

PHAN DOÃN THOẠI (Chủ biên)
CHU TUẤN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 8

THEO CHỦ ĐỀ
PHẦN HÌNH HỌC

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHAN DOÃN THOẠI (Chú biên) – CHU TUẤN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 8

THEO CHỦ ĐỀ

PHẦN HÌNH HỌC

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Chương trình toán trung học cơ sở được trình bày theo các chủ đề. Trong mỗi chủ đề có quy định chuẩn (mức độ cần đạt) về kiến thức và kỹ năng tương đối chi tiết. Do những quy định về thời lượng dạy học, mỗi chủ đề được phân phối trong một hoặc nhiều bài học của SGK. Để giúp học sinh THCS nắm vững kiến thức và phương pháp giải toán, chúng tôi biên soạn bộ sách :

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN THEO CHỦ ĐỀ

Bộ sách gồm 8 quyển. Mỗi lớp hai quyển, một quyển bao gồm các chủ đề Số học (lớp 6), Đại số (lớp 7, 8, 9), một quyển bao gồm các chủ đề Hình học.

Sách được phân chia thành các chương với tên chương như trong SGK. Mỗi chương gồm các chủ đề. Mỗi chủ đề gồm hai phần :

A. Kiến thức cần nhớ. Phần này trình bày tóm tắt những kiến thức cơ bản và nâng cao cần thiết cho việc giải toán.

B. Các dạng bài tập cơ bản. Dựa vào những nội dung cơ bản của từng chủ đề, chúng tôi đưa ra các dạng bài tập để thực hành và luyện tập các nội dung phục vụ cho chủ đề. Trong mỗi dạng bài tập có ba nội dung chính sau đây : **Phương pháp giải; Ví dụ; Bài tập.** Mỗi phương pháp giải đưa ra một số ví dụ minh họa tiêu biểu.

Hệ thống bài tập, về cơ bản gồm hai loại : Loại 1, áp dụng trực tiếp phương pháp và các ví dụ nêu trên; Loại 2, gồm các bài tập vận dụng một cách tổng hợp các phương pháp đó.

Các tác giả đã dành nhiều thời gian để sắp xếp các chủ đề theo thứ tự logic của chương trình; lựa chọn các ví dụ và bài tập từ dễ đến khó và cố gắng đáp ứng nhu cầu nắm vững kiến thức cơ bản của đa số học sinh, đồng thời hướng học sinh đi sâu (ở một số bài tập có dấu ***), phát triển những kiến thức được truyền thụ và rèn luyện kỹ năng.

Mặc dù bộ sách đã được các tác giả nhiều năm kinh nghiệm giảng dạy dày công biên soạn nhưng cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, rất mong được bạn đọc góp ý.

Mọi thư từ góp ý xin gửi về :

P. Khai thác và Quản lý Đề tài – Công ty CP Sách Giáo dục tại Tp Hà Nội.

Địa chỉ : Lô B1 DN 14/3 – Nguyễn Khánh Toàn – Quan Hoa – Cầu Giấy – Hà Nội.

Hà Nội, ngày 01 tháng 01 năm 2011.

Các tác giả

MỞ ĐẦU

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC

1. Định lý là gì ?

Một khẳng định (hoặc phán đoán) suy ra từ những khẳng định được coi là đúng trong hình học gọi là một định lý.

Trong hình học lại có nhiều khẳng định cần chứng minh thường gọi là bài tập, thực ra cũng là định lý. Những định lý trong SGK có ghi lại rõ ràng và đầy đủ phần chứng minh ta thường dựa vào đây để chứng minh những định lý và bài tập khác được gọi là *định lý cơ bản*. Những định lý khi chứng minh các định lý và bài tập khác ít dùng đến, dành cho người học luyện tập, chứng minh thì gọi là bài tập. Trong SGK Toán 8, Tập 1 (tr. 70) hai định lý hình học quan trọng được ghi là nhận xét.

2. Chứng minh là gì ?

Quá trình xác nhận tính chân thực hoặc bác bỏ một khẳng định nào đó dựa vào các khẳng định đã biết từ trước gọi là phép chứng minh.

3. Chứng minh như thế nào ?

Chứng minh một định lý là tìm ra một dãy các khẳng định $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ thoả mãn hai tính chất sau đây :

- Mỗi khẳng định của dãy đó là : tiên đề, định nghĩa, giả thiết, hay một định lý đã học hoặc là suy diễn từ những khẳng định có trước.
- Khẳng định cuối cùng của dãy là định lý cần chứng minh.

Như vậy, trong quá trình chứng minh ta thường dùng một chuỗi các phép suy luận.

Thông thường có hai phép chứng minh : Phép chứng minh trực tiếp và phép chứng minh gián tiếp.

a) Chứng minh trực tiếp :

Phép tổng hợp : Nếu gọi A là khẳng định cần chứng minh và $A_1, A_2, \dots, A_n$ là tiên đề, định lý, giả thiết.... thì cấu trúc của phép tổng hợp như sau :

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n = A.$$

Phép chứng minh này thường dùng để viết lời giải.

Phép tổng hợp được sử dụng trong mọi lĩnh vực của toán học. Các định lý trong SGK được chứng minh bằng phép tổng hợp, mặc dù việc tìm ra phép chứng minh đó thường phải dùng phép phân tích.

Phép phân tích đi lên (hay giật lùi) :

Sơ đồ tổng quát như sau : $A = A_n \Leftarrow A_{n-1} \Leftarrow \dots \Leftarrow A_2 \Leftarrow A_1$.

Như vậy muốn chứng minh $A = A_n$ ta phải chứng minh A_{n-1} muốn chứng minh A_{n-1} ta phải chứng minh $\dots A_2$ và cuối cùng muốn chứng minh A_2 ta phải chứng minh A_1 . Khi A_1 là điều đã biết (tiên đề, định lý, định nghĩa, giả thiết $\dots$) thì ta dừng lại.

Phép phân tích đi lên thường dùng để tìm kiếm lời giải.

Khi dùng phép tổng hợp để chứng minh thì mỗi bước suy luận đều rõ ràng, dễ hiểu. Nhưng nếu không chuẩn bị trước bằng phép phân tích đi lên thì sẽ không giải đáp được thắc mắc là tại sao phải tiến hành như thế. Vì vậy để tìm kiếm được lời giải thì trước hết phải áp dụng phép phân tích. Phép tổng hợp và phép phân tích liên quan mật thiết với nhau và không tách rời nhau được.

Phân tích có nghĩa là : tách ra các thành phần hoặc chia ra từng bộ phận.

b) Chứng minh gián tiếp (chứng minh bằng phản chứng) :

Trong nhiều trường hợp chứng minh trực tiếp quá khó hoặc không chứng minh được ta dùng phép phản chứng. Phép phản chứng có hiệu quả khi gặp hai dạng sau : Chứng minh tồn tại một tính chất, một yếu tố nào đó hoặc chứng minh không tồn tại một tính chất, một yếu tố nào đó. Nội dung của phép phản chứng để chứng minh phán đoán A là đúng tóm lược gồm hai bước sau :

Bước 1 : Giả sử điều ngược lại với A là đúng.

Bước 2 : Dùng các tiên đề, định lý, định nghĩa, giả thiết, $\dots$ để suy ra điều giả sử ở trên mâu thuẫn với các điều đã biết. Từ đó khẳng định giả sử ở trên là sai. Vậy A đúng.

4. Một số điều cần chú ý khi chứng minh

a) Khi chứng minh một định lý được phát biểu dưới dạng tổng quát bằng ngôn ngữ thông thường, trước hết ta phải chuyển sang ngôn ngữ hình học bằng cách xét một tam giác ABC, tứ giác ABCD, hình thang ABCD... cụ thể. Sau đó phân biệt rõ giả thiết, kết luận (điều phải chứng minh).

b) Hình vẽ : là công cụ đắc lực giúp cho việc chứng minh.

Đối với bài toán hình học, nói chung là phải vẽ hình. Vì hình vẽ làm hiện lên đồng thời các yếu tố và mối quan hệ giữa các yếu tố trong bài mà nếu không có hình vẽ thì ta khó hình dung hết được.

Khi vẽ hình cần lưu ý :

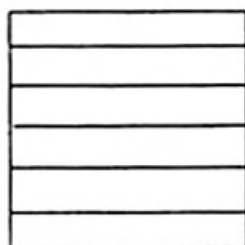
- Hình vẽ phải có tính tổng quát, không nên vẽ hình trong trường hợp đặc biệt vì như vậy dễ làm cho ta bị ngộ nhận. Chẳng hạn các đoạn thẳng không nên vẽ bằng nhau hay vuông góc hoặc song song với nhau, tam giác không nên vẽ vuông hay cân hoặc đều nếu như bài toán không đòi hỏi.
- Hình vẽ phải rõ, chính xác và dễ nhìn thấy những quan hệ, tính chất giữa các yếu tố mà bài toán đã cho. Có những trường hợp phải lựa chọn thứ tự vẽ các yếu tố trong bài.

Ngoài ra, để làm nổi bật vai trò của các đường, các góc trong hình vẽ ta có thể vẽ bằng *nét liền, nét đứt, nét đậm, nét nhạt hay tô màu*. Muốn có hình vẽ chính xác nên dùng lưới ô vuông (nhất là với học sinh lớp tám).

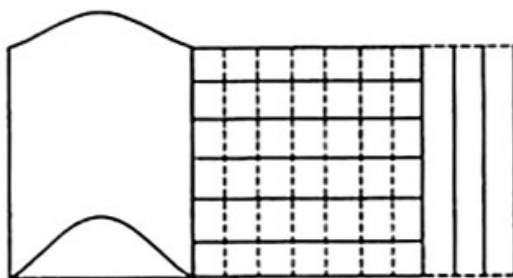
Cách tạo lưới ô vuông :

Bước 1 : Tô đậm dòng kẻ ngang của một tờ giấy vở bất kì (hình 1).

Bước 2 : Cài tờ giấy kẻ ngang dưới một tờ giấy vở ghi sao cho mép vở trùng với một dòng kẻ ngang bất kì. Tờ giấy kẻ ngang hợp với tờ giấy của vở ghi tạo thành một lưới ô vuông hoàn chỉnh (hình 2).



Hình 1



Hình 2

c) Khi chứng minh phải vẽ thêm đường phụ : Đa số các bài chứng minh hình học phải vẽ thêm đường phụ. Vẽ đường phụ nhằm bốn mục đích sau :

- Tạo ra một hình mới để áp dụng một định lý đặc biệt nào đó.
- Tạo ra hình mới mà giả thiết liên hệ với điều cần chứng minh.
- Tạo ra đoạn thẳng, góc, tam giác bằng hoặc gấp đôi, gấp ba.... đại lượng cho trước làm cầu nối.
- Biến đổi hình vẽ làm cho bài toán dễ chứng minh hơn.

Chú ý quan trọng : Khi vẽ thêm đường phụ phải tuân theo bảy bài toán dựng hình cơ bản (SGK Toán 8, Tập 1 – tr. 81, 82). Những đường không có trong phép dựng hình cơ bản tuyệt đối không được vẽ.

d) Kí hiệu : Có ý nghĩa hàng đầu giúp ta hiểu được bài toán.

Bởi vì với công dụng như tiếng nói, kí hiệu ví như một ngôn ngữ súc tích, rõ ràng, một quy tắc không hề có ngoại lệ như ngôn ngữ thông thường.

Nhờ có kí hiệu toán học ta có thể ghi lại các yếu tố, các đối tượng và mối liên quan giữa chúng một cách ngắn gọn, dễ thấy, dễ hiểu, dễ nhớ.

Khi chọn kí hiệu cần lưu ý :

Một kí hiệu phải có nội dung và dễ nhớ, tránh nhầm lẫn hoặc hiểu nước đôi. Không dùng một kí hiệu để chỉ hai đối tượng khác nhau. Chẳng hạn với $\triangle ABC$ thì A, B, C chỉ các đỉnh còn a, b, c chỉ độ dài các cạnh, không được kí hiệu ngược lại. $\triangle ABC = \triangle ADE$ thì tương ứng với $AB = AD$, $BC = DE$, $CA = EA$.

e) Sau khi chứng minh một khẳng định nào đó mà có một điều khác cũng cần chứng minh tương tự thì ta chỉ việc giới thiệu "*Chứng minh tương tự*" rồi viết kết quả ra.

g) Ba yêu cầu đối với lời giải một bài toán :

- Lời giải không có sai lầm;
- Lập luận phải có căn cứ;
- Lời giải không thiếu không thừa.

i) Cơ bản (tính từ) là tiếng Hán – Việt : Cơ là nền, bản là gốc.

Khi nói đến *cơ bản* là nhấn mạnh vào ý cốt yếu, tối thiểu, không có sẽ không xây dựng được cái gì. Như vậy để nắm vững phần hình học lớp 8 thì không những phải nhớ được các định lí cơ bản mà còn phải biết chứng minh chúng.

Muốn chứng minh định lí hình học tốt cần : *phân tích tốt, vẽ hình tốt, viết lời giải tốt.*

k) Kĩ thuật đại số hoá hình học :

Trong một bài toán hình học :

– Nếu cho những đại lượng bằng nhau thì ta đặt những đại lượng bằng nhau đó bằng biến mới.

– Nếu cho tỉ số của hai đoạn thẳng, chẳng hạn $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$ thì ta đặt $\begin{cases} AB = mt \\ CD = nt \end{cases}$

(với $t > 0$). Đưa bài toán hình học về đại số.

TỨ GIÁC

Chủ đề 1

TỨ GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kỳ hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của tứ giác (từ nay, khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi).

2. Tính chất

Chỉ có một tính chất về góc : Tổng các góc của một tứ giác bằng 360° .

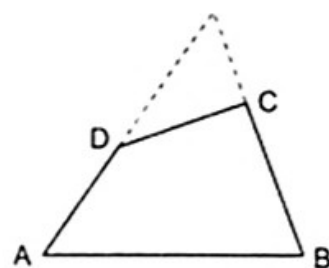
3. Dấu hiệu nhận biết

Theo định nghĩa.

4. Cách vẽ một tứ giác

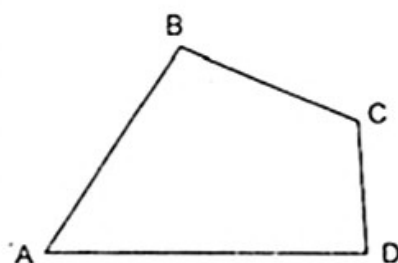
Có hai cách :

Cách 1 (hình 3a) : Cắt một tam giác bởi một cát tuyến không đi qua đỉnh.



Hình 3a

Cách 2 (hình 3b) : Vẽ hai tam giác, tam giác ABD trước để xác định ba đỉnh A, B, D. Sau đó vẽ tam giác thứ hai BDC để xác định nốt đỉnh C, đỉnh C phải thỏa mãn hai điều kiện, nằm khác phía với đỉnh A mà bờ là đường thẳng BD và không nằm trên hai đường thẳng AB, AD.



Hình 3b

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính góc của tứ giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

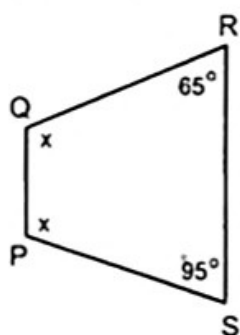
Sử dụng :

- Tính chất về góc của một tam giác, một tứ giác.
- Khái niệm : Hai góc bù nhau là hai góc có tổng bằng 180° .
- Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

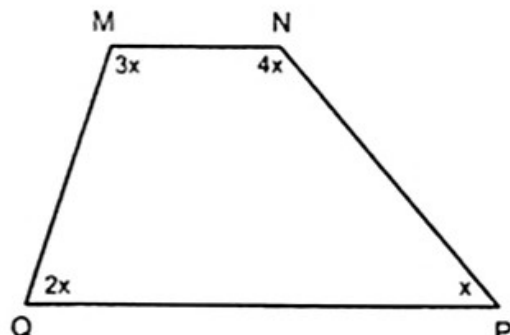
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm x ở hình 4a và hình 4b.

Lời giải (hình 4)



a)



Hình 4

b)

a) Áp dụng tính chất về góc cho tứ giác PQRS, ta được :

$$\begin{aligned}\widehat{P} + \widehat{Q} + \widehat{R} + \widehat{S} &= 360^\circ, \text{ hay } x + x + 65^\circ + 95^\circ = 360^\circ \\ \Leftrightarrow 2x + 160^\circ &= 360^\circ \Leftrightarrow x = 100^\circ.\end{aligned}$$

b) Áp dụng tính chất về góc vào tứ giác MNPQ ta được :

$$\begin{aligned}\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} &= 360^\circ, \text{ hay } 3x + 4x + x + 2x = 360^\circ \\ \Leftrightarrow 10x &= 360^\circ \Leftrightarrow x = 36^\circ.\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Góc kề bù với một góc trong của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác.

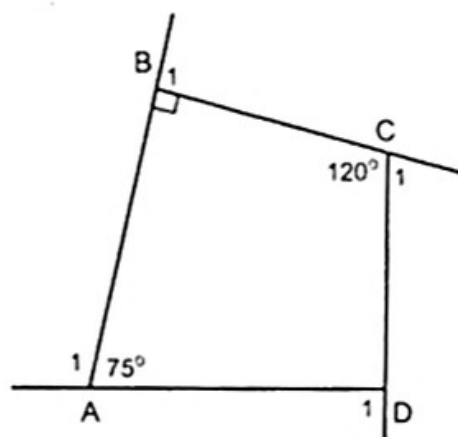
- Tính các góc ngoài của tứ giác ở hình 5a.
- Tính tổng các góc ngoài của tứ giác ở hình 5b (tại mỗi đỉnh của tứ giác chỉ chọn một góc ngoài) : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = ?$
- Có nhận xét gì về tổng các góc ngoài của tứ giác ?

Lời giải (hình 5)

a) Áp dụng tính chất về góc vào tứ giác ABCD, ta được :

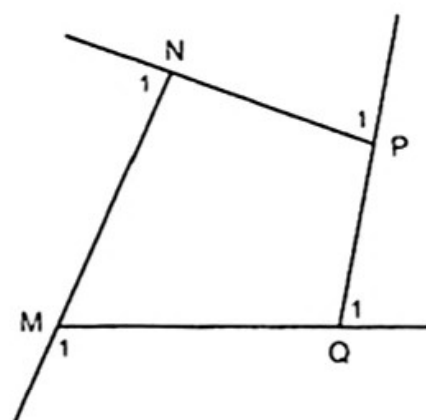
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \text{ hay } 75^\circ + 90^\circ + 120^\circ + \widehat{D} = 360^\circ, \text{ hay}$$

$$\widehat{D} = 360^\circ - 285^\circ = 75^\circ.$$



a)

Hình 5



b)

Vì mỗi góc ngoài kề bù với một góc của tứ giác, nên :

$$\widehat{A}_1 = 105^\circ, \widehat{B}_1 = 90^\circ, \widehat{C}_1 = 60^\circ, \widehat{D}_1 = 105^\circ.$$

b) Vì các góc ngoài $\widehat{M}_1 = 180^\circ - \widehat{M}$, $\widehat{N}_1 = 180^\circ - \widehat{N}$, $\widehat{P}_1 = 180^\circ - \widehat{P}$ và $\widehat{Q}_1 = 180^\circ - \widehat{Q}$, nên :

$$\begin{aligned} \widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 + \widehat{P}_1 + \widehat{Q}_1 &= 180^\circ - \widehat{M} + 180^\circ - \widehat{N} + 180^\circ - \widehat{P} + 180^\circ - \widehat{Q} \\ &= 720^\circ - (\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q}) = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$

c) Theo câu b) : Tổng các góc ngoài của tứ giác bằng 360° .

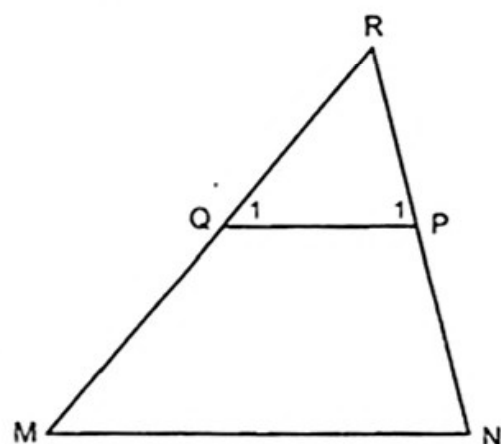
Ví dụ 3. Cho tứ giác MNPQ biết :

$$\widehat{M} : \widehat{N} : \widehat{P} : \widehat{Q} = 1 : 2 : 3 : 4.$$

a) Tính các góc của tứ giác.

b) Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.

c) Gọi R là giao điểm của MQ với NP. Tính các góc của tam giác PQR.



Hình 6

Lời giải (hình 6)

a) Viết lại giả thiết thành $\frac{\widehat{M}}{1} = \frac{\widehat{N}}{2} = \frac{\widehat{P}}{3} = \frac{\widehat{Q}}{4}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và tính chất về góc vào tứ giác MNPQ,

ta có : $\frac{\widehat{M}}{1} = \frac{\widehat{N}}{2} = \frac{\widehat{P}}{3} = \frac{\widehat{Q}}{4} = \frac{\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q}}{1+2+3+4} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

Vậy $\widehat{M} = 36^\circ$; $\widehat{N} = 72^\circ$; $\widehat{P} = 108^\circ$; $\widehat{Q} = 144^\circ$.

b) Vì $\widehat{P}_1$ là góc ngoài của tứ giác MNPQ tại đỉnh P, nên :

$$\widehat{P}_1 = 180^\circ - \widehat{P} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Do đó $\widehat{P}_1 = \widehat{N}$. Vậy $MN \parallel PQ$ (vì có cặp góc ở vị trí đồng vị bằng nhau).

c) Theo câu b) thì $\widehat{P}_1 = 72^\circ$, $\widehat{Q}_1$ là góc ngoài của tứ giác MNPQ tại đỉnh Q, nên : $\widehat{Q}_1 = 180^\circ - \widehat{Q} = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$.

Áp dụng tính chất về góc vào tam giác PQR, ta có :

$$\widehat{P}_1 + \widehat{Q}_1 + \widehat{R} = 180^\circ \text{ hay } 72^\circ + 36^\circ + \widehat{R} = 180^\circ, \text{ hay } \widehat{R} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

III. BÀI TẬP

1. Bốn góc của tứ giác có thể đều là :

- a) góc nhọn
- b) góc tù
- c) góc vuông

được không ? Vì sao ? Suy ra trong một tứ giác có nhiều nhất mấy góc nhọn ?

2. Cho tứ giác ABCD có : $\widehat{B} = 120^\circ$; $\widehat{C} = 50^\circ$; $\widehat{D} = 90^\circ$. Tính góc A và góc ngoài của tứ giác tại đỉnh A.

3. Tứ giác BCDE có : $\widehat{B} = 120^\circ$; $\widehat{C} = 50^\circ$; $\widehat{D} + \widehat{E} = 40^\circ$. Tính $\widehat{D}$, $\widehat{E}$.

4. Tính các góc của tứ giác EFGH biết :

$$\widehat{E} : \widehat{F} : \widehat{G} : \widehat{H} = 1 : 2 : 4 : 5.$$

DẠNG 2. Vẽ tứ giác biết năm yếu tố. Chứng minh quan hệ về độ dài

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ một tứ giác khi biết năm yếu tố

Bước 1 : Chọn một tam giác biết ba yếu tố vẽ trước để xác định ba đỉnh của tứ giác.

Bước 2 : Lợi dụng một cạnh của tam giác đã vẽ với hai yếu tố còn lại vẽ tam giác thứ hai để xác định đỉnh thứ 4.

2. Chứng minh quan hệ về độ dài : Sử dụng bất đẳng thức trong tam giác. Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì :

$$0 \leq |a - b| < c < a + b ;$$

$$0 \leq |b - c| < a < b + c ;$$

$$0 \leq |c - a| < b < c + a.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Dựa vào cách vẽ các tam giác đã học, hãy vẽ lại tứ giác ở hình 7 vào vở.

Lời giải

Vẽ $\triangle ABC$ biết hai cạnh $BA = 2\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$, và $\widehat{B} = 70^\circ$ theo hai bước sau :

– Vẽ $\widehat{xBy} = 70^\circ$.

– Trên tia Bx lấy điểm A, trên tia By lấy điểm C sao cho $BA = 2\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$.

Vẽ $\triangle ACD$ biết ba cạnh là AC, $CD = 3\text{cm}$; $DA = 1.5\text{cm}$ theo hai bước sau :

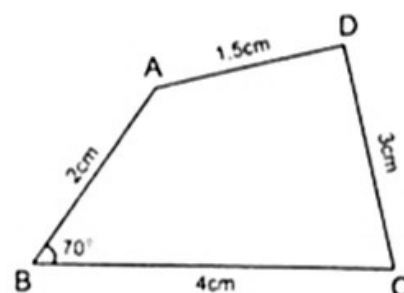
– Vẽ cung tròn tâm A bán kính 1.5cm.

– Vẽ cung tròn tâm C bán kính 3cm. Giao điểm của hai cung này chính là đỉnh D.

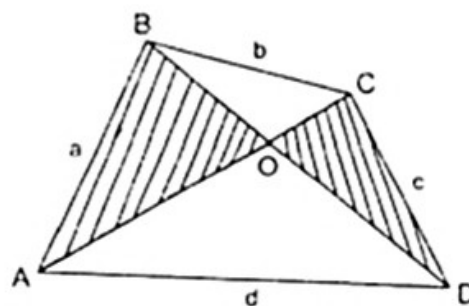
Ví dụ 2. Chứng minh rằng trong một tứ giác :

a) Mỗi đường chéo nhỏ hơn nửa chu vi của tứ giác.

b) Tổng hai đường chéo lớn hơn tổng hai cạnh đối.



Hình 7



Hình 8

Lời giải (hình 8)

Trên hình 8, đặt độ dài các cạnh như hình vẽ thì chu vi của tứ giác ABCD là :
 $a + b + c + d$.

a) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào hai tam giác ABC và ADC, ta được :

$$AC < AB + BC \text{ hay } AC < a + b. \quad (1)$$

$$AC < AD + DC \text{ hay } AC < c + d. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $2AC < a + b + c + d$ hay $AC < \frac{a + b + c + d}{2}$.

Chứng minh tương tự, ta cũng được $BD < \frac{a + b + c + d}{2}$.

Vậy mỗi đường chéo nhỏ hơn nửa chu vi.

b) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào hai tam giác chứa hai cạnh đối nhau AB, CD là OAB, OCD (O là giao điểm hai đường chéo AC, BD), ta được :

$$OA + OB > AB \text{ hay } OA + OB > a. \quad (3)$$

$$OC + OD > CD \text{ hay } OC + OD > c. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra : $AC + BD > a + c$.

Chứng minh tương tự, ta cũng được $AC + BD > b + d$.

Vậy tổng hai đường chéo lớn hơn tổng hai cạnh đối.

III. BÀI TẬP

5. Vẽ tứ giác ABCD trong mỗi trường hợp sau, biết :

a) Bốn cạnh $AB = 2\text{cm}$; $BC = 3\text{cm}$; $CD = 2,5\text{cm}$; $DA = 2\text{cm}$ và đường chéo $AC = 4\text{cm}$.

b) Ba cạnh $AB = 3,5\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$; $CD = 4,5\text{cm}$, đường chéo $AC = 5,5\text{cm}$ và $\hat{C} = 120^\circ$.

6*. Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi của tứ giác ấy.

Chủ đề 2

HÌNH THANG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. HÌNH THANG

1. Định nghĩa

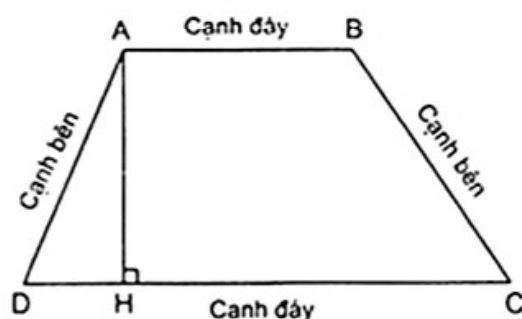
– Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

$ABCD$ là hình thang $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ là tứ giác} \\ AB // CD \end{cases}$ (đáy AB, CD).

2. Tính chất

Tính chất về góc : Tổng các góc của một hình thang bằng 360° .

Tính chất về đường trung bình : Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy (SGK Toán 8, §4 tr. 76).



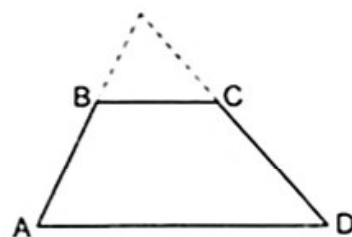
Hình 9

Hai nhận xét :

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

3. Dấu hiệu nhận biết

Chỉ có một dấu hiệu nhận biết theo định nghĩa là : Tứ giác có hai cạnh đối song song là hình thang.



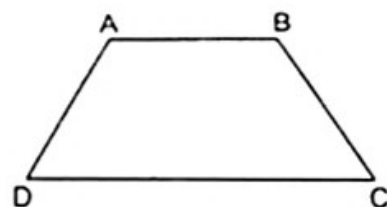
Hình 10a

4. Cách vẽ một hình thang

Có hai cách vẽ hình thang :

Cách 1 (hình 10a). Cắt một tam giác bởi một cát tuyến song song với một cạnh không đi qua đỉnh.

Cách 2 (hình 10b). Lấy hai đoạn thẳng bất kì trên hai đường thẳng song song làm hai đáy.



Hình 10b

II. HÌNH THANG VUÔNG

1. Định nghĩa

Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

2. Tính chất, cách vẽ như hình thang, có một dấu hiệu nhận biết là hình thang có một góc vuông (theo định nghĩa).

III. HÌNH THANG CÂN

1. Định nghĩa

– Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

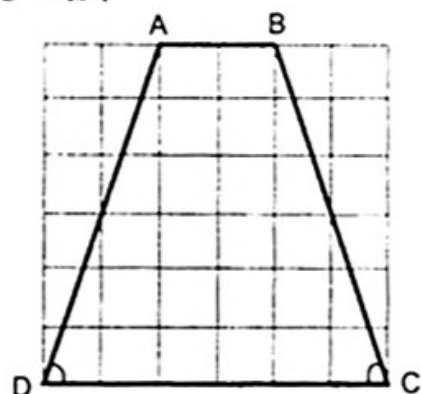
Tứ giác ABCD là hình thang cân $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \text{ (đáy là AB, DC)} \\ \hat{A} = \hat{B} \text{ hoặc } \hat{C} = \hat{D}. \end{cases}$

2. Tính chất

Ngoài các tính chất của hình thang, hình thang cân còn có :

Tính chất về cạnh bên : Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

Tính chất về đường chéo : Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.



Hình 11

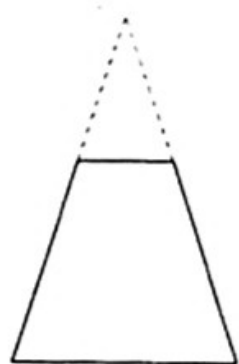
3. Dấu hiệu nhận biết

Có hai dấu hiệu nhận biết hình thang cân

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

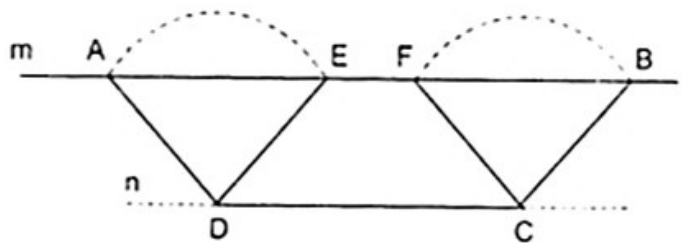
4. Cách vẽ một hình thang cân

Cách 1 (hình 12a). Cắt một tam giác cân bởi một cát tuyến song song với đáy.



Hình 12a

Cách 2 (hình 12b). Trên một trong hai đường thẳng song song m và n, chẳng hạn là n, chọn một đoạn thẳng CD. Lấy D và C làm tâm quay hai đường tròn tâm D và C có cùng bán kính cắt đường thẳng m tại bốn điểm theo thứ tự A, E, F, B ta được ABCD. DCFE là hai hình thang cân như hình 30, hình 31 (SGK Toán 8, Tập 1 – tr. 74, 75).



Hình 12b

IV. PHÂN TÍCH ĐI LÊN ĐỂ TÌM KIẾM LỜI GIẢI CHO CÁC CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ CỦA CHỦ ĐỀ 2

Học sinh tập phân tích đi lên, vẽ hình, viết lời giải rồi so sánh với lời giải trong SGK.

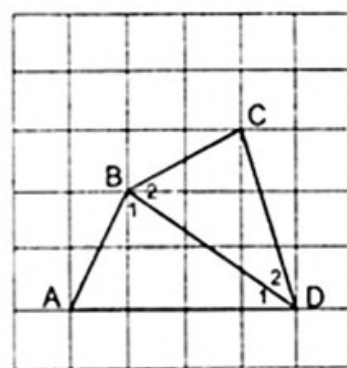
1. **Định lý:** Tổng các góc của một tứ giác bằng 360° .

Chứng minh

Xét tứ giác ABCD như hình 13. Ta phải chứng minh :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ.$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 180^\circ & (1) \\ 2) \widehat{C} + \widehat{B}_2 + \widehat{D}_2 = 180^\circ & (2) \end{cases}$$



Hình 13

2. **Định lý:** Trong hình thang cân hai cạnh bên bằng nhau.

Chứng minh

Xét hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$), ta phải chứng minh $AD = BC$.

Xét hai trường hợp :

a) AD cắt BC ở O (giả sử $AB < CD$).

Dùng lưới ô vuông để vẽ hình (h. 14).

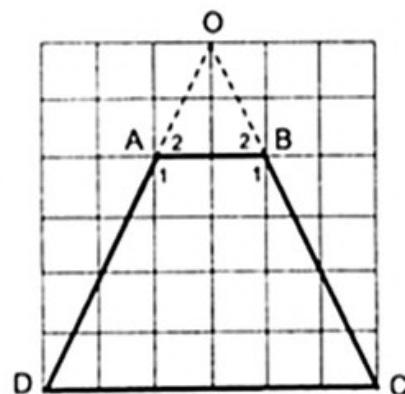
Phân tích :

$$AD = BC \Leftrightarrow \begin{cases} OD = OC \\ OA = OB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{D} = \widehat{C} \\ \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 \end{cases}$$

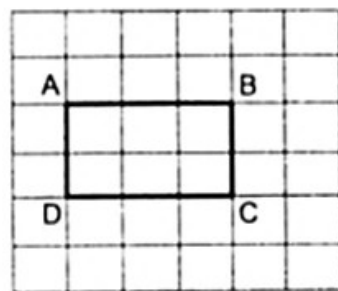
b) $AD \parallel BC$.

Dùng lưới ô vuông để vẽ hình (h. 15).

Phân tích : $AD = BC \Leftrightarrow$ Hình thang ABCD có hai cạnh bên AD, BC song song (theo nhận xét về hình thang).



Hình 14



Hình 15

3. **Định lý:** Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

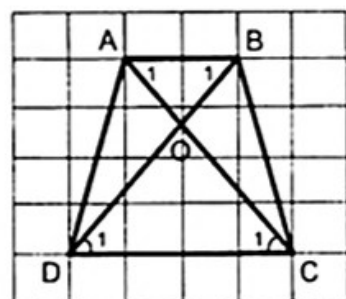
Chứng minh

Xét hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$). Ta phải chứng minh $AC = BD$.

Dùng lưới ô vuông để vẽ hình (h. 16).

Phân tích : $AC = BD \Leftrightarrow \triangle ACD = \triangle BDC$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) AD = BC \\ 2) \widehat{D} = \widehat{C} \quad (\text{tính chất hình thang cân}). \\ 3) CD = DC \end{cases}$$



Hình 16

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Nhận biết hình thang. Hình thang vuông. Hình thang cân

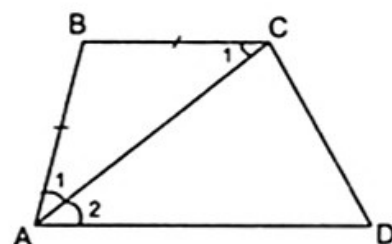
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng :

- Định nghĩa hình thang, hình thang vuông, hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tứ giác ABCD có $AB = BC$ và AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.



Hình 17

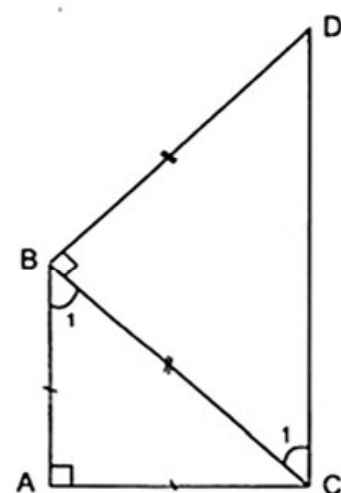
Lời giải (hình 17)

Từ giả thiết $AB = BC$ suy ra tam giác ABC cân ở B. Áp dụng tính chất về góc và giả thiết vào tam giác cân ABC, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow BC \parallel AD.$$

Vì có cặp góc so le trong bằng nhau. Tứ giác ABCD có hai cạnh đối song song nên nó là hình thang.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC một tam giác BCD vuông cân tại B. Tứ giác ABDC là hình gì ? Tại sao ?



Hình 18

Lời giải (hình 18)

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân ở A, BCD vuông cân ở B. Nên các góc ở đáy $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 45^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$ do có cặp góc so le trong bằng nhau.

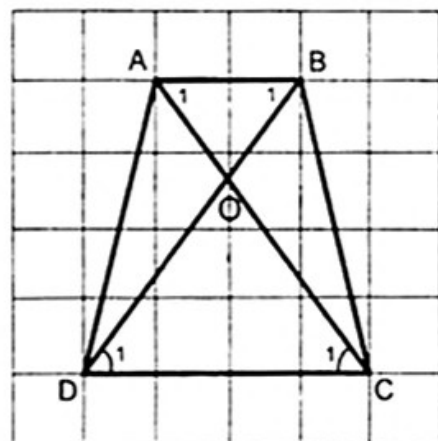
Tứ giác ABCD có hai cạnh đối song song nên nó là hình thang. Hình thang ABDC lại có $\widehat{A} = 90^\circ$ theo giả thiết nên nó là hình thang vuông.

Ví dụ 3. Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.

Lời giải (hình 19)

Áp dụng tính chất góc so le của $AB \parallel CD$ và giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \\ \widehat{D_1} = \widehat{C_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \\ \widehat{D_1} = \widehat{C_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB \quad (1) \\ OC = OD. \quad (2) \end{cases}$$



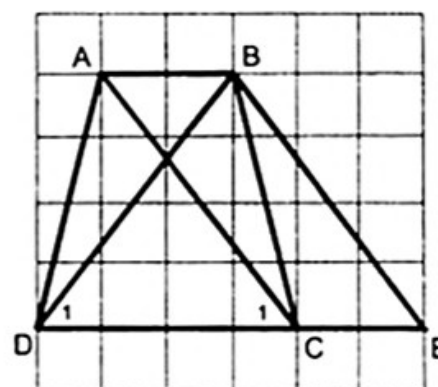
Hình 19

(Vì trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau).

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2) thu được $AC = BD$. Điều này chứng tỏ hình thang ABCD có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình thang cân.

Ví dụ 4. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AC = BD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng DC tại E. Chứng minh rằng :

- $\triangle BDE$ là tam giác cân.
- $\triangle ACD = \triangle BDC$.
- Hình thang ABCD là hình thang cân.



Hình 20

Lời giải (hình 20)

- Áp dụng nhận xét hình thang có hai cạnh bên song song và giả thiết vào hình thang ABEC, thu được : $\begin{cases} BE = AC \\ BD = AC \end{cases} \Rightarrow BD = BE$.

Tam giác BDE có hai cạnh bằng nhau nên nó cân tại B.

- Áp dụng tính chất về góc vào tam giác cân BDE và tính chất góc đồng vị của $AC \parallel BE$, ta được : $\begin{cases} \widehat{D_1} = \widehat{E} \\ \widehat{C_1} = \widehat{E} \end{cases} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1}$. (1)

Lại có $AC = BD$ (theo giả thiết). (2)

Có $CD = DC$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\triangle ACD = \triangle BDC$ (c - g - c).

c) Hình thang $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình thang cân.

III. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng nếu cắt hai cạnh của một tam giác cân bởi một cát tuyến song song với cạnh đáy thì tứ giác thu được là một hình thang cân.
2. Cho tam giác MNP cân tại M . Kẻ các đường trung tuyến NQ , PS . Tứ giác $NSQP$ là hình gì ? Vì sao ?
3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Kẻ các đường cao BD , CE . Tứ giác $BEDC$ là hình gì ? Vì sao ?
4. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại I , biết rằng $AI = IC$, $IB = ID$. Tứ giác $ACBD$ là hình gì ? Vì sao ?
5. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm D trên cạnh AB , điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = AE$.
 - a) Tứ giác $BDEC$ là hình gì ? Vì sao ?
 - b) Các điểm D , E ở vị trí nào thì $BD = DE = EC$?
- 6*. Một hình thang có hai cạnh bên bằng nhau có phải là hình thang cân không ? Phải bổ sung thêm điều kiện gì thì hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình thang cân ?

DẠNG 2. Tính góc của hình thang

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng :

- Tính chất về góc của một tam giác, tứ giác.
- Tính chất hai góc trong cùng phía của hai đường thẳng song song bù nhau.
- Định nghĩa hình thang cân.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\hat{A} - \hat{D} = 20^\circ$, $\hat{B} = 2\hat{C}$. Tính các góc của hình thang.

Lời giải (hình 21)

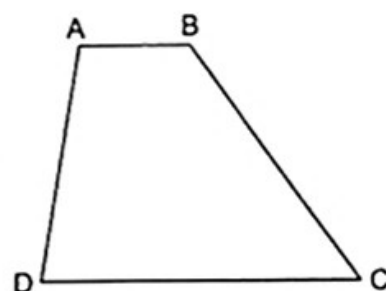
Áp dụng tính chất các góc trong cùng phía của $AB \parallel DC$ và giả thiết, ta được :

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A} - \hat{D} = 20^\circ & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{B} - 2\hat{C} = 0^\circ & (4) \end{cases}$$



Hình 21

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$2\hat{A} = 200^\circ \text{ hay } \hat{A} = 100^\circ, \text{ suy ra } \hat{D} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

Trừ theo vế các đẳng thức (3) và (4), ta được :

$$3\hat{C} = 180^\circ \text{ hay } \hat{C} = 60^\circ, \text{ suy ra } \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Ví dụ 2. Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$; $AB = AD = 3\text{cm}$; $DC = 6\text{cm}$. Tính góc B và C của hình thang.

Lời giải (hình 22)

Kẻ $BE \perp CD$ thì $AD \parallel BE$, do cùng vuông góc

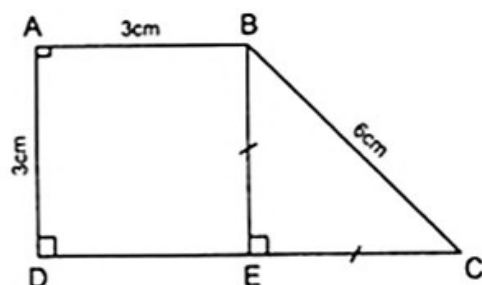
với CD nên hình thang ABED có hai cạnh bên song song.

Áp dụng nhận xét về hình thang có hai cạnh bên song song vào hình thang ABED và giả thiết ta được $BE = DA = 3\text{cm}$; $DE = AB = 3\text{cm}$, do đó : $EC = DC - DE = 6\text{cm} - 3\text{cm} = 3\text{cm}$.

Suy ra $\triangle BEC$ vuông cân tại E nên $\hat{C} = 45^\circ$.

Do góc B và C là hai góc trong cùng phía của $AB \parallel DC$ nên chúng bù nhau hay $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, suy ra $\hat{B} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Ví dụ 3. Tính các góc của hình thang cân, biết một góc bằng 60° .



Hình 22

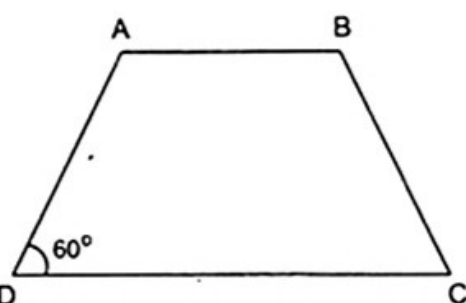
Lời giải (hình 23)

Xét hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{D} = 60^\circ$.

Theo định nghĩa hình thang cân và giả thiết ta có $\widehat{C} = 60^\circ$ và $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Do góc A và D là hai góc trong cùng phía của $AB \parallel DC$ nên chúng bù nhau, hay $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, \text{ nên } \widehat{B} = 120^\circ.$$



Hình 23

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = AE$.

a) Chứng minh rằng BDEC là hình thang cân.

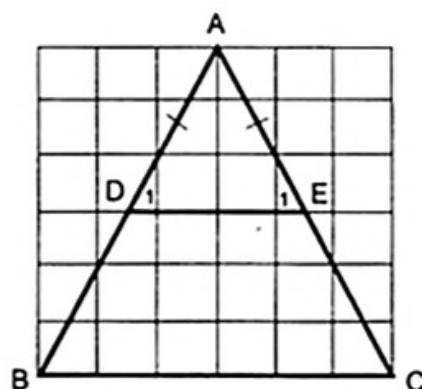
b) Tính các góc của hình thang cân đó, biết rằng $\widehat{A} = 50^\circ$.

Lời giải (hình 24)

a) Từ giả thiết $AD = AE$ nên tam giác ADE cân ở A. Đặt $\widehat{A} = 2\alpha$.

Áp dụng tính chất về góc vào hai tam giác cân ABC và ADE, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{D}_1 = \widehat{E}_1 = 90^\circ - \alpha \\ \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ - \alpha \end{cases} \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{B}$$



Hình 24

$\Rightarrow DE \parallel BC$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Tứ giác BDEC có hai cạnh đối song song nên nó là hình thang.

Hình thang này lại có hai góc kề một đáy bằng nhau là $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên là hình thang cân.

b) Áp dụng kết quả của câu a) với $\widehat{A} = 50^\circ = 2\alpha$ hay $\alpha = 25^\circ$, ta được :

$$\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D}_1 = \widehat{E}_1 = 65^\circ.$$

Do các góc B, $\widehat{D}_2$ và C, $\widehat{E}_2$ là các cặp góc trong cùng phía của $DE \parallel BC$ nên chúng bù nhau, suy ra $\widehat{D}_2 = \widehat{E}_2 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

III. BÀI TẬP

7. a) Biết ít nhất mấy góc của một hình thang thì tính được các góc còn lại ?
b) Biết hai góc của một hình thang bằng 40° và 60° . Tính các góc còn lại của hình thang.
8. Cho biết hai góc đối của hình thang là 70° và 130° . Tính các góc còn lại.
9. Hình thang ABCD ($AD \parallel BC$) có $\hat{A} - \hat{B} = 30^\circ$ và $\hat{A} + \hat{C} = 150^\circ$. Tính các góc còn lại.
10. a) Biết ít nhất mấy góc của một hình thang cân thì tính được các góc còn lại ?
b) Một hình thang cân có một góc bằng 70° . Đó là góc ở đáy đáy lớn hay đáy nhỏ ? Tính các góc còn lại.
11. Hai góc của một hình thang cân có hiệu bằng 40° . Đó là hai góc ở một đáy hay hai góc ở một cạnh bên ? Tính các góc của hình thang.

DẠNG 3. Chứng minh quan hệ về độ dài. Tính độ dài đoạn thẳng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Chứng minh quan hệ về độ dài

Sử dụng :

- Tính chất về cạnh bên và đường chéo của hình thang cân.
- Trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau và ngược lại.

2. Tính độ dài đoạn thẳng

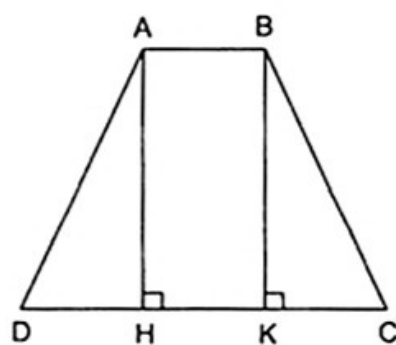
Chọn tam giác vuông thích hợp chứa đoạn thẳng rồi áp dụng định lý Py-ta-go.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Kẻ các đường cao AH, BK của hình thang. Chứng minh rằng $DH = CK$.

Lời giải (hình 25)

Áp dụng định nghĩa, tính chất và giả thiết vào hình thang cân ABCD, ta được :



Hình 25

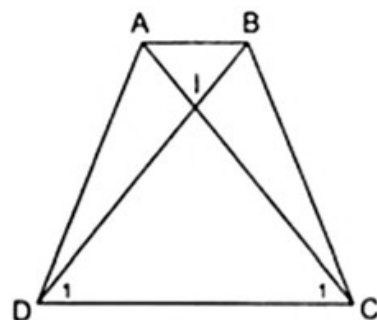
$$\begin{cases} \widehat{D} = \widehat{C} \\ AD = BC \\ \widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ADH = \triangle BCK \text{ (trường hợp cạnh huyền - góc nhọn).}$$

Vậy $DH = CK$.

Ví dụ 2. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có I là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng : $IC = ID$ và $IA = IB$.

Lời giải (hình 26)

Áp dụng tính chất về cạnh bên và đường chéo vào hình thang cân $ABCD$, ta được :



Hình 26

$$\begin{cases} AD = BC \\ AC = BD \quad (1) \\ DC = CD \end{cases} \Rightarrow \triangle ADC = \triangle BCD \text{ (c - c - c).}$$

Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow IC = ID$ (vì trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau). (2)

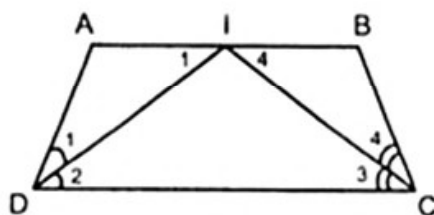
Trừ theo về các đẳng thức (1) và (2) ta được $IA = IB$.

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) hai đường phân giác của góc C và D cắt nhau tại điểm I thuộc đáy AB . Chứng minh rằng tổng hai cạnh bên bằng đáy AB của hình thang.

Lời giải (hình 27)

Áp dụng tính chất góc so le của $AB \parallel CD$ và giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} \widehat{I}_1 = \widehat{D}_2 \\ \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \\ \widehat{I}_4 = \widehat{C}_3 \\ \widehat{C}_3 = \widehat{C}_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{I}_1 = \widehat{D}_1 \\ \widehat{I}_4 = \widehat{C}_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = AI \quad (1) \\ BC = BI \quad (2) \end{cases}$$



Hình 27

(vì trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau).

Cộng theo về các đẳng thức (1) và (2) ta được $AD + BC = AB$.

Điều này chứng tỏ tổng hai cạnh bên bằng đáy AB của hình thang.

Ví dụ 4*. Tính chiều cao của hình thang cân ABCD, biết rằng cạnh bên $AD = 5\text{cm}$, các cạnh đáy $AB = 6\text{cm}$ và $CD = 14\text{cm}$.

Lời giải (hình 28)

Kẻ $AH \perp DC$, $BK \perp DC$ thì $AH \parallel BK$ nên hình thang ABKH có hai cạnh bên song song.

Áp dụng nhận xét về hình thang có hai cạnh bên song song vào hình thang ABKH, ta được :

$$AH = BK, HK = AB = 6\text{cm}.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ADH vuông tại H, thu được :

$$AD^2 = DH^2 + HA^2 \text{ hay } 5^2 = 4^2 + HA^2$$

$$\Leftrightarrow HA^2 = 3^2 \Leftrightarrow HA = 3 \text{ (cm) vì } HA > 0.$$

Vậy chiều cao của hình thang cân là 3cm.

Ví dụ 5*. Tính chiều cao BH của hình thang cân ABCD, biết $AC \perp BD$ và hai cạnh đáy $AB = a$, $CD = b$. Từ đó suy ra cách vẽ hình.

Lời giải (hình 29)

Kẻ $Bx \perp BD$ cắt DC tại E thì $BE \parallel AC$, do cùng vuông góc với BD.

Hình thang ABEC có hai cạnh bên song song, nên $AC = BE$ (1) và hai đáy $AB = CE = a$.

Suy ra $DE = DC + CE = a + b$.

Lại có $AC = BD$ (tính chất đường chéo của hình thang cân). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD = BE$ nên tam giác BDE vuông cân tại B.

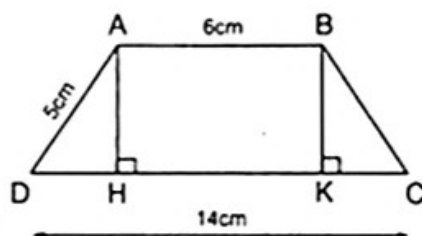
Do đó BH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác BDE, nên

$$DH = \frac{DE}{2} = \frac{a+b}{2} \text{ và } \widehat{D_1} = 45^\circ, \text{ lúc đó tam giác BDH vuông cân tại H.}$$

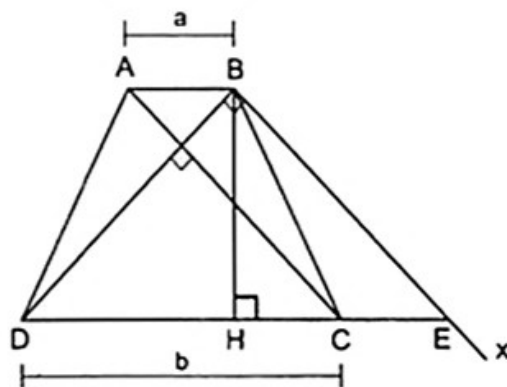
$$\text{Vậy } BH = \frac{a+b}{2}.$$

Cách vẽ hình :

Bước 1 : Vẽ $\triangle BDE$ vuông cân tại B có đường cao BH và $DE = a + b$.



Hình 28



Hình 29

Bước 2 : Kẻ $Bx \parallel DE$. Lấy $C \in HE$ sao cho $CE = b$.

Bước 3 : Kẻ $Cy \parallel BE$ cắt Bx tại A . Ta được hình thang cân thỏa mãn yêu cầu của đầu bài.

III. BÀI TẬP

12. Kéo dài hai cạnh bên của một hình thang cân (có hai đáy không bằng nhau) thì tam giác thu được có phải là tam giác cân hay không ? Vì sao ?
13. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo cắt nhau tại P , các cạnh bên kéo dài cắt nhau tại Q . Chứng minh rằng đường thẳng PQ là đường trung trực của hai đáy.
14. Một hình thang cân có đáy lớn dài 2,7m, cạnh bên dài 1m, góc tạo bởi cạnh bên và đáy lớn bằng 60° . Tính độ dài của đáy nhỏ.
15. Hình thang cân $ABCD$ có đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC và DB là tia phân giác của góc D . Tính chu vi của hình thang, biết $BC = 4\text{cm}$.

Chủ đề 3

ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

1. **Định nghĩa** : Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.
2. **Định lý 1** : Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.
3. **Định lý 2** : Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

II. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG

1. **Định nghĩa** : Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

2. Định lí 3 : Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

3. Định lí 4 : Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng của chúng.

III. TỪ CÁC ĐỊNH LÍ VỀ ĐƯỜNG TRUNG BÌNH TA THU ĐƯỢC KINH NGHIỆM THỨ NHẤT

Cứ nói tới trung điểm phải nghĩ đến đường trung bình.

Ý nghĩa của kinh nghiệm này là : Với các bài toán mà giả thiết hay kết luận đề cập đến trung điểm của một đoạn thẳng thì khi vẽ đường phụ ta vẽ thêm đường trung bình nhằm sử dụng các định lí về đường trung bình của tam giác, của hình thang.

VI. PHÂN TÍCH ĐI LÊN ĐỂ TÌM KIẾM LỜI GIẢI CHO CÁC CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ CỦA CHỦ ĐỀ 3

1. Định lí 1 : Xét tam giác ABC có AD = DB, DE // BC. Chứng minh AE = EC.

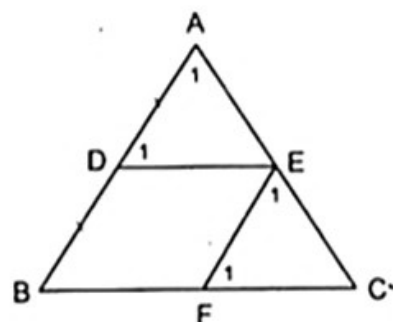
Chứng minh

Sử dụng lưới ô vuông để vẽ hình (hình 30).

Phân tích :

$$AE = EC \Leftrightarrow \triangle ADE = \triangle EFC$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \widehat{A} = \widehat{E}_1 \\ 2) AD = EF \\ 3) \widehat{D}_1 = \widehat{F}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4) EF // AB \text{ (do tôi kẻ)} \\ 5) \text{Hình thang BFED có } FE // BD \\ 6) \widehat{D}_1 = \widehat{B}, \widehat{B} = \widehat{F}_1. \end{cases}$$



Hình 30

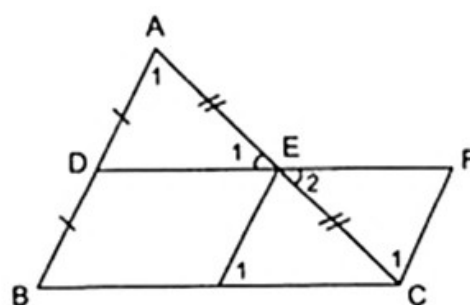
2. Định lí 2 : Xét tam giác ABC có AD = DB, AE = EC. Chứng minh rằng :

$$DE // BC, DE = \frac{1}{2} BC.$$

Chứng minh

Sử dụng lưới ô vuông để vẽ hình (hình 31).

Phân tích :



Hình 31

$DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2} BC \Leftrightarrow$ là hình thang có $DB \parallel CF; DB = CF$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) AD = DB \\ 2) AD = CF \Leftrightarrow 4) \Delta AED = \Delta CEF \\ 3) \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5) DE = EF \text{ (do tôi lấy)} \\ 6) \widehat{E_1} = \widehat{E_2} \text{ (vì đối đỉnh)} \\ 7) AE = EC \text{ (giả thiết cho).} \end{cases}$$

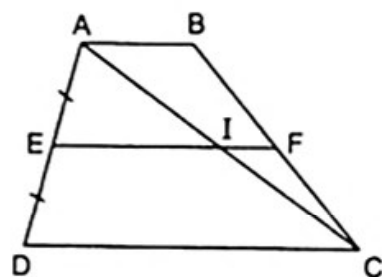
3. Định lí 3 : Xét hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AE = ED, FE \parallel CD$. Ta phải chứng minh $BF = FC$.

Chứng minh

Sử dụng lưới ô vuông để vẽ hình (hình 32).

Phân tích :

$$BF = FC \Leftrightarrow \begin{cases} 1) IE \parallel AB \\ 2) AI = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3) FE \parallel CD \\ 4) AE = ED. \end{cases}$$



Hình 32

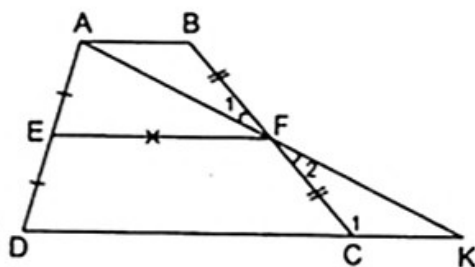
4. Định lí 4 : Xét hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AE = ED, BF = FC$. Ta phải chứng minh $FE \parallel AB \parallel CD, FE = \frac{AB + CD}{2}$.

Chứng minh

Sử dụng lưới ô vuông để vẽ hình (hình 33).

Phân tích :

$$FE \parallel AB \parallel CD \Leftrightarrow \begin{cases} 1) AB \parallel CD \\ 2) FE \parallel CD \end{cases} \text{ (giả thiết cho)}$$



Hình 33

$\Leftrightarrow FE$ là đường trung bình của tam giác ADK

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3) AE = ED \\ 4) AF = FK \end{cases} \Leftrightarrow \Delta AFB = \Delta KFC \Leftrightarrow \begin{cases} 5) \widehat{B} = \widehat{C_1} \\ 6) BF = FC \\ 7) \widehat{F_1} = \widehat{F_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2FE = AB + CD \Leftrightarrow \begin{cases} 1) 2.FE = DK \\ 2) AB + CD = CD + CK = DK \end{cases} \Leftrightarrow AB = CK.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Vẽ thêm đường trung bình để tính góc, tính độ dài đoạn thẳng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ thêm đường trung bình của một tam giác, của một hình thang bằng một trong ba cách sau : vẽ thêm trung điểm một đoạn thẳng, vẽ đường thẳng song song, vẽ đường thẳng vuông góc.

2. Sử dụng

- Định lí đường trung bình của tam giác, của hình thang.
- Tính chất về góc trong tam giác.
- Tính chất hai góc ở vị trí so le hoặc đồng vị của hai đường thẳng song song.
- Trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau và ngược lại.
- Tính chất góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính x ở hình 34.

Lời giải (hình 34)

a) Do có cặp góc ở vị trí đồng vị bằng nhau nên $DE \parallel BC$. (1)

Lại có $AE = EC = 8\text{cm}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD = DB$ hay $x = 10\text{cm}$.

b) Do AD , BE và CH cùng vuông góc với DH nên $AD \parallel BE \parallel CH$. (1)

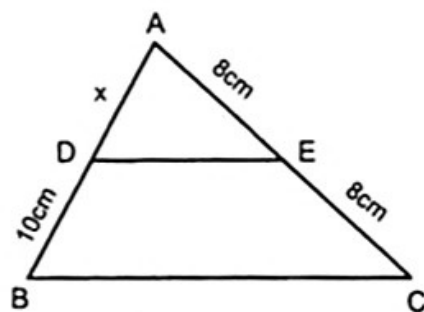
Lại có $AB = BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DE = EH$. (3)

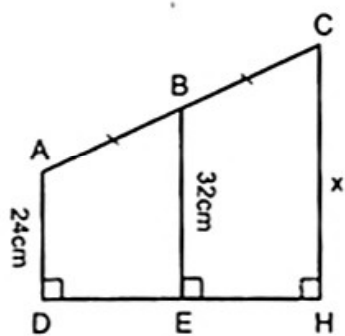
Với (2) và (3) ta có BE là đường trung bình của hình thang $ADHC$.

Áp dụng định lí đường trung bình vào hình thang $ADHC$, ta có :

$$BE = \frac{1}{2} (AD + CH) \text{ hay } 32 = \frac{1}{2} (24 + x) \text{ hay } x = 40 \text{ cm.}$$



Hình 34a



Hình 34b

Ví dụ 2. Tính x, y trên hình 35.

Lời giải (hình 35)

a) Do IP, GK, MH cùng vuông góc với AH nên $IP \parallel GK \parallel MH$. (1)

Lại có $AI = IG = GM$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AP = PK = KH$, do đó IP là đường trung bình của tam giác AGK , GK là đường trung bình của hình thang $IPHM$.

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác AGK và hình thang $IPHM$, ta được : $GK = 2IP$ hay $6\text{cm} = 2x \Leftrightarrow x = 3\text{cm}$.

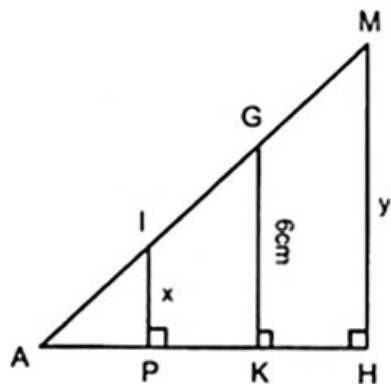
$$GK = \frac{IP + MH}{2} \text{ hay } 6 = \frac{3 + y}{2} \text{ hay } y = 9 \text{ (cm)}.$$

b) Trên (hình 35b) ta thấy CD, EF lần lượt là đường trung bình của hình thang $AEFB$ và $CDHG$.

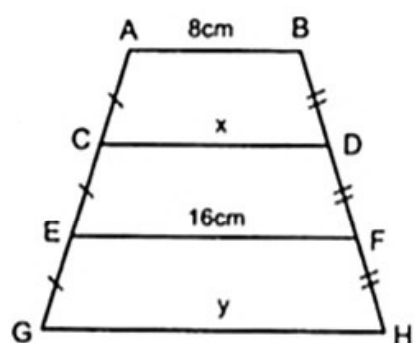
Áp dụng định lý đường trung bình vào hai hình thang trên, ta được :

$$CD = \frac{AB + EF}{2} \Leftrightarrow x = \frac{8 + 16}{2} = 12 \text{ (cm)}.$$

$$EF = \frac{x + y}{2} \Leftrightarrow 16 = \frac{12 + y}{2} \Leftrightarrow y = 20 \text{ (cm)}.$$



Hình 35a



Hình 35b

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC ($AB > AC$) có $\hat{A} = 50^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC . Tính góc BEF .

Lời giải (hình 36)

Do E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC theo giả thiết nên vẽ thêm I là trung điểm của DC thì EI, FI thứ tự là đường trung bình của hai tam giác ADC và BCD . Đặt $BD = AC = 2a$.

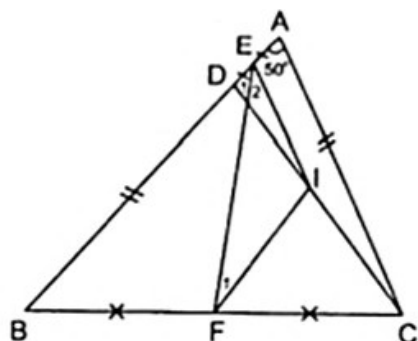
Áp dụng định lý đường trung bình vào hai tam giác trên, ta có :

$$FI \parallel BD. \quad (1)$$

$$FI = a. \quad (2)$$

$$EI = a. \quad (3)$$

$$EI \parallel AC. \quad (4)$$



Hình 36

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{F}_1 \text{ (vì so le trong).} \quad (5)$$

Từ (2) và (3) suy ra $FI = EI$ nên $\widehat{E}_2 = \widehat{F}_1$ (vì trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau). (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$. Từ (4) $\Rightarrow \widehat{BEI} = \widehat{A} = 50^\circ$ (vì đồng vị).

Mà $\widehat{BEI} = 2\widehat{E}_1$ nên $\widehat{E}_1 = 25^\circ$.

Ví dụ 4. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 2\text{cm}$, $CD = 5\text{cm}$, $AD = 7\text{cm}$. Gọi E là trung điểm của BC. Tính góc AED.

Lời giải (hình 37)

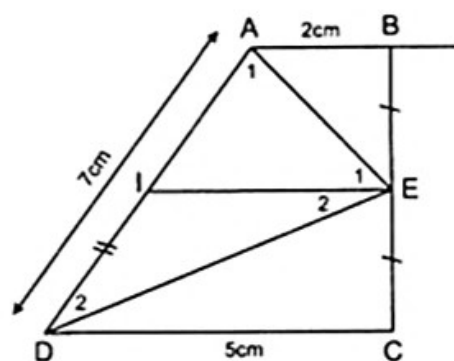
Đặt : $\widehat{E}_1 = \alpha$, $\widehat{E}_2 = \beta$ thì $\widehat{AED} = \alpha + \beta$.

Do E là trung điểm của BC theo giả thiết nên vẽ thêm I là trung điểm của AD thì $AI = ID = \frac{AD}{2} = 3,5\text{cm}$. (1)

Ta được IE là đường trung bình của hình thang ABCD.

Áp dụng định lí đường trung bình vào hình thang ABCD, ta có : $IE = \frac{AB + CD}{2}$, hay

$$IE = \frac{2 + 5}{2} = 3,5 \text{ (cm)}. \quad (2)$$



Hình 37

Từ (1) và (2) suy ra : $\begin{cases} IA = IE \\ IE = ID \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{E}_1 = \alpha \\ \widehat{D}_2 = \widehat{E}_2 = \beta \end{cases}$ (vì trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau).

diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau).

Áp dụng tính chất về góc vào tam giác ADE, thu được :

$$\widehat{A}_1 + \widehat{AED} + \widehat{D}_2 = 180^\circ \text{ hay } \alpha + \alpha + \beta + \beta = 2(\alpha + \beta) = 180^\circ.$$

Do đó $\alpha + \beta = 90^\circ$. Vậy $\widehat{AED} = 90^\circ$.

III. BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$. Các điểm D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tứ giác BDEC là hình gì ? Tính các góc của nó.

- Tam giác vuông ABC ($\hat{B} = 90^\circ$) có đường cao BD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BD, DC và H là giao điểm của AE, BF. Tính góc AHB.
- Cho tam giác AKC cân tại A có đường cao AB. Kẻ $BD \perp AC$, gọi E là trung điểm của BD. Chứng minh rằng $AE \perp KD$.
- Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B đến tia phân giác của góc A. M là trung điểm của BC. Tính độ dài HM.
- Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 4\text{cm}$; $CD = 10\text{cm}$; $AD = 5\text{cm}$. Lấy điểm E sao cho B là trung điểm của DE. Gọi H là chân đường cao kẻ từ E đến đường thẳng DC. Tính độ dài CH.

DẠNG 2. Vẽ thêm đường trung bình để chứng minh quan hệ về độ dài

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Vẽ thêm đường trung bình.
- Áp dụng định lý đường trung bình của tam giác, của hình thang.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM, D là giao điểm của CI và AB. Chứng minh rằng :

$$DA = \frac{1}{2} DB; \quad DI = \frac{1}{4} DC.$$

Lời giải (hình 38)

Do M là trung điểm của BC theo giả thiết nên vẽ thêm E là trung điểm của BD thì $BE = ED$ (1), ta được EM là đường trung bình của tam giác BCD.

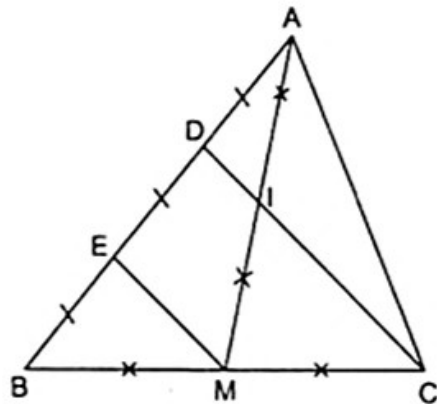
Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác BCD, ta được :

$$ME \parallel DC \text{ (2) và } DC = 2ME \text{ (3).}$$

Từ (2) $\Rightarrow ME \parallel DI$ mà $AI = IM$ theo giả thiết.

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác AME, ta được : $AD = DE$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $AD = DE = EB$ (5) hay $AD = \frac{1}{2} DB$.



Hình 38

Từ (4) và (5) ta có DI là đường trung bình của tam giác AEM.

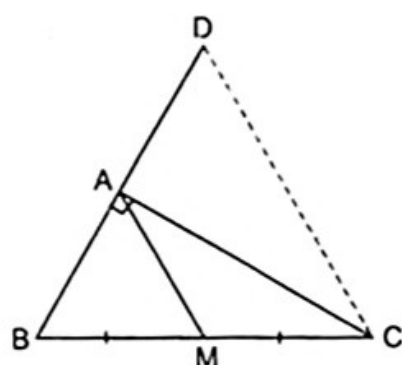
Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác AEM, ta có : $ME = 2DI$ (6)

Thay (6) vào (3) ta được : $DC = 2.2DI = 4DI$ hay $DI = \frac{1}{4} DC$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) trung tuyến AM. Chứng minh rằng $BC = 2AM$.

Lời giải (hình 39)

Do M là trung điểm của BC theo giả thiết nên vẽ thêm điểm D sao cho A là trung điểm của BD, ta có AM là đường trung bình của tam giác BCD. Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác BCD thu được $CD = 2AM$.



Hình 39

(1)

Từ giả thiết $\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow CA \perp BD$ nên CA là đường trung trực của đoạn BD do đó $CB = CD$.

Thay $CD = CB$ vào đẳng thức (1) ta được $CB = 2AM$.

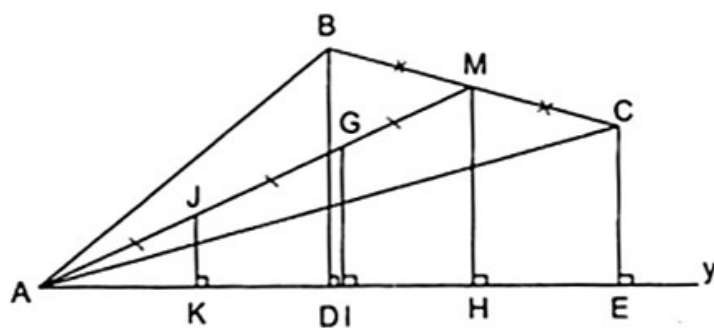
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Vẽ đường thẳng Ay bất kỳ sao cho Ay không cắt cạnh BC. Kẻ các đường thẳng BD, CE, MH, GI cùng vuông góc với Ay. Chứng minh rằng : $BD + CE = 2MH$ và $BD + CE = 3GI$.

Lời giải (hình 40)

Theo giả thiết M là trung điểm của BC nên AM là trung tuyến của tam giác ABC.

Nên trọng tâm G của tam giác nằm trên trung tuyến AM và

$$AG = \frac{2}{3} AM.$$



Hình 40

Gọi J là trung điểm của AG thì $JA = JG = GM$. (1)

Vẽ $JK \perp Ay$ ($K \in Ay$) ta có $JK \parallel GI \parallel MH \parallel BD \parallel CE$. (2)

Ta được hai hình thang vuông BDEC và JKHM.

Từ (1) và (2) suy ra $AK = KI = IH$ và $DH = HE$ theo định lý đường trung bình.

Do đó JK là đường trung bình của tam giác AIG và GI, MH lần lượt là đường trung bình của hai hình thang vuông JKHM và BDEC.

Áp dụng định lí đường trung bình vào hai hình thang vuông BDEC, JKHM, ta được : $BD + CE = 2MH$ (3) và $MH + JK = 2GI$. (4)

Áp dụng định lí đường trung bình vào tam giác AIG, ta có : $JK = \frac{1}{2}GI$. (5)

Thay (5) vào (4), ta được : $MH + \frac{1}{2}GI = 2GI \Rightarrow MH = \frac{3}{2}GI$. (6)

Thay (6) vào (3), ta có : $BD + CE = 3GI$.

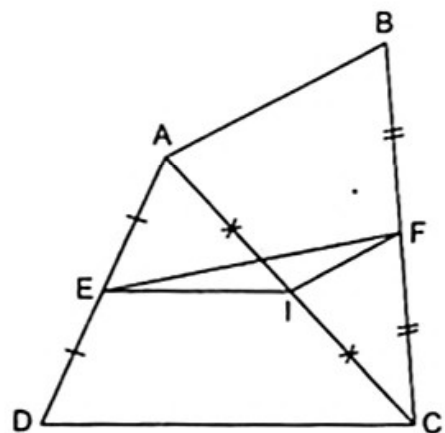
Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, I thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC. Chứng minh rằng :

a) $EI \parallel CD$, $FI \parallel AB$;

b) $FE \leq \frac{AB + CD}{2}$.

Lời giải (hình 41)

a) Từ giả thiết $\begin{cases} AE = ED \\ AI = IC \end{cases} \Rightarrow EI$ là đường trung bình của $\triangle ADC$.



Hình 41

Áp dụng định lí đường trung bình vào $\triangle ADC$, ta được :

$$EI \parallel DC, EI = \frac{1}{2}DC. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có FI là đường trung bình của tam giác ABC, nên :

$$FI \parallel AB, FI = \frac{1}{2}AB. \quad (2)$$

b) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào $\triangle FIE$, ta có : $FE \leq EI + FI$, hay

$$FE \leq \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB = \frac{AB + CD}{2}, \text{ do (1) và (2).}$$

Dấu bằng xảy ra khi I nằm giữa E và F hay F, I, E thẳng hàng tức là $AB \parallel CD$.

III. BÀI TẬP

6. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi D là một điểm trên cạnh AC sao cho $AD = \frac{1}{3}AC$, BD cắt AM tại I. Chứng minh : $AI = IM$.

7. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) có đường cao AH . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB . Chứng minh rằng :
 - a) NP là trung trực của đoạn AH .
 - b) Tứ giác MNP là hình thang cân.
8. Cho $\triangle ABC$ ($AB = AC$). Lấy điểm D trên cạnh AB , điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. Gọi I là giao điểm của DE với cạnh BC . Chứng minh : $DI = IE$.
9. Cho $\triangle ABC$ ($AB = AC$), trung tuyến BD . Lấy điểm E sao cho C là trung điểm của AE . Chứng minh rằng $BE = 2BD$.
10. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . Qua O là trung điểm của trung tuyến AM kẻ đường thẳng d sao cho d cắt cả hai cạnh AB, AC . Gọi H, K, I lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ các điểm A, B, C đến đường thẳng d . Chứng minh rằng $BK + CI = 2AH$.
11. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm. Qua G kẻ đường thẳng d sao cho d cắt cả hai cạnh AB, AC . Gọi H, K, L lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B, C đến đường thẳng d . Chứng minh rằng $AH = BK + CL$.

DẠNG 3. Về thêm đường trung bình để chứng minh hai đường thẳng song song, chứng minh ba điểm thẳng hàng.

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ thêm đường trung bình.
2. Áp dụng định lí đường trung bình của tam giác, của hình thang.
3. Sử dụng tiên đề Ô-clit về đường thẳng song song : Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó hoặc sử dụng tính chất nếu một góc là góc bẹt thì hai cạnh của góc ấy là hai tia đối nhau hay hai cạnh của góc này nằm trên một đường thẳng.

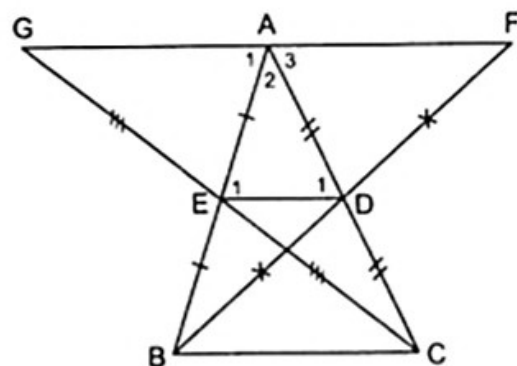
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ kéo dài trung tuyến BD đến F sao cho $DF = BD$ và trung tuyến CE đến G sao cho $EG = CE$. Chứng minh ba điểm G, A, F thẳng hàng.

Lời giải (hình 42)

Vì BD, CE là hai trung tuyến của $\triangle ABC$ theo giả thiết nên D, E lần lượt là trung điểm của AC, AB hay $AD = DC$, $AE = EB$.

Từ giả thiết $DF = BD$, $EG = CE$ suy ra ED là đường trung bình của hai tam giác ACG và ABF.



Hình 42

Áp dụng định lý đường trung bình vào hai tam giác trên, ta được :

$$\begin{cases} GA \parallel ED \\ AF \parallel ED \end{cases} \Rightarrow \text{ba điểm G, A, F thẳng hàng (vì qua điểm A ở ngoài}$$

đường thẳng ED chỉ có một đường thẳng song song với ED).

Ta cũng có thể giải thích lý do trên bằng cách khác :

Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$, $\widehat{A_3} = \widehat{D_1}$ vì là các góc so le trong của $ED \parallel GA$ và $ED \parallel AF$.

Áp dụng tính chất về góc vào $\triangle AED$, thu được :

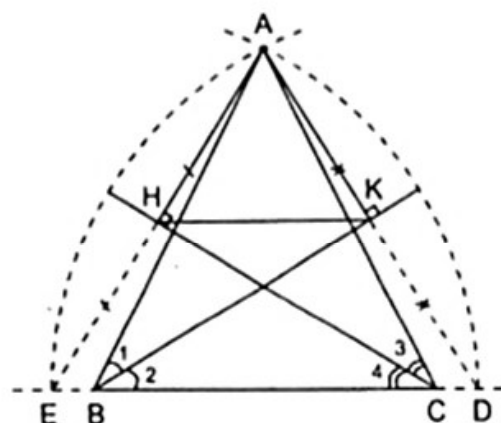
$\widehat{GAF} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{A_2} + \widehat{E_1} + \widehat{D_1} = 180^\circ$ hay góc GAF là góc bẹt suy ra AG và AF là hai tia đối nhau tức là G, A, F thẳng hàng.

Ví dụ 2. Từ đỉnh A của $\triangle ABC$ lần lượt kẻ các đường vuông góc AK, AH xuống các đường phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$. Chứng minh $HK \parallel BC$.

Lời giải (hình 43)

Gọi giao điểm của AH, AK với đường thẳng BC lần lượt là E và D.

Từ giả thiết suy ra BK vừa là đường phân giác vừa là đường cao của $\triangle ABD$ nên tam giác này cân tại B. CH vừa là đường phân giác vừa là đường cao của $\triangle ACE$ nên tam giác này cân tại C. Theo tính chất của tam giác cân thì CH, BK là các đường trung tuyến của $\triangle ACE$ và $\triangle ABD$ hay $AH = HE$, $AK = KD$, nên HK là đường trung bình của $\triangle AED$.



Hình 43

Áp dụng định lý đường trung bình vào $\triangle AED$ thu được $HK \parallel ED$.

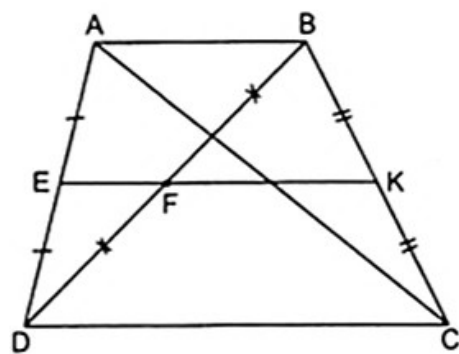
Vậy $HK \parallel BC$.

Ví dụ 3. Hình thang ABCD có đáy AB, CD. Gọi E, F, K thứ tự là trung điểm của AD, BD, BC. Chứng minh ba điểm E, F, K thẳng hàng.

Lời giải (hình 44)

Vì E, F, K thứ tự là trung điểm của AD, BC, BD theo giả thiết nên EF là đường trung bình của $\triangle ABD$, EK là đường trung bình của hình thang ABCD.

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác ABD và hình thang ABCD, ta có :



Hình 44

$$\begin{cases} EF \parallel AB \\ EK \parallel AB \end{cases} \Rightarrow E, K, F \text{ là ba điểm thẳng hàng. Vì từ điểm E ở ngoài}$$

đường thẳng AB chỉ kẻ được một đường thẳng song song với nó.

III. BÀI TẬP

- Cho $\triangle ABC$ các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của GB, GC. Chứng minh $DE \parallel HI$ và $DE = HI$.
- Chứng minh rằng trong một hình thang, trung điểm hai cạnh bên, trung điểm hai đường chéo là bốn điểm thẳng hàng.
- Cho tứ giác ABCD có $AD = BC$. Đường thẳng đi qua hai trung điểm M, N của AB, CD cắt các đường thẳng AD, BC thứ tự tại P và Q. Chứng minh rằng $\widehat{APM} = \widehat{BQM}$.

Chủ đề 4

DỤNG HÌNH BẰNG THƯỚC KÈ VÀ COMPA

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. BÀI TOÁN DỤNG HÌNH

- Bài toán vẽ hình chỉ sử dụng hai dụng cụ là thước và com pa gọi là bài toán dựng hình.
- Khác với bài toán chứng minh (dựa vào tiên đề, định lý).

Ở bài toán dựng hình, những hình cho trước coi là dựng được. Nó dựa vào ba phép dựng hình và bảy bài toán dựng hình cơ bản.

3. Ba phép dựng hình cơ bản.

- Dựng đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt (tiên đề về cái thước).
- Dựng đường tròn biết tâm và bán kính của nó (tiên đề về cái com pa).
- Xác định giao điểm (nếu có) của hai đường.

II. BẢY BÀI TOÁN DỰNG HÌNH CƠ BẢN

1. Dựng một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng cho trước.
2. Dựng một góc bằng một góc cho trước.
3. Dựng đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước, dựng trung điểm của một đoạn thẳng cho trước.
4. Dựng tia phân giác của một góc cho trước.
5. Qua một điểm cho trước, dựng một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
6. Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng cho trước, dựng một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.
7. Dựng một tam giác biết ba yếu tố (c.c.c) hoặc (c.g.c) hoặc (g.c.g).

III. BỐN BƯỚC CỦA MỘT BÀI TOÁN DỰNG HÌNH

1. Phân tích

- a) Giả sử hình cần dựng đã dựng được (vẽ hình giả sử, điền đầy đủ các yếu tố đã cho vào hình vẽ).
- b) Chọn ra (đoạn thẳng, góc, tam giác) dựng được ngay.
- c) Đưa việc dựng các điểm còn lại về các phép dựng hình và các bài toán dựng hình cơ bản.

2. Cách dựng

Nêu thứ tự từng bước dựng hình, đồng thời thể hiện các nét dựng trên hình vẽ.

3. Chứng minh

Bằng lập luận chứng tỏ rằng với cách dựng như trên, hình đã dựng thoả mãn yêu cầu của đề bài.

4. Biện luận

Xét xem khi nào bài toán dựng được và dựng được bao nhiêu hình thoả mãn đề bài.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Dựng tam giác. Dựng góc 30° , 60°

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng : – Các bài toán dựng hình cơ bản, ba phép dựng hình cơ bản.
– Định nghĩa tam giác đều.

II. VÍ DỤ

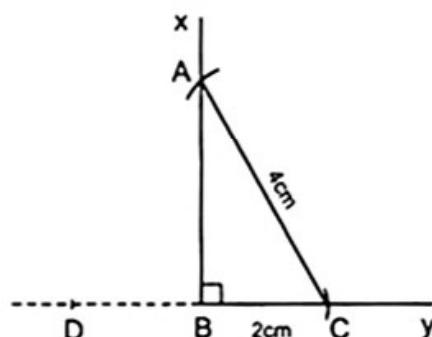
Ví dụ 1. Dựng $\triangle ABC$ vuông tại B, biết cạnh huyền $AC = 4\text{cm}$, cạnh góc vuông $BC = 2\text{cm}$. Nêu nhận xét về các góc của tam giác dựng được. Từ đó suy ra cách dựng góc 60° , 30° .

Lời giải (hình 45)

Đây là bài toán dựng hình cơ bản.

Ta dựng như sau :

- Dựng $\widehat{xBy} = 90^\circ$.
- Dựng cung tròn tâm B bán kính 2cm cắt By ở C.
- Dựng cung tròn tâm C bán kính 4cm cắt Bx ở A. Nối AC ta được $\triangle ABC$ là tam giác cần dựng.



Hình 45

Nhận xét : Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $DB = BC$ thì $\triangle ACD$ là tam giác đều do đó $\triangle ABC$ là nửa tam giác đều suy ra $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$.

Qua bài toán này ta thu được kết quả sau :

Trong một tam giác vuông nếu một cạnh góc vuông bằng một nửa cạnh huyền thì tam giác đó là nửa tam giác đều (người ta hay gọi tam giác vuông có một góc bằng 30° hoặc 60° là nửa tam giác đều). Như vậy muốn dựng góc 60° , 30° ta đi dựng nửa tam giác đều.

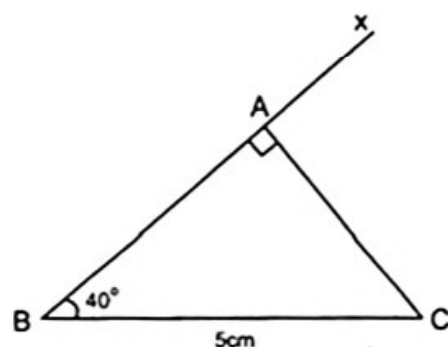
Ví dụ 2. Dựng $\triangle ABC$ vuông tại A, biết cạnh huyền $BC = 5\text{cm}$ và $\hat{B} = 40^\circ$.

Lời giải (hình 46)

Đây là bài toán dựng hình cơ bản.

Cách dựng :

- Dựng đoạn thẳng $BC = 5\text{cm}$.
- Dựng $\widehat{CBx} = 40^\circ$.
- Dựng $CA \perp Bx$.



Hình 46

III. BÀI TẬP

1. Dựng $\triangle ABC$ vuông tại A, biết cạnh huyền $BC = 5\text{cm}$ và cạnh góc vuông $AC = 3\text{cm}$.
2. Dựng góc 45° , 75° , 135° .

DẠNG 2. Dựng hình thang

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Muốn dựng một hình thang cần biết bốn yếu tố (trong đó số góc không được quá hai).
2. Muốn dựng một hình thang cân cần biết ba yếu tố (trong đó số góc không được quá một).
3. Khi phân tích ta tìm ra tam giác biết ba yếu tố, dùng bài toán cơ bản để dựng trước nhằm xác định ba đỉnh của hình thang. Đỉnh thứ tư của hình thang phải thoả mãn hai điều kiện là nằm trên hai đường. Dùng phép dựng cơ bản xác định giao điểm của hai đường (nếu có) để dựng nốt đỉnh này.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Dựng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, $AD = 2,5\text{cm}$ và $AC = 3\text{cm}$.

Lời giải (hình 47)

1. *Phân tích* :

Giả sử đã dựng được hình thang $ABCD$ thoả mãn yêu cầu của đề bài. Ta thấy :

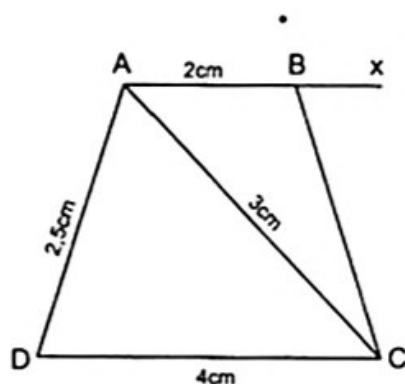
- $\triangle ACD$ dựng được ngay vì biết ba cạnh.
- Ta còn phải xác định đỉnh B.

Đỉnh B phải thoả mãn hai điều kiện nằm trên $Ax \parallel CD$ và cách A một khoảng 2cm . Từ đó suy ra cách dựng.

2. *Cách dựng* :

- Dựng $\triangle ACD$ biết $AC = 3\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, $DA = 2,5\text{cm}$.
- Dựng $Ax \parallel CD$, dựng cung tròn tâm A bán kính 2cm cắt Ax ở B.

Nối BC ta được hình thang $ABCD$.



Hình 47

3. Chứng minh :

Tứ giác ABCD là hình thang vì $AB \parallel CD$.

Hình thang ABCD có $AB = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, $DA = 2,5\text{cm}$ và $AC = 3\text{cm}$ nên thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Ví dụ 2. Dựng hình thang cân ABCD, biết đáy $CD = 3\text{cm}$, đường chéo $AC = 4\text{cm}$, $\widehat{D} = 80^\circ$.

Lời giải (hình 48)

1. Phân tích :

Giả sử đã dựng được hình thang cân ABCD thoả mãn yêu cầu của đề bài.

Ta thấy :

- $\triangle ACD$ dựng được ngay nhờ phép dựng cơ bản.
- Ta còn phải xác định đỉnh B. Đỉnh B phải thoả mãn hai điều kiện, nằm trên $Ay \parallel DC$ và cách D một khoảng bằng 4cm . Từ đó suy ra cách dựng.

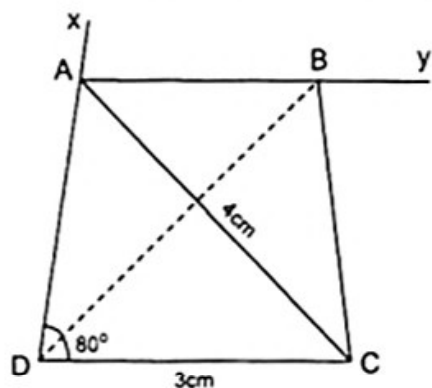
2. Cách dựng :

- Dựng đoạn thẳng $DC = 3\text{cm}$.
- Dựng $\widehat{CDx} = 80^\circ$.
- Dựng cung tròn tâm C bán kính 4cm cắt tia Dx ở A.
- Dựng tia $Ay \parallel DC$. Dựng cung tròn tâm D bán kính 4cm cắt tia Ay ở B.

Nối BC ta được hình thang cân cần dựng.

3. Chứng minh :

Thật vậy, tứ giác ABCD có $AB \parallel CD$ và $AC = BD = 4\text{cm}$ nên là hình thang cân. hình thang cân này có $DC = 3\text{cm}$, $\widehat{D} = 80^\circ$ thoả mãn yêu cầu của bài toán.



Hình 48

III. BÀI TẬP

3. Dựng hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) biết $\widehat{D} = 90^\circ$, đáy $CD = 3\text{cm}$, các cạnh bên $AD = 2\text{cm}$ và $BC = 3\text{cm}$.
4. Dựng hình thang cân ABCD biết đáy $CD = 4\text{cm}$, cạnh bên $AD = 2\text{cm}$ và đường chéo $BD = 3\text{cm}$.

Chủ đề 5

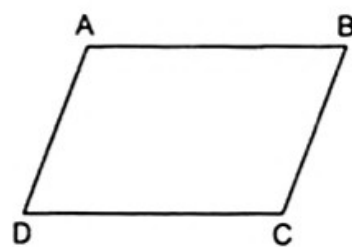
HÌNH BÌNH HÀNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

– Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

– $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ là tứ giác} \\ AB // CD, AD // BC. \end{cases}$



Hình 49

– Hình bình hành là hình thang có hai cạnh bên song song.

2. Tính chất

Tính chất về góc : Các góc đối bằng nhau.

Tính chất về đường trung bình : Đường trung bình của hình bình hành thì song song và bằng hai cạnh còn lại.

Tính chất về cạnh : Các cạnh đối bằng nhau.

Tính chất về đường chéo : Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

Ba dấu hiệu về cạnh :

– Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.

– Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.

– Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.

Một dấu hiệu về góc :

– Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.

Một dấu hiệu về đường chéo :

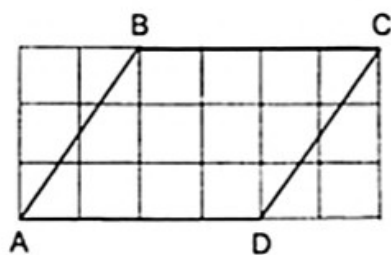
– Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

4. Cách vẽ hình bình hành

Có năm cách vẽ hình bình hành nhưng hay dùng nhất là hai cách sau :

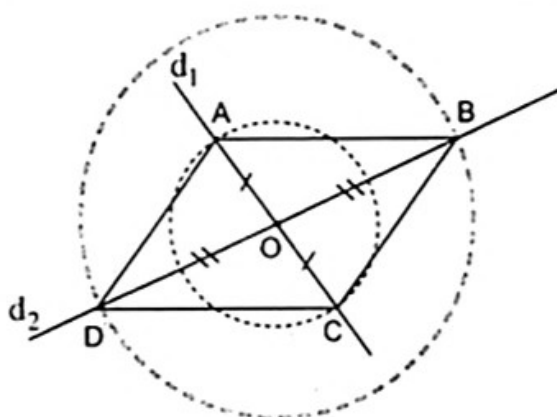
Cách 1: Sử dụng lưới ô vuông để vẽ hai đoạn thẳng song song và bằng nhau (hình 50a).

Cách 2: Trên hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại O , lấy O làm tâm vẽ hai cung tròn, cung thứ nhất cắt d_1 ở A và C , cung thứ hai cắt d_2 ở B và D (hình 50b).



a)

Hình 50



b)

Lưu ý: – Cách 1 không chứng minh được là nhận được hình bình hành, chỉ là ảnh hình bình hành.

– Cách 2 chứng minh được là hình bình hành.

5. Từ tính chất của hình bình hành ta thu được kinh nghiệm thứ hai

Cứ nói tới trung điểm phải nghĩ đến hình bình hành.

Ý nghĩa của kinh nghiệm này là, với các bài toán mà giả thiết hoặc kết luận đề cập đến trung điểm của một đoạn thẳng thì khi vẽ đường phụ ta vẽ hình bình hành để sử dụng tính chất hai cạnh đối song song và bằng nhau hoặc hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường ...

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Nhận dạng hình bình hành, chứng minh ba điểm thẳng hàng, chứng minh các đường thẳng đồng quy

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Nhận dạng hình bình hành : Thường sử dụng dấu hiệu nhận biết về cạnh đối và đường chéo.

2. Chứng minh ba điểm thẳng hàng và các đường thẳng đồng quy dựa vào nhận xét : Nếu hai hình bình hành có một đường chéo chung thì hai đường chéo còn lại đi qua trung điểm của đường chéo chung đó.

II. VÍ DỤ

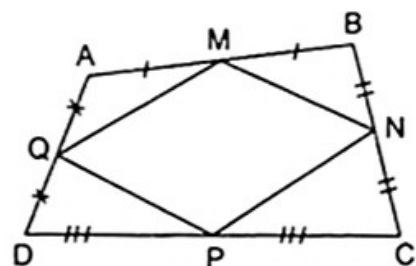
Ví dụ 1. Tứ giác ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác MNPQ là hình gì ? Vì sao ?

Lời giải (hình 51)

Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Giải thích : Thật vậy, từ giả thiết ta có NP, MQ thứ tự là các đường trung bình của hai tam giác ABD và BCD. Áp dụng định lí đường trung bình vào hai tam giác đó, ta được :

$$\begin{cases} MQ \parallel BD \\ MQ = \frac{1}{2} BD \\ NP \parallel BD \\ NP = \frac{1}{2} BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MQ \parallel NP \\ MQ = NP \end{cases}$$



Hình 51

Tứ giác MNPQ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành.

Ví dụ 2. Cho hình 52, trong đó ABCD là hình bình hành.

a) Chứng minh tứ giác AHCK là hình bình hành.

b) Gọi O là trung điểm của HK. Chứng minh ba điểm A, O, C thẳng hàng.

Lời giải (hình 52)

a) Từ giả thiết $\begin{cases} AH \perp BD \\ CK \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \parallel CK. (1)$

Áp dụng tính chất về cạnh vào hình bình hành ABCD và tính chất góc so le của $AD \parallel BC$ ta được :

$$\begin{cases} AD = CB \\ \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ADH = \triangle CBK \text{ (trường hợp cạnh huyền, góc nhọn).}$$

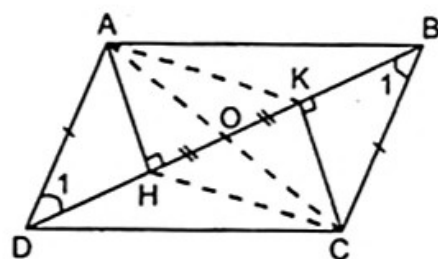
Suy ra $AH = CK.$

(2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác AHCK có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành.

b) Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình bình hành AHCK, ta được hai đường chéo AC và HK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Do O là trung điểm của HK theo giả thiết nên AC đi qua O, hay A, O, C là ba điểm thẳng hàng.



Hình 52

Ví dụ 3. Cho hình bình hành ABCD. Tia phân giác của góc A cắt CD ở E, tia phân giác của góc C cắt AB ở F. Chứng minh rằng :

- Tứ giác AFCE là hình bình hành.
- Các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy tại một điểm.

Lời giải (hình 53)

- Áp dụng định nghĩa vào hình bình hành ABCD, ta được $AB \parallel DC$, suy ra $AF \parallel EC$. (1)

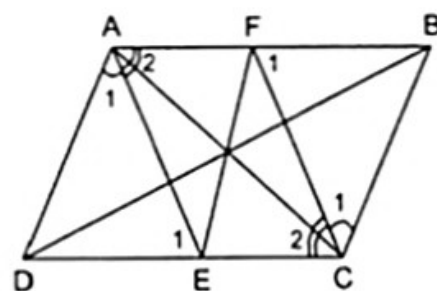
Áp dụng tính chất về góc, giả thiết vào hình bình hành ABCD và tính chất của các cặp góc so le, ta được :

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{A} = \hat{C}, \hat{F}_1 = \hat{C}_1 \end{cases} \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow AE \parallel CF$$

(vì có cặp góc đồng vị bằng nhau). (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác AFCE có các cạnh đối song song nên nó là hình bình hành.

- Áp dụng tính chất về đường chéo vào hai hình bình hành ABCD và AFCE ta được hai đường chéo còn lại của hai hình bình hành trên là BD, FE cùng đi qua trung điểm của đường chéo chung AC. Điều đó chứng tỏ rằng các đường thẳng AC, BD, FE đồng quy tại trung điểm của AC.



Hình 53

III. BÀI TẬP

- Các câu sau đúng hay sai ?
 - Tứ giác có hai cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
 - Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình bình hành.
 - Hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau là hình bình hành.
 - Hình thang có hai cạnh bên song song là hình bình hành.
- Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Vẽ các điểm H, I sao cho D là trung điểm của GH, E là trung điểm của GI. Chứng minh tứ giác BIHC là hình bình hành.
- Cho hình bình hành ABCD. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và DA. Chứng minh rằng :
 - Các tứ giác AMCN và BMDN là hình bình hành.
 - Ba đường thẳng AC, BD, MN đồng quy tại một điểm.

4. Cho hình bình hành ABCD. Lấy M, N, P, Q thứ tự trên các cạnh AB, BC, CD và DA sao cho $AM = BN = CP = DQ$. Chứng minh rằng :
- Các tứ giác BNDQ, MNPQ là hình bình hành.
 - Bốn đường thẳng AC, BD, MP, NQ đồng quy tại một điểm.
5. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD và G, H thứ tự là giao điểm của AF, DE và BF, CE. Chứng minh rằng :
- Các tứ giác AECF và EHFG là hình bình hành.
 - Các đường thẳng AC, FE, GH đồng quy tại một điểm.
- 6*. *Bài toán Gergonne*¹ : Chứng minh rằng trong một tứ giác, các đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối diện và đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo đồng quy tại một điểm.

DẠNG 2. Nhận dạng hình bình hành để chứng minh hai đường thẳng song song.

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Nhận dạng hình bình hành (xem dạng 1).
- Chứng minh hai đường thẳng song song nhờ định nghĩa hình bình hành.

II. VÍ DỤ

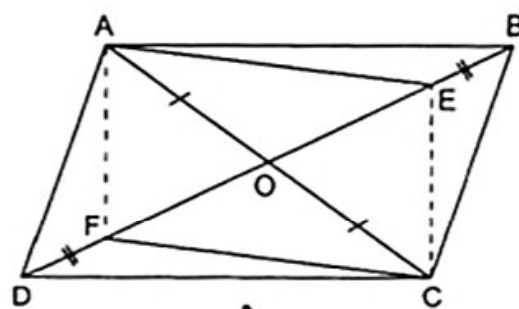
Ví dụ 1. Trên hình 54, cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh $AE \parallel CF$.

Lời giải (hình 54)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Áp dụng tính chất về đường chéo và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta được :

$$\begin{cases} AO = OC \\ DO = OB \\ DF = EB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AO = OC \\ FO = OE \end{cases}$$



Hình 54

Tứ giác AECF có hai đường chéo AC và FE cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành. Theo định nghĩa hình bình hành, ta có $AE \parallel CF$.

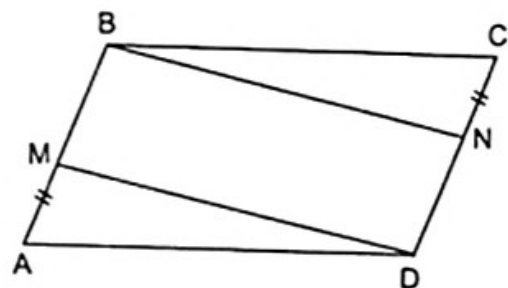
1. Gergonne (1771 – 1859) : Nhà toán học Pháp

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD, trên hai cạnh AB, CD thứ tự lấy hai điểm M, N sao cho $AM = CN$. Chứng minh $BN \parallel DM$.

Lời giải (hình 55)

Áp dụng định nghĩa, tính chất về cạnh và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta được

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \\ AM = CN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MB \parallel DN \\ MB = DN. \end{cases}$$



Hình 55

Tứ giác BNDM có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành. Theo định nghĩa hình bình hành ta có $BN \parallel DM$.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Đường chéo BD cắt AK, CI thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng :

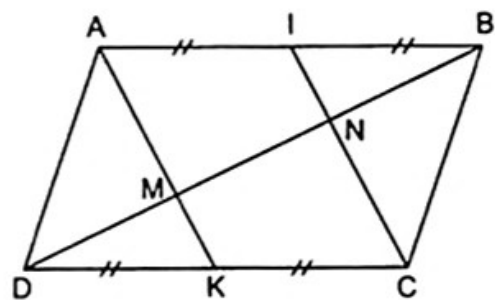
a) $AK \parallel CI$;

b) $DM = MN = NB$.

Lời giải (hình 56)

a). Áp dụng định nghĩa, tính chất về cạnh và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta có

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = DC \\ AI = IB \\ DK = KC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AI \parallel KC \\ AI = KC. \end{cases}$$



Hình 56

Tứ giác AICK có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

Theo định nghĩa hình bình hành ta có $AK \parallel CI$.

b) Từ câu a), tứ giác AICK là hình bình hành nên theo định nghĩa hình bình hành ta có $AK \parallel CI$ suy ra $AM \parallel IN$, $MK \parallel CN$.

Lại có $AI = IB$, $CK = KD$ theo giả thiết.

Áp dụng định lý đường trung bình vào hai tam giác ABM, DCN thu được :

$$\begin{cases} MN = NB \\ DM = MN \end{cases} \Rightarrow DM = MN = NB.$$

III. BÀI TẬP

7. $\triangle ABC$ có đường trung tuyến BD , vẽ điểm E sao cho D là trung điểm của BE . Chứng minh $AE \parallel BC$.
8. Cho tam giác ABC , các trung tuyến AD, BE, CF . Vẽ hai tia $Ax \parallel BC, Ey \parallel AB$ chúng cắt nhau tại G . Chứng minh $AD \parallel GC$.

DẠNG 3. *Vẽ thêm hình bình hành để chứng minh quan hệ về độ dài và tính góc.*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ thêm hình bình hành bằng cách xác định một đoạn thẳng có trung điểm làm một đường chéo, sau đó chọn một trong hai giải pháp sau :

- Vẽ thêm đường chéo thứ hai.
- Kẻ thêm đường thẳng song song.

2. Áp dụng định lí đường trung bình của tam giác.

3. Sử dụng tính chất cặp góc ở vị trí đồng vị hoặc so le của hai đường thẳng song song.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$). Trên cạnh AB lấy điểm D , trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi I là giao điểm của BC và DE . Chứng minh $DI = IE$.

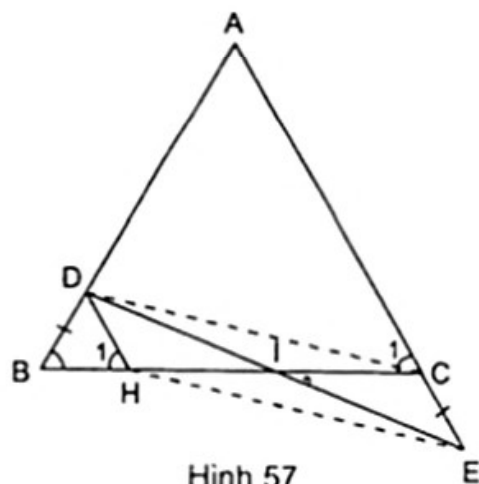
Lời giải (hình 57)

Để chứng minh $DI = IE$ ta chọn DE là một đường chéo. Vẽ thêm hình bình hành $DCEH$ bằng cách kẻ $DH \parallel CE$. (1)

Áp dụng tính chất về góc vào tam giác cân ABC và góc đồng vị của $DH \parallel CE$, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{H_1} \\ \widehat{C_1} = \widehat{B} \end{cases} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{H_1} \Rightarrow BD = DH. \quad (2)$$

(vì trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau).



Lại có $BD = CE$ (3) theo giả thiết nên từ (2) và (3) suy ra $DH = CE$ (4).

Từ (1) và (4) ta có tứ giác $DCEH$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình bình hành $DCEH$ thu được $DI = IE$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM ,

D là giao điểm của BI với AC . Chứng minh rằng $AD = \frac{1}{3} AC$.

Lời giải (hình 58)

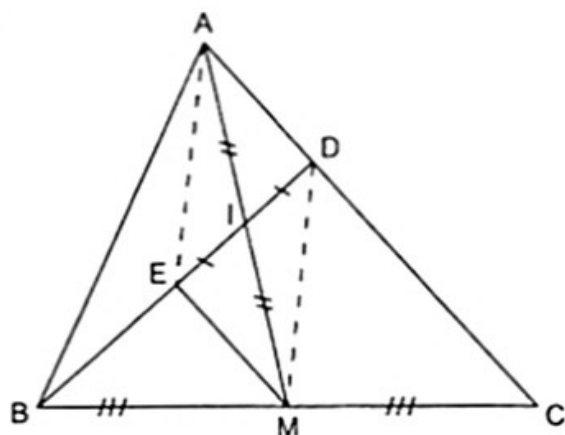
Do I là trung điểm của AM theo giả thiết nên chọn AM là một đường chéo. Vẽ thêm điểm E sao cho I là trung điểm của ED thì tứ giác $ADME$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành.

Áp dụng định nghĩa và tính chất về cạnh vào hình bình hành $ADME$, ta được $ME = AD$ (1) và $ME \parallel AD$, $ME \parallel DC$ (2)

Lại có $BM = MC$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $BE = ED$ theo định lý đường trung bình, lúc đó ME là đường trung bình của $\triangle BDC$.

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác BDC , ta được : $ME = \frac{1}{2} DC$ (4)



Hình 58

Từ (1) và (4) suy ra : $\frac{AD}{1} = \frac{DC}{2} = \frac{AD + DC}{3} = \frac{AC}{3}$. Vậy $AD = \frac{1}{3} AC$.

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ ($AC < AB$) có $\hat{A} = 2\alpha$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC . Tính góc BEF .

Lời giải (hình 59)

Do F là trung điểm của BC theo giả thiết nên chọn BC là một đường chéo. Vẽ thêm điểm K sao cho F là trung điểm của DK thì tứ giác $BDCK$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành. Kết hợp với E là trung điểm của AD ta có FE là đường trung bình của $\triangle ADK$.

Áp dụng tính chất về cạnh vào hình bình hành $BDCK$ và giả thiết, ta được :

$$\begin{cases} BD = KC \\ BD = AC \end{cases}$$

$\Rightarrow AC = KC \Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{A}_2$ (vì trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau). (1)

Lại có $\widehat{K}_1 = \widehat{A}_1$ (vì so le trong). (2)

Từ (1), (2) suy ra

$$\frac{\widehat{A}_1}{1} = \frac{\widehat{A}_2}{1} = \frac{\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha.$$

Hình 59

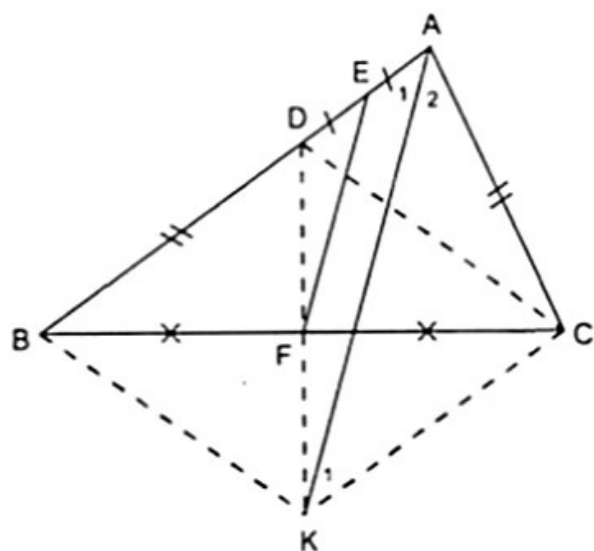
Áp dụng định lí đường trung bình vào $\triangle DAK$ ta được $FE \parallel KA$.

Vậy $\widehat{BEF} = \widehat{A}_1 = \alpha$ vì là góc đồng vị của $FE \parallel KA$.

III. BÀI TẬP

Hãy giải các bài tập sau bằng cách vẽ thêm hình bình hành.

9. Cho tam giác ABC. Qua D là trung điểm của cạnh BC, kẻ một đường thẳng vuông góc với đường phân giác của góc A nó cắt AB ở M và AC ở N. Chứng minh rằng $BM = CN$.
10. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABD và BCE cùng vuông cân tại B, gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $DE = 2BM$.
- 11*. Cho tam giác ABC có góc A tù. Trong góc A vẽ các đoạn thẳng AD, AE sao cho AD vuông góc và bằng AB, AE vuông góc và bằng AC. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng $AM \perp BC$.
- 12*. Vẽ ra ngoài $\triangle ABC$ các tam giác ABD vuông cân tại B, ACE vuông cân tại C. Gọi M là trung điểm của DE. Tam giác BMC là tam giác gì? Vì sao?



PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC VÀ ĐỐI XỨNG TÂM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

1. Định nghĩa

a) Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Quy ước : Nếu $B \in d$ thì ta nói B đối xứng với B qua d .

b) Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại. Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hai hình đó.

2. Các tính chất thừa nhận

Tính chất 1 : Nếu các điểm A và A' , B và B' , C và C' đối xứng với nhau qua đường thẳng d trong đó C nằm giữa A và B thì C' nằm giữa A' và B' . Tính chất này cho phép ta vẽ hai hình đối xứng với nhau qua một trục.

Tính chất 2 : Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua một trục thì chúng bằng nhau.

3. Hình có trục đối xứng

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình F nếu mỗi điểm thuộc hình F đều có điểm đối xứng với nó qua d cũng thuộc hình F . Lúc đó ta nói hình F có trục đối xứng.

4. Trục đối xứng của một số hình

a) Đường trung trực của một đoạn thẳng là trục đối xứng của đoạn thẳng đó.

b) Tia phân giác của một góc là trục đối xứng của góc đó.

c) Đường trung trực của cạnh đáy tam giác cân là trục đối xứng của tam giác cân đó.

d) Đường trung trực của các cạnh tam giác đều là các trục đối xứng của tam giác đều đó.

e) Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

f) Mỗi đường kính của hình tròn là một trục đối xứng của hình tròn đó.

II. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1. Định nghĩa

a) Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Quy ước : Điểm đối xứng với O qua điểm O chính là điểm O .

b) Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại. Điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình đó.

2. Các tính chất thừa nhận

Giống như các tính chất thừa nhận của phép đối xứng trục.

3. Hình có tâm đối xứng

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình F nếu mỗi điểm thuộc hình F đều có điểm đối xứng với nó qua O cũng thuộc hình F . Lúc đó ta nói hình F có tâm đối xứng.

4. Tâm đối xứng của một số hình

a) Trung điểm của đoạn thẳng là tâm đối xứng của đoạn thẳng đó.

b) Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. *Vẽ hình đối xứng qua trục, qua tâm. Chứng minh hai hình đối xứng qua trục, qua tâm*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng định nghĩa của phép đối xứng trục, đối xứng tâm.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AH . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Chứng minh rằng :

a) D đối xứng với E qua AH ;

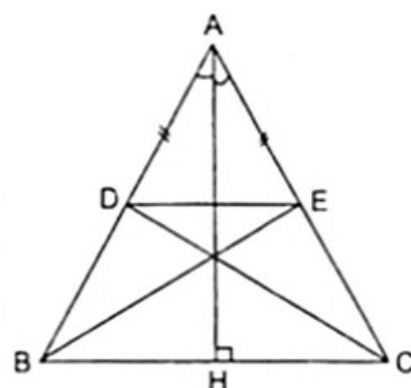
b) $\triangle ADC$ đối xứng với $\triangle AEB$ qua AH .

Lời giải (hình 60)

a) Vì $\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao theo giả thiết nên AH là tia phân giác của góc A .

Lại có $AD = AE$ do giả thiết nên $\triangle ADE$ cân tại A, suy ra AH là đường trung trực của DE. Vậy D đối xứng với E qua AH.

b) Vì AH là đường cao của $\triangle ABC$ cân tại A nên AH là đường trung trực của BC suy ra B đối xứng với C qua AH. E đối xứng với D qua AH lại có A đối xứng với A qua AH theo quy ước. Vậy $\triangle ADC$ đối xứng với $\triangle AEB$ qua AH.



Hình 60

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với D qua điểm A và F là điểm đối xứng với D qua điểm C. Chứng minh rằng điểm E đối xứng với điểm F qua điểm B.

Lời giải (hình 61)

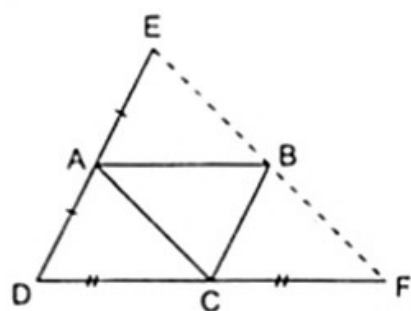
Vẽ các điểm E và F sao cho : A là trung điểm của DE hay $DA = AE$ (1); C là trung điểm của DF hay $DC = CF$ (2) thì E đối xứng với D qua A và F đối xứng với D qua C.

Vì ABCD là hình bình hành nên $AD \parallel BC$

$\Rightarrow AE \parallel BC$ (3) và $DA = BC$. (4)

Từ (1), (4) suy ra $AE = BC$. (5)

Từ (3) và (5) ta có tứ giác ACBE có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.



Hình 61

Áp dụng định nghĩa và tính chất về cạnh vào hình bình hành ACBE, ta được :

$AC \parallel BE$ và $AC = BE$. (6)

Chứng minh tương tự, ta được tứ giác ACBF là hình bình hành nên

$AC \parallel BF$; $BF = AC$. (7)

Từ (6), (7) suy ra E, B, F thẳng hàng và $BE = BF$ do đó B là trung điểm của EF hay E đối xứng với F qua B.

Ví dụ 3. Cho góc vuông xOy, điểm A nằm trong góc đó. Gọi B là điểm đối xứng với A qua Ox, C là điểm đối xứng với A qua Oy. Chứng minh rằng điểm B đối xứng với điểm C qua O.

Lời giải (hình 62)

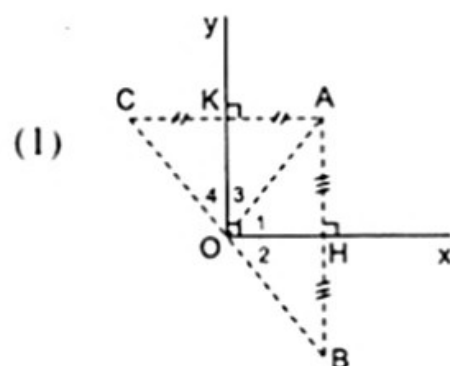
Vẽ $AH \perp Ox$, $AK \perp Oy$, vẽ hai điểm B, C sao cho H, K lần lượt là trung điểm của AB, AC thì B đối xứng với A qua Ox, C đối xứng với A qua Oy. Vì $O \in Ox$, $O \in Oy$ nên O đối xứng với O qua Ox, Oy.

Áp dụng tính chất của phép đối xứng trục, ta có :

$$\begin{cases} OA = OB \\ OA = OC \end{cases} \Rightarrow OB = OC.$$

$$\text{và } \begin{cases} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \\ \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \end{cases} \Rightarrow \frac{\widehat{O_1} + \widehat{O_4}}{1} = \frac{\widehat{O_2} + \widehat{O_3}}{1} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ.$$



(1)

(2)

Hình 62

Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm của đoạn BC nên B đối xứng với C qua O.

III. BÀI TẬP

- Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với H qua AB, điểm E đối xứng với H qua AC. Chứng minh rằng :
 - Đoạn thẳng AD đối xứng với AH, đoạn thẳng BD đối xứng với BH qua trục AB. Đoạn thẳng AE đối xứng với AH, đoạn thẳng CE đối xứng với CH qua trục AC.
 - $\triangle ADB$ đối xứng với $\triangle AHB$ qua trục AB, $\triangle AEC$ đối xứng với $\triangle AHC$ qua trục AC.
- Cho $\triangle ABC$, các đường trung tuyến BD, CE. Gọi H là điểm đối xứng với C qua E, K là điểm đối xứng với B qua D. Chứng minh rằng điểm H đối xứng với điểm K qua điểm A.
- Cho $\triangle ABC$, trung tuyến BD. Gọi E đối xứng với B qua A, I đối xứng với B qua D, F đối xứng với B qua C. Chứng minh rằng E đối xứng với F qua I.
- Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường cao AH. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng điểm D đối xứng với điểm E qua AH.
- Cho hình bình hành ABCD, các đường chéo cắt nhau tại O. Trên hai cạnh AB, CD lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng điểm M đối xứng với điểm N qua O.
- Cho hình bình hành ABCD. Gọi M là điểm đối xứng với D qua điểm A, N là điểm đối xứng với D qua điểm C. Chứng minh rằng điểm M đối xứng với điểm N qua điểm B.

DẠNG 2. Nhận dạng hai hình đối xứng qua trục, qua tâm để chứng minh hai hình bằng nhau

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

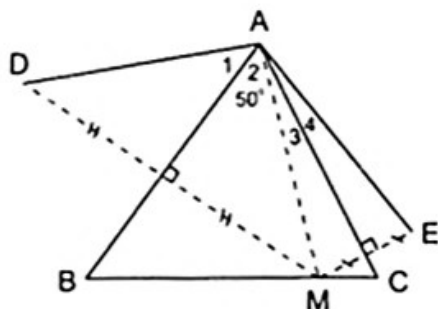
Sử dụng định nghĩa, tính chất của phép đối xứng trục, đối xứng tâm.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 50^\circ$, điểm M thuộc cạnh BC . Vẽ điểm D đối xứng với M qua AB , vẽ điểm E đối xứng với M qua AC .

a) Chứng minh rằng $AD = AE$.

b) Tính số đo góc DAE .



Hình 63

Lời giải (hình 63)

a) Vì D đối xứng với M qua AB , E đối xứng với M qua AC theo giả thiết và A đối xứng với A qua AB , AC nên AD đối xứng với AM qua AB , AE đối xứng với AM qua AC . Áp dụng tính chất của phép đối xứng trục, ta được :

$$\begin{cases} AM = AD \\ AM = AE \end{cases} \Rightarrow AD = AE.$$

b) Theo câu a), ta có $\widehat{A_1}$ đối xứng với $\widehat{A_2}$ qua AB , $\widehat{A_3}$ đối xứng với $\widehat{A_4}$ qua AC . Áp dụng tính chất của phép đối xứng trục, ta có :

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \widehat{A_3} = \widehat{A_4} \end{cases} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_4} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{A} = 50^\circ, \text{ suy ra } \widehat{DAE} = 100^\circ.$$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 70^\circ$, trực tâm H . Gọi M là điểm đối xứng với H qua BC .

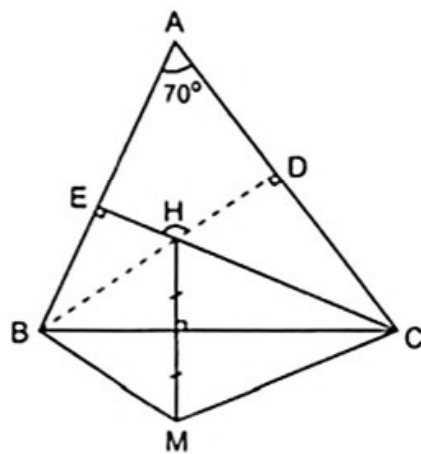
a) Chứng minh $\triangle BHC = \triangle BMC$;

b) Tính $\widehat{BMC}$.

Lời giải (hình 64)

a) Vì M đối xứng với H qua BC , B đối xứng với B qua BC , C đối xứng với C qua BC suy ra $\triangle BHC$ đối xứng với $\triangle BMC$ qua BC . Áp dụng tính chất của phép đối xứng trục, ta được $\triangle BHC = \triangle BMC$.

b) Gọi giao điểm của BH với AC là D , giao điểm của CH với AB là E thì BD , CE là hai đường cao của tam giác ABC suy ra $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$.



Hình 64

Áp dụng tính chất về góc vào tứ giác ADHE, ta được : $\widehat{A} + \widehat{D} + \widehat{H} + \widehat{E} = 360^\circ$,
hay $70^\circ + 90^\circ + \widehat{EHD} + 90^\circ = 360^\circ$, hay $\widehat{EHD} = 110^\circ$ (1)

Do $\triangle BHC = \triangle BMC$ theo câu a) suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{BHC}$ (2)

Lại có $\widehat{BHC} = \widehat{EHD}$ (vì đối đỉnh) (3)

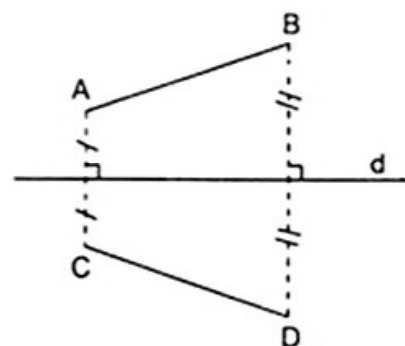
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{BMC} = 110^\circ$.

Ví dụ 3. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Vẽ hai điểm C đối xứng với A qua d, D đối xứng với B qua d. Chứng minh rằng ABDC là hình thang cân.

Lời giải (hình 65)

Vẽ $AH \perp d$, $BK \perp d$. Lại vẽ hai điểm C, D sao cho H là trung điểm của AC, K là trung điểm của BD ta được C đối xứng với A qua đường thẳng d, D đối xứng với B qua đường thẳng d.

Suy ra $AC \parallel BD$ (1) và AD đối xứng với CB qua trục d. Do đó theo tính chất của hai hình đối xứng qua trục ta có $AD = CB$ (2)



Hình 65

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABDC có hai cạnh đối song song và hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình thang cân.

III. BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$. Gọi d là đường trung trực của AC, vẽ điểm D đối xứng với điểm B qua đường thẳng d. Tính số đo góc CDB.
- Cho hình thang vuông ABCD $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi E là điểm đối xứng của điểm C qua trục AD và I là giao điểm của AD, BE. Chứng minh rằng $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$.
- Cho tam giác ABC có D, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Gọi O là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Vẽ điểm M đối xứng với O qua D, vẽ điểm N đối xứng với O qua E. Chứng minh rằng tứ giác MNCB là hình bình hành.
- Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Qua O vẽ hai đường thẳng, một đường cắt hai cạnh AB, CD ở E và F. Đường kia cắt hai cạnh AD, BC ở G, H. Chứng minh tứ giác EGFH là hình bình hành.

DẠNG 3*. *Vẽ thêm điểm đối xứng qua trục để chứng minh quan hệ về độ dài*

I. PHƯƠNG PHÁP

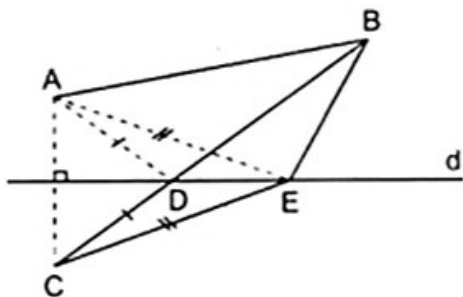
1. Vẽ thêm điểm đối xứng qua trục.
2. Áp dụng tính chất hai hình đối xứng qua một trục.
3. Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác.

II. VÍ DỤ

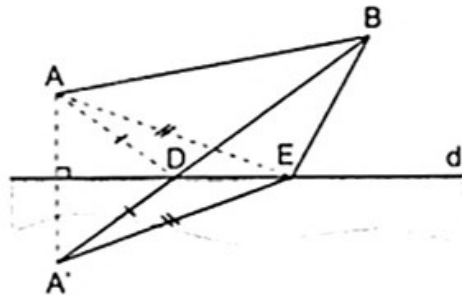
Ví dụ 1. a) Cho hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d (hình 66). Gọi C là điểm đối xứng với A qua d và D là giao điểm của d với đoạn thẳng BC. Vẽ điểm E bất kì trên d (E khác D). Chứng minh rằng $AD + DB < AE + EB$.

b) Bạn Tú đang ở vị trí A, cần đến bờ sông d để lấy nước rồi đi đến vị trí B (hình 67). Hỏi con đường ngắn nhất mà bạn Tú nên đi là con đường nào ?

Lời giải



Hình 66



Hình 67

a) Vì C đối xứng với A qua d nên $DA = DC$, nên

$$AD + DB = CD + DB = CB. \quad (1)$$

$$AE + EB = CE + EB. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào $\triangle BCE$ ta có $CB < CE + EB$. (3)

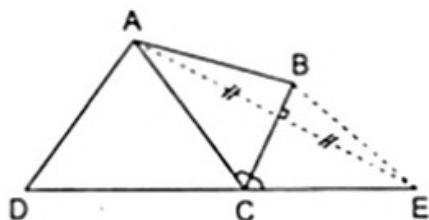
Từ (1), (2) và (3) suy ra $AD + DB < AE + EB$.

b) Con đường ngắn nhất mà bạn Tú nên đi là con đường ADB.

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD có góc ngoài tại đỉnh C bằng góc ACB. Chứng minh rằng $AB + BD > AC + CD$.

Lời giải (hình 68)

Vẽ điểm E đối xứng với điểm A qua trục BC, do C đối xứng với C qua trục BC nên $\widehat{ACB}$ đối xứng với $\widehat{ECB}$ qua BC suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ECB}$ hay $\widehat{ECB}$ là góc ngoài tại đỉnh C của tứ giác hay ba điểm D, C, E thẳng hàng.



Hình 68

Do đó $DE = DC + CE$. (1)

Vì E đối xứng với A qua BC nên $CA = CE$ (2), $AB = BE$. (3)

Ta có $AB + BD = BD + BE$. (4)

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào $\triangle BDE$ ta được $DB + BE > DE$. (5)

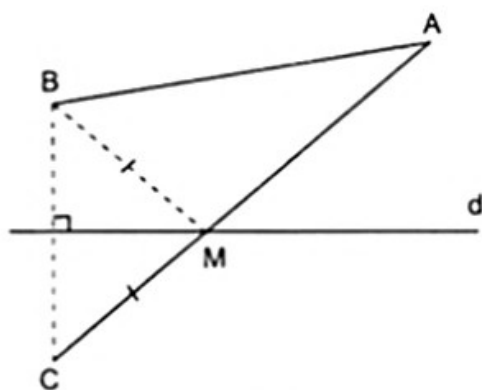
Từ (1), (2), (4) và (5) suy ra $AB + BD > AC + CD$.

Ví dụ 3. Cho hai điểm A, B nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d. Tìm trên d điểm M sao cho tổng $MA + MB$ nhỏ nhất.

Lời giải (hình 69)

Vẽ điểm C đối xứng với B qua trục d, giả sử đã tìm được điểm M trên d thì

$MB = MC$ (1). Do A, B, d cố định nên C cũng cố định suy ra đoạn AC có độ dài không đổi.



Hình 69

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào $\triangle AMC$ ta được $MA + MC \geq AC$ (2).

Dấu bằng xảy ra khi M nằm giữa A và C hay M là giao điểm của d và AC.

Từ (1) và (2) suy ra $MA + MB$ nhỏ nhất bằng AC khi M là giao điểm của d và AC.

III. BÀI TẬP

11. Trên đường phân giác ngoài ở đỉnh C của $\triangle ABC$, lấy điểm M khác C. Chứng minh rằng $AC + CB < AM + MB$.
12. Cho $\triangle ABC$. Hãy tìm điểm N trên cạnh AC sao cho chu vi $\triangle ANB$ bằng độ dài cạnh BC.

Chủ đề 7

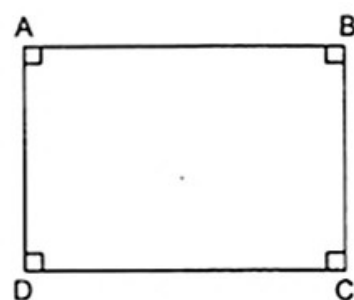
HÌNH CHỮ NHẬT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.
- Tứ giác ABCD là hình chữ nhật

$$\Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ.$$



Hình 70

Từ định nghĩa suy ra hình chữ nhật là một dạng đặc biệt của hình thang cân, hình bình hành.

2. Tính chất

Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân. Nhưng cần chú ý các tính chất sau :

- Các cạnh đối song song và bằng nhau.
- Hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

Ba dấu hiệu về góc :

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

Một dấu hiệu về đường chéo :

- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. Cách vẽ hình chữ nhật

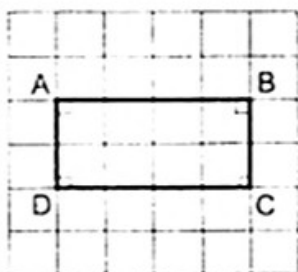
Có bốn cách vẽ hình chữ nhật nhưng hay dùng nhất là hai cách sau :

Cách 1 : Sử dụng lưới ô vuông để vẽ tứ giác có bốn góc vuông (hình 71a).

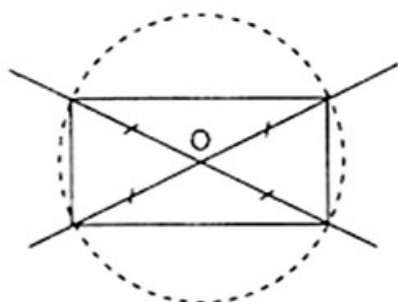
Cách 2 : Vẽ tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường theo hai bước (hình 71b) :

Bước 1 : Vẽ hai đường thẳng cắt nhau tại O.

Bước 2 : Vẽ đường tròn tâm O bán kính bất kì cắt hai đường trên tại bốn điểm ta được bốn đỉnh của hình chữ nhật.



a)



b)

Hình 71

Lưu ý: – Cách 1 không chứng minh được là nhận được hình chữ nhật, chỉ là ảnh hình chữ nhật.

– Cách 2 chứng minh được là hình chữ nhật.

5. Áp dụng vào tam giác

– Trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng cạnh huyền bằng nửa cạnh ấy.

– Dấu hiệu nhận biết tam giác vuông : Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

6. Từ tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta thu được kinh nghiệm thứ ba

Cứ nói đến tam giác vuông phải nghĩ tới trung tuyến thuộc cạnh huyền

Ý nghĩa của kinh nghiệm này là : Với các bài toán mà giả thiết hoặc kết luận đề cập đến tam giác vuông thì khi vẽ đường phụ ta vẽ thêm đường trung tuyến ứng với cạnh huyền.

7. Từ dấu hiệu nhận biết tam giác vuông ta có cách vẽ $\triangle ABC$ vuông tại A theo hai bước sau

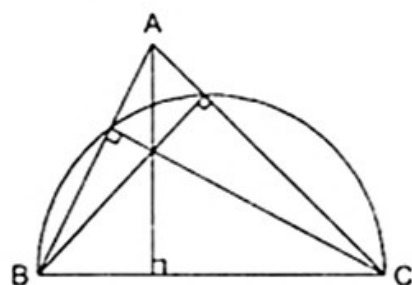
Bước 1 : Vẽ đường tròn đường kính BC.

Bước 2 : Lấy điểm A bất kì trên đường tròn ta được $\triangle ABC$ vuông tại A.

8. Từ dấu hiệu nhận biết tam giác vuông ta có cách vẽ các đường cao của tam giác nhọn ABC bằng thước kẻ và compa theo hai bước

Bước 1 : Vẽ nửa đường tròn đường kính BC (hình 72).

Bước 2 : Giao điểm của hai cạnh AB, AC với nửa đường tròn chính là chân đường cao kẻ từ C và B. Giao điểm của hai đường cao là trực tâm của tam giác, nối đỉnh A với trực tâm ta được đường cao thứ ba.



Hình 72

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Nhận dạng hình chữ nhật, chứng minh ba điểm thẳng hàng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Nhận dạng hình chữ nhật theo ba cách sau :

Cách 1 : Chứng minh tứ giác có bốn góc bằng nhau.

Cách 2 : Chứng minh tứ giác là một hình thang cân có thêm một góc vuông.

Cách 3 : Chứng minh tứ giác là hình bình hành có thêm một góc vuông hoặc hai đường chéo bằng nhau.

2. Chứng minh ba điểm thẳng hàng nhờ tính chất về góc bẹt hoặc tính chất về đường chéo của hình chữ nhật hoặc tiên đề O-cơ-lít về đường thẳng song song.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình bình hành ABCD. Các tia phân giác của các góc A, B, C, D cắt nhau như trên hình vẽ (hình 73). Chứng minh rằng EFGH là hình chữ nhật.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \alpha \\ \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \beta \end{cases}$. Áp dụng tính chất góc trong

cùng phía vào $AB \parallel CD$, ta được :

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 2(\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Áp dụng tính chất về góc vào $\triangle ADE$, ta được : $\alpha + \beta + \widehat{E} = 180^\circ$, hay

$$\widehat{E} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

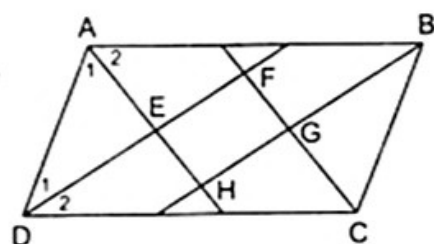
Chứng minh tương tự ta được $\widehat{F} = \widehat{G} = \widehat{H} = 90^\circ$.

Tứ giác EFGH có bốn góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Ví dụ 2. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì ? Vì sao ?

Lời giải (hình 74)

Tứ giác EFGH là hình chữ nhật.



Hình 73

Giải thích : Từ giả thiết ta có EF, GH thứ tự là đường trung bình của các tam giác ABC và ADC.

Áp dụng định lí đường trung bình vào hai tam giác này ta được $\begin{cases} EF // AC \\ HG // AC \end{cases} \Rightarrow EF // HG // AC. \quad (1)$

Chứng minh tương tự, ta cũng được $EH // FG // BD.$

Từ (1) và (2) tứ giác EFGH có các cạnh đối song song nên nó là hình bình hành.

Gọi O là giao điểm của AC với BD và I là giao điểm của EF với BD :

Áp dụng tính chất góc đồng vị vào các đường thẳng song song ở trên và giả

$$\text{thiết ta có } \begin{cases} \widehat{E}_1 = \widehat{I}_1 \\ \widehat{I}_1 = \widehat{O}_1 \\ \widehat{O}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{E}_1 = 90^\circ.$$

Như vậy hình bình hành EFGH có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

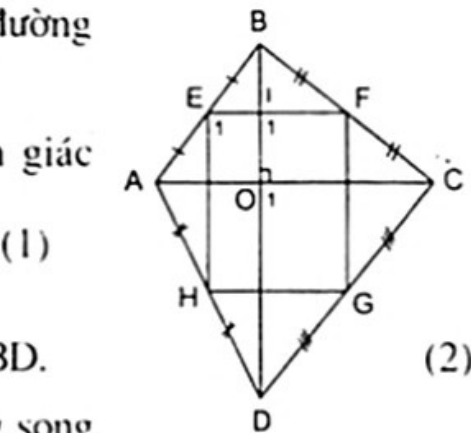
Ví dụ 3. Bài toán thực tế

Một đội công nhân đang trồng cây trên đoạn đường AB thì gặp chướng ngại vật che lấp tầm nhìn (hình 75). Đội đã dựng các điểm C, D, E như trên hình vẽ rồi trồng cây tiếp trên đoạn đường EF vuông góc với DE. Vì sao AB và EF cùng nằm trên một đường thẳng ?

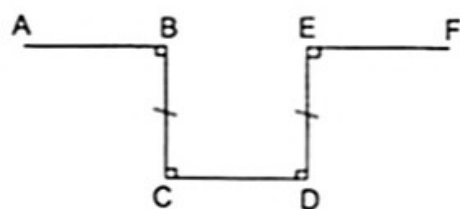
Lời giải (hình 75)

Theo hình 75, tứ giác BCDE có $BC = ED$ và $BC // ED$ vì có góc trong cùng phía bù nhau. Tứ giác BCDE có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành. Hình bình hành BCDE lại có góc C vuông nên là hình chữ nhật.

Do đó $\widehat{CBE} = \widehat{DEB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{BEF} = 180^\circ$ suy ra A, B, E thẳng hàng và B, E, F cũng thẳng hàng. Vậy AB, EF cùng nằm trên một đường thẳng.



Hình 74



Hình 75

III. BÀI TẬP

1. Các câu sau đúng hay sai ?

a) Tứ giác có tất cả các góc bằng nhau là hình chữ nhật.

- b) Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
 c) Hình thang cân có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
 d) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
2. Hãy nêu các tính chất về đường chéo hình chữ nhật. Chỉ rõ tính chất nào được suy từ hình bình hành, hình thang.
3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, từ điểm D trên cạnh huyền BC vẽ $DE \perp AB$, $DF \perp AC$.
 a) Chứng minh rằng AEDF là hình chữ nhật.
 b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh ba điểm A, I, D thẳng hàng.
4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại O. Gọi M là điểm đối xứng với O qua D và N là điểm đối xứng với O qua E. Tứ giác BNMC là hình gì ? Vì sao ?

DẠNG 2. *Vẽ thêm hình chữ nhật để tính độ dài đoạn thẳng, tính góc, chứng minh quan hệ về độ dài*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ thêm hình chữ nhật bằng cách kẻ đường vuông góc hoặc vẽ thêm hình bình hành có một góc vuông.

2. Áp dụng :

- Tính chất về cạnh hoặc đường chéo của hình chữ nhật, định lý Py-ta-go.
- Định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông.

II. VÍ DỤ

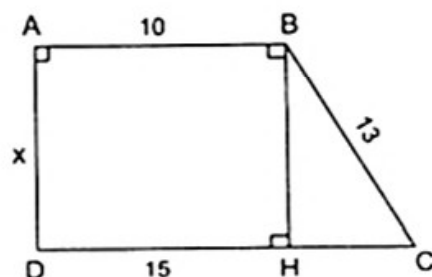
Ví dụ 1. Tính x trên hình 76.

Lời giải

Kẻ $BH \perp DC$ thì tứ giác ABHD có ba góc vuông là $\hat{A} = \hat{D} = \hat{H} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật.

Áp dụng tính chất về cạnh vào hình chữ nhật ABHD, thu được :

$$DH = AB = 10, BH = AD = x.$$



Hình 76

Do đó $CH = CD - DH = 15 - 10 = 5$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác BHC vuông tại H thu được :

$$BC^2 = CH^2 + HB^2 \Leftrightarrow 13^2 = 5^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 12^2.$$

Vậy $x = 12$.

Ví dụ 2. Cho hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ và $DC = BC = 2AB$. Tính $\widehat{ABC}$, từ đó suy ra cách vẽ hình.

Lời giải (hình 77)

Vẽ $BH \perp DC$ (1) thì tứ giác ABHD có $\hat{A} = \hat{D} = \hat{H} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật. Áp dụng tính chất về cạnh vào hình chữ nhật ABHD, ta được :

$$DH = AB. \quad (2)$$

$$\text{Mà } DC = 2AB \text{ (theo giả thiết).} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } DC = 2HC \text{ nên } DH = HC. \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4) ta có BH là đường trung trực của DC, do đó } BC = BD. \quad (5)$$

$$\text{Lại có } DC = BC \text{ (theo giả thiết).} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $BC = CD = BD$ nên $\triangle BDC$ là tam giác đều, do đó $\hat{C} = 60^\circ$.

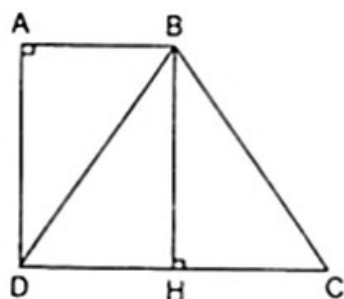
Vì $\widehat{ABC}$ và $\hat{C}$ là hai góc trong cùng phía của $AB \parallel CD$ nên chúng bù nhau hay $\widehat{ABC} + \hat{C} = 180^\circ$, suy ra :

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Từ chứng minh trên ta có cách vẽ hình theo hai bước sau :

Bước 1 : Vẽ tam giác đều BCD, đường cao BH.

Bước 2 : Vẽ hình chữ nhật BHDA.



Hình 77

Ví dụ 3*. Cho hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ và $DC = 2AB$. Kẻ $DE \perp AC$ gọi I là trung điểm của EC. Chứng minh rằng $\widehat{BID} = 90^\circ$.

Lời giải (hình 78)

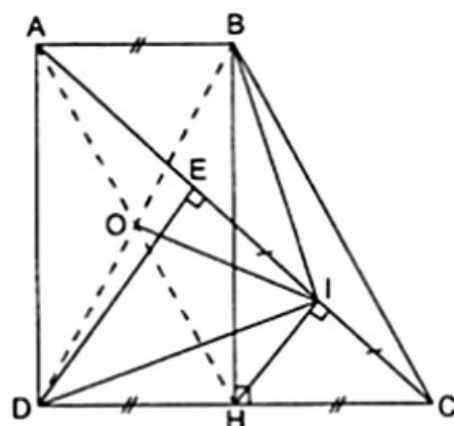
Vẽ $BH \perp DC$ thì tứ giác ABHD có ba góc vuông là $\hat{A} = \hat{D} = \hat{H} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật.

Áp dụng tính chất về cạnh và giả thiết vào hình chữ nhật ABHD, ta được :

$$\begin{cases} AB = DH \\ DC = 2AB \\ DC = DH + HC \end{cases} \Rightarrow DH = HC. \quad (1)$$

$$\text{Lại có } EI = IC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra HI là đường trung bình của tam giác DCE.



Hình 78

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác DCE thu được $HI \parallel DE$ do $DE \perp AC$ theo giả thiết nên $HI \perp AC$ hay tam giác AIH vuông tại I.

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình chữ nhật ABHD ta được $AO = OH$, $BO = OD$ nên IO là trung tuyến của hai tam giác vuông AIH và BID.

Áp dụng định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào tam giác vuông AHI và tính chất về cạnh vào hình chữ nhật ABHD ta được :

$$\begin{cases} AH = BD \\ IO = \frac{1}{2}AH \end{cases} \Rightarrow IO = \frac{1}{2}BD.$$

Điều này chứng tỏ trong tam giác BID trung tuyến IO ứng với cạnh BD bằng nửa cạnh ấy nên nó vuông tại I. Vậy $\widehat{BID} = 90^\circ$.

III. BÀI TẬP

5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường cao BH. Từ điểm M trên cạnh BC kẻ $MP \perp AB$, $MQ \perp AC$. Chứng minh rằng $MP + MQ = BH$.
6. Cho tam giác ABC có góc B nhọn và $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ đường cao AH, trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BH$, gọi I là giao điểm của DH và BC. Chứng minh rằng :
 - a) $AI = IC$.
 - b) $AD = HC$.
7. Cho hình chữ nhật ABCM, kẻ $BD \perp AC$. Gọi E, N lần lượt là trung điểm của AD và CM. Chứng minh rằng $\widehat{BEN} = 90^\circ$.

8. Cho hình chữ nhật ABCM, vẽ $BD \perp AC$. Gọi E, I, H thứ tự là trung điểm của BD, DM, AB. Chứng minh rằng $AE \perp HI$.
9. Cho tam giác AKC cân tại A, đường cao AB. Dựng hình chữ nhật ABCM, vẽ $BD \perp AC$. Gọi F, N lần lượt là trung điểm của CD và AM. Chứng minh $KD \perp FN$.

DẠNG 3. *Vẽ thêm đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh quan hệ về độ dài và tính góc*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

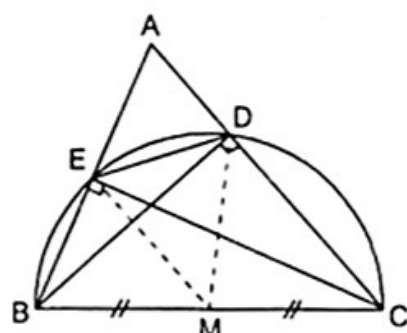
1. Xác định tam giác vuông để vẽ thêm trung tuyến ứng với cạnh huyền.
2. Áp dụng tính chất về trung tuyến ứng với cạnh huyền hoặc dấu hiệu nhận biết tam giác vuông.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD, CE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác MDE cân.

Lời giải (hình 79)

Vì BD, CE là hai đường cao của tam giác ABC theo giả thiết nên $BD \perp AC, CE \perp AB$ suy ra $\triangle BDC$ vuông tại D, $\triangle BEC$ vuông tại E. Do M là trung điểm của BC nên vẽ DM, EM thì DM, EM là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của hai tam giác vuông BDC và BEC.



Hình 79

Áp dụng định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào hai tam giác vuông trên, ta được :

$$\begin{cases} DM = \frac{1}{2} BC \\ EM = \frac{1}{2} BC \end{cases} \Rightarrow DM = EM. \text{ Vậy } \triangle MDE \text{ cân tại M.}$$

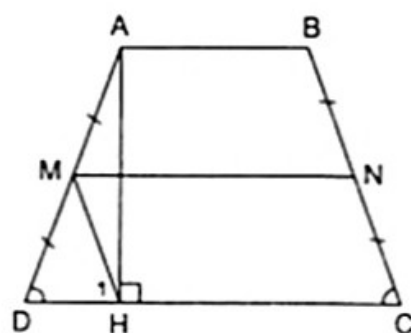
Ví dụ 2. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD, AB < CD$) có đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tính độ dài đoạn MN biết $HC = 5\text{cm}$.

Lời giải (hình 80)

Từ giả thiết ta có MN là đường trung bình của hình thang cân ABCD.

Áp dụng định lý đường trung bình vào hình thang ABCD, ta được :

$$MN \parallel DC \Rightarrow MN \parallel HC. \quad (1)$$



Hình 80

Vì AH là đường cao của hình thang nên $AH \perp DC$ hay tam giác AHD vuông tại H, do M là trung điểm của AD nên vẽ HM thì HM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AD của tam giác vuông AHD.

Áp dụng định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào tam giác vuông AHD và kết hợp với giả thiết, ta được :

$$\begin{cases} HM = \frac{1}{2}AD \\ AM = MD \end{cases} \Rightarrow MH = MD \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{H_1}. \quad (2)$$

$$\text{Lại có } \widehat{D} = \widehat{C}. \quad (3)$$

Do ABCD là hình thang cân nên từ (2) và (3) suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{C}$, do đó :

$$MH \parallel NC. \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta thấy tứ giác MNCH có các cạnh đối song song nên nó là hình bình hành.

Áp dụng tính chất về cạnh vào hình bình hành MNCH và kết hợp với giả thiết $HC = 5\text{cm}$ ta được $MN = HC = 5\text{cm}$.

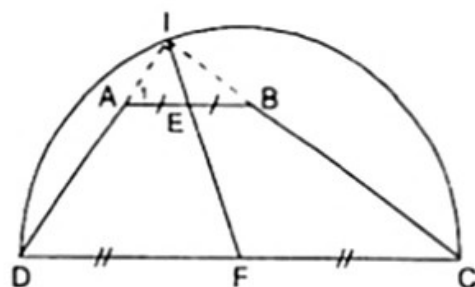
Ví dụ 3. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng $CD - AB = 2EF$.

Lời giải (hình 81)

Gọi I giao điểm của DA và CB. Áp dụng tính chất về góc vào tam giác ICD, ta được :

$$\widehat{I} + \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ.$$

Do $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$ theo giả thiết nên $\widehat{I} = 90^\circ$.
Suy ra tam giác ICD và IAB vuông tại I.



Hình 81

Vẽ IE, IF thì IE, IF là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của hai tam giác vuông IAB và ICD.

Áp dụng định lí đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào hai tam giác vuông trên, ta được :

$$\begin{cases} IE = EA = EB = \frac{AB}{2} \\ IF = FC = FD = \frac{CD}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AIE} = \widehat{A_1} \\ \widehat{DIF} = \widehat{D} \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

(vì trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau).

Mặt khác $\widehat{A_1} = \widehat{D}$ (vì đồng vị). (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $\widehat{AIE} = \widehat{DIF}$

$\Rightarrow I, E, F$ thẳng hàng nên $IF - IE = EF$. (6)

Từ (1), (2) và (6) suy ra $CD - AB = 2EF$.

III. BÀI TẬP

10. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có chiều cao BH bằng đường trung bình MN. Chứng minh rằng $AC \perp BD$. Từ đó suy ra cách vẽ hình.
11. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng chiều cao BH bằng đường trung bình MN.
12. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM và phân giác AD. Chứng minh rằng :
 - a) $\widehat{HAB} = \widehat{MAC}$.
 - b) AD là tia phân giác của $\widehat{HAM}$.

Chủ đề 8

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a là độ dài đường vuông góc OH kẻ từ O đến a.

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

3. Tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước

Các điểm cách đường thẳng b một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h.

Nhận xét : Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.

4. Đường thẳng song song cách đều

Dấu hiệu nhận biết các đường thẳng song song cách đều :

Những đường thẳng song song chắn trên một đường thẳng cho trước những đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

Tính chất của các đường thẳng song song cách đều :

Những đường thẳng song song cách đều chắn trên một đường thẳng bất kì những đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

5. Những tập hợp điểm được giới thiệu ở lớp 7

- Tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng $R > 0$ là đường tròn tâm O bán kính R.
- Tập hợp các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.
- Tập hợp các điểm cách đều hai cạnh của một góc là tia phân giác của góc ấy.

6. Từ tính chất của đường thẳng song song cách đều ta thu được kinh nghiệm thứ tư

Cứ nói tới hình thang vuông phải nghĩ đến đường thẳng song song cách đều.

Ý nghĩa của kinh nghiệm này là : Với các bài toán mà giả thiết hoặc kết luận của bài toán đề cập đến hình thang vuông thì khi vẽ thêm đường phụ, từ trung điểm của cạnh bên ta vẽ thêm đường vuông góc với cạnh góc vuông để tạo ra ba đường thẳng song song cách đều.

Trong thực hành, người ta hay sử dụng lưỡi ô vuông và tính chất của các đường thẳng song song cách đều để vẽ hình rất hiệu quả (Đã từng bước giới thiệu từ chủ đề 2) và chia một đoạn thẳng thành n phần bằng nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. *Vẽ thêm các đường thẳng song song cách đều để chứng minh quan hệ về độ dài*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ thêm đường thẳng song song hoặc đường vuông góc để tạo ra các đường thẳng song song cách đều.

1. Áp dụng tính chất của các đường thẳng song song cách đều.

II. VÍ DỤ

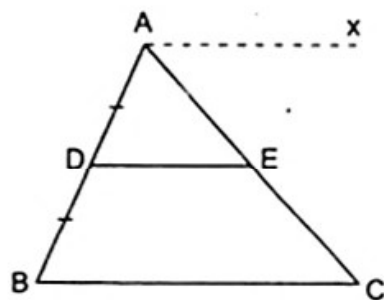
Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có D là trung điểm của AB , kẻ $DE \parallel BC$ ($E \in AC$). Chứng minh rằng $AE = EC$.

Lời giải (hình 82)

Do $DE \parallel BC$ theo giả thiết nên vẽ thêm $Ax \parallel DE$ thì $Ax \parallel DE \parallel BC$ (1)

Vì D là trung điểm của AB nên $AD = DB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra Ax, DE, BC là ba đường thẳng song song cách đều nên nó chắn trên đường thẳng AC hai đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau là $AE = EC$.



Hình 82

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ và đường thẳng d không có điểm nào chung với hình bình hành. Gọi AE, BF, CG, DH là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C, D đến đường thẳng d . Chứng minh rằng $AE + CG = BF + DH$.

Lời giải (hình 83)

Do AE, BF, CG, DH cùng vuông góc với d suy ra $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$. Nên $AEGC$ và $BFHD$ là hai hình thang vuông.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình bình hành $ABCD$, ta được :

$$AO = OC \quad (1), \quad BO = OD \quad (2).$$

Vẽ thêm $OI \perp d$ thì $OI \parallel AE \parallel CG$ (3) và $OI \parallel BF \parallel DH$ (4) (do cùng vuông góc với d).

Từ (1) và (3) suy ra OI, AE, CG là ba đường thẳng song song cách đều nên chúng chắn trên đường thẳng d hai đoạn liên tiếp bằng nhau là $EI = IG$ (5)

Từ (2) và (4) suy ra OI, BF, DH cũng là ba đường thẳng song song cách đều nên chúng cũng chắn trên đường thẳng d hai đoạn liên tiếp bằng nhau là $FI = IH$ (6)

Từ (1) với (5) và (2) với (6) ta có OI là đường trung bình của hai hình thang vuông $AEGC$ và $BFHD$.

Áp dụng định lý đường trung bình vào hai hình thang trên, ta được :

$$2OI = AE + CG = BF + DH.$$

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao BD, CE . Gọi H, K thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ B và C đến đường thẳng DE . Chứng minh rằng $HE = DK$.

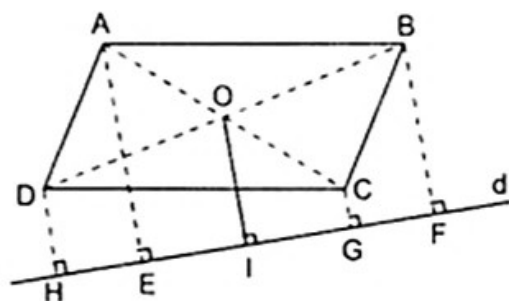
Lời giải (hình 84)

Vì BD, CE là các đường cao của tam giác ABC nên $BD \perp AC, CE \perp AB$ do đó $\triangle BDC$ vuông tại $D, \triangle CEB$ vuông tại E .

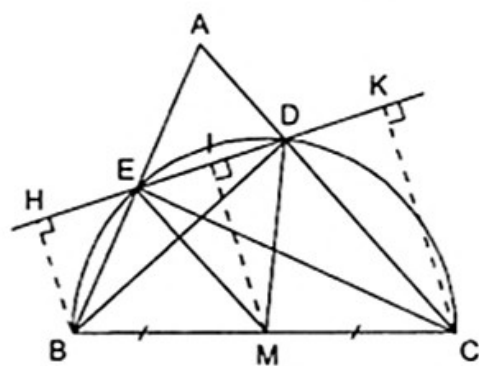
Gọi M là trung điểm của BC , vẽ DM, EM thì DM, EM là các trung tuyến ứng với cạnh huyền của $\triangle BDC$ và $\triangle CEB$.

Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào hai tam giác vuông trên, ta được :

$$\begin{cases} DM = \frac{1}{2} BC \\ EM = \frac{1}{2} BC \end{cases} \Rightarrow DM = EM \Rightarrow \triangle MDE \text{ cân tại } M.$$



Hình 83



Hình 84

Từ giả thiết ta có tứ giác BHKC là hình thang vuông nên vẽ thêm $MI \perp DE$ thì $BH \parallel MI \parallel CK$ (1) (vì cùng vuông góc với đường thẳng DE) mà $BM = MC$ (2) (do ta vẽ).

Từ (1) và (2) suy ra BH, MI, CK là ba đường thẳng song song cách đều nên chúng chắn trên đường thẳng HK hai đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau là $HI = IK$ (3).

Áp dụng tính chất về đường cao ứng với cạnh đáy vào tam giác cân MDE ta được $EI = ID$ (4).

Trừ theo vế đẳng thức (3) cho (4), ta được : $EH = DK$.

III. BÀI TẬP

Hãy giải các bài tập sau bằng cách vẽ thêm đường thẳng song song cách đều.

1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. lấy một điểm D trên cạnh BC (D khác M). Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ B, M, C đến đường thẳng AD. Chứng minh rằng $HI = IK$.
2. Cho tam giác ABC trung tuyến AM. Trên AM lấy một điểm I sao cho $AI = \frac{1}{3}AM$. Gọi D là giao điểm của BI và AC. Chứng minh rằng $AD = \frac{1}{6}AC$. Kết quả trên thay đổi thế nào nếu $AI = \frac{1}{4}AM$. Hãy nêu bài toán tổng quát.
3. Cho tam giác ABC trọng tâm G.
 - a) Một đường thẳng d đi qua G cắt hai cạnh AB, AC. Gọi D, E, F thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A, B, C đến đường thẳng d. Hãy tìm hệ thức liên hệ giữa các độ dài AD, BE, CF.
 - b) Nếu đường thẳng d nằm ngoài tam giác ABC và I là chân đường vuông góc kẻ từ G đến d thì các độ dài AD, BE, CF, GI liên hệ với nhau như thế nào ? Hãy chứng minh.

DẠNG 2. Cho một điểm di chuyển trên một đường, tìm xem một điểm khác phụ thuộc vào điểm đó di chuyển trên đường thẳng song song nào

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

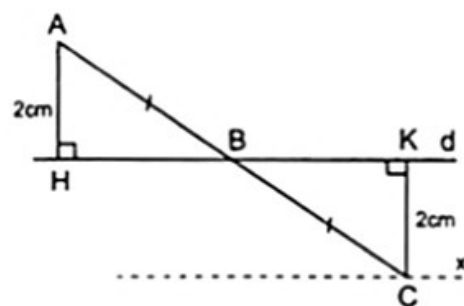
1. Xác định điểm di chuyển.
2. Xác định điểm, đường thẳng hoặc tam giác cố định để tìm đoạn có độ dài không đổi.
3. Sử dụng tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho điểm A ở ngoài đường thẳng d và có khoảng cách đến d bằng 2cm. Trên d lấy một điểm B bất kì. Gọi C là điểm đối xứng với điểm A qua điểm B. Hỏi khi điểm B di chuyển trên đường thẳng d thì điểm C di chuyển trên đường nào ?

Lời giải (hình 85)

Kẻ $AH \perp d$ và $CK \perp d$ thì AH là khoảng cách từ điểm A cố định đến đường thẳng d cố định nên $AH = 2\text{cm}$ không đổi. CK là khoảng cách từ C đến đường thẳng d. Khi B di chuyển trên d thì điểm C cũng di chuyển theo.



Hình 85

Áp dụng tính chất của hai điểm đối xứng qua tâm và hai góc đối đỉnh, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ \\ AB = CB \\ \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \end{cases} \Rightarrow \Delta AHB = \Delta AKB \text{ (trường hợp cạnh huyền góc nhọn)}$$

nên $CK = AH = 2\text{cm}$.

Như vậy điểm C cách đường thẳng d cố định một khoảng không đổi 2cm nên C di chuyển trên đường thẳng $Cx \parallel d$ và cách d một khoảng bằng 2cm.

Ví dụ 2. Cho góc vuông xOy. Trên tia Oy lấy điểm A sao cho $OA = 2\text{cm}$, trên tia Ox lấy một điểm B bất kì. Gọi C là trung điểm của AB. Hỏi khi điểm B di chuyển trên tia Ox thì điểm C di chuyển trên đường nào ?

Lời giải (hình 86)

Vì điểm $A \in Oy$ của góc xOy cố định nên $OA = 2\text{cm}$ không đổi. Khi điểm B di chuyển trên tia Ox thì trung điểm C của AB cũng di chuyển theo.

Khi điểm B di chuyển trên tia Ox đến vị trí B trùng với O thì điểm C di chuyển đến vị trí C trùng với điểm D là trung điểm của AO cố định nên điểm D cũng cố định và $AD = DO = 1\text{cm}$.

Nối O với trung điểm C của AB thì OC là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông AOB .

Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền và giả thiết vào tam giác vuông AOB , ta được :

$$\begin{cases} AC = CB = \frac{1}{2} AB \\ OC = \frac{1}{2} AB \\ AD = DO \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = DO \\ AC = CO \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ DC là đường trung trực của đoạn AO cố định.

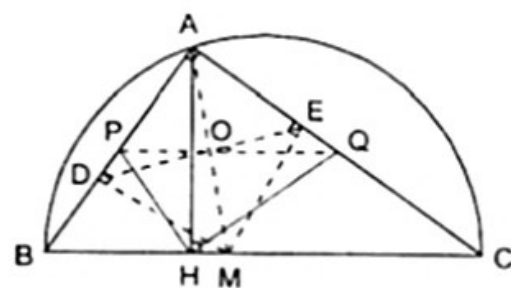
Vậy điểm C di chuyển trên tia Dm thuộc đường trung trực của OA .

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông ở A . Trên cạnh BC lấy một điểm M bất kỳ, kẻ $MD \perp AB$; $ME \perp AC$. Gọi O là trung điểm của DE .

- Chứng minh ba điểm A, O, M thẳng hàng.
- Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đường nào ?
- Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài nhỏ nhất ?

Lời giải (hình 87)

a) Từ giả thiết suy ra $\hat{D} = \hat{E} = \hat{A} = 90^\circ$. Tứ giác $AEMD$ có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật.



Hình 87

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình chữ nhật AEMD ta được hai đường chéo AM và DE cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, do O là trung điểm của DE theo giả thiết nên AM đi qua O hay A, O, M thẳng hàng.

b) Kẻ $AH \perp BC$ thì $\triangle AHB, \triangle AHC$ vuông tại H do tam giác vuông ABC cho trước nên đường cao AH cố định.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và AC.

Nối HP, HQ thì HP và HQ lần lượt là trung tuyến ứng với cạnh huyền của hai tam giác vuông AHB và AHC.

Áp dụng định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào hai tam giác

$$\text{vuông trên, ta được } \begin{cases} HP = \frac{1}{2} AB \\ AP = PB \\ HQ = \frac{1}{2} AC \\ AQ = QC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PA = PH \\ QA = QH \end{cases} \Rightarrow P, Q \text{ cách đều hai đầu}$$

đoạn thẳng AH nên PQ là đường trung trực của đường cao AH cố định. Do đó khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đoạn PQ là đường trung bình của tam giác vuông ABC.

c) Áp dụng định lý về quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên vào đường vuông góc AH, đường xiên AM thì đường vuông góc AH là đường ngắn nhất.

Vậy điểm M ở vị trí chân đường cao H thì $AM = AH$ có độ dài nhỏ nhất.

III. BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy một điểm M bất kì. Qua M kẻ $MD \parallel AB$, $ME \parallel AC$. Hỏi khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì trung điểm I của DE di chuyển trên đường nào?
- Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di động trên các cạnh AB, AC sao cho $AD = CE$. Hỏi trung điểm I của DE di chuyển trên đường nào?
- Cho đoạn thẳng BC cố định, điểm A di động trên đường thẳng d song song với BC và cách BC một khoảng bằng 3cm. Hỏi trọng tâm G của tam giác ABC di chuyển trên đường nào?

Chủ đề 9

HÌNH THOI

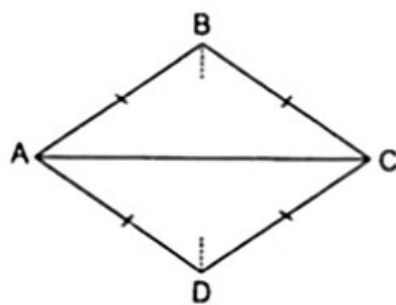
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Tứ giác ABCD là hình thoi $\Leftrightarrow AB = BC = CD = DA$.

Từ định nghĩa hình thoi, ta suy ra : Hình thoi cũng là một hình bình hành.



Hình 88

2. Tính chất

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành. Nhưng cần chú ý các tính chất về đường chéo. Trong hình thoi :

- Hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết

Hai dấu hiệu về cạnh :

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.

Hai dấu hiệu về đường chéo :

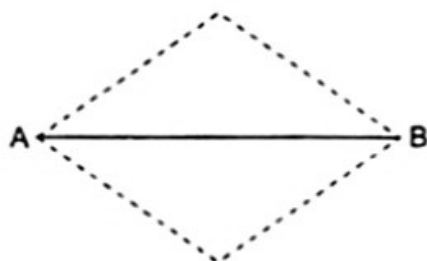
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

4. Cách vẽ hình thoi

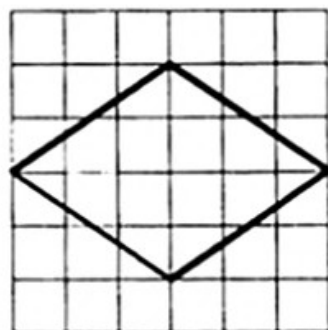
Có bốn cách vẽ hình thoi nhưng hay dùng nhất là hai cách sau :

Cách 1 (hình 89a) : Vẽ một đường chéo, dựng đường trung trực của đường chéo đó, nối hai đầu đường chéo với hai giao điểm của hai cung tròn vừa vẽ thu được bốn đỉnh của hình thoi.

Cách 2 (hình 89b) : Sử dụng lưới ô vuông để vẽ hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Hình 89a



Hình 89b

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Nhận dạng hình thoi, tính chất đối xứng của hình thoi

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Nhận dạng hình thoi bằng một trong hai cách sau :

Cách 1 : Chứng minh tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Cách 2 : Chứng minh tứ giác là hình bình hành có thêm một trong các dấu hiệu : hai cạnh kề bằng nhau, hai đường chéo vuông góc hoặc có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

2. Sử dụng định nghĩa hình có tâm đối xứng, trục đối xứng.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các trung điểm bốn cạnh của một hình chữ nhật là các đỉnh của một hình thoi.

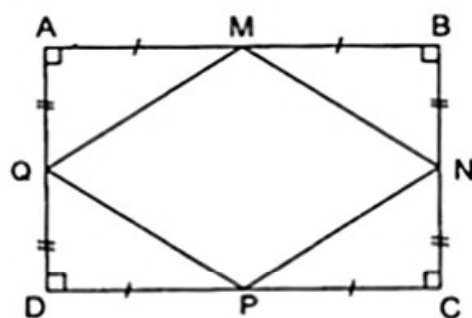
Lời giải (hình 90)

Xét hình chữ nhật ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và DA, ta phải chứng minh MNPQ là hình thoi.

Vì ABCD là hình chữ nhật nên

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ.$$

(1)



Hình 90

Áp dụng tính chất về cạnh và giả thiết vào hình chữ nhật ABCD, ta được

$$\begin{cases} AM = MB, CP = PD \\ AQ = QD, BN = NC \\ AB = CD, AD = BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = MB = PC = PD \\ AQ = BN = CN = DQ \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra bốn tam giác vuông MAQ, MBN, PCN, PDQ bằng nhau nên bốn cạnh tương ứng bằng nhau là $MN = NP = PQ = QM$.

Tứ giác MNPQ có bốn cạnh bằng nhau nên nó là hình thoi.

Ví dụ 2. Cho hình thoi ABCD. Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho $BE = DF$. Gọi G, H thứ tự là giao điểm của AE, AF với đường chéo BD. Chứng minh rằng tứ giác AGCH là hình thoi.

Lời giải (hình 91)

Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $AC \perp BD$ tại O theo tính chất về đường chéo của hình thoi.

Áp dụng định nghĩa, tính chất về góc và giả thiết vào hình thoi ABCD, ta được :

$$\begin{cases} AB = AD \\ \widehat{B} = \widehat{D} \\ BE = DF \end{cases} \Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADF \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_4}.$$

(1)

Điều này chứng tỏ tam giác AGH có đường cao AO vừa là đường phân giác nên nó cân tại A suy ra $HO = OG$.

(2)

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình thoi ABCD ta được $AO = OC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có tứ giác AGCH là hình bình hành có đường chéo AC là phân giác của góc HAG nên nó là hình thoi.

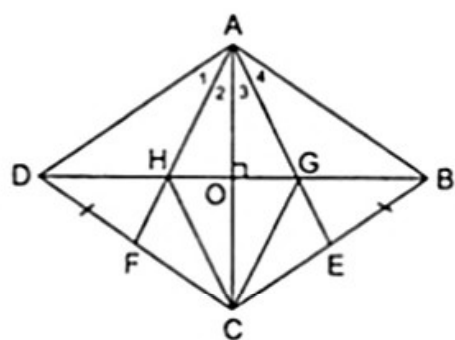
Ví dụ 3. Chứng minh rằng :

a) Giao điểm hai đường chéo của hình thoi là tâm đối xứng của hình thoi.

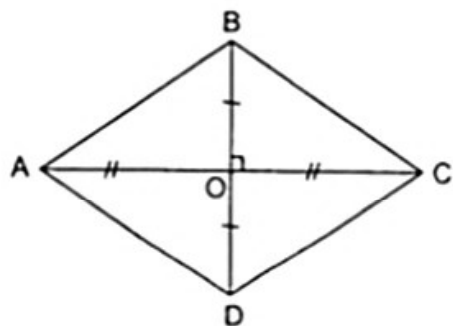
b) Hai đường chéo của hình thoi là hai trục đối xứng của hình thoi.

Lời giải (hình 92)

a) Vì giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó mà hình thoi là một hình bình hành nên giao điểm hai đường chéo của hình thoi là tâm đối xứng của hình thoi.



Hình 91



Hình 92

b) Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình thoi ABCD, ta được AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, do đó AC là đường trung trực của BD. Nên điểm đối xứng của điểm B qua AC là điểm D, điểm đối xứng của điểm A qua AC là chính nó, điểm đối xứng của điểm C qua AC cũng là chính nó. Như vậy điểm đối xứng với mỗi đỉnh của hình thoi qua AC cũng thuộc hình thoi. Do đó AC là trục đối xứng của hình thoi.

Chứng minh tương tự, ta cũng được BD là trục đối xứng của hình thoi.

III. BÀI TẬP

1. Nêu các tính chất về đường chéo của hình thoi. Chỉ rõ tính chất nào suy ra từ hình bình hành, tính chất nào có ở hình thoi.
2. Cho tam giác ABC cân tại A có M là trung điểm của BC. Qua M kẻ $MD \parallel AB$ và $ME \parallel AC$. Chứng minh rằng tứ giác ADME là hình thoi.
3. Cho hình bình hành ABCD có $AC \perp CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng tứ giác AMCN là hình thoi.
4. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một hình thang cân là các đỉnh của một hình thoi.
5. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao BD và CE. Gọi M là trung điểm của BC, H và K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC, I là trung điểm của DE. Tứ giác MHIK là hình gì ? Vì sao ?
6. Cho hình thoi ABCD. Trên hai cạnh BC, CD lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = DN$. Gọi P, Q thứ tự là giao điểm của AM và AN với đường chéo BD. Chứng minh rằng tứ giác APCQ là hình thoi.

DẠNG 2. *Sử dụng định nghĩa và tính chất của hình thoi để tính toán, chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau, các đường thẳng vuông góc với nhau*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng định nghĩa hình thoi
2. Áp dụng các tính chất của hình thoi.
3. Xác định tam giác vuông chứa đoạn cần tính để áp dụng định lý Py-ta-go.

II. VÍ DỤ

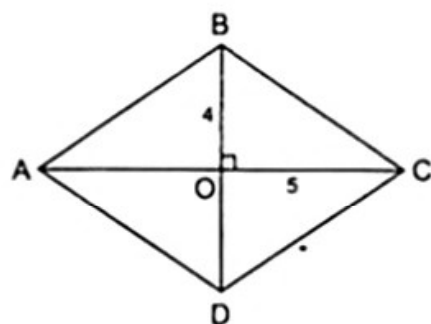
Ví dụ 1. Hai đường chéo của một hình thoi bằng 8cm và 10cm. Hỏi cạnh của hình thoi bằng bao nhiêu ?

Lời giải (hình 93)

Xét hình thoi ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo và $AC = 10\text{cm}$, $BD = 8\text{cm}$. Vì hình thoi có tất cả các cạnh bằng nhau nên ta chỉ cần tính một cạnh, chẳng hạn cạnh BC.

Áp dụng tính chất về đường chéo và giả thiết vào hình thoi ABCD, ta được

$$\begin{cases} AC \perp BD \\ OC = \frac{1}{2} AC = 5\text{cm} \Rightarrow \triangle BOC \text{ vuông tại } O \\ OB = \frac{1}{2} BD = 4\text{cm} \end{cases}$$



Hình 93

O và có hai cạnh góc vuông là 4cm và 5cm.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông BOC, ta được

$$BC^2 = CO^2 + OB^2 \text{ hay } BC^2 = 4^2 + 5^2 = 41 \text{ nên } BC = \sqrt{41}(\text{cm}).$$

Vậy cạnh của hình thoi là $\sqrt{41}\text{cm}$.

Ví dụ 2. Cho hình thoi ABCD có góc A tù. Biết đường cao kẻ từ đỉnh A đến cạnh CD chia đôi cạnh đó. Tính các góc của hình thoi.

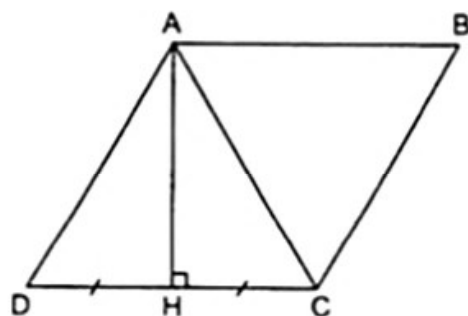
Lời giải (hình 94)

- Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến cạnh CD và từ giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} AH \perp DC \\ CH = HD \end{cases} \Rightarrow AH \text{ là đường trung trực}$$

của đoạn CD nên $AC = AD$ (1)

Áp dụng định nghĩa vào hình thoi ABCD, ta được $AD = CD$ (2)



Hình 94

Từ (1) và (2) suy ra $AC = CD = DA$ nên tam giác ACD là tam giác đều, do đó $\hat{D} = 60^\circ$.

Vì góc D và góc A là hai góc trong cùng phía của $AB \parallel CD$ nên chúng bù nhau hay $\widehat{D} + \widehat{A} = 180^\circ$ hay $\widehat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Áp dụng tính chất về góc vào hình thoi ta được $\widehat{B} = \widehat{D} = 60^\circ$, $\widehat{A} = \widehat{C} = 120^\circ$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các đường cao của hình thoi bằng nhau.

Lời giải (hình 95)

Xét hình thoi ABCD, kẻ hai đường cao $AH \perp BC$, $AK \perp CD$.

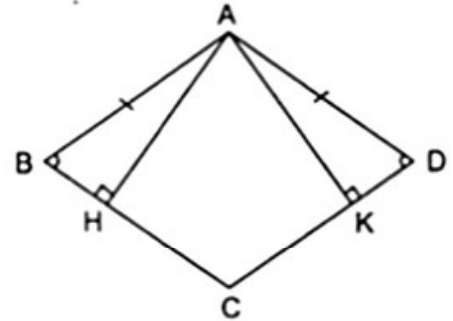
Ta phải chứng minh $AH = AK$.

Áp dụng định nghĩa, tính chất về góc và giả thiết vào hình thoi ABCD, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ \\ AB = AD, \widehat{B} = \widehat{D} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABH = \Delta ADK$$

(trường hợp cạnh huyền, góc nhọn).

Suy ra $AH = AK$.



Hình 95

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D, E sao cho $BD = CE$. Gọi M, P, N, Q thứ tự là trung điểm của BE, CD, DE và BC. Chứng minh rằng PQ vuông góc với MN.

Lời giải (hình 96)

Từ giả thiết ta có MP, NP, NQ, QM lần lượt là các đường trung bình của các tam giác BDE, ECD, DCB và BEC.

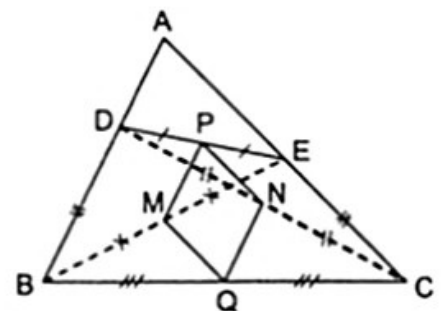
Đặt $BD = CE = 2a$.

Áp dụng định lý đường trung bình và giả thiết vào bốn tam giác trên, ta được

$$\begin{cases} MP = \frac{1}{2} BD = a; NQ = \frac{1}{2} BD = a \\ NP = \frac{1}{2} CE = a; MQ = \frac{1}{2} CE = a \end{cases} \Rightarrow MN = NP = PQ = QM.$$

Tứ giác MNPQ có bốn cạnh bằng nhau nên nó là hình thoi.

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình thoi MNPQ ta được $MN \perp PQ$.



Hình 96

III. BÀI TẬP

7. Tính chu vi của hình thoi, biết các đường chéo bằng 16cm và 30cm.
8. Hình thoi ABCD có chu vi bằng 16cm, đường cao AH = 2cm. Tính các góc của hình thoi.
9. Hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$, kẻ hai đường cao BE và BF. Tam giác BEF là tam giác gì ? Vì sao ?
- 10*. Cho hình bình hành ABCD có $AD = 2AB$. Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ C đến đường thẳng AB, M là trung điểm của AD, F là chân đường vuông góc kẻ từ M đến CE và MF cắt BC ở N.
- a) Tứ giác MNCD là hình gì ? Vì sao ?
- b) Tam giác EMC là tam giác gì ? Vì sao ?
- c) Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$.

Chủ đề 10

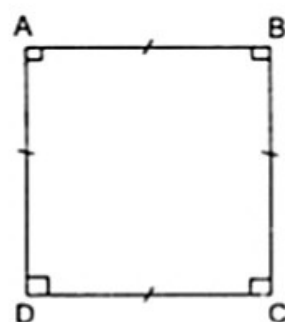
HÌNH VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau (hình 97).

$$\text{Tứ giác ABCD là hình vuông} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = BC = CD = DA. \end{cases}$$



Hình 97

Từ định nghĩa hình vuông suy ra hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.

2. Tính chất

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết

Ba dấu hiệu từ hình chữ nhật :

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác thì nó là hình vuông.

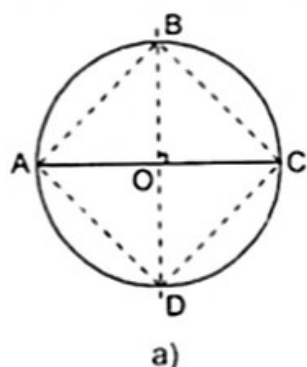
Hai dấu hiệu từ hình thoi :

- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

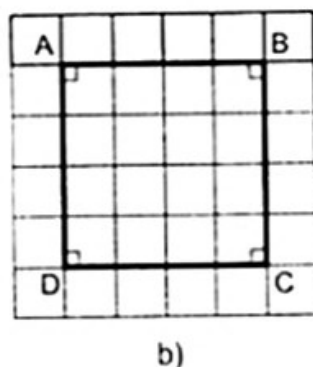
Nhận xét : Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

4. Cách vẽ hình vuông

Có năm cách vẽ hình vuông, nhưng hay dùng hai cách sau :



Hình 98



Cách 1 (hình 98a) : Vẽ một đường chéo, dựng đường trung trực của đường chéo đó. Lấy trung điểm vừa dựng làm tâm vẽ đường tròn có đường kính bằng đường chéo vừa vẽ, nó cắt đường trung trực tại hai điểm ta được đường chéo thứ hai.

Cách 2 (hình 98b) : Sử dụng lưới ô vuông để vẽ tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

Lưu ý: – Cách 1 chứng minh được là hình vuông.

– Cách 2 không chứng minh được là nhận được hình vuông, chỉ là ảnh hình vuông.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Nhận dạng hình vuông

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng một trong hai cách sau :

Cách 1 : Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật có thêm dấu hiệu hai cạnh kề bằng nhau hoặc hai đường chéo vuông góc hoặc một đường chéo là đường phân giác của một góc.

Cách 2 : Chứng minh tứ giác là hình thoi có thêm dấu hiệu có một góc vuông hoặc hai đường chéo bằng nhau.

II. VÍ DỤ

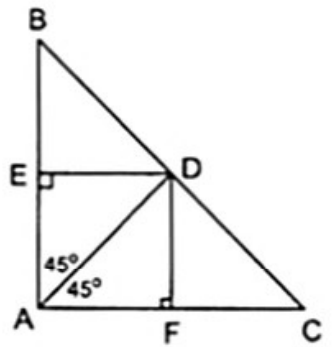
Ví dụ 1. Cho hình 99, tứ giác AEDF là hình gì ? Vì sao ?

Lời giải

Tứ giác AEDF là hình vuông.

Giải thích :

Theo hình vẽ thì $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$. Tứ giác AEDF có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật. Hình chữ nhật AEDF có AD là đường phân giác của góc A nên nó là hình vuông.



Hình 99

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2AD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác ADFE là hình gì ? Vì sao ?

b) Tứ giác MENF là hình gì ? Vì sao ?

Lời giải (hình 100)

Đặt $AD = a$ thì $AB = 2a$.

Áp dụng tính chất về cạnh và giả thiết vào

hình chữ nhật ABCD, ta được $AE = EB = BC = CF = FA = a$.

a) Tứ giác ADFE là hình vuông.

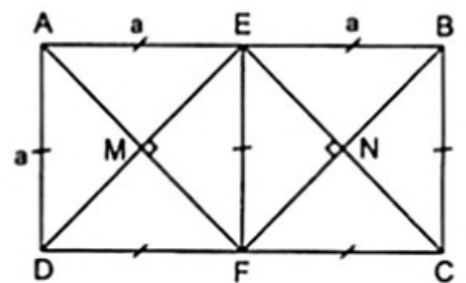
Giải thích : Vì tứ giác ADFE có bốn cạnh bằng nhau nên nó là hình thoi.

Hình thoi ADFE có $\widehat{A} = 90^\circ$ nên nó là hình vuông.

b) Tứ giác MENF là hình vuông.

Giải thích :

Chứng minh tương tự như câu a) ta cũng có tứ giác EBCF là hình vuông.



Hình 100

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hai hình vuông ADFE và MENF, ta được

$$\begin{cases} AF \perp DE; EC \perp FB \\ \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{E} = 90^\circ.$$

Tứ giác MENF có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật MENF lại có EF là đường phân giác của góc MEN nên nó là hình vuông.

Ví dụ 3. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

Lời giải (hình 101)

Gọi độ dài cạnh hình vuông là a và $AM = BN = CP = DQ = x$.

Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình vuông ABCD, ta được

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $MB = NC = PD = QA = a - x$, nên bốn tam giác vuông MBN, NCP, PDQ, QAM bằng nhau theo trường hợp (c - g - c) suy ra bốn cạnh tương ứng của các tam giác đó bằng nhau là $MN = NP = PQ = QA$. Tứ giác MNPQ có bốn cạnh bằng nhau nên nó là hình thoi.

Áp dụng tính chất về góc và kết quả hai tam giác bằng nhau vào hai tam giác MBN, NCP ta được

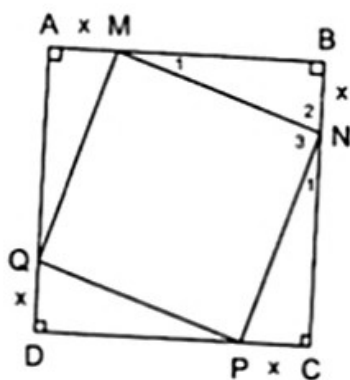
$$\begin{cases} \widehat{M}_1 + \widehat{N}_2 = 90^\circ \\ \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 \end{cases} \Rightarrow \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 90^\circ. \quad (1)$$

Lại có góc BNC là góc bẹt hay

$$\widehat{BNC} = \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 + \widehat{N}_3 = 180^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{N}_3 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Điều này chứng tỏ hình thoi MNPQ có một góc vuông nên nó là hình vuông.



Hình 101

III. BÀI TẬP

1. Nêu các tính chất về đường chéo của hình vuông. Chỉ rõ tính chất nào có ở hình bình hành, ở hình chữ nhật, ở hình thoi.
2. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau và hai đường chéo vuông góc có phải là hình vuông không? Nếu không hãy sửa lại một dấu hiệu để tứ giác là hình vuông.

3. Các câu sau đúng hay sai ?
- Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.
 - Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
 - Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
 - Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.
4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm D, E sao cho $BD = DE = EC$. Qua D và E kẻ các đường vuông góc với BC, chúng cắt AB, AC lần lượt ở K và H. Tứ giác KHED là hình gì ? Vì sao ?
5. Cho một hình chữ nhật có hai cạnh kề không bằng nhau. Chứng minh rằng các tia phân giác của các góc của hình chữ nhật đó cắt nhau tạo thành một hình vuông.
6. Cho hình vuông ABCD. Trên AD lấy điểm E, trên tia đối của của tia AD lấy điểm F, trên tia đối của tia BA lấy điểm I sao cho $DE = AF = BI$. Vẽ hình vuông AFGH, H thuộc cạnh AB. Chứng minh rằng tứ giác EGIC là hình vuông.

DẠNG 2. *Sử dụng định nghĩa, tính chất của hình vuông để chứng minh các quan hệ bằng nhau, song song, vuông góc, thẳng hàng*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng định nghĩa, tính chất và bố đề vẽ hình vuông.

II. VÍ DỤ

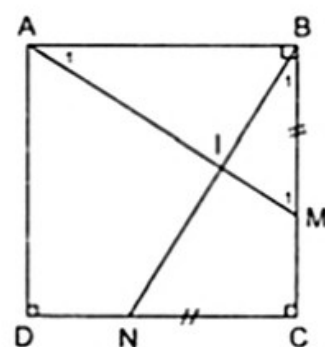
Ví dụ 1. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng $AM = BN$ và $AM \perp BN$.

Lời giải (hình 102)

Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình vuông

$$ABCD, \text{ ta được } \begin{cases} AB = BC \\ A = B = 90^\circ \\ BM = CN \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle BCN$ (c.g.c), nên $AM = BN$.



Hình 102

Gọi I là giao điểm của AM và BN.

Áp dụng tính chất về góc vào tam giác vuông ABM và BCN kết quả của hai tam giác bằng nhau, ta được

$$\begin{cases} \widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ \\ \widehat{B_1} = \widehat{A_1} \end{cases} \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ \quad (1)$$

Áp dụng tính chất về góc vào tam giác BIM ta có $\widehat{B_1} + \widehat{M_1} + \widehat{I_1} = 180^\circ \quad (2)$

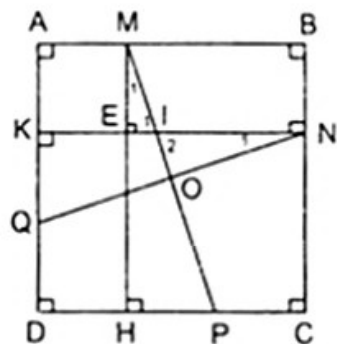
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{I_1} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, hay $AM \perp BN$.

Ví dụ 2. Bố đề về hình vuông

Cho hình vuông ABCD. Nếu các điểm M, N, P, Q lần lượt nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD và DA thì $MP = NQ \Leftrightarrow MP \perp NQ$.

Lời giải (hình 103)

Ta cần chứng minh bài toán đúng với các điểm M, N, P, Q nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA (các trường hợp còn lại chứng minh tương tự).



Hình 103

Gọi H, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến hai cạnh CD, DA và E, I, O thứ tự là giao điểm của MH với NK, MP với NK, MP với NQ.

Áp dụng định nghĩa vào hình vuông ABCD và tính chất góc đồng vị của $KN \parallel DC$, ta được $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{E} = \widehat{K} = \widehat{N} = 90^\circ$.

Các tứ giác MBHC, KNCD và MBNE là các tứ giác có ba góc vuông nên chúng là các hình chữ nhật.

a) $MP = NQ \Rightarrow MP \perp NQ$.

Áp dụng tính chất về cạnh và giả thiết vào hai hình chữ nhật MBCH, KNCD và hình vuông ABCD ta được

$$\begin{cases} MH = BC, NK = CD \\ BC = CD, MP = NQ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH = NK \\ MP = NQ \end{cases} \Rightarrow \triangle MHP = \triangle NKQ \text{ (trường hợp}$$

cạnh huyền, cạnh góc vuông).

Áp dụng tính chất về góc vào hai tam giác bằng nhau ở trên và tính chất của hai

góc đối đỉnh ta có

$$\begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{N_1} \\ \widehat{I_1} = \widehat{I_2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{O} = \widehat{E} = 90^\circ \text{ (vì hai tam giác, có hai cặp góc}$$

bằng nhau thì cặp góc thứ ba cũng bằng nhau). Vậy MP vuông góc với NQ tại O.

b) $MP \perp NQ \Rightarrow MP = NQ$.

Xét hai tam giác MEI và NOI có $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ vì đối đỉnh, $\widehat{O} = \widehat{E} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$ (1) vì hai tam giác, có hai cặp góc bằng nhau thì cặp góc còn lại cũng bằng nhau.

Lại có $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$, $MH = NK$ (2) theo câu a).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MHB = \triangle NKQ$ (g - c - g) nên $MP = NQ$.

Ví dụ 3. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên hai cạnh BC, CD lấy hai điểm M, N sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$, trên tia đối của tia DC lấy điểm K sao cho $DK = BM$. Hãy tính :

a) Số đo góc KAN.

b) Chu vi tam giác MCN theo a.

Lời giải (hình 104)

a) Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình

vuông ABCD, ta được
$$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = AD, BM = DK \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ADK$ (c - g - c).

Áp dụng kết quả của hai tam giác bằng nhau ở trên và giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^\circ \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_4}, \widehat{A_2} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = \widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

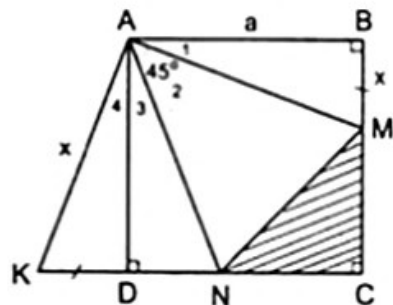
b) Đặt $BM = DK = x$ thì $KN = x + DN$, $MC = a - x$, $CN = a - DN$.

Từ kết quả của hai tam giác bằng nhau ở câu a) và giả thiết, ta được :

$$\begin{cases} AM = AK, AN = AN \\ \widehat{MAN} = \widehat{KAN} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AMN = \triangle AKN \text{ (c - g - c) suy ra } MN = KN.$$

Vậy chu vi tam giác MCN bằng $MC + CN + NM = a - x + a - DN + x + DN = 2a$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M, qua A kẻ $AN \perp AM$ (điểm N thuộc tia đối của tia DC). Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng :



Hình 104

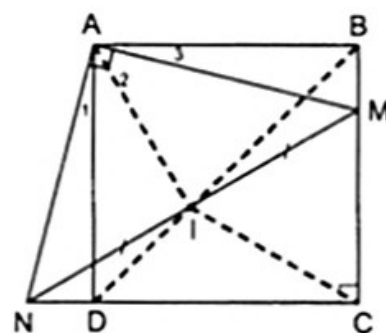
a) $AM = AN$.

b) Ba điểm B, I, D thẳng hàng.

Lời giải

a) Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình vuông ABCD, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ \\ \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{A} = 90^\circ \\ AB = AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = AD \\ \widehat{A_3} = \widehat{A_1} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABM = \triangle ADN \text{ (g - c - g)}.$$



Hình 105a

Do đó $AM = AN$.

b) *Cách 1* (hình 105a) : Nối IA, IC thì IA và IC lần lượt là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của hai tam giác vuông AMN, CMN.

Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào hai tam giác

$$\text{vuông trên và định nghĩa hình vuông ta được } \begin{cases} IA = IC = \frac{1}{2} MN \\ BA = BC. \end{cases}$$

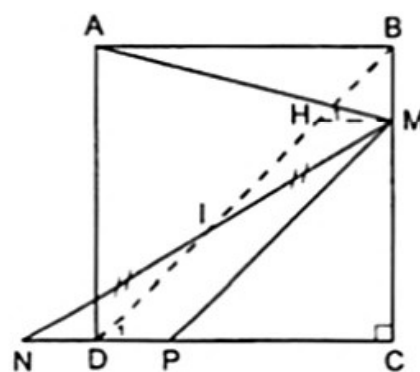
Điều này chứng tỏ hai điểm B và I cách đều hai điểm A và C nên BI là đường trung trực của đoạn AC. Mặt khác theo tính chất về đường chéo của hình vuông thì BD là trung trực của AC mà đoạn AC chỉ có một đường trung trực nên BI trùng với BD hay B, I, D thẳng hàng.

Cách 2 (hình 101) : Qua M kẻ $MP \parallel BD$ (1) (điểm $P \in DC$) suy ra $DI \parallel MP$ (2).

Lại có $NI = IM$ (3) theo giả thiết. Từ (2) và (3) suy ra $ND = DP$ (4) theo định lý đường trung bình.

Từ (3) và (4) ta có DI là đường trung bình của tam giác NMP.

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác NMP ta được $DI \parallel MP$ (5). Từ (1) và (5) suy ra B, I, D thẳng hàng, vì từ điểm I ở ngoài đường thẳng MP chỉ kẻ được một đường thẳng song song với MP.



Hình 105b

Cách 3 : Qua M kẻ $MH \parallel ND$ (1) (điểm $H \in BD$) thì $\widehat{D_1} = \widehat{H_1}$ (2) do đồng vị.

Mà BD là đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên BD là đường phân giác của hai góc vuông B và D do đó $\widehat{D_1} = \widehat{H_1} = 45^\circ$ (3).

Từ (2) và (3) ta có $BM = MH$ (4) vì trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau.

Kết hợp (1) với (4) ta được tứ giác $NHMD$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành.

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình bình hành $NHMD$, ta được đường chéo DH đi qua trung điểm I của đường chéo NM nên BD đi qua I .

Điều đó chứng tỏ B, I, D thẳng hàng.

III. BÀI TẬP

7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là một điểm nằm giữa C và D . Tia phân giác của góc DAE cắt CD ở F . Kẻ $FH \perp AE$ ($H \in AE$), FH cắt BC ở K .
 - a) Tính độ dài AH .
 - b) Tính số đo góc FAK .
8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD và I là giao điểm của AN, DM . Chứng minh rằng :
 - a) $AN \perp DM$;
 - b) $BA = BI$.
9. Cho một hình vuông cạnh dài $1m$. Vẽ hình vuông thứ hai nhận đường chéo của hình vuông đã cho làm cạnh. Tính độ dài đường chéo của hình vuông này.
10. Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$. Vẽ hình bình hành $MANF$, gọi O là trung điểm của AF . Chứng minh rằng :
 - a) Tứ giác $MANF$ là hình vuông.
 - b) F thuộc tia phân giác của góc MCN .
 - c) $AC \perp CF$.
 - d) Tứ giác $BOFC$ là hình thang.

DẠNG 3. Tìm điều kiện để một hình trở thành hình vuông

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng các dấu hiệu nhận biết hình vuông.
2. Nếu bài toán chỉ yêu cầu tìm vị trí của một điểm nào đó để một hình trở thành hình vuông ta làm như sau : Giả sử hình đó là hình vuông rồi dựa vào các tính chất của hình vuông để chỉ ra vị trí cần tìm.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, D là điểm nằm giữa B và C. Qua D kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AC và AB thứ tự ở E và F.

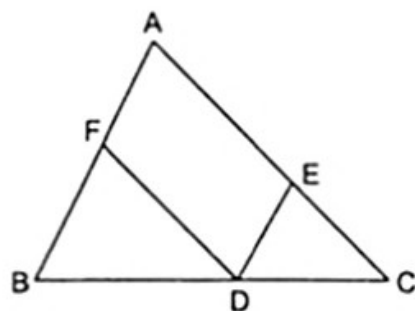
- a) Tứ giác AEDF là hình gì ? Vì sao ?
- b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình thoi ?
- c) Nếu tam giác ABC vuông tại A thì tứ giác AEDF là hình gì ? Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình vuông ?

Lời giải (hình 106)

- a) Tứ giác AEDF là hình bình hành.

Giải thích : Từ giả thiết $\begin{cases} DE // AC \\ DF // AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DE // AF \\ DF // AE \end{cases}$

Tứ giác AEDF có các cạnh đối song song nên nó là hình bình hành.



Hình 106

- b) Giả sử AEDF là hình thoi khi đó theo tính chất

về đường chéo của hình thoi thì AD là đường phân giác của góc A.

Vậy nếu D là giao điểm của tia phân giác góc A với cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình thoi.

- c) Nếu tam giác ABC vuông tại A thì hình bình hành AEDF là hình chữ nhật. Nếu tam giác ABC vuông tại A và D là giao điểm của tia phân giác góc A với cạnh BC thì AEDF vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi nên nó là hình vuông.

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA. Hai đường chéo AC và BD phải thoả mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của :

- a) Hình chữ nhật ?
- b) Hình thoi ?
- c) Hình vuông ?

Lời giải (hình 107)

Trước hết ta chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành (xem Ví dụ 1, Dạng 1, Chủ đề 5).

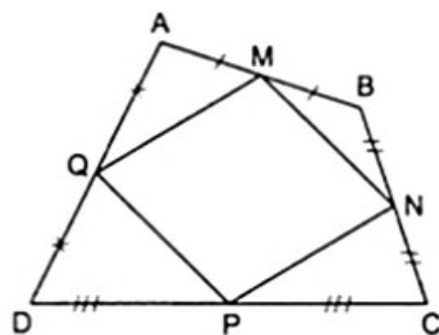
a) MNPQ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow MN \perp NP$

$\Leftrightarrow AC \perp BD$ (vì $MN \parallel AC$, $NP \parallel BD$).

Điều kiện cần tìm là hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau.

b) MNPQ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = NP$

$\Leftrightarrow AC = BD$ (vì $MN = \frac{1}{2}AC$, $NP = \frac{1}{2}BD$).



Hình 107

Điều kiện cần tìm là các đường chéo AC và BD bằng nhau.

c) MNPQ là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} MN \perp PQ \\ MN = PQ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD. \end{cases}$

Điều kiện cần tìm là các đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau.

III. BÀI TẬP

11. Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AC, K là điểm đối xứng với M qua điểm I.

a) Tứ giác AMCK là hình gì ? Vì sao ?

b) Tứ giác AKMB là hình gì ? Vì sao ?

c) Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác AMCK là hình vuông.

12. Cho hình thoi ABCD, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Qua B vẽ đường thẳng song song với AC, qua C vẽ đường thẳng song song với BD, hai đường thẳng này cắt nhau ở K.

a) Tứ giác OBKC là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh $AB = OK$.

c) Tìm điều kiện của hình thoi ABCD để tứ giác OBKC là hình vuông.

13. Cho hình bình hành ABCD có $BC = 2AB$ và $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của BC, AD.

a) Tứ giác ECDF là hình gì ? Vì sao ?

b) Tứ giác ABED là hình gì ? Vì sao ?

c) Tính số đo của góc AED.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Chủ đề 1

1. Câu trả lời là :

a) Không.

Giải thích : Giả sử bốn góc của một tứ giác đều là góc nhọn thì tổng bốn góc của tứ giác nhỏ hơn 360° , trái với tính chất về góc của tứ giác. Vậy bốn góc của tứ giác không thể đều là góc nhọn.

b) Không.

Hướng dẫn : Học sinh chứng minh tương tự như trên.

c) Có, ví dụ tứ giác có bốn góc bằng nhau nên mỗi góc bằng 90° .

2. Áp dụng tính chất về góc vào tứ giác ABCD, ta được $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ hay $\hat{A} = 360^\circ - (\hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) = 360^\circ - 260^\circ = 120^\circ$.

Vì $\hat{A}_1$ là góc ngoài của tứ giác tại đỉnh A nên :

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

3. Áp dụng tính chất về góc vào tứ giác ABCD ta được $\hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 360^\circ$ hay $120^\circ + 50^\circ + \hat{D} + \hat{E} = 360^\circ$ suy ra $\hat{D} + \hat{E} = 190^\circ$ (1).

Lại có $\hat{D} - \hat{E} = 40^\circ$ (2) (theo giả thiết).

Cộng (1) với (2) theo vế ta được $2\hat{D} = 230^\circ \Rightarrow \hat{D} = 115^\circ$ do đó $\hat{E} = 75^\circ$.

4. Viết lại giả thiết thành $\frac{\hat{E}}{1} = \frac{\hat{F}}{2} = \frac{\hat{G}}{4} = \frac{\hat{H}}{5}$.

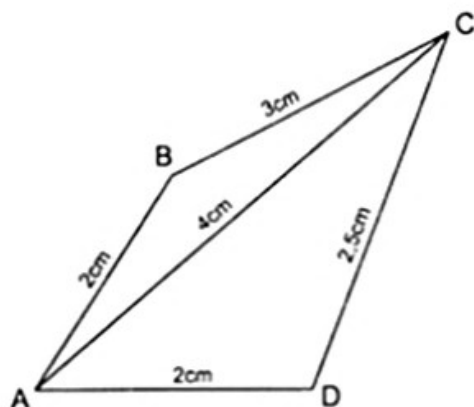
Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và tính chất về góc vào tứ giác ta được $\frac{\hat{E}}{1} = \frac{\hat{F}}{2} = \frac{\hat{G}}{4} = \frac{\hat{H}}{5} = \frac{\hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H}}{12} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Nên $\hat{E} = 30^\circ, \hat{F} = 60^\circ, \hat{G} = 120^\circ, \hat{H} = 150^\circ$.

5. a) (hình 108)

Bước 1. Chọn tam giác ABC biết ba yếu tố $AB = 2\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $CA = 4\text{cm}$ vẽ trước ta được ba đỉnh của tứ giác là A, B, C.

Bước 2. Lợi dụng cạnh $CA = 4\text{cm}$ với hai yếu tố còn lại $CD = 2,5\text{cm}$, $DA = 2\text{cm}$ vẽ tam giác thứ hai ACD ta được đỉnh D.

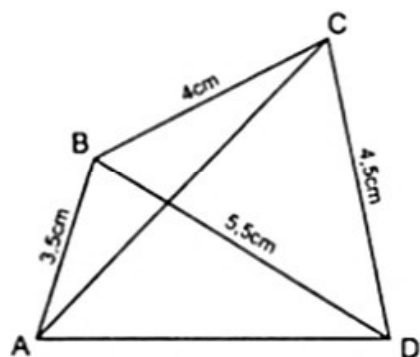


Hình 108

b) (hình 109)

Bước 1 : Chọn tam giác ABC biết ba yếu tố $AB = 3,5\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $CA = 5,5\text{cm}$ vẽ trước ta được ba đỉnh A, B, C của tứ giác.

Bước 3 : Lợi dụng cạnh $BC = 4\text{cm}$ với hai yếu tố còn lại là $\hat{C} = 120^\circ$, $CD = 4,5\text{cm}$ vẽ tam giác thứ hai BCD ta được đỉnh D.



Hình 109

- 6*. Học sinh xem Ví dụ 2, Dạng 2 rồi tự chứng minh.

Chủ đề 2

- Nếu cắt hai cạnh của một tam giác cân bởi một cát tuyến song song với cạnh đáy ta thu được một hình thang, hình thang này lại có hai góc kề với đáy lớn bằng nhau theo tính chất về góc của tam giác cân nên nó là hình thang cân.
- (hình 110) Tứ giác NSQP là hình thang cân.

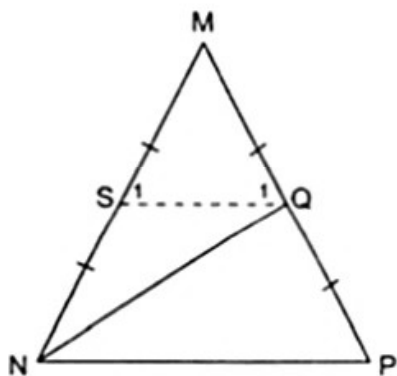
Giải thích :

Đặt $\hat{M} = 2\alpha$. Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào tam giác cân MNP, ta được :

$$\begin{cases} MN = MP \\ MS = SN \Rightarrow MS = MQ \text{ nên tam} \\ MQ = QP \end{cases}$$

giác MSQ cân tại M.

Áp dụng tính chất về góc vào hai tam giác cân MNP và MSQ, ta được :



Hình 110

$$\begin{cases} \widehat{S}_1 = \widehat{Q}_1 = 90^\circ - \alpha \\ \widehat{N} = \widehat{P} = 90^\circ - \alpha \end{cases} \Rightarrow \widehat{S}_1 = \widehat{N} \text{ suy ra } SQ \parallel NP.$$

Tứ giác NSQP có hai cạnh đối song song nên nó là hình thang.

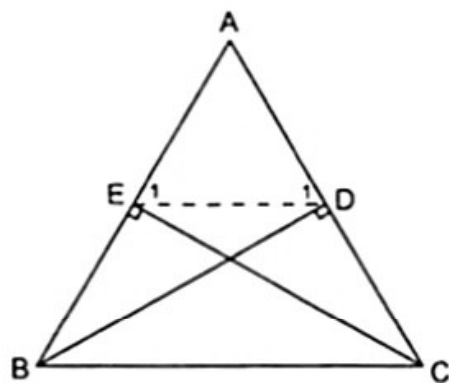
Hình thang NSQP này lại có hai góc kề với một đáy bằng nhau là $\widehat{N} = \widehat{P}$ nên là hình thang cân.

3. (hình 111) Tứ giác BEDC là hình thang cân.

Giải thích : Đặt $\widehat{A} = 2\alpha$.

Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào tam giác cân ABC, ta được :

$$\begin{cases} AB = AC, \widehat{A} = \widehat{A} \\ \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$$



Hình 111

(trường hợp cạnh huyền, góc nhọn).

Suy ra $AD = AE$ nên tam giác AED cân tại A.

Áp dụng tính chất về góc vào hai tam giác cân ABC và AED, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{E}_1 = \widehat{D}_1 = 90^\circ - \alpha \\ \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ - \alpha \end{cases} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{E}_1 \text{ nên } ED \parallel BC.$$

Tứ giác BEDC có hai cạnh đối song song nên nó là hình thang.

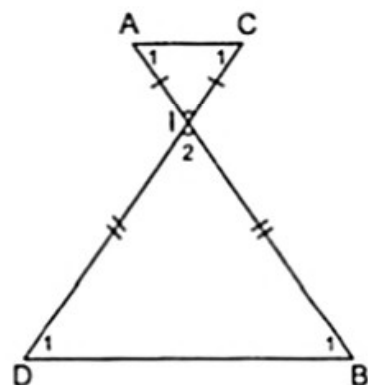
Hình thang BEDC này lại có hai góc kề với một đáy bằng nhau là $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên là hình thang cân.

4. (hình 112) Tứ giác ACBD là hình thang cân.

Giải thích : Do hai góc I_1 và I_2 là hai góc đối đỉnh nên đặt $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 = 2\alpha$.

Từ giả thiết $\begin{cases} IA = IC \\ IB = ID \end{cases} \Rightarrow AB = CD$ và hai tam

giác IAC, IBD đều cân tại I, áp dụng tính chất về góc vào hai tam giác cân IAC và IBD, ta được :



Hình 112

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{C_1} = 90^\circ - \alpha \\ \widehat{B_1} = \widehat{D_1} = 90^\circ - \alpha \end{cases} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \text{ nên } AC \parallel BD \text{ vì có cặp góc đồng vị}$$

bằng nhau.

Tứ giác ACBD có hai cạnh đối song song nên nó là hình thang cân.

Hình thang ACBD này lại có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

5. (hình 113) a) Tứ giác BDEC là hình thang cân.

Hướng dẫn : Học sinh tự giải tương tự như bài 3.

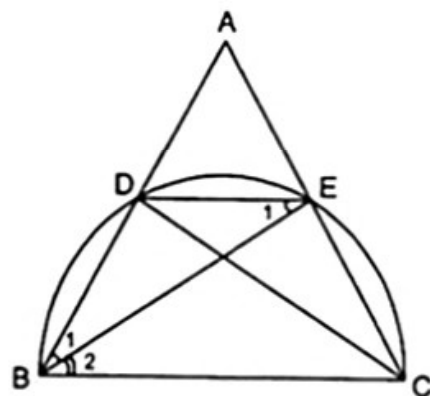
- b) Giả sử hình thang BDEC đã có $BD = DE = EC$ thì tam giác BDE cân ở D.

Áp dụng tính chất về góc vào tam giác cân BDE và tính chất góc so le của $DE \parallel BC$ ta

được $\begin{cases} \widehat{B_1} = \widehat{E_1} \\ \widehat{E_1} = \widehat{B_2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, điều này chứng tỏ

BE là đường phân giác của góc B.

Chứng minh tương tự ta cũng được CD là đường phân giác của góc C.



Hình 112

Vậy câu trả lời là D, E lần lượt là giao điểm của các đường phân giác của các góc C, B với các cạnh AB và AC.

- 6*. Câu trả lời là không. Phải bổ sung thêm một trong hai điều kiện là hai cạnh đáy không bằng nhau hoặc hai cạnh bên không song song.

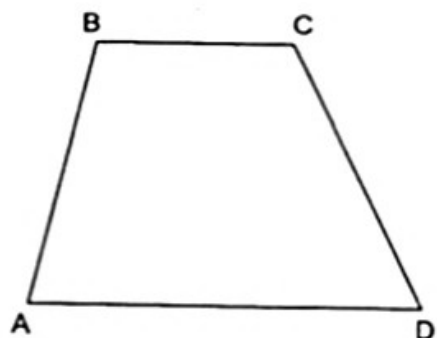
7. a) Biết ít nhất hai góc (không kể với một cạnh bên) của một hình thang thì tính được các góc còn lại.

b) Theo câu a) hai góc này không kể với một cạnh bên nên nó là hai góc kề với một đáy suy ra hai góc còn lại là $140^\circ, 120^\circ$.

8. $110^\circ, 50^\circ$.

9. (hình 114) Áp dụng tính chất hai góc trong cùng phía của $BC \parallel AD$ và giả thiết, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ & (1) \\ \widehat{A} - \widehat{B} = 30^\circ & (2) \\ \widehat{A} + \widehat{C} = 150^\circ & (3) \end{cases}$$



Hình 114

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được $2\hat{A} = 210^\circ$ hay $\hat{A} = 105^\circ$.

Kết hợp với (1) và (3) suy ra $\hat{B} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$, $\hat{C} = 150^\circ - 105^\circ = 45^\circ$.

Do góc C và D là hai góc trong cùng phía của $BC \parallel AD$ nên chúng bù nhau suy ra $\hat{D} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

10. a) Chỉ cần biết một góc của hình thang cân thì tính được các góc còn lại.

b) Đó là góc ở đáy lớn. Ba góc còn lại là $70^\circ, 110^\circ, 110^\circ$.

11. Đó là hai góc kề với một cạnh bên.

Các góc của hình thang cân đó là $110^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 70^\circ$.

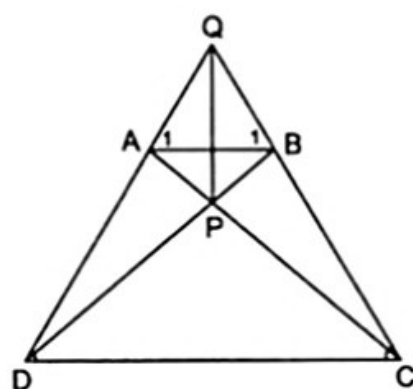
12. Câu trả lời là có.

Giải thích: Vì hai đáy không bằng nhau nên hai cạnh bên cắt nhau, ta được một tam giác có một cạnh là đáy lớn của hình thang cân. Tam giác này có hai góc bằng nhau nên nó là tam giác cân.

13. (hình 115) Áp dụng định nghĩa vào hình thang cân ABCD và tính chất góc đồng vị của $AB \parallel CD$, ta

được:
$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{C} \\ \hat{D} = \hat{A}_1, \hat{C} = \hat{B}_1 \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{C} = \hat{D}, \text{ suy}$$

ra $QA = QB$ và $QD = QC$ vì trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau. Điều này chứng tỏ Q cách đều hai đầu hai đoạn thẳng AB và CD nên Q thuộc đường trung trực của hai đáy.



Hình 115

Áp dụng tính chất về cạnh bên và đường chéo vào hình thang cân ABCD, ta

được:
$$\begin{cases} AD = BC \\ AC = BD \Rightarrow \triangle ADC = \triangle BCD \text{ (c - c - c)} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \\ DC = CD \end{cases}$$

Suy ra $PC = PD$ (1), kết hợp với $AC = BD$ ta có $PA = PB$ (2). Từ (1) và (2) chứng tỏ P cách đều hai đầu của hai đoạn thẳng CD và AB nên P thuộc đường trung trực của hai đáy. Vậy PQ là đường trung trực của hai đáy.

14. (hình 116) Xét hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có đáy lớn $CD = 2,7\text{m}$, cạnh bên $BC = 1\text{m}$ và $\hat{C} = 60^\circ$, ta phải tính đáy nhỏ AB.

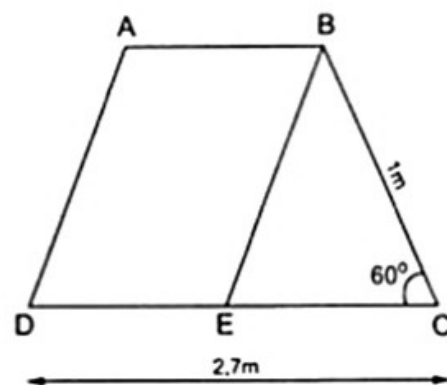
Kẻ $BE \parallel AD$ ta được hình thang $ABED$ có hai cạnh bên BE, AD song song nên $AB = DE$.

Áp dụng nhận xét hình thang có hai cạnh bên song song vào hình thang $ABED$, tính chất về cạnh, giả thiết vào hình thang cân $ABCD$ ta

$$\text{được } \begin{cases} AD = BC = 1\text{m} \\ AD = BE, \hat{C} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC = BE = 1\text{m} \\ \hat{C} = 60^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle BCE$ là tam giác đều có cạnh $EC = 1\text{m}$.

Vậy đáy nhỏ $AB = DE = 2,7 - 1 = 1,7\text{ (m)}$.

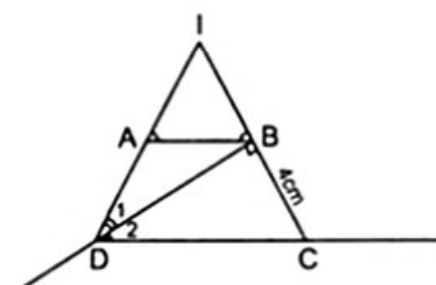


Hình 116

15. (hình 117) Theo bài 12 kéo dài hai cạnh bên của hình thang cân $ABCD$ thu được tam giác IDC cân tại I .

Theo giả thiết DB vừa là tia phân giác của góc D vừa là đường cao nên tam giác IDC cân tại D suy ra nó là tam giác đều cạnh $DC = CI = 8\text{cm}$, cũng chứng minh được tam giác IAB là tam giác đều nên $AB = 4\text{cm}$.

Vậy chu vi hình thang cân là 20cm .



Hình 117

Chủ đề 3

1. Tứ giác $BDEC$ là hình thang. Học sinh tự vẽ hình

Giải thích : Từ giả thiết suy ra DE là đường trung bình của tam giác ABC , theo định lý đường trung bình của tam giác ta có $DE \parallel BC$ nên $BDEC$ là hình thang.

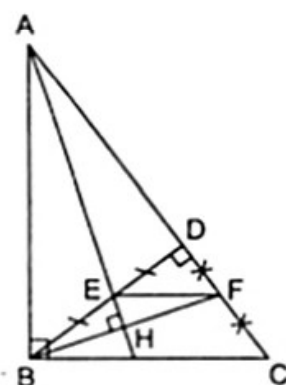
Áp dụng tính chất về góc vào tam giác ABC và tính chất góc trong cùng phía của $DE \parallel BC$, ta được :

$$\hat{C} = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ ;$$

$$\hat{D} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \text{ và } \hat{E} = 120^\circ .$$

2. (hình 118) Từ giả thiết suy ra EF là đường trung bình của tam giác BCD .

Áp dụng định lý đường trung bình và giả thiết vào tam giác BCD , ta được :



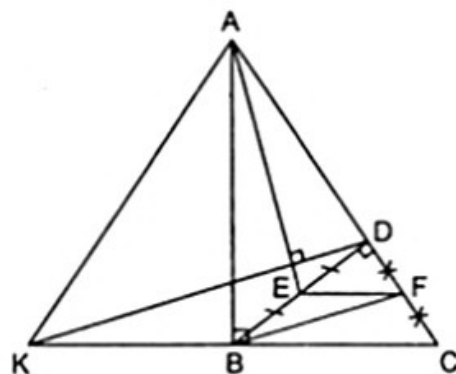
Hình 118

$$\begin{cases} EF // BC \\ \hat{B} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow EF \perp AB \text{ hay } FE \text{ là đường cao của tam giác ABF. Theo}$$

giả thiết BD là đường cao của tam giác ABC nên cũng là đường cao của tam giác ABF suy ra E là trực tâm của tam giác ABF hay AH là đường cao thứ ba của tam giác này.

Do đó $AH \perp BF$ nên $\widehat{AHF} = 90^\circ$.

3. (hình 119) Từ giả thiết E là trung điểm của BD, tam giác AKC cân tại A có đường cao AB ứng với cạnh đáy nên nó là đường trung tuyến hay B là trung điểm của KC. Vẽ thêm F là trung điểm của DC thì EF, BF lần lượt là đường trung bình của hai tam giác BCD và KCD.



Hình 119

Theo kết quả của bài 2 thì $AE \perp BF$. (1)

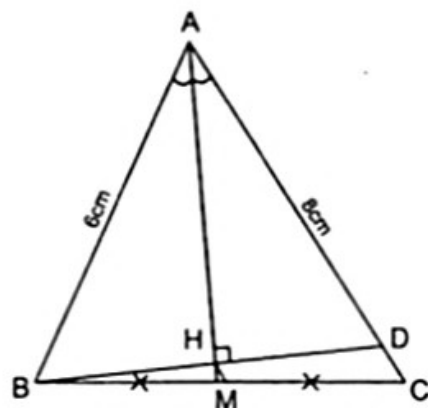
Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác AKC ta được $BF // KD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp KD$.

4. (hình 120) Gọi giao điểm của BH với cạnh AC là D.

Từ giả thiết ta có AH vừa là đường cao, vừa là đường phân giác của tam giác ABD nên tam giác này cân tại A.

Áp dụng tính chất về đường cao ứng với cạnh đáy vào tam giác cân ABD và kết hợp với giả thiết ta được $\begin{cases} BH = HD \\ BM = MC \end{cases} \Rightarrow HM$ là đường trung



Hình 120

bình của tam giác BCD.

Mặt khác áp dụng định nghĩa và giả thiết vào tam giác cân ABD, ta được :

$$\begin{cases} AB = AD \\ AB = 6\text{cm} \end{cases} \Rightarrow AD = 6\text{cm} \text{ nên } DC = AC - AD = 8 - 6 = 2 \text{ (cm).}$$

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác BCD, ta được :

$$HM = \frac{1}{2} DC = 1 \text{ (cm).}$$

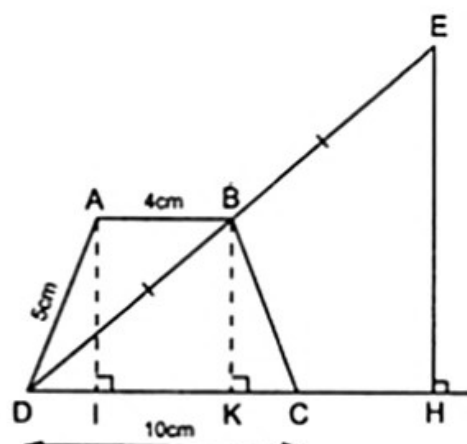
5. (hình 121) Kẻ AI, BK cùng vuông góc với DC thì AI // BK, BK // CH ta được hình thang ABKI có hai cạnh bên song song.

Áp dụng nhận xét về hình thang có hai cạnh bên song song và giả thiết vào hình thang

$$ABKI \text{ ta được } \begin{cases} AB = IK \\ AB = 4\text{cm} \end{cases} \Rightarrow IK = 4\text{cm}.$$

Áp dụng định nghĩa, tính chất về cạnh vào hình thang cân ABCD ta được

$$\begin{cases} AD = BC \\ \widehat{D} = \widehat{C}, \widehat{I} = \widehat{K} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AID = \triangle BKC$$



Hình 121

(trường hợp cạnh huyền, góc nhọn), suy ra

$$\frac{DI}{1} = \frac{KC}{1} = \frac{DI + KC}{2} = \frac{DC - IK}{2} = \frac{10 - 4}{2} = 3 \text{ (cm)}.$$

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác DEH có DB = BE, BK // CH ta được DK = KH = DI + IK = 3 + 4 = 7 (cm).

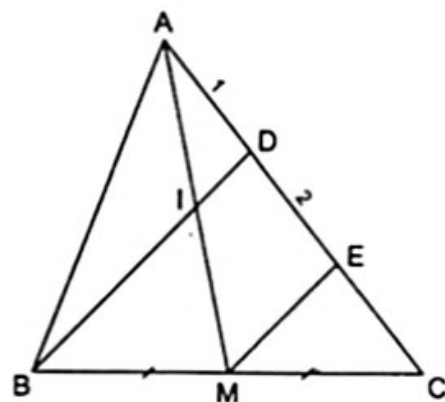
Lại có KH = KC + CH suy ra CH = KH - KC = 7 - 3 = 4 (cm).

6. (hình 122) Do M là trung điểm của BC theo giả thiết nên vẽ thêm E là trung điểm của DC thì ME là đường trung bình của tam giác BCD.

Kết hợp với giả thiết

$$\frac{AD}{1} = \frac{AC}{3} = \frac{AC - AD}{3 - 1} = \frac{DC}{2}, \text{ ta có } AD = DE.$$

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác BCD thu được ME // BD suy ra ME // ID.



Hình 122

Tam giác AEM có đường thẳng DI đi qua trung điểm D của AE và song song với ME nên đi qua trung điểm I của AM hay AI = IM.

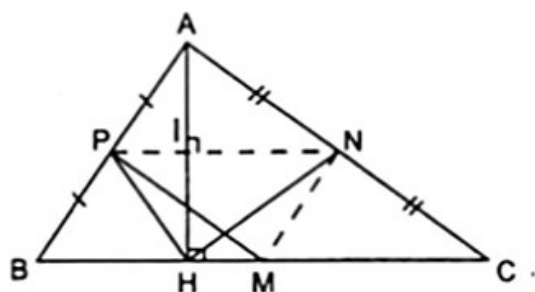
7. (hình 123) a) Từ giả thiết M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB ta có MN, NP, PM là ba đường trung bình của tam giác ABC. Gọi I là giao điểm của AH với PN.

Áp dụng định lý đường trung bình và giả thiết vào tam giác ABC, ta được :

$$\begin{cases} PN \parallel BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow PN \parallel BH, PN \perp AH.$$

Tam giác ABH có $AP = PB$, $PI \parallel BH$ nên $AI = IH$ (theo định lý đường trung bình).

Như vậy đường thẳng PN vuông góc với đoạn AH tại trung điểm I của nó nên PN là đường trung trực của đoạn AH.



Hình 123

b) Từ câu a) ta có $PN \parallel BC$ suy ra $PN \parallel HM$.

Tứ giác MNPH có hai cạnh đối song song nên nó là hình thang.

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác ABC và tính chất đường

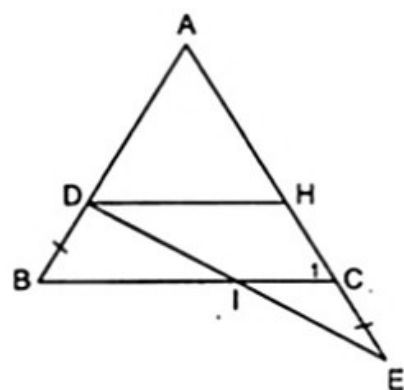
trung trực PN, ta được :
$$\begin{cases} PM = \frac{1}{2} AC = AN \\ HN = AN \end{cases} \Rightarrow PM = HN. \text{ Điều này chứng}$$

tỏ hình thang MNPH có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình thang cân.

8. (hình 124) Kẻ $DH \parallel BC$ thì tứ giác BDHC là hình thang và $DH \parallel IC$. Hình thang BDHC lại có $\widehat{B} = \widehat{C}_1$ theo tính chất về góc của tam giác cân ABC nên nó là hình thang cân.

Áp dụng tính chất về cạnh và giả thiết vào hình thang cân BDHC, ta được :

$$\begin{cases} BD = HC \\ BD = CE \end{cases} \Rightarrow HC = CE.$$



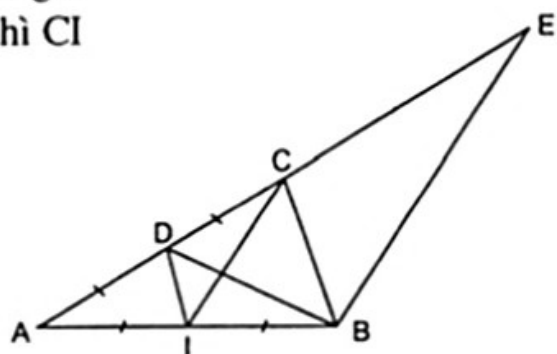
Hình 124

Tam giác DHE có đường thẳng CI đi qua trung điểm C của HE và song song với DH nên CI đi qua trung điểm của DE, hay $DI = IE$.

9. (hình 125) Do C là trung điểm của AE theo giả thiết nên vẽ thêm I là trung điểm của AB thì CI là đường trung bình của tam giác ABE.

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác ABE, ta được $BE = 2CI$ (1)

Mặt khác từ giả thiết BD là trung tuyến của tam giác ABC cân tại A nên $AD = DC$ (2), $AB = AC$ (3) và $AI = IB$ (do tôi vẽ) (4).



Hình 125

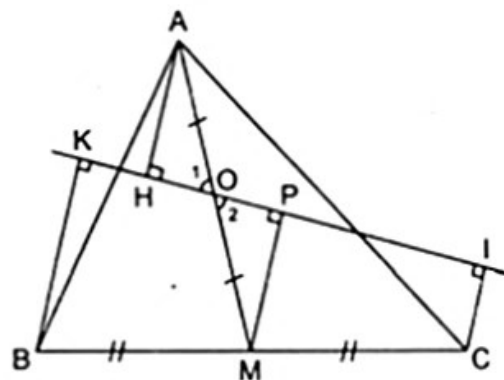
Từ (2), (3) và (4), ta có $AD = AI$ (5)

Lại có $\hat{A} = \hat{A}$ (6)

Từ (3), (5) và (6) suy ra $\triangle ABD = \triangle ACI$ (c - g - c) nên $BD = CI$. (7)

Kết hợp (1) với (7), ta có $BE = 2BD$.

10. (hình 126) Từ giả thiết ta có tứ giác $BCIK$ là hình thang vuông và M là trung điểm của BC nên vẽ thêm P là trung điểm của KI thì MP là đường trung bình của hình thang $BCIK$.



Hình 126

Áp dụng định lý đường trung bình vào hình thang $BCIK$, ta được $BK + CI = 2MP$ (1)

và $MP \parallel BK$ suy ra $\hat{P} = \hat{K} = 90^\circ$.

Lại có $AO = MO$ (theo giả thiết) và $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (đối đỉnh), nên $\triangle AOH = \triangle MOP$ (trường hợp cạnh huyền, góc nhọn).

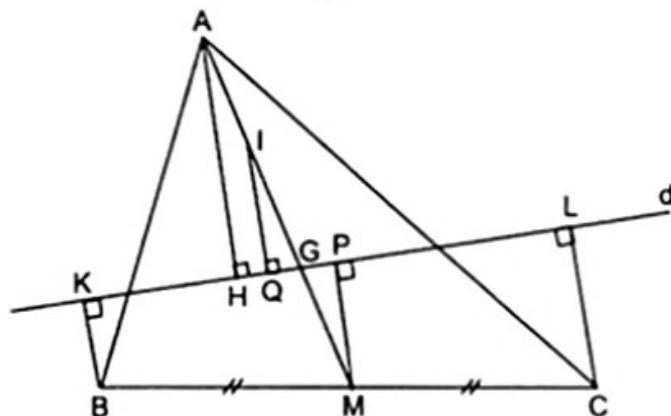
Do đó $AH = MP$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $BK + CI = 2AH$.

11. (hình 127) Gọi giao điểm của AG với BC là M . Do G là trọng tâm của tam giác ABC theo giả thiết nên AM là đường trung tuyến hay M là trung điểm của BC .

Chứng minh tương tự như bài 10, ta được $BK + CL = 2MP$ (1)

Gọi I là trung điểm của AG thì

$AI = IG = GM$ (theo tính chất đường trung tuyến) (2)



Hình 127

Kẻ thêm $IQ \perp d$ thì $IQ \parallel AH$ thu được tam giác AHG có đường thẳng IQ đi qua trung điểm I của AG và song song với AH nên $HQ = QG$ (3) (theo định lý đường trung bình).

Từ (2) và (3), ta có IQ là đường trung bình của tam giác AHG .

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác AHG ta được $AH = 2IQ$ (4)

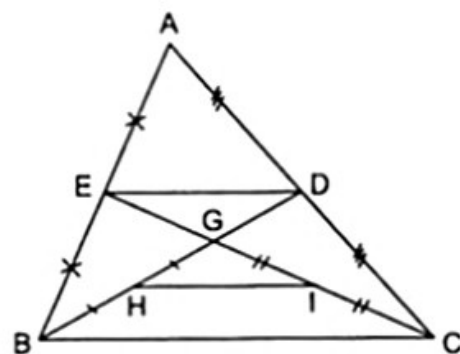
Lại có $\widehat{Q_1} = \widehat{Q_2}$ (đối đỉnh), kết hợp với (2), ta có $\triangle MPG = \triangle IQG$ (trường hợp cạnh huyền, góc nhọn), suy ra $MP = IQ$ (5)

Từ (1), (4) và (5) suy ra $BK + CL = AH$.

12. (hình 128) Từ giả thiết ta có ED, HI lần lượt là các đường trung bình của hai tam giác ABC và GBC. Áp dụng định lý đường trung bình vào hai tam giác này, ta được :

$$\begin{cases} ED \parallel BC; HI \parallel BC \\ ED = \frac{1}{2} BC; HI = \frac{1}{2} BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow DE \parallel HI; DE = HI.$$



Hình 128

13. Xét hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Học sinh tự vẽ hình.

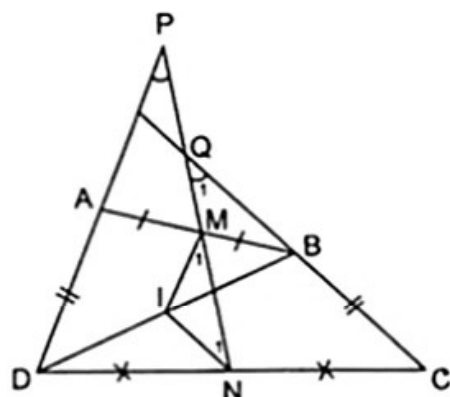
Gọi E, P, Q, F lần lượt là trung điểm của AD, BD, AC, BC thì EF, EP, EQ thứ tự là các đường trung bình của hình thang ABCD, tam giác ABD và tam giác ACD.

Áp dụng định lý đường trung bình vào các tam giác và vào hình thang, ta được : $EP \parallel AB \parallel CD$; $EQ \parallel CD \parallel AB$; $EF \parallel AB \parallel CD$, suy ra bốn điểm E, P, Q, F thẳng hàng (vì từ điểm E ở ngoài hai đường thẳng $AB \parallel CD$ chỉ kẻ được một đường thẳng song song với hai đường thẳng đó).

14. (hình 129) Do M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD theo giả thiết nên vẽ thêm I là trung điểm của BD thì IM, IN thứ tự là đường trung bình của các tam giác ABD và BCD.

Áp dụng định lý đường trung bình và giả thiết vào hai tam giác trên, ta được :

$$\begin{cases} IM \parallel AC; IN \parallel BC \\ IM = \frac{1}{2} AD; IN = \frac{1}{2} BC \\ AD = BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IM = IN & (1) \\ \widehat{M_1} = \widehat{P} & (2) \\ \widehat{N_1} = \widehat{Q_1} & (3) \end{cases}$$



Hình 129

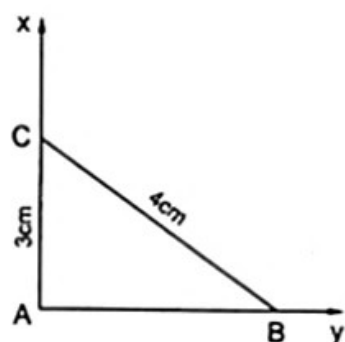
Từ (1) suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$ (4) (trong một tam giác đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau).

Từ (2), (3) và (4) suy ra $\widehat{P} = \widehat{Q_1}$ hay $\widehat{APM} = \widehat{BQM}$.

Chủ đề 4

1. (hình 130) Đây là bài toán dựng hình cơ bản.
Ta dựng như sau (học sinh tự dựng hình) :

- Dựng góc vuông xAy .
- Dựng cung tròn tâm A bán kính 3cm cắt Ax ở C.
- Dựng cung tròn tâm C bán kính 5cm cắt By ở B.



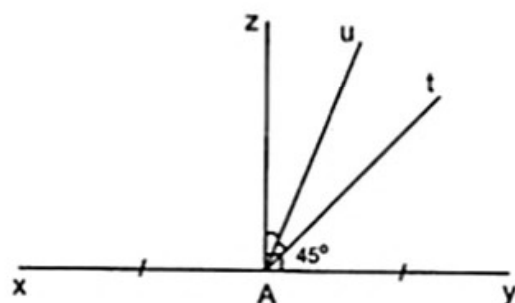
Hình 130

2. (hình 131) Trên đường thẳng xy lấy điểm A.

- Dựng Az vuông góc với xy.
- Dựng tia phân giác At của góc vuông zAy thu được hai góc

$$\widehat{tAy} = 45^\circ, \widehat{xAt} = 135^\circ.$$

- Dựng tia phân giác Au của góc zAt ta được $\widehat{uAy} = 75^\circ$.



Hình 131

3. a) *Phân tích* : Giả sử đã dựng được hình thang thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Ta thấy :

- Tam giác ACD vuông tại D dựng được ngay vì biết ba yếu tố c.g.c.
- Ta còn phải xác định đỉnh B. Đỉnh B phải thỏa mãn hai điều kiện, nằm trên tia Ax // DC và cách C một khoảng bằng 3cm. Từ đó suy ra cách dựng.

b) *Cách dựng* : Học sinh tự dựng hình.

- Dựng tam giác ACD biết $AD = 2\text{cm}$, $\widehat{D} = 90^\circ$, $DC = 3\text{cm}$.
- Dựng tia Ax // DC, dựng cung tròn tâm C bán kính 3cm cắt tia Ax ở B. Nối BC ta được hình thang vuông ABCD.

c) *Chứng minh* :

Thật vậy, tứ giác ABCD có $AB \parallel CD$ và $\widehat{D} = 90^\circ$ nên là hình thang vuông. Hình thang vuông này có $AD = 2\text{cm}$, $DC = 3\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

4. a) *Phân tích :*

Giả sử đã dựng được hình thang cân ABCD thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Ta thấy

- Tam giác BCD dựng được ngay vì biết ba yếu tố ($c - c - c$).
- Ta còn phải xác định đỉnh A. Đỉnh A phải thỏa mãn hai điều kiện, nằm trên tia $Bx // CD$ và cách C một khoảng bằng 3cm. Từ đó suy ra cách dựng.

b) *Cách dựng :* Học sinh tự dựng hình.

- Dựng tam giác BCD, biết $BC = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$ và $BD = 3\text{cm}$.
- Dựng tia $Bx // CD$, dựng cung tròn tâm C bán kính 3cm cắt tia Bx ở A. Nối AD ta được hình thang cân ABCD.

c) *Chứng minh :*

Thật vậy, tứ giác ABCD có $AB // CD$ và hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân. Hình thang cân này có $AD = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, $BD = 3\text{cm}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

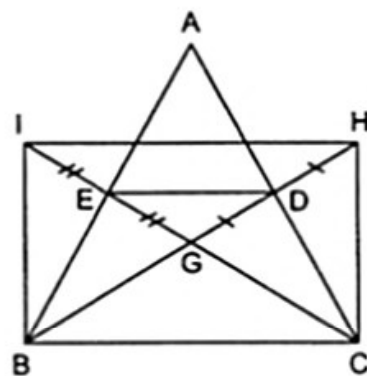
Chủ đề 5

1. Các câu c), d) đúng còn các câu a), b) sai.
2. (hình 132) *Cách 1 :* Từ giả thiết BD, CE là các đường trung tuyến của tam giác ABC nên D, E lần lượt là trung điểm của AC và AB.

Cũng từ giả thiết D, E thứ tự là trung điểm của GH, GI. Do đó DE là đường trung bình của hai tam giác ABC và GHI.

Áp dụng định lý đường trung bình vào hai tam giác trên, thu được :

$$\begin{cases} ED // BC, ED // IH \\ BC = 2ED, IH = 2ED \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IH // BC \\ IH = BC \end{cases}$$



Hình 132

Tứ giác BCHI có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành.

Cách 2 : Đặt $BD = 3a$, $CE = 3b$. Từ giả thiết BD, CE là hai đường trung tuyến của tam giác ABC cắt nhau ở G nên G là trọng tâm của tam giác.

Áp dụng tính chất các đường trung tuyến và giả thiết vào tam giác ABC, ta được :

$$\begin{cases} DH = DG = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{3}BD = a \\ EI = EG = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{3}CE = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IG = GC = 2b \\ BG = GH = 2a. \end{cases}$$

Tứ giác BCHI có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đường nên nó là hình bình hành.

3. Học sinh tự vẽ hình.

a) Áp dụng định nghĩa, tính chất về cạnh và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta được :

$$\begin{cases} BC // AD, BC = AD \\ BM = MC, AN = ND \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MC // AN, MC = AN \\ BM // DN, BM = DN \end{cases}$$

Như vậy hai tứ giác AMCN, BMDN đều có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên chúng là các hình bình hành.

b) Hai hình bình hành AMCN, BMDN có MN là đường chéo chung.

Gọi O là trung điểm của MN. Theo tính chất về đường chéo của hình bình hành thì hai đường chéo còn lại là AC và BD phải đi qua trung điểm của đường chéo chung MN.

Vậy ba đường thẳng AC, BD, MN đồng quy tại điểm O.

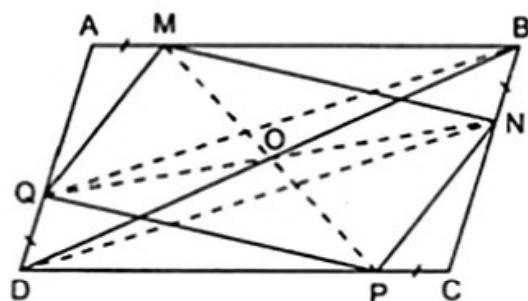
4. (hình 133) a) Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta được :

$$\begin{cases} AD // BC \\ BN = DQ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BN // DQ \\ BN = DQ \end{cases}$$

Tứ giác BNDQ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành.

Áp dụng tính chất về cạnh và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta được :

$$\begin{cases} AB = CD, AD = BC \\ AM = BN = CP = DQ \end{cases} \Rightarrow MB = PD, QA = NC.$$



Hình 133

Kết hợp với tính chất về góc của hình bình hành $\widehat{A} = \widehat{C}, \widehat{B} = \widehat{D}$ ta có hai cặp tam giác bằng nhau là QAM với NCP và MBN với PDQ theo trường hợp (c - g - c), suy ra QM = NP, MN = PQ.

Điều này chứng tỏ tứ giác MNPQ có các cạnh đối bằng nhau nên nó là hình bình hành.

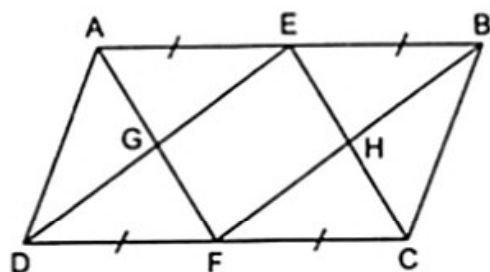
b) Hai hình bình hành ABCD, BNDQ có BD là đường chéo chung. Gọi O là trung điểm của BD theo tính chất về đường chéo của hình bình hành thì hai đường chéo còn lại là AC và NQ phải đi qua O, hay O là trung điểm của NQ.

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình bình hành MNPQ ta được đường chéo MP phải đi qua trung điểm O của đường chéo NQ.

Vậy bốn đường thẳng AC, BD, MP và NQ đồng quy tại điểm O.

5. (hình 134) a) Áp dụng định nghĩa, tính chất về cạnh và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta được :

$$\begin{cases} AB // CD, AB = CD \\ AE = EB, DF = FC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE // FC \\ AE = FC \end{cases}$$



Hình 134

Tứ giác AECF có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

Chứng minh tương tự ta cũng được tứ giác EBFD là hình bình hành.

Áp dụng định nghĩa vào hai hình bình hành trên, ta có :

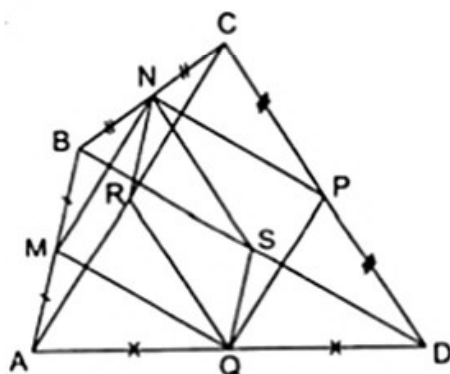
$$\begin{cases} AF // EC \\ DE // FB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} GF // EH \\ GE // FH \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ tứ giác EHFG có các cạnh đối song song. Vậy nó là hình bình hành.

b) Hai hình bình hành AECF, EHFG có chung đường chéo GH.

Gọi O là trung điểm của GH. Lập luận tương tự như bài 4 ta được AC, FE, GH đồng quy tại O.

- 6*. (hình 135) Xét tứ giác ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và R, S thứ tự là trung điểm của AC, BD. Trước hết ta đi chứng minh các tứ giác MNPQ (xem ví dụ 1, dạng 1, chủ đề 5) và RNSQ là hình bình hành.



Hình 135

Do hai hình bình hành trên có NQ là đường chéo chung nên lập luận tương tự như bài 4 ta có điều phải chứng minh.

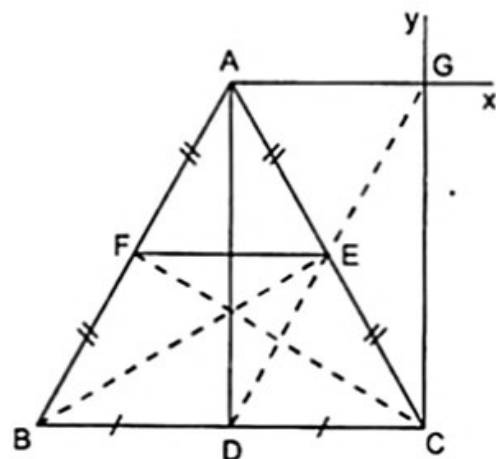
7. Học sinh tự chứng minh.
8. (hình 136) Từ giả thiết AD, BE, CF là các đường trung tuyến nên D, E, F lần lượt là các trung điểm của BC, CA, AB, suy ra $BC = 2DC$ (1) và đường trung bình của tam giác ABC.

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác ABC ta được $FE \parallel BC$ hay $FE \parallel DC$ (2) và $BC = 2FE$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $FE = DC$. (4)

Lại từ giả thiết $\begin{cases} Ax \parallel BC \\ Ey \parallel AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AG \parallel FE \\ EG \parallel AF \end{cases}$.

Tứ giác AGEF có hai cạnh đối song song nên là hình bình hành.



Hình 136

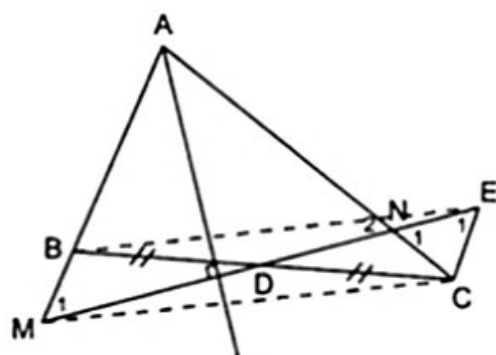
Áp dụng định nghĩa, tính chất về cạnh vào hình bình hành AGEF, ta được :

$AG \parallel FE$ (5), $AG = FE$ (6).

Từ (2), (4), (5) và (6) suy ra $AG \parallel DC$ và $AG = DC$. Điều này chứng tỏ tứ giác AGCD có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành, theo định nghĩa hình bình hành ta có $AD \parallel GC$.

9. (hình 137) Do D là trung điểm của BC theo giả thiết nên chọn BC làm một đường chéo. Vẽ thêm điểm E sao cho D là trung điểm của ME thì tứ giác BMCE có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành.

Áp dụng định nghĩa, tính chất về cạnh vào hình bình hành BMCE ta được $BM \parallel CE$ và $BM = CE$. (1)



Hình 137

Mặt khác theo giả thiết trong tam giác AMN ta thấy MN vuông góc với tia phân giác của góc A nên tam giác AMN cân ở A.

Áp dụng tính chất về góc vào tam giác cân AMN, tính chất của hai góc đối đỉnh ở N và tính chất góc so le của $BM \parallel CE$, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{N_2}, \widehat{N_1} = \widehat{N_2} \\ \widehat{M_1} = \widehat{E_1} \end{cases} \Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{E_1} \Rightarrow CE = CN \text{ (vì trong một tam giác,}$$

đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BM = CN$.

10. (hình 138) Do M là trung điểm của AC theo giả thiết nên chọn AC làm một đường chéo.

Vẽ thêm điểm F sao cho M là trung điểm của BF thì tứ giác ABCF có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành.

Áp dụng định nghĩa, tính chất về cạnh và đường chéo vào hình bình hành ABCF ta được $BC \parallel AF$, $BC = AF$ (1) và $BF = 2BM$ (2).

Áp dụng tính chất hai góc trong cùng phía của $BC \parallel AF$ và giả thiết, thu được :

$$\begin{cases} \widehat{ABC} + \widehat{BAF} = 180^\circ, \widehat{B}_1 = \widehat{B}_3 = 90^\circ \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 + \widehat{ABC} = 360^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{BAF} \quad (3).$$

Từ giả thiết các tam giác ABD, BCE cùng vuông cân ở B nên $BA = BD$ (4) và $BE = BC$ (5).

Kết hợp (1) với (5), ta có $BE = AF$ (6).

Từ (3), (4) và (6) suy ra $\triangle BDE = \triangle ABF$ (c.g.c), do đó $DE = BF$.

Thay $BF = DE$ vào đẳng thức (2), ta được $DE = 2BM$.

- 11*. (hình 139) Do M là trung điểm của ED theo giả thiết nên chọn ED là một đường chéo.

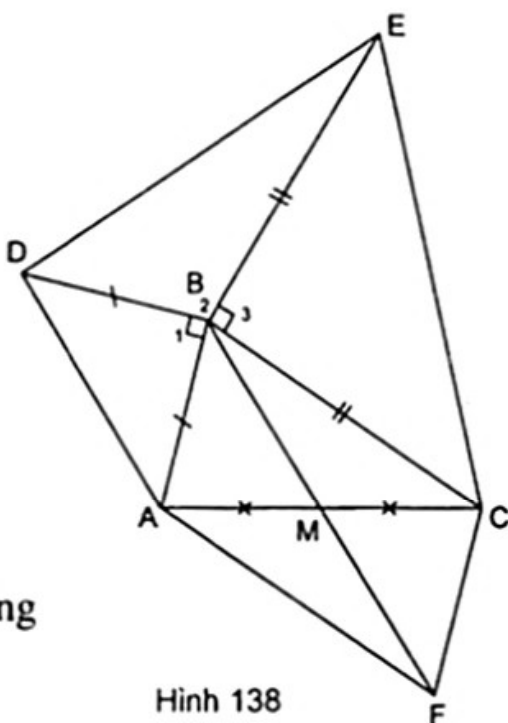
Vẽ thêm điểm I sao cho M là trung điểm của AI thì tứ giác AEID là hình bình hành.

Do đó $AD \parallel EI$, $AD = EI$.

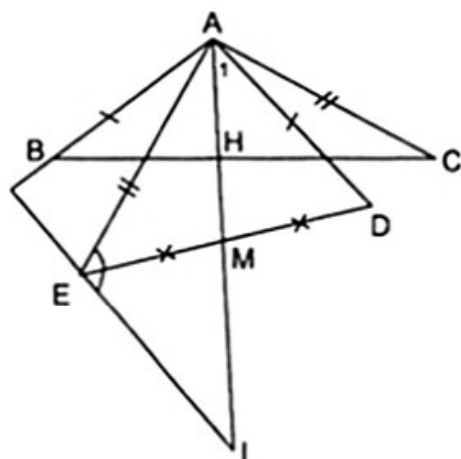
Có $\triangle ABC = \triangle EIA$ (c.g.c), chú ý $\widehat{BAC} = \widehat{IEA}$ vì cùng bù với $\widehat{EAD}$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$.

Gọi H là giao điểm của AM với BC. Ta có

$$\widehat{B} + \widehat{BAH} = \widehat{A}_1 + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC.$$



Hình 138



Hình 139

- 12*. (hình 140) Do M là trung điểm của DE theo giả thiết nên chọn DE là một đường chéo. Vẽ thêm điểm N sao cho M là trung điểm của BN thì tứ giác BDNE là hình bình hành nên $EN \perp AB$, $EN = AB$.

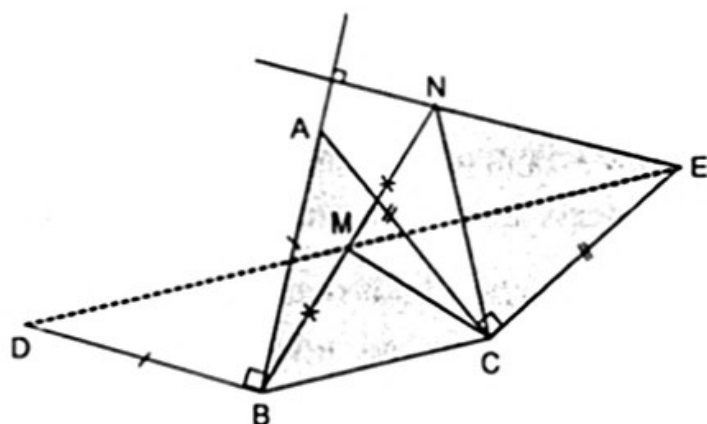
Lại có $EC \perp AC$, $EC = AC$.

Từ đó, suy ra :

$\triangle ABC = \triangle ENC$ (c.g.c) nên :

$BC = NC$ và $BC \perp NC$.

Do đó $\triangle BCN$ vuông cân, suy ra $\triangle BMC$ vuông cân tại M.

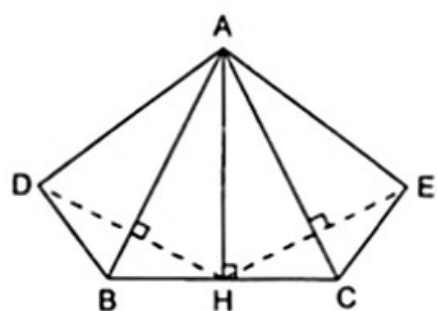


Hình 140

Chủ đề 6

- (hình 141) a) Từ giả thiết điểm D đối xứng với H qua đường thẳng AB, điểm E đối xứng với H qua AC mà A, B đối xứng với chính nó qua AB nên AD đối xứng với AH qua AB, BD đối xứng với BH qua AB.

Lại có A, C đối xứng với chính nó qua AC nên AE đối xứng với AH qua AC, CE đối xứng với CH qua AC.

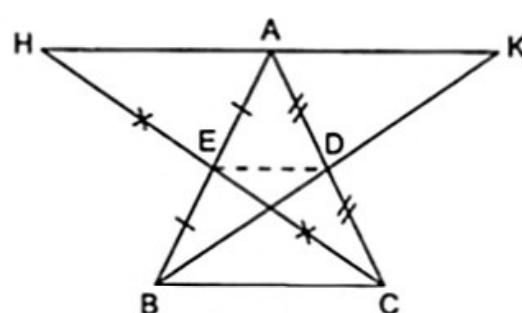


Hình 141

b) Từ câu a), suy ra $\triangle ADB$ đối xứng với $\triangle AHB$ qua trục AB và $\triangle AEC$ đối xứng với $\triangle AHC$ qua trục AC.

- (hình 142) Từ giả thiết BD, CE là các đường trung tuyến ta có D, E là trung điểm của AC, AB và giả thiết H đối xứng với C qua E, K đối xứng với B qua D ta lại có D, E lần lượt là trung điểm của BK, CH.

Do đó các tứ giác ACBH, ABCK là các hình bình hành.



Hình 142

Áp dụng định nghĩa, tính chất về cạnh vào hai hình bình hành trên, ta được :

$$\begin{cases} HA \parallel BC, AK \parallel BC \\ HA = BC, AK = BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HA = AK \\ H, A, K \text{ thẳng hàng.} \end{cases}$$

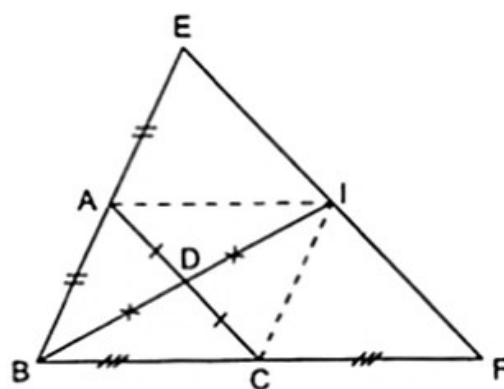
Điều này chứng tỏ A là trung điểm của HK. Vậy H đối xứng với K qua A.

3. (hình 143) Từ giả thiết ta có A, D, C lần lượt là trung điểm của BE, BI, BF nên AD, DC thứ tự là đường trung bình của hai tam giác BEI và BIF.

Áp dụng định lí đường trung bình vào hai tam giác trên và giả thiết BD là trung tuyến vào tam giác ABC, ta được :

$$\begin{cases} AD // EI, DC // IF \\ AD = \frac{1}{2} EI; DC = \frac{1}{2} IF; AD = DC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E, I, F \text{ thẳng hàng.} \\ EI = IF. \end{cases}$$



Hình 143

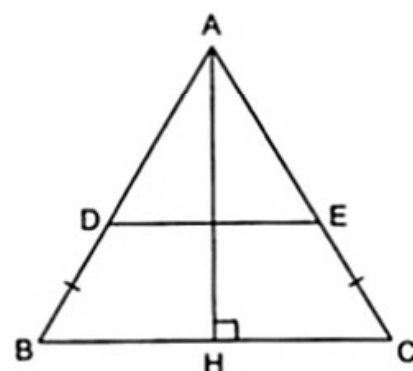
Điều này chứng tỏ I là trung điểm của EF hay E đối xứng với F qua I.

4. (hình 144) Từ giả thiết và định nghĩa $\triangle ABC$ cân tại A, ta có $AB = AC$ (1); $BD = CE$ (2).

Trừ theo vế đẳng thức (1) cho đẳng thức (2), ta được $AD = AE$ nên $\triangle ADE$ cân tại A.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A, AH là đường cao nên AH là tia phân giác của góc A.

Do $\triangle ADE$ cân tại A, AH là tia phân giác của góc A nên AH là đường trung trực của DE. Vậy D đối xứng với E qua AH.



Hình 144

5. (hình 145) *Hướng dẫn* : Hãy chứng minh tứ giác AMCN là hình bình hành.

6. Học sinh tự chứng minh như bài 3.

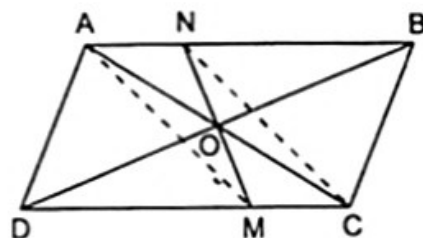
7. (hình 146) Từ giả thiết d là đường trung trực của AC ta có $AC \perp d$, A đối xứng với C qua d (1) và B đối xứng với D qua d nên $BD \perp d$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC // BD$, $\widehat{CDB}$ đối xứng với $\widehat{ABD}$ qua trục d.

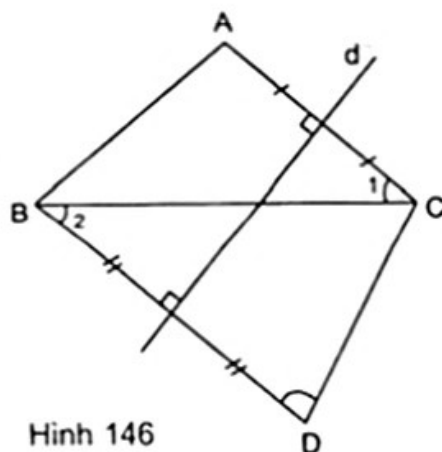
Áp dụng tính chất của phép đối xứng trục, giả thiết và tính chất góc trong cùng phía của $AC // BD$, ta

$$\text{được : } \begin{cases} \widehat{CBD} = \widehat{ACB}, \widehat{A} = 100^\circ \\ \widehat{ABD} + \widehat{A} = 180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{ABD} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$



Hình 145

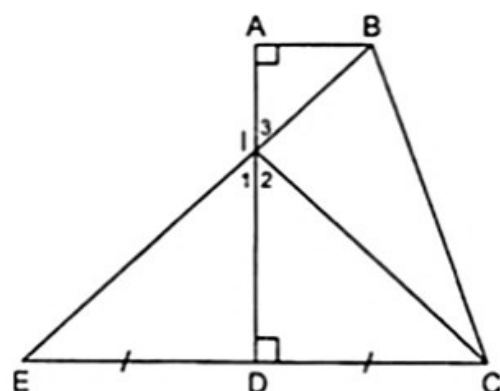


Hình 146

8. (hình 147) Vì E đối xứng với C qua AD và I, D đối xứng với chính nó qua AD nên $\widehat{EID}$ đối xứng với $\widehat{CID}$ qua AD.

Áp dụng tính chất của phép đối xứng trục và tính chất của hai góc đối đỉnh ở I, ta

$$\text{được : } \begin{cases} \widehat{EID} = \widehat{CID} \\ \widehat{EID} = \widehat{AIB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{CID}.$$



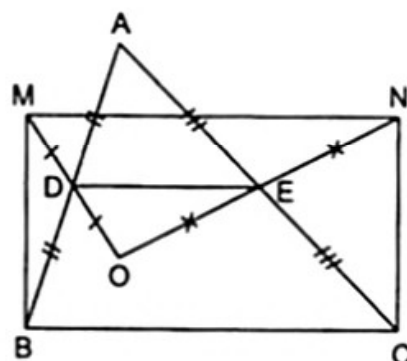
Hình 147

9. (hình 148) Từ giả thiết ta có D là trung điểm của AB và MO, E là trung điểm của AC, ON nên DE là đường trung bình của cả hai tam giác ABC và OMN.

Áp dụng định lí đường trung bình vào hai tam giác trên, ta được :

$$\begin{cases} DE \parallel BC, DE \parallel MN \\ DE = \frac{1}{2} BC, DE = \frac{1}{2} MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = BC \end{cases}$$

Tứ giác MNCB có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành.



Hình 148

10. (hình 149) *Cách 1* : Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình bình hành ABCD, tính chất góc so le của $AB \parallel CD$ và tính chất của góc đối đỉnh ở O, ta được :

$$\begin{cases} AO = CO \\ \widehat{A_1} = \widehat{C_1}, \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle AOE = \triangle COF \text{ (g - c - g)}.$$

Suy ra $EO = OF$.

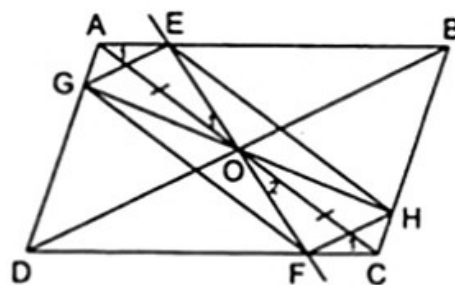
Chứng minh tương tự, ta cũng được $\triangle DOG = \triangle BOH$, nên $GO = OH$.

Như vậy tứ giác EGFH có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành.

Cách 2 : Vì hình bình hành ABCD nhận giao điểm O của hai đường chéo làm tâm đối xứng nên AB đối xứng với CD qua O.

Do $E \in AB, F \in CD$ và EF đi qua O nên E đối xứng với F qua O hay $EO = OF$.

Lập luận tương tự ta cũng được $GO = OH$, nên tứ giác EGFH là hình bình hành.



Hình 149

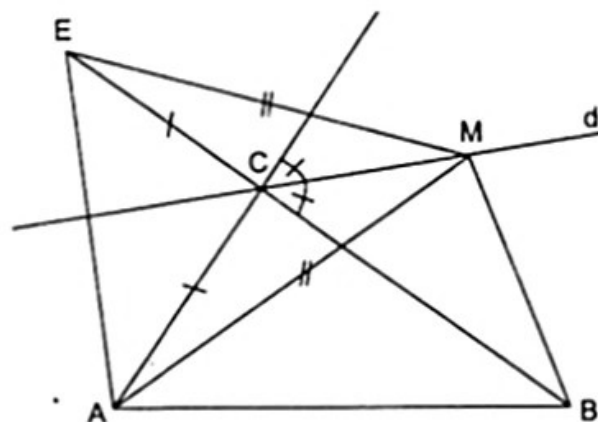
11. (hình 150) Gọi d là đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh C .

Vẽ thêm điểm E đối xứng với điểm A qua d bằng cách, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CA$ ta được $\triangle CAE$ cân tại C có d là phân giác của góc ở đỉnh nên d là đường trung trực của AE , do đó $MA = ME$.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào $\triangle MBE$, ta được :

$$MA + MB = ME + MB > BE = CE + CB = CA + CB.$$

12. Học sinh tự giải.



Hình 150

Chủ đề 7

1. Các câu đúng là a), d). Các câu sai là b), c).

2. Trong hình chữ nhật :

a) Các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tính chất này được suy ra từ tính chất về đường chéo của hình bình hành.

b) Các đường chéo bằng nhau. Tính chất này được suy ra từ tính chất về đường chéo của hình thang cân.

3. Học sinh tự chứng minh.

4. (hình 151) Tứ giác BNMC là hình chữ nhật.

Giải thích :

M đối xứng với O qua D nên $OD = DM$.

O là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $BO = 2OD$.

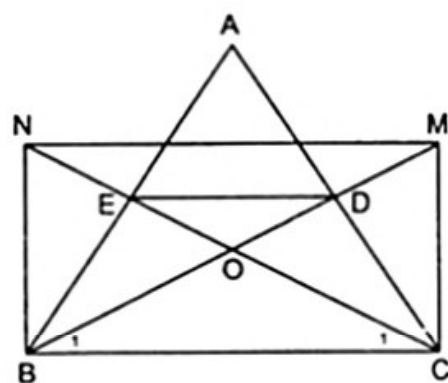
$$\Rightarrow BO = OM.$$

Chứng minh tương tự, có $CO = ON$.

Tứ giác BNMC có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

$$\text{Có } \triangle BDC = \triangle CEB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow BO = CO \Rightarrow BM = CN.$$

Hình bình hành BNMC có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật.



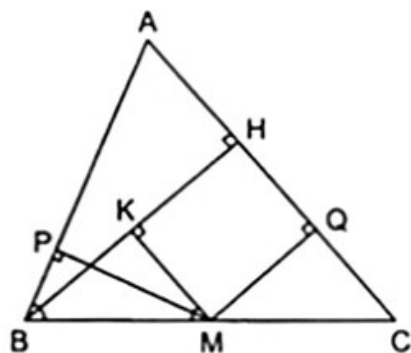
Hình 151

5. (hình 152) Kẻ $MK \perp BH$ thì $MK \parallel AC$ và $\widehat{K} = \widehat{H} = \widehat{Q} = 90^\circ$. Tứ giác MKHQ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

$\Delta BMP = \Delta MBK$ (trường hợp cạnh huyền, góc nhọn) suy ra $MP = BK$ (1)

Lại có $MQ = KH$ (2) theo tính chất về cạnh của hình chữ nhật.

Cộng theo vế đẳng thức (1) và (2), ta được $MP + MQ = BH$.

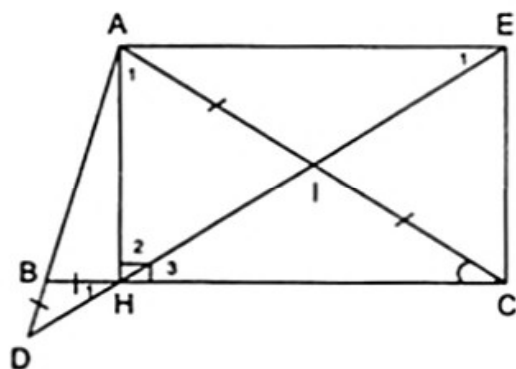


Hình 152

6. (hình 153) Đặt $\widehat{C} = \alpha$ thì $\widehat{B} = 2\alpha$.

a) Từ giả thiết $BD = BH \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{H}_1$ (1) vì trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau.

Vì $\widehat{B} = 2\alpha$ là góc ngoài của ΔBDH nên $\widehat{B} = 2\alpha = \widehat{D} + \widehat{H} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{H} = \alpha$.



Hình 153

Trong tam giác vuông AHC ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (2), vì cùng phụ với α .

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} IC = IH \\ IH = IA \end{cases} \Rightarrow IA = IC$.

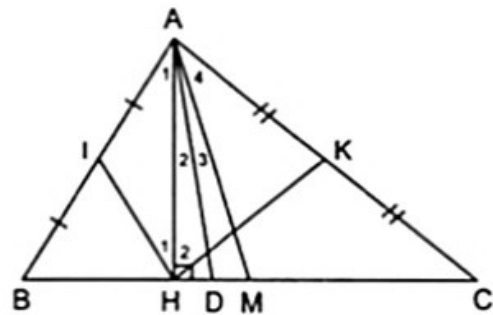
b) Do I là trung điểm của AC theo câu a) nên chọn AC là một đường chéo. Vẽ thêm E sao cho I là trung điểm của HE thì tứ giác AHCE là hình chữ nhật, vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và có góc H vuông.

Áp dụng định nghĩa vào hình chữ nhật AHCE ta được $HC \parallel AE$ suy ra $\widehat{E}_1 = \widehat{H}_3 = \alpha$ (vì so le). Lại có $\widehat{D} = \alpha$ theo câu a), nên $\widehat{E}_1 = \widehat{D}$.

Áp dụng tính chất về cạnh vào hình chữ nhật AHCE và tính chất hai cạnh đối diện với hai góc bằng nhau ta được $\begin{cases} AE = HC \\ AE = AD \end{cases} \Rightarrow HC = AD$.

7. Xem ví dụ 3*, dạng 2.
8. Xem ví dụ 3*, dạng 2.
9. Xem ví dụ 3*, dạng 2.

10. Xem ví dụ 2, dạng 3.
11. Xem ví dụ 2, dạng 3.
12. (hình 154) a) Áp dụng định lý trung tuyến ứng với cạnh huyền vào tam giác vuông ABC, ta được :



Hình 154

$$\begin{cases} MA = \frac{1}{2}BC \\ BM = MC \end{cases} \Rightarrow MA = MC \text{ nên } \widehat{A_4} = \widehat{C} \text{ (vì trong một tam giác, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau).}$$

diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau).

Lại có $\widehat{A_1} = \widehat{C}$ do cùng phụ với góc B, suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_4}$. (1)

b) Vì AD là phân giác của góc A theo giả thiết nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$. (2)

Trừ theo vế đẳng thức (2) cho (1) ta được $\widehat{A_2} = \widehat{A_3}$.

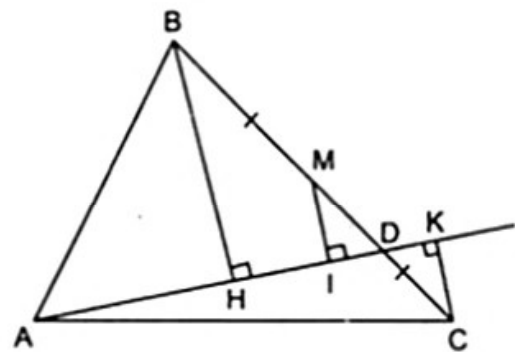
Điều này chứng tỏ AD là tia phân giác của góc HAM.

c) Chứng minh tương tự như câu a), ta có $\widehat{H_1} = \widehat{A_1}$ (3) và $\widehat{H_2} = \widehat{HAC}$. (4)

Cộng theo vế đẳng thức (3) với (4) ta được $\widehat{IHK} = \widehat{A} = 90^\circ$.

Chủ đề 8

1. (hình 155) Từ giả thiết ta có $BH \parallel MI \parallel CK$ (vì cùng vuông góc với AD) và $BM = MC$, nên BH, MI, CK là ba đường thẳng song song cách đều.



Hình 155

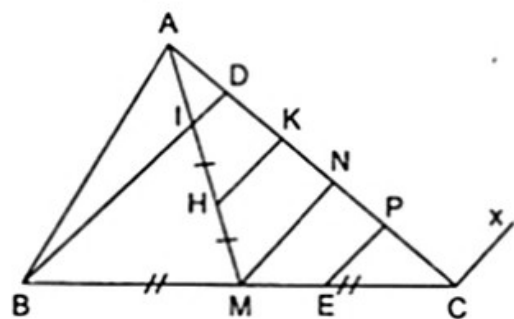
Do đó chúng chắn trên đường thẳng AD hai đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau là $HI = IK$.

2. (hình 156) Gọi H, E thứ tự là trung điểm của IM và MC. Kết hợp với giả thiết $AM = 3AI$ ta có $AI = IH = HM$.

Qua H, M, E lần lượt kẻ HK, MN, EP cùng song song với ID thu được bốn đường thẳng song song cách đều là ID, HK, MN, EP nên chúng chắn trên AC năm đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau là

$$AD = DK = KN = NP = PC.$$

Điều này chứng tỏ $AD = \frac{1}{5} AC$.



Hình 156

3. (hình 157a) Gọi N là trung điểm của AG và M là giao điểm của AG với BC thì $BM = MC$ và K, H thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ N, M đến đường thẳng d. Kết hợp với giả thiết, ta có :

$$AD \parallel NK \parallel MH \parallel BE \parallel CF.$$

a) $BE + CF = AD$. Thật vậy :

Ta có BE, MH, CF là ba đường thẳng song song cách đều nên chúng chắn trên d hai đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau là $EG = GF$. Do đó MH là đường trung bình của hình thang BEFC suy ra

$$BE + CF = 2MH \quad (1), \text{ theo định lí đường trung bình.}$$

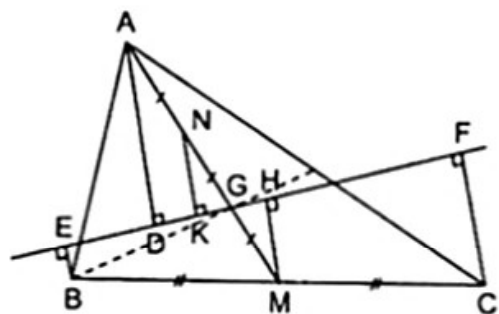
Mặt khác AD, NK, MH cũng là ba đường thẳng song song cách đều nên chúng chắn trên d ba đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau là $DK = KG = GH$. Do đó NK là đường trung bình của tam giác AGD và $\triangle NKG = \triangle MHG$ (c - g - c), suy ra $AD = 2NK = 2MH$.

Thay $2MH = AD$ vào đẳng thức (1) ta được $BE + CF = AD$.

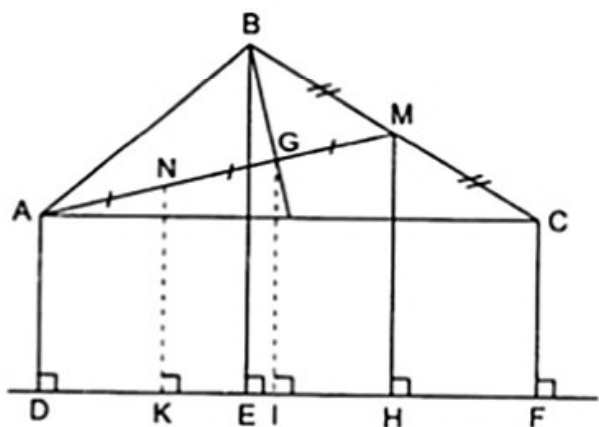
b) (hình 157b) $AD + BE + CF = 3GI$.
Thật vậy, tương tự như câu a), ta có BE, MH, CF là ba đường thẳng song song cách đều nên chúng chắn trên đường thẳng d hai đoạn liên tiếp bằng nhau là $EH = HF$. Do đó MH là đường trung bình của hình thang BCFE.

Áp dụng định lí đường trung bình vào hình thang BCFE, thu được :

$$BE + CF = 2MH$$



Hình 157a



Hình 157b

Lại có AD, NK, GI, MH cũng là bốn đường thẳng song song cách đều nên chúng chắn trên đường thẳng d ba đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau là :

$$DK = KI = IH.$$

Do đó NK, GI thứ tự là hai đường trung bình của hai hình thang AGID và NMHK. Áp dụng định lí đường trung bình vào hai hình thang này, ta được :

$$AD + GI = 2NK \text{ và } NK + MH = 2GI \text{ hay } 2NH + 2MH = 4GI \quad (2).$$

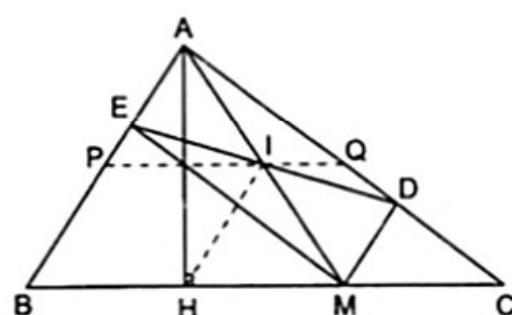
Thay $2MH = BE + CF$ và $2NK = AD + GI$ vào đẳng thức (2), ta có :

$$AD + BE + CF = 3GI.$$

4. (hình 158) Tứ giác ADME là hình bình hành nên trung điểm I của DE cũng là trung điểm của AM.

Kẻ $AH \perp BC$. Điểm I cách BC một khoảng bằng $\frac{AH}{2}$ nên di chuyển trên đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng bằng $\frac{AH}{2}$. Đó chính là

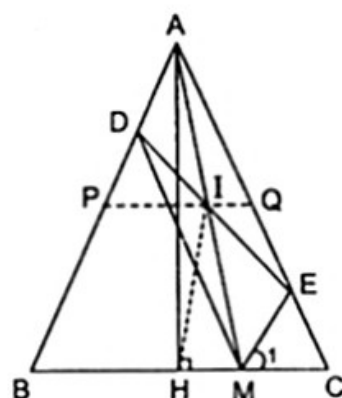
đường trung bình PQ (trừ P và Q do khi M di chuyển tới hai vị trí đặc biệt B, C thì hình bình hành ADME bị suy biến thành đoạn thẳng).



Hình 158

5. (hình 159) Kẻ $EM \parallel AB$ thì $\widehat{B} = \widehat{M_1} = \widehat{C}$, suy ra $AD = EC = EM$

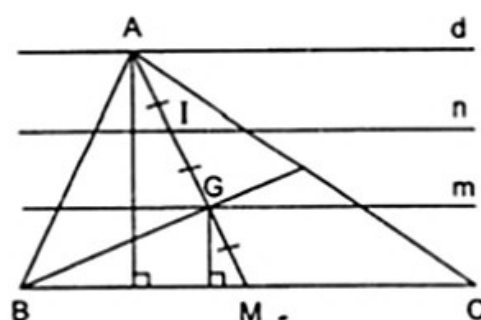
Tứ giác AEMD có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành, suy ra I là trung điểm của AM. Giải tương tự như bài 4, I di chuyển trên đường trung bình PQ.



Hình 159

6. (hình 160) Gọi I là trung điểm của AG thì $AI = IG = GM$.

Qua I, G lần lượt kẻ hai đường thẳng m, n cùng song song với d và BC ta được d, m, n, BC là các đường thẳng song song cách đều nên G di chuyển trên $m \parallel BC$ cách BC một khoảng bằng 1cm.



Hình 160

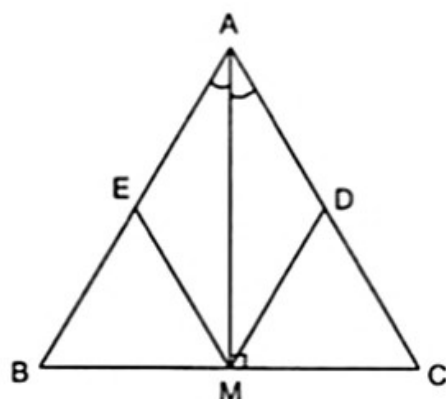
Chủ đề 9

1. Hình thoi có ba tính chất về đường chéo là :

a) Các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tính chất này được suy từ hình bình hành. Hai tính chất sau có ở hình thoi.

b) Hai đường chéo vuông góc với nhau.

c) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.



Hình 161

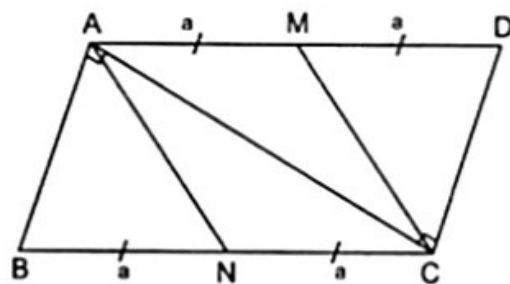
2. (hình 161) Hình bình hành ADME có AM là đường phân giác của góc A nên là hình thoi.

3. (hình 162) Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta được

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AC \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp AC \text{ nên } \triangle ABC$$

vuông ở A, $\triangle ACD$ vuông ở C.

Do M, N là trung điểm của AD, BC theo giả thiết nên AN, CM thứ tự là trung tuyến ứng với cạnh huyền của hai tam giác vuông ABC, ACD.



Hình 162

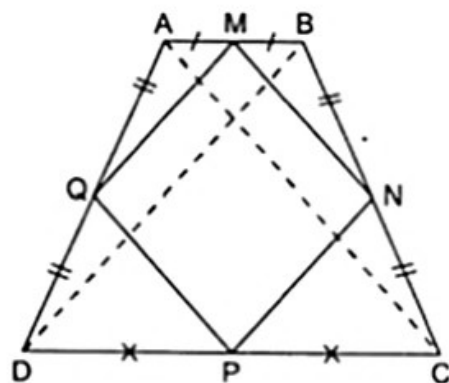
Áp dụng định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào hai tam giác vuông trên, tính chất về cạnh và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta được :

$$\begin{cases} AN = \frac{1}{2} BC, CM = \frac{1}{2} AD \\ AD = BC, AM = MD, BN = NC \end{cases} \Rightarrow AM = MC = CN = NA.$$

Tứ giác AMCN có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

4. (hình 163) Xét hình thang cân ABCD có $AB \parallel CD$ và M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Ta phải chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

Từ giả thiết ta có MN, NP, PQ, QM thứ tự là các đường trung bình của bốn tam giác ABC, BCD, ACD và ABD.



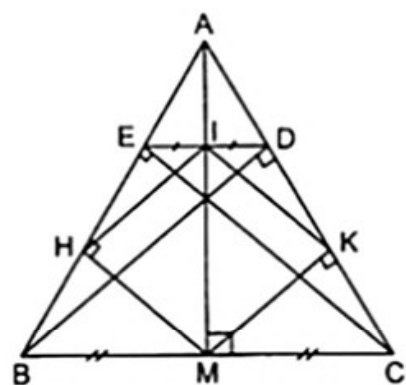
Hình 163

Áp dụng định lí đường trung bình vào bốn tam giác trên và tính chất về đường chéo vào hình thang cân ABCD, ta được :

$$\left\{ \begin{array}{l} MN = \frac{1}{2}AC, PQ = \frac{1}{2}AC \\ NP = \frac{1}{2}BD, MQ = \frac{1}{2}BD \Rightarrow MN = NP = PQ = QM. \\ AC = BD \end{array} \right.$$

Tứ giác MNPQ có bốn cạnh bằng nhau nó nên là hình thoi.

5. (hình 164) Trước hết ta chứng minh tứ giác BEDC là hình thang cân và H, K lần lượt là trung điểm của BE, DC. Sau đó áp dụng bài 4.



Hình 164

6. (hình 165) Tứ giác APCQ là hình thoi.

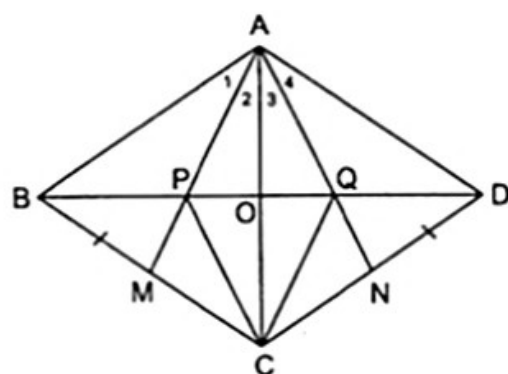
Giải thích : $\triangle ABM = \triangle ADN$ (c.g.c), suy

ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_4}$, do đó $\widehat{A_2} = \widehat{A_3}$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $AC \perp BD$.

Tam giác APQ có đường cao AO là đường phân giác nên $OP = OQ$.

Tứ giác APCQ có $OP = OQ$, $OA = OC$ và AO là phân giác nên là hình thoi.

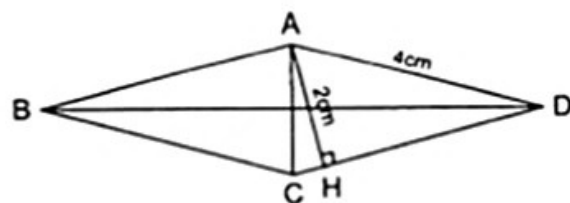


Hình 165

7. Đáp số 68cm (xem ví dụ 1, dạng 2).
8. (hình 166) Vì hình thoi có chu vi bằng 16cm nên cạnh $AD = 4$ cm.

Lại có đường cao $AH = 2$ cm. Tam giác AHD có $AD = 2AH$ nên nó là nửa tam giác đều, suy ra $\widehat{D} = 30^\circ$.

Do đó $\widehat{B} = \widehat{D} = 30^\circ$; $\widehat{A} = \widehat{C} = 150^\circ$.



Hình 166

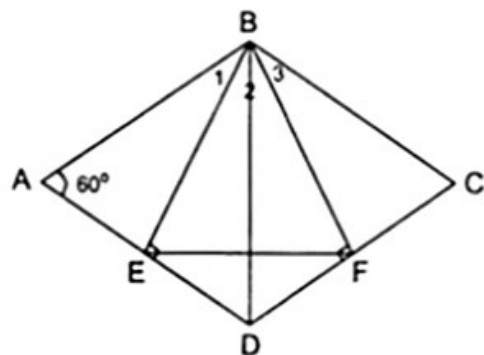
9. (hình 167) Tam giác BEF là tam giác đều.

Giải thích : $\triangle ABE = \triangle BCF$ (cạnh huyền, góc nhọn) nên $BE = BF$ suy ra $\triangle BEF$ cân.

Các tam giác vuông ABE, BCF là nửa tam giác đều nên $\widehat{B_1} = \widehat{B_3} = 30^\circ$.

Lại có $\widehat{ABC} = 120^\circ$, do đó $\widehat{B_2} = 60^\circ$.

Vậy $\triangle BEF$ là tam giác đều.



Hình 167

10. (hình 168)

a) Tứ giác MNCD là hình thoi vì có bốn cạnh bằng nhau.

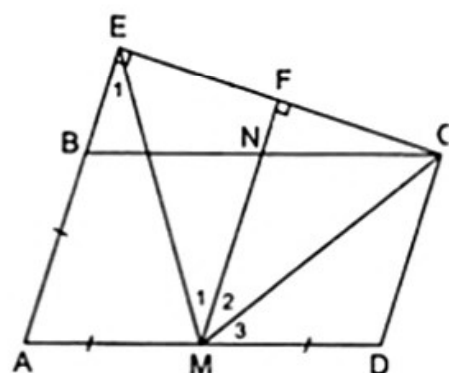
b) $\triangle MCE$ là tam giác cân tại M vì có MF vừa là đường cao vừa là đường phân giác.

c) Đặt $\widehat{E_1} = \alpha$ thì $\widehat{M_1} = \alpha$ vì so le với góc E_1 .

$\widehat{M_2} = \widehat{M_1} = \alpha$ theo tính chất tam giác cân.

Lại có $\widehat{M_2} = \widehat{M_3} = \alpha$ theo tính chất hình thoi.

Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{NMD} = 2\alpha = 2\widehat{AEM}$.



Hình 168

Chủ đề 10

- Hình vuông có các tính chất sau về đường chéo :
 - Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (có ở hình bình hành).
 - Hai đường chéo bằng nhau (có ở hình chữ nhật).
 - Hai đường chéo vuông góc với nhau (có ở hình thoi).
 - Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình vuông (có ở hình thoi).
- Câu trả lời là không. Phải sửa lại dấu hiệu về đường chéo là : Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau.
- Các câu đúng là a, b, d. Câu sai là c.

4. (hình 169) Tứ giác KHED là hình vuông.

Giải thích: Tam giác vuông BDK có $\widehat{B} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân, do đó $BD = DK$. Chứng minh tương tự, $HE = EC$.

Vì $BD = DE = EC$ theo giả thiết, nên

$$KD = DE = EH.$$

Tứ giác KHED có $KD \parallel HE$, $KD = HE$ nên là hình bình hành.

Hình bình hành này lại có $\widehat{D} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật. Hình chữ nhật này lại có $KD = DE$ nên nó là hình vuông.

5. (hình 170) Vì $\triangle NCD$ có $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 = 45^\circ$ nên vuông cân tại N.

Suy ra $\widehat{N} = 90^\circ$ và $ND = NC$ (1).

Chứng minh tương tự, $\widehat{P} = \widehat{Q} = 90^\circ$. Tứ giác MNPQ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

$$\triangle AMD = \triangle BPC \text{ (g - c - g)} \Rightarrow MD = PC \text{ (2)}.$$

Trừ theo vế đẳng thức (1) cho đẳng thức (2) ta được $NM = NP$.

Như vậy hình chữ nhật MNPQ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.

6. (hình 171) Chứng minh bốn tam giác vuông EFG, IHG, CBI, CDE bằng nhau để suy ra $EG = GI = IC = CE$ và $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_3$.

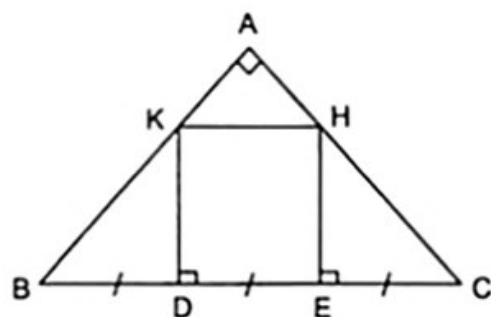
Sau đó chứng minh $\widehat{ECI} = 90^\circ$.

7. (hình 172) a) $\triangle ADF = \triangle AHF$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = AD = a$.

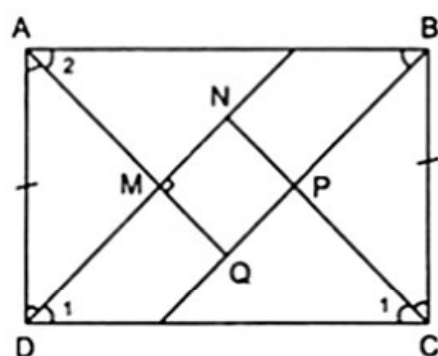
b) $\triangle AHK = \triangle ABK$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$.

Kết hợp với giả thiết, ta có :

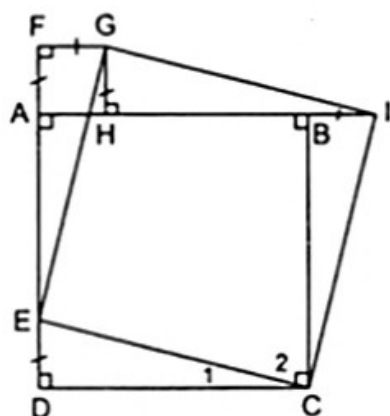
$$\widehat{FAK} = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ.$$



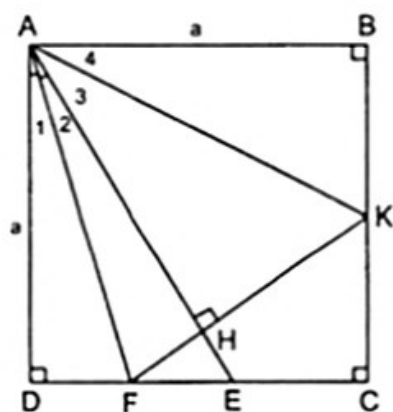
Hình 169



Hình 170



Hình 171

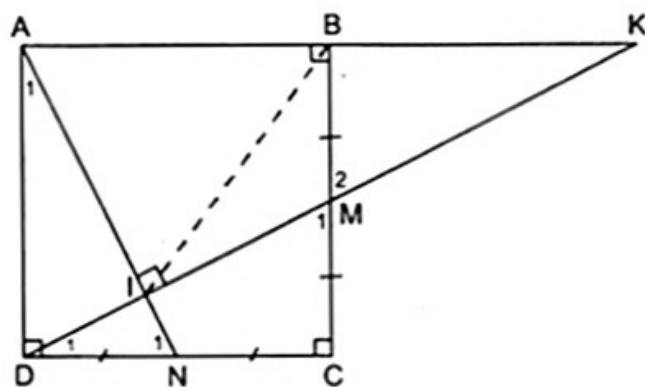


Hình 172

8. (hình 173) a) Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình vuông ABCD ta được
- $$\begin{cases} AD = DC, \widehat{D} = \widehat{C} \\ DN = CM \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ADN = \triangle DCM \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}.$$



Hình 173

Vì $\triangle ADN$ vuông ở D, nên $\widehat{A_1} + \widehat{N_1} = 90^\circ$.

(1)

Thay $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ vào đẳng thức (1) ta được $\widehat{D_1} + \widehat{N_1} = 90^\circ$.

Điều này chứng tỏ tam giác DIN vuông ở I hay $AN \perp DM$.

b) Gọi giao điểm của DM với AB là K, khi đó

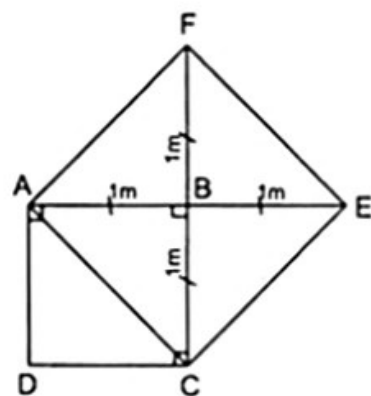
$$\triangle DMC = \triangle KMB \text{ (g - c - g)} \Rightarrow BK = DC.$$

Lại có $AB = DC$ nên $AB = BK$ suy ra IB là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông AIK. Do đó $IB = BA$.

9. (hình 174) Xét hình vuông ABCD có $AB = BC = 1m$.

Ta đi dựng hình vuông nhận đường chéo AC làm cạnh để tính đường chéo của hình vuông mới này.

Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho $BE = BF = 1m$. Ta được tứ giác AFEC có hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình vuông cạnh AC. Hình vuông này có đường chéo $AE = 2m$.



Hình 174

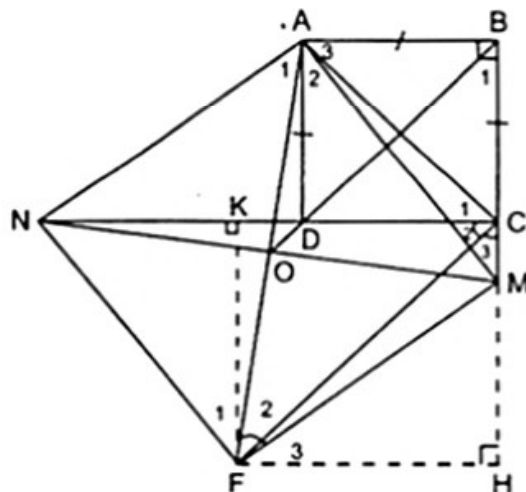
10. (hình 175) a) $\triangle ABM = \triangle ADN \text{ (c - g - c)}$

$$\Rightarrow AM = AN, \widehat{A_1} = \widehat{A_3}.$$

Hình bình hành MANF có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Do góc A_2 phụ với góc A_3 nên góc A_1 phụ với A_2 hay $\widehat{MAN} = 90^\circ$.

Điều này chứng tỏ hình thoi MANF là hình vuông vì có một góc vuông.



Hình 175

b) Kẻ FH, FK theo thứ tự vuông góc với hai đường thẳng BC, NC, thu được tứ giác KCHF có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, suy ra $\widehat{KFH} = 90^\circ$.

Lại có $\widehat{NFM} = 90^\circ$ vì là góc của hình vuông nên $\widehat{F_1} = \widehat{F_3}$ do cùng phụ với $\widehat{F_2}$.
 Từ đó $\triangle FKN = \triangle FHM$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow FH = FK$.

Điều này chứng tỏ điểm F cách đều hai cạnh CM, CN của góc MCN nên F thuộc tia phân giác của góc MCN.

c) Theo tính chất về đường chéo của hình vuông và từ câu b), ta có $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACF} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp CF$.

d) Tương tự như trên ta có $\widehat{B_1} = \widehat{C_3} = 45^\circ \Rightarrow OB \parallel CF$.

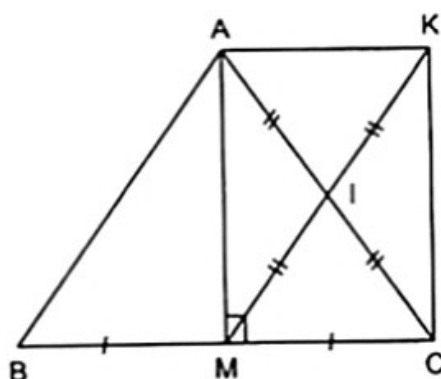
Tứ giác BOFC có hai cạnh đối song song nên là hình thang.

11. (hình 176) a) Tứ giác AMCK là hình chữ nhật.

Giải thích :

Tứ giác AMCK có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

Hình bình hành này lại có $\widehat{AMC} = 90^\circ$ theo tính chất của tam giác cân nên nó là hình chữ nhật.



Hình 176

b) Tứ giác AKMB là hình bình hành vì có hai cạnh đối là AK, BM song song và bằng nhau.

c) Hình chữ nhật AMCK là hình vuông $\Leftrightarrow AM = MC \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BC$

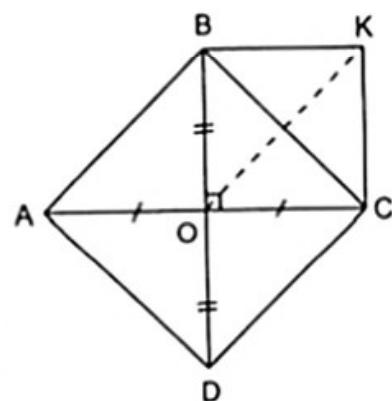
$\Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông ở A.

Điều kiện cần tìm là $\triangle ABC$ vuông cân ở A.

12. (hình 177) a) Tứ giác BOCK là hình chữ nhật.

Giải thích :

Tứ giác BOCK có các cạnh đối song song nên là hình bình hành. Hình bình hành lại có $\widehat{BOC} = 90^\circ$ do hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau tại O. Vậy nó là hình chữ nhật.



Hình 177

b) Tứ giác ABKO có hai cạnh đối AO và BK song song và bằng nhau do BK song song và bằng OC. Suy ra $AB = OK$.

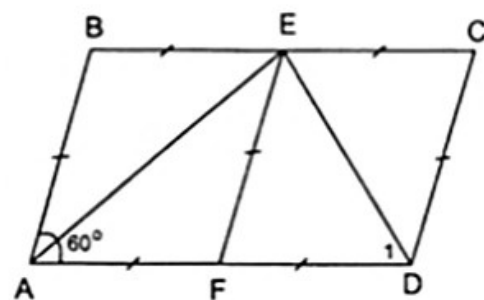
c) Hình chữ nhật BOCK là hình vuông $\Leftrightarrow BO = OC \Leftrightarrow BD = AC \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

Điều kiện cần tìm là ABCD là hình vuông.

13. (hình 178) a) Tứ giác ECDF là hình thoi vì có bốn cạnh bằng nhau.

b) Hình thang ABED có $\widehat{A} = \widehat{D_1} = 60^\circ$ nên là hình thang cân.

c) $\triangle AED$ có $EF = AF = FD$ nên $\widehat{AED} = 90^\circ$.



Hình 178

ĐA GIÁC - DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Chủ đề 1

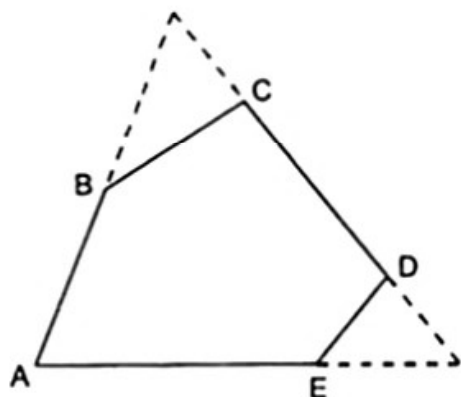
ĐA GIÁC. ĐA GIÁC ĐỀU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. KHÁI NIỆM VỀ ĐA GIÁC

1. Tam giác, tứ giác là những đa giác.

2. Đa giác ABCDE (hình 179) là hình gồm năm đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.



Hình 179

3. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

4. Cách gọi tên : Đa giác có n đỉnh ($n \geq 3$) được gọi là hình n giác hay hình n cạnh. Cũng có khi người ta dùng tiếng Hán để gọi tên chẳng hạn với $n = 6, 7, 8, 12$ quen gọi là lục giác, thất giác, bát giác, thập nhị giác.

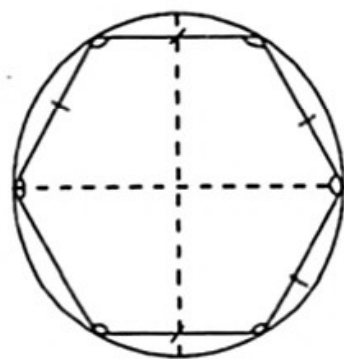
5. Các định lí : Tổng các góc của tam giác bằng 180° . Tổng các góc của tứ giác bằng 360° là những trường hợp riêng của định lí tổng quát sau :

$$\text{Tổng các góc của } n \text{ giác bằng } (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

II. ĐA GIÁC ĐỀU

1. Định nghĩa : Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau (hình 180).

2. Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$.



Hình 180

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Nhận dạng đa giác lồi, đa giác đều. Vẽ một đa giác lồi

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng định nghĩa đa giác lồi, đa giác đều.
2. Muốn vẽ một đa giác lồi, người ta cắt một tam giác bằng các cát tuyến không đi qua đỉnh.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1.

- a) Hãy vẽ phác một ngũ giác lồi, một lục giác lồi.
- b) Hãy nêu cách nhận biết một đa giác lồi.

Lời giải (hình 181)

- a) Vẽ một tam giác bất kì bằng bút chì.

– Cắt tam giác bởi hai cát tuyến không đi qua đỉnh ta được ngũ giác lồi (hình 181a).

– Cắt tam giác bởi ba cát tuyến không đi qua đỉnh ta được lục giác lồi (hình 181b).

- b) Một hình được gọi là đa giác lồi nếu thỏa mãn đồng thời hai dấu hiệu sau :

– Là một đường gấp khúc khép kín, trong đó bất kì hai đoạn gấp khúc nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

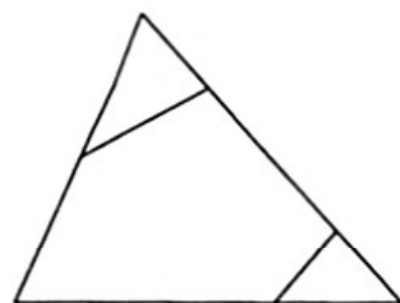
– Khi đặt thước thẳng trùng với bất kì cạnh nào của đa giác thì phần còn lại của đa giác đó không được nằm về hai phía của đường thẳng đó.

Ví dụ 2. Cho ví dụ về đa giác không đều trong mỗi trường hợp sau :

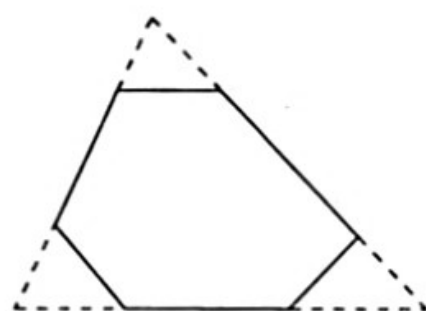
- Có tất cả các cạnh bằng nhau.
- Có tất cả các góc bằng nhau.

Lời giải

– Hình thoi ABCD với $\hat{A} \neq 90^\circ$ có các cạnh bằng nhau nhưng không là đa giác đều (vì các góc không bằng nhau).



Hình 181a



Hình 181b

– Hình chữ nhật ABCD với $AB \neq AD$ có các góc bằng nhau nhưng không là đa giác đều (vì các cạnh không bằng nhau).

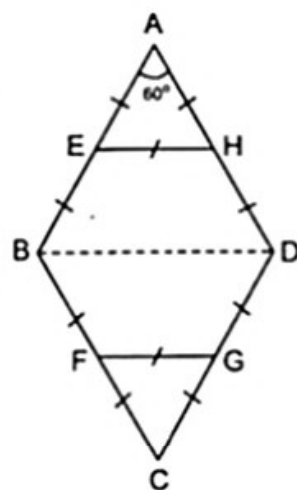
Ví dụ 3. Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng BEHDGF là lục giác đều.

Lời giải (hình 182)

Từ giả thiết hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$ là các tam giác đều.

Do E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh của hình thoi theo giả thiết nên gọi cạnh của hình thoi là $2a$ thì $EB = BF = GD = DH = a$ (1) và EH, FG theo thứ tự là đường trung bình của hai tam giác ABD, BCD.

Áp dụng định lý đường trung bình vào hai tam giác trên ta được $EH = FG = a$ (2).



Hình 182

Từ (1) và (2) suy ra lục giác BEHDGF có tất cả các cạnh bằng nhau.

Lúc đó các tam giác AEH và CGF là các tam giác đều, áp dụng tính chất của hình thoi và tính chất của hai góc kề bù nhau vào hình thoi và hai tam giác đều ta thu được $\hat{E} = \hat{B} = \hat{F} = \hat{G} = \hat{D} = \hat{H} = 120^\circ$.

Điều này chứng tỏ lục giác BEHDGF là lục giác đều.

III. BÀI TẬP

1. Cho lục giác ABCDEF. Vẽ các đường chéo AC, AD, AE. Hãy kể tên các đa giác có trong hình vẽ.
2. Cho tam giác đều ABC. Trên cạnh AB lấy các điểm M, N sao cho $AM = MN = NB$, trên cạnh BC lấy các điểm P, Q sao cho $BP = PQ = QC$, trên cạnh CA lấy các điểm R, S sao cho $CR = RS = SA$. Chứng minh rằng MNPQRS là lục giác đều.
3. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một ngũ giác đều là đỉnh của một ngũ giác đều.

DẠNG 2. Tính chất về góc, về số đường chéo của đa giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng : – Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng $(n - 2).180^\circ$.

– Số đường chéo của hình n giác bằng $\frac{n(n-3)}{2}$.

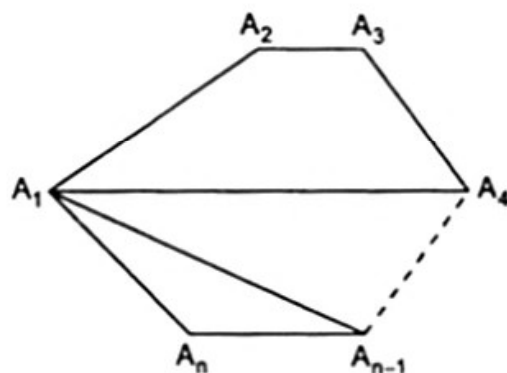
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng tổng số đo các góc của hình n giác bằng $(n - 2).180^\circ$.
Từ đó hãy tính tổng các góc của ngũ giác, lục giác.

Lời giải (hình 183)

Xét hình n giác $A_1A_2... A_n$.

Nối đỉnh A_1 với $(n - 3)$ đỉnh của đa giác (trừ A_1 và hai đỉnh kề với nó), ta được $(n - 2)$ tam giác thì tổng số đo các góc của n giác bằng tổng số đo các góc của $(n - 2)$ tam giác trên.
Mà mỗi tam giác đó có tổng số đo góc bằng 180° .



Hình 183

Vậy tổng số đo các góc của n giác bằng $(n - 2).180^\circ$.

Áp dụng công thức trên :

– Với $n = 5$, ta được : $(5 - 2).180^\circ = 540^\circ$.

Điều này chứng tỏ tổng số đo các góc của ngũ giác là 540° .

– Với $n = 6$, ta được : $(6 - 2).180^\circ = 760^\circ$.

Điều này chứng tỏ tổng số đo các góc của lục giác là 760° .

Ví dụ 2. Chứng minh rằng : Số đường chéo của hình n giác bằng $\frac{n(n-3)}{2}$.

Từ đó hãy tính số đường chéo của ngũ giác, lục giác.

Lời giải (hình 183)

Xét hình n giác $A_1A_2... A_n$.

Từ một đỉnh bất kì chẳng hạn đỉnh A_1 , nối với $n - 3$ đỉnh còn lại (trừ ba đỉnh A_1 và hai đỉnh kề với nó là A_2, A_n) ta được $n - 3$ đường chéo.

Với n đỉnh ta có $n(n - 3)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo đã được tính hai lần.

Vậy số đường chéo của hình n giác là $\frac{n(n-3)}{2}$.

Áp dụng công thức trên :

– Với $n = 5$, ta được : $\frac{5(5-3)}{2} = 5$.

Điều này chứng tỏ ngũ giác có số đường chéo là 5.

– Với $n = 6$, ta được : $\frac{6(6-3)}{2} = 9$.

Điều này chứng tỏ lục giác có số đường chéo là 9.

III. BÀI TẬP

4. Tính tổng số đo góc của bát giác đều, thập giác đều, thập nhị giác đều.
5. Tìm số đường chéo của hình bát giác, thập giác, thập nhị giác.
6. Tính số cạnh của n giác có tổng số đo các góc bằng 1080° .
7. a) Chứng minh rằng tổng các góc ngoài của bất kì đa giác nào cũng bằng 360° .
b) Đa giác nào có tổng các góc trong gấp đôi tổng các góc ngoài ?
8. Đa giác nào có số đường chéo :
a) Bằng số cạnh ?
b) Gấp đôi số cạnh ?
9. Tìm n biết mỗi góc của hình n giác đều bằng 108° .
- 10*. Tìm số cạnh của một đa giác, biết rằng các đường chéo của nó có độ dài bằng nhau.

Chủ đề 2

DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

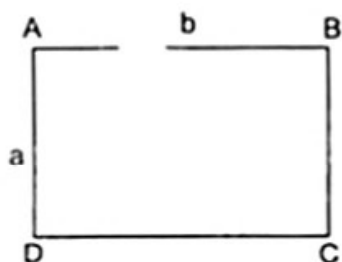
I. KHÁI NIỆM DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

1. Số đo của phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là diện tích đa giác đó.
2. Mỗi đa giác có một diện tích xác định là một số dương.
3. Diện tích đa giác ABCDE thường được kí hiệu là S_{ABCDE} hoặc S nếu không sợ nhầm lẫn.

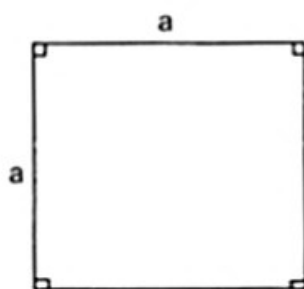
II. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC CÓ CÁC TÍNH CHẤT SAU

1. *Tính chất bất biến* : Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
2. *Tính chuẩn hóa* : Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1cm, 1dm, 1m, ..., làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là 1cm^2 , 1dm^2 , 1m^2 , ...
Hình vuông có cạnh dài 10m, 100m có diện tích tương ứng là 1a, 1ha.
3. *Tính cộng diện tích* : Nếu một đa giác được chia thành những đa giác nhỏ không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.

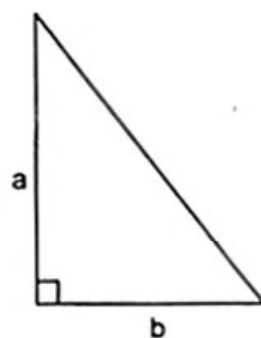
III. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT, HÌNH VUÔNG, TAM GIÁC VUÔNG



Hình 184



Hình 185



Hình 186

1. Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó : $S = a.b$.
2. Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó : $S = a^2$.
3. Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông : $S = \frac{1}{2} a.b$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính diện tích hình chữ nhật

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng công thức tính diện tích hình chữ nhật, tính chất bất biến của diện tích.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu :

- a) Chiều dài tăng hai lần, chiều rộng không đổi ?
- b) Chiều dài và chiều rộng tăng ba lần ?
- c) Chiều dài tăng bốn lần, chiều rộng giảm bốn lần ?

Lời giải

Gọi chiều dài, chiều rộng của một hình chữ nhật là a, b thì diện tích của nó là

$$S = a.b.$$

- a) Nếu chiều dài tăng hai lần, chiều rộng không đổi thì chiều dài, chiều rộng mới là $2a$ và b nên diện tích mới là $S_m = 2a.b = 2S$.

Điều này chứng tỏ diện tích hình chữ nhật tăng hai lần.

- b) Nếu chiều dài và chiều rộng tăng ba lần thì chiều dài, chiều rộng mới là $3a, 3b$ nên diện tích mới là $S_m = 3a.3b = 9a.b = 9S$.

Điều này chứng tỏ diện tích hình chữ nhật tăng chín lần.

- c) Nếu chiều dài tăng bốn lần, chiều rộng giảm bốn lần thì chiều dài, chiều rộng mới là $4a; \frac{b}{4}$ nên diện tích mới là $S_m = 4a.\frac{b}{4} = a.b = S$.

Điều này chứng tỏ diện tích hình chữ nhật không thay đổi.

Ví dụ 2. Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu :

- a) Chiều dài và chiều rộng cùng tăng 10% ?
- b) Chiều dài và chiều rộng cùng giảm 10% ?
- c) Chiều dài tăng 10%, chiều rộng giảm 10% ?

Lời giải

Gọi chiều dài, chiều rộng của một hình chữ nhật là a, b thì diện tích của nó là

$$S = a.b.$$

a) Nếu chiều dài và chiều rộng cùng tăng 10% thì chiều dài, chiều rộng mới là $\frac{110x}{100}; \frac{110y}{100}$, nên diện tích mới là $S_m = \frac{110x}{100} \cdot \frac{110y}{100} = \frac{121xy}{100} = \frac{121.S}{100}$ mà diện tích ban đầu là $\frac{100.S}{100}$. Điều này chứng tỏ diện tích hình chữ nhật tăng 21%.

b) Nếu chiều dài và chiều rộng cùng giảm 10% thì chiều dài, chiều rộng mới là $\frac{90x}{100}; \frac{90y}{100}$, nên diện tích mới là $S_m = \frac{90x}{100} \cdot \frac{90y}{100} = \frac{81x.y}{100} = \frac{81.S}{100}$. Mà diện tích ban đầu là $\frac{100.S}{100}$. Điều này chứng tỏ diện tích hình chữ nhật giảm 19%.

c) Nếu chiều dài tăng 10%, chiều rộng giảm 10% thì chiều dài, chiều rộng mới là $\frac{110x}{100}; \frac{90y}{100}$, nên diện tích mới là $S_m = \frac{110x}{100} \cdot \frac{90y}{100} = \frac{99x.y}{100} = \frac{99.S}{100}$ mà diện tích ban đầu là $\frac{100.S}{100}$. Điều này chứng tỏ diện tích mới giảm 1%.

Ví dụ 3. Tính các cạnh của một hình chữ nhật, biết rằng :

a) Bình phương độ dài một cạnh là 16cm và diện tích của hình chữ nhật là 28cm^2 .

b) Tỉ số các cạnh là 4 : 9 và diện tích của nó là 144cm^2 .

Lời giải

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x, y ($x > 0, y > 0$) thì diện tích của hình chữ nhật đó là $S = x.y$.

a) Theo bài ra ta có $x.y = 28$ (1) và $x^2 = 16 = 4^2 \Leftrightarrow x = 4$ (vì $x > 0$) (trường hợp $y^2 = 16$ làm tương tự).

Thay $x = 4$ vào đẳng thức (1), ta được : $4.y = 28 \Leftrightarrow y = 7$. Ta thấy 4, 7 là các giá trị dương thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy hai kích thước của hình chữ nhật là 4cm; 7cm.

b) Theo bài ra ta có $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$ (2) và $x.y = 144$ (3).

Nhân theo vế đẳng thức (2) với (3), ta được : $x^2 = 8^2 \Leftrightarrow x = 8$ (vì $x > 0$).

Thay $x = 8$ vào đẳng thức (3), ta được : $8.y = 144 \Leftrightarrow y = 18$.

Ta thấy 8, 18 là các giá trị dương thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy hai kích thước của hình chữ nhật là 8cm và 18cm.

Ví dụ 4. Cho hình chữ nhật ABCD. Qua E là một điểm bất kì nằm trên đường chéo AC, kẻ hai đường thẳng $FG \parallel AD$ và $HK \parallel AB$ ($F \in AB, G \in DC, H \in AD, K \in BC$). Chứng minh rằng hai hình chữ nhật EFBK và EGDH có cùng diện tích.

Lời giải (hình 187)

Vì $FG \parallel AD, HK \parallel AB$ (theo giả thiết) nên $HE \parallel AF$ và $AH \parallel FE$.

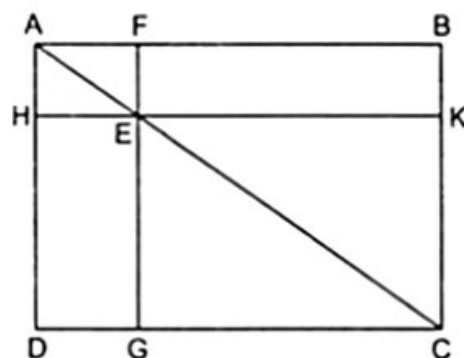
Tứ giác AHEF có các cạnh đối song song nên là hình bình hành.

Lại có $\hat{A} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật suy ra

$\triangle AHE = \triangle AFE$ (c - g - c). Áp dụng tính chất bất biến của diện tích ta được $S_{AFE} = S_{AHE}$.

Tương tự : $S_{EKC} = S_{EGC}; S_{ABC} = S_{ADC}$.

Suy ra $S_{ABC} - S_{AFE} - S_{EKC} = S_{ADC} - S_{AHE} - S_{EGC}$, hay $S_{EFBK} = S_{EGDH}$.



Hình 187

III. BÀI TẬP

1. Diện tích một hình vuông tăng thêm bao nhiêu phần trăm nếu mỗi cạnh của nó tăng thêm 10% ?
2. Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu :
 - a) Chiều dài tăng 10%, chiều rộng giảm 20% ?
 - b) Chiều dài giảm 25%, chiều rộng tăng 15% ?
3. Tính các cạnh của hình chữ nhật, biết rằng :
 - a) Tỉ số các cạnh là 3 : 4 và diện tích của nó là 300cm^2 .
 - b) Bình phương độ dài một cạnh là 9 (cm) và diện tích của nó là 45cm^2 .
4. Cho hình thoi có hai đường chéo bằng 6cm và 10cm. Tính diện tích tứ giác có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình thoi.

DẠNG 2. Diện tích hình vuông. Diện tích tam giác vuông

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng :

1. Công thức tính diện tích hình vuông, diện tích tam giác vuông.
2. Kết quả thu được từ hằng đẳng thức : $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2 \leq (a + b)^2$.

II. VÍ DỤ

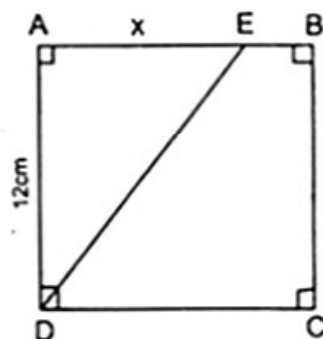
Ví dụ 1. ABCD là hình vuông cạnh 12cm. AE = x (hình 188). Tính x sao cho diện tích tam giác ADE bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình vuông ABCD.

Lời giải

Diện tích tam giác vuông ADE là $6x \text{ (cm}^2\text{)}$.

Diện tích hình vuông ABCD là $144 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Theo bài ra, ta có : $6x = \frac{144}{3} \Leftrightarrow x = 8 \text{ (cm)}$.



Hình 188

Ví dụ 2. Tính diện tích tam giác ABC vuông tại A, biết AB = 5cm; BC = 13cm.

Lời giải

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác vuông, ta có $S = \frac{1}{2} AB.AC$.

Với AB = 5cm, ta còn phải tính AC.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABC$ vuông ở A, ta được :

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } 13^2 = CA^2 + 5^2$$

$$\Leftrightarrow CA^2 = 12^2 \Leftrightarrow CA = 12 \text{ (vì } CA > 0\text{)}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 3. Bài toán đẳng chu

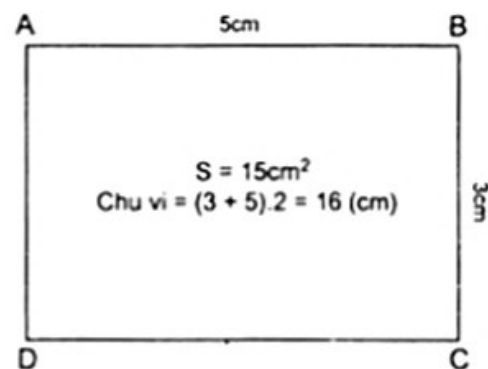
Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 5cm, BC = 3cm.

a) Hãy vẽ một hình chữ nhật có diện tích nhỏ hơn nhưng có chu vi lớn hơn hình chữ nhật ABCD. Vẽ được mấy hình như vậy ?

b) Hãy vẽ hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật ABCD. Vẽ được mấy hình vuông như vậy ? So sánh diện tích hình chữ nhật với diện tích hình vuông có cùng chu vi vừa vẽ. Tại sao trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất ?

Lời giải (hình 189)

a) Hình chữ nhật kích thước 1cm và 10cm có diện tích 10cm^2 nhỏ hơn $S_{ABCD} = 15\text{cm}^2$ và có chu vi $(1 + 10).2 = 22$ (cm) lớn hơn chu vi hình chữ nhật ABCD.



Hình 189

Hình chữ nhật kích thước 2cm và 7cm có diện tích 14cm^2 nhỏ hơn $S_{ABCD} = 15\text{cm}^2$ và có chu vi $(2 + 7).2 = 18$ (cm) lớn hơn chu vi hình chữ nhật ABCD. Vậy vẽ được rất nhiều hình chữ nhật như thế.

b) Hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật ABCD thì có cạnh bằng $16 : 4 = 4$ (cm), nên có diện tích bằng $4.4 = 16$ (cm^2) lớn hơn diện tích hình chữ nhật ABCD.

Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi (*đẳng chu*) thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

Thật vậy, gọi các kích thước của hình chữ nhật là a và b thì chu vi của hình chữ nhật là $2(a + b)$ không đổi và diện tích của hình chữ nhật là $S = ab$.

Áp dụng kết quả : $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2 \leq (a + b)^2$, suy ra

$$S = ab \leq \frac{(a + b)^2}{4}.$$

Vậy diện tích hình chữ nhật đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{(a + b)^2}{4}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$, hay khi đó hình chữ nhật là hình vuông.

III. BÀI TẬP

- Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $AC = 4\text{cm}$ và $AC \perp BD$. Tính diện tích tứ giác có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình thang cân ABCD.
- Tính diện tích của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10cm, tổng hai cạnh góc vuông bằng 14cm.

7. Tính diện tích hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$ và $\widehat{ABC} = 135^\circ$.
8. a) Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 40cm , hình nào có diện tích lớn nhất ?
- b) Trong các hình chữ nhật có diện tích bằng 100cm^2 , hình nào có chu vi nhỏ nhất ?

Chủ đề 3

DIỆN TÍCH TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

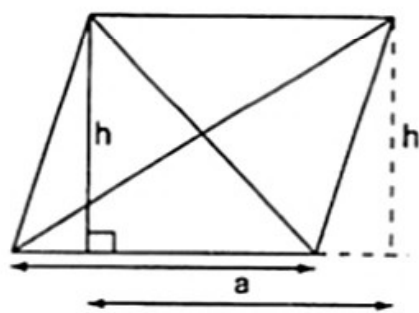
1. Công thức tính diện tích tam giác : $S = \frac{1}{2}ah$.

Gọi a, b, c , lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB ; h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC thì :

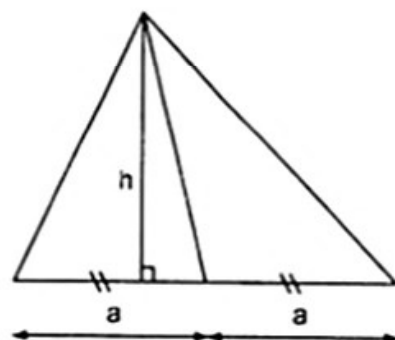
$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

2. Từ công thức tính diện tích tam giác ta thu được các kết quả

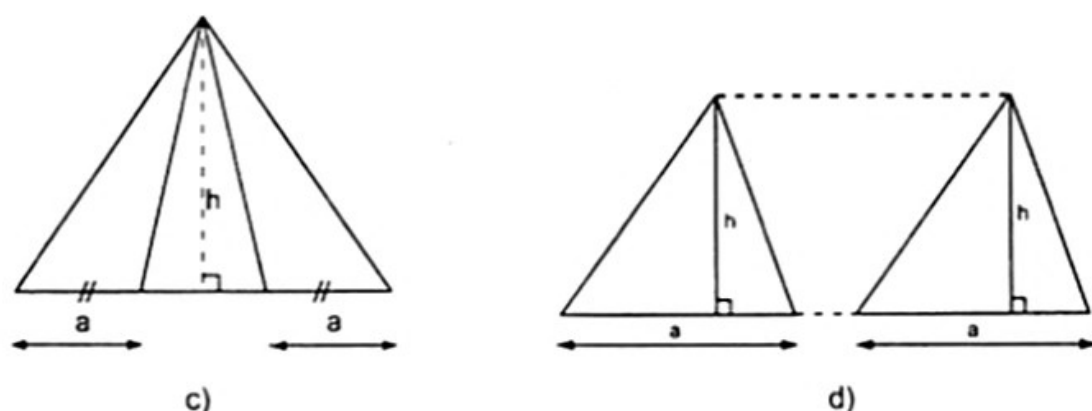
KQ 1 : Hai tam giác có cạnh đáy bằng nhau và chiều cao bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau (hình 190 a, b, c, d).



a)



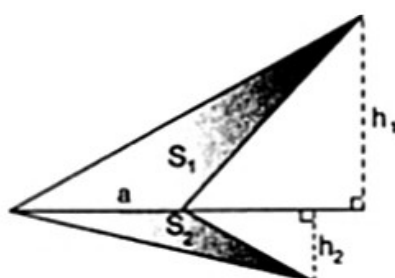
b)



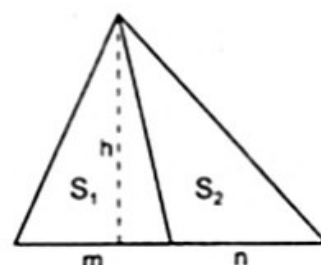
Hình 190

KQ 2 : Hai tam giác có một cạnh bằng nhau thì tỉ số diện tích của hai tam giác đó bằng tỉ số của hai chiều cao tương ứng (hình 191).

KQ 1 : Hai tam giác có một đường cao bằng nhau thì tỉ số diện tích của hai tam giác đó bằng tỉ số của hai cạnh tương ứng (hình 192).



Hình 191



Hình 192

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính toán, chứng minh hệ thức về diện tích tam giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Áp dụng công thức và các kết quả thu được từ công thức tính diện tích tam giác.
2. Sử dụng định nghĩa khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.
3. Áp dụng tính chất cộng diện tích.

II. VÍ DỤ

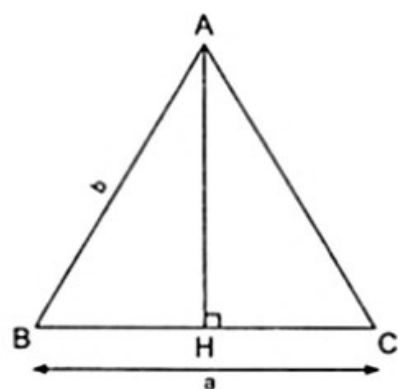
Ví dụ 1. Tính diện tích của một tam giác cân có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b . Từ đó hãy tính diện tích một tam giác đều có cạnh bằng a .

Lời giải (hình 193)

Xét $\triangle ABC$ cân ở A có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.

Kẻ $AH \perp BC$ thì H là trung điểm cạnh BC theo tính chất của tam giác cân nên $BH = \frac{a}{2}$.

Áp dụng công thức tính diện tích vào tam giác ABC ta được $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot AH$.



Hình 193

Ta còn phải tính chiều cao AH.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABH$ vuông ở H thu được $AB^2 = BH^2 + HA^2$,

$$\text{hay } b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + HA^2 \Leftrightarrow HA^2 = \frac{4b^2 - a^2}{4} \Leftrightarrow HA = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} \text{ (vì } HA > 0).$$

Vậy $S = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$, từ đó suy ra diện tích của tam giác đều cạnh a là :

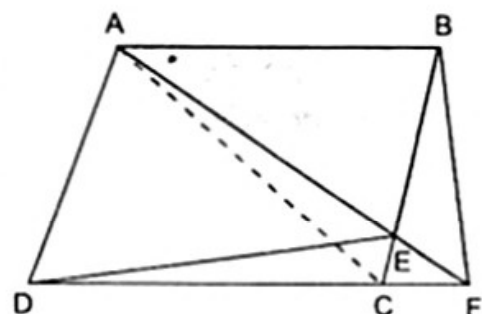
$$S = \frac{a\sqrt{4a^2 - a^2}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 2. Từ đỉnh A của hình bình hành ABCD kẻ một đường thẳng cắt cạnh BC tại E và đường thẳng DC tại F. Chứng minh rằng $S_{ADE} = S_{ABF}$; $S_{BEF} = S_{ACE}$.

Lời giải (hình 194)

Vì ABCD là hình bình hành nên $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$. Do đó các khoảng cách từ C và E đến AD bằng nhau, từ C và F đến AB bằng nhau.

Ta có $S_{ADE} = S_{ADC}$ (1), vì chung đáy AD, chiều cao bằng nhau.



Hình 194

$S_{ABF} = S_{ABC}$ (2), vì chung đáy AB, chiều cao bằng nhau.

Lại có đường chéo AC chia hình bình hành ABCD thành hai tam giác có diện tích bằng nhau là $S_{ADC} = S_{ABC}$ (3).

Từ các đẳng thức (1), (2) và (3) suy ra $S_{ADE} = S_{ABF}$.

Mặt khác $S_{ABE} = S_{ABE}$ (4).

Trừ theo vế đẳng thức (2) cho đẳng thức (4), ta được : $S_{BEF} = S_{AEC}$.

Ví dụ 3. Trung tuyến AD và BE của $\triangle ABC$ cắt nhau ở G. Chứng minh rằng :

$$S_{DEF} = \frac{1}{2} S_{CEG} = \frac{1}{3} S_{CED} = \frac{1}{4} S_{ABG} = \frac{1}{6} S_{ABE} = \frac{1}{12} S_{ABC}.$$

Lời giải (hình 195)

Đặt $S_{DEG} = a$. Ta phải chứng minh :

$$S_{CGE} = 2a; S_{CED} = 3a; S_{ABG} = 4a; S_{ABE} = 6a; S_{ABC} = 12a.$$

Vì hai trung tuyến AD, BE cắt nhau ở G nên G là trọng tâm của tam giác ABC.

Do đó khoảng cách từ G đến các đỉnh của tam giác bằng $\frac{2}{3}$ độ dài các đường trung tuyến.

Ta có $S_{BGD} = 2S_{GED} = 2a$ (vì chung chiều cao kẻ từ D đến BE và $BG = 2GE$).

$S_{BGD} = S_{GDC} = 2a$ (vì chung chiều cao kẻ từ G đến BC, đáy bằng nhau là $BD = DC$).

Do đó $S_{BGC} = 2a + 2a = 4a$.

Lại có $S_{CEG} = \frac{1}{2} S_{BGC} = \frac{1}{2} \cdot 4a = 2a$.

$S_{CED} = S_{BDE} = 2a + a = 3a$, chung chiều cao kẻ từ E đến BC, đáy bằng nhau là $BD = DC$.

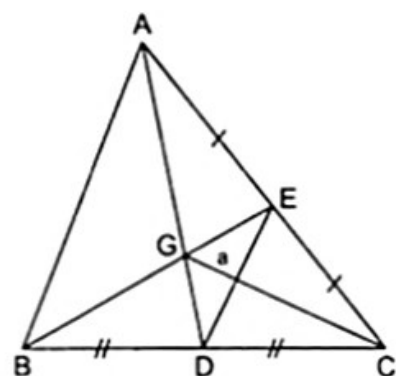
$S_{AGB} = 2S_{BGD} = 2 \cdot 2a = 4a$, vì chung chiều cao kẻ từ B đến AD và $AG = 2GD$.

$S_{ABE} = S_{BEC} = 4a + 2a = 6a$, vì chung chiều cao kẻ từ B đến AC và đáy bằng nhau là $AE = EC$.

$S_{ABC} = 2S_{ABE} = 2 \cdot 6a = 12a$.

Ví dụ 4*. Trên ba cạnh AB, BC, CA của $\triangle ABC$ lấy ba đoạn AD, BE, CF

mỗi đoạn bằng $\frac{1}{3}$ độ dài của mỗi cạnh. Chứng minh rằng $S_{ABC} = 3S_{DEF}$.



Hình 195

Lời giải (hình 196)

Đặt $S_{ABC} = 9a$. Ta có :

$$S_{ABE} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 9a = 3a, \text{ vì chung chiều cao kẻ}$$

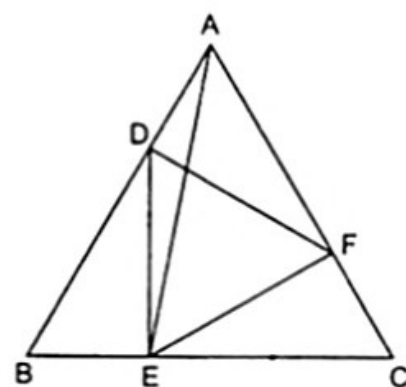
từ A đến BC và đáy $BE = \frac{1}{3} BC$.

$$\text{Lại có } S_{ADE} = \frac{1}{3} S_{ABE} = \frac{1}{3} \cdot 3a = a, \text{ vì chung chiều}$$

cao kẻ từ E đến AB và đáy $AD = \frac{1}{3} AB$. Do đó $S_{BDE} = S_{ABE} - S_{ADE} = 3a - a = 2a$.

Chứng minh tương tự ta được $S_{ADF} = S_{CEF} = 2a$.

$$\text{Vậy } S_{DEF} = 9a - 6a = 3a \text{ hay } S_{ABC} = 3 \cdot S_{DEF}.$$



Hình 196

III. BÀI TẬP

- Cho $\triangle ABC$, đường cao AH. Biết $AB = 15\text{cm}$, $AC = 41\text{cm}$, $HB = 12\text{cm}$. Tính diện tích $\triangle ABC$.
- Tam giác ABC có đáy $BC = 6\text{cm}$, chiều cao tương ứng 4cm . Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tính diện tích tứ giác BDEC.
- Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), có hai đường chéo cắt nhau ở O. Chứng minh rằng :
 - $S_{ABC} = S_{ABD}$;
 - $S_{CDA} = S_{CDB}$;
 - $S_{AOD} = S_{BOC}$.
- Cho tứ giác ABCD. Qua đỉnh C kẻ một đường thẳng song song với đường chéo BD cắt đường thẳng AD ở E. Chứng minh rằng $S_{ABCD} = S_{ABE}$.
- Cho hình bình hành ABCD, kẻ một đường thẳng bất kì song song với đường chéo BD cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E và F. Chứng minh rằng $S_{ABE} = S_{ADF}$.
- Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh BC lấy hai điểm K, L sao cho $BK = KL = LC$. Tính tỉ số diện tích của :
 - Các tam giác DAC và DCK ;

- b) Tam giác DAC và tứ giác ADLB ;
 c) Các tứ giác ABKD và ABLD.
7. Tam giác ABC có hai trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau. Hãy tính diện tích tam giác đó theo AD và BE.
8. Cho tam giác ABC. Kéo dài AB đến D, BC đến E, CA đến F sao cho $AB = BD$, $BC = CE$, $CA = AF$. Chứng minh rằng :
- a) $S_{DEF} = 7.S_{ABC}$.
- b) $S_{ADE} = S_{BEF} = S_{CDF} = 4.S_{ABC}$.

DẠNG 2. Sử dụng công thức diện tích để tính độ dài đoạn thẳng. Chứng minh hệ thức hình học

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tính diện tích tam giác bằng hai cách.

2. Vì mỗi tam giác chỉ có một diện tích nên hai kết quả đó bằng nhau. Từ đó thu được một hệ thức liên hệ giữa các yếu tố trong tam giác. Phương pháp này thường gọi là *phương pháp diện tích*. (Như vậy diện tích là chiếc cầu nối giữa các yếu tố trong tam giác).

3. Áp dụng các tính chất về diện tích, các kết quả thu được từ công thức tính diện tích tam giác.

II. VÍ DỤ

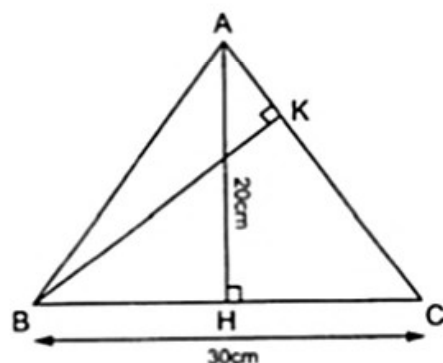
Ví dụ 1. Tam giác cân ABC ($AB = AC$) có $BC = 30\text{cm}$, đường cao $AH = 20\text{cm}$. Hãy tính chiều cao ứng với cạnh bên.

Lời giải (hình 197)

Kẻ $BK \perp AC$, ta phải tính độ dài BK. Trước hết ta đi tính cạnh bên AC.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle AHC$ vuông ở H ta được $AC^2 = CH^2 + AH^2$, hay

$$AC^2 = 15^2 + 20^2 = 25^2 \text{ nên } AC = 25\text{cm}.$$



Hình 197

Tính diện tích ΔABC bằng hai cách :

$$\text{Cách 1 : } S = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2} .30.20 = 300 (\text{cm}^2).$$

$$\text{Cách 2 : } S = \frac{1}{2} BK.AC = \frac{1}{2} BK.25 (\text{cm}^2).$$

Vì ΔABC chỉ có một diện tích nên hai kết quả trên phải bằng nhau tức là :

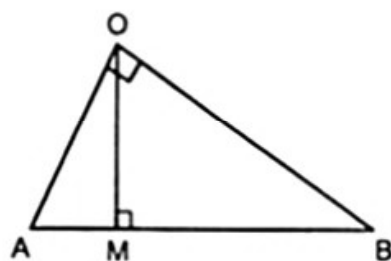
$$\frac{1}{2} BK.25 = 300 \Leftrightarrow BK = 24(\text{cm}).$$

Ví dụ 2. Cho ΔOAB vuông tại O với đường cao OM . Hãy giải thích vì sao ta có đẳng thức : $OA.OB = OM.AB$.

Lời giải (hình 198)

Tính diện tích ΔOAB bằng hai cách :

Cách 1 : Theo công thức tính diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2} OA.OB$.



Hình 198

Cách 2 : Theo công thức tính diện tích tam giác thường $S = \frac{1}{2} OM.AB$.

Vì ΔOAB chỉ có một diện tích nên hai kết quả trên phải bằng nhau tức là :

$$\frac{1}{2} OA.OB = \frac{1}{2} OM.AB \Leftrightarrow OA.OB = OM.AB.$$

Điều này chứng tỏ đẳng thức này có được do áp dụng phương pháp diện tích.

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AA' , BB' , CC' cắt nhau ở H .

Chứng minh rằng : $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1$.

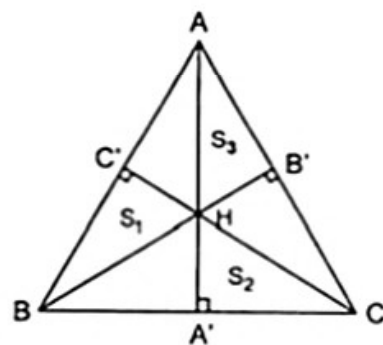
Lời giải (hình 199)

Gọi diện tích các tam giác ABC , ABH , BCH , CAH lần lượt là S , S_1 , S_2 , S_3 .

Theo tính chất cộng diện tích thì $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Các tam giác ABC và ABH có chung đáy AB nên tỉ số

hai chiều cao bằng tỉ số hai diện tích : $\frac{HC'}{CC'} = \frac{S_1}{S}$.



Hình 199

$$\text{Tương tự: } \frac{HA'}{AA'} = \frac{S_2}{S}; \frac{HB'}{BB'} = \frac{S_3}{S}.$$

$$\text{Do đó } \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1.$$

III. BÀI TẬP

9. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 10\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$. Tính chiều cao BK .
10. Cho $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến. Qua O là điểm bất kì trên AM kẻ một đường thẳng song song với BC cắt AB , AC lần lượt ở D , E .
Chứng minh rằng $DO = OE$.
11. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Qua giao điểm O của hai đường chéo, kẻ đường thẳng song song với đáy, cắt AD và BC theo thứ tự ở E và H . Chứng minh rằng $EO = OH$.
12. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có đường cao BH . Qua điểm M thuộc đáy BC kẻ $MP \perp AB$, $MQ \perp AC$. Chứng minh rằng $MP + MQ = BH$.

DẠNG 3*. Tìm diện tích lớn nhất của một hình

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Nếu diện tích của một hình nhỏ hơn hoặc bằng (không lớn hơn) một hằng số M và tồn tại một vị trí của hình để diện tích của nó bằng M thì M là diện tích lớn nhất của hình đó. Kí hiệu $\max S = M$.

Nếu diện tích của một hình lớn hơn hoặc bằng (không nhỏ hơn) một hằng số m và tồn tại một vị trí của hình để diện tích của nó bằng m thì m là diện tích nhỏ nhất của hình đó. Kí hiệu $\min S = m$.

2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

3. Từ hằng đẳng thức thu được các kết quả :

$$\text{KQ1: } 4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 \leq (a+b)^2, \text{ với mọi cặp số thực } a, b.$$

$$\text{KQ2: } 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2 \geq (a+b)^2, \text{ với mọi cặp số thực } a, b.$$

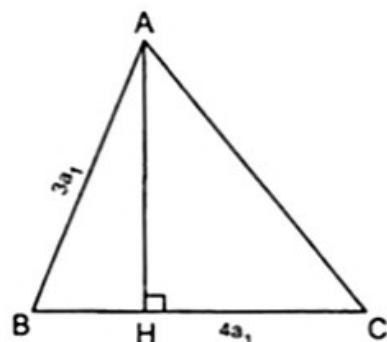
II. VÍ DỤ

Ví dụ. Tìm diện tích lớn nhất của $\triangle ABC$ biết $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$.

Lời giải (hình 200)

Kẻ $AH \perp BC$ thì AB và AH là đường xiên, đường vuông góc kẻ từ điểm A ở ngoài đường thẳng BC đến đường thẳng đó nên đường vuông góc AH là đường ngắn nhất hay $AH \leq AB$. Do đó :

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC \leq \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 200

Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $AH = AB \Leftrightarrow AB \perp BC \Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông tại B .

Vậy $\max S = 6$ khi $\triangle ABC$ vuông tại B .

III. BÀI TẬP

13. Chứng minh rằng $S \leq \frac{a^2 + b^2}{4}$ với S là diện tích của tam giác có độ dài hai cạnh bằng a , b .
14. Trong các tam giác vuông có cạnh huyền bằng a , tam giác nào có diện tích lớn nhất ?
15. Trong các hình chữ nhật có đường chéo bằng 12cm , hình nào có diện tích lớn nhất ?
- 16*. Gọi O là điểm nằm trong tứ giác $ABCD$ có diện tích S thoả mãn hệ thức :

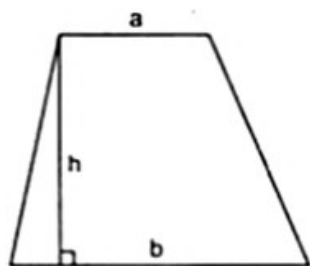
$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2S.$$

Chứng minh rằng khi đó $ABCD$ là hình vuông và O là tâm của nó.

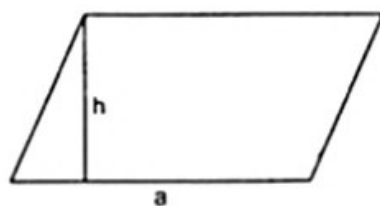
Chủ đề 4

DIỆN TÍCH HÌNH THANG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ



Hình 201



Hình 202

1. Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao :

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h.$$

2. Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó : $S = ah$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính diện tích hình thang

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Áp dụng công thức tính diện tích hình thang, định lí Py-ta-go.

II. VÍ DỤ

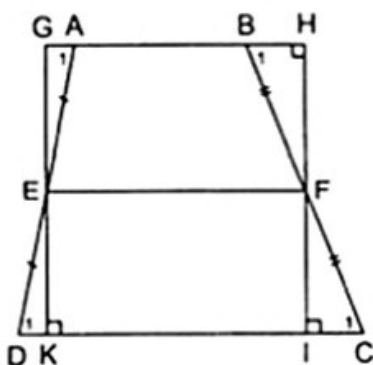
Ví dụ 1. Trên hình 203 ta có hình thang ABCD với đường trung bình EF và hình chữ nhật GHIK. Hãy so sánh diện tích hai hình này, từ đó suy ra một công thức khác tính diện tích hình thang.

Lời giải (hình 203)

Từ giả thiết EF là đường trung bình của hình thang ABCD nên $EA = ED$, $FB = FC$.

Mặt khác $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$, $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (vì so le).

Do đó $\triangle EAG = \triangle EDK$; $\triangle FBH = \triangle FCI$ (trường hợp cạnh huyền, góc nhọn).



Hình 203

Theo tính chất bất biến của diện tích thì $S_{EAG} = S_{EDK}$, $S_{FBH} = S_{FCI}$, suy ra $S_{ABCD} = S_{GHIK} = EF.GK$, với EF là đường trung bình và GK là chiều cao của hình thang.

Điều này chứng tỏ rằng : *Diện tích hình thang bằng tích của độ dài đường trung bình với chiều cao của nó.*

Ví dụ 2. Tính diện tích mảnh đất hình thang $ABED$ theo các độ dài cho trên hình 204 và biết diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 828cm^2 .

Lời giải (hình 204)

Áp dụng công thức tính diện tích vào hình thang $ABED$, ta được :

$$S = \frac{(AB + DE).BC}{2} = \frac{(23 + 31).BC}{2} = 27.BC.$$

Ta còn phải tính chiều cao BC .

Vì $S_{ABCD} = 828 = AB.BC = 23.BC \Leftrightarrow BC = 36 \text{ (cm)}$!

Vậy $S = 27.36 = 972 \text{ (cm}^2\text{)}$.

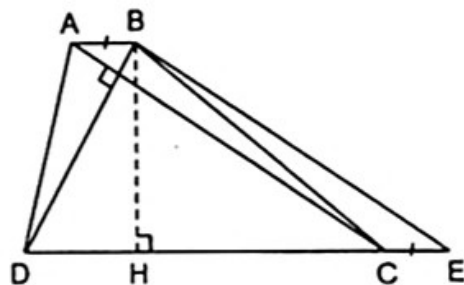
Ví dụ 3. Tính diện tích của hình thang, biết hai đường chéo của nó vuông góc với nhau và có độ dài tương ứng bằng 3,6dm và 6dm.

Lời giải (hình 205)

Xét hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AC \perp BD$ và $AC = 6\text{dm}$, $BD = 3,6\text{dm}$.

Kẻ đường cao BH của hình thang. Áp dụng công thức tính diện tích vào hình thang

$ABCD$ ta được $S = \frac{1}{2}(AB + CD).BH$ (1).



Hình 204

Hình 205

Kẻ $BE \parallel AC$ thì $BE \perp BD$ và hình thang $ABEC$ có hai cặp cạnh song song nên nó là hình bình hành suy ra $AB = CE$ và $BE = AC = 6\text{dm}$.

Do đó $CD + AB = DC + CE = DE$;

Thay $AB + CD = DE$ vào công thức (1), ta được : $S = \frac{1}{2} DE.BH$.

Điều này chứng tỏ rằng S là diện tích tam giác DBE vuông tại B .

Vậy $S = \frac{1}{2} BD.BE = \frac{1}{2} .3,6.6 = 10,8 \text{ (dm}^2\text{)}$.

III. BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) biết $\hat{C} = 45^\circ$, $AB = 2\text{cm}$ và $CD = 4\text{cm}$.
2. Tính diện tích hình thang ABCD biết : $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$ và $CD = 6\text{cm}$.
3. Tính diện tích hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) biết $AB = 3\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$ và $\hat{C} = 30^\circ$.
4. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) biết chiều cao $AH = 8\text{cm}$ và $HC = 12\text{cm}$. Tính diện tích hình thang ABCD.
5. Tính diện tích hình thang cân có các đáy bằng 10cm và 20cm , cạnh bên bằng 13cm .
6. Chứng minh rằng : Diện tích tam giác có cạnh đáy là cạnh đáy của hình thang và đỉnh là trung điểm của cạnh bên kia thì bằng một nửa diện tích của hình thang đó.

DẠNG 2. Tính diện tích hình bình hành

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng công thức tính diện tích hình bình hành, các tính chất về diện tích.
2. Sử dụng công thức và các kết quả thu được từ công thức tính diện tích tam giác.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính diện tích hình bình hành ABCD biết $AD = 6\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$ và $\hat{A} = 150^\circ$.

Lời giải (hình 206)

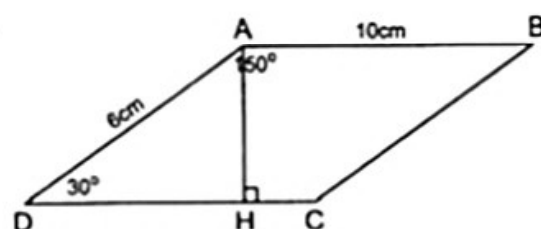
Kẻ $AH \perp CD$.

Áp dụng công thức tính diện tích vào hình bình hành ABCD, ta được :

$$S = CD.AH = 10.AH.$$

Ta còn phải tính chiều cao AH.

Do các góc D và A là hai góc trong cùng phía của $AB \parallel CD$ nên chúng bù nhau, hay $\hat{D} + \hat{A} = 180^\circ$.



Hình 206

Mà $\hat{A} = 150^\circ$ theo giả thiết nên $\hat{D} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, suy ra tam giác AHD là nửa tam giác đều nên cạnh đối diện với góc 30° là $AH = \frac{1}{2} AD = 3 \text{ (cm)}$.

Vậy $S = 10.3 = 30 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 24cm^2 , O là giao điểm của hai đường chéo. Khoảng cách từ O đến AD, CD lần lượt bằng 2cm, 3cm. Tính các độ dài AD và CD.

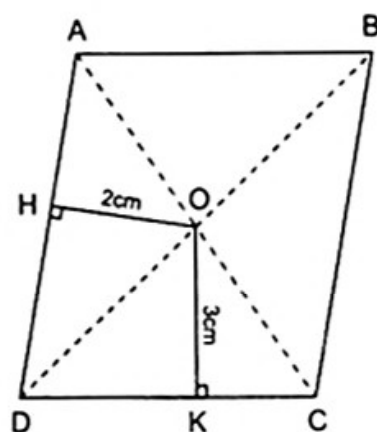
Lời giải (hình 207)

Ta thấy các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA có diện tích bằng nhau vì có chung chiều cao, đáy bằng nhau nên diện tích mỗi tam giác bằng $24 : 4 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Kẻ $OH \perp AD$, $OK \perp CD$ thì $S_{OAD} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot AD$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AD = 6 \Leftrightarrow AD = 6 \text{ (cm)};$$

$$S_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot OK \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot DC = 6 \Leftrightarrow DC = 4 \text{ (cm)}.$$



Hình 207

Ví dụ 3. Hai cạnh của một hình bình hành có độ dài là 6cm và 8cm. Một trong các đường cao có độ dài là 5cm. Tính độ dài đường cao thứ hai. Hỏi bài toán có mấy đáp số?

Lời giải (hình 208)

Xét hình bình hành ABCD có $AB = 8\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$ và có một đường cao dài 5cm;

Kẻ các đường cao AH, AK. Tính diện tích hình bình hành trên bằng hai cách:

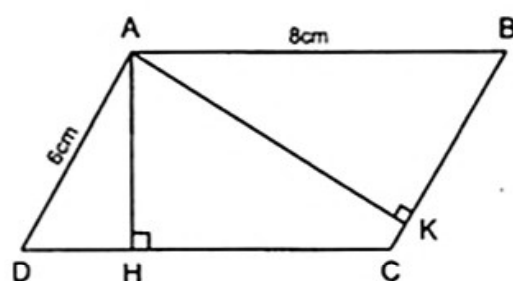
Cách 1 : $S = CD \cdot AH = 8 \cdot AH$;

Cách 2 : $S = BC \cdot AK = 6 \cdot AK$;

Vì hình bình hành ABCD chỉ có một diện tích nên hai kết quả trên phải bằng nhau tức là $8 \cdot AH = 6 \cdot AK$.

– Nếu đường cao thứ nhất là $AH = 5\text{cm}$ thì

$$8 \cdot 5 = 6 \cdot AK \Leftrightarrow AK = \frac{20}{3} \text{ (cm) là đường cao thứ hai ;}$$



Hình 208

– Nếu đường cao thứ nhất là $AK = 5\text{cm}$ thì

$$8.AH = 6.5 \Leftrightarrow AH = \frac{15}{4}(\text{cm}) \text{ là đường cao thứ hai.}$$

Như vậy bài toán có hai đáp số.

III. BÀI TẬP

- Tính diện tích hình bình hành biết hai cạnh kề bằng 6cm và 9cm , góc xen giữa bằng 120° .
- Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E là trung điểm của BC , kẻ EH vuông góc với AD . Chứng minh rằng $S_{ABCD} = AB \cdot EH$.
- Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích 36cm^2 . M là một điểm nằm trong hình bình hành. Tính tổng diện tích các tam giác MAB và MCD .
- Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M , trong hình bình hành $ABCD$ lấy điểm N . Chứng minh rằng :

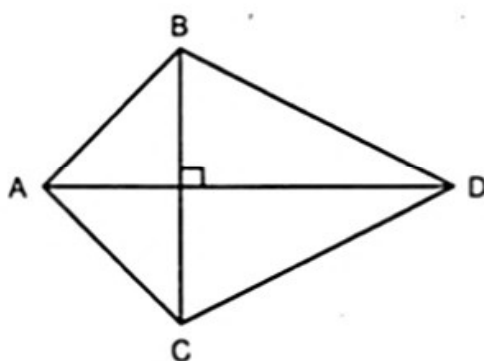
$$\text{a) } S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} ;$$

$$\text{b) } S_{ABN} + S_{CDN} = \frac{1}{2} S_{ABCD} .$$

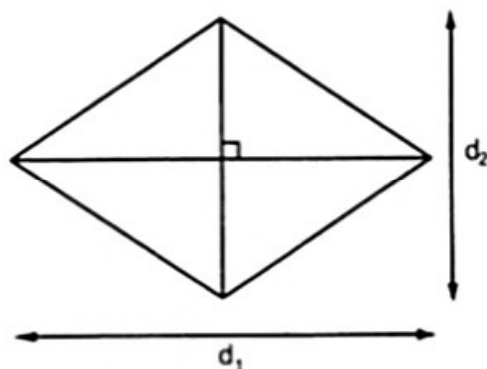
Chủ đề 5

DIỆN TÍCH HÌNH THOI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ



a)



b)

Hình 209

- Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

2. Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo : $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng công thức : $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, với $AC \perp BD$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hãy tính diện tích của hình vuông có độ dài đường chéo bằng d .

Lời giải

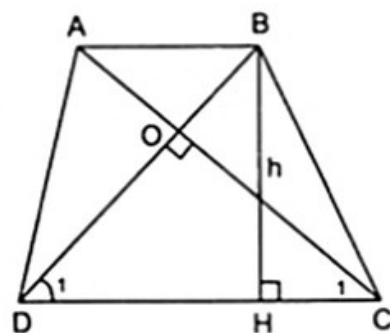
Hình vuông có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau, do đó diện tích hình vuông bằng một nửa bình phương độ dài đường chéo, tức là $S = \frac{d^2}{2}$.

Ví dụ 2. Hãy tính diện tích của hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AC \perp BD$ và chiều cao bằng h .

Lời giải (hình 210)

Từ giả thiết $ABCD$ là hình thang cân có hai đường chéo vuông góc nên $AC \perp BD$ và $AC = BD$.

Áp dụng công thức tính diện tích của tứ giác có hai đường chéo vuông góc, ta có : $S = \frac{1}{2} BD^2$.



Hình 210

Tính BD : Kẻ $BH \perp CD$ thì $BH = h$.

Ta có $\triangle ACD = \triangle BDC$ (c - c - c) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ nên $\triangle OCD$ vuông cân ở O .

Do đó $\widehat{D_1} = 45^\circ$ suy ra tam giác BHD vuông cân ở H nên $HB = HD = h$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle BHD$ vuông tại H , ta được :

$$BH^2 + DH^2 = BD^2 \text{ hay } BD^2 = h^2 + h^2 = 2h^2.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} \cdot 2h^2 = h^2.$$

III. BÀI TẬP

1. Cho hình vuông ABCD có đường chéo bằng 6cm. Trên đường chéo AC lấy điểm M sao cho $AM = 2\text{cm}$. Qua M kẻ các đường thẳng vuông góc với các cạnh của hình vuông, chúng cắt AB, CD lần lượt ở E và F, cắt AD, BC thứ tự ở G và H. Tính diện tích hai hình vuông nhỏ.
2. Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $AC \perp BD$ và đường trung bình bằng 4cm. Hãy tính diện tích tứ giác có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình thang cân đó.

DẠNG 2. Tính diện tích hình thoi

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng công thức tính diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc hoặc công thức tính diện tích hình bình hành.

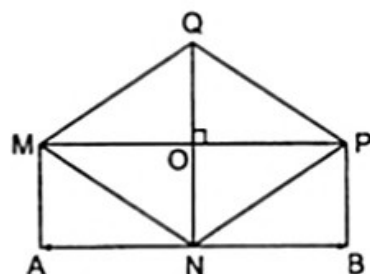
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Vẽ hình chữ nhật có một cạnh bằng đường chéo của một hình thoi cho trước và có diện tích bằng diện tích của hình thoi đó. Từ đó suy ra cách tính diện tích hình thoi.

Lời giải (hình 211)

Cho hình thoi MNPQ có hai đường chéo cắt nhau tại O.

Vẽ hình chữ nhật MPBA có một cạnh là MP, cạnh kia bằng ON ($ON = \frac{1}{2}NQ$);



Ta thấy diện tích hình chữ nhật bằng diện tích hình thoi vì cùng gấp đôi S_{MPN} .

Hình 211

$$\text{Do đó } S_{MNPQ} = S_{MPBA} = MP \cdot ON = \frac{1}{2} MP \cdot NQ.$$

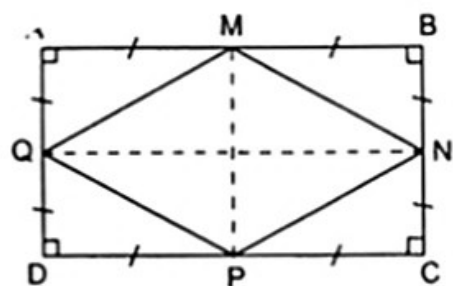
Điều này chứng tỏ diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo.

Ví dụ 2. Cho một hình chữ nhật. Vẽ tứ giác có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật. Vì sao tứ giác này là một hình thoi? So sánh diện tích hình thoi với diện tích hình chữ nhật. Từ đó suy ra cách tính diện tích hình thoi.

Lời giải (hình 212)

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của hình chữ nhật ABCD.

Từ giả thiết và tính chất của hình chữ nhật suy ra bốn tam giác vuông bằng nhau là AMQ, BMN, PCN, PDQ (theo trường hợp c – g – c).



Hình 212

Vậy, ta có $MN = NP = PQ = QM$, tứ giác MNPQ có bốn cạnh bằng nhau nên nó là hình thoi.

Ta có $S_{MNPQ} = S_{ABNQ}$ (vì cùng bằng $2S_{MNQ}$).

$$\text{Do đó } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot DC = \frac{1}{2} MP \cdot NQ.$$

Điều này chứng tỏ diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo.

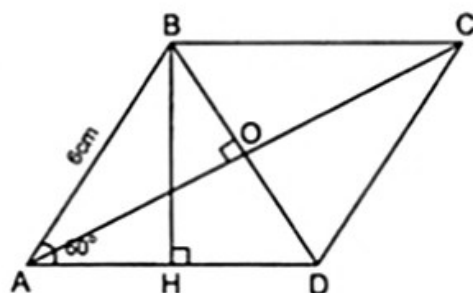
Ví dụ 3. Cho hình thoi ABCD có $AB = 6\text{cm}$, $\hat{A} = 60^\circ$. Tính diện tích hình thoi.

Lời giải (hình 213)

Cách 1 : Áp dụng công thức diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo, ta được:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $AC = 2AO$, $BD = 2BO$, nên $S = 2AO \cdot BO$.



Hình 213

Từ giả thiết ABCD là hình thoi có $\hat{A} = 60^\circ$ suy ra tam giác ABD là tam giác đều, do đó tam giác ABO là nửa tam giác đều, ta có :

$$BO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ (cm)}.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABO vuông tại O, ta được :

$$AB^2 = BO^2 + OA^2 \text{ hay } 6^2 = 3^2 + OA^2$$

$$\Leftrightarrow OA^2 = 27 = (3\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow OA = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy } S = 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = 18\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Cách 2 : Vì hình thoi cũng là hình bình hành nên kẻ $BH \perp AD$.

Áp dụng công thức tính diện tích hình bình hành vào hình thoi ABCD, ta được :

$$S = BH.AD = 6.BH.$$

Ta còn phải tính chiều cao BH.

Theo cách 1, ta có : $BH = OA = 3\sqrt{3}(\text{cm})$.

$$\text{Vậy } S = 3\sqrt{3}.6 = 18\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

III. BÀI TẬP

3. Tính diện tích hình thoi có cạnh bằng 6,2cm và một trong các góc của nó bằng 30° .
4. Tính diện tích hình thoi ABCD biết $AB = 13\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$.
5. Tính diện tích hình thoi có cạnh bằng 17cm và tổng hai đường chéo bằng 46cm.

Chủ đề 6

DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để tính diện tích một đa giác, người ta thường chia đa giác đó thành các tam giác, các tứ giác không có điểm trong chung tính được diện tích rồi áp dụng tính chất cộng diện tích. Do đó cần ghi nhớ các công thức tính diện tích hình chữ nhật, tam giác, hình thang.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính diện tích đa giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cách 1 : Chia đa giác thành các tam giác, tứ giác không có điểm trong chung tính được diện tích theo công thức đã học rồi áp dụng tính chất cộng diện tích.

Cách 2 : Tạo ra một tam giác hoặc hình chữ nhật nào đó chứa đa giác rồi áp dụng tính chất cộng diện tích để đưa về phép tính hiệu các diện tích.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Thực hiện các phép vẽ và đo cần thiết để tính diện tích đa giác ABCDE (BE // CD) (hình 214).

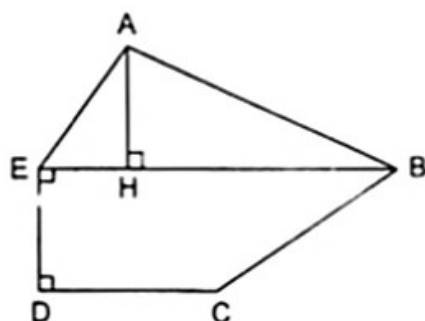
Lời giải

Chia đa giác ABCDE thành tam giác ABE và hình thang vuông EBCD bằng hai phép vẽ sau :

Nối EB, kẻ $AH \perp EB$;

Đo các đoạn thẳng EB, CD, DE, AH (mm). Ta tính được :

$$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{EBCD}.$$



Hình 214

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD có diện tích 60cm^2 . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD và I là giao điểm của BN, DM. Tính diện tích tứ giác ABID.

Lời giải (hình 215)

Vì ABCD là hình bình hành nên đường chéo BD chia nó thành hai tam giác diện tích bằng nhau là :

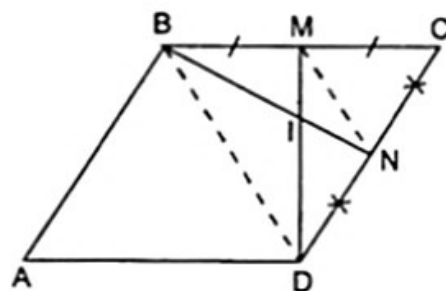
$$S_{ABD} = S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30(\text{cm}^2);$$

$$S_{BDI} = \frac{2}{3} S_{BDN} \text{ (vì chung chiều cao kẻ từ D đến BN và đáy BI} = \frac{2}{3} \text{ BN) (1).}$$

$$S_{BDN} = \frac{1}{2} S_{BDC} \text{ (vì chung chiều cao kẻ từ B đến CD và đáy DN} = \frac{2}{3} \text{ DC) (2).}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } S_{BID} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{BCD} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10 (\text{cm}^2);$$

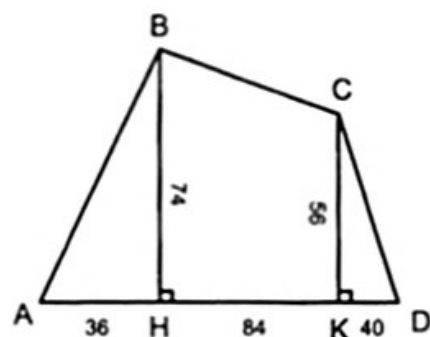
$$\text{Vậy } S_{ABID} = S_{ABD} + S_{BID} = 30 + 10 = 40 (\text{cm}^2).$$



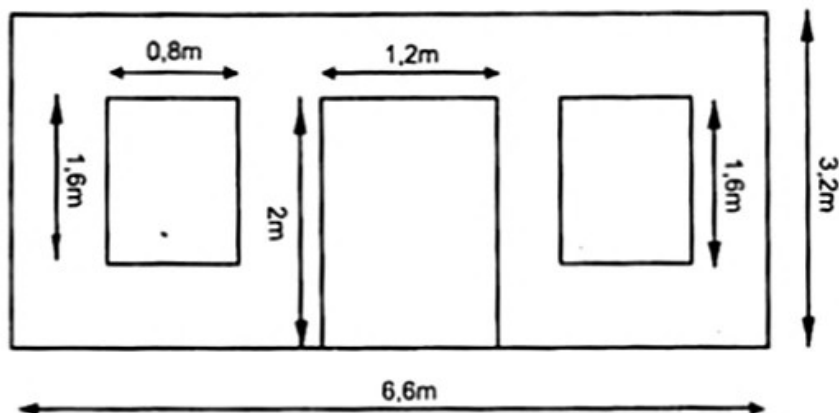
Hình 215

III. BÀI TẬP

1. a) Tính diện tích tứ giác ABCD có các kích thước bằng cm trên hình 216a.
- b) Tính diện tích tường nhà cần quét vôi trên hình 216b với các kích thước bằng mét (trừ một cửa ra vào và hai cửa sổ hình chữ nhật).



a)



b)

Hình 216

2. Tính diện tích lục giác đều có cạnh 3cm.
3. Chứng minh công thức tính diện tích tam giác $S = p \cdot r$, trong đó p là nửa chu vi và r là khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến mỗi cạnh.
- 4*. Ở một sàn giao dịch bất động sản, người ta quảng cáo bán một hồ hình tam giác và ba mảnh đất hình vuông dựng trên ba cạnh hồ. Diện tích ba mảnh đất đó thứ tự bằng 74 ha, 116 ha và 370 ha. Bảng quảng cáo không nói rõ diện tích của hồ, làm nhiều người thắc mắc, không rõ diện tích đó lớn hay bé. Bạn hãy tính giúp xem diện tích của hồ bằng bao nhiêu?
- 5*. Cho lục giác ABCDEF, có các cạnh đối diện AB và DE, BC và EF, CD và FA đôi một song song với nhau. Chứng minh rằng $S_{ACE} = S_{BDE}$.

DẠNG 2*. Bài toán chia đa giác thành các phần có diện tích bằng nhau

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Kẻ thêm đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước để tạo ra một tam giác mới có diện tích bằng diện tích của tam giác cho trước.
2. Áp dụng tính chất cộng diện tích.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và điểm D thuộc cạnh BC. Qua D hãy dựng một đường thẳng chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải (hình 217)

Gọi M là trung điểm của BC.

- Nếu $D \equiv M$ thì trung tuyến AD là đường thẳng cần dựng.

Thật vậy, ta có $S_{ABD} = S_{ADC}$ (vì có chung chiều cao kẻ từ A đến BC, đáy bằng nhau).

– Nếu $D \in MC$ (trường hợp ngược lại làm tương tự).

Qua M kẻ $Mx \parallel AD$ cắt AB ở E thì DE là đường thẳng cân dộng.

Thật vậy, gọi O là giao điểm của AM và DE ta có $S_{MEA} = S_{MED}$ (vì chung đáy ME, chiều cao kẻ từ A và D đến ME bằng nhau) (1).

Mà $S_{MEO} = S_{MEO}$ (2).

Trừ theo vế đẳng thức (1) cho (2), ta được : $S_{AEO} = S_{MOD}$.

Do đó :

$$S_{BED} = S_{BEOM} + S_{MOD} = S_{BEOM} + S_{AEO} = S_{ABM} \quad (3);$$

$$S_{ACDE} = S_{ACDO} + S_{AEO} = S_{ACDO} + S_{MOD} = S_{AMC} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $S_{BED} = S_{ACDE}$, hay DE chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD. Hãy dựng một đường thẳng đi qua A chia tứ giác đã cho thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải (hình 218)

Giả sử $S_{ABC} \leq S_{ACD}$.

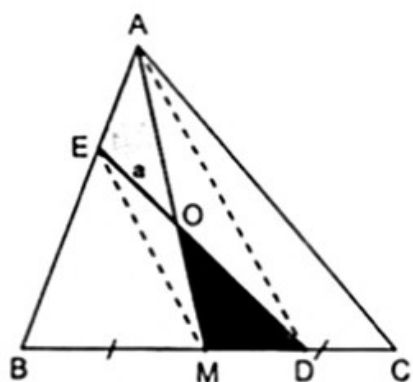
Qua B kẻ một đường thẳng song song với đường chéo AC cắt DC tại E thì khoảng cách từ B và E đến AC bằng nhau.

Ta có $S_{ACE} = S_{ACB}$ vì chung đáy AC, chiều cao bằng nhau.

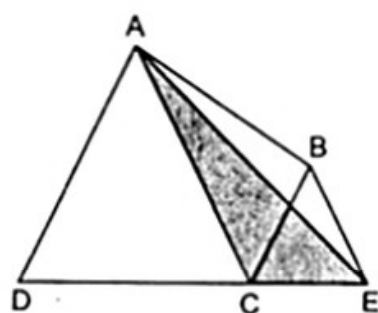
Do đó $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ACB} = S_{ACD} + S_{ACE} = S_{ADE}$.

Bài toán đã cho trở thành, qua đỉnh A của tam giác ADE kẻ một đường thẳng chia tam giác ADE thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Vậy trung tuyến AM của tam giác ADE là đường thẳng cân dộng.



Hình 217



Hình 218

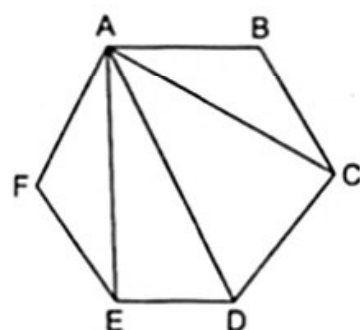
III. BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC và điểm D thuộc cạnh BC. Qua D hãy dựng hai đường thẳng chia tam giác ABC thành ba phần có diện tích bằng nhau.
- Cho tứ giác ABCD và điểm E thuộc cạnh AB (diện tích các tam giác ADE, BCE nhỏ hơn nửa diện tích tứ giác). Hãy dựng một đường thẳng đi qua E chia tứ giác đã cho thành hai phần có diện tích bằng nhau.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Chủ đề 1

- (hình 219) Có bốn tam giác là ABC, ACD, ADE, AEF.
Có ba tứ giác là ABCD, ACDE, ADEF.
Có hai ngũ giác là ABCDE, ACDEF và có một lục giác là ABCDEF.



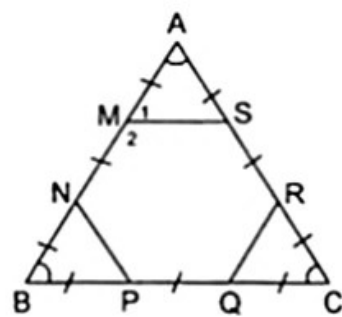
Hình 219

- (hình 220) Đặt cạnh của tam giác đều bằng $3a$ thì các tam giác AMS, BNP, CQR là các tam giác đều cạnh a .
Do đó $MN = NP = PQ = QR = RS = SM$ (1);

Mặt khác tam giác AMS là tam giác đều nên $\widehat{M_1} = 60^\circ$ suy ra góc kề bù với nó là $\widehat{M_2} = 120^\circ$.

Chúng minh tương tự ta được lục giác MNPQRS có tất cả các góc bằng 120° .

Kết hợp với đẳng thức (1) ta có lục giác MNPQRS có tất cả các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau nên nó là lục giác đều.

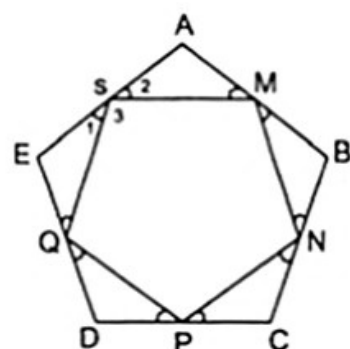


Hình 220

- (hình 221) Xét ngũ giác đều ABCDE có M, N, P, Q, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EA.

Từ định nghĩa đa giác đều và giả thiết suy ra 5 tam giác cân bằng nhau là AMS, BNM, CPN, DQP, ESQ (c.g.c) nên $MN = NP = PQ = QS = SM$. (1)

Xét các tam giác cân AMS, ESQ.



Hình 221

Vì ngũ giác ABCDE là ngũ giác đều nên các góc được tính theo công thức :

$$\widehat{A} = \widehat{E} = \frac{(5-2).180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Suy ra $\widehat{S}_1 = \widehat{S}_2 = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$.

Do $\widehat{S}_1 + \widehat{S}_2 + \widehat{S}_3 = 180^\circ$ nên $\widehat{S}_3 = 108^\circ$.

Chúng minh tương tự ta được ngũ giác MNPQS có tất cả các góc bằng 108° . Kết hợp với đẳng thức (1) ta thấy ngũ giác MNPQS có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau nên nó là ngũ giác đều.

4. Áp dụng công thức tính tổng các góc của n giác : $(n-2).180^\circ$.

– Với $n = 8$, ta được : $(8-2).180^\circ = 1080^\circ$;

– Với $n = 10$, ta được : $(10-2).180^\circ = 1440^\circ$;

– Với $n = 12$, ta được : $(12-2).180^\circ = 1800^\circ$.

5. Áp dụng công thức tính số đường chéo của n giác : $\frac{n(n-3)}{2}$;

– Với $n = 8$, ta được : $\frac{8(8-3)}{2} = 20$;

– Với $n = 10$, ta được : $\frac{10(10-3)}{2} = 40$;

– Với $n = 12$, ta được : $\frac{12(12-3)}{2} = 54$.

6. Gọi số cạnh của đa giác là n.

Vì tổng số đo các góc của đa giác là 1080° nên ta có phương trình :

$$(n-2).180^\circ = 1080^\circ \Leftrightarrow n-2 = 6 \Leftrightarrow n = 8.$$

7. a) Vì tổng các góc trong và ngoài tại một đỉnh của đa giác bằng $2v$ nên tổng các góc trong và ngoài tại n đỉnh bằng $2nv$.

Mà tổng các góc trong của đa giác bằng $(n-2).2v$.

Vậy tổng các góc ngoài của đa giác là :

$$2nv - (n-2).2v = 2v.(n - n + 2) = 4v.$$

Điều này chứng tỏ tổng các góc ngoài của bất kì đa giác nào cũng bằng $4v$.

b) Đa giác có tổng các góc trong bằng tổng các góc ngoài khi và chỉ khi :

$$(n - 2).2v = 4v \Leftrightarrow n - 2 = 2 \Leftrightarrow n = 4.$$

Điều này chứng tỏ đa giác có bốn cạnh.

8. a) Đa giác có số đường chéo bằng số cạnh khi và chỉ khi :

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Leftrightarrow n(n-3) = 2n \Leftrightarrow n(n-5) = 0 \Leftrightarrow n = 5 \text{ (vì } n > 0).$$

b) Đa giác có số đường chéo gấp đôi số cạnh khi và chỉ khi :

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \Leftrightarrow n(n-3) = 4n \Leftrightarrow n(n-7) = 0 \Leftrightarrow n = 7 \text{ (vì } n > 0).$$

9. Mỗi góc của đa giác đều bằng $108^\circ \Leftrightarrow \frac{(n-2).180^\circ}{n} = 108^\circ \Leftrightarrow n = 5.$

10*. (hình 222) Rõ ràng hình vuông và ngũ giác đều thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta đi chứng minh đa giác có số cạnh lớn hơn 5 không thoả mãn bài ra bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử tồn tại đa giác $A_1A_2\dots A_n$ với $n \geq 6$ có các đường chéo có độ dài bằng nhau.

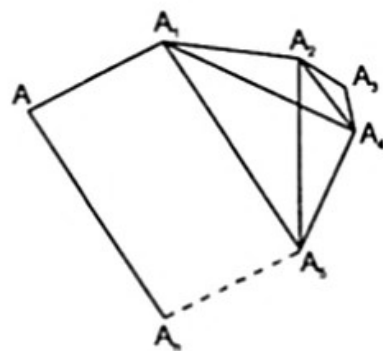
Khi đó $A_1A_4 = A_2A_5$ vì chúng là các đường chéo.

Xét tứ giác $A_1A_2A_4A_5$, các đoạn thẳng A_1A_4 , A_2A_5 là các đường chéo, còn A_1A_5 , A_2A_4 là các cạnh của tứ giác nên tổng hai đường chéo lớn hơn tổng hai cạnh đối (xem ví dụ 2, dạng 2, chủ đề 1, chương 1) tức là :

$A_1A_5 + A_2A_4 < A_1A_4 + A_2A_5$ mâu thuẫn với giả thiết quy nạp vì A_1A_5 và A_2A_4 cũng là các đường chéo của đa giác.

Điều này chứng tỏ giả thiết trên là sai.

Vậy những đa giác có số cạnh lớn hơn 5 không thoả mãn bài ra.



Hình 222

Chủ đề 2

1. Gọi cạnh hình vuông là a thì diện tích hình vuông là $S = a^2$.

Nếu mỗi cạnh của nó tăng thêm 10% thì cạnh của hình vuông mới là $\frac{110a}{100}$.

$$\text{Do đó hình vuông mới có diện tích là } S_m = \left(\frac{110a}{100}\right)^2 = \frac{121a^2}{100}.$$

So với diện tích cũ $S = \frac{100a^2}{100}$ thì diện tích mới tăng thêm 21%.

2. Gọi chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật là a, b thì diện tích của nó là $S = ab$.

a) Nếu chiều dài tăng thêm 10% thì chiều dài mới là $\frac{110a}{100}$;

Nếu chiều rộng tăng thêm 20% thì chiều rộng mới là $\frac{120b}{100}$.

Do đó diện tích của hình chữ nhật mới là $S_m = \frac{110a}{100} \cdot \frac{120b}{100} = \frac{132ab}{100}$, so với

diện tích cũ là $S = \frac{100ab}{100}$ thì diện tích mới tăng thêm 32%.

b) Nếu chiều dài giảm đi 25% thì chiều dài mới là $\frac{75a}{100}$;

Nếu chiều rộng tăng thêm 15% thì chiều rộng mới là $\frac{115b}{100}$.

Do đó hình chữ nhật mới có diện tích là $S_m = \frac{75a}{100} \cdot \frac{115b}{100} = \frac{86,25ab}{100}$.

So với diện tích cũ là $S = \frac{100ab}{100}$ thì diện tích mới giảm đi 13,75%.

3. Gọi các cạnh của hình chữ nhật là a, b (với điều kiện $a, b > 0$) thì diện tích của nó là $S = ab$.

a) Theo bài ra ta có $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ (1), $ab = 300$ (2).

Nhân theo vế đẳng thức (1) với (2), ta được :

$$a^2 = (15)^2 \Leftrightarrow a = 15 \text{ (cm) (vì } a > 0).$$

Thay $a = 15$ vào (2), ta được : $15.b = 300 \Leftrightarrow b = 20 \text{ (cm)}$.

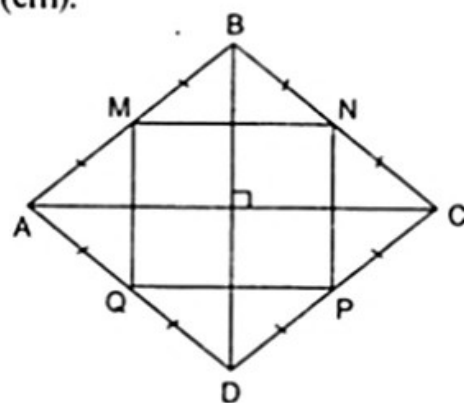
b) Giả sử $a^2 = 3^2 \Leftrightarrow a = 3 \text{ (cm) (vì } a > 0).$

Do đó $3b = 45 \Leftrightarrow b = 15 \text{ (cm)}$.

4. (hình 223) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của hình thoi ABCD, ta có $AC = 10\text{cm}$, $BD = 6\text{cm}$.

Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật nên có diện

tích : $\frac{AC \cdot BD}{4} = \frac{6 \cdot 10}{4} = 15(\text{cm}^2).$

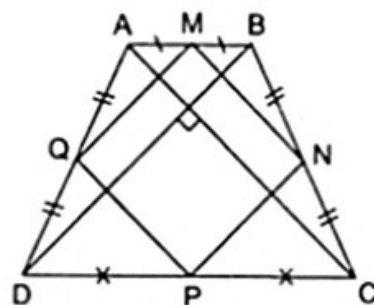


Hình 223

5. (hình 224) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$), $AC = 4\text{cm}$, $AC \perp BD$.

Tứ giác MNPQ là hình vuông cạnh 2cm nên diện tích là 4cm^2 .

6. Gọi độ dài hai cạnh góc vuông là x, y thì diện tích của tam giác vuông là $S = \frac{xy}{2}$.



Hình 224

Theo giả thiết $x + y = 14\text{cm}$, cạnh huyền bằng 10cm .

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông, ta được :

$$10^2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 14^2 - 2xy$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 96 \Leftrightarrow \frac{xy}{2} = 24 \text{ (cm}^2).$$

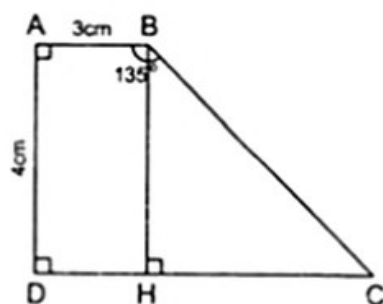
7. (hình 225) Kẻ đường cao BH thì :

$$S_{ABCD} = S_{ABHD} + S_{BHC}.$$

$$S_{ABHD} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ (cm}^2);$$

$$S_{BHC} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ (cm}^2);$$

$$S_{ABCD} = 12 + 8 = 20 \text{ (cm}^2).$$



Hình 225

8. Gọi các kích thước của hình chữ nhật là x, y thì diện tích của nó là $S = xy$.

Ta có $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 \leq (x+y)^2$ (1). Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

a) Với chu vi của hình chữ nhật bằng $2(x+y) = 40 \Leftrightarrow x+y = 20$.

Thay $x+y = 20$ vào đẳng thức (1), ta được : $S = xy \leq 100$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{x+y}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

Vậy $\max S = 100$ khi $x = y = 10$ hay hình chữ nhật là hình vuông.

Điều này chứng tỏ trong các hình chữ nhật có cùng chu vi 40cm thì hình vuông cạnh 10cm có diện tích lớn nhất.

b) Với $xy = 100$. Thay vào (1), ta được :

$$4 \cdot 100 \leq (x+y)^2 \Rightarrow x+y \geq 20 \Rightarrow 2(x+y) \geq 40.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 10$.

Vậy chu vi của hình chữ nhật đạt giá trị nhỏ nhất bằng 40 khi $x = y = 10$.

Điều này chứng tỏ trong các hình chữ nhật có cùng diện tích 100cm^2 thì hình vuông cạnh 10cm có chu vi nhỏ nhất.

Chủ đề 3

1. (hình 226) Áp dụng công thức tính diện tích vào tam giác ABC, ta được :

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH.$$

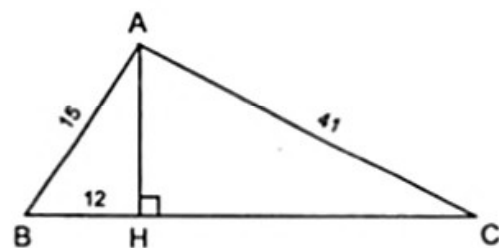
Tính chiều cao AH :

Áp dụng định lý Pi-ta-go vào tam giác ABH vuông tại H, ta được :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \text{ hay } 15^2 = 12^2 + AH^2$$

$$\Leftrightarrow AH^2 = 9^2 \Leftrightarrow AH = 9 \text{ vì } AH > 0.$$

Tính $BC = BH + HC = 12 + HC$.



Hình 226

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ACH vuông tại H, ta được :

$$AC^2 = CH^2 + AH^2 \text{ hay } 41^2 = CH^2 + 9^2$$

$$\Leftrightarrow CH^2 = 40^2 \Leftrightarrow CH = 40, \text{ vì } CH > 0.$$

Do đó $BC = 12 + 40 = 52$.

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 9 = 234 (\text{cm}^2).$$

2. (hình 227) $S_{ABC} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 (\text{cm}^2);$

$$S_{ADE} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 (\text{cm}^2);$$

$$S_{BDEC} = 12 - 3 = 9 (\text{cm}^2).$$

3. (hình 228) Ta có $S_{ABC} = S_{ABD}$ (vì chung đáy AB chiều cao kẻ từ C và D đến AB bằng nhau).

$S_{CDA} = S_{CDB}$ (vì chung đáy CD chiều cao kẻ từ A và B đến CD bằng nhau) (1).

Lại có $S_{CDO} = S_{CDO}$ (2).

Trừ theo vế đẳng thức (1) cho (2), ta được :

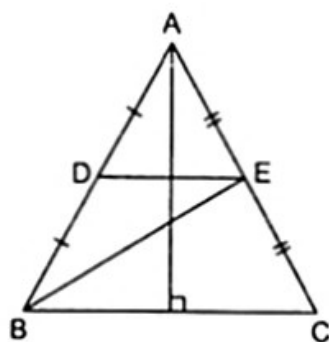
$$S_{ADO} = S_{BCO}.$$

4. (hình 229) Vì $CE \parallel BD$ theo giả thiết nên các đường cao kẻ từ C và E đến BD bằng nhau $\Rightarrow S_{BDC} = S_{BDE}$ (chung đáy BD, chiều cao bằng nhau).

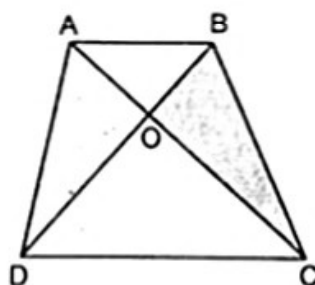
$$\text{Do đó } S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = S_{ABD} + S_{BDE} = S_{ABE}.$$

5. (hình 230) Vì ABCD là hình bình hành nên $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ và $EF \parallel BD$ theo giả thiết. Do đó các đường cao kẻ từ A, D đến BC bằng nhau. Các đường cao kẻ từ A, B đến CD bằng nhau. Các đường cao kẻ từ E và F đến BD bằng nhau.

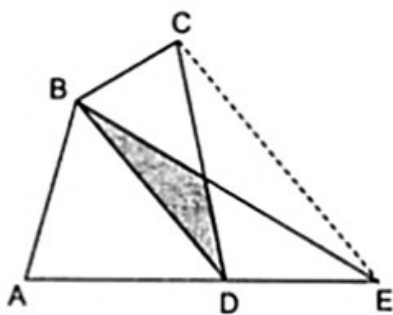
Ta có $S_{BEA} = S_{BED}$ (vì chung đáy BE, chiều cao bằng nhau) (1).



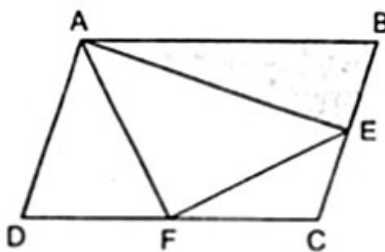
Hình 227



Hình 228



Hình 229



Hình 230

$$S_{DFA} = S_{DFB} \text{ (vì chung đáy DF, chiều cao bằng nhau) } (2).$$

$$S_{DFB} = S_{BED} \text{ (3)}.$$

Từ (1), (2) và (3), suy ra : $S_{BEA} = S_{DFA}$.

6. (hình 231) Gọi $S_{ABCD} = 6a$.

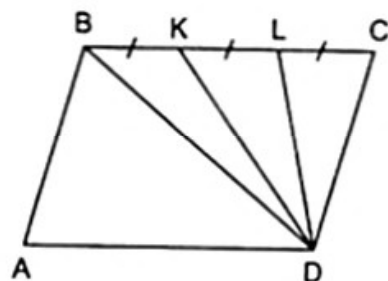
$$S_{DAC} = S_{BDC} = 3a \text{ (vì chung đáy DC và đường cao bằng nhau),}$$

Ta có $S_{DCL} = S_{DLK} = S_{DKB} = \frac{1}{3} S_{DBC} = a$ (vì chung chiều cao kẻ từ D đến BC và các đáy bằng nhau).

$$a) \frac{S_{DAC}}{S_{SCK}} = \frac{3a}{S_{DCL} + S_{DLK}} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}.$$

$$b) \frac{S_{DAC}}{S_{ADLB}} = \frac{3a}{S_{ABCD} - S_{DCL}} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}.$$

$$c) \frac{S_{ABKD}}{S_{ABLD}} = \frac{S_{ABCD} - S_{DCK}}{S_{ABCD} - S_{DCL}} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5}.$$



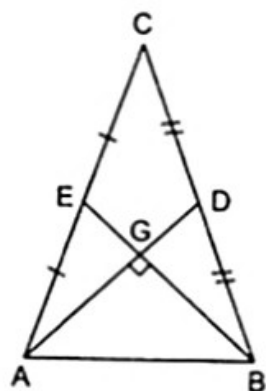
Hình 231

7. (hình 232) Gọi giao điểm của hai đường trung tuyến AD và BE là G thì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $BG = \frac{2}{3} BE$ theo tính chất về các đường trung tuyến của tam giác.

Ta có $S_{ABC} = 2S_{ABD}$ (vì có chung chiều cao kẻ từ A đến BC, đáy $BC = 2BD$).

$$\text{Mà } S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BG = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{2}{3} BE = \frac{AD \cdot BE}{3}.$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{2AD \cdot BE}{3}.$$

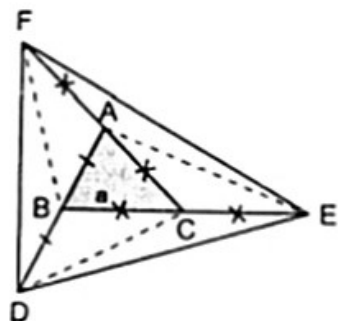


Hình 232

8. (hình 233) Gọi $S_{ABC} = a$ thì $S_{ACE} = S_{ABC} = a$ (vì chung chiều cao kẻ từ A đến BC, đáy bằng nhau).

Lập luận tương tự, ta cũng có :

$$S_{BCD} = S_{CDE} = S_{AEF} = S_{ABF} = S_{BDF} = a.$$



Hình 233

Từ đó suy ra :

a) $S_{DEF} = 7a = 7S_{ABC}$.

b) $S_{ADE} = S_{BEF} = S_{CDF} = 4a = 4S_{ABC}$.

9. (hình 234) Kẻ đường cao AH thì H là trung điểm của BC theo tính chất của tam giác cân nên $HC = 6\text{cm}$. Tính diện tích tam giác cân ABC theo hai cách.

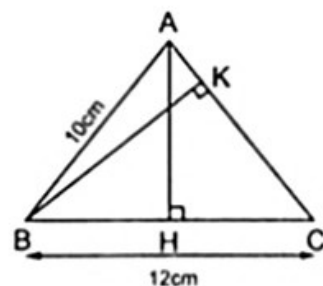
Cách 1 : Tính theo đường cao AH, ta có :

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} 12 \cdot AH = 6AH.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác AHC vuông ở H, ta được : $AC^2 = CH^2 + HA^2$

$$\text{hay } 10^2 = 6^2 + HA^2 \Leftrightarrow HA^2 = 8^2 \Leftrightarrow HA = 8 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Do đó } S = 48\text{cm}^2.$$



Hình 234

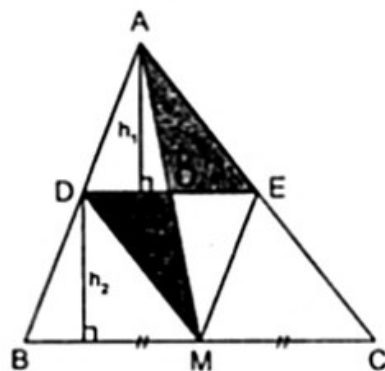
Cách 2 : Tính theo đường cao BK, ta có : $S = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot BK = 5BK$.

Vì tam giác cân ABC chỉ có một diện tích nên hai kết quả trên phải bằng nhau, tức là : $5BK = 48 \Leftrightarrow BK = 9,6 \text{ (cm)}$.

10. (hình 235) Gọi chiều cao kẻ từ A đến DE là h_1 . Vì $DE \parallel BC$ nên chiều cao kẻ từ D, E đến BC bằng nhau, gọi chiều cao đó là h_2 .

$$S_{ABM} = S_{AMC} \text{ (vì chung chiều cao kẻ từ A đến BC, đáy bằng nhau) (1).}$$

$$S_{BMD} = S_{MCE} \text{ (vì đáy bằng nhau, chiều cao bằng nhau) (2).}$$



Hình 235

$$\text{Trừ theo vế đẳng thức (1) cho (2), ta được : } S_{AMD} = S_{AEM} \text{ (3).}$$

$$\text{Mặt khác : } S_{AMD} = S_{AOD} + S_{DOM} = \frac{1}{2} DO \cdot h_1 + \frac{1}{2} DO \cdot h_2 = \frac{DO}{2} (h_1 + h_2) \text{ (4).}$$

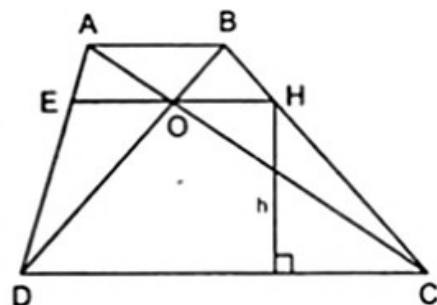
$$S_{AEM} = S_{AEO} + S_{OEM} = \frac{1}{2} OE \cdot h_1 + \frac{1}{2} OE \cdot h_2 = \frac{EO}{2} (h_1 + h_2) \text{ (5).}$$

Từ (3), (4) và (5) suy ra $DO = OE$.

11. (hình 236) Trước hết ta chứng minh $S_{AOD} = S_{BCO}$.

Vì $AB \parallel CD$ nên chiều cao kẻ từ A và B đến CD bằng nhau.

Ta có $S_{ACD} = S_{BCD}$ (vì chung đáy CD, chiều cao bằng nhau) (1) và $S_{OCD} = S_{OCD}$ (2).



Hình 236

Trừ theo vế đẳng thức (1) cho (2), ta được : $S_{AOD} = S_{BCO}$.

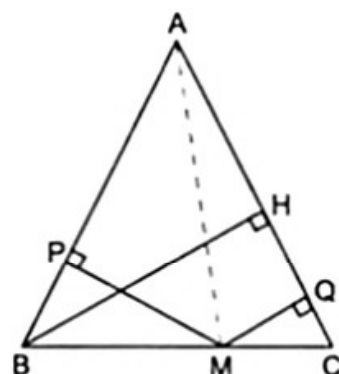
Lập luận tương tự như bài 10, ta được : $EO = OH$.

12. (hình 237) Gọi $AB = AC = 2a$.

Tính diện tích tam giác cân ABC bằng hai cách.

Cách 1 : Tính theo công thức diện tích :

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} BH \cdot 2a = a \cdot BH.$$



Hình 237

Cách 2 : Tính theo tính chất cộng diện tích :

$$S = S_{AMB} + S_{ACM} = \frac{1}{2} AB \cdot MP + \frac{1}{2} AC \cdot MQ = a(MP + MQ).$$

Vì tam giác cân ABC chỉ có một diện tích nên hai kết quả trên phải bằng nhau, tức là : $a \cdot BH = a \cdot (MP + MQ)$, hay $MP + MQ = BH$.

13. (hình 238) Xét tam giác ABC có $CB = a$, $CA = b$.

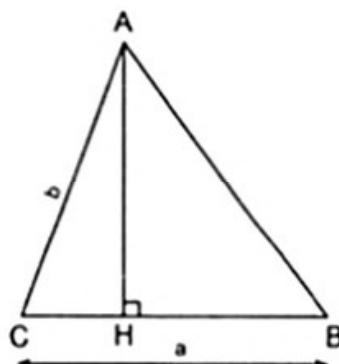
Kẻ $AH \perp BC$ thì AC và AH lần lượt là đường xiên. Đường vuông góc kẻ từ điểm A ở ngoài đường thẳng BC đến đường thẳng đó nên đường vuông góc AH là đường ngắn nhất, hay $AH \leq AC$.

$$\text{Do đó } S = \frac{1}{2} AH \cdot BC \leq \frac{1}{2} CA \cdot BC = \frac{ab}{2}.$$

$$\text{Ta có : } 4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 \leq (a+b)^2. \quad (1)$$

$$2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2 \geq (a+b)^2. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra : } S = \frac{ab}{2} \leq \frac{a^2 + b^2}{4}.$$



Hình 238

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} AC = AH \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC \perp CB \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại C.}$

14. Gọi hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng a là b, c và diện tích của tam giác là S .

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta được : $b^2 + c^2 = a^2$.

Theo kết quả của bài 13, ta có : $S \leq \frac{a^2}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông cân tại C.

$$\text{Vậy } \max S = \frac{a^2}{4}.$$

15. Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là a, b thì diện tích của hình chữ nhật là $S = ab$. Theo định lý Py-ta-go thì : $a^2 + b^2 = 12^2$.

Áp dụng kết quả bài 13, ta được : $S = ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{12^2}{2} = 72$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi hình chữ nhật là hình vuông.

Điều đó chứng tỏ rằng trong các hình chữ nhật có đường chéo bằng 12cm thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

- 16*. Trước hết, ta có : $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

Áp dụng kết quả trên, ta có :

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 &= \frac{OA^2 + OB^2}{2} + \frac{OB^2 + OC^2}{2} + \frac{OC^2 + OD^2}{2} + \frac{OD^2 + OA^2}{2} \\ &\geq OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA \\ &\geq 2S_{AOB} + 2S_{BOC} + 2S_{COD} + 2S_{DOA} = 2S. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} OA = OB = OC = OD \\ \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} \end{cases}$, hay tứ giác ABCD là hình vuông.

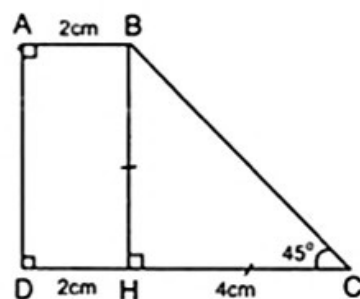
Chủ đề 4

1. (hình 239) Kẻ đường cao BH thì tứ giác ABHD có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật. Suy ra $DH = AB = 2\text{cm}$, do đó $HC = 6 - 2 = 4$.

Tam giác vuông BCH có $\hat{C} = 45^\circ$ nên vuông cân ở H, suy ra $BH = HC$.

Áp dụng công thức tính diện tích hình thang, ta được :

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot BH}{2} = \frac{(2 + 6) \cdot 4}{2} = 16(\text{cm}^2).$$



Hình 239

2. (hình 240) Kẻ đường cao BH thì tứ giác ABHD có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật, suy ra

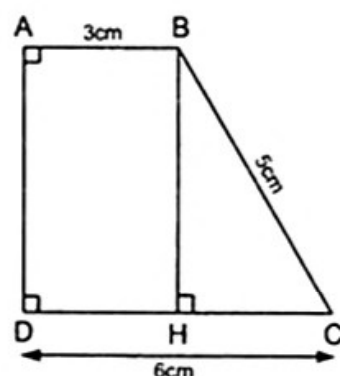
$$DH = AB = 3\text{cm}, \text{ do đó } HC = 6 - 3 = 3.$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go vào tam giác BHC vuông ở H, ta có : $BC^2 = CH^2 + HB^2$ hay $5^2 = 3^2 + HB^2$

$$\Leftrightarrow HB^2 = 4^2 \Leftrightarrow HB = 4(\text{cm}), \text{ vì } HB > 0.$$

Áp dụng công thức tính diện tích hình thang, ta được :

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot BH}{2} = \frac{(3 + 6) \cdot 4}{2} = 18(\text{cm}^2).$$



Hình 240

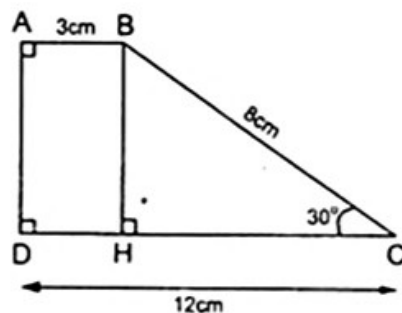
3. (hình 241) Kẻ đường cao BH thì tứ giác ABHD có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật, suy ra $DH = AB = 3\text{cm}$, do đó :

$$HC = 12 - 3 = 9.$$

Vì tam giác vuông BCH có $\hat{C} = 30^\circ$ nên nó là nửa tam giác đều, do đó $BH = \frac{1}{2} \cdot BC = 4(\text{cm})$.

Áp dụng công thức tính diện tích hình thang, ta được :

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot BH}{2} = \frac{(3 + 12) \cdot 4}{2} = 30(\text{cm}^2).$$

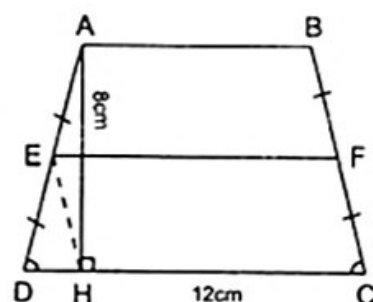


Hình 241

4. (hình 242) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC thì EF là đường trung bình của hình thang ABCD nên $EF \parallel CD$ và $2EF = AB + CD$ (theo tính chất đường trung bình của hình thang).

Áp dụng công thức tính diện tích hình thang, ta được :

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot AH}{2} = \frac{2EF \cdot 12}{2} = 12EF.$$



Hình 242

Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào tam giác vuông AHD, ta được $EH = ED = EA$ nên $\widehat{D} = \widehat{H_1}$.

Lại có $\widehat{D} = \widehat{C}$ suy ra $\widehat{C} = \widehat{H_1} \Rightarrow EH \parallel FC$. Tứ giác EFCH có các cạnh đối song song nên nó là hình bình hành, suy ra $EF = HC = 12\text{cm}$.

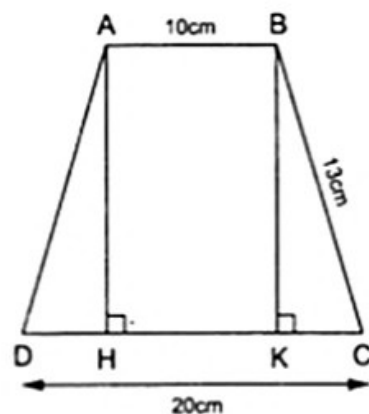
Vậy $S = 144 (\text{cm}^2)$.

5. (hình 243) Xét hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$), $AB = 10\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$, $CD = 20\text{cm}$.

Kẻ AH, BK vuông góc với CD thì tứ giác ABKH là hình chữ nhật, nên $HK = AB = 10\text{cm}$.

Hai tam giác vuông AHD, BKC bằng nhau, vậy

$$DH = CK = \frac{CD - HK}{2} = \frac{20 - 10}{2} = 5(\text{cm}).$$



Hình 243

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác AHD vuông ở H, ta được :

$$AD^2 = DH^2 + HA^2, \text{ hay } 13^2 = 5^2 + HA^2 \Leftrightarrow HA^2 = 12^2 \Leftrightarrow HA = 12(\text{cm}).$$

Vậy $S = 144 (\text{cm}^2)$.

6. (hình 244) Xét hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Ta phải chứng minh $S_{AND} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Thật vậy : Ta có $\triangle ABN = \triangle ECN$ (g.c.g)

$$\Rightarrow S_{ABN} = S_{ECN} \quad (1) \text{ và } AN = NE;$$

Lại có $S_{ANCD} = S_{ANCD} \quad (2);$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được : $S_{ABCD} = S_{AED} \quad (3).$

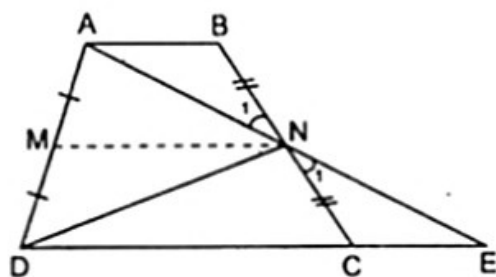
Mặt khác $S_{AND} = S_{NED} \quad (4)$, vì chung chiều cao kẻ từ D đến AE, đáy bằng nhau.

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh.

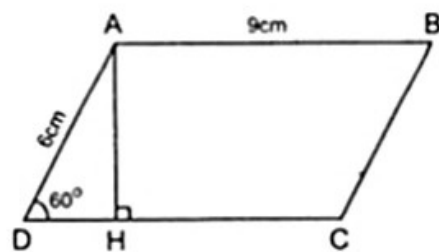
7. (hình 245) Xét hình bình hành ABCD có $AB = 9\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$ và $\widehat{A} = 120^\circ$.

Kẻ đường cao AH thì diện tích hình bình hành ABCD được tính theo công thức :

$$S = CD.AH = 9.AH$$



Hình 244



Hình 245

Vì $\hat{D}$ là góc trong cùng phía của $AB \parallel CD$ nên chúng bù nhau, hay :

$$\hat{D} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Tam giác vuông ADH có $\hat{D} = 60^\circ$ nên nó là nửa tam giác đều. Suy ra :

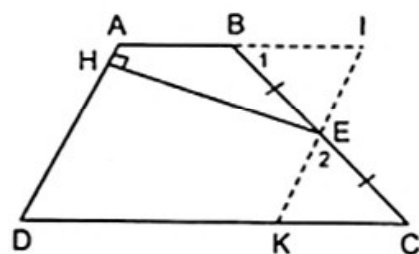
$$DH = \frac{1}{2} AD = 3\text{cm}.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ADH vuông ở H , ta được :

$$AD^2 = DH^2 + HA^2 \Leftrightarrow 6^2 = 3^2 + HA^2 \Leftrightarrow HA^2 = 45 \Leftrightarrow HA = \sqrt{45} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy } S = 9\sqrt{45} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

8. (hình 246) Qua E kẻ một đường thẳng song song với AD cắt AB , DC theo thứ tự ở I và K thì tứ giác $AIKD$ có các cạnh đối song song nên nó là hình bình hành.



Hình 246

Áp dụng công thức tính diện tích vào hình bình hành $AIKD$, ta được : $S_{AIKD} = EH \cdot AD$. (1)

Ta có $\triangle BEI = \triangle CEK$ (g.c.g) $\Rightarrow S_{BEI} = S_{CEK}$. (2)

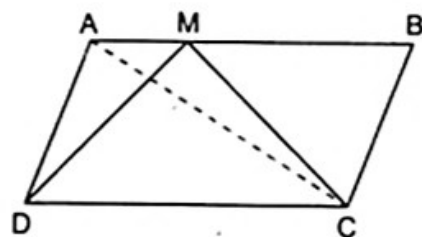
Lại có $S_{ABEKD} = S_{ABEKD}$. Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$S_{ABCD} = S_{AIKD}.$$

Kết hợp với (1) ta có $S_{ABCD} = EH \cdot AD$.

9. Học sinh tự giải.

10. a) (hình 247) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$, do đó khoảng cách từ A và M đến CD bằng nhau.

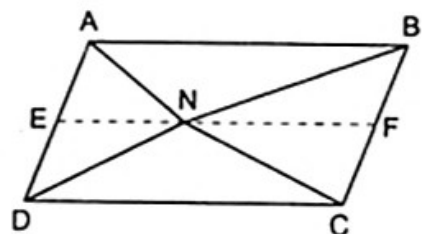


Hình 247

Ta có $S_{DCA} = S_{DCM}$ (1) (vì chung đáy, chiều cao bằng nhau).

Lại có $S_{DCA} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $S_{DCM} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

- b) (hình 248) Qua N kẻ một đường thẳng song song với AB cắt AD , BC lần lượt ở E và F , ta được hai hình bình hành là $ABFE$, $EFCD$. Áp dụng kết quả câu a), ta có : $S_{ANB} + S_{DNC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.



Hình 248

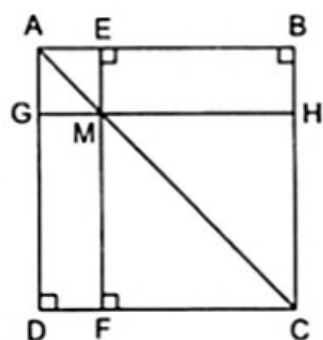
Chủ đề 5

1. (hình 249) Hình vuông AEMG có đường chéo $AM = 2\text{cm}$, nên diện tích được tính theo công thức :

$$S = \frac{AM^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Hình vuông MHCF có đường chéo $MC = 4\text{cm}$ nên diện tích được tính theo công thức :

$$S = \frac{MC^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

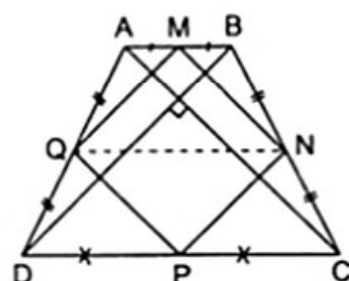


Hình 249

2. (hình 250) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, và DA. Trước hết ta chứng minh tứ giác MNPQ là hình vuông.

Hình vuông MNPQ có đường chéo $QN = 4\text{cm}$ nên diện tích được tính theo công thức :

$$S = \frac{QN^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 250

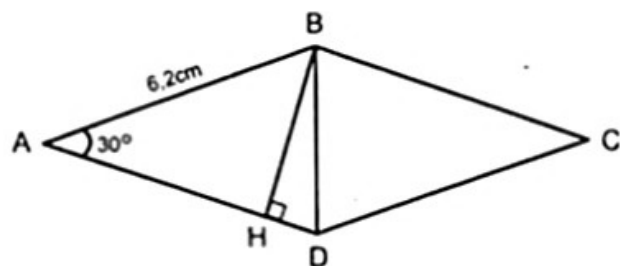
3. (hình 251) Xét hình thoi ABCD có $AB = 6,2\text{cm}$, $\hat{A} = 30^\circ$.

Kẻ $BH \perp AD$ thì tam giác vuông ABH là nửa tam giác đều, do đó :

$$BH = \frac{1}{2} AB = 3,1\text{cm}.$$

Áp dụng công thức tính diện tích vào hình thoi, ta được :

$$S = BH \cdot AD = 3,1 \cdot 6,2 = 19,22 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



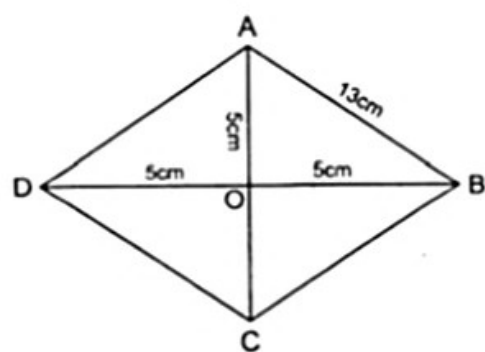
Hình 251

4. (hình 252) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo thì $AC = 2AO$, $BD = 2BO$.

Áp dụng công thức tính diện tích vào hình thoi ABCD, ta được :

$$S = AC \cdot BD = 10 \cdot 2BO = 20 \cdot BO.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABO vuông ở O, ta được : $AB^2 = BO^2 + OA^2$, hay



Hình 252

$$13^2 = BO^2 + 5^2 \Leftrightarrow BO^2 = 12^2 \Leftrightarrow BO = 12 \text{ (cm)}.$$

Vậy $S = 240 \text{ (cm}^2\text{)}$.

5. (hình 253) Xét hình thoi ABCD có $AB = 17\text{cm}$, $AC + BD = 46\text{cm}$:

Gọi O là giao điểm hai đường chéo.

Đặt $OA = x$, $OB = y$ thì $x + y = 23$.

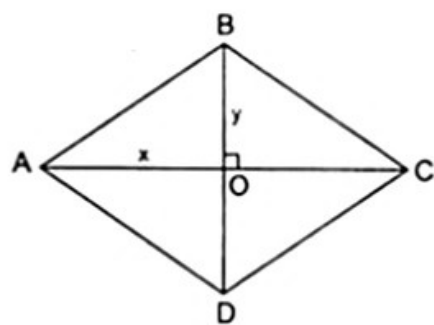
Áp dụng công thức tính diện tích vào hình thoi

$$ABCD, \text{ ta được: } S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{2x \cdot 2y}{2} = 2xy.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ABO vuông ở O, ta được:

$$17^2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 23^2 - 2xy \Leftrightarrow 2xy = 240.$$

Vậy $S = 240 \text{ (cm}^2\text{)}$.



Hình 253

Chủ đề 6

1. a) (hình 216a) Theo tính chất cộng diện tích, ta có:

$$S_{ABCD} = S_{ABH} + S_{BCKH} + S_{CDK} = 7912 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

- b) (hình 216b) Diện tích tường nhà là: $S = 6,6 \cdot 3,2 = 21,12 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích cửa chính là: $S_1 = 2 \cdot 1,2 = 2,4 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích hai cửa sổ là: $S_2 = 2 \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 2,56 \text{ (m}^2\text{)}$.

Vậy diện tích tường cần quét vôi: $S_Q = 21,12 - 2,4 - 2,56 = 16,16 \text{ (m}^2\text{)}$.

2. Nối các đường chéo của lục giác đều thì các đường chéo này chia lục giác đều thành 6 tam giác đều cạnh a , mà diện tích mỗi tam giác đều cạnh a bằng $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

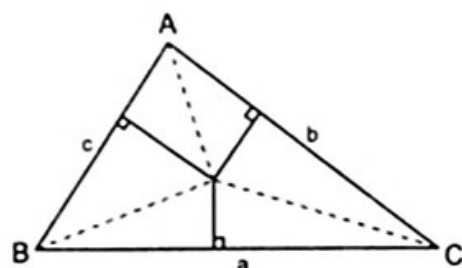
Vậy lục giác đều cạnh a có diện tích là $\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (dvd).

3. (hình 254) Xét tam giác ABC có a, b, c , lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB và r là khoảng cách từ giao điểm của các đường phân giác đến các cạnh.

Vì p là nửa chu vi nên $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng tính chất cộng diện tích vào tam giác ABC, ta có :

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB} \\ &= \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = \frac{p \cdot r}{2}. \end{aligned}$$



Hình 254

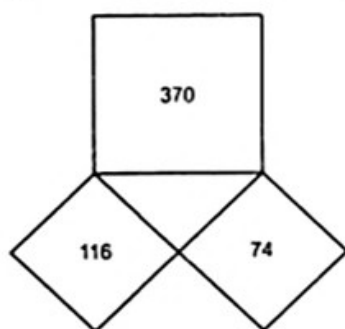
4. (hình 255) Nhận xét :

$$74 = 7^2 + 5^2; \quad 116^2 = 10^2 + 4^2; \quad (10+7)^2 + (5+4)^2 = 17^2 + 9^2 = 370.$$

Vẽ tam giác ABC vuông ở A, có : $AB = 5 + 4$; $AC = 7 + 10$.

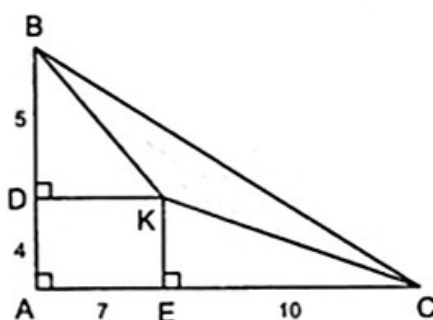
Nên ta có : $BC^2 = 370$; $BK^2 = 74$; $KC^2 = 116$.

Như vậy ba cạnh của tam giác BKC chính là ba cạnh của hồ nước.



a)

Hình 255



b)

Do đó $S_{ABC} = 17 \cdot 19 : 2 = 76,5$; $S_{BDK} = 5 \cdot 7 : 2 = 17,5$.

$$S_{KCE} = 4 \cdot 10 : 2 = 20; \quad S_{ADKE} = 4 \cdot 7 = 28.$$

Vậy $S_{BKC} = 76,5 - 17,5 - 20 - 28 = 11$ (ha) hay diện tích mặt hồ là 11 ha.

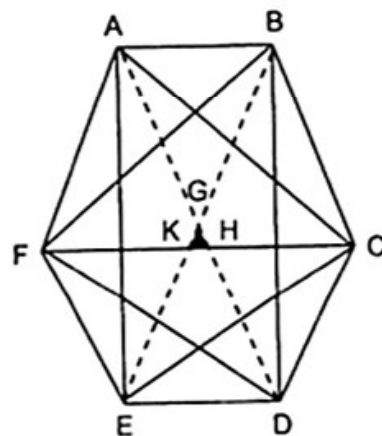
5. (hình 256) Gọi G là giao điểm của AD và BE, K, H thứ tự là giao điểm của FC với BE, AD.

Vì $AB \parallel DE$ nên khoảng cách từ A, B đến DE bằng nhau nên $S_{DEA} = S_{DEB}$ (1) (vì chung đáy DE, chiều cao bằng nhau).

$$S_{GDE} = S_{GDE} \quad (2).$$

Trừ theo về các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$S_{AGE} = S_{BDG} \quad (3).$$



Hình 256

Chúng minh tương tự, ta cũng được :

$$S_{EKC} = S_{BKF} \quad (4); \quad S_{AHC} = S_{FHD} \quad (5); \quad S_{GHK} = S_{GHK} \quad (6).$$

Cộng theo vế các đẳng thức (3), (4), (5) và (6), ta được :

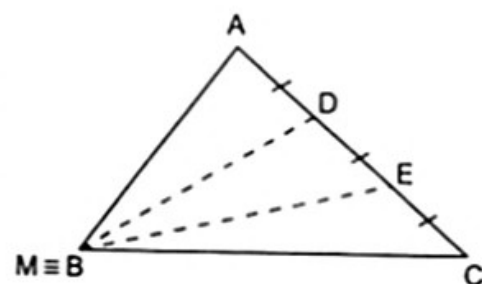
$$S_{AGE} + S_{KCE} + S_{ACH} + S_{GHK} = S_{BDG} + S_{BKF} + S_{FHD} + S_{GHK}, \text{ hay } S_{ACE} = S_{BDF}.$$

6. Trường hợp 1 (hình 257a) $M \equiv B$ hoặc C ;

Chia AC thành ba phần bằng nhau bằng cách :

Trên cạnh AC lấy hai điểm D, E sao cho :

$AD = DE = EC$ thì BD và BE là hai đường thẳng cần tìm (trường hợp $M \equiv C$ làm tương tự).



Hình 257a

Trường hợp 2 (hình 257b) $M \neq B$ và $M \neq C$;

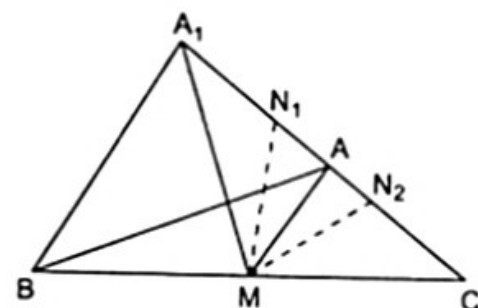
Qua B kẻ một đường thẳng song song với AM cắt AC tại A_1 .

Chia A_1C ra ba phần bằng nhau bằng cách :

Trên A_1C lấy hai điểm N_1, N_2 sao cho :

$$A_1N_1 = N_1N_2 = N_2C.$$

Khi $S_{ABM} > \frac{1}{2} S_{ABC}$ thì MN_1, MN_2 là hai đường thẳng cần tìm.



Hình 257b

Nếu $N_1 \notin AC$, kẻ $N_1K \parallel AM$ thì $S_{N_1AK} = S_{AKM} \Rightarrow S_{AKMN_2} = S_{MN_2C}$.

7. (hình 258) Qua A, B kẻ các đường thẳng theo thứ tự song song với ED, EC cắt đường thẳng CD lần lượt ở M và N. Khi đó khoảng cách từ A và M đến DE bằng nhau, từ B và N đến EC bằng nhau.

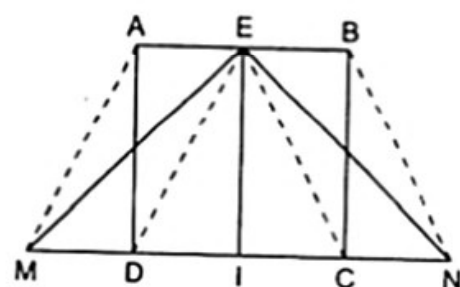
Ta có $S_{DEM} = S_{DEA}, S_{CEN} = S_{CEB}$, nên :

$$S_{ABCD} = S_{EMN}.$$

Bài toán trở thành :

Từ E kẻ một đường thẳng chia tam giác EMN thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Do đó trung tuyến EI là đường thẳng cần dựng.



Hình 258

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Chủ đề 1

ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

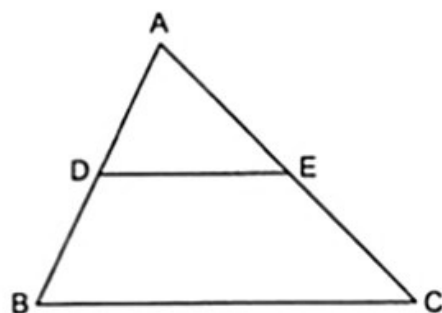
1. Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng đơn vị đo (tỉ số này không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo).

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ hay $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

3. Định lý Ta-lét trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Hình 259

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle ABC \\ DE // BC \end{array} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \frac{DB}{BA} = \frac{EC}{CA}, \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \right.$$

4. Nhớ lại tỉ lệ thức và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

a) Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

b) Tính chất

Tính chất 1 (Tính chất cơ bản của tỉ lệ thức): Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$.

Tính chất 2: Nếu $ad = bc$ và $abcd \neq 0$ thì ta có bốn tỉ lệ thức sau:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

c) Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

Từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, suy ra : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$.

5. Từ định lý Ta-lét ta thu được kinh nghiệm thứ năm

Cứ nói đến tỉ số của hai đoạn thẳng phải nghĩ đến định lý Ta-lét, cứ nói đến định lý Ta-lét phải nghĩ đến đường thẳng song song.

Ý nghĩa của kinh nghiệm này là : Với các bài toán đề cập đến tỉ số của hai đoạn thẳng mà phải vẽ thêm đường phụ, ta vẽ thêm đường thẳng song song để sử dụng định lý Ta-lét.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG 1. *Tính tỉ số hai đoạn thẳng. Chia đoạn thẳng theo tỉ số cho trước*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng định nghĩa tỉ số của hai đoạn thẳng.
- Một điểm C thuộc đoạn thẳng AB (hoặc đường thẳng AB), được gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{m}{n} \neq 1$ (m, n là các số dương), nếu ta có : $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$.
- Sử dụng kĩ thuật đại số hoá hình học :

Nếu ta có : $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$ thì $\begin{cases} CA = mt \\ CB = nt \end{cases}$ (với $t > 0$).

- Lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng tỉ lệ rồi áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

II. VÍ DỤ

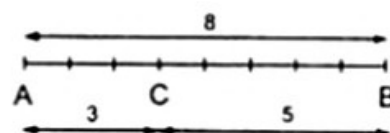
Ví dụ 1. Điểm C thuộc đoạn AB và chia AB theo tỉ số $\frac{3}{5}$. Hãy tính các tỉ số :

$$\frac{AB}{AC}; \frac{AB}{CB}.$$

Lời giải (hình 260)

Vì C chia đoạn AB theo tỉ số $\frac{3}{5}$ nên :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} CA = 3t \\ CB = 5t \end{cases} \text{ với } t > 0;$$



Hình 260

Do đó $AB = AC + CB = 8t$. Vậy $\frac{AB}{AC} = \frac{8t}{3t} = \frac{8}{3}$, $\frac{AB}{CB} = \frac{8t}{5t} = \frac{8}{5}$.

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng $AB = 10\text{cm}$.

- a) Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2}$. Tính độ dài CB.
- b) Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}$. Tính độ dài CD.

Lời giải (hình 261)

a) *Cách 1* : Từ giả thiết :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} CA = 3t \\ CB = 2t \end{cases} \text{ với } t > 0;$$



Hình 261

Nên $AB = 10\text{cm} = CA + CB = 5t \Leftrightarrow t = 2\text{cm}$. Vậy $CB = 4\text{cm}$.

Cách 2 : Từ giả thiết $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{CA}{3} = \frac{CB}{2} = \frac{CA + CB}{3 + 2} = \frac{AB}{5} = \frac{10}{5} = 2$.

Vậy $CB = 4(\text{cm})$.

Cách 3 : Đặt $CB = x$ thì $CA = 10 - x$.

Từ giả thiết và tính chất cơ bản của tỉ lệ thức ta có $3CB = 2CA$ hay

$$3x = 2(10 - x) \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = 4(\text{cm}).$$

b) Từ giả thiết $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} DA = 3t \\ DB = 2t. \end{cases}$

Mặt khác D thuộc tia đối của tia BA nên $DA > DB$.

Do đó $AB = 10\text{cm} = DA - DB = 3t - 2t \Leftrightarrow t = 10\text{cm}$, suy ra $DB = 20\text{cm}$.

Vậy $CD = 20 + 4 = 24(\text{cm})$.

Ví dụ 3. Đoạn thẳng $AB = 44\text{dm}$ được chia thành các đoạn thẳng liên tiếp AM, MN, NP và PB lần lượt tỉ lệ với 10, 2, 3 và 5.

a) Tính độ dài mỗi đoạn thẳng đó.

b) Chứng minh rằng hai điểm M và P chia đoạn AN theo cùng một tỉ số k và tính k .

c) Còn hai điểm nào chia đoạn thẳng nào theo cùng một tỉ số nữa không ?

Lời giải

a) Từ giả thiết và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{AM}{10} = \frac{MN}{2} = \frac{NP}{3} = \frac{PB}{5} = \frac{AM + MN + NP + PB}{10 + 2 + 3 + 5} = \frac{44}{20} = 2,2.$$

Vậy $AM = 22\text{dm}$, $MN = 4,4\text{cm}$, $NP = 6,6\text{cm}$, $PB = 11\text{dm}$.

b) Từ câu a) ta có $\frac{MA}{MN} = \frac{22}{4,4} = 5$; $\frac{PA}{PN} = \frac{33}{6,6} = 5$.

Điều này chứng tỏ M và P chia đoạn AN theo cùng một tỉ số $k = 5$.

c) Vì $\frac{AM}{AP} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$, $\frac{NM}{NP} = \frac{4,4}{6,6} = \frac{2}{3}$;

Nên còn hai điểm A và N chia đoạn MP theo cùng một tỉ số $\frac{2}{3}$.

III. BÀI TẬP

1. Một điểm C thuộc đoạn AB chia AB theo tỉ số $\frac{2}{3}$. Hãy tính các tỉ số $\frac{AC}{AB}$, $\frac{CB}{AB}$.
2. Cho đoạn thẳng $AB = 3\text{cm}$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $DA : DB = 3 : 2$. Tính AD, BD .
3. Hãy chia đoạn thẳng dài 12dm thành ba phần x, y, z tỉ lệ với 2, 3, 4.
4. Hãy chia đoạn thẳng dài 7dm thành ba phần x, y, z sao cho $15x = 10y = 8z$.

DẠNG 2. Tính độ dài đoạn thẳng, dựng đoạn thẳng tỉ lệ thứ tư

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tính độ dài đoạn thẳng :

- Áp dụng định lí Ta-lét để lập hệ thức của các đoạn thẳng tỉ lệ.
- Xác định đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.
- Thay số vào hệ thức rồi giải phương trình.

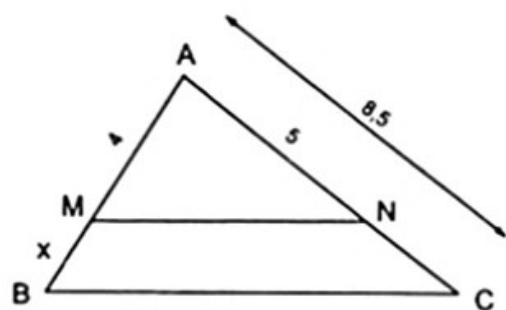
2. Trong bốn đoạn thẳng tỉ lệ, dựng đoạn thẳng thứ tư khi biết độ dài của ba đoạn kia :

- Đặt ba đoạn thẳng trên hai cạnh của một góc.
- Dựng đường thẳng song song để xác định đoạn thẳng thứ tư.

II. VÍ DỤ

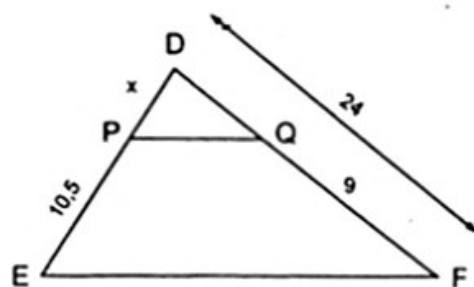
Ví dụ 1. Tính x trong các trường hợp sau (h. 262), biết rằng các số trên hình có cùng đơn vị đo là cm.

Lời giải (hình 262)



a) $MN \parallel BC$

Hình 262



b) $PQ \parallel EF$

a) Áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle ABC$ có $MN \parallel BC$, ta được :

$$\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA} \text{ hay } \frac{x}{4} = \frac{8,5 - 5}{5} \Leftrightarrow x = \frac{4 \cdot 3,5}{5} = 2,8.$$

b) Áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle DFE$ có $PQ \parallel EF$, ta được :

$$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \text{ hay } \frac{x}{10,5} = \frac{24 - 9}{9} \Leftrightarrow x = \frac{10,5 \cdot 15}{9} = 17,5.$$

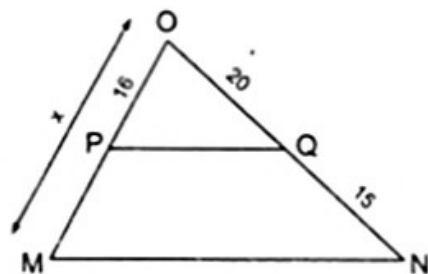
Ví dụ 2. Tính x trên hình 263.

Lời giải (hình 263)

Áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle OMN$ có $PQ \parallel MN$, ta

$$\text{được: } \frac{MP}{PO} = \frac{NQ}{QO} \text{ hay } \frac{x-16}{16} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - 16 = 12 \Leftrightarrow x = 28.$$

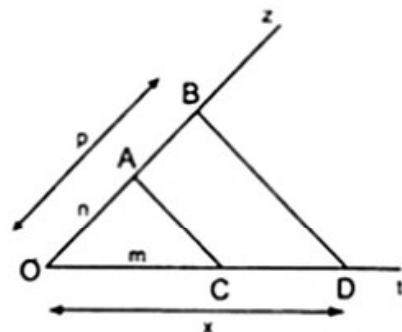


Hình 263

Ví dụ 3. Cho ba đoạn thẳng có độ dài là m, n, p (cùng đơn vị đo). Hãy dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho $\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$.

Lời giải (hình 264)

- Vẽ góc $\angle Ot$ bất kì.
- Trên tia Oz đặt các đoạn $OA = n, OB = p$.
- Trên tia Ot đặt $OC = m$.
- Vẽ $BD \parallel AC$ thì $OD = x$ là đoạn thẳng cần dựng.



Hình 264

Thật vậy, áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle OBD$ có $AC \parallel BD$, ta được :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \text{ hay } \frac{m}{x} = \frac{n}{p}.$$

III. BÀI TẬP

5. Trên một cạnh của một góc đỉnh A, đặt liên tiếp các đoạn thẳng $AB = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$. Trên cạnh thứ hai đặt đoạn $AD = 7,5\text{cm}$, qua C vẽ đường thẳng song song với BD cắt cạnh thứ hai ở M. Tính độ dài của DM.
6. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Một đường thẳng song song với hai đáy, cắt các cạnh bên AD và BC lần lượt ở E và F. Tính FC, biết $AE = 3\text{cm}$, $ED = 4\text{cm}$, $BF = 6\text{cm}$.

DẠNG 3. Chứng minh các hệ thức hình học

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.
2. Áp dụng định lí Ta-lét để lập hệ thức của các đoạn thẳng tỉ lệ.
3. Sử dụng các tính chất của tỉ lệ thức hoặc cộng theo vế các đẳng thức hình học.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Một đường thẳng song song với hai đáy, cắt các cạnh bên AD và BC theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng :

$$a) \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

$$b) \frac{AM}{AD} + \frac{CN}{CB} = 1.$$

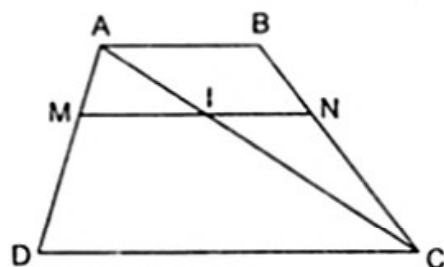
Lời giải (hình 265)

a) Gọi I là giao điểm của đường chéo AC với MN.

Áp dụng định lý Ta-lét vào hai tam giác ACD và ACB có $MI \parallel CD$, $IN \parallel AB$, ta được :

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AI}{IC} \quad (1); \quad \frac{BN}{NC} = \frac{AI}{IC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$.



Hình 265

b) Áp dụng định lý Ta-lét vào hai tam giác ACD và ACB ta có $MI \parallel CD$,

$IN \parallel AB$ ta được $\frac{AM}{AD} = \frac{AI}{AC} \quad (3); \quad \frac{CN}{CB} = \frac{CI}{CA} \quad (4).$

Cộng theo vế các đẳng thức (3) và (4), thu được :

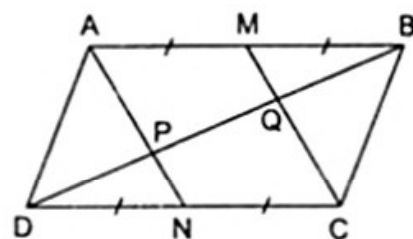
$$\frac{AM}{AD} + \frac{CN}{CB} = \frac{AI + CI}{CA} = \frac{CA}{CA} = 1.$$

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi P, Q thứ tự là giao điểm của AN và CM với đường chéo BD. Chứng minh rằng : $DP = PQ = QB$.

Lời giải (hình 266)

Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình bình hành ABCD, ta được :

$$AM = NC, AM \parallel NC.$$



Hình 266

Tứ giác AMCN có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành, do đó $MC \parallel AN$, suy ra $MQ \parallel AP$, $PN \parallel QC$.

Áp dụng định lý Ta-lét vào hai tam giác APB và DQC có $MQ \parallel AP$, $PN \parallel QC$,

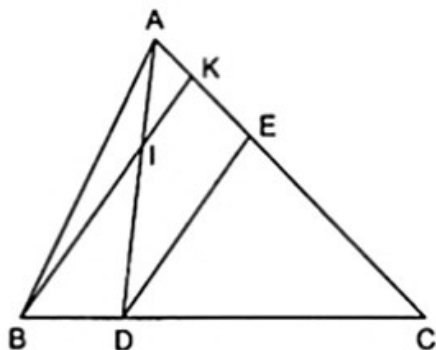
ta được : $\frac{BQ}{QP} = \frac{BM}{MA} = 1 \Rightarrow BQ = QP \quad (1).$

Lời giải (hình 267)

Kẻ thêm $DE \parallel BK$ thì $DE \parallel IK$.

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác ADE có $IK \parallel DE$, ta được :

$$\frac{AK}{KE} = \frac{AI}{ID} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} AK = 1t \\ KE = 2t \end{cases} \text{ (với } t > 0 \text{)} ;$$



Hình 267

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác BCK có $DE \parallel BK$, ta được :

$$\frac{KC}{KE} = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{1} \Rightarrow KC = 4KE = 8t. \text{ Vậy } \frac{AK}{KC} = \frac{1t}{8t} = \frac{1}{8}.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BC = 2BD$.

Trên đoạn AD lấy điểm O sao cho $\frac{AO}{OD} = \frac{3}{2}$. Gọi I là giao điểm của CO và AB.

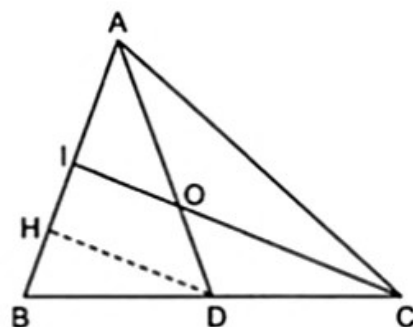
AB. Tính tỉ số $\frac{AI}{IB}$.

Lời giải (hình 268)

Kẻ thêm $DH \parallel CI$ thì $DH \parallel IO$.

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác ADH có $DH \parallel IO$, ta được :

$$\frac{AI}{IH} = \frac{AO}{OD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} AI = 3t \\ IH = 2t \end{cases} \text{ (với } t > 0 \text{)} ;$$



Hình 268

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác BIC có $DH \parallel IC$, ta được :

$$\frac{BI}{IH} = \frac{BC}{CD} = \frac{2}{1} \Rightarrow BI = 2IH = 2.2t = 4t. \text{ Vậy } \frac{AI}{IB} = \frac{3t}{4t} = \frac{3}{4}.$$

III. BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và D là giao điểm của BI với AC. Tính tỉ số $\frac{AD}{DC}$.
- Cho tam giác ABC, trung tuyến AD. Trên đoạn AD lấy điểm I sao cho $\frac{AI}{ID} = \frac{3}{4}$, gọi M là giao điểm của CI và AB. Tính tỉ số $\frac{AM}{MB}$.

Chủ đề 2

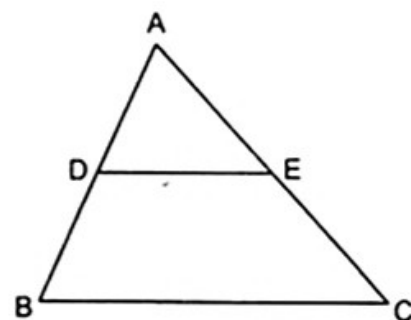
ĐỊNH LÝ ĐÀO VÀ HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ TA-LÉT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lý Ta-lét đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

$$\begin{cases} \triangle ABC \\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \end{cases} \Rightarrow DE \parallel BC.$$



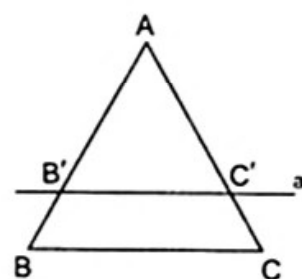
Hình 269

2. Hệ quả của định lý Ta-lét

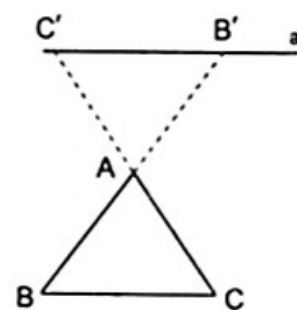
Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

$$\begin{cases} \triangle ABC \\ BC \parallel B'C' \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Chú ý : Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.



Hình 270a



Hình 270b

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG 1. *Tính độ dài đoạn thẳng. Chia đoạn thẳng cho trước thành các phần bằng nhau*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tính độ dài đoạn thẳng :

Xác định đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét để lập tỉ lệ thức của các đoạn thẳng.

Thay số vào hệ thức rồi giải phương trình.

2. Chia đoạn thẳng cho trước thành các phần bằng nhau bằng cách sử dụng hệ quả của định lý Ta-lét hoặc tính chất của đường thẳng song song cách đều.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính các độ dài x, y trong hình 271.

Lời giải

a) Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $DE \parallel BC$,

$$\text{ta được: } \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} \text{ hay } \frac{x}{8} = \frac{28,5}{9,5}$$

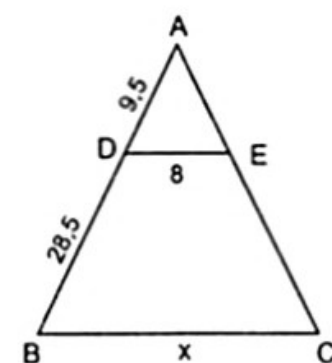
$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 28,5}{9,5} = \frac{456}{19} \approx 31,58.$$

b) Từ hình 271b ta thấy $A'B' \parallel AB$ vì cùng vuông góc với AA' .

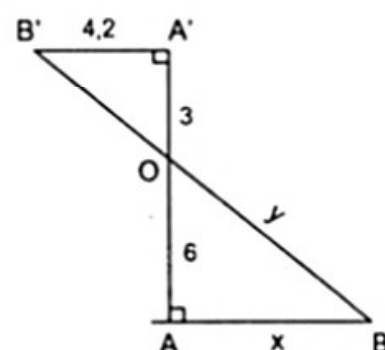
Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho

$$A'B' \parallel AB, \text{ ta được: } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O} \text{ hay } \frac{x}{4,2} = \frac{6}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 4,2 \cdot 2 = 8,4.$$



Hình 271a



Hình 271b

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác OAB vuông ở A, ta được:

$$OB^2 = BA^2 + AO^2 \text{ hay } y^2 = 8,4^2 + 6^2 = 106,06 \Rightarrow y \approx 10,32.$$

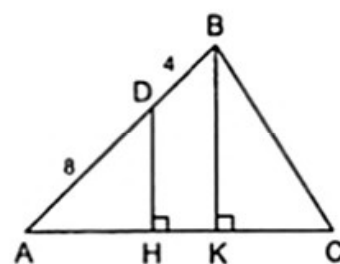
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = 8\text{cm}$ và $DB = 4\text{cm}$. Tính tỉ số khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC.

Lời giải (hình 272)

Kẻ DH và BK cùng vuông góc với AC thì $DH \parallel BK$ và DH, BK lần lượt là khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $DH \parallel BK$ thu

$$\text{được } \frac{DH}{BK} = \frac{AD}{AB} \text{ hay } \frac{DH}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$



Hình 272

Ví dụ 3. Hãy chia đoạn AB cho trước thành 5 đoạn bằng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chia như vậy? Hãy nêu rõ cách làm.

Lời giải (hình 273)

Có hai cách chia một đoạn AB cho trước thành 5 phần bằng nhau.

Cách 1 : Sử dụng hệ quả của định lý Ta-lét.

Kẻ đường thẳng $a \parallel AB$.

Từ điểm C bất kì trên a , đặt liên tiếp các đoạn thẳng bằng nhau :

$$CD = DE = EF = FG = GH.$$

Gọi O là giao điểm của AH và BC.

Vẽ các đường thẳng DO, EO, FO, GO cắt AB theo thứ tự ở I, K, L, M thì các điểm này chia đoạn AB thành 5 phần bằng nhau. Thật vậy :

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $CD \parallel MB$, $GH \parallel AI$, ta được :

$$\frac{CO}{OB} = \frac{CD}{MB} = \frac{HO}{OA} = \frac{HG}{AI}$$

$$\Rightarrow MB = AI \text{ do } CD = GH.$$

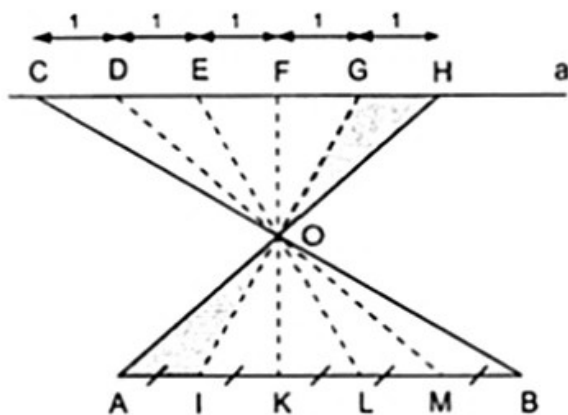
Chứng minh tương tự, ta được : $AI = IK = KL = LM = MB$.

Cách 2 : Sử dụng tính chất của đường thẳng song song cách đều.

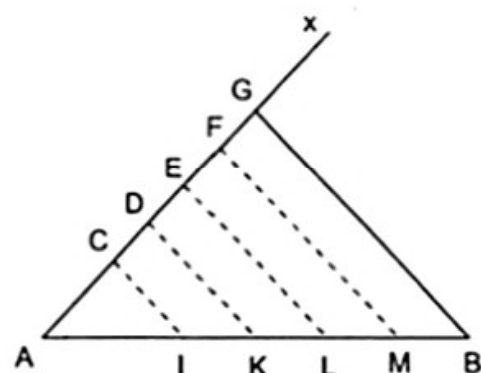
Kẻ tia Ax, trên đó đặt liên tiếp các đoạn thẳng bằng nhau :

$$CD = DE = EF = FG = GH.$$

Nối GB. Từ C, D, E, F kẻ các đường thẳng song song với GB, chúng cắt AB lần lượt ở I, K, L, M thì CI, DK, EL, FM, GB là năm đường thẳng song song cách đều nên chúng chắn trên đường thẳng AB những đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau là $AI = IK = KL = LM = MB$.



Hình 273a



Hình 273b

III. BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC vuông ở A, $BC = 13\text{cm}$, trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = 5\text{cm}$ và $DC = 7\text{cm}$. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt BD ở E. Tính độ dài CE.
- Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có O là giao điểm của AC và BD. Biết $\frac{AO}{AC} = \frac{1}{3}$, $CD = 6\text{cm}$. Tính độ dài AB.

3. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm AD và BC. Tính độ dài OA, biết $AB = 4\text{cm}$, $CD = 10\text{cm}$, $AD = 3\text{cm}$.
4. Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh CD lấy điểm E sao cho $\frac{DE}{DC} = \frac{1}{4}$. Gọi I là giao điểm của AE và BD. Tính tỉ số $\frac{DI}{DB}$.
5. Cho tam giác ABC có $AB = 2\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$, đường phân giác AD. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở E. Tính độ dài AE.
6. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có O là giao điểm của AC và BD. Qua O kẻ đường thẳng song song với hai đáy cắt AD, BC lần lượt ở M và N. Tính độ dài MN, biết $AB = 4\text{cm}$, $CD = 6\text{cm}$.

DẠNG 2. Chứng minh hệ thức hình học

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Xác định đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.
- Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét để lập tỉ lệ thức của các đoạn thẳng.
- Sử dụng các tính chất của tỉ lệ thức hoặc cộng hay nhân theo vế các đẳng thức hình học.

II. VÍ DỤ

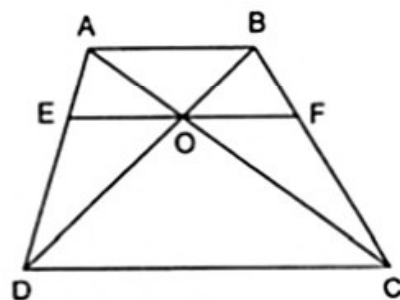
Ví dụ 1. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có O là giao điểm của hai đường chéo. Đường thẳng qua O song song với hai đáy cắt AD, BC lần lượt ở E và F. Chứng minh rằng $OE = OF$.

Lời giải (hình 274)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $EO \parallel DC$, $OF \parallel DC$ và $AB \parallel DC$, ta được :

$$\begin{cases} \frac{EO}{DC} = \frac{AO}{AC} \\ \frac{OF}{DC} = \frac{BO}{BD} \end{cases} \Rightarrow \frac{EO}{DC} = \frac{OF}{DC} \Rightarrow EO = OF.$$

$$\begin{cases} \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD} \end{cases}$$



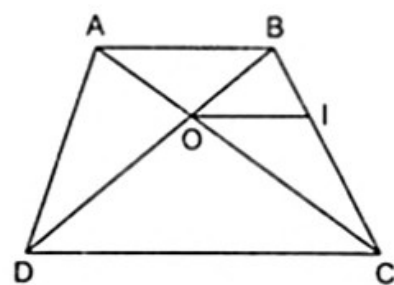
Hình 274

Ví dụ 2. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Một đường thẳng qua giao điểm O của hai đường chéo và song song với hai đáy, cắt BC ở I. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OI}$.

Lời giải (hình 275)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $OI \parallel AB$, $OI \parallel DC$, ta được :

$$\frac{OI}{AB} = \frac{CI}{CB} \quad (1); \quad \frac{OI}{DC} = \frac{BI}{BC} \quad (2).$$



Hình 275

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$\frac{OI}{AB} + \frac{OI}{DC} = \frac{BI + IC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OI}.$$

Ví dụ 3. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB \neq CD$) có O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng IO cắt AB và CD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD. Có nhận xét gì về kết quả của bài toán ?

Lời giải (hình 276)

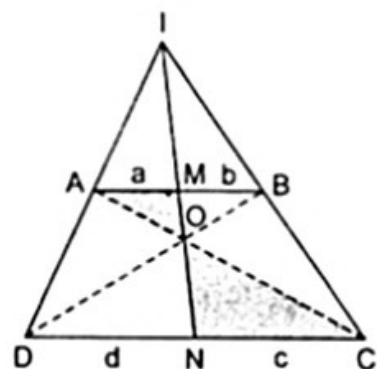
Đặt $AM = a$, $MB = b$, $DN = c$, $NC = d$.

Ta phải chứng minh $a = b$, $c = d$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AM \parallel CN$, $MB \parallel ND$ và $AM \parallel DN$, $MB \parallel NC$, ta được :

$$\begin{cases} \frac{AM}{CN} = \frac{MO}{ON} \\ \frac{MB}{ND} = \frac{MO}{ON} \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{CN} = \frac{MB}{ND}, \text{ hay } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1);$$

$$\begin{cases} \frac{AM}{DN} = \frac{IM}{IN} \\ \frac{MB}{NC} = \frac{IM}{IN} \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{MB}{NC}, \text{ hay } \frac{a}{d} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{c} \quad (2).$$



Hình 276

Nhân theo vế các đẳng thức (1) và (2) ta được $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{cd}{cd} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$.

Thay $a = b$ vào (1) ta được $c = d$.

Nhận xét : Trong một hình thang có hai đáy không bằng nhau thì giao điểm của hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy là bốn điểm thẳng hàng.

Đây chính là nội dung của : *Bổ đề về hình thang*.

III. BÀI TẬP

7. Cho tứ giác ABCD có các góc vuông B và D. Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ một điểm M bất kì trên đường chéo AC đến các cạnh BC và AD. Chứng minh rằng $\frac{MH}{AB} + \frac{MK}{CD} = 1$.
8. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Một đường thẳng song song với hai đáy cắt các cạnh bên và các đường chéo AD, BD, AC và BC theo thứ tự tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng $MN = PQ$.
9. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy một điểm D, gọi I là giao điểm của AM và BD. Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt BD ở K. Chứng minh rằng $IB^2 = ID \cdot IK$.
10. (*Bổ đề về diện tích*) Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E thì ta có tỉ số $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$.

DẠNG 3. Chứng minh hai đường thẳng song song

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng định lý Ta-lét, lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng.
- Áp dụng định lý Ta-lét đảo, kết luận hai đường thẳng song song.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên đường chéo AC của hình bình hành ABCD lấy một điểm I. Qua I kẻ hai đường thẳng bất kì sao cho đường thứ nhất cắt AB, CD lần lượt

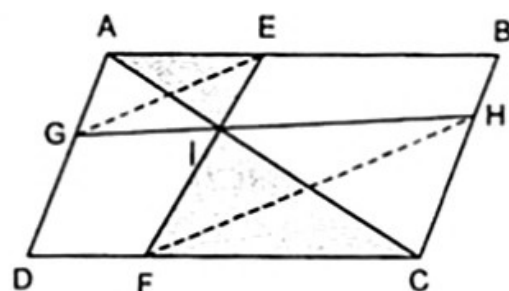
ở E và F, đường thẳng thứ hai cắt AD, BC theo thứ tự ở G và H. Chứng minh rằng $GE \parallel FH$.

Lời giải (hình 277)

ABCD là hình bình hành nên $AB \parallel CD$ và $AD \parallel BC$, suy ra $AE \parallel FC$, $AG \parallel HC$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AE \parallel FC$ và $AG \parallel HC$, ta được :

$$\begin{cases} \frac{EI}{IF} = \frac{AI}{IC} \\ \frac{GI}{IH} = \frac{AI}{IC} \end{cases} \Rightarrow \frac{EI}{IF} = \frac{GI}{IH}.$$



Hình 277

Điều này chứng tỏ đường thẳng EG cắt hai cạnh IF, IH của tam giác IHF và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, nên $EG \parallel HF$ (theo định lý Ta-lét đảo).

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt BD ở E. Đường thẳng qua B và song song với AD cắt AC ở G. Chứng minh rằng $EG \parallel CD$.

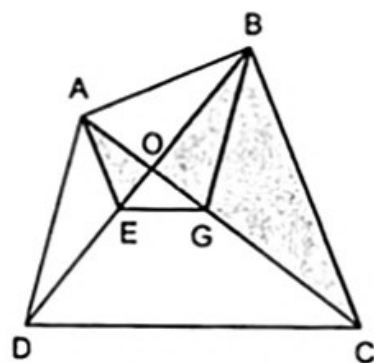
Lời giải (hình 278)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AE \parallel BC$ và $BG \parallel AD$, ta được :

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \quad (1); \quad \frac{OB}{OD} = \frac{OG}{OA} \quad (2).$$

Nhân theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$\frac{OE}{OB} \cdot \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OG}{OA} \Rightarrow \frac{OE}{OD} = \frac{OG}{OC}.$$



Hình 278

Điều này chứng tỏ đường thẳng EG cắt hai cạnh OD, OC của tam giác OCD và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ nên $EG \parallel DC$ (theo định lý Ta-lét đảo).

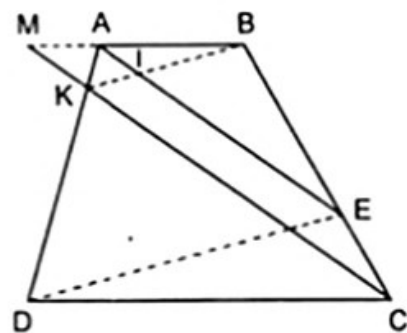
Ví dụ 3. Cho hình thang ABCD và điểm E trên cạnh bên BC. Qua C vẽ đường thẳng song song với AE cắt AD ở K. Chứng minh rằng $BK \parallel DE$.

Lời giải (hình 279)

Gọi I, M lần lượt là giao điểm của AE với BK và CK với AB.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AI \parallel MK$ và $IE \parallel KC$, thu được :

$$\begin{cases} \frac{AI}{MK} = \frac{BI}{BK} \\ \frac{BI}{BK} = \frac{IE}{KC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AI}{MK} = \frac{IE}{KC} \Rightarrow \frac{AI}{IE} = \frac{MK}{KC} \quad (1).$$



Hình 279

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho $MA \parallel DC$, ta được: $\frac{MK}{KC} = \frac{AK}{KD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AI}{IE} = \frac{AK}{KD}$. Điều này chứng tỏ đường thẳng KI cắt hai cạnh AD, AE của tam giác ADE và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ nên $KI \parallel DE$, hay $KB \parallel DE$ (theo định lí Ta-lét đảo).

III. BÀI TẬP

11. Cho tứ giác ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Đường thẳng qua O song song với BC cắt AB ở E. Đường thẳng qua O song song với CD cắt DA ở F. Chứng minh $FE \parallel DB$.
12. Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng qua giao điểm của hai đường chéo lần lượt cắt AB và CD ở M, N. Đường thẳng qua M song song với CD cắt AC ở E. Đường thẳng qua N song song với AB cắt BD ở F. Chứng minh rằng $BE \parallel CF$.
13. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lấy các điểm I và K. Vẽ $IM \parallel BK$ và $KN \parallel CI$ ($M \in AC, N \in AB$). Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.
- 14*. Cho tam giác ABC có các đường cao BD, CE. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm F và G sao cho $BD = BF, CE = CG$. Chứng minh rằng $FG \parallel BC$.

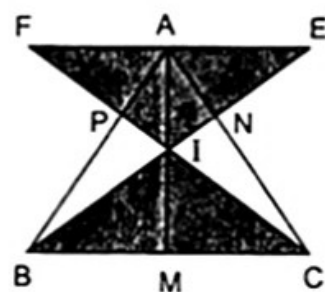
DẠNG 4*. *Vẽ thêm đường thẳng song song để chứng minh hệ thức hình học, tính tỉ số hai đoạn thẳng*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Vẽ thêm đường thẳng song song.
- Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét để lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng.
- Biến đổi tỉ lệ thức.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, I là một điểm trong tam giác. IA, IB, IC theo thứ tự cắt BC, CA, AB ở M, N, P. Chứng minh rằng $\frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$.



Hình 280

Lời giải (hình 280)

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC. Đường thẳng này cắt BN, CP lần lượt ở E và F.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AE \parallel BC$ và $FA \parallel BC$, ta được :

$$\frac{NA}{NC} = \frac{EA}{BC} \quad (1); \quad \frac{PA}{PB} = \frac{AF}{BC} \quad (2).$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được : $\frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, lấy $D \in AB, E \in AC$ sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.

Lời giải

Đặt $BD = CE = a$.

Cách 1 : (hình 281) Kẻ $DH \parallel AC$ thì $DH \parallel EC$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $DH \parallel EC$ và $DH \parallel AC$, ta được :

$$\frac{KE}{KD} = \frac{EC}{DH} = \frac{a}{DH} \quad (1);$$

$$\frac{DH}{AC} = \frac{BD}{BA} = \frac{a}{BA} \Rightarrow \frac{a}{DH} = \frac{AB}{AC} \quad (2).$$

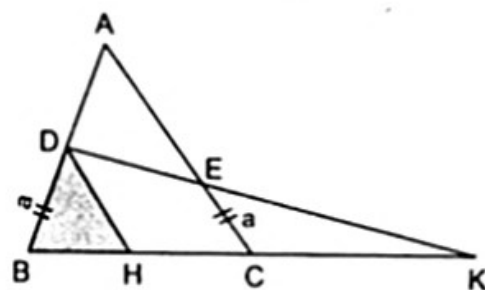
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.

Cách 2 : (hình 282)

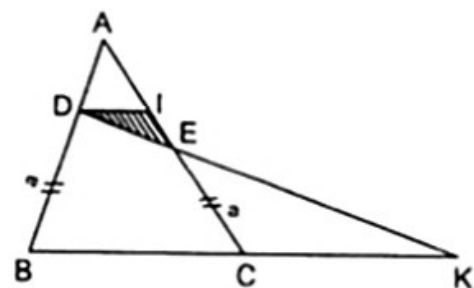
Kẻ $DI \parallel BC$ thì $DI \parallel CK$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $DI \parallel CK$ và $DI \parallel BC$, ta được :

$$\frac{KE}{KD} = \frac{CE}{CI} = \frac{a}{CI} \quad (3); \quad \frac{CI}{CA} = \frac{BD}{BA} = \frac{a}{BA} \Rightarrow \frac{BA}{CA} = \frac{a}{CI} \quad (4).$$



Hình 281



Hình 282

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.

Cách 3 : (hình 283)

Kẻ $EM \parallel AB$ thì $EM \parallel BD$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $EM \parallel BD$ và $EM \parallel AB$, ta được :

$$\frac{KE}{KD} = \frac{EM}{BD} = \frac{EM}{a} \quad (5); \quad \frac{CE}{CA} = \frac{EM}{AB} = \frac{a}{CA} \Rightarrow \frac{EM}{a} = \frac{AB}{CA} \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.

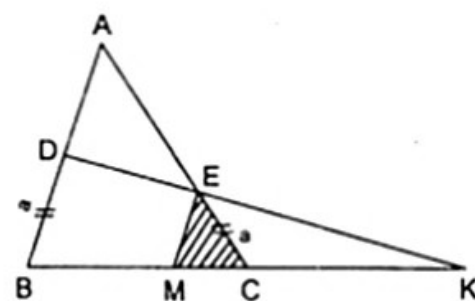
Cách 4 : (hình 284)

Kẻ $EN \parallel BC$ thì $EN \parallel BK$.

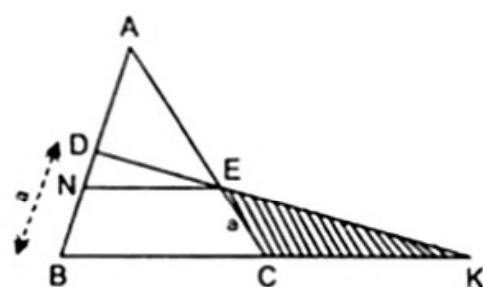
Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $EN \parallel BK$ và $EN \parallel BC$, ta được :

$$\frac{KE}{KD} = \frac{BN}{BD} = \frac{BN}{a} \quad (7); \quad \frac{BN}{BA} = \frac{CE}{CA} = \frac{a}{CA} \Rightarrow \frac{BN}{a} = \frac{BA}{CA} \quad (8).$$

Từ (7) và (8) suy ra $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.



Hình 283



Hình 284

III. BÀI TẬP

15. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC = 13\text{cm}$ và $BC = 10\text{cm}$. Trên cạnh AB đặt $AM = 5\text{cm}$. Tính khoảng cách từ M đến BC.
16. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $\frac{DB}{DA} = \frac{1}{2}, \frac{EA}{EC} = \frac{2}{3}$. Gọi F là giao điểm của ED và BC. Tính tỉ số $FB:FC$.
17. Cho hình thoi ABCD cạnh a. Qua đỉnh C kẻ một đường thẳng cắt các tia đối của các tia BA và DA lần lượt ở H và K. Chứng minh rằng $\frac{1}{AH} + \frac{1}{AK} = \frac{1}{a}$.
- 18*. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = CD$. Gọi I, K lần lượt là giao điểm của AC với DB và DE. Chứng minh rằng $\frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}$.

Chủ đề 3

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

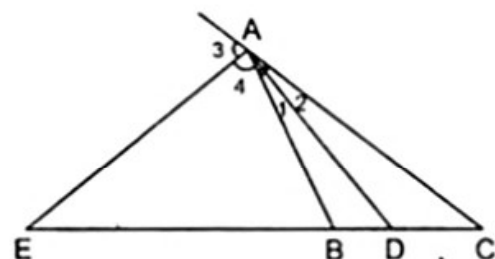
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lý: Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề với hai đoạn ấy.

$$\begin{cases} \triangle ABC \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{BA}{AC} \text{ hay } \frac{DB}{BA} = \frac{DC}{CA} = \frac{DB+DC}{BA+CA} = \frac{BC}{BA+CA}.$$

Chú ý: Định lý vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác.

$$\begin{cases} \triangle ABC \text{ (} AB \neq AC \text{)} \\ \widehat{A_3} = \widehat{A_4} \end{cases} \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{BA}{AC}.$$



Hình 285

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

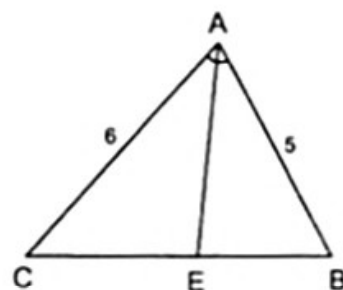
DẠNG 1. Tính độ dài đoạn thẳng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Áp dụng tính chất đường phân giác, lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng và sử dụng kỹ thuật đại số hoá hình học.
- Áp dụng định lý Py-ta-go.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có AB = 5cm, BC = 7cm và CA = 6cm. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC ở E. Tính các đoạn EB, EC.



Hình 286

Lời giải (hình 286)

Áp dụng tính chất của đường phân giác AD vào tam giác ABC và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{EB}{BA} = \frac{EC}{CA} = \frac{EB+EC}{BA+CA} = \frac{BC}{BA+CA}$, hay

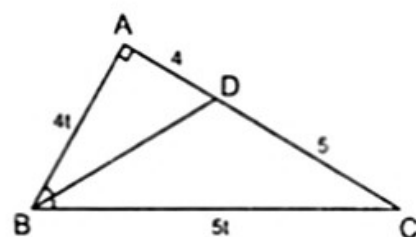
$$\frac{EB}{5} = \frac{EC}{6} = \frac{7}{11} \Rightarrow EB = \frac{35}{11} \text{ (cm); } EC = \frac{42}{11} \text{ (cm).}$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường phân giác BD. Tính AB, BC biết $AD = 4\text{cm}$ và $DC = 5\text{cm}$.

Lời giải (hình 287)

Áp dụng tính chất của đường phân giác BD vào tam giác ABC, ta được :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} AB = 4t \\ BC = 5t \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$



Hình 287

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABC vuông ở A, ta được :

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } (5t)^2 = 9^2 + (4t)^2$$

$$\Leftrightarrow (3t)^2 = 9^2 \Leftrightarrow 3t = 9 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (vì } t > 0).$$

Vậy $AB = 12(\text{cm})$; $BC = 15(\text{cm})$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $BC = 24\text{cm}$, $AC = 3AB$. Tia phân giác của góc ngoài tại A cắt đường thẳng BC ở E. Tính độ dài EB.

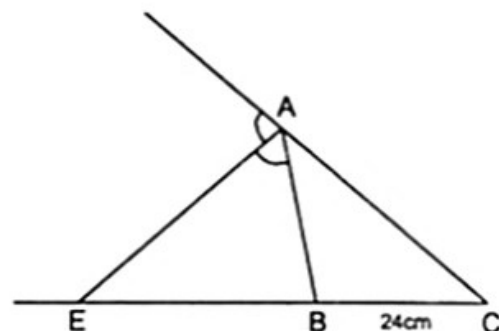
Lời giải (hình 288)

Áp dụng tính chất của đường phân giác ngoài AE vào tam giác ABC, ta được :

$$\frac{EB}{EC} = \frac{BA}{CA} = \frac{BA}{3BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EB}{1} = \frac{EC}{3}.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được :

$$\frac{EB}{1} = \frac{EC}{3} = \frac{EC - EB}{3 - 1} = \frac{BC}{2} = \frac{24}{2} = 12(\text{cm}). \text{ Vậy } EB = 12\text{cm}.$$



Hình 288

III. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường phân giác AD. Tính độ dài AB, AC biết $DB = 15\text{cm}$; $DC = 20\text{cm}$.
2. Cho tam giác ABC có $AB = 30\text{cm}$; $AC = 45\text{cm}$; $BC = 50\text{cm}$, đường phân giác AD. Tính các độ dài BD, DC.
3. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường phân giác BD. Tính độ dài BD, biết $AB = 6\text{cm}$; $BC = 10\text{cm}$.
4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH có $AB = 15\text{cm}$; $AC = 20\text{cm}$. Tia phân giác của góc HAB cắt HB ở D, tia phân giác của góc HAC cắt HC ở E. Tính độ dài của các đoạn AH, HD và HE.

DẠNG 2. Tính tỉ số độ dài, tỉ số diện tích hai tam giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Áp dụng tính chất đường phân giác, lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng.
- Sử dụng kĩ thuật đại số hoá hình học. Công thức và kết quả thu được từ công thức tính diện tích tam giác.

II. VÍ DỤ

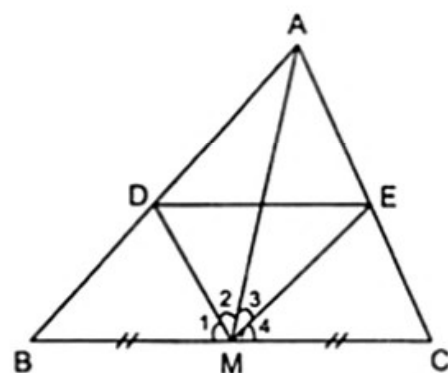
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM. Tia phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D, tia phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E. Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

Lời giải (hình 289)

Từ giả thiết AM là trung tuyến, đặt $BM = MC = a$.

Áp dụng tính chất của các đường phân giác MD và ME vào hai tam giác AMB và AMC, ta được :

$$\begin{cases} \frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{a} \\ \frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MC} = \frac{AM}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$



Hình 289

Điều này chứng tỏ đường thẳng DE cắt hai cạnh AB và AC của tam giác ABC và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, nên $DE \parallel BC$ (theo định lí Ta-lét đảo).

Ví dụ 2.

a) Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM và phân giác AD. Tính diện tích tam giác ADM biết $AB = m$, $AC = n$ ($n > m$).

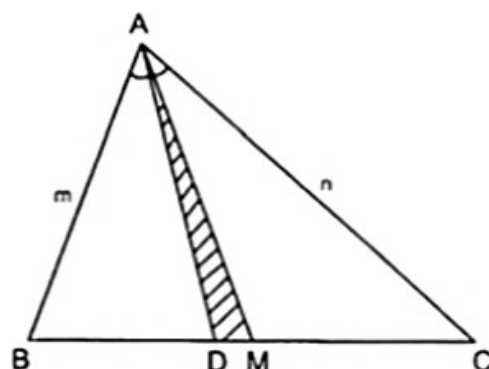
b) Cho $n = 7\text{cm}$, $m = 3\text{cm}$. Hỏi diện tích tam giác ADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích tam giác ABC ?

Lời giải (hình 290)

a) Ta có $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{DM}{BC}$ hay $S_{ADM} = \frac{DM}{BC} \cdot S$

(vì chung chiều cao kẻ từ A đến BC, với $S = S_{ABC}$).

Ta còn phải tính tỉ số $DM : BC$.



Hình 290

Áp dụng tính chất của đường phân giác AD vào tam giác ABC, ta được :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{BA}{CA} = \frac{m}{n} \Rightarrow \begin{cases} DB = mt \\ DC = nt \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$

$$\text{Do đó } BC = DB + DC = (m + n).t, \text{ nên : } BM = \frac{1}{2}BC = \frac{(m + n)t}{2}$$

$$\Rightarrow DM = BM - BD = \frac{(m + n)t - mt}{2} = \frac{(n - m)t}{2}.$$

$$\text{Suy ra tỉ số } DM : BC = \frac{(n - m)t}{2} : (m + n)t = \frac{n - m}{2(m + n)}.$$

$$\text{Vậy } S_{ADM} = \frac{n - m}{2(m + n)}.S.$$

$$\text{b) Với } n = 7\text{cm}, m = 3\text{cm} \text{ thì } S_{ADM} = \frac{7-3}{2(7+3)}.S = \frac{4.S}{20} = 0,20.S = 20\%S.$$

Điều này chứng tỏ diện tích tam giác ADM chiếm 20% diện tích tam giác ABC.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, các đường phân giác BD và CE. Biết $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$;

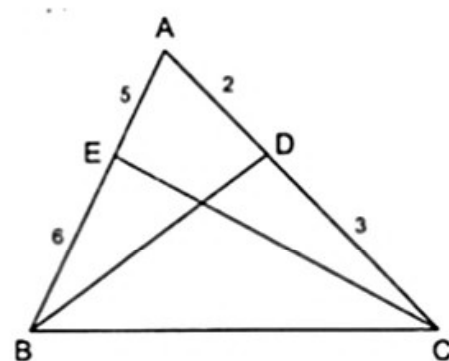
$$\frac{EA}{EB} = \frac{5}{6}. \text{ Tính các cạnh của tam giác ABC, biết chu vi tam giác bằng 45cm.}$$

Lời giải (hình 291)

Áp dụng tính chất của các đường phân giác BD và CE vào tam giác ABC, ta được :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \begin{cases} AB = 4t \\ BC = 6t \end{cases} \text{ (với } t > 0);$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB} = \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} AC = 5t \\ BC = 6t. \end{cases}$$



Hình 291

Từ giả thiết chu vi của tam giác ABC bằng 45cm, ta có :

$$45 = AB + BC + CA = 4t + 6t + 5t = 15t \Leftrightarrow t = 3.$$

Vậy $AB = 12$ (cm); $BC = 18$ (cm); $CA = 15$ (cm).

III. BÀI TẬP

5. Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$; $BC = 6\text{cm}$; $CA = 5\text{cm}$, các đường phân giác BD, CE cắt nhau ở I.

a) Tính các độ dài AD, DC.

b*) Tính tỉ số diện tích các tam giác DIE và ABC.

6*. Cho tam giác ABC có $AB = 8\text{cm}$; $AC = 12\text{cm}$, đường phân giác AD. Trên đoạn AD lấy điểm E sao cho $\frac{AE}{AD} = \frac{3}{5}$. Gọi K là giao điểm của BE và AC.

Tính tỉ số $\frac{AK}{KC}$.

7*. Cho tam giác ABC có $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau ở I. Chứng minh rằng :

a) $\frac{DI}{DA} = \frac{a}{a+b+c}$;

b) $\frac{DI}{DA} + \frac{EI}{EB} + \frac{FI}{FC} = 1$.

Chủ đề 4

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC THƯỜNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. KHÁI NIỆM HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Tam giác đồng dạng

a) Định nghĩa

Tam giác $A'B'C'$ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu chúng có ba cặp góc đối một bằng nhau và ba cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A}, \widehat{B'} = \widehat{B}, \widehat{C'} = \widehat{C} \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} \end{cases}$$

Khái niệm mới :

- Các cặp góc bằng nhau gọi là *các góc tương ứng* của hai tam giác đồng dạng.
- Các đỉnh của các góc bằng nhau gọi là *các đỉnh tương ứng*.
- Các cạnh đối diện với các góc bằng nhau gọi là *các cạnh tương ứng*.
- Tỉ số các cạnh tương ứng $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$ gọi là tỉ số đồng dạng.

b) Tính chất

Tính chất phản xạ : $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ với tỉ số đồng dạng $k = 1$.

Tính chất đối xứng : Nếu $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k_1 = \frac{A'B'}{AB}$

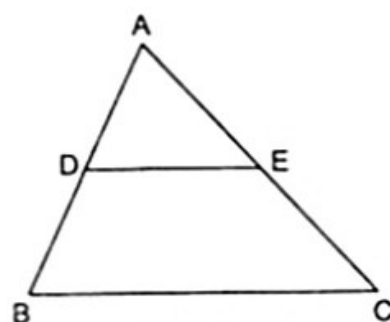
thì $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ theo tỉ số đồng dạng $k_2 = \frac{AB}{A'B'}$.

Tính chất bắc cầu : Nếu $\begin{cases} \triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C'' \\ \triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC \end{cases}$ thì $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

2. Định lí nhận biết hai tam giác đồng dạng

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

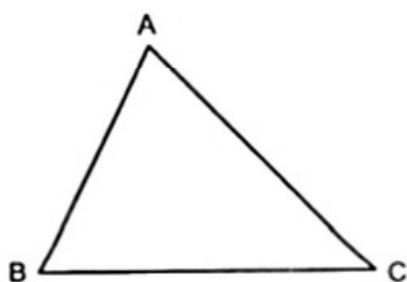
$$\begin{cases} \triangle ABC \\ DE // BC \end{cases} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$



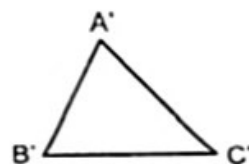
Hình 292

Chú ý : Định lí trên cũng đúng trong trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

II. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ NHẤT (C.C.C) .



a)



b)

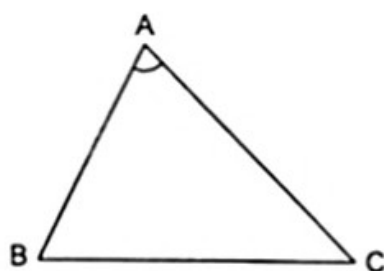
Hình 293

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng ($\triangle A'B'C'$ và $\triangle ABC$ có

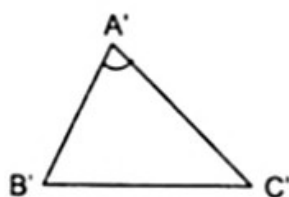
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} \text{ thì } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \text{ (c.c.c).}$$

Kết quả 1 : Hai tam giác đều bất kì luôn đồng dạng với nhau (c.c.c) .

III. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ HAI (C.G.C).



a)



b)

Hình 294

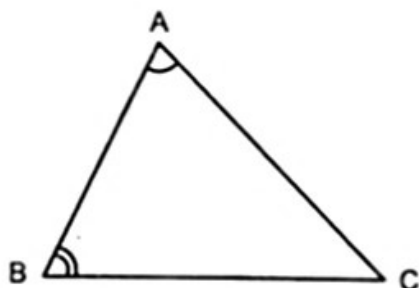
Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng (nếu

$$\Delta A'B'C' \text{ và } \Delta ABC \text{ có } \begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A} \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \end{cases} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \text{ (c.g.c).}$$

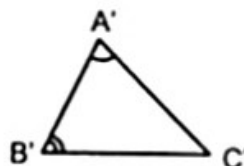
Kết quả 2 : Hai tam giác vuông cân bất kì luôn đồng dạng với nhau (c.c.c).

Kết quả 3 : Nếu góc ở đỉnh của tam giác cân này bằng góc ở đỉnh của tam giác cân kia thì hai tam giác cân đó đồng dạng với nhau (c.c.c).

IV. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ BA (G.G).



a)



b)

Hình 295

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau (nếu $\Delta A'B'C'$ và ΔABC có

$$\begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A} \\ \widehat{B'} = \widehat{B} \end{cases} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \text{ (g.g).}$$

Kết quả 4: Nếu góc ở đáy của tam giác cân này bằng góc ở đáy của tam giác cân kia thì hai tam giác cân đó đồng dạng với nhau (g.g) .

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG 1. Vẽ tam giác đồng dạng với tam giác cho trước. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ tam giác đồng dạng với tam giác cho trước.
 - Xác định tỉ số đồng dạng.
 - Kẻ đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.
2. Chứng minh hai tam giác đồng dạng.
 - Sử dụng định nghĩa hoặc định lí nhận biết hai tam giác đồng dạng.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Hãy vẽ tam giác đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số đồng dạng : a) $k = \frac{2}{3}$ b) $k = \frac{4}{3}$.

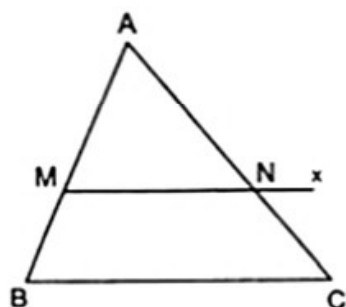
Lời giải (hình 296)

a) Giả sử đã vẽ được $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$, thế thì $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} = k$.

Từ đó suy ra cách vẽ gồm hai bước sau :

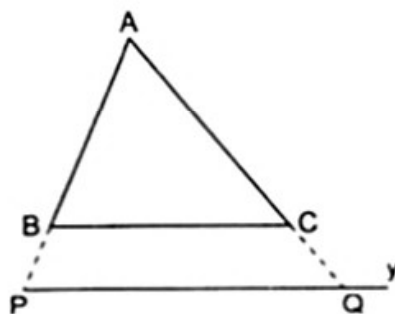
Bước 1 : Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.

Bước 2 : Kẻ $Mx \parallel BC$ cắt AC ở N.



a)

Hình 296



b)

Ta có $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$.

b) Giả sử đã vẽ được $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $k = \frac{4}{3}$ thế thì $\frac{AP}{AB} = \frac{4}{3} = k$.

Từ đó suy ra cách vẽ gồm hai bước sau :

Bước 1 : Trên tia AB lấy điểm P sao cho $\frac{AP}{AB} = \frac{4}{3}$;

Bước 2 : Kẻ $PQ \parallel BC$ cắt tia AC ở Q. Ta có $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

Ví dụ 2. Từ điểm M thuộc cạnh AB của tam giác ABC với $AM = \frac{1}{2}MB$, kẻ các tia $MN \parallel BC$ và $MP \parallel AC$.

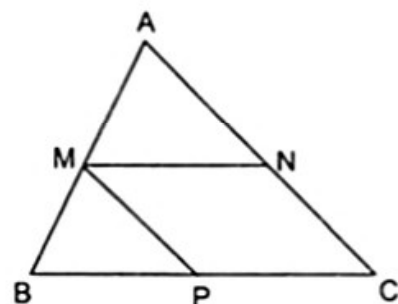
a) Hãy nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng.

b) Đối với mỗi cặp tam giác đồng dạng, hãy viết các cặp góc bằng nhau và tỉ số đồng dạng.

Lời giải (hình 297)

a) Có ba cặp tam giác đồng dạng là AMN và ABC, BMP và BAC, AMN và MBP.

b) Bạn đọc tự giải.



Hình 297

III. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC. Hãy vẽ một tam giác đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = 2$.

2. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = \frac{1}{3}AB$.

Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh rằng $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, tìm tỉ số đồng dạng?

DẠNG 2. Tính chất của hai tam giác đồng dạng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng định nghĩa và tính chất hai tam giác đồng dạng.
- Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ theo tỉ số đồng dạng k_1 , $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng k_2 . Hỏi $\Delta A''B''C'' \sim \Delta A'B'C'$ và $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ đồng dạng với nhau theo tỉ số nào?

Lời giải

Gọi tỉ số đồng dạng của $\Delta A''B''C'' \sim \Delta A'B'C'$ là k .

$$\text{Thì } k = \frac{A''B''}{A'B'} = \frac{1}{\frac{A'B'}{A''B''}} = \frac{1}{k_1}.$$

Điều này chứng tỏ $\Delta A''B''C'' \sim \Delta A'B'C'$ đồng dạng với nhau theo tỉ số $k = \frac{1}{k_1}$.

Gọi tỉ số đồng dạng của $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ là k_3 :

$$\text{Thì } k_1 = \frac{A'B'}{A''B''}, k_2 = \frac{A''B''}{AB} \text{ nên } k_3 = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{A''B''} \cdot \frac{A''B''}{AB} = k_1 \cdot k_2.$$

Điều này chứng tỏ $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ đồng dạng với nhau theo tỉ số $k_3 = k_1 \cdot k_2$.

Ví dụ 2. Cho tam giác $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$.

a) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.

b) Cho biết hiệu chu vi của hai tam giác trên là 40dm. Tính chu vi của hai tam giác đã cho.

Lời giải

Gọi chu vi của hai tam giác $\Delta A'B'C'$, ΔABC lần lượt là p' và p .

a) Từ giả thiết $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$ và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B' + B'C' + C'A'}{AB + BC + CA} = \frac{p'}{p} = \frac{3}{5}.$$

Điều này chứng tỏ tỉ số chu vi của hai tam giác là $k = \frac{3}{5}$.

b) Từ câu a) suy ra $\frac{p'}{3} = \frac{p}{5} = \frac{p-p'}{5-3} = \frac{40}{2} = 20 \Leftrightarrow p' = 60 \text{ (dm)}; p = 100 \text{ (dm)}.$

III. BÀI TẬP

3. Hai tam giác đồng dạng với nhau có bằng nhau hay không ? Vì sao ?
4. Cho $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ với tỉ số đồng dạng $k_1 = \frac{2}{3}$, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ với tỉ số đồng dạng $k_2 = \frac{3}{4}$.
- a) Vì sao $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$?
- b) Tìm tỉ số đồng dạng của hai tam giác đó.
5. Tam giác ABC có $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, và $CA = 6\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác đã cho nếu cạnh bé nhất của tam giác này bằng cạnh lớn nhất của tam giác đã cho.
6. Cho tam giác ABC có $AB = 16,2\text{cm}$, $BC = 24,3\text{cm}$, $CA = 32,7\text{cm}$.
Tính độ dài các cạnh của tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác đã cho nếu cạnh $A'B'$ tương ứng với cạnh AB và
- a) Lớn hơn cạnh đó $10,8\text{cm}$.
- b) Bé hơn cạnh đó $5,4\text{cm}$.

DẠNG 3. Nhận biết hai tam giác đồng dạng theo trường hợp thứ nhất (c.c.c). Chứng minh hai góc bằng nhau

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sắp thứ tự các cạnh của hai tam giác, từ nhỏ đến lớn.
- Lập ba tỉ số, nếu chúng bằng nhau thì kết luận.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các kích thước như trong hình 298.

- a) ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có đồng dạng với nhau không ? Vì sao ?
- b) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đó.

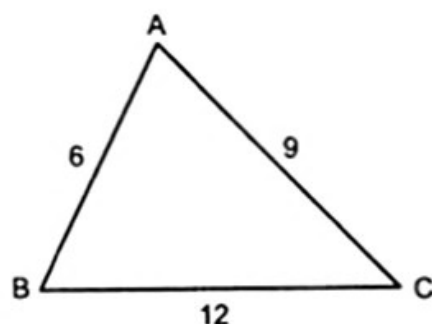
Lời giải (hình 298)

- a) Câu trả lời là có.

Giải thích : Sắp thứ tự các cạnh của $\triangle ABC$: 6, 9, 12.

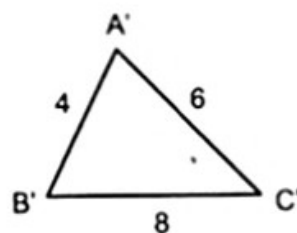
Sắp thứ tự các cạnh của $\triangle A'B'C'$: 4, 6, 8.

Ta thấy $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ nên $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (c.c.c).



a)

Hình 298



b)

b) Gọi chu vi các tam giác ABC và $A'B'C'$ lần lượt là p, p'.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau cho dãy tỉ số trên, ta được :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB + CA + BC}{A'B' + C'A' + B'C'} = \frac{p}{p'} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2. Tứ giác ABCD có AB = 2cm; BC = 6cm; CD = 8cm; DA = 3cm và BD = 4cm. Chứng minh rằng :

a) $\triangle BAD \sim \triangle DBC$;

b) Tứ giác ABCD là hình thang.

Lời giải (hình 299)

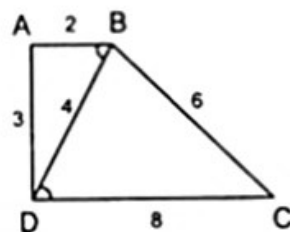
a) Sắp thứ tự các cạnh của $\triangle BAD$: 2, 3, 4.

Sắp thứ tự các cạnh của $\triangle DBC$: 4, 6, 8.

Ta thấy $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} (= \frac{1}{2})$ nên $\frac{BA}{DB} = \frac{AD}{BC} = \frac{DB}{CD} \Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle DBC$ (c.c.c).

b) Từ câu a) $\triangle BAD \sim \triangle DBC$ suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Rightarrow AB \parallel CD$.

Tứ giác ABCD có hai cạnh đối song song nên nó là hình thang.



Hình 299

III. BÀI TẬP

7. Hai tam giác mà các cạnh có độ dài như sau có đồng dạng không ?

a) 4cm; 5cm; 6cm và 8mm; 10mm; 12mm.

- b) 3cm; 4cm; 6cm và 9cm; 15cm; 18cm.
 c) 1dm; 2dm; 2dm và 1dm; 1dm; 0,5dm.
8. Cho tứ giác ABCD có $AB = 3\text{cm}$; $BC = 10\text{cm}$; $CD = 12\text{cm}$; $AD = 5\text{cm}$ và đường chéo $BD = 6\text{cm}$. Chứng minh rằng :
- a) $\triangle ABD \sim \triangle BDC$.
 b) Tứ giác ABCD là hình thang.

DẠNG 4. Nhận biết hai tam giác đồng dạng theo trường hợp thứ hai (c.c.c) để tính độ dài đoạn thẳng. Chứng minh hai góc bằng nhau

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Chọn ra hai góc bằng nhau, sắp thứ tự hai cạnh tạo nên mỗi góc đó.
- Lập hai tỉ số, nếu chúng bằng nhau thì kết luận.
- Từ định nghĩa tam giác đồng dạng suy ra tỉ số đồng dạng, các góc tương ứng bằng nhau.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên một cạnh của góc xOy ($Ox \neq Oy$) đặt các đoạn thẳng $OA = 5\text{cm}$, $OB = 16\text{cm}$. Trên cạnh thứ hai của góc đó, đặt các đoạn thẳng $OC = 8\text{cm}$, $OD = 10\text{cm}$.

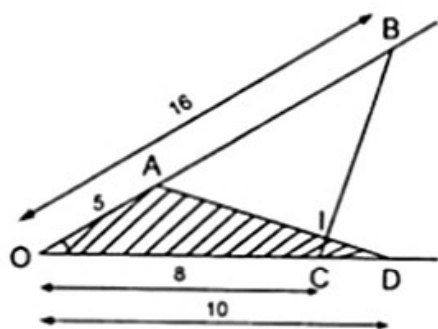
- a) Chứng minh $\triangle OCB \sim \triangle OAD$.
 b) Gọi I là giao điểm của các cạnh AD và BC. Chứng minh rằng $\triangle IAB$ và $\triangle ICD$ có các góc bằng nhau từng đôi một.

Lời giải (hình 300)

- a) Xét $\triangle OCB$ và $\triangle OAD$ có $\widehat{O} = \widehat{O}$.

Vì $\frac{5}{10} = \frac{8}{16}$ nên $\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$, suy ra $\triangle OCB \sim \triangle OAD$ (c.g.c).

- b) Từ câu a), $\triangle OCB \sim \triangle OAD$ nên $\widehat{ADO} = \widehat{CBO}$ hay $\widehat{IDC} = \widehat{IBA}$. Lại có $\widehat{CID} = \widehat{AIB}$ (vì đối đỉnh), suy ra hai góc còn lại bằng nhau là $\widehat{ICD} = \widehat{IAB}$.

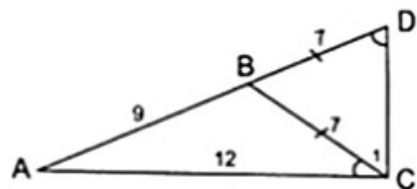


Hình 300

Ví dụ 2*. Cho tam giác ABC có AB = 9cm, BC = 7cm, và CA = 12cm. Chứng minh rằng $\widehat{B} = 2\widehat{C}$.

Lời giải (hình 301)

Trên tia đối của ta BA lấy điểm D sao cho BD = BC thì AD = 9 + 7 = 16 và $\widehat{C}_1 = \widehat{D}$ vì trong tam giác BCD, đối diện với hai cạnh bằng nhau là hai góc bằng nhau.



Hình 301

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ACD$ có $\widehat{A} = \widehat{A}$, vì $\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$ (do cùng bằng $\frac{3}{4}$), nên :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D}.$$

Do đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{C} + \widehat{D} = 2\widehat{C}$.

III. BÀI TẬP

9. Trên đoạn BC = 13cm, đặt đoạn BH = 4cm. Trên đường vuông góc với BC tại H, đặt đoạn HA = 6cm. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
10. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có AB = 2cm, BD = 4cm và CD = 8cm. Tính độ dài BC.
11. Cho hình thang ABCD có AB = 2cm, BD = 4cm và cạnh đáy CD = 8cm. Chứng minh rằng $\widehat{A} = \widehat{DBC}$.
12. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Qua C kẻ đường thẳng d cắt các tia đối của các tia BA, DA theo thứ tự ở E và F. Gọi I là giao điểm của BF và DE. Chứng minh rằng :

a) $\frac{EB}{BA} = \frac{AD}{DF}$.

b) $\triangle EBD \sim \triangle BDF$.

c) $\widehat{BID} = 120^\circ$.

DẠNG 5. Nhận biết hai tam giác đồng dạng theo trường hợp thứ ba (g.g) để tính độ dài đoạn thẳng

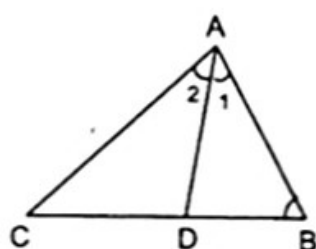
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Chứng minh hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau.
2. Áp dụng định nghĩa hai tam giác đồng dạng, lập tỉ số giữa các cạnh tương ứng.

II. VÍ DỤ

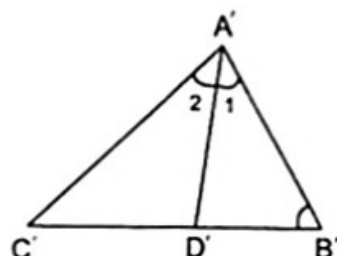
Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số k thì tỉ số của hai đường phân giác tương ứng của chúng cũng bằng k .

Lời giải (hình 302)



a)

Hình 302



b)

Gọi $A'D'$, AD là đường phân giác của các góc $\widehat{A'}$ và $\widehat{A}$ thì $\widehat{A'_1} = \widehat{A_2}$, $\widehat{A'_2} = \widehat{A_1}$.

Từ giả thiết $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số k , suy ra $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$, $k = \frac{A'B'}{AB}$.

Do đó $\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD$ (g.g) theo tỉ số đồng dạng $\frac{A'B'}{AB} = k$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD (hình 303) có $AB = 12\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$. Trên cạnh AB lấy một điểm E sao cho $AE = 8\text{cm}$, đường thẳng DE cắt BC ở F.

- a) Trong hình vẽ đã cho có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau? Hãy viết các cặp tam giác đồng dạng với nhau theo các đỉnh tương ứng.
- b) Tính độ dài các đoạn thẳng EF và BF, biết rằng $DE = 10\text{cm}$.

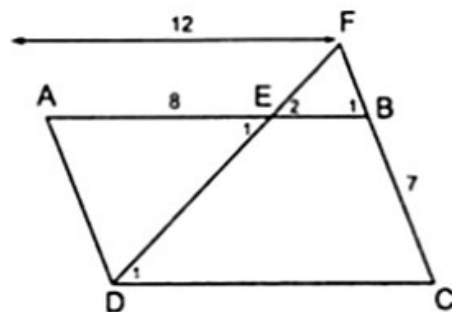
Lời giải

Để viết được các cặp tam giác đồng dạng với nhau theo các đỉnh tương ứng, trước hết phải chỉ ra các góc bằng nhau để tìm được các đỉnh tương ứng.

$$a) \text{ Vì } \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B}_1 \\ \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta BEF \sim \Delta AED \text{ (g.g.)}$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow EB \parallel CD \Rightarrow \Delta FBE \sim \Delta FCD.$$

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{C} \\ \widehat{E}_1 = \widehat{D}_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta AED \sim \Delta CDF \text{ (g.g.)}$$



Hình 303

Như vậy có tất cả ba cặp tam giác đồng dạng như trên.

$$b) \text{ Từ câu a) } \Delta BEF \sim \Delta AED \Rightarrow \frac{EF}{ED} = \frac{BF}{AD} = \frac{EB}{EA} \text{ hay}$$

$$\frac{EF}{10} = \frac{BF}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow EF = 5 \text{ (cm)}, BF = 4 \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 3. Hình 304 cho biết $\widehat{EBA} = \widehat{BDC}$.

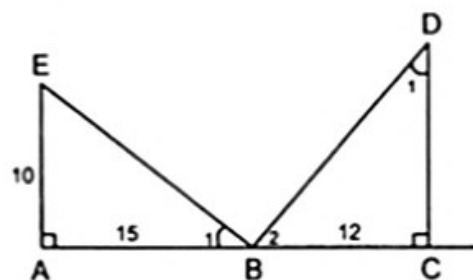
a) Trong hình vẽ có bao nhiêu tam giác vuông? Hãy kể tên các tam giác đó.

b) Cho biết $AE = 10\text{cm}$, $AB = 15\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng CD , BE , BD và ED (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

c) So sánh diện tích tam giác BDE với tổng diện tích của hai tam giác AEB và BCD .

Lời giải (hình 304)

a) Từ giả thiết và tính chất về góc của tam giác vuông BCD , ta có :



Hình 304

$$\begin{cases} \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \\ \widehat{B}_2 + \widehat{D}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EBD} = 90^\circ, \text{ do } \widehat{ABC} \text{ là góc bẹt.}$$

Vậy trong hình vẽ có ba tam giác vuông là ABE , BCD và EBD .

$$b) \text{ Vì } \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{C} \\ \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta CDB \sim \Delta ABE \text{ (g.g.)}$$

$$\text{Suy ra } \frac{CD}{AB} = \frac{CB}{AE} \text{ hay } \frac{CD}{15} = \frac{10}{12} \Leftrightarrow CD = \frac{10 \cdot 15}{12} \Leftrightarrow CD = 18(\text{cm}).$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ABE vuông ở A , ta được :

$$BE^2 = EA^2 + AB^2 \text{ hay } BE^2 = 10^2 + 15^2 = 325 \Rightarrow BE \approx 18,0(\text{cm}).$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác BCD vuông ở C, ta được :

$$BD^2 = DC^2 + CB^2 \text{ hay } BD^2 = 18^2 + 12^2 = 468 \Rightarrow BD \approx 21,6(\text{cm}).$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác EBD vuông ở B, ta được :

$$ED^2 = DB^2 + BE^2 \text{ hay } ED^2 = 325 + 468 = 793 \Rightarrow ED \approx 28,2(\text{cm}).$$

$$c) S_{BDE} = \frac{1}{2} BE \cdot BD = \frac{1}{2} \sqrt{325} \cdot \sqrt{468} = \frac{1}{2} \sqrt{152100} = 195 (\text{cm}^2);$$

$$S_{AEB} + S_{BCD} = \frac{1}{2} 15 \cdot 10 + \frac{1}{2} 12 \cdot 18 = 183 (\text{cm}^2).$$

Vậy $S_{BDE} > S_{AEB} + S_{BCD}$.

III. BÀI TẬP

13. Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{C}$. Tính độ dài AD.
14. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường phân giác AD. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{BAC}$.
 - a) Hãy tìm tam giác đồng dạng với tam giác ABC.
 - b) Chứng minh rằng $DB = DE$.
15. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Tính độ dài AC.
16. Cho tam giác ABC cân ở A, đường phân giác BD. Có $BC = 5\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$.
 - a) Tính độ dài AD, DC.
 - b) Tính độ dài BD
- 17*. Cho tam giác ABC cân tại A, có góc ở đáy bằng α . Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, M, E sao cho $\widehat{DME} = \alpha$. Chứng minh rằng các tam giác BDM và CME đồng dạng.

DẠNG 6. Sử dụng tam giác đồng dạng để dựng hình

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1 : Dựng một tam giác bất kì đồng dạng với tam giác phải dựng.

Bước 2 : Dùng điều kiện về độ dài chưa sử dụng đến để dựng tiếp.

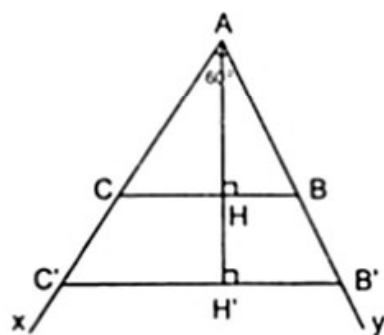
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Dựng tam giác ABC, biết $\hat{A} = 60^\circ$, tỉ số $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$ và đường cao $AH = 6\text{cm}$.

Lời giải (hình 305)

Bước 1 : Dựng $\triangle AB'C'$ biết $\hat{A} = 60^\circ$ và $AB' = 4$, $AC' = 5$.

- Dựng $\widehat{xAy} = 60^\circ$.
- Trên tia Ax dựng đoạn $AB' = 4$.
- Trên tia Ay dựng đoạn $AC' = 5$.



Hình 305

Bước 2 : Dựng $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ có đường cao $AH = 6\text{cm}$.

- Dựng đường cao $AH' \perp B'C'$.
 - Trên tia AH' lấy $AH = 6\text{cm}$.
 - Qua H, dựng đường thẳng vuông góc với AH' , cắt Ax và Ay ở B và C.
- Ta được tam giác ABC là tam giác cần dựng.

Ví dụ 2. Dựng tam giác ABC, biết $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ và đường cao $AH = 5\text{cm}$.

Lời giải (hình 306)

Bước 1 :

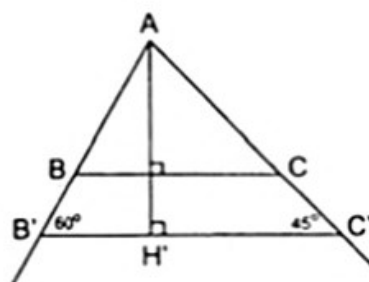
Dựng $\triangle AB'C'$ biết $\hat{B}' = 60^\circ$; $\hat{C}' = 45^\circ$.

Bước 2 :

Dựng $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ có đường cao $AH = 5\text{cm}$.

Dựng đường cao $AH' \perp B'C'$.

Trên tia AH' lấy $AH = 5\text{cm}$.



Hình 306

Qua H, dựng đường thẳng song song với $B'C'$, cắt Ax và Ay ở B và C ta được tam giác ABC là tam giác cần dựng.

Chứng minh : Thật vậy, theo cách dựng $BC \parallel B'C'$ nên $\hat{B} = \hat{B}' = 60^\circ$, $\hat{C} = \hat{C}' = 45^\circ$, $AH = 5\text{cm}$.

III. BÀI TẬP

18. Dựng tam giác ABC, biết $\hat{A} = 60^\circ$, tỉ số $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$ và trung tuyến $AM = 4\text{cm}$.
19. Dựng tam giác ABC, biết $\hat{B} = 70^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$ và đường phân giác $AD = 3\text{cm}$.
20. Dựng tam giác ABC vuông ở A, biết $BC = 10\text{cm}$, tỉ số $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$.

Chủ đề 5

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Áp dụng các trường hợp đồng dạng của tam giác vào tam giác vuông

Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu :

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia (trường hợp g.g).
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia (trường hợp c.g.c).

2. Dấu hiệu đặc biệt nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng

Định lý 1: Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng (trường hợp cạnh huyền – cạnh góc vuông).

3. Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

Định lý 2: Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

Định lý 3: Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG 1. Nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng để tính độ dài đoạn thẳng, tính góc

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng :

Thường sử dụng các trường hợp thứ ba hoặc thứ hai, trong đó yếu tố góc là góc vuông hoặc trường hợp đồng dạng cạnh huyền – cạnh góc vuông.

2. Tính độ dài đoạn thẳng, tính góc :

– Sử dụng định nghĩa tam giác đồng dạng, lập tỉ số giữa các cạnh tương ứng, thay số rồi giải phương trình.

– Sử dụng định nghĩa tam giác đồng dạng, tìm ra góc tương ứng bằng nhau.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên hình 307, hãy chỉ ra các tam giác đồng dạng. Viết các tam giác này theo thứ tự các đỉnh tương ứng và giải thích vì sao chúng đồng dạng.

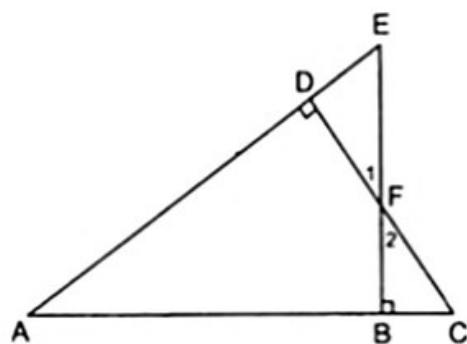
Lời giải (hình 307)

$$\triangle ABE \sim \triangle ADC \text{ (g.g), vì } \begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases};$$

$$\triangle EDF \sim \triangle EBA \text{ (g.g), vì } \begin{cases} \hat{E} = \hat{E} \\ \hat{D} = \hat{B} = 90^\circ \end{cases};$$

$$\triangle CBF \sim \triangle CDA \text{ (g.g), vì } \begin{cases} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases};$$

$$\triangle BFC \sim \triangle DFE \text{ (g.g), vì } \begin{cases} \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{F}_2 = \hat{F}_1 \end{cases}.$$



Hình 307

Ví dụ 2. Cho hình 308 có tam giác ABC vuông ở A và có đường cao AH.

a) Trong hình vẽ có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau ?

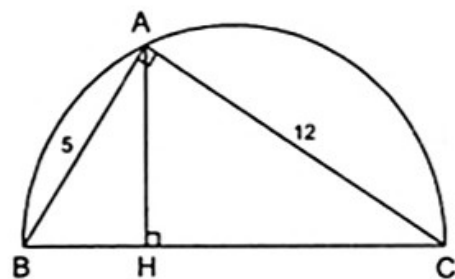
Hãy chỉ rõ từng cặp tam giác đồng dạng và viết theo các đỉnh tương ứng.

b) Cho biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BC , AH , BH và CH .

Lời giải (hình 308)

a) Trong hình vẽ có ba cặp tam giác đồng dạng là BHA và BAC , CHA và CAB , HAB và HCA .

b) Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABC vuông ở A , ta được : $BC^2 = CA^2 + AB^2$ hay $BC^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow BC = 13(\text{cm})$.



Hình 308

$$\text{Vì } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AB \cdot AC = AH \cdot BC;$$

$$\text{Hay } 5 \cdot 12 = 13 \cdot AH \Leftrightarrow AH = \frac{60}{13} (\text{cm}).$$

$$\text{Từ câu a), } \triangle BHA \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} \text{ hay } \frac{BH}{5} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow BH = \frac{25}{13} (\text{cm}).$$

$$\text{Do đó } CH = BC - BH = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13} (\text{cm}).$$

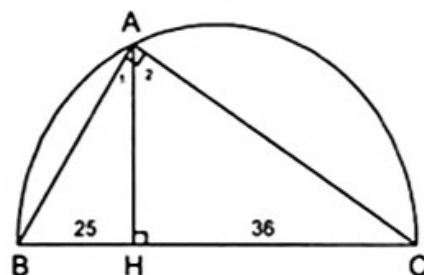
Ví dụ 3. Chân đường cao AH chia cạnh huyền BC thành hai đoạn thẳng có độ dài 25cm và 36cm . Tính chu vi và diện tích của tam giác vuông đó (h. 308).

Lời giải (hình 309)

$$\text{Vì } \triangle AHB \sim \triangle CHA \text{ nên } \frac{AH}{HC} = \frac{HB}{HA}, \text{ hay}$$

$$\frac{HA}{36} = \frac{25}{HA} \Leftrightarrow HA^2 = 30^2 \Leftrightarrow HA = 30(\text{cm});$$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} 30 \cdot 61 = 915 (\text{cm}^2).$$



Hình 309

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta tính được : $AB \approx 39\text{cm}$; $AC \approx 47\text{cm}$.

Vậy chu vi tam giác ABC gần bằng 147cm .

Ví dụ 4*. Cho điểm B nằm trên đoạn thẳng AC , $AB = 6\text{cm}$, $BC = 24\text{cm}$. Vẽ về một phía của AC các tia Ax và Cy vuông góc với AC . Trên tia Ax lấy điểm E sao cho $EB = 10\text{cm}$, trên tia Cy lấy điểm D sao cho $MD = 30\text{cm}$. Chứng minh rằng $\widehat{EBD} = 90^\circ$.

Lời giải (hình 310)

Trước hết ta đi tính đoạn CD.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác CDB vuông ở C ta được $BD^2 = DC^2 + CB^2$ hay

$$30^2 = DC^2 + 24^2 \Leftrightarrow DC^2 = 18^2 \\ \Leftrightarrow DC = 18(\text{cm}).$$

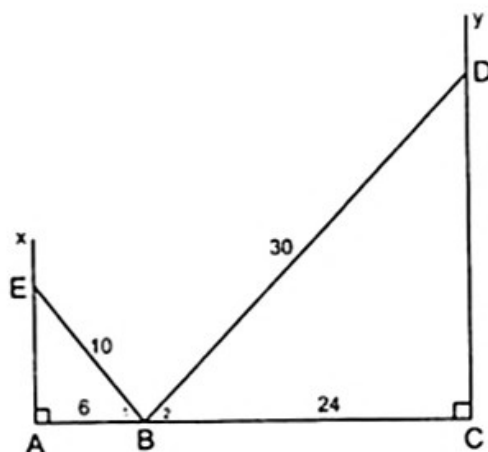
Xét $\triangle BEA$ và $\triangle DBC$ có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$ và

$$\frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BC} \quad (\text{vì } \frac{10}{6} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}), \text{ do đó:}$$

$\triangle BEA \sim \triangle DBC$ (theo trường hợp cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Từ định nghĩa tam giác đồng dạng và tính chất về góc của tam giác vuông

DCB, ta có: $\begin{cases} \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \\ \widehat{B_2} + \widehat{D_1} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EBD} = 90^\circ$ (do góc ABC là góc bẹt).



Hình 310

III. BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Hãy tính các độ dài AH, AB, AC biết $HB = 9\text{cm}$ và $HC = 16\text{cm}$.
- Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH có $BH = 4\text{cm}$, $HC = 9\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính các cạnh của tam giác AHM.
- Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có $AB = 6\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$, $AD = 17\text{cm}$. Trên cạnh AD đặt đoạn $AE = 8\text{cm}$. Chứng minh $\widehat{BEC} = 90^\circ$.
- Cho tam giác ABH vuông tại H có $AB = 20\text{cm}$, $BH = 12\text{cm}$. Trên tia đối của tia HB lấy điểm C sao cho $\frac{AC}{AH} = \frac{5}{3}$.
 - Chứng minh rằng $\triangle ABH \sim \triangle CAH$.
 - Tính $\widehat{BAC}$.
- Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có $AB = 4\text{cm}$, $CD = 9\text{cm}$ và $BC = 13\text{cm}$. Tính khoảng cách từ trung điểm M của AD đến BC.

DẠNG 2. Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng các định lý :

- Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tam giác ABC có $BC = 15\text{cm}$, đường cao $AH = 10\text{cm}$. Một đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở D và E . Tính độ dài DE , biết rằng DE bằng khoảng cách từ D đến BC .

Lời giải (hình 311)

Gọi K là giao điểm của AH và DE .

Do $\begin{cases} AH \perp BC \\ DE \parallel BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp DE$ tại K , nên khoảng cách từ D đến BC bằng KH .

Từ giả thiết DE bằng khoảng cách từ D đến BC nên đặt : $DE = KH = x$ thì $AK = 10 - x$.

Vì $DE \parallel BC$ nên $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, do đó tỉ số hai đường cao AK và AH bằng tỉ số đồng dạng $\frac{AK}{AH} = \frac{DE}{BC}$, hay $\frac{10-x}{10} = \frac{x}{15} = \frac{10-x+x}{10+15} = \frac{10}{25}$

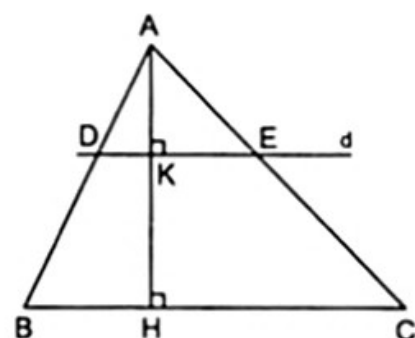
$$\Leftrightarrow x = \frac{15 \cdot 10}{25} = 6 \text{ (cm)}.$$

Vậy $DE = 6\text{cm}$.

Ví dụ 2. Tam giác ABC có độ dài các cạnh là $3\text{cm}, 4\text{cm}, 5\text{cm}$. Tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC và có diện tích là 54cm^2 . Tính độ dài các cạnh của tam giác $A'B'C'$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.



Hình 311

Thật vậy, vì $3^2 + 4^2 = 5^2$ thoả mãn hệ thức Py-ta-go nên tam giác ABC là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 3cm và 4cm, do đó diện tích của nó là $\frac{3.4}{2} = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Từ giả thiết $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$, nên $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \frac{54}{6} = 3^2$;

Điều này chứng tỏ tỉ số đồng dạng của hai tam giác trên là $k = 3$.

Vậy độ dài các cạnh của tam giác ABC là 9cm, 12cm, 15cm.

Ví dụ 3*. Cho tam giác ABC. Qua D là điểm trên cạnh BC lần lượt kẻ các đường thẳng song song với AB, AC chúng cắt AB, AC theo thứ tự ở E và F. Biết diện tích tam giác BED bằng 16cm^2 , diện tích tam giác FDC bằng 25cm^2 . Tính S_{ABC} .

Lời giải (hình 312)

Đặt $S_{ABC} = S$. Vì $DE \parallel AC$ nên $\Delta BED \sim \Delta BAC$

$$\Rightarrow \frac{S_{BED}}{S} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = \frac{16}{S} = \left(\frac{4}{\sqrt{S}}\right)^2 \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{4}{\sqrt{S}} \quad (1).$$

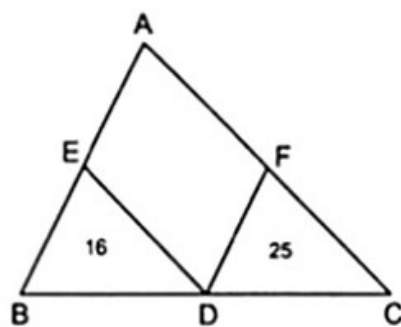
Lại có $DF \parallel AB$ nên $\Delta CDF \sim \Delta CBA$

$$\Rightarrow \frac{S_{CDF}}{S} = \left(\frac{CD}{CB}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{S}}\right)^2 \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{5}{\sqrt{S}} \quad (2).$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), thu được $\frac{BD}{BC} + \frac{CD}{CB} = \frac{4}{\sqrt{S}} + \frac{5}{\sqrt{S}}$, hay

$$1 = \frac{9}{\sqrt{S}} \Leftrightarrow \sqrt{S} = 9 \Leftrightarrow S = 81(\text{cm}^2).$$

Vậy diện tích tam giác ABC bằng 81cm^2 .



Hình 312

III. BÀI TẬP

6. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 3\text{cm}$, $CD = 6\text{cm}$, đường cao bằng 4cm, các đường chéo cắt nhau ở O. Tính diện tích các tam giác OAB và OCD.

7. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC ở D và E. Biết diện tích tam giác ADE bằng nửa diện tích tam giác ABC. Tính tỉ số $\frac{DE}{BC}$.
8. Cho tam giác ABC vuông ở A có đường cao AH = 8cm, BC = 20cm. Gọi D là hình chiếu của H trên AC, E là hình chiếu của H trên AB.
- a) Chứng minh $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.
- b) Tính diện tích tam giác ADE.
- 9*. Gọi O là điểm bất kì trong tam giác ABC. Qua O kẻ các đường thẳng MN, PQ, RS lần lượt song song với BC, CA, AB ($P, S \in BC$; $N, Q \in AC$; $R, M \in AB$). Gọi diện tích các tam giác ABC, ROM, QNO, OSP theo thứ tự là S ; S_1 ; S_2 ; S_3 . Chứng minh rằng: $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}$.

DẠNG 3. Sử dụng tam giác vuông đồng dạng để chứng minh đẳng thức hình học

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tìm các tam giác vuông đồng dạng.
2. Lập và biến đổi các đoạn thẳng tỉ lệ.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

Lời giải (hình 313)

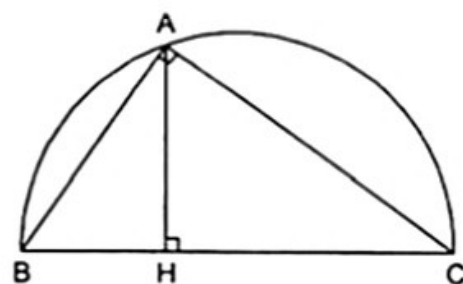
Xét tam giác vuông ABC vuông ở A.

Ta phải chứng minh: $BC^2 = CA^2 + AB^2$.

Thật vậy, kẻ $AH \perp BC$.

$$\text{Có } \begin{cases} \hat{B} = \hat{B} \\ \hat{H} = \hat{A} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle BHA \sim \triangle BAC \text{ (g.g)}$$

$$\text{nên } \frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BA^2 = BC \cdot BH. \quad (1)$$



Hình 313

$$\text{Có } \begin{cases} \widehat{C} = \widehat{C} \\ \widehat{H} = \widehat{A} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta CHA \sim \Delta CAB \text{ (g.g)} \text{ nên } \frac{CH}{CA} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CA^2 = BC \cdot CH. \quad (2)'$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$CA^2 + AB^2 = BC \cdot (BH + CH) = BC \cdot BC = BC^2. \quad (\text{Đpcm})$$

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD ($AC > AB$). Gọi E là hình chiếu của C trên AB, K là hình chiếu của C trên AD và H là hình chiếu của B trên AC. Chứng minh rằng :

a) $AB \cdot AE = AC \cdot AH.$

b) $BC \cdot AK = AC \cdot HC.$

c) $AB \cdot AE + AD \cdot AK = AC^2.$

Lời giải (hình 314)

a) Vì $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_1} \\ \widehat{H} = \widehat{E} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta AEC \text{ (g.g)}$

nên $\frac{AH}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AH. \quad (1)$

b) Vì $\widehat{C_1} = \widehat{A_2}$ (do so le trong) và $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ nên $\Delta AKC \sim \Delta CHB \text{ (g.g)}.$

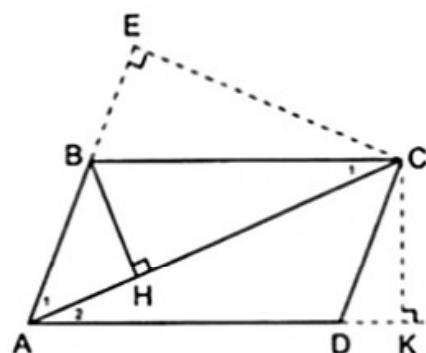
Do đó $\frac{AK}{CH} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow CB \cdot AK = AC \cdot CH. \quad (2)$

Lại có $BC = AD$ (theo tính chất về cạnh của hình bình hành ABCD).

Thay $BC = AD$ vào đẳng thức (2) thu được : $AD \cdot AK = AC \cdot CH. \quad (3)$

c) Cộng theo vế các đẳng thức (1) ở câu a) và (3) ở câu b), ta được :

$$AB \cdot AE + AD \cdot AK = AC \cdot (AH + CH) = AC \cdot AC = AC^2.$$



Hình 314

III. BÀI TẬP

10. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Chứng minh rằng $AB \cdot AE + AC \cdot AF = 2EF^2$.

11. Cho tam giác ABC vuông ở C, đường cao CH. Trên CH lấy điểm E, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AE ở D. Chứng minh rằng :

a) $AD \cdot AE + BA \cdot BH = AB^2.$

b) $AD \cdot AE - HA \cdot HB = AH^2.$

12. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Gọi K là hình chiếu của H trên BC. Chứng minh rằng :
- $BD.BH = BC.BK$.
 - $CE.CH = CB.CK$.
 - $BD.BH + CE.CH = BC^2$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

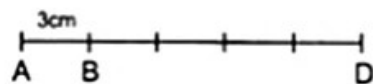
Chủ đề 1

1. Điểm C chia đoạn AB theo tỉ số $\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} CA = 2t \\ CB = 3t \end{cases}$ (với $t > 0$).

Vì $AB = CA + CB = 2t + 3t = 5t$ nên $\frac{AC}{AB} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}$; $\frac{CB}{AB} = \frac{3t}{5t} = \frac{3}{5}$.

2. (hình 315) Từ giả thiết $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} DA = 3t \\ DB = 2t \end{cases}$ (với $t > 0$);

Vì D thuộc tia đối của tia BA nên $DA > DB$, do đó $AB = DA - DB$ hay $3 = 3t - 2t \Leftrightarrow t = 3$.



Hình 315

Vậy $DA = 9\text{cm}$; $DB = 6\text{cm}$.

3. Vì x, y, z tỉ lệ với 2, 3, 4 nên ta có dãy tỉ số: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Suy ra: $x = \frac{8}{3}$ (dm); $y = 4$ (dm); $z = \frac{16}{3}$ (dm).

4. Từ giả thiết $15x = 10y = 8z \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \\ \frac{y}{z} = \frac{4}{5} = \frac{12}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{8} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{12} = \frac{z}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$.

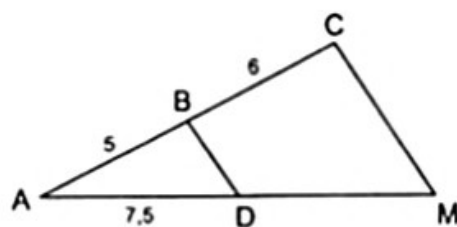
Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được :

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{8+12+15} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}.$$

Vậy $x = 1,6\text{dm}$; $y = 2,4\text{dm}$; $z = 3\text{dm}$.

5. (hình 316) Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác ACM có $BD \parallel CM$, ta được :

$$\frac{MD}{DA} = \frac{CB}{BA} \text{ hay } \frac{MD}{7,5} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow MD = \frac{7,5 \cdot 6}{5} = 9(\text{cm}).$$



Hình 316

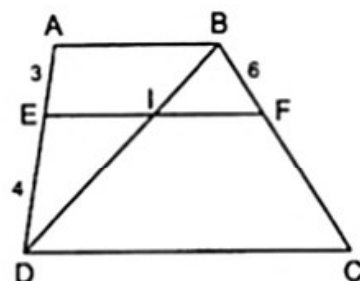
6. (hình 317) Gọi I là giao điểm của EF với BD thì $EI \parallel AB$, $IF \parallel DC$.

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác ABD có $EI \parallel AB$,

$$\text{ta được : } \frac{DI}{IB} = \frac{DE}{EA} \text{ hay } \frac{DI}{IB} = \frac{4}{3}. \quad (1)$$

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác BCD có $FI \parallel DC$,

$$\text{ta được : } \frac{CF}{FB} = \frac{DI}{IB} \text{ hay } \frac{CF}{6} = \frac{DI}{IB}. \quad (2)$$

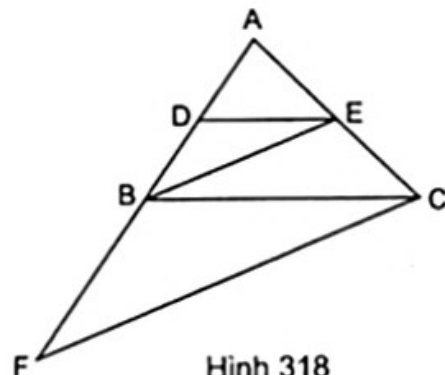


Hình 317

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } \frac{CF}{6} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow CF = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8(\text{cm}).$$

7. (hình 318) Áp dụng định lí Ta-lét vào hai tam giác ABC có $DE \parallel BC$ và AFC có $BE \parallel FC$, ta được :

$$\begin{cases} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AF.$$



Hình 318

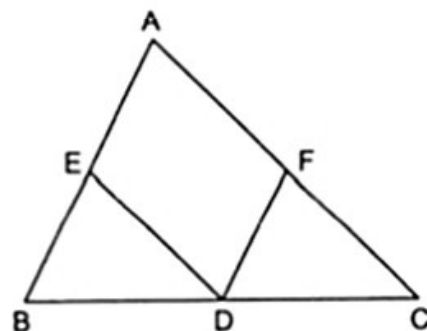
8. (hình 319) Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác ABC có $DE \parallel AC$ và $DF \parallel AB$, ta có :

$$\begin{cases} \frac{AE}{AB} = \frac{CD}{CB} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC} \end{cases} \quad (2)$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = \frac{CD + BD}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

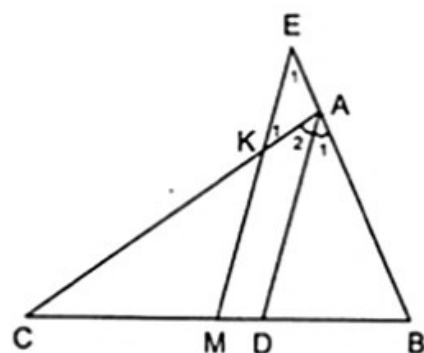


Hình 319

9. (hình 320)

a) Từ giả thiết và tính chất các cặp góc so le, đồng vị của $AD \parallel ME$, ta được :

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \widehat{A_2} = \widehat{K_1} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{K_1} \Rightarrow AE = AK. \\ \widehat{A_1} = \widehat{E_1} \end{cases}$$



Hình 320

Vì trong tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau.

b) Đặt $BM = MC = a$ và $AE = AK = b$.

Áp dụng định lí Ta-lét vào hai tam giác BEM và ACD có $AD \parallel EM$, $AD \parallel KM$,

ta được :

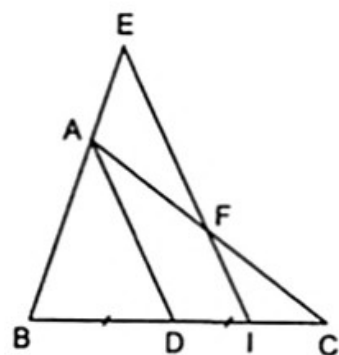
$$\begin{cases} \frac{BE}{AE} = \frac{BM}{DM} \\ \frac{CK}{KA} = \frac{CM}{MD} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \frac{BE}{b} = \frac{a}{DM} \\ \frac{CK}{b} = \frac{a}{DM} \end{cases} \Rightarrow \frac{BE}{b} = \frac{CK}{b} \Rightarrow BE = CK.$$

10. (hình 321) Đặt $BD = DC = a$ thì $BC = 2a$. Gọi I là giao điểm của d và BC.

Áp dụng định lí Ta-lét vào hai tam giác BEI và ADC có $AD \parallel EI$, $AD \parallel FI$, ta được :

$$\frac{BE}{BA} = \frac{BI}{BD} \text{ hay } \frac{BE}{BA} = \frac{BI}{a} \quad (1).$$

$$\frac{CF}{CA} = \frac{CI}{CD} \text{ hay } \frac{CF}{CA} = \frac{CI}{a} \quad (2).$$



Hình 321

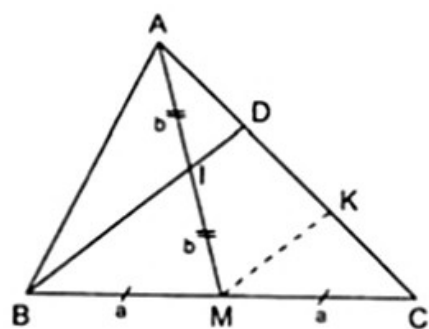
Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$\frac{BE}{BA} + \frac{CF}{CA} = \frac{BI + CI}{a} = \frac{BC}{a} = \frac{2a}{a} = 2.$$

11. (hình 322) Từ giả thiết $BM = MC$ và $AI = IM$ nên ta đặt $BM = MC = a$; $AI = IM = b$.

Kẻ $MK \parallel BD$ thì $MK \parallel ID$.

Áp dụng định lí Ta-lét vào hai tam giác AMK và BDC có $DI \parallel MK$, $BD \parallel MK$, ta được :



Hình 322

$$\begin{cases} \frac{AD}{DK} = \frac{AI}{IM} = \frac{b}{b} = 1 \\ \frac{DK}{KC} = \frac{BM}{MC} = \frac{a}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = DK \\ DK = KC \end{cases}$$

$$\Rightarrow AD = DK = KC. \text{ Điều này chứng tỏ } \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}.$$

12. (hình 323) Kẻ $DK \parallel MC$ thì $DK \parallel MI$.

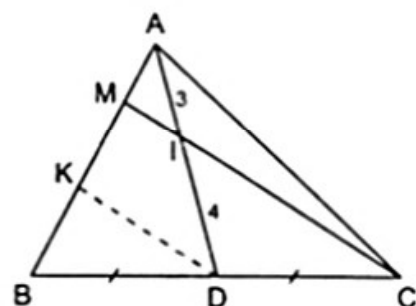
Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác ADK có $DK \parallel MI$, ta được :

$$\frac{AM}{MK} = \frac{AI}{ID} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} AM = 3t \\ MK = 4t \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$

Đặt $BD = DC = a$. Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác BMC có $DK \parallel MC$, ta được :

$$\frac{MK}{KB} = \frac{CD}{DB} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow MK = KB = 4t.$$

$$\text{Do đó } BM = 8t \text{ nên } \frac{AM}{MB} = \frac{3t}{8t} = \frac{3}{8}.$$



Hình 323

Chủ đề 2

1. (hình 324) Trước hết ta đi tính AB .

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ABC vuông ở A , ta được : $BC^2 = CA^2 + AB^2$ hay

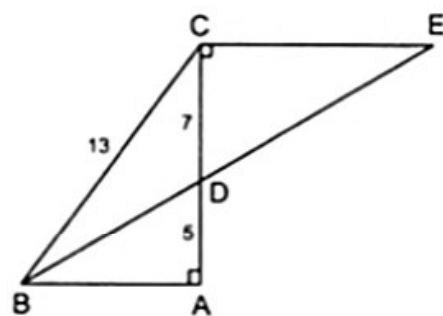
$$13^2 = 12^2 + AB^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 5^2 \Leftrightarrow AB = 5 \text{ (cm)}, \text{ vì } AB > 0.$$

Vì AB và CE cùng vuông góc với AC nên $AB \parallel CE$.

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho $AB \parallel CE$, thu được :

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CD}{DA} \text{ hay } \frac{CE}{5} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow CE = 7 \text{ (cm)}.$$

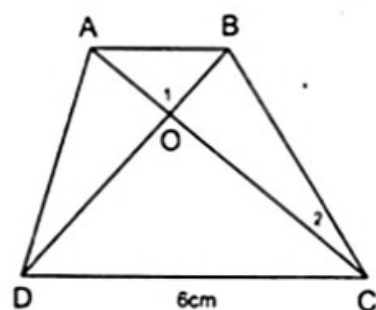


Hình 324

2. (hình 325) Từ giả thiết

$$\frac{AO}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AO}{1} = \frac{AC}{3} = \frac{AC - AO}{3 - 2} = \frac{OC}{2} \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{1}{2}.$$

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AB \parallel CD$ thu được $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OC}$ hay $\frac{AB}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AB = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3 \text{ (cm)}.$



Hình 325

3. (hình 326) Đặt $OA = x$ (với $x > 0$) thì

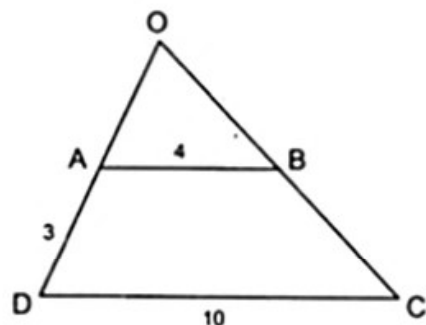
$$OD = OA + AD = x + 3.$$

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AB \parallel CD$,

thu được: $\frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OA}$ hay

$$\frac{10}{4} = \frac{x+3}{x} \Leftrightarrow 10x = 4x + 12$$

$$\Leftrightarrow 10x - 4x = 12 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (cm)}.$$



Hình 326

4. (hình 327) Vì ABCD là hình bình hành nên $DC = AB = 12 \text{ cm}$ và $DE \parallel AB$.

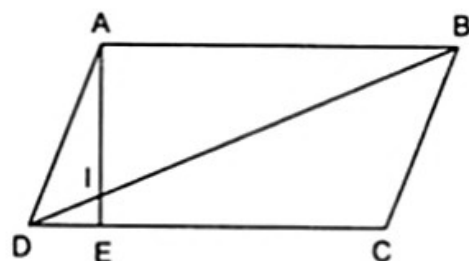
Từ giả thiết $\frac{DE}{DC} = \frac{1}{4}$ hay $\frac{DE}{AB} = \frac{1}{4}$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AB \parallel DE$,

thu được: $\frac{DI}{IB} = \frac{DE}{AB}$ hay

$$\frac{DI}{IB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} DI = 1t \\ IB = 4t \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$

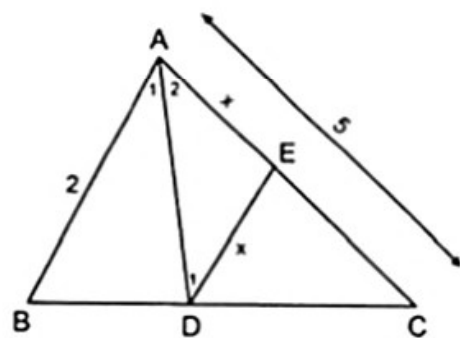
Suy ra $BD = 1t + 4t = 5t$. Vậy $\frac{DI}{BD} = \frac{1t}{5t} = \frac{1}{5}$.



Hình 327

5. (hình 328) Từ giả thiết $DE \parallel AB$, AD là đường phân giác, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{D_1} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow EA = ED.$$



Hình 328

(vì trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau).

Đặt $EA = ED = x$ thì $CE = CA - EA = 5 - x$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AB \parallel DE$, thu được: $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA}$ hay

$$\frac{x}{2} = \frac{5-x}{5} = \frac{x+5-x}{2+5} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow x = \frac{10}{7} \text{ (cm)}.$$

6. (hình 329) Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AB \parallel DC$, thu được:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CD} \text{ hay } \frac{AO}{OC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} AO = 2t \\ OC = 3t \end{cases} \quad (t > 0).$$

Suy ra $AC = 5t$ nên $\frac{AO}{AC} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AB \parallel DC$, thu được: $\frac{MO}{DC} = \frac{AO}{AC}$ hay $\frac{MO}{6} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow MO = 2,4 \text{ (cm)}.$

Tương tự ta có: $NO = 2,4 \text{ cm}$. Vậy $MN = 4,8 \text{ cm}$.

7. (hình 330) Từ giả thiết suy ra $MH \parallel AB$ và $MK \parallel CD$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $MH \parallel AB$

và $MK \parallel CD$, thu được: $\frac{MH}{AB} = \frac{CM}{CA}$. (1)

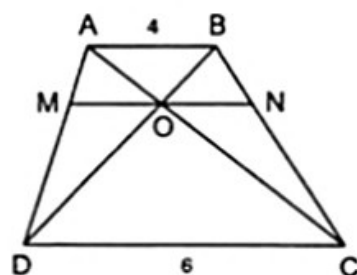
$$\frac{MK}{CD} = \frac{AM}{AC}. \quad (2)$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được:

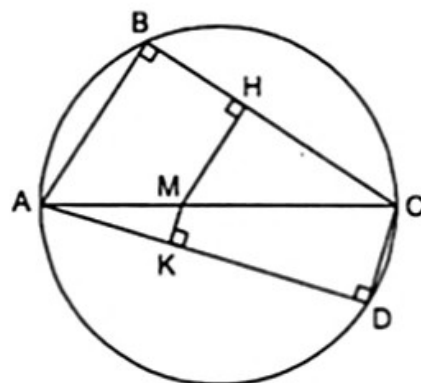
$$\frac{MH}{AB} + \frac{MK}{CD} = \frac{CM + MA}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1.$$

8. (hình 331) Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $MN \parallel AB$, $PQ \parallel AB$ và định lý Ta-lét vào tam giác BCD có $NQ \parallel DC$, thu được:

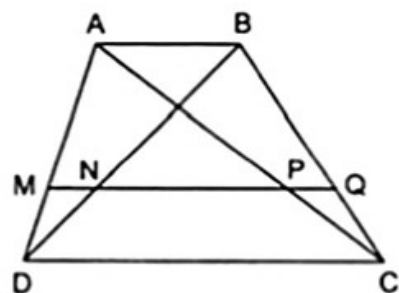
$$\begin{cases} \frac{MN}{AB} = \frac{DN}{DB} \\ \frac{PQ}{AB} = \frac{CQ}{CB} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow MN = PQ.$$



Hình 329



Hình 330



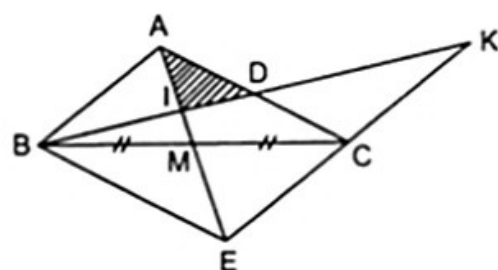
Hình 331

9. (hình 332) Gọi E là giao điểm của AM và KC thì $\triangle AMB = \triangle EMC$ (g - c - g). Suy ra $AM = ME$, vậy tứ giác ACEB có các đường chéo cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành.

Do đó $AC \parallel BE$ và $AB \parallel CE$ suy ra $AD \parallel BE$, $AB \parallel EK$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AD \parallel BE$ và $AB \parallel EK$, thu được :

$$\begin{cases} \frac{ID}{IB} = \frac{IA}{IE} \\ \frac{IB}{IK} = \frac{IA}{IE} \end{cases} \Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{IB}{IK} \Rightarrow IB^2 = ID \cdot IK.$$



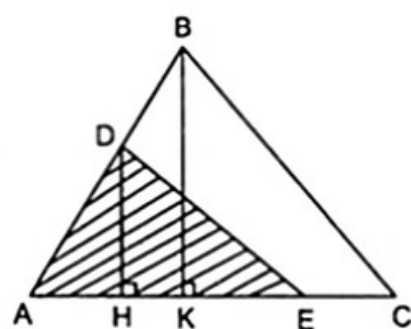
Hình 332

10. (hình 333) Kẻ các đường thẳng BH và DK cùng vuông góc với AC thì $BH \parallel DK$.

Ta có : $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2} BK \cdot AC}{\frac{1}{2} DH \cdot AE} \quad (1)$

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $DK \parallel BH$,

ta được : $\frac{BK}{DH} = \frac{AB}{AD} \quad (2)$

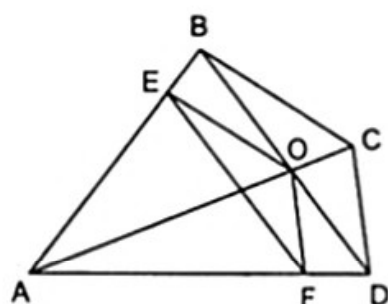


Hình 333

Thay (2) vào đẳng thức (1), ta được : $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AC}{\frac{1}{2} AD \cdot AE}$

11. (hình 334) Áp dụng định lý Ta-lét vào các tam giác ABC và ACD có $EO \parallel BC$, $OF \parallel CD$, ta được :

$$\begin{cases} \frac{AE}{EB} = \frac{AO}{OC} \\ \frac{AF}{FD} = \frac{AO}{OC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD}$$



Hình 334

Điều này chứng tỏ đường thẳng EF cắt hai cạnh AB, AD của tam giác ABD và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ nên EF song song với cạnh còn lại BD, hay $EF \parallel BD$ (theo định lý Ta-lét đảo).

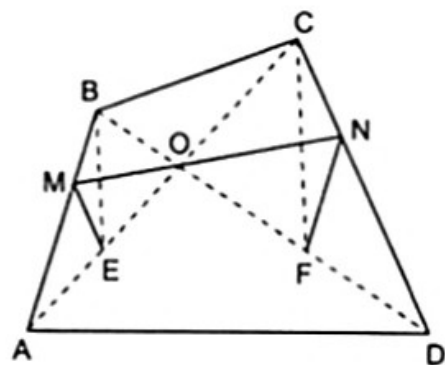
12. (hình 335) Gọi giao điểm của AC và BD là O.

Từ giả thiết $ME \parallel CD$ và $NF \parallel AB$ suy ra $ME \parallel CN$, $NF \parallel BM$.

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho $ME \parallel CN$, $NF \parallel BM$, thu được :

$$\begin{cases} \frac{EO}{OC} = \frac{MO}{ON} \\ \frac{BO}{OF} = \frac{MO}{ON} \end{cases} \Rightarrow \frac{EO}{OC} = \frac{BO}{OF}.$$

Điều này chứng tỏ đường thẳng BE cắt hai cạnh OC , OF kéo dài của tam giác OCF và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ nên BE song song với cạnh còn lại CF , hay $BE \parallel CF$ (theo định lí Ta-lét đảo).



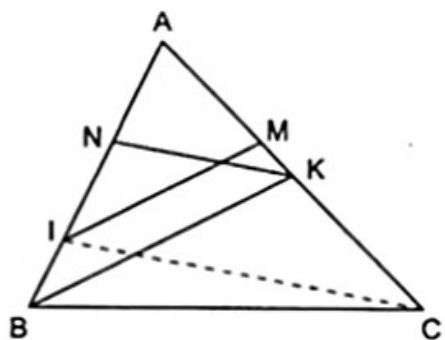
Hình 335

13. (hình 336) Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác ACI và AKB có $NK \parallel IC$, $IM \parallel BK$, thu được : $\frac{AN}{AI} = \frac{AK}{AC}$. (1)

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AM}{AK}. \quad (2)$$

Nhân theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}.$$



Hình 336

Điều này chứng tỏ đường thẳng MN cắt hai cạnh AB , AC của tam giác ABC và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ nên MN song song với cạnh còn lại BC , hay $MN \parallel BC$ (theo định lí Ta-lét đảo).

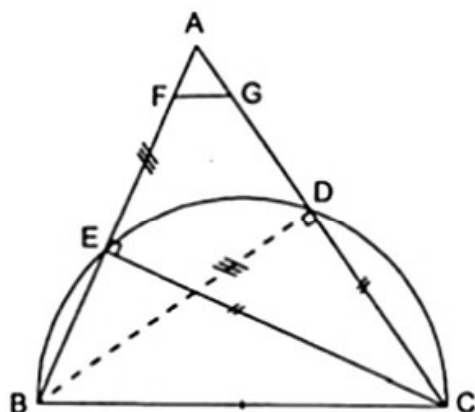
- 14*. (hình 337) Tính diện tích tam giác ABC theo hai cách :

$$\text{Cách 1 : } S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} BF \cdot AC$$

(do $BD = BF$ theo giả thiết).

$$\text{Cách 2 : } S = \frac{1}{2} CE \cdot AB = \frac{1}{2} CG \cdot AB$$

(do $CG = CE$ theo giả thiết).



Hình 337

Vì tam giác ABC chỉ có một diện tích nên hai kết quả trên phải bằng nhau,

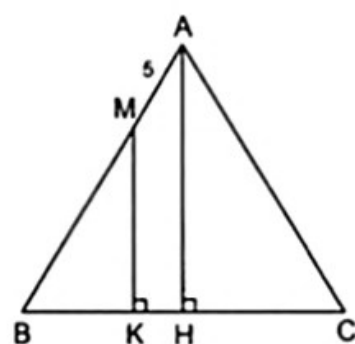
$$\text{tức là : } BF \cdot AC = CG \cdot AB \Rightarrow \frac{BF}{BA} = \frac{CG}{CA}.$$

Điều này chứng tỏ đường thẳng FG cắt hai cạnh AB, AC của tam giác ABC và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ nên FG song song với cạnh còn lại BC, hay $FG \parallel BC$ (theo định lí Ta-lét đảo).

15. (hình 338) Qua A và M lần lượt kẻ các đường thẳng AH, MK cùng vuông góc với BC thì $AH \parallel MK$ và MK là khoảng cách từ M đến BC.

Vì tam giác ABC cân ở A nên H là trung điểm của BC, do đó $BH = 5\text{cm}$.

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho $MK \parallel AH$, ta được: $\frac{MK}{AH} = \frac{BM}{BA}$ hay $\frac{MK}{AH} = \frac{8}{13} \Leftrightarrow MK = \frac{8 \cdot AH}{13}$. (1)



Hình 338

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác AHB vuông ở H, thu được:

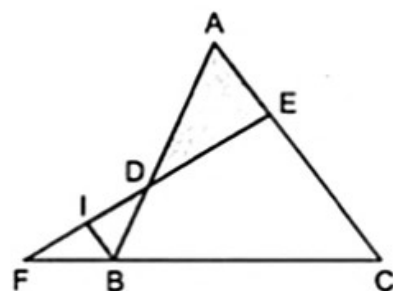
$$AB^2 = BH^2 + HA^2 \text{ hay } 13^2 = 5^2 + HA^2 \Leftrightarrow HA^2 = 12^2 \Leftrightarrow HA = 12(\text{cm}).$$

Thay $HA = 12\text{cm}$ vào đẳng thức (1), ta được: $MK = \frac{96}{13}(\text{cm})$.

16. (hình 339) Kẻ thêm $BI \parallel AC$ thì $BI \parallel EC$ và $BI \parallel AE$.

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho $BI \parallel EC$ và $BI \parallel AE$, thu được: $\frac{FB}{FC} = \frac{BI}{EC}$. (1)

$$\frac{BI}{AE} = \frac{BD}{DA} \text{ hay } \frac{BI}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} BI = 1t \\ AE = 2t \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$



Hình 339

Thay $AE = 2t$ vào giả thiết $\frac{EA}{EC} = \frac{2}{3}$, ta được: $\frac{2t}{EC} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow EC = 3t$.

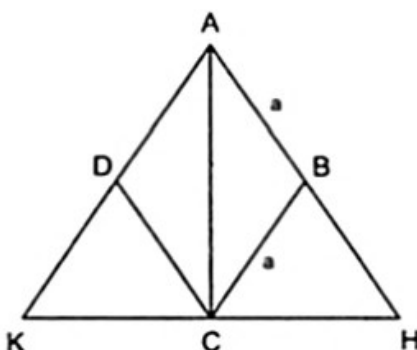
Thay $BI = 1t$ và $EC = 3t$ vào đẳng thức (1), ta được: $\frac{FB}{FC} = \frac{1t}{3t} = \frac{1}{3}$.

17. (hình 340) Vì ABCD là hình thoi nên $BC \parallel DA$ hay $BC \parallel AK$. Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho $BC \parallel AK$, ta được:

$$\frac{BC}{AK} = \frac{HB}{HA} = \frac{HA - AB}{HA} = 1 - \frac{AB}{HA}.$$

Từ giả thiết $AB = BC = a$, ta có:

$$\frac{a}{AK} = 1 - \frac{a}{AH} \Leftrightarrow \frac{a}{AH} + \frac{a}{AK} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{AH} + \frac{1}{AK} = \frac{1}{a}.$$



Hình 340

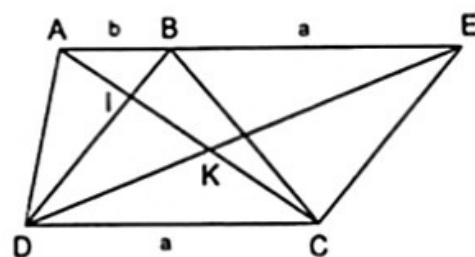
18*. (hình 341) Đặt $BC = CD = a$, $AB = b$ thì $AE = a + b$.

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho $AE \parallel DC$ và $AB \parallel CD$, ta được :

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AE}{DC} = \frac{a+b}{a}.$$

$$\frac{AI}{IC} = \frac{AB}{DC} = \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} AI = bt \\ IC = at \end{cases}.$$

(1)



Hình 341

Nên $AC = at + bt = t(a + b)$, do đó : $\frac{AC}{CI} = \frac{t(a + b)}{at} = \frac{a + b}{a}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}.$

Chủ đề 3

1. (hình 342) Áp dụng tính chất của đường phân giác AD vào tam giác ABC, ta

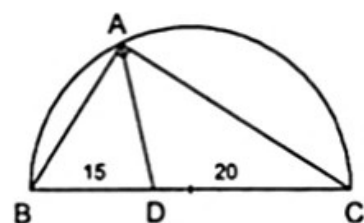
được : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ hay $\frac{AB}{AC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} AB = 3t \\ AC = 4t \end{cases}$ (với $t > 0$).

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ABC vuông ở A, ta được : $BC^2 = CA^2 + AB^2$ hay

$$35^2 = (3t)^2 + (4t)^2$$

$$\Leftrightarrow (5t)^2 = 35^2 \Leftrightarrow 5t = 35 \Leftrightarrow t = 7 \text{ (vì } t > 0).$$

Vậy $AB = 21$ (cm); $AC = 28$ (cm) .



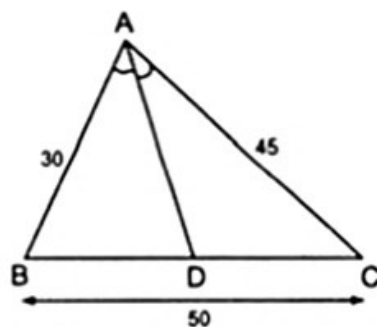
Hình 342

2. (hình 343) Áp dụng tính chất của đường phân giác AD vào tam giác ABC, ta được :

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} BD = 2t \\ DC = 3t \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$

Vì $BD + DC = BC = 2t + 3t = 5t = 50 \Leftrightarrow t = 10$.

Vậy $BD = 20$ cm; $DC = 30$ cm.



Hình 343

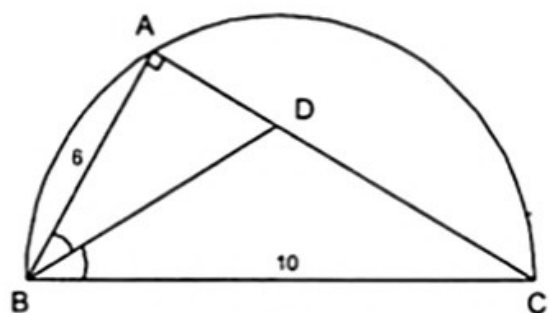
3. (hình 344) Áp dụng tính chất của đường phân giác BD vào tam giác ABC, ta được : $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{CB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} AD = 3t \\ DC = 5t \end{cases}$ (với $t > 0$) nên $AC = 8t$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ABC vuông ở A, ta được :

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay}$$

$$10^2 = (8t)^2 + 6^2 \Leftrightarrow (8t)^2 = 8^2$$

$$\Leftrightarrow 8t = 8 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Do đó } AD = 3(\text{cm}).$$



Hình 344

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ABD vuông ở A, ta được :

$$BD^2 = DA^2 + AB^2 \text{ hay } BD^2 = 3^2 + 6^2$$

$$\Leftrightarrow BD^2 = 45 = (3\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow BD = 3\sqrt{5}(\text{cm}).$$

- 4*. (hình 345) Trước hết ta đi tính BC và AH.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ABC vuông ở A, ta được :

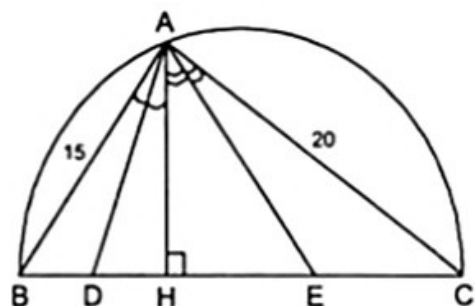
$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } BC^2 = 15^2 + 20^2 \Leftrightarrow BC^2 = 25^2 \Leftrightarrow BC = 25(\text{cm}).$$

Đặt $BD = x$ thì $DC = 25 - x$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào hai tam giác vuông AHB và AHC vuông ở H, ta được :

$$\begin{cases} AB^2 = BH^2 + HA^2 \\ AC^2 = CH^2 + HA^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} HA^2 = 15^2 - x^2 & (1) \\ HA^2 = 20^2 - (25 - x)^2 & (2) \end{cases}$$



Hình 345

Trừ theo vế các đẳng thức (1) và (2), thu được :

$$15^2 - x^2 - 20^2 + (25 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow 50x = 450 \Leftrightarrow x = 9 (\text{cm}).$$

Nên $HC = 25 - 9 = 16 (\text{cm}).$

Thay $x = 9$ vào đẳng thức (1) ta được $HA^2 = 15^2 - 9^2 = 12^2 \Leftrightarrow HA = 12(\text{cm}).$

Áp dụng tính chất của đường phân giác AD vào tam giác ABH, ta được :

$$\frac{DB}{DH} = \frac{BA}{HA} \text{ hay } \frac{DB}{DH} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{DB}{5} = \frac{DH}{4}.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được :

$$\frac{DB}{5} = \frac{DH}{4} = \frac{DB+DH}{5+4} = \frac{BH}{9} = \frac{9}{9} = 1. \text{ Suy ra } DH = 4(\text{cm}).$$

Áp dụng tính chất của đường phân giác AE vào tam giác ACH, ta được :

$$\frac{EC}{EH} = \frac{CA}{HA} \text{ hay } \frac{EC}{EH} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{EC}{5} = \frac{EH}{3}.$$

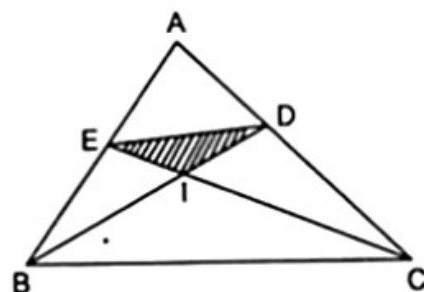
Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được :

$$\frac{EC}{5} = \frac{EH}{3} = \frac{EC+EH}{3+5} = \frac{CH}{8} = \frac{16}{8} = 2. \text{ Suy ra } HE = 6\text{cm}.$$

5. (hình 346)

a) Áp dụng tính chất của đường phân giác BD vào tam giác ABC, ta được :

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{CB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} AD = 2t \\ DC = 3t \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$



Hình 346

Nên $AC = 5 = 5t \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $AD = 2\text{cm}$, $DC = 3\text{cm}$.

b*) Ta có $\frac{S_{DAE}}{S_{ACE}} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5}$ (1) (vì chung đường cao kẻ từ E đến AC).

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AB} \quad (2) \text{ (vì chung đường cao kẻ từ C đến AB)}.$$

Áp dụng tính chất của đường phân giác CE vào tam giác ABC ta được

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{EB}{BC} \text{ hay } \frac{AE}{5} = \frac{EB}{6} = \frac{AE+EB}{5+6} = \frac{AB}{11} = \frac{4}{11}.$$

$$\text{Suy ra } AE = \frac{4}{11} \cdot 5 \text{ nên } \frac{AE}{AB} = \frac{4}{11}. \quad (3)$$

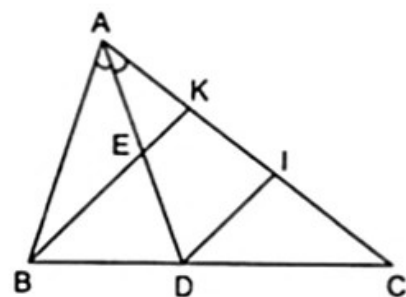
$$\text{Thay (3) vào (2), ta được : } \frac{S_{ACE}}{S_{ABC}} = \frac{4}{11}. \quad (4)$$

$$\text{Nhân theo vế các đẳng thức (1) và (4), ta được : } \frac{S_{DAE}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{55}.$$

6. (hình 347) Kẻ $DI \parallel BK$ thì $DI \parallel EK$.

Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác AID và BKC có $DI \parallel EK$, $DI \parallel BK$, ta được: $\frac{AK}{KI} = \frac{AE}{ED}$

$$\text{hay } \frac{AK}{KI} = \frac{3}{2} \Rightarrow AK = \frac{3KI}{2} \quad (1); \quad \frac{CK}{KI} = \frac{CB}{BD} \quad (2).$$



Hình 347

Áp dụng tính chất của đường phân giác AD vào tam giác ABC, ta được:

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB} \text{ hay } \frac{CD}{DB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{2} = \frac{DB}{3} = \frac{CD+DB}{2+3} = \frac{BC}{5} \Rightarrow \frac{CB}{BD} = \frac{5}{3} \quad (3).$$

$$\text{Thay (3) vào đẳng thức (2), ta được: } \frac{CK}{KI} = \frac{5}{3} \Rightarrow CK = \frac{5KI}{3} \quad (4).$$

$$\text{Chia theo vế các đẳng thức (1) và (4), ta được: } \frac{AK}{KC} = \frac{3KI}{2} : \frac{5KI}{3} = \frac{9}{10}.$$

- 7*. (hình 348) a) Áp dụng tính chất của các đường phân giác AD và BI vào các tam giác ABC, ABD ta được $\frac{DI}{IA} = \frac{DB}{BA} = \frac{DB}{c}$ (1).

$$\frac{DB}{BA} = \frac{DC}{CA} \text{ hay } \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB+DC}{b+c} = \frac{BC}{b+c} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow DB = \frac{ca}{b+c} \quad (2).$$

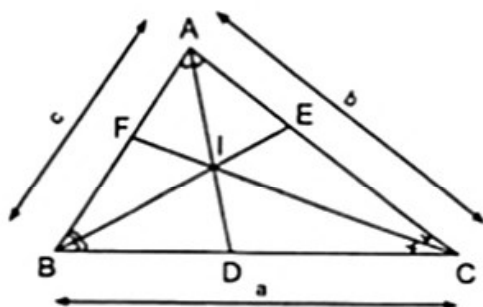
Thay (2) vào (1), ta được:

$$\frac{DI}{IA} = \frac{ca}{c(b+c)} = \frac{a}{b+c}.$$

Suy ra

$$\frac{DI}{a} = \frac{IA}{b+c} = \frac{DI+IA}{a+b+c} = \frac{AD}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{DI}{DA} = \frac{a}{a+b+c} \quad (3).$$



Hình 348

- b) Chứng minh tương tự như câu a) ta cũng được:

$$\frac{EI}{EB} = \frac{b}{a+b+c} \quad (4); \quad \frac{FI}{FC} = \frac{c}{a+b+c} \quad (5).$$

Cộng theo vế các đẳng thức (3), (4) và (5), thu được :

$$\frac{DI}{DA} + \frac{EI}{EB} + \frac{FI}{FC} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

Chủ đề 4

1. (hình 349)

a) Giả sử đã vẽ được $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ theo

tỉ số $k = 2$, thế thì $\frac{AM}{AB} = 2 = k$.

Từ đó suy ra cách vẽ gồm hai bước sau :

Bước 1 : Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $\frac{AM}{AB} = 2$.

Bước 2 : Kẻ $Mx \parallel BC$ cắt AC ở N.

Ta có $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $k = 2$.

2. (hình 350) Từ giả thiết :

$$\begin{cases} AD = \frac{1}{3} AB \\ AE = \frac{1}{3} AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3} \\ \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Điều này chứng tỏ đường thẳng DE cắt phần kéo dài hai cạnh AB, AC của tam giác ABC và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, nên $DE \parallel BC$ (theo định lí Ta-lét đảo).

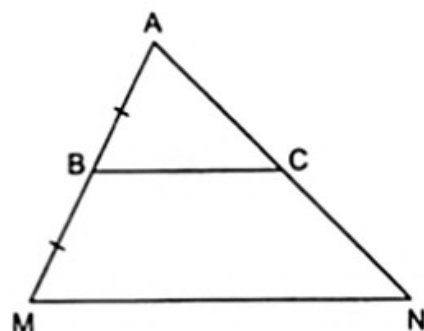
Suy ra $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{3}$.

3. Câu trả lời là không.

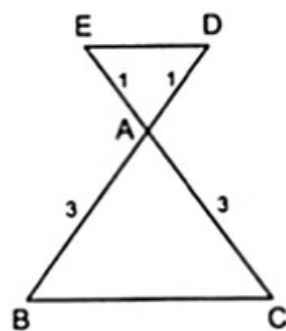
Giải thích : Chẳng hạn một tam giác đều cạnh là 3cm đồng dạng với một tam giác đều cạnh là 1cm, nhưng chúng không thể bằng nhau.

4. (Học sinh tự vẽ hình)

a) Từ giả thiết $\begin{cases} \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \\ \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$ (theo tính chất bắc cầu của hai tam giác đồng dạng).



Hình 349



Hình 350

b) Vì $\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = k_1 \cdot k_2$. Nên $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$ theo tỉ số đồng dạng $k_3 = k_1 \cdot k_2$.

5. (Học sinh tự vẽ hình) Vì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ nên $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$
 hay $\frac{3}{A'B'} = \frac{4}{B'C'} = \frac{6}{C'A'}$ suy ra cạnh bé nhất của $\Delta A'B'C'$ là cạnh $A'B'$.

Theo giả thiết cạnh đó bằng cạnh lớn nhất của tam giác ABC là 6cm tức là $A'B' = 6\text{cm}$ nên ta có:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{4}{B'C'} = \frac{6}{C'A'} \Leftrightarrow B'C' = 8 \text{ (cm)}; C'A' = 12 \text{ (cm)}.$$

6. (Học sinh tự vẽ hình) Vì $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ nên ta có tỉ số đồng dạng :

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} \text{ hay } \frac{A'B'}{16,2} = \frac{B'C'}{24,3} = \frac{C'A'}{32,7}.$$

a) Từ giả thiết cạnh $A'B'$ tương ứng với cạnh AB và lớn hơn cạnh đó 10,8cm nên $A'B' = 27\text{cm}$, do đó :

$$\frac{27}{16,2} = \frac{5}{3} = \frac{B'C'}{24,3} = \frac{C'A'}{32,7} \Leftrightarrow B'C' = 40,5 \text{ (cm)}; C'A' = 54,5 \text{ (cm)}.$$

b) Từ giả thiết cạnh $A'B'$ tương ứng với cạnh AB và bé hơn cạnh đó 5,4cm nên $A'B' = 10,8\text{cm}$, do đó :

$$\frac{10,8}{16,2} = \frac{2}{3} = \frac{B'C'}{24,3} = \frac{C'A'}{32,7} \Leftrightarrow B'C' = 16,2 \text{ (cm)}; C'A' = 21,8 \text{ (cm)}.$$

7. Câu trả lời là có.

a) Sắp thứ tự các cạnh của tam giác thứ nhất : 4; 5; 6.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác thứ hai : 8; 10; 12.

Ta có $\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}$).

b) Sắp thứ tự các cạnh của tam giác thứ nhất : 3; 4; 6.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác thứ hai : 9; 15; 18.

Ta có $\frac{3}{9} = \frac{4}{15} = \frac{6}{18}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{3}$).

c) Sắp thứ tự các cạnh của tam giác thứ nhất : 1; 2; 2.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác thứ hai : 0,5; 1; 1.

Ta có $\frac{1}{0,5} = \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$ (vì cùng bằng 2).

8. (hình 351)

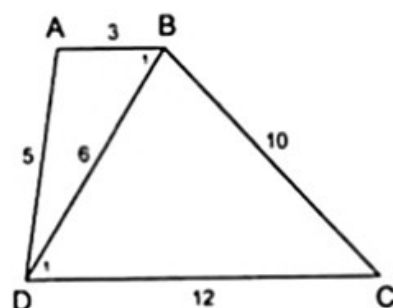
a) Sắp thứ tự các cạnh của tam giác BAD : 3; 5; 6.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác DBC : 6; 10; 12.

Ta có $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}$) hay

$$\frac{BA}{DB} = \frac{AD}{BC} = \frac{DB}{CD} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ (c.c.c).



Hình 351

b) Từ câu a), $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ theo định nghĩa hai tam giác đồng dạng nên $AB \parallel DC$ (vì có cặp góc ở vị trí so le bằng nhau).

Tứ giác ABCD có hai cạnh đối song song nên nó là hình thang.

9. (hình 352) Vì $\widehat{BHA} = \widehat{AHC} = 90^\circ$.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác HBA : 4; 6.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác HAC : 6; 9.

Ta có $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ (vì cùng bằng $\frac{2}{3}$) nên

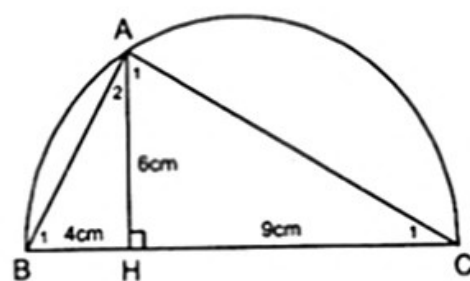
$$\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} = \frac{2}{3}.$$

Do đó $\triangle HBA \sim \triangle HAC$ (c - g - c).

Theo định nghĩa hai tam giác đồng dạng, ta có :

$$\begin{cases} \widehat{B_1} = \widehat{A_1} \\ \widehat{C_1} = \widehat{A_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\widehat{B_1} + \widehat{C_1}}{1} = \frac{\widehat{A_1} + \widehat{A_2}}{1} = \frac{\widehat{B_1} + \widehat{C_1} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Vậy $\widehat{BAC} = 90^\circ$.



Hình 352

10. (hình 353) Vì $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (góc so le của $AB \parallel CD$).

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác BAD : 2; 4.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác DBC : 4; 8.

Ta có $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}$) nên :

$$\frac{BA}{DB} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle DBC \text{ (c.g.c.)}$$

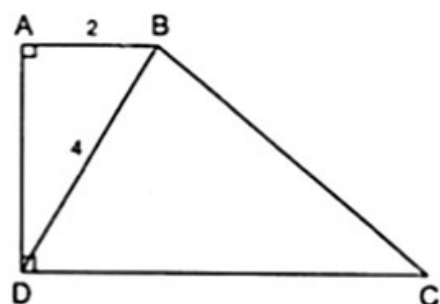
Theo định nghĩa tam giác đồng dạng, ta có :

$$\frac{BA}{DB} = \frac{AD}{BC} \text{ hay } \frac{4}{2} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AD}{2} \quad (1)$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABD vuông ở A, ta được :

$$\begin{aligned} BD^2 &= DA^2 + AB^2 \text{ hay } 4^2 = DA^2 + 2^2 \Leftrightarrow DA^2 = 12 = (2\sqrt{3})^2 \\ &\Leftrightarrow DA = 2\sqrt{3}(\text{cm}). \end{aligned}$$

Thay $DA = 2\sqrt{3}$ vào đẳng thức (1), ta được : $BC = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(\text{cm})$.



Hình 353

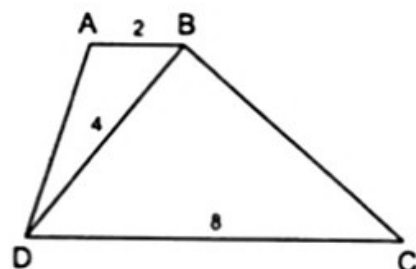
11. (hình 354) Vì $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (góc so le của $AB \parallel CD$).

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác BAD : 2; 4.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác DB : 4; 8.

Ta có $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}$) nên

$$\frac{BA}{DB} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle DBC \text{ (c.g.c.)}$$



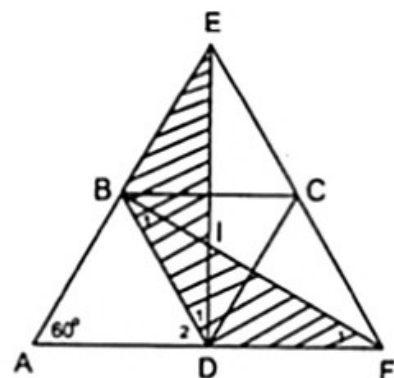
Hình 354

Theo định nghĩa tam giác đồng dạng ta có $\widehat{A} = \widehat{DBC}$.

12. (hình 355)

a) Áp dụng định lý Ta-lét vào tam giác EAF có $BC \parallel AF$ và $DC \parallel AE$, ta được :

$$\begin{cases} \frac{EB}{BA} = \frac{EC}{CF} \\ \frac{FD}{DA} = \frac{EC}{CF} \end{cases} \Rightarrow \frac{EB}{BA} = \frac{FD}{DA}$$



Hình 355

b) Vì ABCD là hình thoi có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên các tam giác ABD và BCD là các tam giác đều, do đó $AB = BD = DA$.

Từ câu a) suy ra $\frac{EB}{ED} = \frac{BD}{BF}$.

Ta lại có $\widehat{EBD} = \widehat{BDF} = 120^\circ$. Vậy $\triangle EBD \sim \triangle BDF$ (c.g.c).

c) Từ câu b), $\triangle EBD \sim \triangle BDF$ suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{F_1}$. Vì $\widehat{D_2} = 60^\circ$ là góc ngoài của tam giác BDF nên $\widehat{B_1} + \widehat{F_1} = \widehat{D_2} = 60^\circ$.

Áp dụng tính chất về góc vào tứ giác ABID, ta được :

$$\widehat{A} + \widehat{ABI} + \widehat{BID} + \widehat{ADI} = 360^\circ, \text{ hay}$$

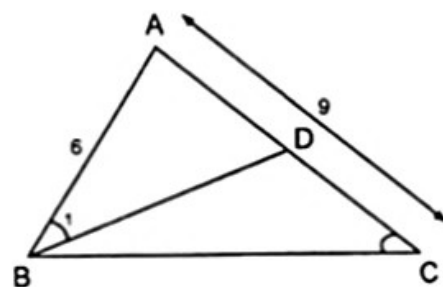
$$60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + \widehat{BID} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{BID} = 120^\circ.$$

13. (hình 356) Từ giả thiết :

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A} \\ \widehat{B_1} = \widehat{C} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACB \text{ (g - g)}.$$

Theo định nghĩa tam giác đồng dạng, ta có :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \text{ hay } \frac{6}{9} = \frac{AD}{6} \Leftrightarrow AD = \frac{36}{9} = 4(\text{cm}).$$



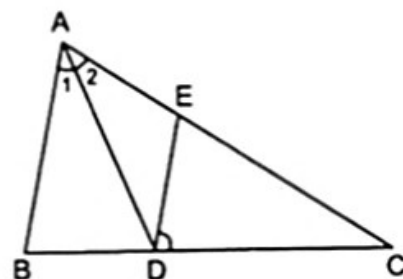
Hình 356

14. (hình 357)

a) Từ giả thiết :

$$\begin{cases} \widehat{C} = \widehat{C} \\ \widehat{CDE} = \widehat{BAC} \end{cases} \Rightarrow \triangle CDE \sim \triangle CAB \text{ (g - g)}.$$

b) Từ câu b), ta có : $\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA}. \quad (1)$



Hình 357

Áp dụng tính chất của đường phân giác AD vào tam giác ABC, ta được :

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{DB}{AB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có : $\frac{DE}{AB} = \frac{DB}{AB} \Rightarrow DB = DE.$

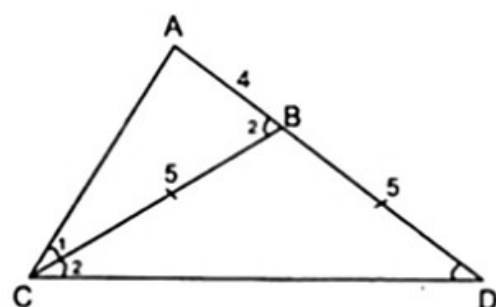
15. (hình 358) Đặt $\widehat{C}_1 = \alpha$ thì $\widehat{B}_2 = 2\alpha$.

Trên tia đối của ta BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Lúc đó $\widehat{D} = \widehat{C}_2$. Mặt khác $\widehat{ABC}$ là góc ngoài của tam giác BCD nên :

$$\widehat{D} = \widehat{C}_2 = \alpha \Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{C}_1 = \alpha \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ABC}.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A} \\ \widehat{ACD} = \widehat{ABC} \end{cases} \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta ABC \text{ (g.g).}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD = 4 \cdot 9 = 6^2 \Leftrightarrow AC = 6 \text{ (cm).}$$



Hình 358

16. (hình 359)

a) Áp dụng tính chất của đường phân giác BD vào tam giác ABC, thu được :

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{AD+DC}{AB+BC} = \frac{AC}{AB+BC}.$$

$$\text{Hay } \frac{AD}{20} = \frac{DC}{5} = \frac{20}{20+5} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Vậy $AD = 16 \text{ (cm)}$, $DC = 4 \text{ (cm)}$.

b) Kẻ $AH \perp BC$, $DK \perp BC$ thì $AH \parallel DK$ và $BH = HC = 2,5 \text{ cm}$ (theo tính chất của tam giác cân).

Áp dụng định lý Ta-lét vào tam giác ACH có $AH \parallel DK$, ta được :

$$\frac{CK}{CH} = \frac{CD}{CA} \text{ hay } \frac{CK}{2,5} = \frac{4}{20} \Leftrightarrow CK = 0,5 \text{ (cm) nên :}$$

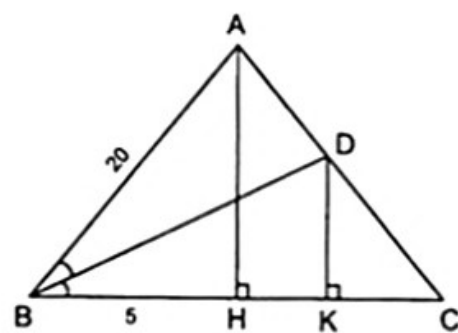
$$BK = BC - CK = 5 - 0,5 = 4,5 \text{ (cm).}$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào hai tam giác vuông BDK và DCK, ta được :

$$\begin{cases} CD^2 = CK^2 + DK^2 \\ BD^2 = DK^2 + KB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DK^2 = 4^2 - 0,5^2 & (1) \\ DK^2 = BD^2 - 4,5^2 & (2) \end{cases}$$

Trừ theo vế các đẳng thức (2) và (1), thu được :

$$BD^2 = 4,5^2 + 4^2 - 0,5^2 = 6^2 \Leftrightarrow BD = 6 \text{ (cm).}$$

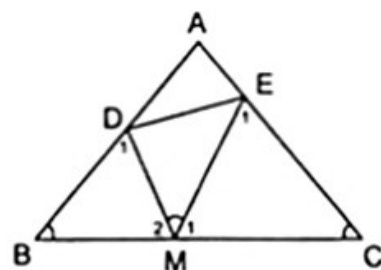


Hình 359

17. (hình 360) Vì $\widehat{BME} = \widehat{M}_2 + \alpha$ là góc ngoài của tam giác MEC, nên :

$$\widehat{M}_2 + \alpha = \widehat{E}_1 + \alpha \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{E}_1.$$

Do đó $\triangle MBD \sim \triangle ECM$.



Hình 360

18. (Học sinh tự vẽ hình)

Bước 1 : Dựng $\triangle AB'C'$ biết $\widehat{A} = 60^\circ$ và $AB' = 1\text{cm}$, $AC' = 3\text{cm}$.

- Dựng $\widehat{xAy} = 60^\circ$.
- Trên tia Ax dựng đoạn $AB' = 1$.
- Trên tia Ay dựng đoạn $AC' = 3$.

Bước 2 : Dựng $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ có đường trung tuyến $AM = 4\text{cm}$.

- Dựng đường trung tuyến AM' .
 - Trên tia AM' lấy $AM = 4\text{cm}$.
 - Qua M, dựng đường thẳng song song với $B'C'$, cắt Ax và Ay ở B và C.
- Ta được tam giác ABC là tam giác cần dựng.

19. (Học sinh tự vẽ hình)

Bước 1 : Dựng $\triangle AB'C'$ biết $\widehat{B'} = 70^\circ$; $\widehat{C'} = 30^\circ$.

Bước 2 : Dựng $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ có đường phân giác $AD = 3\text{cm}$.

- Dựng đường phân giác AD'
 - Trên tia AD' lấy $AD = 3\text{cm}$.
 - Qua D, dựng đường thẳng song song với $B'C'$, cắt Ax và Ay ở B và C.
- Ta được tam giác ABC là tam giác cần dựng.

Thật vậy, theo cách dựng $BC \parallel B'C'$, nên :

$$\widehat{B} = \widehat{B'} = 70^\circ; \widehat{C} = \widehat{C'} = 30^\circ; AD = 3\text{cm}.$$

20. (Học sinh tự vẽ hình) Trước hết ta đi tính AC, AB.

$$\text{Từ giả thiết } \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} AB = 3t \\ AC = 4t \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A, ta được :

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } 10^2 = (3t)^2 + (4t)^2 = (5t)^2 \Leftrightarrow 5t = 10 \Leftrightarrow t = 2.$$

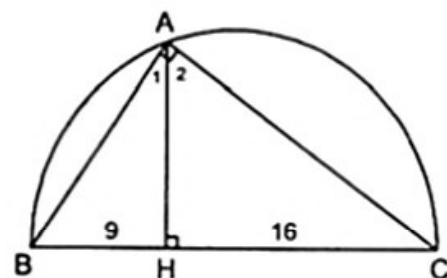
Nên $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$.

Học sinh tự dựng tam giác ABC vuông ở A biết ba cạnh $BC = 10\text{cm}$, $CA = 8\text{cm}$ và $AB = 6\text{cm}$.

Chủ đề 5

1. (hình 361) Vì $\begin{cases} \widehat{H} = \widehat{H} = 90^\circ \\ \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (cùng phụ với góc } A_1) \end{cases}$

$$\text{nên } \triangle HBA \sim \triangle HAC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}.$$



Hình 361

$$\text{Thay số: } \frac{9}{HA} = \frac{HA}{16} \Leftrightarrow HA^2 = 9 \cdot 16 = 12^2 \Leftrightarrow HA = 12 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Lại có } \frac{BA}{AC} = \frac{HB}{HA} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} BA = 3t \\ AC = 4t \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A , ta được:

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } 25^2 = (3t)^2 + (4t)^2 = (5t)^2 \Leftrightarrow 5t = 25 \Leftrightarrow t = 5.$$

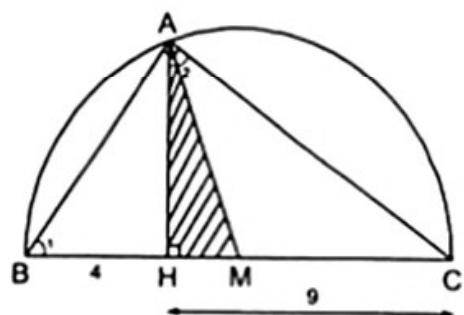
Vậy $BA = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$.

2. (hình 362) Áp dụng tính chất của đường trung tuyến AM ứng với cạnh huyền BC ta được $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{13}{2}(\text{cm})$.

$$\text{Ta có } HM = BM - BH = 6,5 - 4 = 2,5(\text{cm}).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \widehat{H} = \widehat{H} = 90^\circ \\ \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (cùng phụ với góc } A_1) \end{cases}$$

$$\text{Nên } \triangle HBA \sim \triangle HAC \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}, \text{ hay}$$



Hình 362

$$\frac{4}{HA} = \frac{HA}{9} \Leftrightarrow HA^2 = 9 \cdot 4 = 6^2 \Leftrightarrow HA = 6(\text{cm}).$$

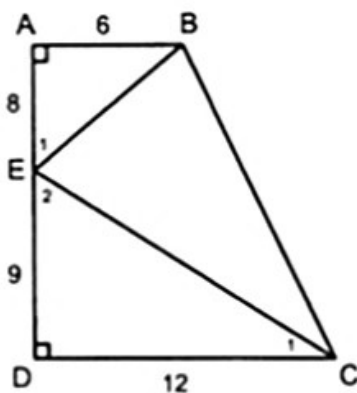
3. (hình 363) Vì $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác ABE : 6; 8.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác DEC : 9; 12.

Ta có $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ (vì cùng bằng $\frac{2}{3}$), nên

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DC} \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle DEC (c - g - c)$$



Hình 363

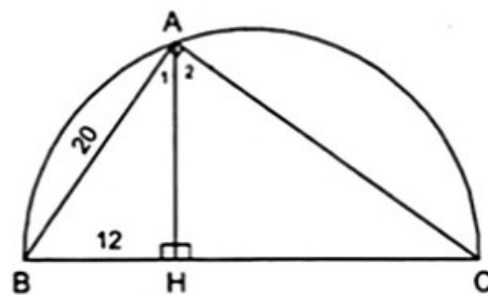
Theo định nghĩa tam giác đồng dạng và tính chất về góc của tam giác vuông

$$\text{DCE ta có } \begin{cases} \widehat{E}_1 = \widehat{C}_1 \\ \widehat{C}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ.$$

Vì góc AED là góc bẹt nên $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 + \widehat{BEC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$.

4. (hình 364)

$$\text{a) Từ giả thiết } \begin{cases} \frac{AC}{AH} = \frac{5}{3} \\ \frac{BA}{BH} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{BA}{BH} = \frac{AC}{AH}$$



Hình 364

nên $\triangle BAH \sim \triangle ACH$ (trường hợp cạnh huyền – cạnh góc vuông).

b) Theo định nghĩa tam giác đồng dạng và tính chất về góc của tam giác

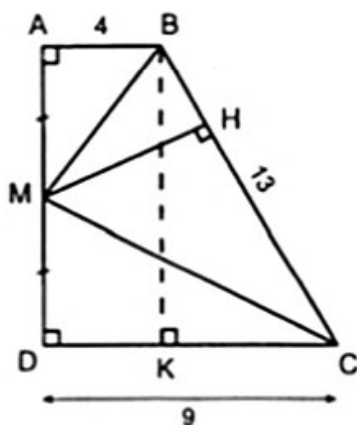
$$\text{vuông ABH, ta có: } \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{A}_2 \\ \widehat{B} + \widehat{A}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

5*. (hình 365) Kẻ $BK \perp CD$ thì tứ giác ABKD có ba góc vuông là $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{K} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật, do đó $DK = AB = 4\text{cm}$, suy ra :

$$KC = DC - DK = 9 - 4 = 5(\text{cm}).$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác BKC vuông tại K, ta được : $BC^2 = CK^2 + KB^2$ hay $13^2 = 5^2 + KB^2$

$$\Leftrightarrow KB^2 = 12^2 \Leftrightarrow KB = 12(\text{cm}).$$



Hình 365

Áp dụng tính chất về cạnh vào hình chữ nhật ABKD, ta được :

$$AD = BK = 12(\text{cm}), \text{ do đó } AM = MD = 6\text{cm}.$$

Tính được $MC = 19\text{cm}$. Vì $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, xét các tam giác vuông ABM, DMC :

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác ABM : 4 ; 6.

Sắp thứ tự các cạnh của tam giác DMC : 6 ; 19.

$$\text{Ta có : } \frac{4}{6} = \frac{6}{9} \text{ (vì cùng bằng } \frac{2}{3} \text{), nên : } \frac{AB}{DM} = \frac{AM}{DC}$$

$$\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta DMC \text{ (c.g.c).}$$

Chứng minh tương tự như câu b) bài 4, ta được : $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

Kẻ $MH \perp BC$ thì MH là khoảng cách từ M đến BC.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào hai tam giác vuông ABM và DMC, ta được :

$$\begin{cases} BM^2 = MA^2 + AB^2 \\ MC^2 = CD^2 + DM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM^2 = 6^2 + 4^2 = 52 = (2\sqrt{13})^2 \\ MC^2 = 9^2 + 6^2 = 117 = (3\sqrt{13})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM = 2\sqrt{13}(\text{cm}) \\ MC = 3\sqrt{13}(\text{cm}). \end{cases}$$

Áp dụng phương pháp diện tích vào tam giác vuông BCM, thu được :

$$BM \cdot MC = MH \cdot BC \text{ hay } 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13} = MH \cdot 13$$

$$\Leftrightarrow MH \cdot 13 = 6 \cdot 13 \Leftrightarrow MH = 6 \text{ (cm).}$$

6. (hình 366) Kẻ $OH \perp AB$ kéo dài cắt CD ở K thì $OK \perp CD$.

Nên OH, OK thứ tự là các đường cao của hai tam giác OAB và OCD.

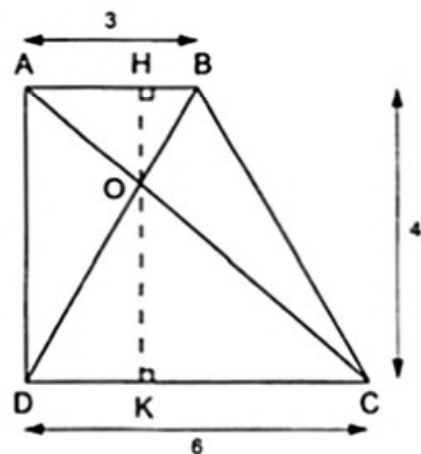
Từ giả thiết $AB \parallel CD$ ta có $\Delta OAB \sim \Delta OCD$, nên :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Áp dụng kết quả tỉ số đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng, ta có :

$$\frac{OH}{OK} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} OH = 1t \\ OK = 2t \end{cases} \text{ nên } 4 = 3t \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Suy ra : } OH = \frac{4}{3} \text{ (cm); } OK = \frac{8}{3} \text{ (cm).}$$



Hình 366

$$\text{Vậy } S_{OAB} = \frac{1}{2} AB.OH = \frac{1}{2} . 3 . \frac{4}{3} = 2 \text{ (cm}^2\text{)} ;$$

$$S_{OCD} = \frac{1}{2} CD.OK = \frac{1}{2} . 6 . \frac{8}{3} = 8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

7. (Học sinh tự vẽ hình)

Vì $DE \parallel BC$ nên $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{DE}{BC}$.

Áp dụng định lí về tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng và giả thiết ta

$$\text{được } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2; \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} \text{ suy ra } k^2 = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

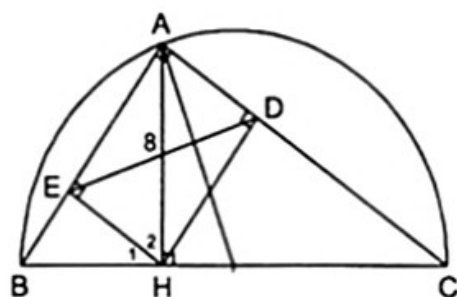
8. (hình 367) Từ giả thiết ta có tứ giác ADHE là hình chữ nhật vì có ba góc vuông nên $DE = AH = 8\text{cm}$, $\triangle ADE = \triangle HEA$ suy ra $\triangle ADE \sim \triangle HEA$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} \widehat{B} + \widehat{H_1} = 90^\circ \\ \widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{H_2}.$$

$$\text{Do đó } \triangle BAC \sim \triangle HEA \text{ (g - g)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ADE \sim \triangle BAC$.

$$\text{Lúc đó tỉ số đồng dạng } k = \frac{DE}{BC} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$



Hình 367

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} 8.20 = 80 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Áp dụng định lí về tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng, ta được :

$$\frac{S_{ADE}}{80} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Leftrightarrow S_{ADE} = \frac{80.4}{25} = 12,8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

- 9*. (hình 368) Từ giả thiết $MO \parallel BC$, $RO \parallel AC$, $QO \parallel AB$, $ON \parallel BC$, $OP \parallel AB$, $OS \parallel AC$ nên các tam giác RMO, QON, OPS cùng đồng dạng với tam giác ABC và các tứ giác AQOR, ONCS và MOPB là các hình bình hành.

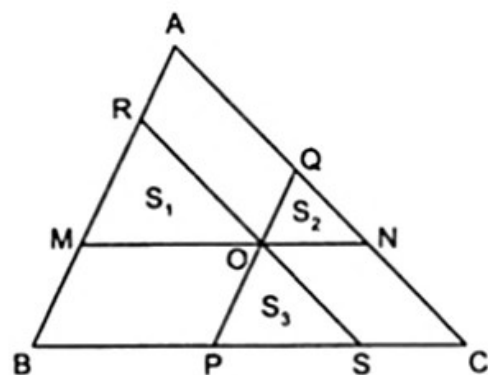
Áp dụng tính chất về cạnh vào các hình bình hành trên, ta được :

$$MO = BP; ON = SC.$$

Áp dụng định lí về tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng, ta được :

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{MO}{BC}\right)^2 = \left(\frac{BP}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{BP}{BC} \quad (1).$$

Tương tự $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{SC}{BC} \quad (2); \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{PS}{BC} \quad (3).$



Hình 368

Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2) và (3), ta được :

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{BP + PS + SC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

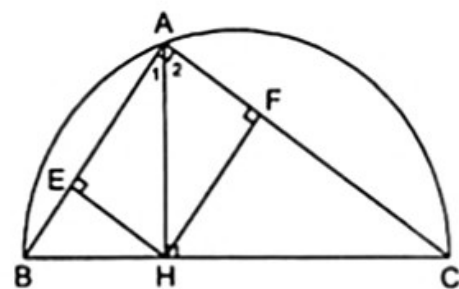
Suy ra $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}.$

10. (hình 369) Tứ giác AFHE có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình chữ nhật này ta được $EF = AH.$

Bài toán trở thành chứng minh rằng :

$$AB.AE + AC.AF = AH^2 + AH^2.$$



Hình 369

$$\text{Vi} \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_1} \\ \widehat{H} = \widehat{E} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta AEH \text{ (g - g) nên :}$$

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AH^2. \quad (1)$$

$$\text{Vi} \begin{cases} \widehat{A_2} = \widehat{A_2} \\ \widehat{H} = \widehat{F} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta AFH \text{ (g - g) nên :}$$

$$\frac{AC}{AH} = \frac{AH}{AF} \Rightarrow AC.AF = AH^2. \quad (2)$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), thu được :

$$AB.AE + AC.AF = AH^2 + AH^2 = 2AH^2 = 2EF^2$$

11. (hình 370)

$$\text{a) Vì } \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_1} \\ \widehat{H} = \widehat{D} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta AHE \sim \Delta ADB \text{ (g - g)}$$

$$\text{nên } \frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AH. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, ta có : } BA \cdot BH = BA \cdot BH. \quad (2)$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

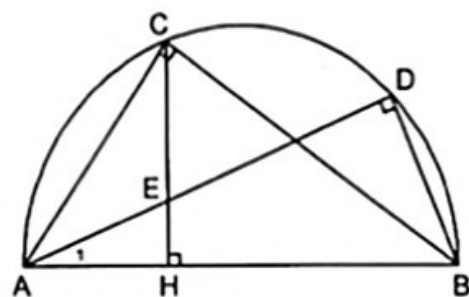
$$AD \cdot AE + BA \cdot BH = AB \cdot AH + BA \cdot BH = AB \cdot (AH + BH) = AB^2.$$

$$\text{b) Theo câu a), } AD \cdot AE = AB \cdot AH. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } HA \cdot BH = HA \cdot BH. \quad (2)$$

Trừ theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được :

$$AD \cdot AE - HA \cdot BH = AB \cdot AH - HA \cdot BH = AH(AB - BH) = AH^2.$$



Hình 370

12. (hình 371)

$$\text{a) Vì } \begin{cases} \widehat{B_1} = \widehat{B_1} \\ \widehat{K} = \widehat{D} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta BKH \sim \Delta BDC \text{ (g - g)}$$

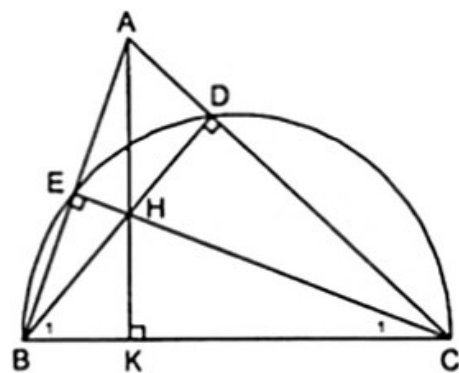
$$\text{nên } \frac{BK}{BD} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BD \cdot BH = BC \cdot BK. \quad (1)$$

$$\text{b) Vì } \begin{cases} \widehat{C_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{K} = \widehat{E} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta CKH \sim \Delta CEB \text{ (g - g)}$$

$$\text{nên } \frac{CK}{CE} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow CE \cdot CH = CB \cdot CK. \quad (2)$$

c) Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2) ở câu a) và câu b), ta được :

$$BD \cdot BH + CE \cdot CH = BC \cdot BK + CB \cdot CK = BC \cdot (BK + CK) = BC^2.$$



Hình 371

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG – HÌNH CHÓP ĐỀU

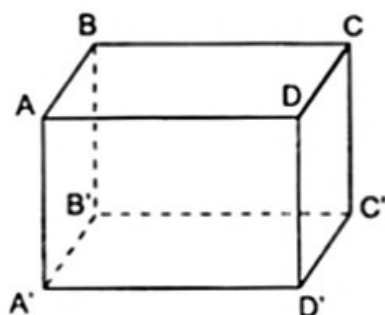
HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Chủ đề 1

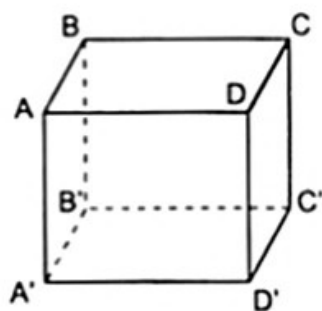
HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT



a)



b)

Hình 372

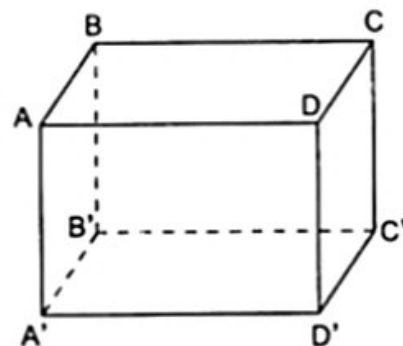
- Hình hộp chữ nhật có tất cả sáu mặt là hình chữ nhật. (Hình 372a, b)
- Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, 8 đỉnh và 12 cạnh.
- Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là hai mặt đối diện và thường gọi là hai mặt đáy của hình hộp chữ nhật, khi đó các mặt còn lại được gọi là các mặt bên.
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là những hình vuông.

II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Hình ảnh một hình hộp chữ nhật trong không gian cho ta thấy rõ nhiều kết cấu (quan hệ) trong không gian. Đây là những tính chất cơ bản nhất của hình học không gian (hình 373).

1. Mỗi mặt, chẳng hạn mặt ABCD, là một phần của mặt phẳng trải rộng về mọi phía.

Kí hiệu mặt phẳng ABCD là : Mặt phẳng (ABCD) hay gọn hơn mp(ABCD).



Hình 373

2. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

3. Đường thẳng qua hai điểm A, B của mp(ABCD) thì nằm trọn trong mặt phẳng đó (tức là mọi điểm của nó đều thuộc mặt phẳng).

4. Trong không gian, hai đường thẳng a và b gọi là song song với nhau nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.

5. Ba vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt trong không gian :

- Cắt nhau, nếu có một điểm chung, chẳng hạn AB cắt AD.
- Song song, nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung, chẳng hạn $AB \parallel CD$, chúng cùng nằm trong mp (ABCD).
- Không cùng nằm trong một mặt phẳng nào, chẳng hạn AD và $D'C'$, khi đó ta nói chúng chéo nhau.

6. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau. Chẳng hạn $\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \parallel C'D' \end{cases} \Rightarrow AB \parallel C'D'$.

7. Khi AB không nằm trong mp($A'B'C'D'$) mà AB song song với một đường thẳng của mặt phẳng này, chẳng hạn $AB \parallel A'B'$, thì người ta nói AB song song với mp($A'B'C'D'$) và kí hiệu là $AB \parallel \text{mp}(A'B'C'D')$.

8. Dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song : mp (ABCD) chứa hai đường thẳng cắt nhau AB, AD và mp($A'B'C'D'$) chứa hai đường thẳng cắt

nhau $A'B', A'D'$, hơn nữa $\begin{cases} AB \parallel A'B' \\ AD \parallel A'D' \end{cases}$ khi đó người ta nói mp (ABCD)

song song với mp($A'B'C'D'$) và kí hiệu là $\text{mp}(ABCD) \parallel \text{mp}(A'B'C'D')$.

9. Hai vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt trong không gian :

- Song song, nếu chúng không có điểm chung.

– *Cắt nhau*, nếu chúng có một điểm chung. Khi đó chúng cắt nhau theo một đường thẳng đi qua điểm chung đó (đường thẳng này gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó).

Chẳng hạn $mp(ABCD)$ cắt $mp(BCC'B')$ theo giao tuyến BC .

III. DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:

– Khi đường thẳng $A'A$ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AB, AD của $mp(ABCD)$ ta nói $A'A$ *vuông góc với mặt phẳng* $(ABCD)$ và kí hiệu :

$$A'A \perp mp(ABCD).$$

– Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng đó.

2. Mặt phẳng $(ABB'A')$ chứa đường thẳng $A'A$ vuông góc với $mp(ABCD)$ ta nói hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau và kí hiệu :

$$mp(ABB'A') \perp mp(ABCD).$$

3. Gọi a, b là độ dài các cạnh đáy và c là chiều cao của hình hộp chữ nhật (*cùng đơn vị độ dài*) thì :

$$S_{xq} = 2(a + b).c;$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 2(ab + bc + ca).$$

Thể tích của hình hộp chữ nhật : $V = abc$.

Đường chéo của hình hộp chữ nhật : $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

IV. VẼ HÌNH BIỂU DIỄN MỘT HÌNH HỘP CHỮ NHẬT TRONG KHÔNG GIAN

Khi vẽ hình biểu diễn một hình trong không gian ta phải đảm bảo ba yêu cầu sau :

1. **Sự song song và tỉ số đo, bảo toàn trong không gian**

– Hai đường thẳng song song phải vẽ đúng.

– Hai đoạn thẳng song song mà đoạn này gấp n lần đoạn kia, phải vẽ đúng như thế.

– Trung điểm của đoạn thẳng phải vẽ đúng.

2. Độ dài đoạn thẳng và góc không bảo toàn trong không gian

- Góc vuông, góc nhọn, góc tù vẽ như góc nhọn hoặc góc tù.
- Tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông vẽ như tam giác thường.
- Hình thang vuông, hình thang cân vẽ như hình thang thường.
- Hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông vẽ như hình bình hành.

3. Dùng nét liền vẽ đoạn trông thấy, nét đứt vẽ đường bị khuất nhưng đứt khoát nét đứt không được cắt nét liền

Chú ý : Muốn vẽ hình biểu diễn một hình hộp chữ nhật trong không gian người ta dùng lưới ô vuông rồi vẽ theo các yêu cầu ở trên.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG 1. Nhận biết một điểm thuộc một đường thẳng, thuộc một mặt phẳng. Đường thẳng thuộc mặt phẳng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

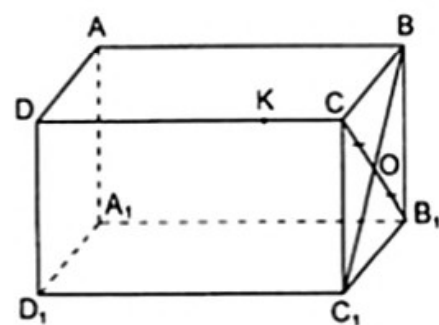
1. Để nhận biết đường thuộc mặt phải sử dụng tính chất : Đường thẳng qua hai điểm A, B của mp ($ABCD$) thì nằm trọn trong mặt phẳng đó (tức là mọi điểm của nó đều thuộc mặt phẳng).

2. Để nhận biết điểm thuộc mặt phẳng phải sử dụng phối hợp hai tính chất: Điểm thuộc đường thẳng và đường thẳng thuộc mặt phẳng thì suy ra điểm thuộc mặt phẳng.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ là một hình hộp chữ nhật (hình 374).

- Nếu O là trung điểm của đoạn CB_1 thì O có là điểm thuộc đoạn BC_1 hay không ?
- K là điểm thuộc cạnh CD , liệu K có thể là điểm thuộc cạnh BB_1 hay không?



Hình 374

Lời giải

a) Câu trả lời là có. Thật vậy, vì mặt bên BCC_1B_1 là hình chữ nhật có O là trung điểm đường chéo CB_1 nên O cũng là trung điểm của đường chéo BC_1 (theo tính chất về đường chéo của hình chữ nhật). Vậy O thuộc đoạn BC_1 .

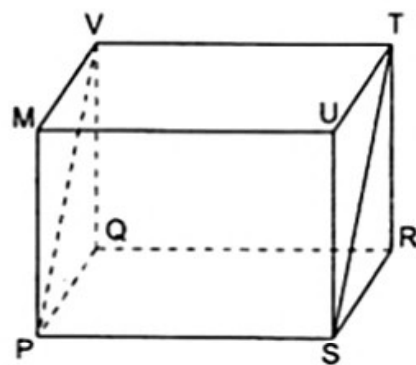
b) K không thuộc cạnh BB_1 . Vì $K \notin mp(BB_1C_1C)$ mà BB_1 thuộc mặt phẳng đó.

Ví dụ 2. Xem hình 375. Hãy :

a) Gọi tên các mặt phẳng chứa đường thẳng PR .

b) Gọi tên mặt phẳng chứa đường thẳng PR nhưng chưa thấy rõ trên hình vẽ.

c) Gọi tên mặt phẳng cùng chứa các đường thẳng PS và VT .



Hình 375

Lời giải

a) Có hai mặt phẳng chứa đường thẳng PR là $mp(PQRS)$ và $mp(MTRP)$.

b) Ngoài mặt phẳng đáy ($PQRS$) chứa đường thẳng PR có thể thấy ngay thì mặt phẳng chưa thấy ngay lập tức là $mp(MTRP)$.

c) Đó là $mp(PSTV)$.

Ví dụ 3. Các kích thước của hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là :

$DC = 5\text{cm}$; $CB = 4\text{cm}$; $BB_1 = 3\text{cm}$. Tính các độ dài DC_1 , CB_1 .

Lời giải (hình 376)

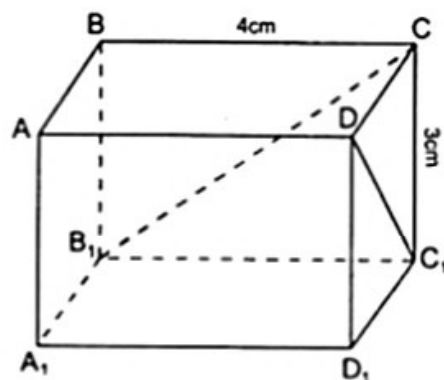
Ta thấy :

DC_1 thuộc mặt bên DCC_1D_1 là hình chữ nhật nên tam giác DCC_1 vuông ở C .

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác DCC_1 vuông ở C , ta được : $DC_1^2 = CC_1^2 + CD^2$ hay

$$DC_1^2 = 3^2 + 5^2 \Leftrightarrow DC_1^2 = (\sqrt{34})^2 \Leftrightarrow DC_1 = \sqrt{34} \text{ (cm)}.$$

CB_1 thuộc mặt bên BCC_1B_1 là hình chữ nhật nên tam giác BCB_1 vuông ở B .



Hình 376

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác BCB_1 vuông ở B, ta được :

$$CB_1^2 = CB^2 + BB_1^2 \text{ hay } CB_1^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow CB_1^2 = 5^2 \Leftrightarrow CB_1 = 5 \text{ (cm)}.$$

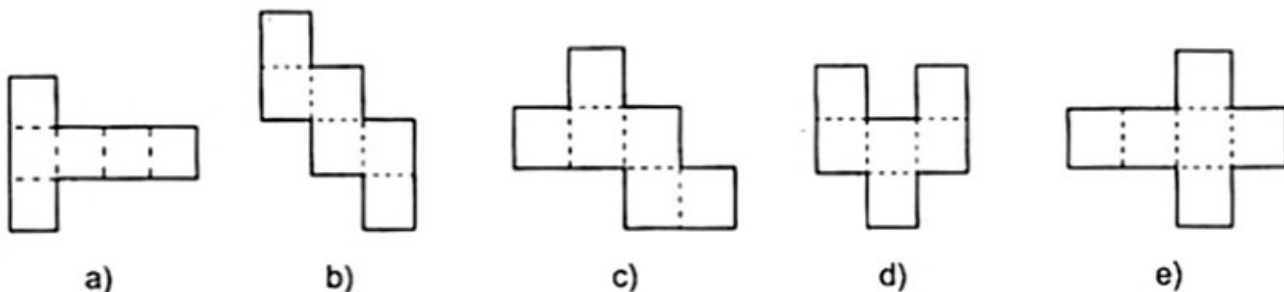
III. BÀI TẬP

1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD. EFGH.

a) Điểm A thuộc những mặt phẳng nào?

b) Gọi tên các mặt phẳng chứa đường thẳng AC.

2. Trong các hình sau hình nào gấp theo nét chấm được một hình lập phương.



Hình 377

3. Chứng minh từ một đoạn dây thép dài 1,5m, có thể tạo ra một cái khung hình lập phương có cạnh là 1dm.

DẠNG 2. Nhận biết đường thẳng song song với đường thẳng, với mặt phẳng. Mặt phẳng song song với mặt phẳng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Để chứng minh hai đường thẳng song song thường sử dụng một trong hai cách sau :

- Chỉ ra chúng là hai cạnh đối của một hình bình hành, hình chữ nhật.
- Chứng tỏ chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

2. Để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng thường sử dụng

$$\text{tính chất : } \begin{cases} a \notin mp(P) \\ a // b \\ b \in mp(P) \end{cases} \Rightarrow a // mp(P).$$

3. Để chứng minh $mp(Q) // mp(P)$, ta cần tìm trong $mp(Q)$ hai đường thẳng cắt nhau, cùng song song với $mp(P)$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là một hình lập phương.

Hãy cho biết :

- Những cạnh nào song song với cạnh C_1C ?
- Những cạnh nào song song với cạnh A_1D_1 ?

Lời giải (hình 378)

- Các cạnh BB_1, D_1D, AA_1 song song với C_1C .

Giải thích : Vì $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là một hình lập phương theo giả thiết nên các mặt bên $DCC_1D_1, BCC_1B_1, ABB_1A_1$ là các hình vuông, do đó :

$$D_1D // C_1C; B_1B // C_1C \quad (1) \text{ và } AA_1 // BB_1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra : $AA_1 // CC_1$.

- Các cạnh AD, B_1C_1, BC song song với A_1D_1 .

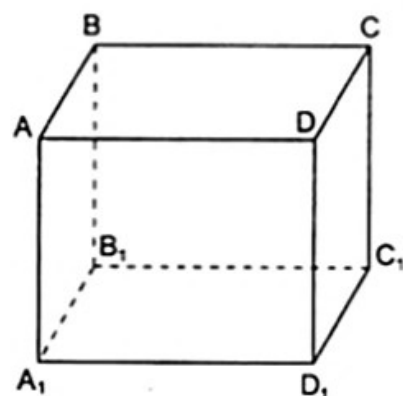
Giải thích : tương tự như câu a) .

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có cạnh $AB // mp(EFGH)$.

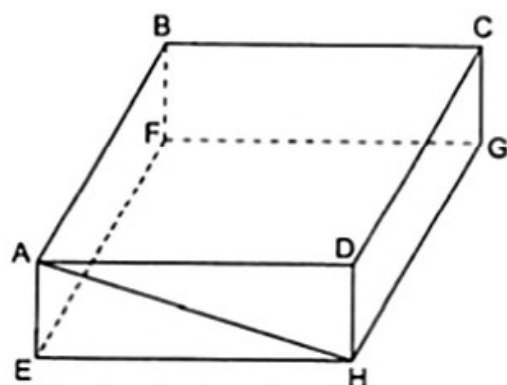
- Hãy kể tên các cạnh khác song song với $mp(EFGH)$.
- Cạnh CD song song với những mặt phẳng nào của hình hộp chữ nhật ?
- Đường thẳng AH không song song với $mp(EFGH)$, hãy chỉ ra mặt phẳng song song với đường thẳng đó.

Lời giải (hình 379)

- BC, CD, DA song song với $mp(EFGH)$.
- $CD // mp(ABFE); CD // mp(EFGH)$.
- $AH // mp(BCGF)$.



Hình 378



Hình 379

Ví dụ 3. Hãy giải thích vì sao trên hình 378 (xem ví dụ 2), $AH \parallel mp(BCGF)$.

Lời giải

Từ giả thiết $ABCD$. $EFGH$ là hình hộp chữ nhật nên các mặt bên $ABCD$ và $CDHG$ là các hình chữ nhật.

Áp dụng tính chất về cạnh vào hai hình chữ nhật trên ta được

$$\begin{cases} AB \parallel CD, AB = CD \\ GH \parallel CD, GH = CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel GH \\ AB = GH \end{cases} \Rightarrow ABGH \text{ là tứ giác có hai cạnh đối}$$

song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành. Do đó $AH \parallel BG$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AH \notin mp(BCGF) \\ AH \parallel BG \\ BG \subset mp(BCGF) \end{cases} \Rightarrow AH \parallel mp(BCGF).$$

III. BÀI TẬP

4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Các đường thẳng sau có cắt nhau không ?
- AC_1 và DB_1 ;
 - AC_1 và BC .
5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$.
- Cạnh AB cắt những cạnh nào ? Trong các cạnh của hình hộp chữ nhật, có bao nhiêu cặp cạnh cắt nhau ?
 - Cạnh AB song song với những cạnh nào ? Trong các cạnh của hình hộp chữ nhật, có bao nhiêu cặp cạnh song song ?
 - Cạnh AB chéo nhau với những cạnh nào ? Trong các cạnh của hình hộp chữ nhật, có bao nhiêu cặp chéo nhau ?
6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chứng minh rằng :
- $$mp(BDA_1) \parallel mp(CB_1D_1).$$
7. Trong các mặt của hình hộp chữ nhật, có bao nhiêu cặp mặt phẳng :
- Song song ?
 - Cắt nhau ?

DẠNG 3. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật*

I. PHƯƠNG PHÁP

– Áp dụng các công thức tính S_{xq}, S_{tp} .

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Một căn phòng dài 4,5m, rộng 3,7m và cao 3m. Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Hãy tính diện tích tường nhà cần quét vôi, biết rằng tổng diện tích các cửa là $5,8m^2$.

Lời giải

Diện tích bốn bức tường chính là : $S_{xq} = 2(4,5 + 3,7).3 = 49,2 (m^2)$.

Diện tích trần nhà : $4,5.3,7 = 16,65 (m^2)$.

Diện tích cần quét vôi : $49,2 + 16,65 - 5,8 = 60,05 (m^2)$.

Ví dụ 2. Cần bao nhiêu tôn để làm một cái thùng có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao 90cm và đáy là một hình vuông có diện tích $2500cm^2$ (không kể diện tích các chỗ ghép và nắp thùng) .

Lời giải

Gọi diện tích tôn cần tìm là S thì : $S = S_{xq} + S_d$.

Vì đáy thùng là hình vuông có diện tích là $2500cm^2$ nên đáy có kích thước mỗi cạnh là : $\sqrt{2500} = 50(cm)$.

Do đó : $S_{xq} = 2(50 + 50).90 = 18000(cm^2)$.

Vậy : $S = 18000 + 2500 = 20500(cm^2)$.

Ví dụ 3. Một khối gỗ hình hộp chữ nhật có kích thước như trong hình 380. Người ta đục một lỗ ngay tâm của đáy có các cạnh song song với các cạnh của hình hộp chữ nhật ban đầu có kích thước $20cm \times 30cm$ và chiều sâu xuyên qua đáy đối diện. Tính diện tích mặt gỗ nếu phải sơn khối gỗ này (cả mặt ngoài và mặt trong).

Lời giải (hình 380)

Gọi diện tích các bề mặt gỗ phải sơn là S .

Diện tích toàn phần khối gỗ hình hộp chữ nhật là S_{tp} .

Diện tích bề mặt khối hộp bị đục là S_{xq} .

Diện tích đáy của khối hộp bị đục là S_d .

Khi đó $S = S_{tp} + S_{xq} - 2S_d$.

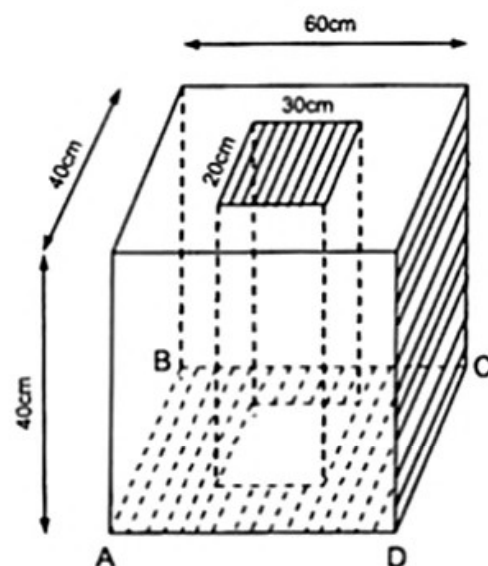
Ta có $S_{tp} = 2(40 + 60).40 + 2.40.60$

$$= 12800(\text{cm}^2) = 128\text{dm}^2.$$

$$S_{xq} = 2(20 + 30).40 = 4000(\text{cm}^2) = 40\text{dm}^2.$$

$$2S_d = 2.20.30 = 1200(\text{cm}^2) = 12\text{dm}^2.$$

$$\text{Vậy } S = 128 + 40 - 12 = 156(\text{dm}^2).$$



Hình 380

III. BÀI TẬP

8. Người ta muốn xây bốn bức tường của một gian phòng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 8m, 4m, 3m bằng các viên gạch ống có diện tích bề mặt $1,2\text{dm}^2$. Hỏi phải cần bao nhiêu viên gạch? Biết diện tích các cửa là 8m^2 (diện tích các mạch xi măng không đáng kể).
9. Cần bao nhiêu tôn để làm một cái thùng có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao 90cm và đáy là một hình vuông có diện tích 2500cm^2 (không kể diện tích các chỗ ghép và nắp thùng) ?

DẠNG 4. *Tính thể tích của hình hộp chữ nhật, tính một yếu tố của hình hộp chữ nhật*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Áp dụng công thức tính thể tích của hình hộp, hình lập phương, đường chéo của hình hộp.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Một bể nước hình hộp chữ nhật có chiều dài 2m. Lúc đầu bể không có nước. Sau khi đổ vào bể 120 thùng nước, mỗi thùng chứa 20 lít thì mực nước của bể cao 0,8m.

a) Tính chiều rộng của bể nước.

b) Người ta đổ thêm vào bể 60 thùng nước nữa thì đầy bể. Hỏi bể cao bao nhiêu mét ?

Lời giải (hình 381)

Vì 1 lít tương ứng với 1dm^3 nên dung tích của 120 thùng nước, mỗi thùng chứa 20 lít là :

$$120.20 = 2400(\text{dm}^3).$$

Khi đổ khối nước này vào bể ta được một hình hộp chữ nhật có các kích thước là chiều dài 2m, chiều rộng là $x(\text{m})$ của bể và chiều cao của khối nước là 0,8m.

a) Áp dụng công thức tính thể tích của hình hộp, ta được :

$$V_1 = 2.x.0,8 = 1,6x.$$

Thể tích này chính bằng dung tích của 120 thùng nước, mỗi thùng chứa 20 lít nước nên ta có phương trình : $1,6x = 2400 \Leftrightarrow x = 1,5(\text{m})$.

b) Khi đổ thêm vào bể 60 thùng nước nữa thì thể tích của bể chính là dung tích của 180 thùng nước là 3600dm^3 , gọi chiều cao của bể là $h(\text{m})$.

Ta có $2.1,5.h = 3600 \Leftrightarrow h = 1,2(\text{m})$.

Ví dụ 2. Một cái thùng hình lập phương, cạnh 7dm, có chứa nước với độ sâu của nước là 4dm. Người ta thả 25 viên gạch có chiều dài 2dm, chiều rộng 1dm và chiều cao 0,5dm vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng cao bao nhiêu đề xi mét ? (Giả thiết toàn bộ gạch ngập trong nước và chúng hút nước không đáng kể).

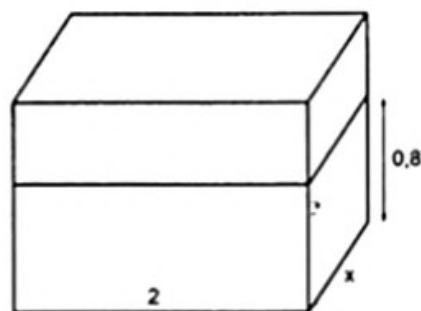
Lời giải (hình 382)

Áp dụng công thức tính thể tích của hình hộp chữ nhật, ta có :

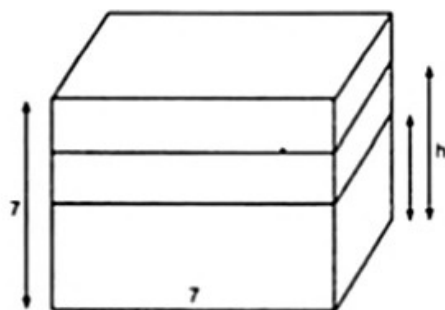
Thể tích nước trong thùng lúc đầu là :

$$V_1 = 7.7.4 = 196(\text{dm}^3).$$

Thể tích của một viên gạch là : $2.1.0,5 = 1(\text{dm}^3)$.



Hình 381



Hình 382

Thể tích của 25 viên gạch là : $1.25 = 25 \text{ (dm}^3\text{)} .$

Theo định luật Ác si mét thì khi thả 25 viên gạch vào thùng nước nó sẽ chiếm một thể tích nước đúng bằng 25dm^3 .

Lúc đó lượng nước trong thùng có dạng hình hộp chữ nhật có các kích thước là : $7.7.h \text{ (dm)}$ và có thể tích là : $196 + 25 = 221 \text{ (dm}^3\text{)} .$

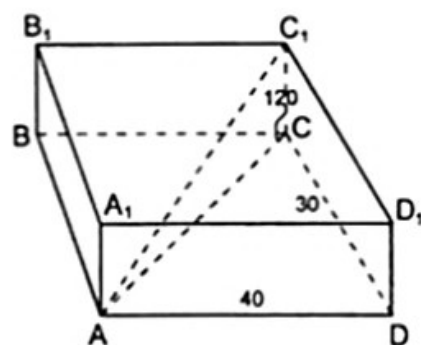
Như vậy ta có phương trình : $7.7.h = 221 \Leftrightarrow 49h = 221 \Leftrightarrow h = \frac{221}{49} \text{ (dm)}.$

Khi đó mực nước cách miệng thùng là : $7 - h = 7 - \frac{221}{49} = \frac{122}{49} \approx 2,49 \text{ (dm)}.$

Ví dụ 3. Các kích thước của hình hộp chữ nhật như ở hình 383. Tính độ dài của đoạn AC_1 .

Lời giải (hình 383)

Vì $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp chữ nhật nên $C_1C \perp mp(ABCD) \Rightarrow C_1C \perp AC$ hay tam giác ACC_1 vuông ở C, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật nên tam giác ACD vuông ở D.



Hình 383

Áp dụng định lí Py-ta-go vào hai tam giác vuông ACD và ACC_1 , ta được :

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 \quad (1); \quad AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \quad (2).$$

Thay đẳng thức (1) vào (2) thu được :

$$AC_1^2 = CD^2 + DA^2 + CC_1^2 \Rightarrow AC_1 = \sqrt{CD^2 + DA^2 + CC_1^2}.$$

$$\text{Hay } AC_1 = \sqrt{30^2 + 40^2 + 120^2} = \sqrt{130^2} = 130(\text{cm}).$$

III. BÀI TẬP

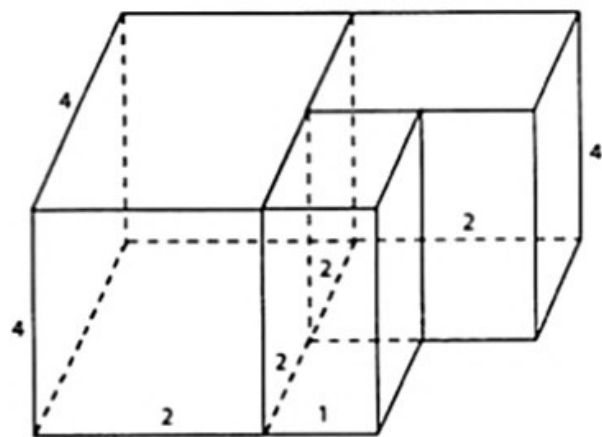
10. Tính thể tích của hình hộp chữ nhật có chiều dài 4m, chiều rộng 3m và độ dài đường chéo là 13m.
11. Đường chéo của hình lập phương là $\sqrt{12} \text{ dm}$. Tính cạnh của hình lập phương đó.
12. Một bể nước hình hộp chữ nhật có kích thước đáy là $2\text{m} \times 3\text{m}$ chưa có nước.

Một vòi nước có lưu tốc 500 lít/ giờ chảy vào bể trong 8 giờ. Hỏi mực nước trong bể cao bao nhiêu mét ?

13. Một khối gỗ hình lập phương có cạnh 6dm. Người ta đục hai lỗ hình hộp chữ nhật đáy vuông cạnh 2 dm, ngay tâm của đáy và xuyên qua đáy đối diện. Tính thể tích của khối gỗ còn lại.

14. Một chiếc hộp dạng hình hộp chữ nhật có kích thước 6cm, 8cm, 24cm. Một chiếc que dài 27cm có thể đặt lọt trong hộp được không?

15. Một khối bê tông với kích thước đã cho như hình 384. Biết rằng để đổ 1m^3 bê tông phải cần 12 bao xi măng. Hãy tính số bao xi măng cần dùng để đổ khối bê tông nói trên.



Hình 384

DẠNG 5. Nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

$$\begin{cases} a \perp b, a \perp c \\ b \cap c = \{I\} \\ b \subset mp(P), c \subset mp(P) \end{cases} \Rightarrow a \perp mp(P). \quad \begin{cases} d \perp mp(Q) \\ d \subset mp(P) \end{cases} \Rightarrow mp(P) \perp mp(Q).$$

II. VÍ DỤ

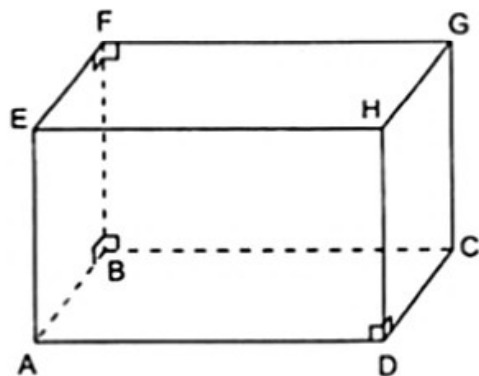
Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH.

a) Đường thẳng BF vuông góc với những mặt phẳng nào?

b) Hai mặt phẳng (AEHD) và (CGHD) vuông góc với nhau ? Vì sao ?

Lời giải (hình 385)

a) Đường thẳng BF vuông góc với các mặt phẳng (BCDA) và (FGHE).



Hình 385

Giải thích :

Vì ABCD.EFGH là hình hộp chữ nhật nên các mặt bên (BCGF) và (BFEA) là các hình chữ nhật, do đó :
$$\begin{cases} BF \perp BA, BF \perp BC \\ BA \subset mp(ABCD), BC \subset mp(ABCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow BF \perp mp(ABCD).$

Chứng minh tương tự, ta có : $BF \perp mp(EFGH).$

b) Vì ABCD.EFGH là hình hộp chữ nhật nên mặt bên (CGHD) và mặt đáy (ABCD) là các hình chữ nhật, do đó :

$$\begin{cases} CD \perp DH, CD \perp DA \\ DA \subset mp(AEHD), DH \subset mp(AEHD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(AEHD). \quad (1)$$

Lại có $CD \subset mp(CGHD).$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $mp(AEHD) \perp mp(CGHD).$

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A₁B₁C₁D₁ có ABCD là hình vuông. Gọi O là giao điểm của AC và BD, O₁ là giao điểm của A₁C₁ và B₁D₁. Chứng minh rằng :

- BDD₁B₁ là hình chữ nhật.
- OO₁ $\perp$ mp(ABCD).
- Các mặt phẳng (ACC₁A₁), (BDD₁B₁) vuông góc với nhau.

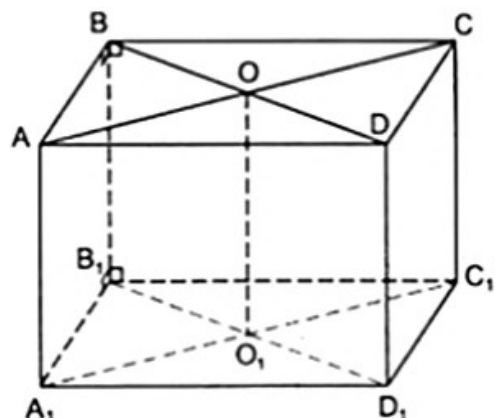
Lời giải (h. 386)

- Từ giả thiết ABCD.A₁B₁C₁D₁ là hình hộp chữ nhật nên các mặt bên (BB₁A₁A) và (BB₁C₁C) là các hình chữ nhật, do đó :

$$\begin{cases} BB_1 \perp BA, BB_1 \perp BC \\ BC \subset mp(ABCD), BA \subset mp(ABCD) \end{cases} \Rightarrow BB_1 \perp mp(ABCD).$$

Mặt khác đường chéo $BD \subset mp(ABCD)$ và đi qua B, nên :

$$BB_1 \perp BD \Rightarrow \widehat{B_1BD} = 90^\circ.$$



Hình 386

Chúng minh tương tự như trên, ta cũng được : $\widehat{BB_1D_1} = \widehat{BDD_1} = 90^\circ$.

Điều này chứng tỏ tứ giác BDD_1B_1 có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

b) Chứng minh tương tự như câu a) ta được tứ giác ACC_1A_1 là hình chữ nhật.

Áp dụng tính chất về đường chéo vào các hình vuông $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ ta được O là trung điểm của AC , BD và O_1 là trung điểm của A_1C_1 , B_1D_1 nên OO_1 là đường trung bình của các hình chữ nhật BDD_1B_1 và ACC_1A_1 .

Do đó : $OO_1 \parallel BB_1 \parallel DD_1 \parallel AA_1 \parallel CC_1$.

Suy ra OO_1 vuông góc với các đường thẳng AC , BD nên $OO_1 \perp (ABCD)$.

c) Áp dụng tính chất về đường chéo vào các hình vuông $ABCD$; $A_1B_1C_1D_1$ ta được $BD \perp AC$, lại có $BD \perp OO_1$ theo câu a) nên $BD \perp mp(ACC_1A_1)$.

Mà $BD \subset mp(BDD_1B_1)$ suy ra các mặt phẳng (ACC_1A_1) , (BDD_1B_1) vuông góc với nhau.

III. BÀI TẬP

16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$.

- Cạnh BC vuông góc với những cạnh nào của hình hộp chữ nhật ?
- Hai mặt phẳng $(ABFE)$ và $(CGFB)$ vuông góc với nhau, vì sao ?

Chủ đề 2

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

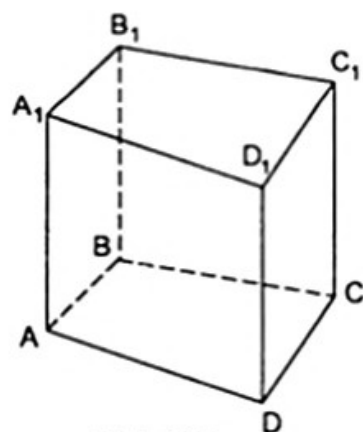
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

1. Hình lăng trụ đứng có hai đáy là những đa giác, các mặt bên là những hình chữ nhật.

(Hình 387 là lăng trụ đứng tứ giác)

2. Các mặt phẳng chứa đáy của hình lăng trụ đứng là các mặt phẳng song song, các mặt bên vuông góc



Hình 387

với hai mặt phẳng đáy, các cạnh bên vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài một cạnh bên gọi là chiều cao.

3. Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp đứng.

Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là những hình chữ nhật.

II. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

1. Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

$$S_{xq} = 2p.h \text{ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao).}$$

2. Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d.$$

III. THỂ TÍCH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

$$V = S.h \text{ (S là diện tích đáy, h là chiều cao).}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG 1. *Tìm số cạnh, số mặt, số đỉnh, các yếu tố song song, vuông góc trong hình lăng trụ đứng*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Hai đáy là các mặt phẳng song song, các mặt bên là các hình chữ nhật.

2. Các mặt bên vuông góc với đáy, các cạnh bên vuông góc với đáy.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hãy cho biết :

a) Một lăng trụ đứng có 6 mặt thì đáy của lăng trụ đó là hình gì ?

b) Một lăng trụ đứng có 8 mặt thì đáy của lăng trụ đó là hình gì ?

Lời giải

Từ khái niệm hình lăng trụ đứng có hai đáy là những đa giác, các mặt bên là những hình chữ nhật nên hình lăng trụ đứng có đáy là n – giác thì nó có số mặt là $n + 2$.

a) Một lăng trụ đứng có 6 mặt thì ta có phương trình : $n + 2 = 6 \Leftrightarrow n = 4$.

Điều này chứng tỏ đáy của lăng trụ đó là tứ giác.

b) Một lăng trụ đứng có 8 mặt thì ta có phương trình : $n + 2 = 8 \Leftrightarrow n = 6$.

Điều này chứng tỏ đáy của lăng trụ đó là lục giác.

Ví dụ 2. $ABC.A_1B_1C_1$ là một lăng trụ đứng tam giác.

a) Những cặp mặt nào song song với nhau ?

b) Những cặp mặt nào vuông góc với nhau ?

Lời giải (hình 388)

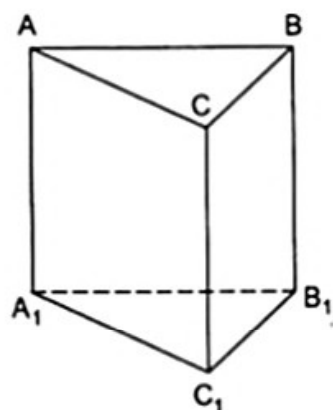
a) $mp(ABC)$ và $mp(A_1B_1C_1)$.

b) $mp(ABC)$ vuông góc với các mặt phẳng :

$$mp(ABB_1A_1); mp(BCC_1B_1); mp(CAA_1C_1).$$

$mp(A_1B_1C_1)$ vuông góc với các mặt phẳng :

$$mp(ABB_1A_1); mp(BCC_1B_1); mp(CAA_1C_1).$$



Hình 388

III. BÀI TẬP

1. Gọi số cạnh của một đáy, số mặt, số đỉnh, số cạnh của một hình lăng trụ đứng lần lượt là : n , m , d và c .

a) Hãy viết hệ thức liên hệ giữa n , m , d , c .

b) Hình lăng trụ đứng có 20 đỉnh thì có bao nhiêu mặt, bao nhiêu cạnh ?

c) Có hình lăng trụ đứng nào có 15 đỉnh hay không ? Vì sao ?

2. Tính số mặt (m), số đỉnh (d), số cạnh (c) và $m + d - c$ của mỗi hình sau :

a) Hình hộp chữ nhật.

b) Hình lăng trụ đứng có đáy là lục giác.

3. $ABCD.EFGH$ là một hình hộp đứng.

a) Tìm các cạnh của hình hộp song song với AD .

b) Tìm các cạnh của hình hộp vuông góc với AD .

c) Tìm mặt phẳng song song với $mp(ABFE)$.

d) Tìm mặt phẳng vuông góc với $mp(ABFE)$.

DẠNG 2. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, tính một yếu tố của hình lăng trụ đứng

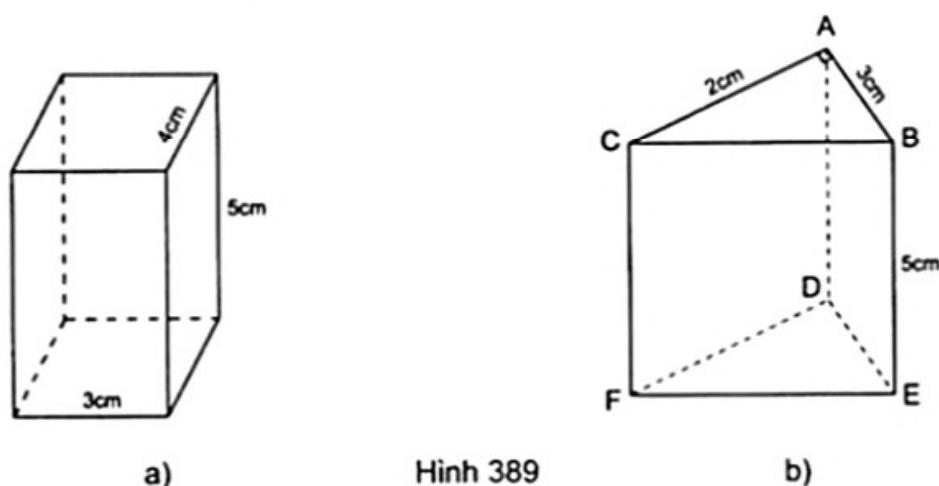
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Áp dụng công thức tính S_{xq} , S_{tp} của hình lăng trụ đứng.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của các lăng trụ dưới đây.

Lời giải (h. 389 a – b)



Xét hình lăng trụ đứng tứ giác (hình 389a) :

$$S_{xq} = 2(3 + 4).5 = 70 \text{ (cm}^2\text{)}; \quad S_{tp} = 70 + 2.3.4 = 94 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Xét hình lăng trụ đứng tam giác (hình 389b) :

Trước hết ta đi tính cạnh BC.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABC vuông ở A, ta được :

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } BC^2 = 2^2 + 3^2 = (\sqrt{13})^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{13} \text{ (cm)}.$$

$$S_{xq} = (2 + 3 + \sqrt{13}).5 = 25 + 5\sqrt{13} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$S_{tp} = 25 + 5\sqrt{13} + 2.3 = 31 + 5\sqrt{13} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 2. Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng ABCD.EFGH, biết rằng đáy ABCD là hình thoi có các đường chéo $AC = 10\text{cm}$, $BD = 24\text{cm}$ và diện tích toàn phần bằng 1280cm^2 .

Lời giải (hình 390)

Áp dụng công thức $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$ hay

$$\begin{aligned} S_{xq} &= S_{tp} - 2S_d = 1280 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 \\ &= 1280 - 240 = 1040 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Vì đáy ABCD là hình thoi nên AC vuông góc với BD tại O (tính chất về đường chéo của hình thoi).

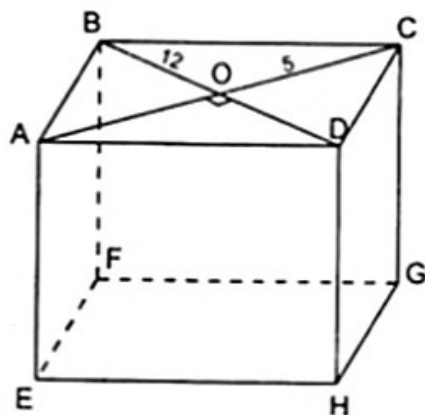
Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác BOC vuông ở O, ta được :

$$BC^2 = BO^2 + OC^2 \text{ hay } BC^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow BC = 13 \text{ (cm).}$$

Chu vi đáy là $2p = 4 \cdot 13 = 52 \text{ (cm)}$.

Áp dụng công thức $S_{xq} = 2p \cdot h$ ta có phương trình :

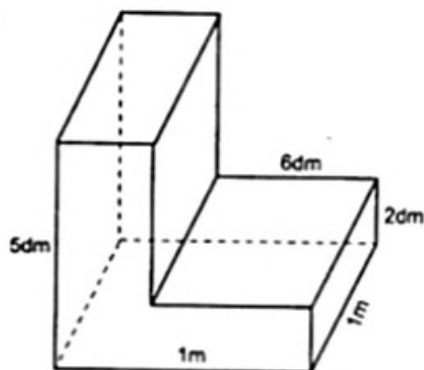
$$1040 = 52 \cdot h \Leftrightarrow h = 20 \text{ (cm)}.$$



Hình 390

III. BÀI TẬP

- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của một tủ tường hình lăng trụ đứng có chiều cao 2m, đáy là tam giác vuông cân có cạnh huyền 1,4m.
- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng có chiều cao 12cm, đáy là hình thoi với các đường chéo bằng 8cm và 6cm.
- Hãy tính tiền dùng để sơn các bề mặt của khối gỗ có các kích thước như ở hình 391. Biết rằng để sơn 1m^2 phải tốn 62000đ.



Hình 391

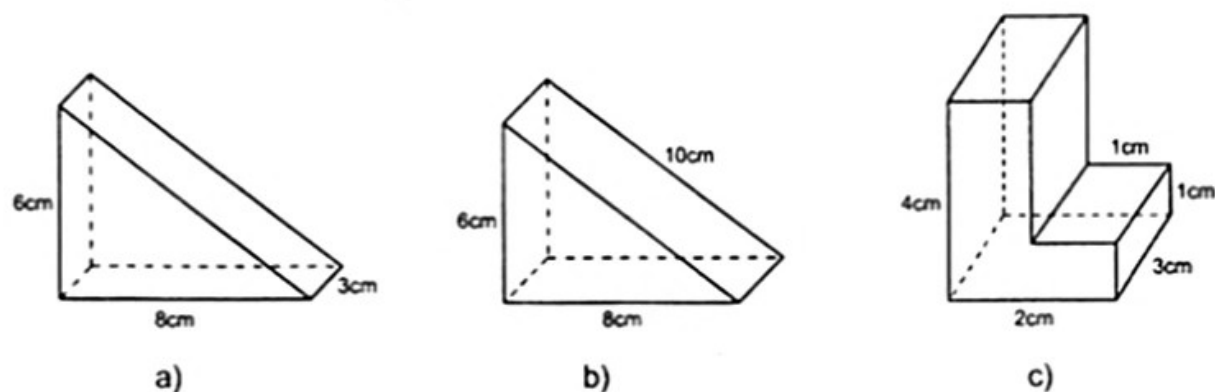
DẠNG 3. Tính thể tích, tính các yếu tố của hình lăng trụ đứng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Áp dụng công thức tính thể tích của hình lăng trụ đứng.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Các hình 390 – a, b, c gồm một hoặc nhiều lăng trụ đứng. Hãy tính thể tích của chúng với các kích thước đã cho trên hình.



Hình 392

Lời giải (hình 392a, b, c)

Áp dụng công thức tính thể tích của hình lăng trụ đứng : $V = S.h$.

a) Lăng trụ đứng ở hình 392a có chiều cao $h = 3$ cm, đáy là tam giác vuông nên $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24(\text{cm}^2)$. Vậy $V = 24 \cdot 3 = 72(\text{cm}^3)$.

b) Lăng trụ đứng ở hình 392b có chiều cao $h = 3$ cm, đáy là tam giác có ba cạnh là 6cm, 8cm, 10cm thỏa mãn hệ thức : $10^2 = 6^2 + 8^2$ nên nó là tam giác vuông (theo định lí Py-ta-go đảo).

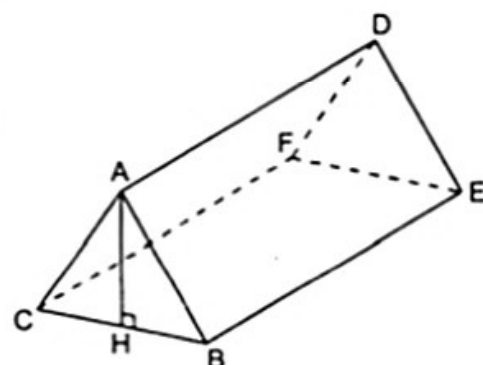
Tính tương tự như câu a) ta được $V = 24 \cdot 3 = 72(\text{cm}^3)$.

c) Hình 392c gồm hai lăng trụ đứng cùng có chiều cao là 3 cm, một hình có đáy là hình chữ nhật có các kích thước là 1cm, 4cm, một hình có đáy là hình vuông có cạnh là 1cm, nên $S = 1 \cdot 4 + 1^2 = 5(\text{cm}^2)$. Vậy $V = 5 \cdot 3 = 15(\text{cm}^3)$.

Ví dụ 2. Một trại hè có dạng hình lăng trụ đứng đáy tam giác (hình 393), thể tích phần không gian bên trong là $2,16\text{cm}^3$. Biết chiều dài AD của lều là 2,4cm, chiều rộng của lều là 1,2cm. Tính chiều cao AH của lều.

Lời giải

Áp dụng công thức tính thể tích của hình lăng trụ đứng : $V = S.h$.



Hình 393

Ta có $h = 2,4\text{cm}$, vậy $S = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot AH = 0,6 \cdot AH$.

Do đó $V = 0,6 \cdot AH \cdot 2,4 = 1,44 \cdot AH$

Vì $V = 2,16$ theo giả thiết nên ta có phương trình :

$$1,44 \cdot AH = 2,16 \Leftrightarrow AH = 1,5 \text{ (cm)}.$$

III. BÀI TẬP

7. Tính thể tích của một tủ tường hình lăng trụ đứng có chiều cao 2m, đáy là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông 0,8m.

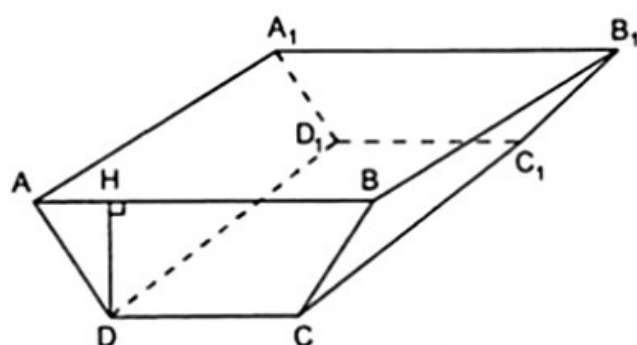
8. Tính thể tích của một bồn tắm hình lăng trụ đứng có chiều cao 2m, đáy là

hình thang cân, biết $AA_1 = 4\text{m}$; $AB = 2\text{m}$; $CD = 1\text{m}$; $DH = 1\text{m}$ (h. 394) .

9. $ABC.A_1B_1C_1$ là lăng trụ đứng có chiều cao 5cm, đáy là tam giác vuông ở A có $AB = 2\text{cm}$. Tính độ dài AC, biết thể tích của lăng trụ bằng 15cm^3 .

10. $ABC.A_1B_1C_1$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều, M là trung điểm của BC. Biết $AA_1 = AM = 4\text{cm}$. Hãy tính :

- Độ dài cạnh đáy.
- Thể tích của lăng trụ.



Hình 394

DẠNG 4. *Tìm các yếu tố song song, vuông góc trong hình lăng trụ đứng*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Hai đáy là các mặt phẳng song song, các mặt bên là các hình chữ nhật.
- Các mặt bên, các cạnh bên vuông góc với đáy.

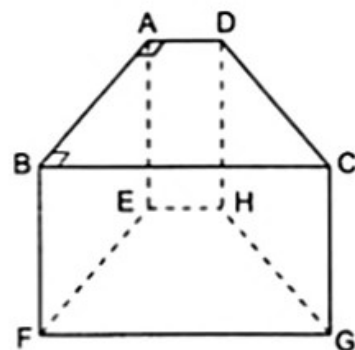
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $ABCD.EFGH$ là lăng trụ đứng có đáy là hình thang vuông. Hãy kể tên :

- a) Các cạnh song song với cạnh AD.
- b) Cạnh song song với cạnh AB.
- c) Các đường thẳng song song với mp(EFGH).
- d) Các đường thẳng song song với mp(DCGH).

Lời giải (hình 395)

- a) Các cạnh song song với cạnh AD là BC, FG, EH.
- b) Cạnh song song với cạnh AB là EF.
- c) Các đường thẳng song song với mp(EFGH) là AB, BC, CD và DA.
- d) Các đường thẳng song song với mp(DCGH) là AE, BF.



Hình 395

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$. $A_1B_1C_1$ là một lăng trụ đứng tam giác có $AB = 6\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$, $CA = 8\text{cm}$. Hãy tìm các cạnh vuông góc với cạnh AB, các mặt vuông góc với mp(ABB_1A_1).

Lời giải (hình 396)

Vì $10^2 = 6^2 + 8^2$ hay $BC^2 = CA^2 + AB^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

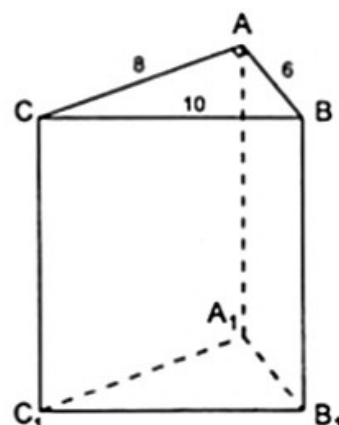
Các cạnh vuông góc với cạnh AB là :

AC; AA_1 ; BB_1 ; và CC_1 .

Giải thích : Vì $\begin{cases} CC_1 \perp \text{mp}(ABC) \\ AB \subset \text{mp}(ABC) \end{cases} \Rightarrow CC_1 \perp AB$.

Các mặt vuông góc với mp(ABB_1A_1) là :

mp(ABC); mp($A_1B_1C_1$); mp(ACC_1A_1).



Hình 396

III. BÀI TẬP

11. Cho lăng trụ đứng ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình thang vuông ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$). Hãy kể tên :
 - a) Các cạnh song song với cạnh AD.
 - b) Cạnh vuông góc với cạnh AD.
 - c) Các cạnh song song với mp(BCC_1B_1).
 - d) Các cạnh vuông góc với mp(BCC_1B_1).

12. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình thoi. Hãy tìm :
- Các cạnh song song với cạnh AB .
 - Các mặt song song với cạnh AB .
 - Các cạnh của lăng trụ và đường chéo của mặt đáy vuông góc với AC .
 - Các mặt vuông góc với cạnh AC .
 - Tính thể tích của hình lăng trụ đó, biết $AC = 8\text{cm}$, $BD = 6\text{cm}$, $AA_1 = 10\text{cm}$.

HÌNH CHÓP ĐỀU

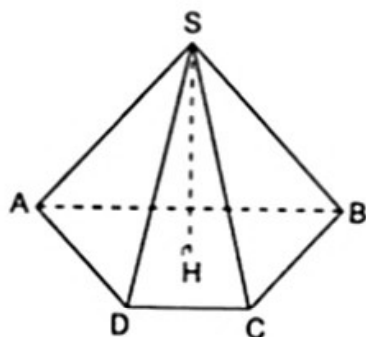
Chủ đề 3

HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

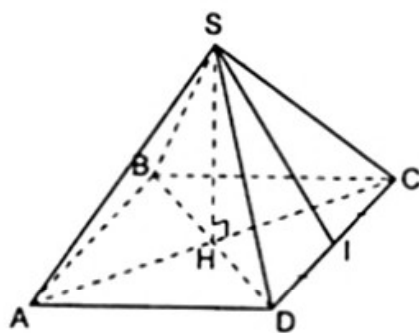
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. HÌNH CHÓP

Hình chóp có mặt đáy là một đa giác và các mặt bên là những tam giác có chung đỉnh.



Hình 397



Hình 398

Trên hình 397 ta có hình chóp $S.ABCD$, S là đỉnh, $SH \perp mp(ABCD)$ và SH là đường cao của hình chóp.

II. HÌNH CHÓP ĐỀU

Là hình chóp có mặt đáy là một đa giác đều và các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh (là đỉnh của hình chóp).

Trên hình 398 ta có hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, các mặt bên SAB, SBC, SCD, SDA là những tam giác cân bằng nhau.

Chân đường cao H là tâm của đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy.

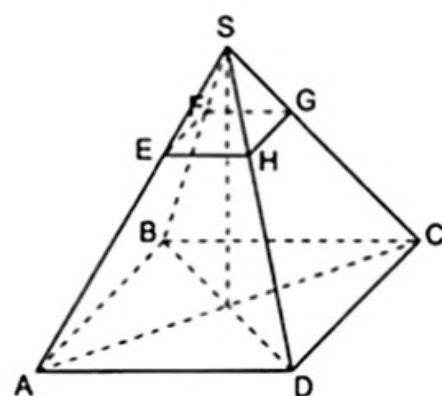
Đường cao vẽ từ đỉnh của mỗi mặt bên của hình chóp đều được gọi là trung đoạn của hình chóp đó.

III. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy (hình 399).

Phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy của hình chóp gọi là hình chóp cắt đều.

Mỗi mặt bên của hình chóp cắt đều là một hình thang cân.



Hình 399

IV. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU

Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng tích của nửa chu vi đáy với trung đoạn: $S_{xq} = p.d$ (p là nửa chu vi đáy, d là trung đoạn của hình chóp đều).

Diện tích toàn phần của hình chóp đều bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy: $S_{tp} = S_{xq} + S_d$.

V. THỂ TÍCH CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU

$$V = \frac{1}{3} S.h \quad (S \text{ là diện tích đáy, } h \text{ là chiều cao}).$$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG 1. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, tính một yếu tố của hình chóp đều*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Áp dụng công thức tính S_{xq}, S_{tp} của hình chóp đều.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Một hình chóp đều có độ dài cạnh bên bằng 25cm, đáy là hình vuông ABCD cạnh 30cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Lời giải (hình 400)

Gọi M là trung điểm của BC thì SM là đường cao của mặt bên SBC (vì tam giác SBC cân ở S).

Áp dụng công thức : $S_{tp} = S_{xq} + S_d$.

Ta có $S_d = 30^2 = 900 \text{ (cm}^2\text{)}$.

$S_{xq} = p.d$ với $p = 2.30 = 60 \text{ (cm)}$.

Ta còn phải tính trung đoạn $d = SM$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SCM vuông ở M, ta được :

$$SC^2 = CM^2 + SM^2 \text{ hay } 25^2 = 15^2 + SM^2$$

$$\Leftrightarrow SM^2 = 20^2 \Leftrightarrow SM = 20 \text{ (cm)}.$$

Do đó $S_{xq} = 60.20 = 1200 \text{ (cm}^2\text{)}$. Vậy $S_{tp} = 1200 + 900 = 2100 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Ví dụ 2. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng 2a.

Lời giải (hình 401)

Xét hình chóp S.ABC có $AB = BC = CA = a$, $SH = 2a$.

Gọi M là trung điểm của BC thì AM vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao, vừa là đường phân giác của tam giác đều ABC nên

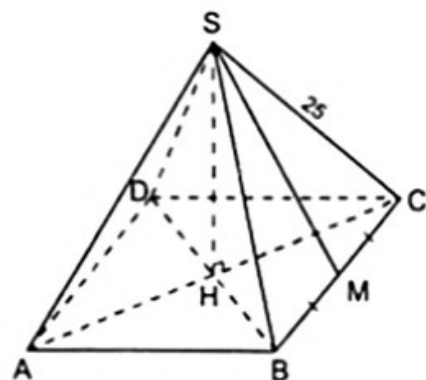
$AM \perp BC$ và $HM = \frac{1}{3}AM$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác ABM vuông ở M, ta được :

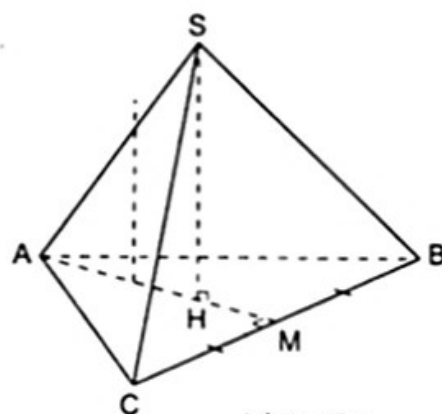
$$AB^2 = BM^2 + AM^2 \text{ hay } a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.



Hình 400



Hình 401

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SHM vuông ở H, ta được :

$$SM^2 = HM^2 + SH^2 \text{ hay } SM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + (2a)^2$$

$$\Leftrightarrow SM^2 = \left(\frac{7a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Leftrightarrow AM = \frac{7a\sqrt{3}}{6}.$$

Áp dụng công thức $S_{tp} = S_{xq} + S_d$.

$$\text{Ta có } S_{xq} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{7a\sqrt{3}}{6} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$\text{Vậy } S_{tp} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}.$$

III. BÀI TẬP

1. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều có chiều cao 3cm, độ dài cạnh đáy 8cm.
2. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều có độ dài cạnh đáy bằng a, các mặt bên là những tam giác vuông.
3. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đều có chiều cao bằng 6cm, độ dài cạnh đáy bằng 3cm.

DẠNG 2. Tính thể tích, tính một yếu tố của hình chóp tứ giác đều

I. PHƯƠNG PHÁP

Thường sử dụng các kết quả sau :

KQ 1: Cạnh của hình vuông bằng a thì diện tích hình vuông đó bằng a^2 .

KQ 2: Cạnh của hình vuông bằng a thì đường chéo của hình vuông là $d = a\sqrt{2}$.

KQ 2: Đường chéo của hình vuông là d thì diện tích hình vuông đó bằng $\frac{d^2}{2}$.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao $SH = 12\text{cm}$, cạnh bên $SB = 13\text{cm}$.

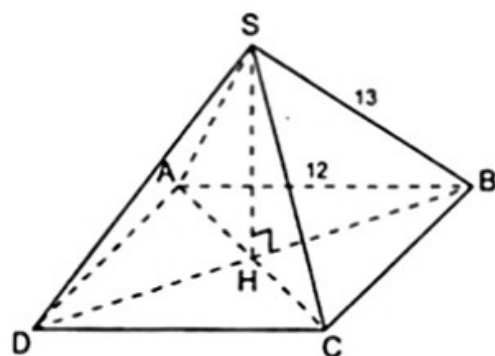
Lời giải (hình 402)

Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp :

$$V = \frac{1}{3} S.h.$$

Theo giả thiết $h = SH = 12\text{ cm}$.

Ta còn phải tính $S = S_{ABCD} = \frac{BD^2}{2}$.



Hình 402

Vì SH là đường cao của chóp đều nên $SH \perp BD$. Hay tam giác SHB vuông ở H .

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SHB vuông ở H , ta được :

$$SB^2 = HB^2 + SH^2 \text{ hay } 13^2 = BH^2 + 12^2 \Leftrightarrow BH^2 = 5^2 \Leftrightarrow BH = 5(\text{cm}).$$

Suy ra $BD = 2.5 = 10(\text{cm})$.

Áp dụng KQ 2, ta được : $S = S_{ABCD} = \frac{BD^2}{2} = \frac{10^2}{2}$.

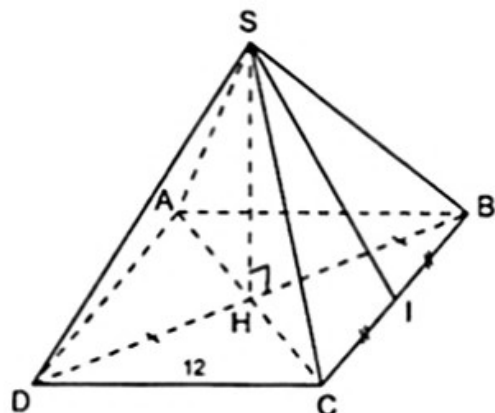
$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{10^2}{2} \cdot 12 = 200(\text{cm}^3).$$

Ví dụ 2. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $BC = 12\text{cm}$, trung đoạn 10cm .

Lời giải (hình 403)

Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp :

$$V = \frac{1}{3} S.h.$$



Hình 403

Theo giả thiết cạnh đáy $BC = 12\text{ cm}$ nên áp dụng KQ 1, ta được :

$$S = 12^2 = 144(\text{cm}^2).$$

Trên mp(ABCD), qua H là trung điểm của BD kẻ $HI \perp BC$ thì $HI \parallel DC$, suy ra HI là đường trung bình của tam giác BCD nên $HI = \frac{1}{2} DC = 6(\text{cm})$.

Vì SH là đường cao của chóp đều nên $SH \perp HI$ hay tam giác SHI vuông ở H.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SHI vuông ở H, ta được :

$$SI^2 = HI^2 + SH^2 \text{ hay } 10^2 = 6^2 + SH^2 \Leftrightarrow SH^2 = 8^2 \Leftrightarrow SH = 8 \text{ (cm).}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

III. BÀI TẬP

4. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, các cạnh bên bằng a.
5. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều có chiều cao bằng 12cm, trung đoạn bằng 13cm.
6. Một hình chóp tứ giác đều có thể tích 98cm^3 , chiều cao 6 cm. Tính độ dài cạnh đáy.

DẠNG 3. *Tính thể tích, tính một yếu tố của hình chóp tam giác đều, lục giác đều*

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Thường sử dụng bốn kết quả sau :

KQ 1: Tam giác đều ABC có đường cao AI thì AI vừa là đường trung tuyến, vừa là trung trực nên trực tâm H vừa là trọng tâm, tâm vòng tròn ngoại tiếp của tam giác. Do đó $AH = \frac{2}{3} AI, HI = \frac{1}{3} AI$.

KQ 2: Tam giác đều cạnh a có chiều cao là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

KQ 3: Tam giác đều cạnh a có diện tích là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

KQ 4: Lục giác đều cạnh a có diện tích bằng 6 lần diện tích tam giác đều cạnh a, tức là $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

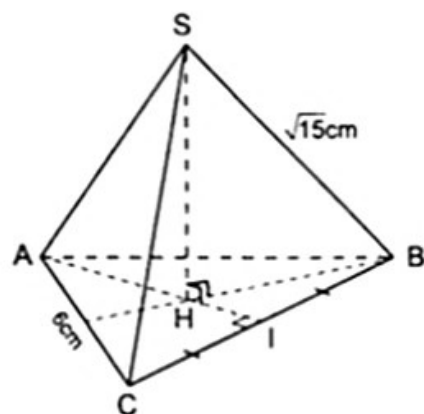
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính thể tích của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy $BC = 6\text{cm}$, các cạnh bên bằng $\sqrt{15}\text{cm}$.

Lời giải (hình 404)

Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp :

$$V = \frac{1}{3} S.h.$$



Hình 404

Theo giả thiết cạnh đáy của tam giác đều là $BC = 6\text{cm}$ nên áp dụng KQ 2 và KQ 3, ta có : $AI = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$, $S = S_{ABC} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$.

Kẻ đường cao SH của chóp đều áp dụng KQ 2, ta có :

$$BH = AH = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SHB vuông ở H , ta được :

$$\begin{aligned} SB^2 &= HB^2 + SH^2 \text{ hay } (\sqrt{15})^2 = SH^2 + (2\sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow SH^2 &= (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow SH = \sqrt{3} \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{9 \cdot 3}{3} = 9 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

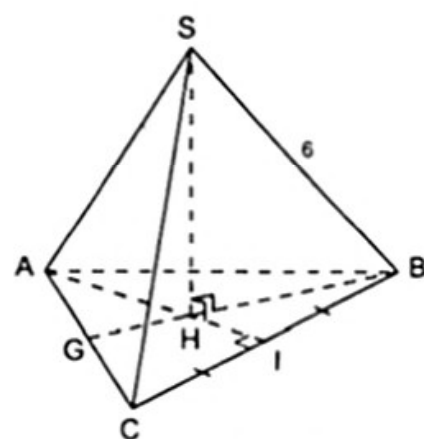
Ví dụ 2. Tính thể tích của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng 6cm .

Lời giải (hình 405)

Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp :

$$V = \frac{1}{3} S.h.$$

Theo giả thiết cạnh đáy của tam giác đều là $BC = 6\text{cm}$ nên áp dụng KQ 2 và KQ 3, ta có :



Hình 405

$$AI = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}; S = S_{ABC} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Kẻ đường cao SH của chóp đều và áp dụng KQ 2, ta có

$$BH = AH = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SHB vuông ở H, ta được :

$$\begin{aligned} SB^2 &= HB^2 + SH^2 \text{ hay } 6^2 = SH^2 + (2\sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow SH^2 &= (2\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow SH = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{9 \cdot 2 \sqrt{18}}{3} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 18\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

III. BÀI TẬP

7. Tính thể tích của hình chóp tam giác đều S.ABC có tất cả các cạnh bằng a cm.
8. Tính thể tích của hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 4 cm, các cạnh bên bằng $\sqrt{13}$ cm.
9. Tính thể tích của hình chóp lục giác đều S.ABCDEF có cạnh đáy bằng 2 cm, cạnh bên bằng 4 cm.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Chủ đề 1

1. Học sinh tự vẽ hình.

$$a) \text{ Vì } \begin{cases} A \in AB \\ AB \subset mp(ABCD) \end{cases} \Rightarrow A \in mp(ABCD).$$

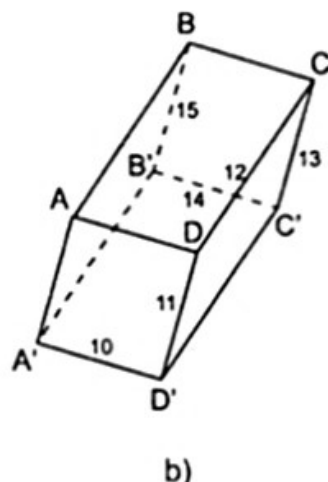
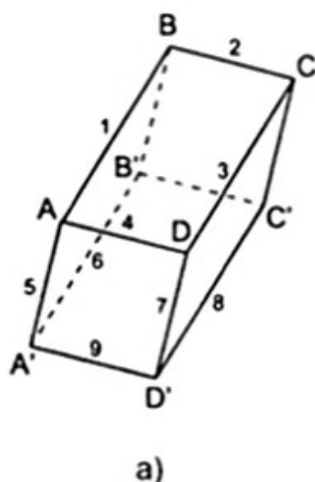
Chứng minh tương tự, ta cũng được : $A \subset mp(ABFE)$; $A \subset mp(ADHE)$.

b) Có hai mặt phẳng chứa đường thẳng AC là $mp(ABCD)$ và $mp(ACGE)$.

2. Các hình 377 a, b, c, e gấp được thành hình lập phương.

Hình d) không gấp được thành hình lập phương.

3. Trước hết gấp đoạn dây thép thành 9 khúc ABCDA'B'C'D'A' (mỗi khúc 1dm theo số thứ tự như trên hình 406 a, b).



Hình 406

Gấp tiếp đoạn dây thép còn lại thành 6 khúc A'D'DCC'B'B như trên hình 406b) với chú ý rằng có ba đoạn A'D', DC, C'B' được gấp hai lần tức là :

Đoạn 10 chồng lên 9, 12 chồng lên 3 và 14 chồng lên 7.

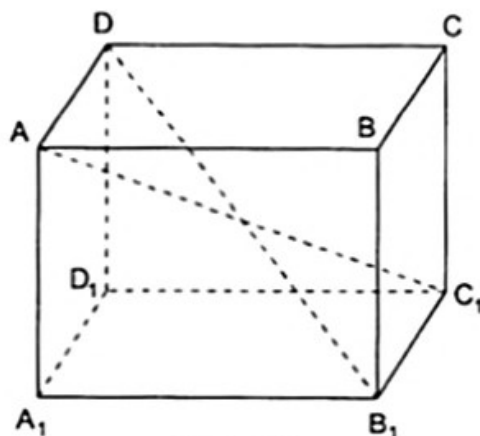
4. (hình 407)

a) AC_1 cắt DB_1 .

Giải thích :

$AD \parallel B_1C_1$, $AD = B_1C_1$ (vì cùng song song và bằng BC) nên tứ giác ADC_1B_1 là hình bình hành, do đó hai đường chéo AC_1 cắt DB_1 .

b) AC_1 không cắt BC.



Hình 407

5. (hình 408)

a) Cạnh AB cắt bốn cạnh là AD, AE, BC, BF.

Tại mỗi đỉnh có ba cặp cạnh cắt nhau nên với 8 đỉnh ta có $3 \cdot 8 = 24$ cặp cạnh cắt nhau.

b) Cạnh AB song song với ba cạnh EF, CD, GH.

Mỗi cạnh song song với ba cạnh khác. Có 12 cạnh nên có $3 \cdot 12 = 36$ cặp cạnh song song.

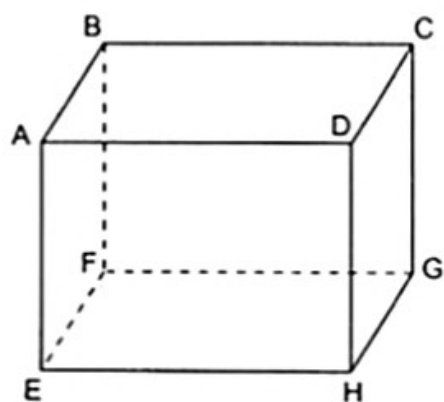
Nhưng như thế mỗi cặp được tính hai lần nên số cặp cạnh song song là $36 : 2 = 18$.

c) Cạnh AB chéo nhau với bốn cạnh CC_1 ; DD_1 ; A_1D_1 ; B_1C_1 . Mỗi cạnh chéo nhau với bốn cạnh khác.

Có 12 cạnh nên có $4 \cdot 12 = 48$ cặp cạnh chéo nhau.

Nhưng như thế mỗi cặp được tính hai lần nên số cặp cạnh chéo nhau là :

$$48 : 2 = 24.$$



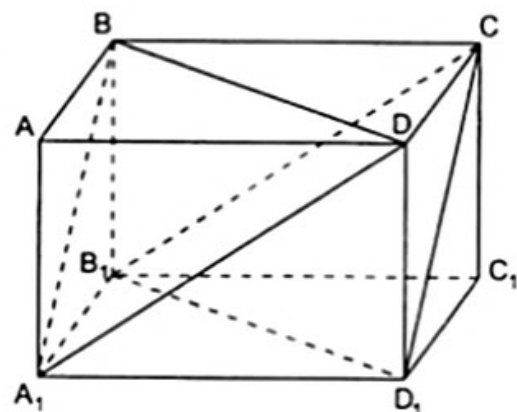
Hình 408

6. (hình 409) $BB_1 \parallel DD_1$, $BB_1 = DD_1$ (vì cùng song song và bằng AA_1) nên tứ giác BDD_1B_1 là hình bình hành, do đó $BD \parallel B_1D_1$.

Suy ra $BD \parallel mp(CB_1D_1)$.

Chứng minh tương tự : $DA_1 \parallel mp(CB_1D_1)$.

Hai đường thẳng DB và DA_1 cắt nhau và cùng song song với $mp(CB_1D_1)$, suy ra $mp(CB_1D_1) \parallel mp(BDA_1)$.



Hình 409

7. a) Có ba cặp mặt phẳng song song.
b) Có 12 cặp mặt cắt nhau theo 12 cạnh của hình hộp chữ nhật.
8. Diện tích cần xây bốn bức tường của gian phòng chính là diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 8m, 4m, 3m trừ đi diện tích các cửa sổ là $8m^2$.

$$\text{Diện tích đó bằng : } 2 \cdot (8 + 4) \cdot 3 - 8 = 72 - 8 = 64 (m^2) = 6400dm^2.$$

Vì mỗi viên gạch ống có diện tích bề mặt là $1,2dm^2$, nên cần có

$$\frac{6400}{1,2} = \frac{64000}{12} = 5333 + \frac{1}{3} \leq 5334.$$

Điều này chứng tỏ phải tốn ít nhất 5334 viên gạch.

9. Hình vuông đáy có cạnh là $\sqrt{2500} = 50$ (cm).

Diện tích xung quanh của thùng : $4.50.90 = 18000$ (cm²).

Diện tích tôn cần tìm là : $18000 + 2500 = 20500$ (cm²).

10. Gọi ba kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c thì a = 4cm, b = 3cm.

Áp dụng công thức tính thể tích của hình hộp chữ nhật, ta được :

$$V = 4.3.c = 12.c \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Áp dụng công thức tính đường chéo của hình hộp chữ nhật, ta được :

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ hay } 13 = \sqrt{4^2 + 3^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow 13^2 = 5^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 12^2 \Leftrightarrow c = 12 \text{ (cm)}.$$

Vậy $V = 12.12 = 144$ (cm³).

11. Gọi cạnh của hình lập phương là a.

Áp dụng công thức tính đường chéo của hình hộp chữ nhật, ta được :

$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \text{ hay } \sqrt{12} = \sqrt{3a^2}$$

$$\Leftrightarrow 12 = 3a^2 \Leftrightarrow a^2 = 2^2 \Leftrightarrow a = 2 \text{ (cm)}.$$

12. Lượng nước mà vòi có lưu tốc 500 lít/ giờ hay 500 dm³/ giờ trong 8 giờ có dung tích là : $500.8 = 4000$ (dm³) = 4m³.

Khi chảy vào trong bể khối nước này có dạng hình hộp chữ nhật có hai kích thước là : 2m . 3m, nên có thể tích : $2.3.h = 6h$ (m³).

Thể tích này đúng bằng khối nước chảy vào bể nên ta có phương trình :

$$6h = 4 \Leftrightarrow h = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ (m)}.$$

13. Trước hết, ta có thể tích của khối hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh 2dm, chiều cao là cạnh của hình lập phương bằng 6dm : $2.2.6 = 24$ (dm³).

Thể tích của khối lập phương cạnh bằng 6 dm là : $6^3 = 216(\text{dm}^3)$.

Như vậy thể tích của khối gỗ còn lại là :

$$216 - 2.24 + 2^3 = 224 - 48 = 176 (\text{dm}^3).$$

Giải thích : Sở dĩ phải cộng thêm một thể tích của một hình lập phương cạnh 2dm, vì khi đục hai lỗ xuyên qua nhau thì hình lập phương cạnh 2dm là phần chung của hai khối hộp chữ nhật đó.

14. Câu trả lời là không.

Giải thích : Gọi đường chéo của hình hộp chữ nhật là d thì chiếc que dài 27cm đặt lọt vào trong hộp khi $d \geq 27\text{cm}$. Điều này là không thể vì áp dụng công thức tính đường chéo của hình hộp chữ nhật, ta tính được :

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ hay } d = \sqrt{6^2 + 8^2 + 24^2} = \sqrt{26^2} = 26(\text{cm}) < 27\text{cm}.$$

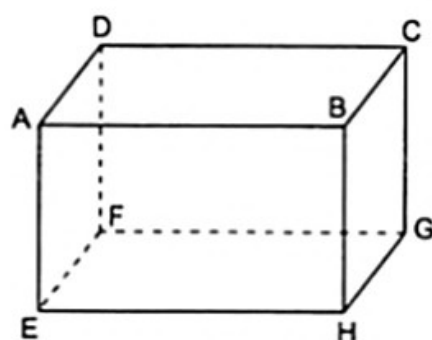
15. (hình 410) Khối bê tông trên hình vẽ hợp bởi ba khối hộp chữ nhật có các kích thước : 4m.2m.4m; 2m.1m.4m và 2m.2m.4m, nên có thể tích lần lượt là :

$$4.2.4 = 32 (\text{m}^3); 2.1.4 = 8 (\text{m}^3) \text{ và } 2.2.4 = 16 (\text{m}^3).$$

Do đó thể tích của khối bê tông là :

$$32 + 8 + 16 = 56(\text{m}^3).$$

Vậy số bao xi măng cần dùng là : $56.12 = 672$ (bao).

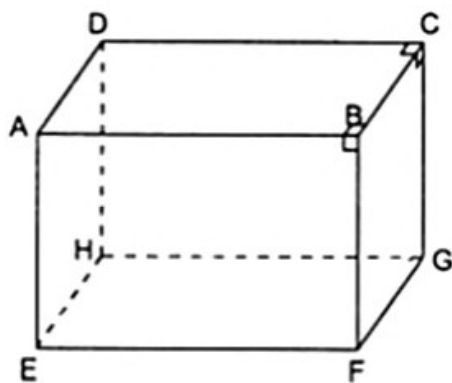


Hình 410

16. (hình 411)

a) Cạnh BC vuông góc với bốn cạnh là : BA, BF, CD, CG.

b) Hai mặt phẳng (ABFE) và (CGFB) vuông góc với nhau vì ABCD. EFGH là hình hộp chữ nhật nên các mặt bên ABFE và ABCD là các hình chữ nhật, do đó :



Hình 411

$$\begin{cases} BC \perp BA, BC \perp BF \\ BA \subset \text{mp}(ABFE), BF \subset \text{mp}(ABFE) \end{cases} \Rightarrow BC \perp \text{mp}(ABFE).$$

Mặt khác $BC \subset \text{mp}(BCGF)$ nên $\text{mp}(ABFE) \perp \text{mp}(CGFB)$.

Chủ đề 2

1. a) Vì hình lăng trụ đứng có hai đáy là những đa giác, các mặt bên là những hình chữ nhật nên hình lăng trụ đứng có đáy là n – giác thì nó có

Số mặt là : $m = n + 2$.

Số đỉnh là : $d = 2n$.

Số cạnh là : $c = 3n$. Do đó ta có hệ thức : $m + d - c = 2$.

b) Với hình lăng trụ đứng có 20 đỉnh, ta có : $2n = 20 \Leftrightarrow n = 10$.

Điều này chứng tỏ số cạnh của mặt đáy là 10 nên $m = 12$, $c = 3 \cdot 10 = 30$.

c) Câu trả lời là không.

Giải thích : Giả sử tồn tại hình lăng trụ đứng có 15 đỉnh khi đó phương trình $2n = 15$ phải có nghiệm nguyên dương. Điều này không thể xảy ra vì vế trái là một số chẵn còn vế phải là một số lẻ nên điều giả sử ở trên là sai.

Vậy không tồn tại hình lăng trụ đứng có 15 đỉnh.

2. Áp dụng kết quả của câu a) : $m = n + 2$, $d = 2n$, $c = 3n$ và $m + n - c = 2$ ta có

a) Hình hộp chữ nhật có $n = 4$ nên $m = 6$, $d = 8$, $c = 12$.

b) Hình lăng trụ đứng lục giác có $n = 6$ nên $m = 8$, $d = 12$, $c = 18$.

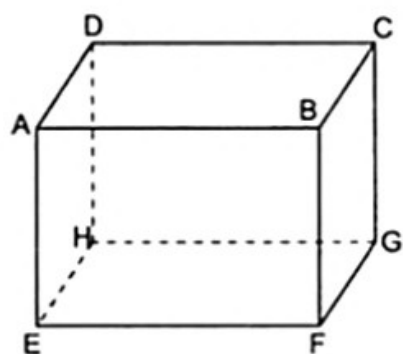
3. (hình 412)

a) Ba cạnh EH, CB, GF của hình hộp song song với cạnh AD.

b) Bốn cạnh AB, AE, DC, DH của hình hộp vuông góc với AD.

c) mp (CDHG) song song với mp (ABFE).

d) Bốn mặt phẳng (ABCD); (BCGH); (ADHE) và (HGFE) của hình hộp vuông góc với mp (ABFE).



Hình 412

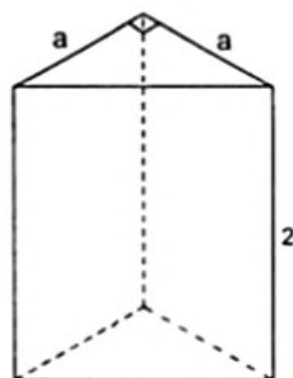
4. (hình 413) Gọi cạnh góc vuông của đáy là a .

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông cân này ta được : $2a^2 = 1,4^2 \Leftrightarrow a^2 = \left(\sqrt{0,98}\right)^2 \Rightarrow a \approx 1 \text{ (m)}.$

Chu vi đáy gần bằng 3,4 m.

Diện tích xung quanh gần bằng : $3,4 \cdot 2 \approx 6,8 \text{ (m}^2\text{)}.$

Diện tích toàn phần gần bằng : $6,8 + 1 \approx 7,8 \text{ (m}^2\text{)}.$



Hình 413

5. (hình 414) Xét hình lăng trụ đứng ABCD. EFGH có chiều cao 10cm, AC = 8cm, BD = 6cm.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng, ta được :

$$S_{xq} = 2p.h, \text{ có } h = 10 \text{ cm theo giả thiết.}$$

Vì đáy ABCD là hình thoi nên AC vuông góc với BD tại trung điểm O của mỗi đường và tất cả các cạnh bằng nhau, do đó :

$$AO = 4 \text{ cm, } BO = 3 \text{ cm và } 2p = 4.BC.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác BOC vuông ở O, ta được :

$$BC^2 = BO^2 + OC^2 \text{ hay } BC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow BC = 5 \text{ (cm).}$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = 4.5.10 = 200 \text{ (cm}^2\text{); } S_{tp} = 200 + \frac{1}{2}.6.8 = 200 + 24 = 224 \text{ (cm}^2\text{).}$$

6. (hình 415) Diện tích cần sơn là tổng diện tích toàn phần của hai hình lăng trụ đứng có các kích thước là $0,4\text{m} \times 1\text{m} \times 0,5\text{m}$ và $0,6\text{m} \times 1\text{m} \times 0,2\text{m}$ trừ đi hai lần diện tích hình chữ nhật bị che khuất có các kích thước là $0,2\text{m} \times 1\text{m}$.

Hình lăng trụ thứ nhất có :

$$S_{tp} = 2(0,4 + 1).0,5 + 2.0,4.1 = 2,2(\text{m}^2).$$

Hình lăng trụ thứ hai có :

$$S_{tp} = 2(0,6 + 1).0,2 + 2.0,6.1 = 1,84(\text{m}^2).$$

Diện tích hình chữ nhật bị che khuất là :

$$2.0,2.1 = 0,4(\text{m}^2).$$

Diện tích cần sơn là : $2,2 + 1,84 - 0,4 = 3,64 \text{ (m}^2\text{)}.$

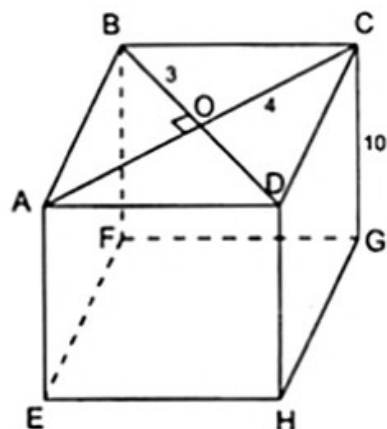
Số tiền cần dùng là : $3,64.62 = 225,68 \text{ (ngàn đồng)}.$

7. Diện tích đáy $S = 0,8.0,8 : 2 = 0,32 \text{ (m}^2\text{)}$

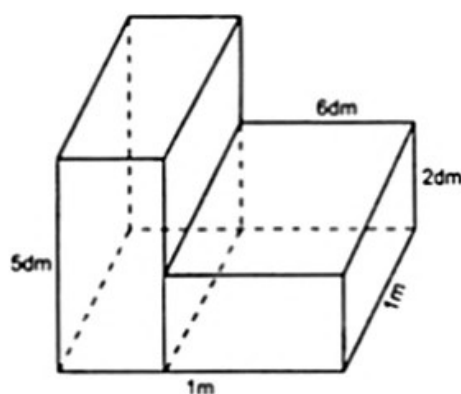
Thể tích của tủ $V = 0,32.2 = 0,64 \text{ (m}^3\text{)}.$

8. Diện tích đáy : $S_{ABCD} = \frac{(2+1).1}{2} = 1,5(\text{m}^2).$

Thể tích của bồn tắm $V = 1,5.4 = 6 \text{ (m}^3\text{)}.$



Hình 414



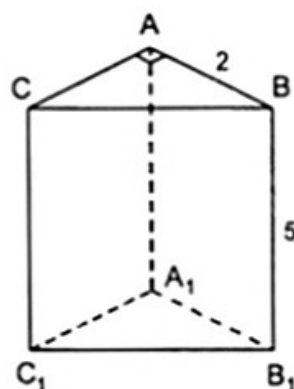
Hình 415

9. (hình 416) Diện tích đáy :

$$S = AB \cdot \frac{AC}{2} = 2 \cdot \frac{AC}{2} = AC.$$

Thể tích của lăng trụ :

$$V = AC \cdot 5 = 15 \Leftrightarrow AC = 3(\text{cm}).$$



Hình 416

10. (hình 417)

a) Từ giả thiết M là trung điểm của BC nên

Đặt $BM = MC = x > 0$ thì cạnh của tam giác đều ABC là $AB = 2x$ và AM là đường cao của tam giác ABC.

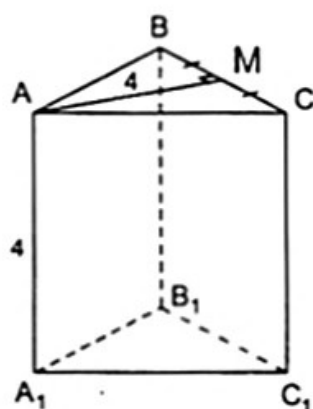
Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABM vuông ở M ta được $AB^2 = BM^2 + AM^2$ hay

$$(2x)^2 = x^2 + 4^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 2^2 \Leftrightarrow x = 2(\text{cm}).$$

Vậy độ dài cạnh đáy là 4 cm.

b) Diện tích đáy $S = AM \cdot BC : 2 = 4 \cdot 4 : 2 = 8(\text{cm}^2)$.

Thể tích $V = 8 \cdot 4 = 32(\text{cm}^3)$.



Hình 417

11. (hình 418)

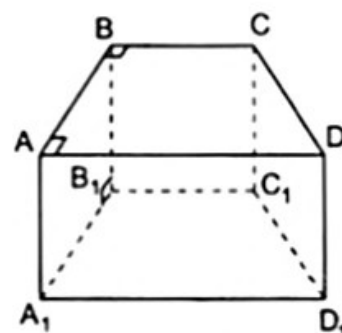
a) Cạnh AD song song với ba cạnh : BC; A_1D_1 ; B_1C_1 .

b) Cạnh AD vuông góc với ba cạnh : AB; AA_1 ; DD_1 .

c) Bốn cạnh song song với mp (BCC_1B_1) là : AD, A_1D_1 ; AA_1 ; DD_1 .

d) Hai mặt phẳng vuông góc với mp (BCC_1B_1) là :

mp (ABB_1A_1) và mp ($A_1B_1C_1D_1$).



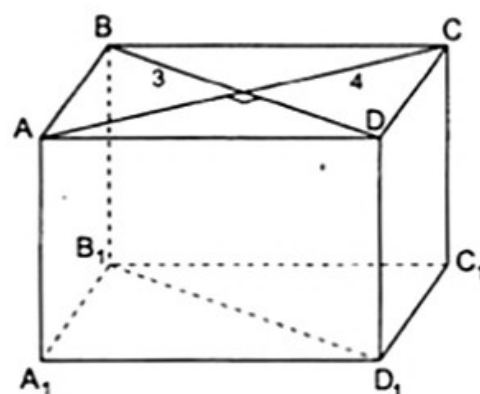
Hình 418

12. (hình 419)

a) Ba cạnh song song với cạnh AB là : CD; A_1B_1 ; C_1D_1 .

b) Hai mặt phẳng vuông góc với cạnh AB là : mp(CDD_1C_1) và mp($A_1B_1C_1D_1$).

c) Hai cạnh AA_1 , CC_1 và đường chéo BD vuông góc với cạnh AB.



Hình 419

d) Học sinh tự giải

e) Diện tích đáy : $S = AC.BD : 2 = 8.6 : 2 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Thể tích : $V = 24.10 = 240 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Chủ đề 3

1. (hình 420) Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đáy là hình vuông $ABCD$ có cạnh $BC = 8\text{cm}$, đường cao $SH = 3\text{cm}$, chân đường cao H của hình chóp là tâm đường tròn đi qua các đỉnh của hình vuông $ABCD$ nên H là trung điểm của AC . Áp dụng công thức :

$$S_{xq} = p.d, \text{ với } p = 2.8 = 16 \text{ (cm)}.$$

Ta còn phải tính trung đoạn d của hình chóp.

Gọi M là trung điểm của BC thì SM là đường cao của mặt bên SBC nên $SM = d$ là trung đoạn của hình chóp, đồng thời HM là đường trung bình của tam giác BCD . Do đó : $HM = CD : 2 = 8 : 2 = 4 \text{ (cm)}$.

Vì SH là đường cao của chóp đều nên $SH \perp HM$, hay tam giác SHM vuông ở H .

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác SHM vuông ở H , ta được :

$$SM^2 = HM^2 + SH^2 \text{ hay } d^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow d^2 = 5^2 \Leftrightarrow d = 5 \text{ (cm)}.$$

Vậy $S_{xq} = 16.5 = 80 \text{ (cm}^2\text{)}$.

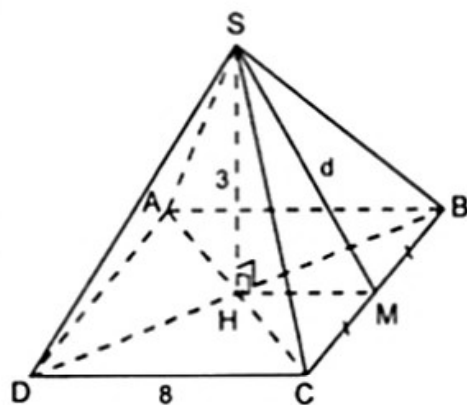
2. (hình 421) Xét hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = CA = a$, các mặt bên là các tam giác vuông cân tại S .

Gọi M là trung điểm của BC thì SM vừa là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC , vừa là đường cao vẽ từ đỉnh của mặt bên SBC , nên $SM = d$ là trung đoạn của hình chóp.

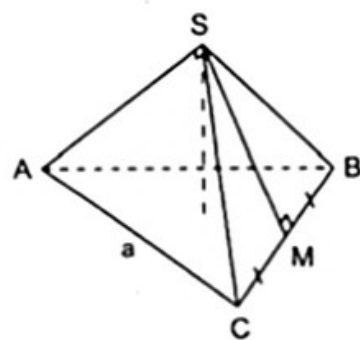
Áp dụng định lý về trung tuyến ứng với cạnh huyền vào tam giác vuông SBC , ta được :

$$d = SM = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = p.d = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^2}{4}.$$



Hình 420



Hình 421

3. Xem ví dụ 3 dạng 1. Có $S_{lp} = 2.3^2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

4. (hình 422) Xét hình chóp tứ giác đều S. ABCD có cạnh đáy bằng a, các cạnh bên bằng a.

Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp :

$$V = \frac{1}{3} S.h .$$

Theo giả thiết cạnh đáy bằng a. Áp dụng KQ 1 và KQ 2, ta được :

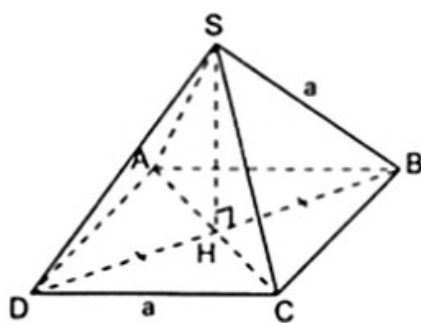
$$S = S_{ABCD} = a^2; d = BD = a\sqrt{2}.$$

Vì SH là đường cao của chóp đều nên $SH \perp BD$, Hay tam giác SHB vuông ở H.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SHB vuông ở H, ta được :

$$SB^2 = HB^2 + SH^2 \text{ hay } a^2 = SH^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow SH^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} . a^2 \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}.$$

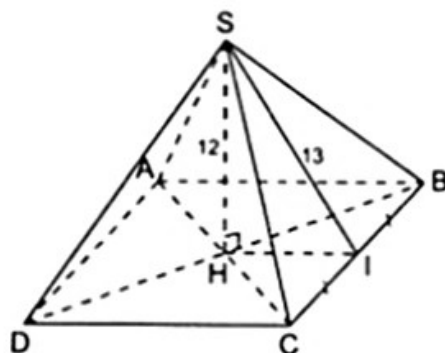


Hình 422

5. (hình 423) Xét hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao $SH = 12$ cm, trung đoạn 13 cm.

Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp :

$$V = \frac{1}{3} S.h .$$



Hình 423

Trên mp(ABCD), qua H là trung điểm của BD kẻ $HI \perp BC$ thì $HI \parallel DC$ nên I là trung điểm của BC.

Do đó SI là đường cao kẻ từ đỉnh của mặt bên SBC nên trung đoạn của hình chóp đều là $SI = 13$ cm.

Đồng thời HI là đường trung bình của tam giác BCD nên $CD = 2.HI$.

Vì SH là đường cao của chóp đều nên $SH \perp HI$ hay tam giác SHI vuông ở H.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SHI vuông ở H, ta được :

$$SI^2 = HI^2 + SH^2 \text{ hay } 13^2 = 12^2 + IH^2 \Leftrightarrow IH^2 = 5^2 \Leftrightarrow IH = 5 \text{ (cm).}$$

Suy ra $CD = 2.5 = 10 \text{ (cm)}$.

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 = 400 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

6. Gọi độ dài cạnh đáy của hình vuông đáy là $x > 0$ thì diện tích đáy là x^2 .

Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp và giả thiết ta có phương trình :

$$\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 6 = 98 \Leftrightarrow x^2 = 7^2 \Leftrightarrow x = 7 \text{ (cm)}.$$

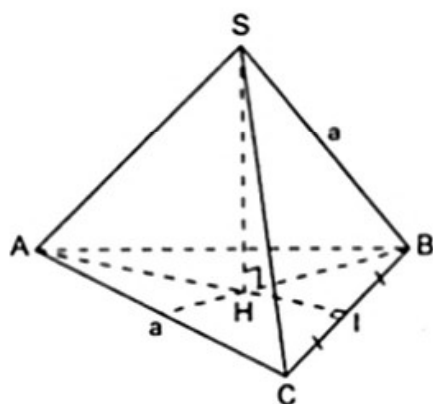
7. (hình 424) Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a .

Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp :

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

Theo giả thiết cạnh đáy của tam giác đều là $BC = a$ nên áp dụng KQ 2 và KQ 3, ta có :

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



Hình 424

Kẻ đường cao SH của chóp đều và áp dụng KQ 2, ta có : $BH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác SHB vuông ở H , ta được :

$$\begin{aligned} SB^2 &= HB^2 + SH^2 \text{ hay } a^2 = SH^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ \Leftrightarrow SH^2 &= \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

8. (hình 425) Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp : $V = \frac{1}{3} S \cdot h$.

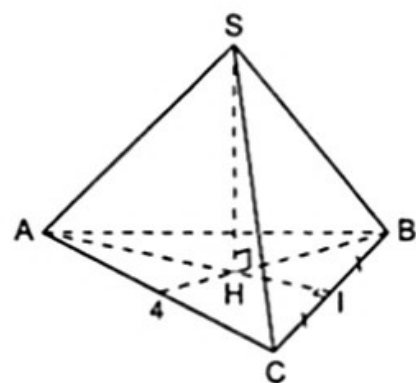
Theo giả thiết cạnh đáy của tam giác đều là $BC = 4\text{cm}$, nên áp dụng KQ 2 và

KQ 3, ta có : $AI = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$;

$$S = S_{ABC} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Kẻ đường cao SH của chóp đều áp dụng KQ 2, ta có :

$$BH = AH = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}.$$



Hình 425

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SHB vuông ở H, ta được :

$$SB^2 = HB^2 + SH^2 \text{ hay } (\sqrt{13})^2 = SH^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow SH^2 = \left(\frac{\sqrt{69}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow SH = \frac{\sqrt{69}}{3} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{69}}{3} = \frac{4\sqrt{23}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

9. (hình 426) Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp $V = \frac{1}{3} S.h$.

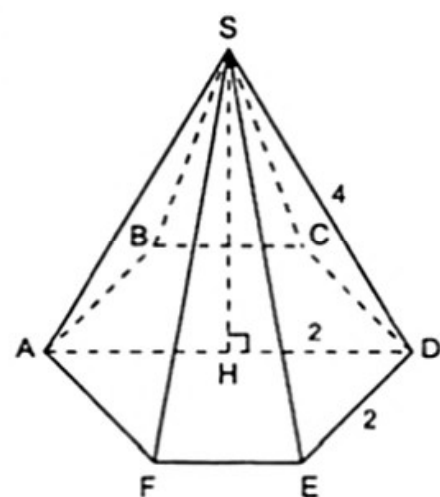
Áp dụng KQ 3, ta có : Lục giác đều cạnh 2cm có diện tích bằng 6 lần diện tích tam giác đều cạnh

$$2\text{cm, tức là : } S = \frac{3 \cdot 2^2 \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác SHD vuông ở H, ta được : $SD^2 = HD^2 + SH^2$ hay

$$4^2 = 2^2 + SH^2$$

$$\Leftrightarrow SH^2 = (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow SH = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$



Hình 426

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

MỤC LỤC

Mở đầu. Các phương pháp chứng minh định lý hình học	5
---	---

Chương 1.

Tứ giác

Chủ đề 1. Tứ giác	9
DẠNG 1. Tính góc của tứ giác	10
DẠNG 2. Vẽ tứ giác biết năm yếu tố. Chứng minh quan hệ về độ dài	13
Chủ đề 2. Hình thang	15
DẠNG 1. Nhận biết hình thang, Hình thang vuông, Hình thang cân	17
DẠNG 2. Tính góc của hình thang	20
DẠNG 3. Chứng minh quan hệ về độ dài, Tính độ dài đoạn thẳng	23
Chủ đề 3. Đường trung bình của tam giác, của hình thang	26
DẠNG 1. Vẽ thêm đường trung bình để tính góc, tính độ dài đoạn thẳng	29
DẠNG 2. Vẽ thêm đường trung bình để chứng minh quan hệ về độ dài	32
DẠNG 3. Vẽ thêm đường trung bình để chứng minh hai đường thẳng song song, chứng minh ba điểm thẳng hàng	35
Chủ đề 4. Dựng hình bằng thước kẻ và compa	37
DẠNG 1. Dựng tam giác, Dựng góc 30° , 60°	39
DẠNG 2. Dựng hình thang	40
Chủ đề 5. Hình bình hành	42
DẠNG 1. Nhận dạng hình bình hành, chứng minh ba điểm thẳng hàng, chứng minh các đường thẳng đồng quy	43
DẠNG 2. Nhận dạng hình bình hành để chứng minh hai đường thẳng song song	46
DẠNG 3. Vẽ thêm hình bình hành để chứng minh quan hệ về độ dài và tính góc	48
Chủ đề 6. Phép đối xứng trục và đối xứng tâm	51
DẠNG 1. Vẽ hình đối xứng qua trục, qua tâm. Chứng minh hai hình đối xứng trục, qua tâm	52
DẠNG 2. Nhận dạng hai hình đối xứng qua trục, qua tâm để chứng minh hai hình bằng nhau	55
DẠNG 3*. Vẽ thêm điểm đối xứng qua trục để chứng minh quan hệ về độ dài	57
Chủ đề 7. Hình chữ nhật	59
DẠNG 1. Nhận dạng hình chữ nhật, chứng minh ba điểm thẳng hàng	61
DẠNG 2. Vẽ thêm hình chữ nhật để tính độ dài đoạn thẳng, tính góc, chứng minh quan hệ về độ dài	63

DẠNG 3. Vẽ thêm đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh quan hệ về độ dài và tính góc	66
Chủ đề 8. Đường thẳng song song	69
DẠNG 1. Vẽ thêm các đường thẳng song song cách đều để chứng minh quan hệ về độ dài	70
DẠNG 2. Cho một điểm di chuyển trên một đường, tìm xem một điểm khác phụ thuộc vào điểm đó di chuyển trên đường thẳng song song nào ?	73
Chủ đề 9. Hình thoi	76
DẠNG 1. Nhận dạng hình thoi, tính chất đối xứng của hình thoi	77
DẠNG 2. Sử dụng định nghĩa và tính chất của hình thoi để tính toán, chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau, các đường thẳng vuông góc với nhau	79
Chủ đề 10. Hình vuông	82
DẠNG 1. Nhận dạng hình vuông	83
DẠNG 2. Sử dụng định nghĩa, tính chất của hình vuông để chứng minh các quan hệ bằng nhau, song song, vuông góc, thẳng hàng	86
DẠNG 3. Tìm điều kiện để một hình trở thành hình vuông	91
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ	93

Chương 2.

Diện tích đa giác

Chủ đề 1. Đa giác. Đa giác đều	125
DẠNG 1. Nhận dạng đa giác lồi, đa giác đều. Vẽ một đa giác lồi	126
DẠNG 2. Tính chất về góc, về số đường chéo của đa giác	128
Chủ đề 2. Diện tích hình chữ nhật	130
DẠNG 1. Tính diện tích hình chữ nhật	131
DẠNG 2. Diện tích hình vuông. Diện tích tam giác vuông	134
Chủ đề 3. Diện tích tam giác	136
DẠNG 1. Tính toán, chứng minh hệ thức về diện tích tam giác	137
DẠNG 2. Sử dụng công thức diện tích để tính độ dài đoạn thẳng. Chứng minh hệ thức hình học	141
DẠNG 3. Tìm diện tích lớn nhất của một hình	143
Chủ đề 4. Diện tích hình thang	145
DẠNG 1. Tính diện tích hình thang	145
DẠNG 2. Tính diện tích hình bình hành	147

Chủ đề 5. Diện tích hình thoi	149
DẠNG 1. Tính diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc	150
DẠNG 2. Tính diện tích hình thoi	151
Chủ đề 6. Diện tích đa giác	153
DẠNG 1. Tính diện tích đa giác	153
DẠNG 2*. Bài toán chia đa giác thành các phần có diện tích bằng nhau	155
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ	157

Chương 3.

Tam giác đồng dạng

Chủ đề 1. Định lý Ta-lét trong tam giác	175
DẠNG 1. Tính tỉ số hai đoạn thẳng. Chia đoạn thẳng theo tỉ số cho trước	176
DẠNG 2. Tính độ dài đoạn thẳng, dựng đoạn tỉ lệ thứ tư	179
DẠNG 3. Chứng minh các hệ thức hình học	180
DẠNG 4*. Vẽ thêm đường thẳng song song để tính tỉ số hai đoạn thẳng	182
Chủ đề 2. Định lý đảo và hệ quả của định lý Ta-lét	184
DẠNG 1. Tính độ dài đoạn thẳng. Chia đoạn thẳng cho trước thành các phần bằng nhau	184
DẠNG 2. Chứng minh hệ thức hình học	187
DẠNG 3. Chứng minh hai đường thẳng song song	189
DẠNG 4*. Vẽ thêm đường thẳng song song để chứng minh hệ thức hình học, tính tỉ số hai đoạn thẳng	191
Chủ đề 3. Tính chất đường phân giác trong tam giác	194
DẠNG 1. Tính độ dài đoạn thẳng	194
DẠNG 2. Tính tỉ số độ dài, tỉ số diện tích hai tam giác	196
Chủ đề 4. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác thường	198
DẠNG 1. Vẽ tam giác đồng dạng với tam giác cho trước. Chứng minh hai tam giác đồng dạng	201
DẠNG 2. Tính chất của hai tam giác đồng dạng	202
DẠNG 3. Nhận biết hai tam giác đồng dạng theo trường hợp thứ nhất (c.c.c). Chứng minh hai góc bằng nhau	204
DẠNG 4. Nhận biết hai tam giác đồng dạng theo trường hợp thứ hai (c.g.c) để tính độ dài đoạn thẳng. Chứng minh hai góc bằng nhau	206
DẠNG 5. Nhận biết hai tam giác đồng dạng theo trường hợp thứ ba (c.c) để tính độ dài đoạn thẳng	208

DẠNG 6. Sử dụng hai tam giác đồng dạng để dựng hình	211
Chủ đề 5. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông	212
DẠNG 1. Nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng để tính độ dài đoạn thẳng, tính góc	213
DẠNG 2. Tỷ số hai đường cao, tỷ số diện tích của hai tam giác đồng dạng	216
DẠNG 3. Sử dụng tam giác vuông đồng dạng để chứng minh đẳng thức hình học	218
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ	220

Chương 4.

Hình lăng trụ đứng – Hình chóp đều

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Chủ đề 1. Hình hộp chữ nhật	246
DẠNG 1. Nhận biết một điểm thuộc một đường thẳng, thuộc một mặt phẳng. Đường thẳng thuộc mặt phẳng	249
DẠNG 2. Nhận biết đường thẳng song song với đường thẳng, với mặt phẳng. Mặt phẳng song song với mặt phẳng	251
DẠNG 3. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật	254
DẠNG 4. Tính thể tích của hình hộp chữ nhật, tính một yếu tố của hình hộp chữ nhật	255
DẠNG 5. Nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng	258
Chủ đề 2. Hình lăng trụ đứng	260
DẠNG 1. Tìm số cạnh, số mặt, số đỉnh. Các yếu tố song song, vuông góc trong hình lăng trụ đứng	261
DẠNG 2. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, tính một yếu tố của hình lăng trụ đứng	263
DẠNG 3. Tính thể tích, tính các yếu tố của hình lăng trụ đứng	264
DẠNG 4. Tìm các yếu tố song song, vuông góc trong hình lăng trụ đứng	266

HÌNH CHÓP ĐỀU

Chủ đề 3. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều	268
DẠNG 1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, tính một yếu tố của hình chóp đều	269
DẠNG 2. Tính thể tích, tính một yếu tố của hình chóp tứ giác đều	271
DẠNG 3. Tính thể tích, tính một yếu tố của hình chóp tam giác đều, lục giác đều	273
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ	276

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chu tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUỲ THAO

Tổ chức bán thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập NGÔ ÁNH TUYẾT

Giám đốc CTCP Sách giáo dục tại TP Hà Nội CẦN HỮU HẢI

Biên tập nội dung :

NGUYỄN NGỌC TÚ – MAI MINH TUÂN

Sửa bản in :

MAI MINH TUÂN

Trình bày bìa :

HOÀNG MẠNH DŨA

Thiết kế sách và chế bản :

CÔNG TY CP DV VĂN HÓA TRUYỀN THÔNG DIỄM TƯỜNG

Công ty CP Sách giáo dục tại TP Hà Nội – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam
giữ quyền công bố tác phẩm

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 8 THEO CHỦ ĐỀ – PHẦN HÌNH HỌC
(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)

Mã số: T8T68s2-TTS

Số đăng ký KHXB: 57-2012/CXB/616-23/GD
In 4000 bản, (14 TK), khổ 17x24cm
Tại Xưởng In Trung tâm nghiên cứu và sản xuất Học Liệu
In xong và nộp lưu chiểu tháng 04 năm 2012