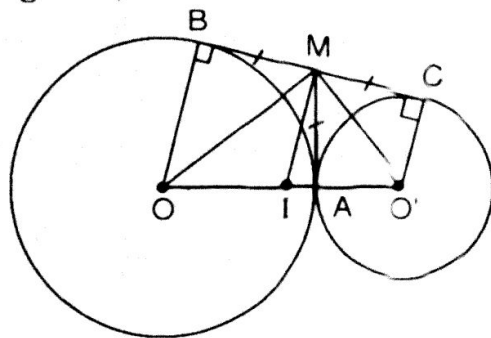
So sánh (1) và (2), ta được: $ME \cdot MO = MF \cdot MO'$ (đpcm)

c) OO' là tiếp tuyến của đường tròn (M)

- Theo tính chất của các tiếp tuyến với đường tròn, ta có: $MB = MC = MA$

Như vậy ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn đường kính BC có tâm là điểm M, bán kính MA.

- Ta còn có MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') nên $MA \perp OO'$. Do đó, OO' là tiếp tuyến của đường tròn (M; BC).



d) BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.

Gọi I là trung điểm của OO'. Vì $\triangle MOO'$ vuông tại M (tứ giác MEMO' là hình chữ nhật). MI là trung tuyến nên $IM = IO = IO'$.

Vậy I là tâm của đường tròn có đường kính OO' và IM là bán kính.

Ta còn có IM là đường trung bình của hình thang OBCO' nên $IM \parallel OE \parallel OC$.

Do đó: $IM \perp BC$.

Điều này chứng tỏ rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn (I; OO).

43. a) Chứng minh $AC = AD$

- Kẻ $OM \perp AC$

Theo tính chất đường kính vuông góc với một dây, ta có: $MA = MC$

Tương tự, kẻ $O'N \perp AD \Rightarrow NA = ND$

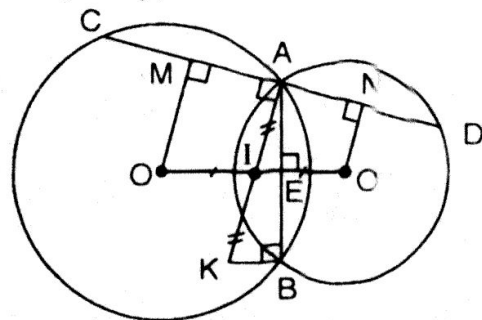
$$\left. \begin{array}{l} OM \perp AC \\ IA \perp CD \\ O'N \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow OM \parallel IA \parallel O'N$$

Vậy tứ giác OMNO' là hình thang vuông.

Ta có $IO = IO'$ (gt) và $IA \parallel OM$

Do đó IA là đường trung bình của hình thang OMNO'.

Suy ra $AM = AN$ hay $2AM = 2AN$ hay $AC = AD$ (đpcm).



b) Chứng minh $KB \perp AB$.

- Ta có OO' là đường nối tâm của (O) và (O')

Nên OO' là đường trung trực của AB. Suy ra $IE \perp AB$ và $EA = EB$.

- Ta có $IA = IK$ (do K là điểm đối xứng của A qua I) và $EA = EB$

Vậy IE là đường trung bình của tam giác AKB. Suy ra $IE \parallel KB$

Mà $IE \perp AB$. Suy ra $KB \perp AB$ (đpcm).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

- Chọn câu trả lời đúng.* Qua hai điểm A và B cho sẵn, ta dựng được bao nhiêu đường tròn?
(A) Vẽ được một và chỉ một đường tròn đi qua A và B.
(B) Vẽ được hai đường tròn đi qua A và B.
(C) Vẽ được vô số đường tròn đi qua A và B.
(D) Không vẽ được đường tròn nào đi qua A và B.
- Chọn câu trả lời đúng.* Nếu AB là một dây bất kì của đường tròn (O ; R) thì
(A) $AB = R$ (B) $AB > R$ (C) $AB < R$ (D) $AB \leq R$
- Chọn câu trả lời đúng.* Cho đường tròn (O ; R), điểm A nằm trong đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn sao cho trung điểm I của AB nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây cung CD vuông góc với OI tại I. Cho biết ACBD là hình gì?
(A) Hình thang cân (B) Hình bình hành
(C) Hình thoi (D) Hình chữ nhật.
- Chọn câu trả lời đúng.* Cho đường tròn (O), hai dây AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Cho biết $AB < CD$. So sánh MF và ME.
(A) $MF > ME$ (B) $MF < ME$ (C) $MF = ME$ (D) Không xác định được.
- Chọn câu trả lời sai.*
(A) Nếu một đường thẳng và một đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.
(B) Nếu khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.
(C) Nếu một đường thẳng và một đường tròn có hai điểm chung và vuông góc với bán kính đi qua một trong hai điểm đó thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.
(D) Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.
- Chọn câu trả lời đúng.* Cho tam giác ABC có chu vi bằng 30cm, diện tích bằng 45cm^2 . Vẽ đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Tính bán kính đường tròn đó.
(A) 3cm (B) 5cm (C) 6cm (D) 9cm.
- Chọn câu trả lời sai.* Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) ($R > r$).
(A) (O ; R) và (O' ; r) tiếp xúc ngoài khi $OO' = R + r$.
(B) (O ; R) và (O' ; r) tiếp xúc trong khi $OO' = R - r$.
(C) (O ; R) đựng (O' ; r) khi $OO' < R - r$.
(D) (O ; R) và (O' ; r) ngoài nhau khi $OO' < R + r$.
- Chọn câu trả lời đúng.*
(A) Hai đường tròn cắt nhau có một tiếp tuyến chung.
(B) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có hai tiếp tuyến chung ngoài.
(C) Hai đường tròn đồng tâm không có một tiếp tuyến chung nào.
(D) Hai đường tròn đựng nhau có một tiếp tuyến chung.

9. Chọn câu trả lời sai.

- (A) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có hai tiếp tuyến chung ngoài và một tiếp tuyến chung trong.
- (B) Hai đường tròn ngoài nhau có hai tiếp tuyến chung ngoài và hai tiếp tuyến chung trong.
- (C) Hai đường tròn cắt nhau có một tiếp tuyến chung ngoài.
- (D) Hai đường tròn tiếp xúc trong chỉ có một tiếp tuyến chung.

10. Chọn câu trả lời đúng. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Gọi AB là dây cung bất kì của đường tròn nhỏ. Đường thẳng AB cắt đường tròn lớn tại I và K. (A nằm giữa I và B). So sánh độ dài AI và BK.

- (A) $AI = KB$ (B) $AI > BK$ (C) $AI < BK$ (D) Không xác định được.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

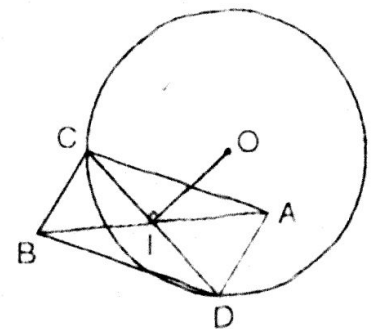
1. Qua hai điểm cho sẵn, ta dựng được vô số đường tròn, tâm của các đường tròn này thuộc đường thẳng trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đã cho. Chọn câu C.

2. Chọn câu D.

3. $OI = CD \Rightarrow I$ là trung điểm của CD

Theo giả thiết I là trung điểm của AB

Suy ra ACBD là hình bình hành có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Chọn câu B.



4. Ta có : $\triangle OEM$ và $\triangle OFM$ là các tam giác vuông.

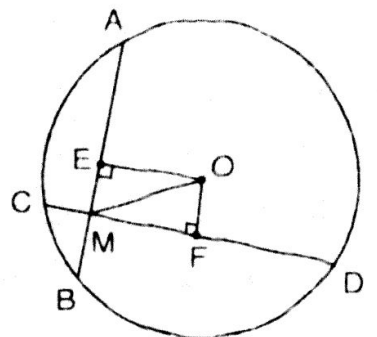
$$ME^2 + EO^2 = OM^2$$

$$MF^2 + FO^2 = OM^2$$

$$\Rightarrow ME^2 + EO^2 = MF^2 + FO^2$$

$$\text{Mà } AB < CD \Rightarrow OE > FO \Rightarrow OE^2 > FO^2$$

$$\Rightarrow ME^2 < MF^2 \Rightarrow ME < MF. \text{ Chọn câu A.}$$



5. Chọn câu C.

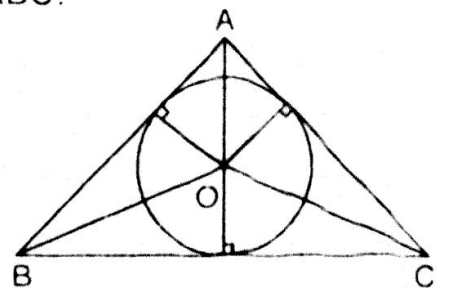
6. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r$$

$$= \frac{1}{2} (AB + AC + BC) \cdot r = \frac{1}{2} C_{ABC} \cdot r$$

$$\Leftrightarrow 45 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot r \Rightarrow r = 3\text{cm. Chọn câu A.}$$



7. Chọn câu D.

8. Chọn câu C.

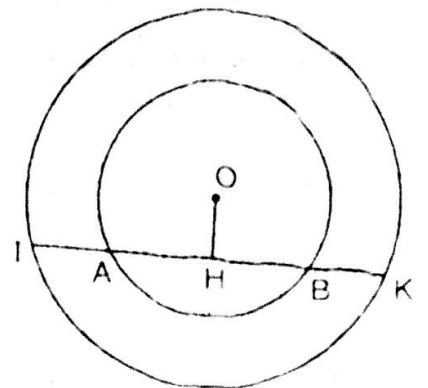
9. Chọn câu C.

10. (Hình bên) Kẻ $OH \perp AB$. Theo tính chất đường kính vuông góc với dây cung, ta có :

$$HA = HB ; IH = HK$$

$$\text{Suy ra : } IH - HA = HK - HB \Leftrightarrow IA = KB.$$

Chọn câu A.



MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I. CĂN BẬC HAI - CĂN BẬC BA

§1	Căn bậc hai	5
§2	Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	7
§3	Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương	12
§4	Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương	17
§6	Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai	22
§7	Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai (tiếp theo)	25
§8	Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai	31
§9	Căn bậc ba	36

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

§1	Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số	47
§2	Hàm số bậc nhất	52
§3	Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)	55
§4	Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau	60
§5	Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)	64

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1	Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông	76
§2	Tỉ số lượng giác của góc nhọn	82
§3	Bảng lượng giác và máy tính bỏ túi	88
§4	Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông	90

Chương II. ĐƯỜNG TRÒN

§1	Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn	103
§2	Đường kính và dây của đường tròn	108
§3	Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây	110
§4	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	113
§5	Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn	115
§6	Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau	119
§7 8.	Vị trí tương đối của hai đường tròn	124

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại : (04) 3971 4896; (04) 3972 4770 - Fax : (04) 3971 4899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập : PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập : Quốc Trung

Sửa bài : Đặng Thị Bình

Trình bày : Diệu Tâm

Bìa : Công ty Sách Hoa Hồng

Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP TOÁN 9 - Tập một

Mã số : 1L-155ĐH2010

In 7.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty Cổ Phần In Tiến Giang.

Số xuất bản: 290-2010/CXB/09-50/ĐHQGHN ngày 01/4/2010.

Quyết định xuất bản số : 155LK-TN/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.