



BÙI VĂN TUYÊN
NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC
VÀ PHƯƠNG PHÁP
GIẢI BÀI TẬP
TOÁN 7
TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÙI VĂN TUYÊN – NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

**TRỌNG TÂM KIẾN THỨC
VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP
TOÁN 7**

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến !

Các em đi học, ai cũng mong muốn mình học giỏi trong đó có môn Toán. Muốn vậy, các em cần nắm vững lí thuyết và biết cách vận dụng để giải bài tập. Lí thuyết thì nhiều và rộng nên cần biết chọn lọc đâu là vấn đề cơ bản, trọng tâm để học cho kĩ và ghi nhớ.

Bài tập có nhiều loại, vô cùng phong phú và đa dạng nên cần phân loại các dạng và đưa ra phương pháp giải của từng dạng ấy. Ngoài ra một điều quan trọng nữa là phải biết cách suy luận khi giải toán.

Cuốn sách này được biên soạn nhằm đáp ứng các yêu cầu trên đây của các em học sinh.

Sách được viết theo sát các chương và bài của sách giáo khoa. Mỗi bài gồm ba phần :

A. Trọng tâm kiến thức

Phần này tóm tắt các kiến thức cơ bản, trọng tâm của bài. Người ta thường nói "Có bột mới gột nên hồ", bột ở đây là các kiến thức cơ bản, trọng tâm của bài. Có nắm vững được thì mới có cơ sở để giải bài tập.

B. Các dạng bài tập và phương pháp giải

Quá trình "gột nên hồ" chính là quá trình luyện tập.

Dựa vào trọng tâm kiến thức đã nêu ở trên, các tác giả đã đưa ra các dạng bài tập để các em luyện giải.

Trong mỗi dạng có nêu ngắn gọn phương pháp giải và nhiều ví dụ minh họa. Điều đó giúp các em kinh nghiệm giải bài tập, định hướng được cách giải, các bước cần làm rồi thực hiện theo các bước đó.

Các bài toán trong mỗi ví dụ được lựa chọn là những bài tập tiêu biểu, đơn giản nhưng không tầm thường, chứa đựng nhiều kiến thức, kỹ năng và phương pháp suy luận mà chương trình đòi hỏi.

C. Bài tập tự luyện

Phần này gồm một số bài tập, có loại trung bình, có loại khó, giúp các em tự kiểm tra, đánh giá mức độ thành thạo của mình. Các em hãy cố gắng tự giải. Nếu gặp khó khăn, có thể xem lời giải hoặc hướng dẫn ở cuối bài. Các tác giả mong rằng cuốn sách này là một tài liệu có ích giúp các em tự học có kết quả.

Cuốn sách cũng cung cấp cho các thầy giáo, cô giáo những tư liệu tham khảo để chọn bài cho các tiết luyện tập, bồi dưỡng học sinh.

Các bậc phụ huynh cũng có thể dùng cuốn sách này để hướng dẫn con em học tập.

Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc cho cuốn sách.

Các ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ : Công ty Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, quận Đống Đa, Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I.

SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

§1. TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

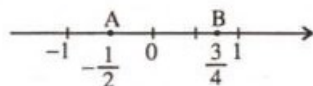
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Số hữu tỉ

- Số hữu tỉ là số viết dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
- Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

2. Biểu diễn các số hữu tỉ trên trục số (h.1)

- Điểm A biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{1}{2}$.
- Điểm B biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{4}$.



Hình 1

3. So sánh hai số hữu tỉ

Để so sánh hai số hữu tỉ, ta viết chúng dưới dạng phân số rồi so sánh hai phân số đó.

- Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương.

Số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm.

Số hữu tỉ 0, không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.

- Số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương nếu a và b cùng dấu, là số hữu tỉ âm nếu a, b khác dấu, bằng 0 nếu $a = 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. SỬ DỤNG CÁC KÍ HIỆU $\in, \notin, \subset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Phương pháp giải

Cần nắm vững ý nghĩa của từng kí hiệu :

- Kí hiệu $\subset$ đọc là "tập hợp con của".
- Kí hiệu $\mathbb{N}$ chỉ tập hợp các số tự nhiên.
- Kí hiệu $\mathbb{Z}$ chỉ tập hợp các số nguyên.
- Kí hiệu $\mathbb{Q}$ chỉ tập hợp các số hữu tỉ.

Ví dụ 1. Điền kí hiệu thích hợp vào ô trống :

a) $-\frac{3}{5} \quad \square \quad \mathbb{Z}$; $-\frac{3}{5} \in \square$; b) $\mathbb{N} \quad \square \quad \mathbb{Z} \subset \square$.

Giải

a) $-\frac{3}{5} \quad \square \quad \mathbb{Z}$; $-\frac{3}{5} \in \square$; b) $\mathbb{N} \quad \square \quad \mathbb{Z} \quad \square \quad \mathbb{Q}$.

Ví dụ 2. Khẳng định nào dưới đây là sai ?

- (A) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; (B) $-47 \in \mathbb{Q}$;
(C) $-47 \in \mathbb{Z}$; (D) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Giải

Khẳng định sai là khẳng định (A) vì $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ chứ không phải $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$.

Dạng 2. SO SÁNH CÁC SỐ HỮU TỈ

Phương pháp giải

- Viết các số hữu tỉ dưới dạng phân số có cùng mẫu dương rồi so sánh các tử số, phân số nào có tử số nhỏ hơn thì phân số đó nhỏ hơn.
- Có thể dùng tính chất bắc cầu.

Ví dụ 1. So sánh các số hữu tỉ sau :

a) $\frac{9}{70}$ và $\frac{5}{42}$; b) $\frac{-4}{27}$ và $\frac{10}{-63}$.

Giải

$$\text{a) } \frac{9}{70} = \frac{27}{210}; \quad \frac{5}{42} = \frac{25}{210}$$

$$\text{vì } \frac{27}{210} > \frac{25}{210} \text{ nên } \frac{9}{70} > \frac{5}{42}.$$

$$\text{b) } \frac{-4}{27} = \frac{-28}{189}; \quad \frac{10}{-63} = \frac{-10}{63} = \frac{-30}{189}$$

$$\text{vì } \frac{-28}{189} > \frac{-30}{189} \text{ nên } \frac{-4}{27} > \frac{10}{-63}.$$

Ví dụ 2. Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần :

$$\frac{5}{-6}; \quad \frac{3}{4}; \quad \frac{-7}{12}; \quad \frac{5}{8}.$$

Giải

Viết các phân số đã cho dưới dạng cùng mẫu dương ta được

$$\frac{5}{-6} = \frac{-20}{24}; \quad \frac{3}{4} = \frac{18}{24}; \quad \frac{-7}{12} = \frac{-14}{24}; \quad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}.$$

$$\text{Vì } \frac{-20}{24} < \frac{-14}{24} < \frac{15}{24} < \frac{18}{24}$$

$$\text{nên } \frac{5}{-6} < \frac{-7}{12} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}.$$

Ví dụ 3. So sánh các số hữu tỉ :

$$x = \frac{-2}{15}; \quad y = \frac{-10}{-11}.$$

Giải

$$\text{Ta có } x = \frac{-2}{15} < 0 \text{ (vì tử số và mẫu số trái dấu),}$$

$$y = \frac{-10}{-11} > 0 \text{ (vì tử số và mẫu số cùng dấu).}$$

Vậy $x < y$.

Ví dụ 4. So sánh các số hữu tỉ sau :

$$\frac{-16}{27}; \quad \frac{-16}{29}; \quad \frac{-19}{27}.$$

Giải

$$\text{Ta có } \frac{16}{27} > \frac{16}{29} \text{ suy ra } \frac{-16}{27} < \frac{-16}{29}. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{-19}{27} < \frac{-16}{27} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{-19}{27} < \frac{-16}{27} < \frac{-16}{29}.$$

Dạng 3. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT SỐ HỮU TỈ : LÀ MỘT SỐ DƯƠNG, MỘT SỐ ÂM HAY LÀ MỘT SỐ NGUYÊN.

Phương pháp giải

- Muốn cho số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là một số dương (hay âm) thì a và b phải có điều kiện cùng dấu (hay trái dấu).
- Muốn cho số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là một số nguyên thì b phải là ước của a.

Ví dụ 1. Cho số hữu tỉ $x = \frac{a-5}{-7}$. Với giá trị nguyên nào của a thì :

- a) x là số dương ;
- b) x là số âm ;
- c) x không là số dương và cũng không là số âm.

Giải

$$\text{a) } x > 0 \Leftrightarrow a - 5 < 0 \text{ (vì } -7 < 0)$$

$$\Leftrightarrow a < 5 \text{ (và } a \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{b) } x < 0 \Leftrightarrow a - 5 > 0 \text{ (vì } -7 < 0)$$

$$\Leftrightarrow a > 5 \text{ (và } a \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{c) } x = 0 \Leftrightarrow a - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 5.$$

Ví dụ 2. Cho số hữu tỉ $x = \frac{a+11}{a}$ ($a \in \mathbf{Z}$; $a \neq 0$). Với giá trị nguyên nào của a thì x là một số nguyên ?

Giải

$$\text{Ta có : } x = \frac{a+11}{a} = 1 + \frac{11}{a}.$$

$$\text{Ta có } x \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{a} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a \in U(11) \Leftrightarrow a \in \{\pm 1; \pm 11\}.$$

Ví dụ 3. Cho số hữu tỉ $x = \frac{3m-12}{6}$ với $m \in \mathbf{Z}$.

Tìm các giá trị của m để :

a) x là số hữu tỉ âm ;

b) x là số nguyên.

Giải

$$\text{a) Ta có : } x = \frac{3m-12}{6} = \frac{3(m-4)}{6} = \frac{m-4}{2}.$$

$$\text{Vậy } x < 0 \Leftrightarrow m-4 < 0 \text{ (vì } 2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow m < 4 \text{ (và } m \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{b) } x \text{ là số nguyên} \Leftrightarrow \frac{m-4}{2} \text{ là số nguyên}$$

$$\Leftrightarrow m-4 \text{ là số chẵn}$$

$$\Leftrightarrow m \text{ là số chẵn.}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong các phân số : $\frac{12}{27}, \frac{-1}{2}, \frac{-20}{-45}, \frac{16}{-36}$ phân số nào biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{4}{9}$?

2. Trong các số hữu tỉ sau, số nào là số hữu tỉ âm ?

$$\frac{-3}{-8}, \frac{4}{5}, \frac{0}{-7}, \frac{-6}{13}.$$

3. Cho các số hữu tỉ sau :

$$x = \frac{-12}{30}, y = \frac{-3}{-7}, z = \frac{10}{-25}.$$

Khi đó trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) $x > y$;

b) $y < z$;

c) $x = z$;

d) $z > x$.

4. a) Tìm số nhỏ nhất trong các số hữu tỉ sau :

$$\frac{3}{4}, \frac{-5}{7}, \frac{7}{-8}, \frac{0}{5}.$$

- b) Tìm số lớn nhất trong các số hữu tỉ sau :

$$\frac{-6}{11}, \frac{6}{-13}, \frac{-9}{-17}, \frac{6}{11}.$$

- 5*. Cho $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$.

b) Nếu $a > b$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+n}{b+n}$.

c) Nếu $a = b$ thì $\frac{a}{b} = \frac{a+n}{b+n}$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $\frac{16}{-36}$.

2. $\frac{-6}{13}$.

3. a) sai ; b) sai ; c) đúng ; d) sai.

4. a) Số nhỏ nhất là số $\frac{7}{-8}$.

b) Số lớn nhất là số $\frac{6}{11}$.

5. a) $a < b \Rightarrow a.n < b.n$ (vì $n > 0$)

$$\Rightarrow an + ab < bn + ab \Rightarrow a(n+b) < b(n+a)$$

$$\Rightarrow \frac{a(n+b)}{b(n+b)} < \frac{b(n+a)}{b(n+b)} \quad (\text{vì } b(n+b) > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}.$$

- b) Chứng minh tương tự.

- c) Chứng minh tương tự.

§2. CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ.

§3. NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Với $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$ ($a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$) ta có :

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m} ;$$

$$x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m} .$$

2. Với $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ ta có :

$$x.y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} ;$$

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c} \text{ (với } y \neq 0 \text{)}.$$

3. Các phép toán trong $\mathbb{Q}$ cũng có những tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối của phép nhân đối với phép cộng như trong tập hợp $\mathbb{Z}$. Ngoài ra, các quy tắc bỏ dấu ngoặc, quy tắc chuyển vế cũng như trong tập hợp $\mathbb{Z}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CỘNG, TRỪ HAI SỐ HỮU TỈ

Phương pháp giải

- Viết hai số hữu tỉ dưới dạng hai phân số có cùng mẫu dương (quy đồng mẫu số).
- Cộng, trừ hai tử số và giữ nguyên mẫu chung.
- Rút gọn kết quả đến phân số tối giản.

Ví dụ 1. Tính :

a) $\frac{-3}{8} + \frac{-5}{12} ;$

b) $\frac{-3}{14} + \frac{4}{35} .$

Giải

$$a) \frac{-3}{8} + \frac{-5}{12} = \frac{-9}{24} + \frac{-10}{24} = \frac{-19}{24};$$

$$b) \frac{-3}{14} + \frac{4}{35} = \frac{-15}{70} + \frac{8}{70} = \frac{-7}{70} = \frac{-1}{10}.$$

Ví dụ 2. Tính :

$$a) \frac{11}{30} - \frac{19}{20};$$

$$b) \frac{7}{15} - \frac{-9}{20}.$$

Giải

$$a) \frac{11}{30} - \frac{19}{20} = \frac{22}{60} - \frac{57}{60} = \frac{-35}{60} = \frac{-7}{12};$$

$$b) \frac{7}{15} - \frac{-9}{20} = \frac{28}{60} + \frac{27}{60} = \frac{55}{60} = \frac{11}{12}.$$

Dạng 2. NHÂN, CHIA HAI SỐ HỮU TỈ

Phương pháp giải

- Viết hai số hữu tỉ dưới dạng phân số.
- Áp dụng quy tắc nhân, chia các phân số.
- Rút gọn kết quả nếu có thể.

Ví dụ 1. Thực hiện phép nhân :

$$a) \frac{-8}{15} \cdot \frac{35}{-24};$$

$$b) -30 \cdot \frac{4}{5}.$$

Giải

$$a) \frac{-8}{15} \cdot \frac{35}{-24} = \frac{-8 \cdot 35}{15 \cdot (-24)} = \frac{7}{9};$$

$$b) -30 \cdot \frac{4}{5} = \frac{-30}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{-30 \cdot 4}{1 \cdot 5} = -24.$$

Ví dụ 2. Thực hiện phép chia :

$$a) \frac{42}{55} : \frac{-35}{22};$$

$$b) \frac{9}{20} : (-18).$$

Giải

$$a) \frac{42}{55} : \frac{-35}{22} = \frac{42}{55} \cdot \frac{22}{-35} = -\frac{12}{25};$$

$$b) \frac{9}{20} : (-18) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{-18} = -\frac{1}{40}.$$

Dạng 3. THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH VỚI NHIỀU SỐ HỮU TỈ

Phương pháp giải

- Thực hiện các phép tính theo đúng quy ước thứ tự thực hiện các phép tính và theo đúng quy tắc cộng, trừ hoặc nhân, chia.
- Chú ý vận dụng các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối của phép nhân đối với phép cộng trong trường hợp có thể.

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính :

$$a) \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-6}{7} ;$$

$$b) \frac{1}{2} + 22 \frac{1}{2} : \left(-\frac{3}{4} \right).$$

Giải

$$a) \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-6}{7} = \frac{-1}{2} + \frac{-3}{7} = \frac{-7}{14} + \frac{-6}{14} = \frac{-13}{14}.$$

$$b) \frac{1}{2} + 22 \frac{1}{2} : \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} + \frac{45}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} + (-30) = -29 \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính :

$$a) \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{8} - \frac{5}{6} \cdot \frac{-2}{3} ;$$

$$b) \left(\frac{41}{75} + \frac{17}{100} \right) : \frac{-129}{80}.$$

Giải

$$a) \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{8} - \frac{5}{6} \cdot \frac{-2}{3} = \frac{1}{12} + \frac{5}{9} = \frac{3}{36} + \frac{20}{36} = \frac{23}{36}.$$

$$b) \left(\frac{41}{75} + \frac{17}{100} \right) : \frac{-129}{80} = \left(\frac{164}{300} + \frac{51}{300} \right) \cdot \frac{80}{-129} = \frac{215}{300} \cdot \frac{-80}{129} = \frac{-4}{9}.$$

$$\text{Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức } M = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - 2}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 2}.$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - 2}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 2} = \left(\frac{3}{12} - \frac{2}{12} - \frac{24}{12} \right) : \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12} - \frac{24}{12} \right) \\ &= \left(-\frac{23}{12} \right) : \left(-\frac{23}{12} \right) = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lí nhất :

$$a) A = \frac{7}{38} \cdot \frac{9}{11} + \frac{7}{38} \cdot \frac{4}{11} - \frac{7}{38} \cdot \frac{2}{11} ;$$

$$b) B = 4x - 4y + 5xy \text{ với } x - y = \frac{5}{12} ; xy = -\frac{1}{3}.$$

Giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{7}{38} \cdot \frac{9}{11} + \frac{7}{38} \cdot \frac{4}{11} - \frac{7}{38} \cdot \frac{2}{11} = \frac{7}{38} \cdot \left(\frac{9}{11} + \frac{4}{11} - \frac{2}{11} \right) = \frac{7}{38} \cdot 1 = \frac{7}{38}.$$

$$\text{b) } B = 4x - 4y + 5xy = 4(x - y) + 5xy = 4 \cdot \frac{5}{12} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 0.$$

Dạng 4. TÌM SỐ CHƯA BIẾT TRONG MỘT ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

- Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, quy tắc "chuyển vế".
- Vận dụng quan hệ giữa các thừa số với tích của chúng.

Ví dụ 1. Tìm x , biết :

$$\text{a) } x - \frac{5}{18} = \frac{8}{27};$$

$$\text{b) } \frac{-2}{3}x + 1 = -\frac{7}{9}.$$

Giải

$$\text{a) } x - \frac{5}{18} = \frac{8}{27}$$

$$\text{b) } \frac{-2}{3}x + 1 = -\frac{7}{9}$$

$$x = \frac{8}{27} + \frac{5}{18}$$

$$\frac{-2}{3} \cdot x = -\frac{7}{9} - 1$$

$$x = \frac{31}{54};$$

$$\frac{-2}{3} \cdot x = -\frac{16}{9}$$

$$x = -\frac{16}{9} : \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$x = \frac{8}{3}.$$

Ví dụ 2. Tìm x , biết :

$$\text{a) } -\frac{7}{15}x + \frac{5}{6} = \frac{1}{4};$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{4} - x \right) \left(x + \frac{2}{5} \right) = 0.$$

Giải

$$\text{a) } -\frac{7}{15}x + \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{7}{15}x = \frac{1}{4} - \frac{5}{6}$$

$$-\frac{7}{15}x = -\frac{7}{12}$$

$$x = \left(-\frac{7}{12}\right) : \left(-\frac{7}{15}\right)$$

$$x = \frac{5}{4}.$$

$$\text{b) Ta có } \left(\frac{1}{4} - x\right)\left(x + \frac{2}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - x = 0 \\ x + \frac{2}{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Ví dụ 3. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết :

$$\frac{11}{15} - \frac{9}{10} < x < \frac{11}{15} : \frac{9}{10}.$$

Giải

$$\text{Ta có } \frac{11}{15} - \frac{9}{10} < x < \frac{11}{15} : \frac{9}{10}$$

$$\text{Suy ra } -\frac{1}{6} < x < \frac{22}{27}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính :

$$\text{a) } \frac{6}{7} + \frac{-8}{9} ;$$

$$\text{b) } \frac{-5}{21} - \frac{19}{28} ;$$

$$\text{c) } \frac{13}{12} + \frac{-17}{36} - \frac{-13}{18}.$$

2. Tính :

a) $\frac{-25}{28} \cdot \frac{21}{100}$;

b) $\frac{7}{9} : \frac{-35}{12}$.

3. Thực hiện các phép tính sau (bằng cách hợp lí nếu có thể) :

a) $\frac{5}{31} \cdot \frac{21}{25} + \frac{5}{31} \cdot \frac{-7}{10} - \frac{5}{31} \cdot \frac{9}{20}$;

b) $\left(\frac{13}{24} - \frac{29}{30}\right) : \left(-\frac{51}{5}\right)$.

4. Tìm x, biết :

a) $\frac{10}{9} : x + \frac{7}{12} = -\frac{2}{3}$;

b) $\left(\frac{4}{15} - \frac{1}{6}\right) \cdot x = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{27}$.

5*. Tính : $A = \left(\frac{1}{10} - 1\right) \left(\frac{1}{11} - 1\right) \left(\frac{1}{12} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{99} - 1\right) \left(\frac{1}{100} - 1\right)$.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. a) $-\frac{2}{63}$;

b) $-\frac{11}{12}$;

c) $\frac{4}{3}$.

2. a) $\frac{-3}{16}$;

b) $\frac{-4}{15}$.

3. a) $-\frac{1}{20}$;

b) $\frac{1}{24}$.

4. a) $\frac{8}{9}$;

b) $\frac{-20}{9}$.

5. $A = \frac{-9}{10} \cdot \frac{-10}{11} \cdot \frac{-11}{12} \dots \frac{-98}{99} \cdot \frac{-99}{100}$ (tích này có 91 thừa số âm)
 $= -\frac{9}{10}$.

§4. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ x , kí hiệu $|x|$ là khoảng cách từ điểm x tới điểm 0 trên trục số.

Ta có :
$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Với mọi $x \in \mathbb{Q}$, ta luôn có :

$$|x| \geq 0; \quad |x| = |-x|; \quad |x| \geq x.$$

2. Để cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân, ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CỘNG, TRỪ HAI SỐ THẬP PHÂN

Phương pháp giải

Có thể theo các quy tắc về giá trị tuyệt đối và về dấu tương tự như đối với số nguyên.

Ví dụ 1. Tính :

a) $(-3,19) + (-5,21)$;

b) $16,4 + (-20,7)$.

Giải

a) $(-3,19) + (-5,21) = -8,4$;

b) $16,4 + (-20,7) = -4,3$.

Ví dụ 2. Tính :

a) $6,35 - 9,12$;

b) $-25,3 - (-1,9)$

Giải

a) $6,35 - 9,12 = -2,77$;

b) $-25,3 - (-1,9) = -25,3 + 1,9 = -23,4$.

Dạng 2. NHÂN, CHIA HAI SỐ THẬP PHẦN

Phương pháp giải

Để nhân (hoặc chia) số thập phân x với số thập phân y ta có thể lấy $|x|$ nhân (hoặc chia) với $|y|$ rồi đặt dấu "+" đằng trước nếu x và y cùng dấu, và đặt dấu "-" đằng trước nếu x và y khác dấu.

Ví dụ 1. Tính :

a) $(-7,13).(-2,5)$;

b) $(-3,54).1,6$.

Giải

a) $(-7,13).(-2,5) = 17,825$;

b) $(-3,54).1,6 = -5,664$.

Ví dụ 2. Tính :

a) $(-33,54) : 8,6$;

b) $62,98 : (-9,4)$.

Giải

a) $(-33,54) : 8,6 = -3,9$;

b) $62,98 : (-9,4) = -6,7$.

Dạng 3. THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH VỚI NHIỀU SỐ THẬP PHẦN

Phương pháp giải

- Thực hiện các phép tính theo đúng quy ước thứ tự thực hiện các phép tính.
- Nếu có thể thì vận dụng các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối của phép nhân đối với phép cộng để tính toán được hợp lí.

Ví dụ 1. Tính bằng cách hợp lí (nếu có thể) :

a) $(-35,8) + (+21,3) + (-17,9) + (-16,4) + (+4,6)$;

b) $(-49,6) + (+13,7) + (+29,6) + (-53,7)$.

Giải

$$\begin{aligned} & \text{a) } (-35,8) + (+21,3) + (-17,9) + (-16,4) + (+4,6) \\ &= [(-35,8) + (-17,9) + (-16,4)] + [(+21,3) + (+4,6)] \\ &= (-70,1) + (+25,9) \\ &= -44,2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{b) } (-49,6) + (+13,7) + (+29,6) + (-53,7) \\
 &= [(-49,6) + (+29,6)] + [(+13,7) + (-53,7)] \\
 &= (-20) + (-40) \\
 &= -60.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính bằng cách hợp lí :

$$\text{a) } [0,25.5,2.(-4)] - [80.0,632.(-1,25)] ;$$

$$\text{b) } -23,8.41,9 - 23,8.67,2 + 23,8.9,1.$$

Giải

$$\text{a) } [0,25.5,2.(-4)] - [80.0,632.(-1,25)]$$

$$= [0,25.(-4).5,2] - [80.(-1,25).0,632]$$

$$= [(-1).5,2] - [(-100).0,632]$$

$$= (-5,2) - (-63,2)$$

$$= 58.$$

$$\text{b) } -23,8.41,9 - 23,8.67,2 + 23,8.9,1$$

$$= -23,8(41,9 + 67,2 - 9,1)$$

$$= -23,8.100 = -2380.$$

Dạng 4. TÌM GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa : $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Ví dụ 1. Tìm giá trị tuyệt đối của các số sau :

$$\frac{-7}{9}; \quad 6\frac{1}{2}; \quad -0,481; \quad 0.$$

Giải

$$\left| \frac{-7}{9} \right| = \frac{7}{9}; \quad \left| 6\frac{1}{2} \right| = 6\frac{1}{2};$$

$$|-0,481| = 0,481; \quad |0| = 0.$$

Ví dụ 2. Tính :

$$\text{a) } \left| -\frac{2}{3} \right| - \left| -\frac{5}{3} \right| ;$$

$$\text{b) } |-7| + \left| \frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) \right|.$$

Giải

$$\text{a) } \left| -\frac{2}{3} \right| - \left| -\frac{5}{3} \right| = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = -1 ; \quad \text{b) } \left| -7 \right| + \left| \frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) \right| = 7 + \frac{1}{6} = 7\frac{1}{6}.$$

**Dạng 5. TÌM SỐ CHƯA BIẾT TRONG ĐẲNG THỨC
CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI**

Phương pháp giải

Nếu $|x| = a$ (với $a \geq 0$)

thì $x = \pm a$.

Ví dụ 1. Tìm x , biết :

$$\text{a) } |x| = \frac{4}{7} ; \quad \text{b) } |x - 0,9| = 0,1.$$

Giải

$$\text{a) Vì } |x| = \frac{4}{7} \text{ nên } x = \pm \frac{4}{7}.$$

$$\text{b) Vì } |x - 0,9| = 0,1.$$

$$\text{Nên } x - 0,9 = \pm 0,1.$$

$$\bullet \text{ Xét } x - 0,9 = 0,1 \Rightarrow x = 0,1 + 0,9 \Rightarrow x = 1.$$

$$\bullet \text{ Xét } x - 0,9 = -0,1 \Rightarrow x = -0,1 + 0,9 \Rightarrow x = 0,8.$$

$$\text{Vậy } x \in \{1; 0,8\}.$$

Ví dụ 2. Tìm x , biết :

$$\text{a) } \left| 5x + \frac{3}{4} \right| - \frac{5}{4} = 2 ; \quad \text{b) } 8 - \left| x - \frac{1}{3} \right| = 9.$$

Giải

$$\text{a) Ta có } \left| 5x + \frac{3}{4} \right| - \frac{5}{4} = 2 \text{ suy ra } \left| 5x + \frac{3}{4} \right| = 2 + \frac{5}{4},$$

$$\text{hay } \left| 5x + \frac{3}{4} \right| = \frac{13}{4}.$$

$$\bullet \text{ Xét } 5x + \frac{3}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow 5x = \frac{13}{4} - \frac{3}{4} \Rightarrow 5x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet \text{ Xét } 5x + \frac{3}{4} = \frac{-13}{4} \Rightarrow 5x = \frac{-13}{4} - \frac{3}{4} = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{4}{5} \right\}.$$

$$\text{b) Ta có } 8 - \left| x - \frac{1}{3} \right| = 9 \text{ suy ra } \left| x - \frac{1}{3} \right| = 8 - 9,$$

$$\text{hay } \left| x - \frac{1}{3} \right| = -1.$$

$$\text{Không tồn tại } x \text{ để } \left| x - \frac{1}{3} \right| = -1 \text{ (vì } |a| \geq 0).$$

Dạng 6. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp giải

Dựa vào các tính chất: $|A| \geq 0$; $-|A| \leq 0$

(dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A = 0$).

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau :

$$\text{a) } |x + 1,5|; \quad \text{b) } \left| x - 2 \right| - \frac{9}{10}.$$

Giải

$$\text{a) Ta có } |x + 1,5| \geq 0.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x + 1,5|$ là 0.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x + 1,5|$ là 0 khi $x + 1,5 = 0$ hay $x = -1,5$.

Ta viết $\min |x + 1,5| = 0$ khi $x = -1,5$.

$$\text{b) Ta có } |x - 2| \geq 0.$$

Suy ra $|x - 2| - \frac{9}{10} \geq -\frac{9}{10}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x - 2| - \frac{9}{10}$ là

$$-\frac{9}{10} \text{ khi } x = 2.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau :

a) $-|2x - 1|$;

b) $4 - |5x + 3|$.

Giải

a) Ta có $-|2x - 1| \leq 0$.

Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức $-|2x - 1|$ là 0.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $-|2x - 1|$ là 0 khi $2x - 1 = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$.

Ta viết $\max(-|2x - 1|) = 0$ khi $x = \frac{1}{2}$.

b) Ta có $|5x + 3| \geq 0$.

Suy ra $4 - |5x + 3| \leq 4$.

Do đó $\max(4 - |5x + 3|) = 4$ khi $x = -\frac{3}{5}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính :

a) $\frac{-25}{28} \cdot 0,21$;

b) $\left(\frac{13}{24} - \frac{29}{30}\right) : (-10,2)$.

2. Tính giá trị tuyệt đối của các số sau :

0 ; $-\frac{3}{7}$; $\frac{-4}{-9}$; $-7,2$.

3. Tìm x, biết :

a) $|x| = \frac{10}{13}$;

b) $\left|x - \frac{5}{6}\right| = \frac{1}{2}$;

c) $\left|x + \frac{4}{9}\right| - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

4*. Tìm x và y, biết rằng :

$$\left|x - \frac{4}{11}\right| + |5 + y| = 0.$$

5. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x - 0,4| + 9$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{1}{8} - |x + 3|$.

HƯỚNG DẪN- ĐÁP SỐ

1. a) $-\frac{3}{16}$; b) $\frac{1}{24}$.
2. 0 ; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{9}$; $7,2$.
3. a) $x = \pm \frac{10}{13}$; b) $x \in \left\{ \frac{4}{3}; \frac{1}{3} \right\}$; c) $x \in \left\{ \frac{14}{9}; -\frac{22}{9} \right\}$.
4. a) Ta có $\left| x - \frac{4}{11} \right| \geq 0$; $|5 + y| \geq 0$ mà $\left| x - \frac{4}{11} \right| + |5 + y| = 0$
 nên $\left| x - \frac{4}{11} \right| = 0$ và $|5 + y| = 0$.
 Suy ra $x = \frac{4}{11}$ và $y = -5$.
5. a) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x - 0,4| + 9$ là 9 khi $x = 0,4$.
 b) Giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{1}{8} - |x + 3|$ là $\frac{1}{8}$ khi $x = -3$.

§5, §6. LUYỆN THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Luyện thừa với số mũ tự nhiên

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbb{Q}; n \in \mathbb{N}; n > 1).$$

Quy ước :

$$x^1 = x$$

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0).$$

2. Các phép tính về lũy thừa

- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0; m \geq n)$
- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
- $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
- $\left(\frac{x}{y} \right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0).$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT LŨY THỪA HOẶC VIẾT MỘT SỐ DƯỚI DẠNG LŨY THỪA

Phương pháp giải

Vận dụng định nghĩa của lũy thừa :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbf{Q} ; n \in \mathbf{N} ; n > 1).$$

Ví dụ 1. Tính :

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3}\right)^4 ; \quad \text{b) } (-0,5)^2 ; \quad \text{c) } \left(-1\frac{1}{4}\right)^3 .$$

Giải

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} ; \quad \text{b) } (-0,5)^2 = 0,25 ; \quad \text{c) } \left(-1\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{-5}{4}\right)^3 = \frac{-125}{64} .$$

Lưu ý : • Lũy thừa bậc chẵn của một số âm là một số dương.

• Lũy thừa bậc lẻ của một số âm là một số âm.

Ví dụ 2. Tính :

$$\begin{aligned} \text{a) } & (-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \dots (-1)^9 \cdot (-1)^{10} ; \\ \text{b) } & \left[\frac{1}{100} - 1^2\right] \cdot \left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \dots \left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{20}\right)^2\right] . \end{aligned}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & (-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \dots (-1)^9 \cdot (-1)^{10} \\ & = (-1) \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot (+1) \dots (-1) \cdot (+1) \text{ (tích này có 5 thừa số âm)} \\ & = -1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \left[\frac{1}{100} - 1^2\right] \cdot \left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \dots \left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{20}\right)^2\right] \\ & = \left[\frac{1}{100} - 1^2\right] \cdot \left[\frac{1}{100} - \frac{1}{4}\right] \cdot \left[\frac{1}{100} - \frac{1}{9}\right] \dots \left[\frac{1}{100} - \frac{1}{100}\right] \dots \left[\frac{1}{100} - \frac{1}{400}\right] = 0 . \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng lũy thừa của một số :

a) $\frac{-27}{125}$;

b) $\frac{16}{81}$.

Giải

a) $\frac{-27}{125} = \left(-\frac{3}{5}\right)^3$;

b) $\frac{16}{81} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \left(-\frac{4}{9}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)^4$.

Dạng 2. TÍNH TÍCH, TÍNH THƯƠNG CỦA HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ VÀ TÍNH LŨY THỪA CỦA MỘT LŨY THỪA

Phương pháp giải

Áp dụng các công thức :

$$(1) x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$(2) x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0, m \geq n)$$

$$(3) (x^m)^n = x^{m \cdot n} .$$

Có nhiều khi công thức (3) được dùng theo chiều ngược lại :

$$x^{m \cdot n} = (x^m)^n .$$

Ví dụ 1. Tính :

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$;

b) $2^7 : 2^4$; $2^4 : 2^7$;

c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$.

Giải

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$.

b) $2^7 : 2^4 = 2^3 = 8$; $2^4 : 2^7 = 2^{4-7} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu cách biểu diễn số 5^{12} dưới dạng $(5^m)^n$ với m, n là các số tự nhiên khác 1?

Ví dụ 1. Viết các lũy thừa sau dưới dạng tích hoặc thương của các lũy thừa :

a) $\left(5 \cdot \frac{3}{7}\right)^4$;

b) $\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right)^3$.

Giải

a) $\left(5 \cdot \frac{3}{7}\right)^4 = 5^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4$;

b) $\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Ví dụ 2. Tính bằng cách hợp lí nhất :

a) $(0,125)^3 \cdot 512$;

b) $\frac{230^5}{23^5}$.

Giải

a) $(0,125)^3 \cdot 512 = (0,125)^3 \cdot 8^3 = (0,125 \cdot 8)^3 = 1^3 = 1$.

b) $\frac{230^5}{23^5} = \left(\frac{230}{23}\right)^5 = 10^5 = 100000$.

Ví dụ 3. Viết biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số :

a) $\frac{21^{30}}{63^{15}}$;

b) $\frac{28^9 \cdot 30^9}{105^9}$.

Giải

a) Ta có $\frac{21^{30}}{63^{15}} = \frac{(3 \cdot 7)^{30}}{(3^2 \cdot 7)^{15}} = \frac{3^{30} \cdot 7^{30}}{3^{30} \cdot 7^{15}} = 7^{15}$.

b) $\frac{28^9 \cdot 30^9}{105^9} = \left(\frac{28 \cdot 30}{105}\right)^9 = \left(\frac{2^2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 2}{7 \cdot 15}\right)^9 = (2^3)^9 = 2^{27}$.

Ví dụ 4. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $\frac{(5^5 - 5^4)^3}{50^6}$;

b) $\frac{32^3 \cdot 9^5}{8^3 \cdot 6^6}$.

Giải

a) Ta có $\frac{(5^5 - 5^4)^3}{50^6} = \frac{[5^4(5-1)]^3}{(2 \cdot 5^2)^6} = \frac{5^{12} \cdot 4^3}{2^6 \cdot 5^{12}} = \frac{(2^2)^3}{2^6} = 1$.

b) Ta có $\frac{32^3 \cdot 9^5}{8^3 \cdot 6^6} = \frac{(2^5)^3 \cdot (3^2)^5}{(2^3)^3 \cdot (2 \cdot 3)^6} = \frac{2^{15} \cdot 3^{10}}{2^9 \cdot 2^6 \cdot 3^6} = 3^4 = 81$.

Dạng 4. TÌM CƠ SỐ, TÌM SỐ MŨ CỦA MỘT LŨY THỪA

Phương pháp giải

Có thể sử dụng các tính chất được thừa nhận dưới đây :

• Với $a \neq 0$; $a \neq \pm 1$, nếu $a^m = a^n$ thì $m = n$.

• Với $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 1$, nếu $a^n = b^n$ thì :

$a = b$ nếu n lẻ;

$a = \pm b$ nếu n chẵn.

Ví dụ 1. Tìm số tự nhiên n , biết :

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{8}{27}$;

b) $3^{n+1} = 9^2$.

Giải

a) Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{8}{27}$, suy ra $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Do đó $n = 3$.

b) Ta có $3^{n+1} = 9^2$, suy ra $3^{n+1} = (3^2)^2$ hay $3^{n+1} = 3^4$.

Do đó $n + 1 = 4 \Rightarrow n = 3$.

Ví dụ 2. Tìm số tự nhiên n , biết :

a) $\frac{625}{5^n} = 5^3$;

b) $\frac{(-2)^n}{-128} = 4$.

Giải

a) Ta có $\frac{625}{5^n} = 5^3$, suy ra $\frac{5^4}{5^n} = 5^3$.

Ta được $5^{4-n} = 5^3$.

Suy ra $4 - n = 3$ hay $n = 1$.

b) Ta có $\frac{(-2)^n}{-128} = 4$, suy ra $\frac{(-2)^n}{(-2)^7} = (-2)^2$.

Ta được $(-2)^{n-7} = (-2)^2$.

Do đó $n - 7 = 2$ hay $n = 9$.

Ví dụ 3. Cho biết $32 < 2^n < 512$ ($n \in \mathbb{N}$).

Tìm tập hợp các giá trị của n .

Giải

Ta có $32 < 2^n < 512$ ($n \in \mathbb{N}$),

suy ra $2^5 < 2^n < 2^9$.

Do đó $n \in \{6, 7, 8\}$.

Ví dụ 4. Tìm x , biết rằng $(x + 1)^3 = 216$.

Giải

Ta có $(x + 1)^3 = 216$,

suy ra $(x + 1)^3 = 6^3$.

Do đó $x + 1 = 6 \Rightarrow x = 5$.

Ví dụ 5. Tìm x , biết rằng $(x - 1)^4 = 16$.

Giải

Ta có $(x - 1)^4 = 16$ mà $16 = (\pm 2)^4$.

Nên $(x - 1)^4 = (\pm 2)^4$

• Xét $(x - 1)^4 = 2^4 \Rightarrow x - 1 = 2$ do đó $x = 3$;

• Xét $(x - 1)^4 = (-2)^4 \Rightarrow x - 1 = -2$ do đó $x = -1$.

Vậy $x \in \{-1 ; 3\}$.

Dạng 5. SO SÁNH HAI LUYỆN THỪA

Phương pháp giải

Có thể đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ hoặc cùng cơ số.

Ví dụ 1. So sánh 5^6 và $(-2)^{14}$.

Giải

Ta có $5^6 = (5^3)^2 = 125^2$.

$(-2)^{14} = 2^{14} = (2^7)^2 = 128^2$.

Vì $125^2 < 128^2$ nên $5^6 < (-2)^{14}$.

Ví dụ 2. So sánh 9^5 và 27^3 .

Giải

$$\text{Ta có } 9^5 = (3^2)^5 = 3^{10};$$

$$27^3 = (3^3)^3 = 3^9.$$

$$\text{Vì } 3^{10} > 3^9 \text{ nên } 9^5 > 27^3.$$

Nhận xét : Khi cơ số $a > 1$ và $m > n > 0$ thì $a^m > a^n$.

Ví dụ 3. So sánh $\left(\frac{1}{8}\right)^6$ và $\left(\frac{1}{32}\right)^4$.

Giải

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{8}\right)^6 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{18};$$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^4 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}.$$

$$\text{Vì } \left(\frac{1}{2}\right)^{18} > \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \text{ nên } \left(\frac{1}{8}\right)^6 > \left(\frac{1}{32}\right)^4.$$

Nhận xét : Khi $0 < a < 1$ và $m > n > 0$ thì $a^m < a^n$.

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Tính : $\left(-2\frac{1}{3}\right)^2$; $(-0,75)^3$; 2^{-3} .

2. Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của một số :

$$-\frac{8}{27}; \quad \frac{81}{625}.$$

3. Tính :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2};$

b) $(-5)^7 : (-5)^5;$

c) $(3^2)^3.$

§7. TỈ LỆ THỨC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định nghĩa

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số.

Dạng tổng quát : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $a : b = c : d$.

Các số a và d gọi là ngoại tỉ ; các số b và c gọi là trung tỉ.

2. Tính chất của tỉ lệ thức

• Tính chất cơ bản : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ ($b, d \neq 0$).

• Tính chất hoán vị : Từ một tỉ lệ thức ta có thể :

– Đổi chỗ hai ngoại tỉ cho nhau ;

– Đổi chỗ hai trung tỉ cho nhau ;

– Vừa đổi chỗ hai ngoại tỉ, vừa đổi chỗ hai trung tỉ.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. THAY TỈ SỐ GIỮA CÁC SỐ HỮU TỈ BẰNG TỈ SỐ GIỮA CÁC SỐ NGUYÊN

Phương pháp giải

- Viết các số hữu tỉ dưới dạng phân số.
- Thực hiện phép chia phân số.

Ví dụ 1. Thay tỉ số giữa hai số hữu tỉ bằng tỉ số giữa hai số nguyên :

a) $0,45 : 1,35$;

b) $\frac{3}{2} : \frac{9}{16}$.

Giải

a) $0,45 : 1,35 = \frac{45}{100} : \frac{135}{100} = \frac{1}{3}$.

b) $\frac{3}{2} : \frac{9}{16} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{3}$.

Ví dụ 2. Thay các tỉ số sau bằng tỉ số giữa các số nguyên :

a) $5\frac{1}{4} : 5\frac{5}{6}$;

b) $25,5 : 1\frac{9}{42}$.

Giải

a) $5\frac{1}{4} : 5\frac{5}{6} = \frac{21}{4} : \frac{35}{6} = \frac{9}{10}$.

b) $25,5 : 1\frac{9}{42} = \frac{255}{10} : \frac{51}{42} = 21 : 1$.

Dạng 2. LẬP TỈ LỆ THỨC TỪ CÁC SỐ CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Trước hết lập đẳng thức $a.d = b.c$.
- Sau đó suy ra tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ rồi có thể hoán vị thành ba tỉ lệ thức khác.

Nếu đã cho trước các tỉ số thì ta chọn ra các cặp tỉ số bằng nhau để lập thành tỉ lệ thức rồi hoán vị thành những tỉ lệ thức khác.

Ví dụ 1 : Lập một tỉ lệ thức từ các tỉ số sau :

$$3 : 11 ; 0,75 : 2\frac{1}{2} ; 4\frac{1}{5} : 14 .$$

Giải

$$3 : 11 = \frac{3}{11} ; 0,75 : 2\frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \frac{3}{10} ; 4\frac{1}{5} : 14 = \frac{21}{5} : 14 = \frac{3}{10} .$$

Do đó ta có tỉ lệ thức $0,75 : 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{5} : 14$.

Ví dụ 2. Từ bốn số $-2 ; 3 ; 4 ; -6$ có thể lập được một tỉ lệ thức không? Nếu có, hãy lập tất cả các tỉ lệ thức từ bốn số đó.

Giải

Ta có $(-2).(-6) = 3.4$. Do đó $\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$. (1)

Từ (1), hoán vị ta được ba tỉ lệ thức khác là :

$$\frac{-6}{3} = \frac{4}{-2} \quad (2) ; \quad \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \quad (3) ; \quad \frac{-6}{4} = \frac{3}{-2} . \quad (4)$$

Ví dụ 3. Cho năm số $3 ; 4 ; 4\frac{1}{2} ; 5 ; 6$. Hãy chọn ra bốn số để lập thành tất cả các tỉ lệ thức có thể có.

Giải

Ta có $3.6 = 4.4,5 (= 18)$.

Từ bốn số này ta có thể lập thành các tỉ lệ thức sau :

$$\frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} \quad (1); \quad \frac{6}{4} = \frac{4,5}{3} \quad (2); \quad \frac{3}{4,5} = \frac{4}{6} \quad (3); \quad \frac{6}{4,5} = \frac{4}{3} \quad (4).$$

Ví dụ 4. Cho sáu số $1; 2; 3; 4; 4\frac{1}{2}; 6$. Hãy lập bộ bốn số trong sáu số đó

sao cho mỗi bộ bốn số này có thể lập thành một tỉ lệ thức. Với mỗi bộ bốn số hãy lập thành một tỉ lệ thức.

Giải

Ta có thể lập được tất cả ba bộ bốn số mà mỗi bộ bốn số này có thể lập thành một tỉ lệ thức.

$$\text{Đó là : (1) } (1; 2; 3; 6) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6};$$

$$(2) \quad (2; 3; 4; 6) \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6};$$

$$(3) \quad (3; 4; 4\frac{1}{2}; 6) \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{4,5}{6}.$$

Dạng 3. TÌM SỐ HẠNG CHƯA BIẾT CỦA MỘT TỈ LỆ THỨC**Phương pháp giải**

- Muốn tìm một ngoại tỉ chưa biết, ta lấy tích các trung tỉ chia cho ngoại tỉ kia.
- Muốn tìm một trung tỉ chưa biết, ta lấy tích các ngoại tỉ chia cho trung tỉ kia.

Ví dụ 1. Tìm x trong các tỉ lệ thức sau :

$$\text{a) } \frac{x}{0,9} = \frac{5}{6};$$

$$\text{b) } \frac{-6}{x} = \frac{9}{-15}.$$

Giải

$$\text{a) } \frac{x}{0,9} = \frac{5}{6} \text{ suy ra } x = \frac{0,9 \cdot 5}{6} = 0,75.$$

$$\text{b) } \frac{-6}{x} = \frac{9}{-15} \text{ suy ra } x = \frac{(-6) \cdot (-15)}{9} = 10.$$

Ví dụ 2. Tìm x trong các tỉ lệ thức sau :

a) $\frac{14}{15} : \frac{9}{10} = x : \frac{3}{7}$;

b) $1\frac{3}{5} : 8 = 2,5 : x$.

Giải

a) $\frac{14}{15} : \frac{9}{10} = x : \frac{3}{7}$ suy ra $x = \frac{14}{15} \cdot \frac{3}{7} : \frac{9}{10} = \frac{4}{9}$.

b) $1\frac{3}{5} : 8 = 2,5 : x$ suy ra $x = 8,2,5 : \frac{8}{5} = 12,5$.

Ví dụ 3. Tìm x, biết :

a) $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$;

b) $\frac{3x-7}{8} = \frac{5}{2}$.

Giải

Ta có $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$ suy ra $x^2 = 16$.

Vậy $x = \pm 4$.

b) $\frac{3x-7}{8} = \frac{5}{2}$ suy ra $3x-7 = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20$.

Do đó $3x = 20 + 7 = 27$.

Vậy $x = 27 : 3 = 9$.

Dạng 4. CHỨNG MINH TỈ LỆ THỨC

Phương pháp giải

Muốn chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta có thể chứng minh $ad = bc$ hoặc chứng minh hai tỉ số ở hai vế có cùng giá trị.

Ví dụ 1. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Giải

Ta có $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ suy ra $a(c+d) = c(a+b)$.

Do đó $ac + ad = ac + bc$.

Vậy $ad = bc$, suy ra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ví dụ 2. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Giải

Ta đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.

Suy ra $a = kb$; $c = kd$.

$$\text{Khi đó } \frac{a+b}{a-b} = \frac{kb+b}{kb-b} = \frac{b(k+1)}{b(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}. \quad (1)$$

$$\frac{c+d}{c-d} = \frac{kd+d}{kd-d} = \frac{d(k+1)}{d(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho tỉ lệ thức $\frac{8}{3} = \frac{12}{4,5}$ (1). Hãy hoán vị tỉ lệ thức này để được ba tỉ lệ thức khác.
- Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được :
 - Từ bốn số : 3 ; 4 ; 15 ; 20.
 - Từ bốn trong năm số : 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9.
- Tìm x trong các tỉ lệ thức sau :
 - $\frac{x}{1,2} = \frac{5}{6}$;
 - $\frac{5}{9} : x = \frac{7}{4} : \frac{3}{10}$.
- Tìm tỉ số $\frac{x}{y}$, biết $\frac{x-y}{x+2y} = \frac{3}{4}$.
- *. Chứng minh rằng nếu $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b+c}{d+a}$ trong đó $a+b+c+d \neq 0$ thì $a = c$.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

- $\frac{4,5}{3} = \frac{12}{8}$ (2); $\frac{8}{12} = \frac{3}{4,5}$ (3); $\frac{4,5}{12} = \frac{3}{8}$ (4).

2. a) Ta có $3.20 = 4.15$, suy ra :

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} \quad (1); \quad \frac{20}{4} = \frac{15}{3} \quad (2); \quad \frac{3}{15} = \frac{4}{20} \quad (3); \quad \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad (4).$$

- b) Ta có $2.9 = 3.6$, suy ra :

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \quad (1); \quad \frac{9}{3} = \frac{6}{2} \quad (2); \quad \frac{2}{6} = \frac{3}{9} \quad (3); \quad \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad (4).$$

3. a) $x = 1$; b) $x = \frac{2}{21}$.

$$\begin{aligned} 4. \quad \frac{x-y}{x+2y} &= \frac{3}{4} \Rightarrow 4x - 4y = 3x + 6y \\ &\Rightarrow 4x - 3x = 6y + 4y \\ &\Rightarrow x = 10y \\ &\Rightarrow \frac{x}{y} = 10. \end{aligned}$$

$$5. \quad \text{Ta có } \frac{a+b}{c+d} = \frac{b+c}{d+a}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{a+b}{c+d} + 1 = \frac{b+c}{d+a} + 1.$$

$$\text{Do đó } \frac{a+b+c+d}{c+d} = \frac{b+c+d+a}{d+a}. \quad (*)$$

Vì $a + b + c + d \neq 0$ nên từ (*) suy ra $c + d = d + a$ hay $a = c$.

§8. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Từ dãy tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ta suy ra :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}.$$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

2. Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$, ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2 ; 3 ; 5.

Ta cũng viết $a : b : c = 2 : 3 : 5$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM CÁC SỐ HẠNG TRONG MỘT DÂY TỈ SỐ BẰNG NHAU BIẾT TỔNG, HIỆU CỦA CÁC SỐ HẠNG ĐÓ

Phương pháp giải

$$\begin{aligned} &\text{Nếu } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ và } x + y - z = M \\ &\text{thì } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y-z}{a+b-c} = \frac{M}{a+b-c}. \\ &\text{Từ đó tìm được } x, y, z. \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Tìm x, y, z, biết :

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z}{10} \text{ và } x - y + z = 70.$$

Giải

$$\text{Ta có } \frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z}{10} = \frac{x-y+z}{9-5+10} = \frac{70}{14} = 5.$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{9} = 5 \Rightarrow x = 45 ;$$

$$\frac{y}{5} = 5 \Rightarrow y = 25 ;$$

$$\frac{z}{10} = 5 \Rightarrow z = 50.$$

Ví dụ 2. Cho biết $\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{12}$ và $-x + y - z = 60$.

Tính x, y, z.

Giải

$$\text{Ta có } \frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{12} = \frac{-x+y-z}{-8+5-12} = \frac{60}{-15} = -4.$$

Do đó $\frac{x}{8} = -4 \Rightarrow x = -32$;

$\frac{y}{5} = -4 \Rightarrow y = -20$;

$\frac{z}{12} = -4 \Rightarrow z = -48$.

Ví dụ 3. Tìm x, y, z , biết :

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2} \text{ và } x - 3z = 9.$$

Giải

Ta có $\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$ suy ra $\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{3z}{6}$.

Do đó $\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{3z}{6} = \frac{x-3z}{7-6} = 9$.

Vậy

$$\frac{x}{7} = 9 \Rightarrow x = 63 ;$$

$$\frac{y}{4} = 9 \Rightarrow y = 36 ;$$

$$\frac{z}{2} = 9 \Rightarrow z = 18.$$

Ví dụ 4. Cho biết $\frac{x}{y} = \frac{7}{10}$; $\frac{y}{z} = \frac{10}{13}$ và $x + y + z = 120$.

Tính x, y, z .

Giải

Ta có $\frac{x}{y} = \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{10}$. (1)

$\frac{y}{z} = \frac{10}{13} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{13}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{7} = \frac{y}{10} = \frac{z}{13} = \frac{x+y+z}{7+10+13} = \frac{120}{30} = 4$.

$$\text{Do đó } \frac{x}{7} = 4 \Rightarrow x = 28 ;$$

$$\frac{y}{10} = 4 \Rightarrow y = 40 ;$$

$$\frac{z}{13} = 4 \Rightarrow z = 52 .$$

Ví dụ 5. Tìm x, y, z , biết $3x = 4y = 5z$ và $x - y - z = -42$.

Giải

$$\text{Ta có } 3x = 4y = 5z = \frac{3x}{60} = \frac{4y}{60} = \frac{5z}{60} .$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x-y-z}{20-15-12} = \frac{-42}{-7} = 6 .$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{20} = 6 \Rightarrow x = 120 ;$$

$$\frac{y}{15} = 6 \Rightarrow y = 90 ;$$

$$\frac{z}{12} = 6 \Rightarrow z = 72 .$$

Nhận xét. Từ đề bài, $3x = 4y = 5z$, muốn biến đổi thành một dãy tỉ số bằng nhau ta đã chia $3x, 4y, 5z$ cho BCNN $(3, 4, 5) = 60$.

Dạng 2. TÌM CÁC SỐ HẠNG TRONG MỘT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU BIẾT TÍCH CỦA CÁC SỐ HẠNG ĐÓ

Phương pháp giải

$$\text{Nếu } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ và } x.y.z = p$$

$$\text{thì ta đặt } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k .$$

$$\text{Suy ra } x = ka ; y = kb ; z = kc .$$

Tìm k rồi suy ra x, y, z .

Ví dụ 1. Tìm x, y, z , biết :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} \text{ và } x.y.z = 288 .$$

Giải

Ta đặt : $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} = k.$

Suy ra : $x = 3k ; y = 2k ; z = 6k.$

Do đó $x.y.z = (3k).(2k).(6k) = 36k^3.$

Vậy $36k^3 = 288 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2.$

Từ đó, $x = 3.2 = 6 ; y = 2.2 = 4 ; z = 6.2 = 12.$

Ví dụ 2. Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích là $960m^2$. Chiều dài và chiều rộng tỉ lệ với 5 và 3. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Giải

Gọi chiều dài của khu vườn là x (m),
chiều rộng của khu vườn là y (m).

Theo đề bài ta có : $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ và $xy = 960.$

Ta đặt : $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = k > 0$, suy ra : $x = 5k ; y = 3k.$

Do đó $x.y = (5k).(3k) = 15k^2.$

Vậy $15k^2 = 960 \Rightarrow k^2 = 64 \Rightarrow k = 8$ (vì $k > 0$).

Từ đó, $x = 40 ; y = 24.$

Vậy chiều dài khu vườn là 40m, chiều rộng khu vườn là 24m.

Dạng 3. CHIA SỐ M THÀNH NHỮNG PHẦN x, y, z TỈ LỆ VỚI CÁC SỐ a, b, c CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Trước hết lập dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, trong đó $x + y + z = M$.
- Sau đó tìm x, y, z .

Ví dụ 1. Chu vi của một tam giác là 81cm. Các cạnh của nó tỉ lệ với 2, 3, 4. Tính độ dài mỗi cạnh.

Giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là x, y, z .

Theo đề bài, ta có : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x + y + z = 81.$

Ta có : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{81}{9} = 9.$

Suy ra $x = 2.9 = 18$; $y = 3.9 = 27$; $z = 4.9 = 36.$

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là : 18cm ; 27cm ; 36cm.

Ví dụ 2. Chia số 69 thành ba phần tỉ lệ với các số $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$.

Giải

Gọi ba phần cần tìm lần lượt là $x, y, z.$

Theo đề bài, ta có :

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z}{\frac{3}{4}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = \frac{69}{\frac{23}{12}} = 36.$$

Suy ra $x = \frac{1}{2}.36 = 18$; $y = \frac{2}{3}.36 = 24$; $z = \frac{3}{4}.36 = 27.$

Dạng 4. CHỨNG MINH TỈ LỆ THỨC

Phương pháp giải

Vận dụng các tính chất của tỉ lệ thức, của dãy tỉ số bằng nhau để biến đổi điều kiện đã cho thành tỉ lệ thức cần chứng minh.

Ví dụ 1. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$

Chứng minh rằng $\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{ac}{bd}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Giải

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{ac}{bd}.$ (1)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{ac}{bd}.$

Ví dụ 2. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Chứng minh rằng $\frac{a+2c}{b+2d} = \frac{a-3c}{b-3d}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Giải

$$\text{Ta có : } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2c}{2d} = \frac{a+2c}{b+2d}. \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3c}{3d} = \frac{a-3c}{b-3d}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a+2c}{b+2d} = \frac{a-3c}{b-3d}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính x và y, biết $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$ và $x + y = 70$.
2. Tính x và y, biết $\frac{x}{15} = \frac{y}{7}$ và $x - 2y = 16$.
3. Cho biết $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$ và $xy = 1000$.

Tính x và y.

4. Tìm x, y, z, biết :

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5} \text{ và } x - y - z = 6.$$

- 5*. Tìm x, y, z, biết :

$$\text{a) } \frac{x}{y} = \frac{8}{11}; \frac{y}{z} = \frac{11}{3} \text{ và } x + y - z = 80;$$

$$\text{b) } \frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \frac{y}{6} = \frac{z}{11} \text{ và } x.y.z = -528.$$

- 6*. Cho x, y, z là ba số dương phân biệt. Biết : $\frac{x-y}{z} = \frac{3y}{x-z} = \frac{x}{y}$.

Chứng minh rằng : $x = 2y$ và $y = 2z$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $x = 25$; $y = 45$.
2. $x = 240$; $y = 112$.
3. Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$. Tìm được $k = \pm 10$.

Suy ra $x = 50$; $y = 20$ hoặc $x = -50$; $y = -20$.

4. $x = 79$; $y = 42$; $z = 30$.

- 5*. a) Biến đổi thành dãy : $\frac{x}{8} = \frac{y}{11} = \frac{z}{3}$.

Đáp số : $x = 40$; $y = 55$; $z = 15$.

b) Ta có $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6}$. (1)

Mà $\frac{y}{6} = \frac{z}{11}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{11} = k$.

Tính k được $k = -1$, suy ra $x = -8$; $y = -6$; $z = -11$.

6. $\frac{x-y}{z} = \frac{3y}{x-z} = \frac{x}{y} = \frac{x-y+3y+x}{z+x-z+y} = \frac{2(x+y)}{x+y} = 2$.

Vậy : $\frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$, từ đó tìm được $y = 2z$.

§9. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN. §10. LÀM TRÒN SỐ

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Xét phép chia :

$$3 : 20 = 0,15$$

$$5 : 12 = 0,41666\dots$$

Số 0,15 là số thập phân hữu hạn.

Số 0,41666... được viết gọn thành $0,41(6)$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì là 6.

2. Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

3. Mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ.

4. Quy ước làm tròn số

• *Trường hợp 1.* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

• *Trường hợp 2.* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT MỘT PHÂN SỐ VIẾT ĐƯỢC DƯỚI DẠNG SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN HOẶC VÔ HẠN TUẦN HOÀN

Phương pháp giải

- Viết phân số dưới dạng phân số tối giản với mẫu dương.
- Phân tích mẫu số đó ra thừa số nguyên tố.
- Nếu mẫu này không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn. Nếu mẫu này có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Ví dụ 1. Trong ba phân số : $\frac{-49}{140}$; $\frac{100}{275}$; $\frac{11}{6}$.

Phân số nào viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn ?

Phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn ?

Giải

- Xét phân số : $\frac{-49}{140} = \frac{-7}{20}$.

Ta thấy mẫu số $20 = 2^2 \cdot 5$ (không có ước nguyên tố khác 2 và 5).

Vậy phân số $\frac{-7}{20}$ viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

- Xét phân số $\frac{100}{275} = \frac{4}{11}$.

Mẫu số 11 là số nguyên tố khác 2 và 5 nên phân số $\frac{4}{11}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

- Xét phân số $\frac{11}{6}$ có mẫu số là $6 = 2 \cdot 3$ (có ước nguyên tố khác 2 và 5).

Vậy phân số $\frac{11}{6}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Ví dụ 2. Trong bốn phân số dưới đây, có mấy phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn ?

$$\frac{65}{30}; \frac{33}{150}; \frac{63}{140}; \frac{45}{36}.$$

Giải

$\frac{65}{30} = \frac{13}{6}$; mẫu số là $6 = 2 \cdot 3$ (có chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

$\frac{33}{150} = \frac{11}{50}$; mẫu số là $50 = 2 \cdot 5^2$ (không chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

$\frac{63}{140} = \frac{9}{20}$; mẫu số là $20 = 2^2 \cdot 5$ (không chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

$\frac{45}{36} = \frac{5}{4}$; mẫu số là $4 = 2^2$ (không chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

Vậy có ba phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

Ví dụ 3. Trong bốn phân số dưới đây, có mấy phân số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn ?

$$\frac{8}{15}; \frac{21}{35}; \frac{12}{27}; \frac{26}{39}.$$

Giải

$\frac{8}{15}$ là phân số tối giản ; mẫu số là $15 = 3.5$.

$\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$; mẫu số là 5.

$\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$; mẫu số là $9 = 3^2$.

$\frac{26}{39} = \frac{2}{3}$; mẫu số là 3.

Vậy có tất cả ba mẫu số có chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5 nên có ba phân số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Ví dụ 4. Tìm số tự nhiên $x < 10$ sao cho phân số $\frac{x+4}{30}$ viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

Giải

Ta có mẫu số là $30 = 2.3.5$ (có chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

Vậy muốn cho phân số $\frac{x+4}{2.3.5}$ viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn thì $(x+4) : 3$.

Suy ra : $x+4 = 6 \Rightarrow x = 2$ (chọn) ;

$x+4 = 9 \Rightarrow x = 5$ (chọn) ;

$x+4 = 12 \Rightarrow x = 8$ (chọn) ;

$x+4 = 15 \Rightarrow x = 11$ (loại).

Vậy $x \in \{2, 5, 8\}$.

Dạng 2. VIẾT MỘT PHÂN SỐ HOẶC MỘT TỈ SỐ DƯỚI DẠNG SỐ THẬP PHÂN

Phương pháp giải

Ta chia tử số cho mẫu số.

Ví dụ 1. Viết các phân số hoặc tỉ số sau dưới dạng số thập phân :

a) $\frac{-49}{140}$;

b) $45 : 36$.

Giải

$$a) \frac{-49}{140} = \frac{-7}{20} = -0,35 \text{ (chia } -7 \text{ cho } 20).$$

$$b) 45 : 36 = 1,25.$$

Ví dụ 2. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn :

$$a) \frac{100}{275};$$

$$b) \frac{11}{6}.$$

Giải

$$a) \frac{100}{275} = \frac{4}{11} = 0,3636... = 0,(36) \text{ (ta chia 4 cho 11).}$$

$$b) \frac{11}{6} = 1,833... = 1,8(3) \text{ (ta chia 11 cho 6).}$$

Dạng 3. VIẾT SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN DƯỚI DẠNG PHÂN SỐ TỐI GIẢN

Phương pháp giải

Dựa vào nhận xét :

Phần thập phân có n chữ số thì ở mẫu số của phân số là 10^n .

Cuối cùng rút gọn phân số vừa lập được.

Ví dụ 1. Viết các số thập phân hữu hạn sau dưới dạng phân số tối giản :

$$a) 0,48;$$

$$b) -0,375.$$

Giải

$$a) 0,48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25};$$

$$b) -0,375 = -\frac{375}{1000} = -\frac{3}{8}.$$

Ví dụ 2. Viết các số thập phân hữu hạn sau dưới dạng phân số tối giản :

$$a) -0,0065;$$

$$b) 18,92.$$

Giải

$$a) -0,0065 = -\frac{65}{10000} = -\frac{13}{2000};$$

$$b) 18,92 = \frac{1892}{100} = \frac{473}{25}.$$

Dạng 4. LÀM TRÒN CÁC SỐ ĐẾN MỘT HÀNG NÀO ĐÓ

Phương pháp giải

Áp dụng quy tắc làm tròn số.

Ví dụ 1. Làm tròn số 2,37 đến :

- a) Hàng phần mười ; b) Hàng đơn vị.

Giải

- a) Làm tròn số 2,37 đến hàng phần mười ta được 2,4.
b) Làm tròn số 2,37 đến hàng đơn vị ta được 2.

Ví dụ 2. Làm tròn số 4652 đến :

- a) Hàng chục ; b) Hàng trăm ; c) Hàng nghìn.

Giải

- a) Làm tròn số 4652 đến hàng chục ta được 4650 ;
b) Làm tròn số 4652 đến hàng trăm ta được 4700 ;
c) Làm tròn số 4652 đến hàng nghìn ta được 5000.

Ví dụ 3. Một số nguyên sau khi làm tròn đến hàng nghìn thì được 72 000. Hỏi số đó lớn nhất là bao nhiêu ? Nhỏ nhất là bao nhiêu ?

Giải

Số lớn nhất làm tròn đến hàng nghìn thành 72 000 là số 72 499 ;

Số nhỏ nhất làm tròn đến hàng nghìn thành 72 000 là số 71 500.

Ví dụ 4. Thực hiện phép chia $31 : 42$ rồi làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Giải

$$31 : 42 = 0,73809... \approx 0,74.$$

Ví dụ 5. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{5,37.12,8}{24,56}$ rồi làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Giải

$$M = \frac{53,7.12,8}{24,56} = 27,9869... \approx 28,0.$$

Ví dụ 6. Tìm x trong tỉ lệ thức :

$$8,5 : x = 3,7 : 0,9 \text{ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).}$$

Giải

Ta có : $8,5 : x = 3,7 : 0,9$

Suy ra : $x = \frac{8,5 \cdot 0,9}{3,7}$

$$x = 2,0675... \approx 2,1.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong các phân số sau, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn ?
Phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn ?

$$\frac{13}{40}; \frac{8}{15}; \frac{30}{84}; \frac{27}{150}.$$

2. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn :

a) $\frac{56}{175}; \frac{915}{120};$ b) $\frac{66}{36}; \frac{135}{198}.$

3. Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản :

$$0,475; -2,84; 7,375.$$

4. Làm tròn số 7068,524 đến :

a) Hàng phần mười ; b) Hàng đơn vị ; c) Hàng trăm.

5. Tính trung bình cộng của các số sau (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

$$8,5; 7; 9; 6,5; 8; 7,5; 8; 7; 9,5.$$

- 6*. Có bao nhiêu số nguyên sau khi làm tròn trăm cho kết quả là 3500 ?

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Các phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn là :

$$\frac{13}{40}; \frac{27}{150}.$$

Các phân số $\frac{8}{15}; \frac{30}{84}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

2. a) 0,32 ; 7,625 ; b) 1,8(3) ; 0,6(81).

3. $\frac{19}{40}$; $-2\frac{21}{25}$; $7\frac{3}{8}$.

4. a) 7068,5 ;

b) 7069 ;

c) 7100.

5. 7,9.

6*. Số nguyên lớn nhất làm tròn trăm thành 3500 là số 3549.

Số nguyên nhỏ nhất làm tròn trăm thành 3500 là số 3450.

Do đó số số nguyên làm tròn trăm thành 3500 là :

$$3549 - 3450 + 1 = 100 \text{ (số).}$$

§11. SỐ VÔ TỈ. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI.

§12. SỐ THỰC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Số vô tỉ* : Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là **I**.

2. *Khái niệm về căn bậc hai*

Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

- Số dương a có đúng hai căn bậc hai, một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

- Số 0 chỉ có một căn bậc hai là số 0, cũng viết $\sqrt{0} = 0$.

3. *Số thực*

Số vô tỉ và số hữu tỉ gọi chung là số thực.

Tập hợp các số thực kí hiệu là **R**.

- Cách so sánh hai số thực tương tự như so sánh hai số hữu tỉ viết dưới dạng số thập phân.

- Trong tập hợp các số thực cũng có các phép toán với các tính chất tương tự như các phép toán trong tập hợp các số hữu tỉ.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ VÀ TÌM MỘT SỐ BIẾT CĂN BẬC HAI CỦA NÓ

Phương pháp giải

- Nếu $x^2 = a$ thì $x = \pm\sqrt{a}$ (với $a \geq 0$).

Khi viết $\sqrt{a}$ thì phải có $a \geq 0$ và $\sqrt{a} \geq 0$.

Khi viết $-\sqrt{a}$ thì phải có $a \geq 0$ và $-\sqrt{a} \leq 0$.

- Nếu $\sqrt{x} = a$ ($a \geq 0$) thì $x = a^2$.

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của 49 ; 0,25 ; -4.

Giải

- Căn bậc hai của 49 là ± 7 vì $(\pm 7)^2 = 49$.
- Căn bậc hai của 0,25 là $\pm 0,5$ vì $(\pm 0,5)^2 = 0,25$.
- Số $-4 < 0$ không có căn bậc hai.

Ví dụ 2. Tính : $\sqrt{121}$; $\sqrt{(-8)^2}$; $-\sqrt{\frac{16}{81}}$.

Giải

Ta có $\sqrt{121} = 11$ (vì $11 > 0$ và $11^2 = 121$).

$$\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ (vì } 8 > 0 \text{ và } 8^2 = 64).$$

$$-\sqrt{\frac{16}{81}} = -\frac{4}{9} \text{ vì } \left(-\frac{4}{9} < 0 \text{ và } \left(-\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}\right).$$

Ví dụ 3. Tính :

a) $\sqrt{\frac{25}{16}} - 1$;

b) $\sqrt{13^2 - 5^2}$;

c) $\sqrt{36} + \sqrt{225}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{25}{16}} - 1 = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$;

b) $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$;

c) $\sqrt{36} + \sqrt{225} = 6 + 15 = 21$.

Ví dụ 4. Một tấm bìa hình vuông có diện tích là 1296cm^2 . Tính độ dài cạnh hình vuông.

Giải

Gọi cạnh hình vuông là x .

Ta có $x^2 = 1296$ ($x > 0$).

Suy ra : $x = \sqrt{1296} = 36$.

Vậy độ dài cạnh hình vuông là 36cm.

Ví dụ 5. Có bao nhiêu số nguyên lớn hơn $-\sqrt{6}$ nhưng nhỏ hơn $\sqrt{12}$?

Giải

$$-\sqrt{6} = -2,449... ; \sqrt{12} = 3,464...$$

Các số nguyên lớn hơn $-2,449...$ nhưng nhỏ hơn $3,464...$ là :

$$-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.$$

Ví dụ 6. Tìm x , biết :

a) $\sqrt{x} = 10$;

b) $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$.

Giải

a) Ta có $\sqrt{x} = 10 \Rightarrow x = 10^2 = 100$;

b) Ta có $\sqrt{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Ví dụ 7. Tìm x^2 , biết $\sqrt{x} = 9$.

Giải

Ta có $\sqrt{x} = 9 \Rightarrow x = 9^2 = 81$

$$\Rightarrow x^2 = 81^2 = 6561.$$

Dạng 2. SỬ DỤNG KÍ HIỆU CỦA TẬP HỢP SỐ

Phương pháp giải

Bạn cần nhớ :

- Tập hợp các số tự nhiên kí hiệu là $\mathbf{N}$;
- Tập hợp các số nguyên kí hiệu là $\mathbf{Z}$;
- Tập hợp các số hữu tỉ kí hiệu là $\mathbf{Q}$;
- Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là $\mathbf{I}$;
- Tập hợp các số thực kí hiệu là $\mathbf{R}$.

Quan hệ giữa các tập hợp số nói trên như sau :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \text{ và } \mathbf{I} \subset \mathbf{R}.$$

Ví dụ 1. Điền các kí hiệu $\in, \notin, \subset$ vào các ô trống :

$$-0,(33) \quad \square \quad \mathbf{Q} ; \quad 0,52(41) \quad \square \quad \mathbf{I} ;$$

$$1,4142135... \quad \square \quad \mathbf{R} ; \quad \mathbf{Q} \quad \square \quad \mathbf{R}.$$

Giải

$$-0,(33) \quad \square \in \quad \mathbf{Q} ; \quad 0,52(41) \quad \square \notin \quad \mathbf{I}.$$

$$1,4142135... \quad \square \in \quad \mathbf{R} ; \quad \mathbf{Q} \quad \square \subset \quad \mathbf{R}.$$

Ví dụ 2. Điền kí hiệu thích hợp vào ô trống để được khẳng định đúng.

$$3 \quad \square \quad \mathbf{I} ; \quad \mathbf{I} \subset \quad \square ;$$

Giải

$$3 \quad \square \notin \quad \mathbf{I} ; \quad \mathbf{I} \subset \quad \square \mathbf{R}.$$

Dạng 3. SO SÁNH CÁC SỐ THỰC

Phương pháp giải

Việc so sánh các số thực được làm tương tự như so sánh các số hữu tỉ viết dưới dạng số thập phân.

Đặc biệt, với a, b là hai số thực dương thì :

- $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$
- $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2.$

Ví dụ 1. So sánh số $1,7(32)$ với số $\sqrt{3}$.

Giải

Ta có $1,7(32) = 1,73232\dots$

$$\sqrt{3} = 1,73205\dots$$

Vì $1,7323 > 1,7320$ nên $1,7(32) > \sqrt{3}$.

Ví dụ 2. Tìm số lớn nhất trong các số sau :

$$\sqrt{(-8)^2} ; 8,32 ; \sqrt{69} ; -\sqrt{100}.$$

Giải

Ta có $\sqrt{(-8)^2} = 8$; $\sqrt{69} = 8,3066\dots$; $-\sqrt{100} < 0$.

Vậy số lớn nhất là $8,32$.

Ví dụ 3. Không dùng máy tính, cho biết trong hai khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

$$\text{a) } \sqrt{65} + 1 > \sqrt{63} - 1 ; \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Giải

• Ta có $\sqrt{65} > \sqrt{63}$; $1 > -1$.

Suy ra $\sqrt{65} + 1 > \sqrt{63} - 1$. Vậy a) đúng.

• Ta có $\sqrt{8} > \sqrt{7} > 0$.

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{1}{\sqrt{7}}$. Vậy b) đúng.

Ví dụ 4. So sánh (không dùng máy tính) : $\sqrt{34,9}$ và 6 .

Giải

Ta có $34,9 < 36$ ra $\sqrt{34,9} < \sqrt{36}$ tức là $\sqrt{34,9} < 6$.

Dạng 4. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC CÓ CHỨA DẤU CĂN

Phương pháp giải

- Phối hợp thực hiện các phép tính theo đúng thứ tự quy ước.
- Nếu có thể thì vận dụng tính chất của các phép toán.

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

$$A = 8(\sqrt{3} - 1) - 4(\sqrt{5} - 2).$$

Giải

Cách thứ nhất :

$$\begin{aligned} A &= 8(\sqrt{3} - 1) - 4(\sqrt{5} - 2) \\ &= 8(1,732... - 1) - 4(2,236... - 2) \\ &= 8,0732... - 4,0,236... \\ &= 5,856... - 0,944... \\ &= 4,912... \approx 4,91. \end{aligned}$$

Cách thứ hai :

$$\begin{aligned} A &= 8.(\sqrt{3} - 1) - 4.(\sqrt{5} - 2) \\ &= 8.\sqrt{3} - 8 - 4.\sqrt{5} + 8 \\ &= 13,856... - 8,944... \\ &= 4,912... \approx 4,91. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức :

$$M = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{81}} \right) : \sqrt{\frac{441}{324}}.$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } M &= \left(\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{81}} \right) : \sqrt{\frac{441}{324}} \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{7}{9} \right) : \frac{21}{18} \\ &= \frac{7}{18} \cdot \frac{18}{21} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dạng 5. TÌM SỐ CHƯA BIẾT TRONG MỘT ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

- Sử dụng tính chất của các phép toán.
- Sử dụng quan hệ giữa các số trong một phép toán.
- Sử dụng quy tắc "dấu ngoặc", quy tắc "chuyển vế".

Ví dụ 1. Tìm x , biết : $\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{4} \right) = \sqrt{2}$.

(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

$$\text{Ta có : } \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{4} \right) = \sqrt{2}$$

$$x - \frac{1}{4} = \sqrt{2} : \frac{1}{3}$$

$$x = \sqrt{2} \cdot 3 + \frac{1}{4}$$

$$x = 3,1414... + 0,25$$

$$x = 4,492 ...$$

$$x \approx 4,5.$$

Ví dụ 2. Tìm x , biết : $5\sqrt{x} - 17 = 108$.

Giải

$$\text{Ta có : } 5\sqrt{x} - 17 = 108$$

$$5\sqrt{x} = 108 + 17$$

$$5\sqrt{x} = 125$$

$$\sqrt{x} = 25$$

$$x = 25^2 = 625.$$

Ví dụ 3. Tìm x , biết $(x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0$.

Giải

$$\text{Ta có } (x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0.$$

$$\text{Suy ra : } x^2 - 4 = 0 \text{ hoặc } x^2 - 3 = 0.$$

$$\text{Do đó : } x^2 = 4 \text{ hoặc } x^2 = 3.$$

$$\text{Vậy } x = \pm 2 \text{ hoặc } x = \pm \sqrt{3}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm căn bậc hai của các số sau :

$$144 ; 0,25 ; \frac{4}{9}.$$

2. Tính : $\sqrt{169}$; $-\sqrt{\frac{49}{225}}$; $\sqrt{(-6)^2}$.

3. Tìm $x \in \mathbf{Q}$, biết :

a) $\sqrt{x} = 4$;

b) $\sqrt{x} = \frac{1}{7}$;

c) $\sqrt{x} = 0$.

4. Tìm $x \in \mathbf{Q}$, biết :

a) $x^2 = 400$;

b) $x^2 - 64 = 0$;

c) $5x^2 + 10 = 9$.

5. Dùng máy tính để so sánh $\sqrt{5}$ với 2,(23).

6. Không dùng máy tính, hãy so sánh $\sqrt{103,5}$ với 10.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. ± 12 ; $\pm 0,5$; $\pm \frac{2}{3}$.

2. 13 ; $-\frac{7}{15}$; 6.

3. a) 16 ;

b) $\frac{1}{49}$;

c) 0.

4. a) ± 20 ;

b) ± 8 ;

c) Không có.

5. $\sqrt{5} > 2,(23)$.

6. Ta có $103,5 > 100$ nên $\sqrt{103,5} > \sqrt{100}$.

Do đó $\sqrt{103,5} > 10$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Tập hợp các số hữu tỉ : các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa số hữu tỉ.
2. Tỷ lệ thức :
 - Định nghĩa và tính chất của tỷ lệ thức.
 - Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.
3. Số vô tỉ, số thực
 - Số thập phân hữu hạn, số thập phân vô hạn tuần hoàn và không tuần hoàn.
 - Số vô tỉ, số thực.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT SỐ HỮU TỈ, SO SÁNH CÁC SỐ HỮU TỈ

Phương pháp giải

- Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
- Các số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn đều là số hữu tỉ.

Ví dụ 1. Trong các số $-\frac{4}{12}$; $\frac{-33}{99}$; $-0,3333$; $-\sqrt{\frac{1}{9}}$.

Số nào không biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{1}{3}$?

Giải

Ta có : $-\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$; $\frac{-33}{99} = -\frac{1}{3}$; $-\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$; $-0,3333 = -\frac{3333}{10000} \neq -\frac{1}{3}$.

Vậy số $-0,3333$ không biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2. Cho các tập hợp :

$$M = \left\{ \frac{0}{-7}; \frac{-2}{-5}; \frac{-1}{4} \right\}; \quad N = \left\{ \frac{0}{-7}; \frac{5}{6}; \frac{-8}{13} \right\};$$

$$P = \left\{ \frac{-4}{9}; \frac{3}{-5}; -0,2 \right\}; \quad Q = \left\{ -9; \frac{-6}{-11}; -5, (3) \right\}.$$

Tập hợp nào chỉ gồm có các số hữu tỉ âm ?

Giải

Các tập hợp M và N đều có phần tử 0 (đó là $\frac{0}{-7}$).

Tập hợp Q có phần tử dương (đó là $\frac{-6}{-11}$).

Chỉ có tập hợp P gồm toàn các số hữu tỉ âm (vì có tử số và mẫu số trái dấu).

Ví dụ 3. Gọi A là tập hợp các số hữu tỉ x sao cho : $\frac{4}{7} < x < \frac{5}{8}$.

Hỏi số hữu tỉ $\frac{11}{21}$; $\frac{17}{28}$ có là phần tử của tập hợp A không ?

Giải

Quy đồng mẫu số các phân số :

$$\frac{4}{7}; \frac{5}{8}; \frac{11}{21}; \frac{17}{28} \text{ ta được } \frac{96}{168}; \frac{105}{168}; \frac{88}{168}; \frac{102}{168}.$$

Vì $\frac{96}{168} < x < \frac{105}{168}$ mà $\frac{88}{168} < \frac{96}{168}$ nên $\frac{88}{168} \notin A$.

Còn $\frac{96}{168} < \frac{102}{168} < \frac{105}{168}$ nên $\frac{102}{168} \in A$.

Vậy $\frac{11}{21} \notin A$; $\frac{17}{28} \in A$.

Dạng 2. CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ HỮU TỈ

Phương pháp giải

Dựa vào quy tắc thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa.

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức :

$$A = \left(0,75 - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\right).$$

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } A &= \left(0,75 - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{9}{12} - \frac{10}{12}\right) : \left(-\frac{12}{21} + \frac{7}{21}\right) \\ &= \frac{-1}{12} : \frac{-5}{21} = \frac{7}{20}.\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho : $M = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11}\right).$

Tính M^{-1} .

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } M &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11}\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{11}{10} \cdot \frac{12}{11} = 6.\end{aligned}$$

Do đó $M^{-1} = \frac{1}{6}.$

Ví dụ 3. Cho $A = -4 + (x - 3)^2$; $B = \frac{1}{2} - (5x + 1)^2.$

a) Tính giá trị nhỏ nhất của A ;

b) Tìm giá trị lớn nhất của B.

Giải

a) Ta có : $(x - 3)^2 \geq 0$ nên $-4 + (x - 3)^2 \geq -4.$

Do đó $\min A = -4$ khi $x = 3.$

b) Ta có $-(5x + 1)^2 \leq 0$ nên $\frac{1}{2} - (5x + 1)^2 \leq \frac{1}{2}$.

Do đó $\max B = \frac{1}{2}$ khi $x = -\frac{1}{5}$.

Ví dụ 4. Cho $M = 125^7 - 625^5 - 25^9$.

Chứng minh rằng $M : 99$.

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } M &= 125^7 - 625^5 - 25^9 \\ &= (5^3)^7 - (5^4)^5 - (5^2)^9 \\ &= 5^{21} - 5^{20} - 5^{18} \\ &= 5^{18}(5^3 - 5^2 - 1) \\ &= 5^{18} \cdot 99 : 99.\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tìm tập hợp các giá trị của $n \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$81 \leq 3^n \leq 729.$$

Giải

Ta có $81 \leq 3^n \leq 729$.

Suy ra $3^4 \leq 3^n \leq 3^6$.

Do đó $4 \leq n \leq 6$.

Vậy $n \in \{4 ; 5 ; 6\}$.

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức : $M = \frac{9^4 \cdot 3^5}{6^2 \cdot 3^{11}}$.

Giải

$$\text{Ta có : } M = \frac{9^4 \cdot 3^5}{6^2 \cdot 3^{11}} = \frac{(3^2)^4 \cdot 3^5}{(2 \cdot 3)^2 \cdot 3^{11}} = \frac{3^8 \cdot 3^5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^{11}} = \frac{1}{4}.$$

Dạng 3. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số và tính chất $|a| \geq 0$; $-|a| \leq 0$.

Ví dụ 1. Tìm x, y , biết $\left|x - \frac{1}{2}\right| + |x - y| \leq 0$.

Giải

Ta có : $\left|x - \frac{1}{2}\right| \geq 0 ; |x - y| \geq 0$.

Mà đề bài cho : $\left|x - \frac{1}{2}\right| + |x - y| \leq 0$ nên $\left|x - \frac{1}{2}\right| = 0$ và $|x - y| = 0$.

Do đó $x - \frac{1}{2} = 0$ và $x - y = 0$.

Suy ra : $x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Xét dấu của hai số hữu tỉ x và y , biết rằng $xy < 0$ và $|x| < y^3$.

Giải

Ta có $xy < 0 \Rightarrow x$ và y trái dấu. (1)

$|x| < y^3 \Rightarrow y^3 > 0$ do đó $y > 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x < 0$ và $y > 0$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \left|x - \frac{3}{4}\right| + \frac{1}{4}.$$

Giải

Ta có : $\left|x - \frac{3}{4}\right| \geq 0$ nên $\left|x - \frac{3}{4}\right| + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$.

Do đó $\min P = \frac{1}{4}$ khi $x = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 4. Với giá trị nào của x và y thì biểu thức :

$Q = 100 - |x + 1| - |y - 2|$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải

Ta có : $-|x + 1| \leq 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -1$).

$-|y - 2| \leq 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 2$).

Do đó $100 - |x + 1| - |y - 2| \leq 100$.

Vậy $Q \leq 100$, suy ra $\max Q = 100$ khi $x = -1$ và $y = 2$.

Dạng 4. TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa của tỉ lệ thức và tính chất của tỉ lệ thức, của dãy tỉ số bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho năm số 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12. Có bao nhiêu bộ bốn số trong năm số đó có thể lập thành một tỉ lệ thức ?

Giải

- Vì $3.8 = 4.6$ nên bộ bốn số 3, 4, 6, 8 có thể lập thành một tỉ lệ thức.
 - Vì $4.12 = 6.8$ nên bộ bốn số 4, 6, 8, 12 có thể lập thành một tỉ lệ thức.
- Vậy có tất cả hai bộ bốn số trong năm số đã cho có thể lập thành tỉ lệ thức.

Ví dụ 2. Tìm x , biết :

$$\frac{x}{20^9} = \frac{3}{2^8 \cdot 10^{10}}.$$

Giải

Ta có : $x = \frac{20^9 \cdot 3}{2^8 \cdot 10^{10}}$

$$x = \frac{(2^2 \cdot 5)^9 \cdot 3}{2^8 \cdot (2 \cdot 5)^{10}} = \frac{2^{18} \cdot 5^9 \cdot 3}{2^8 \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}}$$

$$x = \frac{3}{5}.$$

Ví dụ 3. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết $\frac{1}{x} = \frac{y}{2}$.

Giải

Ta có : $\frac{1}{x} = \frac{y}{2} \Rightarrow xy = 2$.

Mặt khác $2 = 1.2 = 2.1 = (-1).(-2) = (-2).(-1)$.

Vậy $x = 1 ; y = 2$ hoặc $x = 2 ; y = 1$ hoặc $x = -1 ; y = -2$ hoặc $x = -2 ; y = -1$.

Ví dụ 4. Tìm x, y, z , biết : $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ và $5x^2 + y^2 - z^2 = 117$.

Giải

Ta đặt : $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} = k$.

Suy ra : $x = 3k ; y = 2k ; z = 6k$.

Ta có $5x^2 + y^2 - z^2 = 117$.

Do đó : $5.(3k)^2 + (2k)^2 - (6k)^2 = 117$

$$13k^2 = 117$$

$$k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3.$$

- Với $k = 3$ ta được $x = 9 ; y = 6 ; z = 18$.
- Với $k = -3$ ta được $x = -9 ; y = -6 ; z = -18$.

Dạng 5. TÍNH CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ KHÔNG ÂM

Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa căn bậc hai của một số.

Ví dụ 1. Tìm x , biết : $x^2 - 113 = 83$.

Giải

Ta có : $x^2 - 113 = 83$.

Suy ra : $x^2 = 83 + 113$

$$x^2 = 196.$$

Do đó : $x = \pm \sqrt{196}$

$$x = \pm 14.$$

Ví dụ 2. Tìm x , biết : $\sqrt{x + 2,29} = 2,3$.

Giải

Ta có : $\sqrt{x + 2,29} = 2,3$.

Suy ra $x + 2,29 = 2,3^2 = 5,29$

$$x = 5,29 - 2,29$$

$$x = 3.$$

Ví dụ 3. Cho biết $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{x}$.

Hãy tính x (làm giá trị của x đến hàng phần mười).

Giải

Ta có : $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{x}$.

Suy ra : $x = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$$x = 1,095...$$

$$x \approx 1,1.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong các số sau : $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $0,6$; $\frac{-6}{10}$ và $\frac{-9}{-15}$, số nào biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{5}$?

2. Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} ; \frac{5}{8} ; \frac{-9}{10} ; \frac{7}{12} ; \frac{-5}{6}.$$

3. Chứng minh đẳng thức :

$$\frac{3}{31} + \left(\frac{1}{6} + \frac{-5}{9} \right) : \left(\frac{7}{24} - \frac{13}{18} \right) = (2^3)^4 : 2^{12}.$$

4. Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết :

a) $\frac{25}{12} \cdot x + \frac{11}{15} = \frac{9}{10}$;

b) $\left| x - \frac{4}{9} \right| - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$

5. Tìm số tự nhiên n , biết : $32 \leq 2^n \leq 256$.

6. Tìm $x \in \mathbf{Q}$, biết : $\sqrt{x} : \sqrt{4} = \sqrt{81} : \sqrt{36}$.

7*. Tìm x, y, z , biết : $42x = 60y = 35z$ và $x - y + z = 60$.

8*. Cho $A = |2x + 5| + 10$; $B = \frac{1}{3} - (x + 1)^2$.

a) Tính giá trị nhỏ nhất của A ;

b) Tính giá trị lớn nhất của B .

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $\frac{-9}{-15}$.

2. $\frac{-9}{10} < \frac{-5}{6} < \frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \sqrt{\frac{4}{9}}$.

3. Mỗi vế đều bằng 1.

4. a) $x = \frac{2}{25}$;

b) $x = \frac{31}{36}$ hoặc $x = \frac{1}{36}$.

5. $n \in \{5 ; 6 ; 7 ; 8\}$.

6. 9.

7*. Ta có : $42x = 60y = 35z$.

Suy ra : $\frac{42x}{420} = \frac{60y}{420} = \frac{35z}{420}$ hay $\frac{x}{10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{12}$.

Đáp số : $x = 40$; $y = 28$; $z = 48$.

8*. a) $\min A = 10$ khi $x = 2,5$;

b) $\max B = \frac{1}{3}$ khi $x = -1$.

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN.

§2. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định nghĩa :

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$ (với k là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k .

- Khi đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ k thì x cũng tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k}$.

2. Tính chất :

Nếu đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ k thì :

- Tỉ số giữa hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = k.$$

- Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

3. Chia một số M cho trước thành những phần x, y, z tỉ lệ thuận với các số a, b, c .

Điều này có nghĩa là tìm x, y, z sao cho :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ và } x + y + z = M.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHO HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. TÌM GIÁ TRỊ CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG KIA

Phương pháp giải

- Xác định hệ số tỉ lệ k giữa y và x ; $k = \frac{y}{x}$.
- Tìm y theo công thức $y = k.x$.
Tìm x theo công thức $x = \frac{y}{k}$.

Ví dụ 1. Cho biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

x	$x_1 = -4$	$x_2 = -1$	$x_3 = 2$	
y	$y_1 = 20$			$y_4 = -15$

Giải

Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận nên :

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{20}{-4} = -5.$$

$$\text{Suy ra : } y_2 = kx_2 = -5.(-1) = 5 ;$$

$$y_3 = kx_3 = -5.2 = -10 ;$$

$$x_4 = \frac{y_4}{k} = \frac{-15}{-5} = 3.$$

Ví dụ 2. Cho biết đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $k = -\frac{2}{5}$. Cặp giá trị nào dưới đây là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên :

$$\text{a) } x = -4 ; y = 10 ;$$

$$\text{b) } x = 10 ; y = -4.$$

Giải

Vì y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{2}{5}$ nên $y = -\frac{2}{5}x$.

- a) Khi $x = -4$ thì $y = -\frac{2}{5}(-4) = 1,6 \neq 10$.

Vậy $x = -4$; $y = 10$ không phải là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên.

- b) Khi $x = 10$ thì $y = -\frac{2}{5} \cdot 10 = -4$.

Vậy $x = 10$; $y = -4$ là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên.

Ví dụ 3. Cho biết hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau. Nếu $x = 5$ thì $y = -4$. Hai đại lượng y và x liên hệ với nhau theo công thức nào ?

Giải

Vì y và x tỉ lệ thuận với nhau nên : $k = \frac{y}{x} = \frac{-4}{5}$.

Do đó hai đại lượng y và x liên hệ với nhau bởi công thức : $y = -\frac{4}{5}x$.

Dạng 2. NHẬN BIẾT HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

Phương pháp giải

- Nếu y liên hệ với x theo công thức $y = kx$ ($k \neq 0$) thì y tỉ lệ thuận với x .
- Xét các tỉ số tương ứng của hai đại lượng, nếu các tỉ số bằng nhau thì hai đại lượng đó tỉ lệ thuận.

Ví dụ 1. Các giá trị tương ứng của y và x được cho trong bảng sau :

x	2	5	8	15
y	14	35	56	105

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ thuận không ?

Giải

Ta có : $\frac{14}{2} = \frac{35}{5} = \frac{56}{8} = \frac{105}{15} = 7$.

Vậy hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau.

Ví dụ 2. Các giá trị tương ứng của y và x được cho trong bảng sau :

x	3	4	5	6
y	-12	-16	20	24

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ thuận không ?

Giải

Ta có : $\frac{-16}{4} \neq \frac{20}{5}$.

Vậy hai đại lượng y và x không tỉ lệ thuận với nhau.

Ví dụ 3. Các giá trị tương ứng của y và x được cho trong bảng sau :

x	2	4	5	7
y	-3	-6	-7,5	-10,5

Xét các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{3}{2}$.

b) Đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ $\frac{2}{3}$.

Giải

• Ta có : $\frac{y}{x} = \frac{-3}{2} = \frac{-6}{4} = \frac{-7,5}{5} = \frac{-10,5}{7} = -\frac{3}{2}$.

Vậy đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{3}{2}$.

Do đó a) đúng.

• Nếu đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{3}{2}$ thì đại lượng x tỉ lệ với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ $\frac{-2}{3}$.

Vậy khẳng định b) sai (sai về hệ số tỉ lệ).

Dạng 3. GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

Phương pháp giải

- Xác định quan hệ tỉ lệ thuận giữa hai đại lượng y và x.
- Áp dụng tính chất tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Ví dụ 1. Cứ xay xát 50 kg thóc thì được 36 kg gạo. Hỏi nếu xay xát 175 kg thóc thì được bao nhiêu ki-lô-gam gạo ?

Giải

Tóm tắt đề bài :

Khối lượng thóc	Khối lượng gạo
50 kg	36 kg
175 kg	x kg ?

Khi xay xát thì khối lượng gạo thu được tỉ lệ thuận với khối lượng thóc đem xay xát.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận ta có : $\frac{50}{175} = \frac{36}{x}$.

$$\text{Suy ra : } x = \frac{175 \cdot 36}{50} = 126.$$

Vậy nếu xay xát 175 kg thóc thì được 126 kg gạo.

Ví dụ 2. Mua 6 gói kẹo thì hết 45 000 đồng. Khi đó với 60 000 đồng thì mua được mấy gói kẹo như thế ?

Giải

Tóm tắt đề bài :

Số tiền	Số gói kẹo
45 000 đ	6 gói
60 000 đ	x gói ?

Số tiền và số gói kẹo mua được là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có : $\frac{45000}{60000} = \frac{6}{x}$.

$$\text{Suy ra } x = \frac{60000 \cdot 6}{45000} = 8.$$

Vậy với 60 000 đ thì mua được 8 gói kẹo.

Ví dụ 3. Một ô tô chạy quãng đường 225 km trong 4,5 giờ. Với vận tốc đó thì xe chạy 150 km trong bao lâu ?

Giải

Tóm tắt đề bài :

Quãng đường	Thời gian
225 km	4,5 giờ
150 km	x giờ ?

Với cùng một vận tốc thì quãng đường và thời gian xe chạy là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có : $\frac{225}{150} = \frac{4,5}{x}$.

$$\text{Suy ra : } x = \frac{150 \cdot 4,5}{225} = 3.$$

Vậy xe chạy 150 km hết 3 giờ.

Dạng 4. CHIA MỘT SỐ M THÀNH NHỮNG PHẦN x, y, z TỈ LỆ THUẬN VỚI CÁC SỐ a, b, c CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Lập dãy tỉ số bằng nhau : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ trong đó $x + y + z = M$.
- Vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm x, y, z.

Ví dụ 1. Chia số 850 thành ba phần tỉ lệ thuận với 3, 5, 9.

Giải

Gọi ba phần cần tìm là x, y, z.

$$\text{Theo đề bài ta có : } \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9} = \frac{x + y + z}{3 + 5 + 9} = \frac{850}{17} = 50.$$

$$\text{Do đó : } \frac{x}{3} = 50 \text{ suy ra } x = 150 ;$$

$$\frac{y}{5} = 50 \text{ suy ra } y = 250 ;$$

$$\frac{z}{9} = 50 \text{ suy ra } z = 450.$$

Vậy ba phần cần tìm là 150 ; 250 ; 450.

Ví dụ 2. Số đo các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ của ΔABC tỉ lệ thuận với 2, 3, 4. Hãy tính số đo mỗi góc của tam giác đó.

Giải

$$\text{Ta có : } \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2 + 3 + 4} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ.$$

$$\text{Do đó : } \frac{\widehat{A}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 40^\circ ;$$

$$\frac{\widehat{B}}{3} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ ;$$

$$\frac{\widehat{C}}{4} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 80^\circ .$$

Ví dụ 3. Độ dài các cạnh của một tam giác tỉ lệ thuận với 4, 7, 9. Biết cạnh nhỏ nhất dài 20 cm, tính độ dài của cạnh lớn nhất.

Giải

Gọi độ dài các cạnh của tam giác lần lượt là x, y, z.

$$\text{Theo đề bài, ta có : } \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} .$$

$$\text{Khi } x = 20 \text{ thì ta có : } \frac{20}{4} = \frac{z}{9} .$$

$$\text{Suy ra : } z = \frac{20 \cdot 9}{4} = 45 .$$

Vậy độ dài lớn nhất là 45 cm.

Ví dụ 4. Chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật tỉ lệ thuận với 5 và 3. Biết chu vi của hình chữ nhật là 144 m. Tính diện tích của hình chữ nhật đó.

Giải

Gọi chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là x, y.

$$\text{Theo đề bài, ta có : } \frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{5+3} = \frac{144 : 2}{8} = 9 .$$

$$\text{Do đó : } \frac{x}{5} = 9 \text{ suy ra } x = 45 ;$$

$$\frac{y}{3} = 9 \text{ suy ra } y = 27 .$$

Vậy chiều dài là 45 m, chiều rộng là 27 m.

Diện tích của hình chữ nhật là : $45 \cdot 27 = 1215 \text{ (m}^2\text{)} .$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

x	3	6	9	
y	2			8

2. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong các bảng sau.

a)

x	1	2	3	4
y	2,5	5	7,5	-10

b)

x	-2	-1	1	3
y	8	4	-4	-12

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ thuận không ?

3. Hai đơn vị vận tải cùng chuyên chở đất đến công trường xây dựng. Đơn vị I có 12 xe, đơn vị II có 15 xe, trọng tải các xe đều như nhau. Biết đơn vị I chở được 60 m^3 đất, hỏi đơn vị II chở được bao nhiêu mét khối đất ?
4. Chia số 455 thành ba phần tỉ lệ với :
- a) 3, 4, 6 ; b) $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$.

- 5*. Đoạn đường AB dài 275 km. Cùng một lúc, một ô tô chạy từ A và một xe máy chạy từ B, đi ngược chiều để gặp nhau. Vận tốc của ô tô là 60 km/h ; vận tốc của xe máy là 50 km/h. Tính xem đến khi gặp nhau thì mỗi xe đã đi được một quãng đường là bao nhiêu ?

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $y = 4$; $y = 6$; $x = 12$.
2. a) y và x không tỉ lệ thuận.
b) y và x tỉ lệ thuận.

3. 75 m^3 .

4. a) 105 ; 140 ; 210 ;

b) 180 ; 75 ; 200.

5*. Thời gian hai xe chạy là như nhau.

Trong cùng một thời gian, quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Gọi x là quãng đường ô tô chạy.

Gọi y là quãng đường xe máy chạy.

Ta có : $\frac{x}{60} = \frac{y}{50} = \frac{x+y}{60+50} = \frac{275}{110} = 2,5$.

Do đó : $x = 2,5.60 = 150$;

$y = 2,5.50 = 125$.

Vậy quãng đường ô tô đã đi là 150 km.

Quãng đường xe máy đã đi là 125 km.

§3. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH.

§4. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định nghĩa :

• Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$

(a là một hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a .

• Khi y tỉ lệ nghịch với x thì x cũng tỉ lệ nghịch với y (với cùng một hệ số tỉ lệ).

2. Tính chất :

Nếu đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ a thì :

• Tích các giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi (bằng hệ số tỉ lệ) :

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = \dots = a.$$

• Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$

3. Chia một số M thành những phần x, y, z tỉ lệ nghịch với các số a, b, c cho trước.

Điều này có nghĩa là tìm x, y, z sao cho :

$$ax = by = cz \text{ và } x + y + z = M.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHO HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH. TÌM GIÁ TRỊ CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG KIA

Phương pháp giải

- Xác định hệ số tỉ lệ a , với $a = xy$.

- Tìm y theo công thức $y = \frac{a}{x}$.

Tìm x theo công thức $x = \frac{a}{y}$.

Ví dụ 1. Cho biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

x	$x_1 = 8$	$x_2 = 6$	
y	$y_1 = -9$		$y_3 = 18$

Giải

Vì y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên : $a = xy = 8 \cdot (-9) = -72$.

$$\text{Suy ra : } y_2 = \frac{-72}{x_2} = \frac{-72}{6} = -12.$$

$$x_3 = \frac{-72}{y_3} = \frac{-72}{18} = -4.$$

Ví dụ 2. Cho biết hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 6$. Cặp giá trị nào dưới đây là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên :

a) $x = 12 ; y = 2 ;$

b) $x = 9 ; y = \frac{2}{3}.$

Giải

Vì y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ $a = 6$ nên $y = \frac{6}{x}$.

- Khi $x = 12$ thì $y = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \neq 2$.

Vậy $x = 12$; $y = 2$ không phải là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên.

- Khi $x = 9$ thì $y = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Vậy $x = 9$; $y = \frac{2}{3}$ là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên.

Ví dụ 3. Cho biết hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau. Nếu $x = -3$ thì $y = 8$. Hỏi hai đại lượng y và x liên hệ với nhau theo công thức nào ?

Giải

Vì y và x tỉ lệ nghịch với nhau nên $a = xy = (-3) \cdot 8 = -24$.

Do đó y và x liên hệ với nhau bằng công thức :

$$xy = -24 \text{ hoặc } y = \frac{-24}{x}.$$

Dạng 2. NHẬN BIẾT HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Phương pháp giải

- Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$ thì y tỉ lệ nghịch với x .
- Xét tích các giá trị tương ứng của hai đại lượng, nếu các tích này bằng nhau thì hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Ví dụ 1. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong bảng sau :

x	2	3	4	5
y	12	8	6	4,8

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ nghịch với nhau không ?

Giải

Ta có : $2.12 = 3.8 = 4.6 = 5.4,8 (= 24)$.

Vậy hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 24$.

Ví dụ 2. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong bảng sau :

x	-2	-3	6	9
y	27	18	-8	6

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ nghịch với nhau không ?

Giải

Ta có : $-3.18 \neq 6.(-8)$.

Vậy hai đại lượng y và x không tỉ lệ nghịch với nhau.

Ví dụ 3. Bảng sau cho biết các giá trị tương ứng của y và x :

x	2	3	4	6
y	6	4	3	2

Khi đó thì trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = \frac{1}{3}$.

b) Hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 12$.

Giải

Ta có : $2.6 = 3.4 = 4.3 = 6.2 = 12$.

Vậy hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 12$.

Do đó a) sai (sai về hệ số tỉ lệ) và b) đúng.

Dạng 3. GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Phương pháp giải

- Xác định quan hệ tỉ lệ nghịch giữa hai đại lượng y và x .
- Áp dụng tính chất tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Ví dụ 1. Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 60 km/h thì hết 2,5 giờ. Lúc từ B về A, xe chạy với vận tốc 50 km/h thì mất bao lâu ?

Giải

Tóm tắt đề bài :

Vận tốc	Thời gian
60 km/h	2,5 giờ
50 km/h	x giờ ?

Trên cùng một quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có : $\frac{60}{50} = \frac{x}{2,5}$.

$$\text{Suy ra : } x = \frac{60 \cdot 2,5}{50} = 3.$$

Vậy thời gian xe chạy từ B về A là 3 giờ.

Ví dụ 2. Để hoàn thành một công việc cần 12 người làm trong 10 ngày. Nếu muốn làm xong sớm 2 ngày thì cần điều động thêm bao nhiêu người (với năng suất như nhau) ?

Giải

Tóm tắt đề bài :

Số ngày làm	Số người làm
10 ngày	12 người
8 ngày	x người ?

Với cùng một công việc thì số ngày làm và số người làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có : $\frac{10}{8} = \frac{x}{12}$.

$$\text{Suy ra : } x = \frac{10 \cdot 12}{8} = 15 (\text{người}).$$

Vậy số người cần điều động thêm là : $15 - 12 = 3$ (người).

Ví dụ 3. Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 50 km/h rồi chạy từ B về A với vận tốc 40 km/h. Cả đi lẫn về mất 4 giờ 30 phút. Tính thời gian đi và thời gian về.

Giải

Tóm tắt đề bài :

Vận tốc	Thời gian
50 km/h	x giờ
40 km/h	y giờ

$$(x + y = 4,5 \text{ giờ}).$$

Trên cùng một quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có : $\frac{50}{40} = \frac{y}{x}$.

$$\text{Suy ra : } \frac{x}{40} = \frac{y}{50} = \frac{x+y}{40+50} = \frac{4,5}{90} = \frac{1}{20}.$$

$$\text{Do đó : } \frac{x}{40} = \frac{1}{20} \Rightarrow x = 2 ;$$

$$\frac{y}{50} = \frac{1}{20} \Rightarrow y = 2,5.$$

Vậy thời gian đi từ A đến B là 2 giờ ;

thời gian đi từ B về A là 2,5 giờ.

Dạng 4. CHIA MỘT SỐ M CHO TRƯỚC THÀNH NHỮNG PHẦN x, y, z TỈ LỆ NGHỊCH VỚI CÁC SỐ a, b, c CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Lập dãy tỉ số bằng nhau : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (hoặc $ax = by = cz$), trong đó

$$x + y + z = M.$$

- Vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm x, y, z.

Ví dụ 1. Chia số 200 thành ba phần tỉ lệ nghịch với 7, 4, 2.

Giải

Gọi ba phần cần tìm là x, y, z.

Vì x, y, z tỉ lệ nghịch với 7, 4, 2 nên ta có : $7x = 4y = 2z$.

$$\text{Do đó : } \frac{x}{\frac{1}{7}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{2}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{200}{\frac{25}{28}} = 224.$$

$$\text{Vậy : } x = \frac{1}{7}.224 = 32 ;$$

$$y = \frac{1}{4}.224 = 56 ;$$

$$z = \frac{1}{2}.224 = 112.$$

Ba phần cần tìm là 32 ; 56 ; 112.

Chú ý : Từ $7x = 4y = 2z$ ta có thể tìm x, y, z bằng cách khác như sau :

$$\text{Ta có : } \frac{7x}{28} = \frac{4y}{28} = \frac{2z}{28}.$$

$$\text{Suy ra : } \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{14} = \frac{x+y+z}{4+7+14} = \frac{200}{25} = 8.$$

Từ đó ta được $x = 32 ; y = 56 ; z = 112$.

Ví dụ 2. Chia số 116 thành ba phần tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{2} ; \frac{2}{5}$ và 3.

Giải

Gọi ba phần cần tìm là x, y, z .

$$\text{Theo đề bài ta có : } \frac{1}{2}x = \frac{2}{5}y = 3z.$$

$$\text{Do đó : } \frac{x}{\frac{2}{1}} = \frac{y}{\frac{5}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} = \frac{x+y+z}{2 + \frac{5}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{116}{\frac{29}{6}} = 24.$$

$$\text{Vậy : } x = 2.24 = 48 ;$$

$$y = \frac{5}{2}.24 = 60 ;$$

$$z = \frac{1}{3}.24 = 8.$$

Ba phần cần tìm là 48 ; 60 ; 8.

Ví dụ 3. Ba người A, B, C mua tất cả 5,75 m vải để may áo cỡ như nhau. Khổ vải mà A, B, C đã mua lần lượt là 0,8m ; 0,9m và 1,2m. Hỏi mỗi người đã mua mấy mét vải ?

Giải

Gọi số mét vải mà A, B, C đã mua lần lượt là x, y, z.

Với cùng một cỡ áo thì chiều dài của mảnh vải tỉ lệ nghịch với khổ rộng của mảnh vải.

Do đó, ta có : $0,8x = 0,9y = 1,2z$.

$$\text{Suy ra : } \frac{0,8x}{7,2} = \frac{0,9y}{7,2} = \frac{1,2z}{7,2}$$

$$\text{hay } \frac{x}{9} = \frac{y}{8} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{9+8+6} = \frac{5,75}{23} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Do đó : } x = 9 \cdot \frac{1}{4} = 2,25.$$

$$y = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

$$z = 6 \cdot \frac{1}{4} = 1,5.$$

Vậy A mua 2,25 m ; B mua 2 m và C mua 1,5 m.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hãy điền vào ô trống trong bảng sau :

x	2	3	4	
y	18			-6

2. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong các bảng sau. Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ nghịch không ?

a)

x	2	-3	4	24
y	-12	8	6	-1

§5. HÀM SỐ

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được *chỉ một* giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số của x* và x gọi là *biến số*.

Chú ý :

- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là *hàm hằng*.
- Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức,...
- Khi y là hàm số của x ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$,...

Chẳng hạn với hàm số được cho bởi công thức $y = 2x + 3$ ta còn có thể viết $y = f(x) = 2x + 3$.

Khi $x = 3$ thì $y = 9$, ta viết $f(3) = 9$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. XÁC ĐỊNH XEM ĐẠI LƯỢNG y CÓ PHẢI LÀ HÀM SỐ CỦA ĐẠI LƯỢNG x KHÔNG ?

Phương pháp giải

Cần kiểm tra điều kiện : mỗi giá trị của đại lượng x được tương ứng với *một và chỉ một* giá trị của đại lượng y .

Ví dụ 1. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau :

x	-2	-1	0	1	2
y	6	4	2	0	0

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

Giải

Trong bảng ta thấy mỗi giá trị của x đều được tương ứng với một và chỉ một giá trị của y nên y là hàm số của x .

Ví dụ 2. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong hai bảng sau :

Bảng 1

x	-5	0	3	4
y	7	2	1	

Bảng 2

x	8	10	12	8
y	5	13	-1	-5

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

Giải

• Xét bảng 1, ta thấy giá trị $x = 4$ của đại lượng x không được tương ứng với một giá trị nào của đại lượng y nên đại lượng y không phải là hàm số của đại lượng x .

• Xét bảng 2, ta thấy giá trị $x = 8$ của đại lượng x được tương ứng với hai giá trị khác nhau của đại lượng y là 5 và -5 nên đại lượng y không phải là hàm số của đại lượng x .

Ví dụ 3. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong hai bảng sau :

Bảng 3

x	1	2	3	4
y	20	20	20	20

Bảng 4

x	-1	-2	-3	-4		
y	4	3	2	1	0	1

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

Giải

Xét bảng 3 và bảng 4, ta đều thấy với mỗi giá trị của x đều được tương ứng với một và chỉ một giá trị của y nên y là hàm số của x .

Dạng 2. TÌM GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC CỦA BIẾN SỐ VÀ NGƯỢC LẠI

Phương pháp giải

- Nếu hàm số được cho bằng bảng thì cặp giá trị tương ứng của x và y nằm trong cùng một cột.
- Nếu hàm số được cho bằng công thức thì ta thay giá trị đã cho vào công thức, từ đó tìm được giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 7$.

a) Tính $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(3)$;

b) Biết $f(x) = 93$, tìm x .

Giải

a) Ta có : $y = f(x) = 4x^2 - 7$.

$$\text{Do đó : } f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7 = 1 - 7 = -6.$$

$$f(3) = 4 \cdot 3^2 - 7 = 36 - 7 = 29.$$

b) Ta có : $f(x) = 93 \Leftrightarrow 4x^2 - 7 = 93 \Leftrightarrow 4x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) $f(-2) = 2$;

b) $f(-1) = \frac{1}{2}$;

c) $f(0) = \frac{1}{2}$;

d) $f(-3) = f(3)$.

Giải

• Ta có : $f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2$. Vậy a) đúng.

• $f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2}$. Vậy b) đúng.

• $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$. Vậy c) sai.

• $f(-3) = \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 = \frac{9}{2}$; $f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{9}{2}$.

Do đó $f(-3) = f(3)$. Vậy d) đúng.

Ví dụ 3. Hàm số $y = f(x) = 4x + b$.

Biết $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, tính b .

Giải

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào hàm số đã cho, ta được : $4 \cdot \frac{1}{2} + b = 1$.

Suy ra : $2 + b = 1$, do đó $b = -1$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau :

x	-5	-2	0	3	4
y	-7	-1		6	9

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

2. Các giá trị của hai đại lượng x và y được cho bởi sơ đồ mũi tên như hình 2 dưới đây.



Hình 2

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

- 3.* Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau :

x	-5	0	5	12,7
y	5	0	5	12,7

Hỏi y có phải là hàm số của x không ? Nếu y là hàm số của x , hãy viết công thức của hàm số đó.

4. Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2 + 3$.

a) Tính $f(-1)$; $f(2)$.

b) Biết $f(x) = \frac{5}{2}$, tìm x .

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

- y không phải là hàm số của x .
- y không phải là hàm số của x vì có một giá trị của x ($x = 3$) tương ứng với hai giá trị khác nhau của y ($y = 6$; $y = 8$) hoặc giá trị $x = 5$ không được tương ứng với giá trị nào của y .

3*. y làm hàm số của x .

Công thức : $y = |x|$ với $x \in \{-5 ; 0 ; 5 ; 12,7\}$.

4. a) $f(-1) = 1 ; f(2) = -5 ;$

b) $x = \pm \frac{1}{2}$.

§6. MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ.

§7. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ ($a \neq 0$)

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

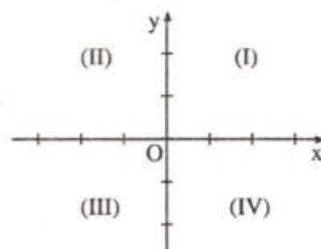
1. Mặt phẳng toạ độ

Trên mặt phẳng ta vẽ hai trục số Ox và Oy vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục số. Khi đó ta có hệ trục toạ độ Oxy . Các trục Ox và Oy gọi là *các trục toạ độ*.

Trục Ox gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*.

Điểm O biểu diễn số 0 của cả hai trục gọi là *gốc toạ độ*.

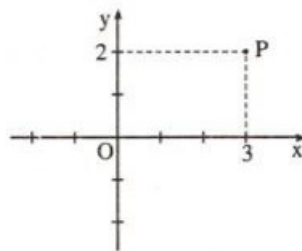
Hai trục toạ độ chia mặt phẳng thành bốn góc vuông : góc phần tư thứ I, II, III, IV (h.3).



Hình 3

2. Toạ độ của một điểm trong mặt phẳng toạ độ

Từ một điểm P trong một mặt phẳng toạ độ Oxy ta vẽ các đường vuông góc với các trục toạ độ. Giả sử các đường vuông góc này cắt trục hoành tại điểm 3, cắt trục tung tại điểm 2. Khi đó cặp số $(3 ; 2)$ gọi là toạ độ của điểm P và kí hiệu là $P(3 ; 2)$ (h.4).



Hình 4

Số 3 gọi là hoành độ, số 2 gọi là tung độ của điểm P .

Nhận xét : Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi điểm P xác định một cặp số. Ngược lại, mỗi cặp số xác định một điểm P .

3. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

4. Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$).

Là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC VÀ NGƯỢC LẠI, VẼ MỘT ĐIỂM CÓ TOẠ ĐỘ CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Muốn tìm tọa độ của điểm M cho trước, từ M ta vẽ những đường thẳng vuông góc với hai trục tọa độ.
- Ngược lại, muốn vẽ điểm M có tọa độ $(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ thì từ điểm x_0 trên trục hoành vẽ một đường thẳng vuông góc với trục hoành ; từ điểm y_0 trên trục tung vẽ đường thẳng vuông góc với trục tung, chúng cắt nhau tại điểm M cần tìm.

Ví dụ 1. Xác định tọa độ của các điểm M, N, P, Q trong hình 5.

Giải. (h.5)

Đường thẳng qua M và vuông góc với Ox cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2.

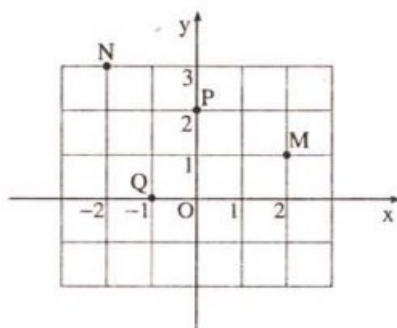
Đường thẳng qua M và vuông góc với Oy cắt Oy tại điểm có tung độ là 1.

Vậy tọa độ của điểm M là $M(2; 1)$.

Tương tự, tọa độ của điểm N là $N(-2; 3)$;

tọa độ của điểm P là $P(0; 2)$;

tọa độ của điểm Q là $Q(-1; 0)$.



Hình 5

Nhận xét : Điểm nằm trên trục tung thì có hoành độ bằng 0 ; điểm nằm trên trục hoành thì có tung độ bằng 0.

Ví dụ 2. Vẽ tam giác ABC biết $A(-1; 2)$; $B(-2; -1)$; $C(3; 0)$.

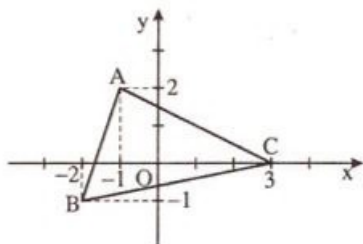
Giải. (h.6)

Để vẽ điểm $A(-1; 2)$ ta làm như sau :

Tại điểm -1 trên trục hoành vẽ đường vuông góc với trục hoành.

Tại điểm 2 trên trục tung vẽ đường vuông góc với trục tung, hai đường vuông góc cắt nhau tại A.

Đối với điểm B, điểm C : vẽ tương tự.



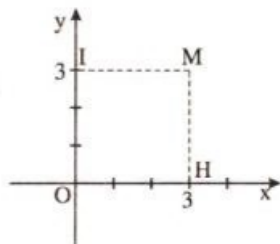
Hình 6

Ví dụ 3. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy (trong góc phần tư thứ I), vẽ hình vuông OHMI có cạnh dài 3 đơn vị, điểm H thuộc tia Ox và điểm I thuộc tia Oy. Hãy tìm tọa độ của điểm M.

Giải. (h.7)

Điểm H nằm trên tia Ox cách gốc 3 đơn vị.

Điểm I nằm trên tia Oy cách gốc 3 đơn vị nên tọa độ của điểm M là $M(3; 3)$.



Hình 7

Dạng 2. VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ ($a \neq 0$).

Phương pháp giải

- Xác định một điểm A thuộc đồ thị (khác gốc O) bằng cách cho x một giá trị khác 0 rồi tìm giá trị tương ứng của y.
- Vẽ điểm $A(x; y)$.
- Vẽ đường thẳng OA ta được đồ thị của hàm số đã cho.

Ví dụ 1. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ, đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = 3x$;

b) $y = 0,5x$.

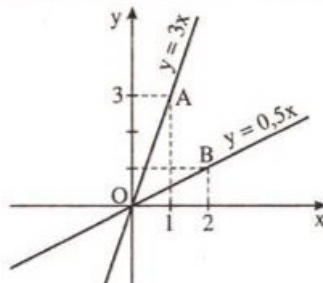
Giải. (h.8)

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x$.

Cho $x = 1$ thì $y = 3$.

Vẽ điểm $A(1; 3)$.

Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = 3x$.



Hình 8

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 0,5x$.

Cho $x = 2$ thì $y = 1$.

Vẽ điểm $B(2; 1)$.

Đường thẳng OB là đồ thị của hàm số $y = 0,5x$.

Ví dụ 2. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ, đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = -2x$;

b) $y = -1\frac{1}{3}x$.

Giải. (h.9)

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x$.

Cho $x = 1$ thì $y = -2$.

Vẽ điểm $A(1; -2)$.

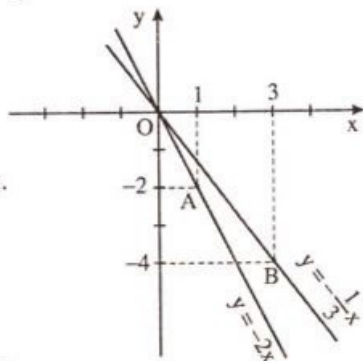
Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = -2x$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -1\frac{1}{3}x$.

Cho $x = 3$ thì $y = -4$.

Vẽ điểm $B(3; -4)$.

Đường thẳng OB là đồ thị của hàm số $y = -1\frac{1}{3}x$.



Hình 9

Lưu ý : Đối với hàm số $y = -1\frac{1}{3}x$ nếu ta cho $x = 1$ thì $y = -1\frac{1}{3}$. Điểm

$(1; -1\frac{1}{3})$ rất khó vẽ chính xác vì toạ độ không nguyên. Vì thế ta cho $x = 3$ để được $y = -4$. Điểm $B(3; -4)$ dễ vẽ hơn.

Ví dụ 3. Đường thẳng OM trong hình 10 là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?

(A) $y = 2x$; (B) $y = \frac{1}{2}x$;

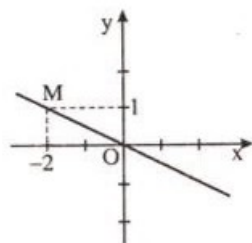
(C) $y = -x$; (D) $y = -\frac{1}{2}x$.

Giải. (h.10)

Xét hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.

Khi $x = -2$ thì $y = 1$.

Vậy đường thẳng OM là đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x$. Suy ra chọn (D).



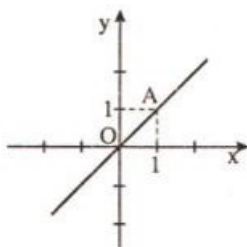
Hình 10

Ví dụ 4. Đồ thị nào trong hình 11 là đồ thị của hàm số $y = x$?

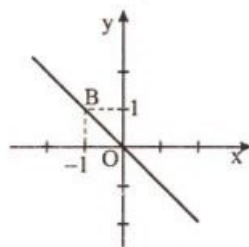
Giải. (h.11)

Xét đồ thị ở hình 11a).

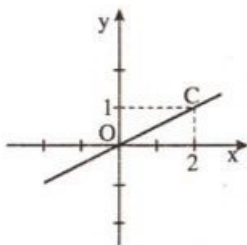
Điểm A có hoành độ đúng bằng tung độ nên đồ thị ở hình 11a) là đồ thị của hàm số $y = x$.



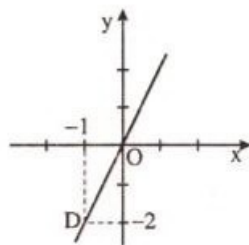
a)



b)



c)



d)

Hình 11

Dạng 3. XÉT XEM ĐIỂM $M(x_0; y_0)$ CHO TRƯỚC CÓ THUỘC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ KHÔNG ?

Phương pháp giải

Ta thay $x = x_0$; $y = y_0$ vào hàm số $y = ax$.

- Nếu được một đẳng thức đúng thì điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = ax$.
- Nếu được một đẳng thức sai thì điểm $M(x_0; y_0)$ không thuộc đồ thị của hàm số $y = ax$.

Ví dụ 1. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số : $y = -\frac{2}{3}x$.

A(1 ; 2) ;

B(3 ; -2).

Giải

a) Thay $x = 1$; $y = 2$ vào hàm số $y = -\frac{2}{3}x$, ta được : $2 \neq -\frac{2}{3}.1$.

Đẳng thức này sai nên điểm A(1 ; 2) không thuộc đồ thị của hàm số

$$y = -\frac{2}{3}x.$$

b) Thay $x = 3$; $y = -2$ vào hàm số $y = -\frac{2}{3}x$, ta được : $-2 = -\frac{2}{3}.3$.

Đẳng thức này đúng nên điểm $B(3 ; -2)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = -\frac{2}{3}x$.

Ví dụ 2. Điểm $M(-6 ; 3)$ thuộc đồ thị của hàm số nào dưới đây ?

(A) $y = \frac{1}{2}x$; (B) $y = -\frac{1}{2}x$; (C) $y = -3x$; (D) $y = -2x$.

Giải

Xét hàm số $y = -\frac{1}{2}x$. Thay $x = -6$ và $y = 3$ vào hàm số, ta được :

$$3 = -\frac{1}{2}.(-6).$$

Đẳng thức này đúng nên điểm $M(-6 ; 3)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = 4x$. Ba điểm nào trong bốn điểm dưới đây thẳng hàng (vì cùng nằm trên đồ thị của hàm số $y = 4x$) ?

A $\left(-\frac{1}{2} ; -2\right)$; B $\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$; C $(2 ; -6)$; D $(-2 ; -8)$.

Giải

• Thay $x = -\frac{1}{2}$; $y = -2$ vào hàm số $y = 4x$ ta được đẳng thức đúng
 $-2 = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Vậy điểm A $\left(-\frac{1}{2} ; -2\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = 4x$.

• Thay $x = \frac{1}{2}$; $y = 2$ vào hàm số $y = 4x$ ta được đẳng thức đúng $2 = 4.\frac{1}{2}$.

Vậy điểm B $\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = 4x$.

• Thay $x = 2$; $y = -6$ vào hàm số $y = 4x$ ta được đẳng thức sai ($-6 \neq 4.2$).

Vậy điểm C $(2 ; -6)$ không thuộc đồ thị của hàm số $y = 4x$.

- Thay $x = -2$; $y = -8$ vào hàm số $y = 4x$ ta được đẳng thức đúng $-8 = 4.(-2)$.

Vậy điểm $D(-2; -8)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = 4x$.

Từ các kết quả trên ta suy ra ba điểm A, B, D thẳng hàng vì cùng thuộc đồ thị của hàm số $y = 4x$.

Dạng 4. XÁC ĐỊNH HỆ SỐ a CỦA HÀM SỐ $y = ax$ BIẾT ĐỒ THỊ CỦA NÓ ĐI QUA ĐIỂM $M(x_0; y_0)$.

Phương pháp giải

- Thay $x = x_0$; $y = y_0$ vào hàm số $y = ax$.
- Suy ra $a = \frac{y_0}{x_0}$.

Ví dụ 1. Đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua điểm $M(5; -2)$. Tính hệ số a .

Giải

Thay $x = 5$, $y = -2$ vào hàm số $y = ax$ ta được : $-2 = a.5 \Rightarrow a = \frac{-2}{5}$.

Ví dụ 2. Tìm số k biết đồ thị của hàm số $y = (k - 1)x$ đi qua điểm $N(6; -4)$.

Giải

Thay $x = 6$; $y = -4$ vào hàm số $y = (k - 1)x$, ta được : $-4 = (k - 1).6$.

Suy ra : $-4 = 6k - 6 \Rightarrow 6k = 6 - 4 = 2$.

Do đó $k = \frac{1}{3}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ, đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = 2,5x$; b) $y = -\frac{3}{4}x$.

2. Cho hàm số $y = 2x$. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số đó : $A(1; 2)$; $B(2; 3)$; $C(3; 6)$.

3. Đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua điểm $M(-4; 6)$. Tính hệ số a .
- 4*. Cho ba điểm $A(1; -2)$; $B(-2; 4)$; $C(-2,5; 5)$. Chứng tỏ rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Vẽ điểm $A(2; 5)$ rồi vẽ đường thẳng OA.
b) Vẽ điểm $B(4; -3)$ rồi vẽ đường thẳng OB.
2. Điểm A, điểm C thuộc đồ thị.
3. $a = -1,5$.
- 4*. Xét hàm số $y = -2x$. Cả ba điểm A, B, C đều thuộc đồ thị của hàm số này.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đại lượng tỉ lệ

• Định nghĩa :

– Đại lượng tỉ lệ thuận : $y = kx$ ($k \neq 0$).

– Đại lượng tỉ lệ nghịch : $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$).

• Tính chất :

– Hai đại lượng tỉ lệ thuận : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots; \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

– Hai đại lượng tỉ lệ nghịch : $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \dots; \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

2. Định nghĩa hàm số : $y = f(x)$.

3. Mặt phẳng tọa độ. Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$).

• Hệ trục tọa độ Oxy, các khái niệm trục hoành và trục tung.

• Cách xác định tọa độ của một điểm cho trước và ngược lại, cách xác định một điểm khi biết tọa độ của nó.

• Đồ thị của hàm số $y = ax$: Hình dạng và cách vẽ.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT QUAN HỆ TỈ LỆ THUẬN, TỈ LỆ NGHỊCH GIỮA HAI ĐẠI LƯỢNG

Phương pháp giải

- Dựa vào sự liên hệ giữa hai đại lượng theo công thức $y = kx$ ($k \neq 0$) hoặc $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$).
- Xem tỉ số các giá trị tương ứng hoặc tích các giá trị tương ứng của hai đại lượng có phải là hằng số không.

Ví dụ 1. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau :

x	1	3	5	7
y	5	15	25	35

Hỏi :

- Đại lượng y có tỉ lệ thuận với đại lượng x không ?
 - Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?
- Nếu y là hàm số của x , hãy viết công thức của hàm số đó.

Giải

a) Ta có : $\frac{5}{1} = \frac{15}{3} = \frac{25}{5} = \frac{35}{7} = 5$.

Do đó đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x .

b) Mỗi giá trị của đại lượng x đều được tương ứng với một giá trị của đại lượng y nên đại lượng y là hàm số của đại lượng x .

Công thức : $y = 5x$ với $x \in \{1; 3; 5; 7\}$.

Ví dụ 2. Cho biết đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ k . Đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k . Khi đó, xét các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

- Đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ k .
- Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k .
- Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ $2k$.
- Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k^2 .

Giải

• Đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ k thì đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k}$. Vậy a) sai.

• Ta có x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ k nên $x = k.y$. (1)

Đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k , nên :

$$y = \frac{k}{z} \Rightarrow z = \frac{k}{y}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $x.z = k.y.\frac{k}{y} = k^2$.

Do đó x và z tỉ lệ nghịch theo hệ số tỉ lệ k^2 .

Vậy d) đúng ; b) và c) sai.

Ví dụ 3. Xét các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

- a) Với vận tốc không đổi thì quãng đường xe đi được tỉ lệ thuận với thời gian.
- b) Với lãi suất không đổi thì trong một kì hạn nhất định, số tiền lãi tỉ lệ thuận với số tiền gửi tiết kiệm.
- c) Với một số tiền không đổi thì số lượng hàng mua được tỉ lệ nghịch với giá hàng.

Giải

Cả a), b), c) đều đúng.

Dạng 2. TÌM GIÁ TRỊ CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG KIA

Phương pháp giải

- Viết công thức liên hệ giữa hai đại lượng.
- Thay giá trị đã biết vào công thức để tìm giá trị của đại lượng kia.

Ví dụ 1. Cứ xay xát 100 kg thóc thì được 74 kg gạo. Muốn được 185 kg gạo thì phải xay xát bao nhiêu ki-lô-gam thóc ?

Giải

Tóm tắt đề bài :

Gạo	Thóc
74 kg	100 kg
185 kg	x kg ?

Vì khối lượng gạo tỉ lệ thuận với khối lượng thóc, nên theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có :

$$\frac{74}{185} = \frac{100}{x}$$

$$\text{Suy ra : } x = \frac{185 \cdot 100}{74} = 250.$$

Vậy muốn được 185 kg gạo thì phải xay xát 250 kg thóc.

Ví dụ 2. 10 công nhân làm xong một công việc trong 18 ngày. Hỏi muốn làm xong công việc đó trong 12 ngày thì cần bao nhiêu công nhân ?

Giải

Tóm tắt đề bài :

Thời gian	Số công nhân
18 ngày	10 công nhân
12 ngày	x công nhân ?

Với cùng một công việc thì thời gian làm và số người làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

$$\text{Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có : } \frac{18}{12} = \frac{x}{10}.$$

$$\text{Suy ra : } x = \frac{18 \cdot 10}{12} = 15.$$

Vậy muốn hoàn thành công việc trong 12 ngày thì cần 15 công nhân.

Dạng 3. CHIA MỘT SỐ M CHO TRƯỚC THÀNH NHỮNG PHẦN TỈ LỆ THUẬN (HAY NGHỊCH) VỚI CÁC SỐ CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

Lập dãy tỉ số bằng nhau rồi vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm các số chưa biết.

Ví dụ 1. Chia số 1316 thành ba phần :

a) Tỉ lệ thuận với : $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$ và 2.

b) Tỉ lệ nghịch với : $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$ và 2.

Giải

a) Gọi ba phần cần tìm là x, y, z.

Vì x, y, z tỉ lệ thuận với : $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$ và 2 nên ta có :

$$\frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{y}{\frac{5}{4}} = \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{\frac{2}{3} + \frac{5}{4} + 2} = \frac{1316}{\frac{47}{12}} = 336.$$

$$\text{Do đó : } x = \frac{2}{3} \cdot 336 = 224 ;$$

$$y = \frac{5}{4} \cdot 336 = 420 ;$$

$$z = 2 \cdot 336 = 672.$$

b) Gọi ba phần cần tìm là x, y, z.

Vì x, y, z tỉ lệ nghịch với $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$ và 2 nên ta có :

$$\frac{2}{3} \cdot x = \frac{5}{4} \cdot y = 2z.$$

$$\text{Suy ra : } \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{4}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{2}} = \frac{x+y+z}{\frac{3}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{1316}{\frac{14}{5}} = 470.$$

$$\text{Do đó : } x = \frac{3}{2} \cdot 470 = 705 ;$$

$$y = \frac{4}{5} \cdot 470 = 376 ;$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot 470 = 235.$$

Ví dụ 2. Trong một phân xưởng may, ba tổ nhận may một số hàng như sau. Tổ I có 10 người, tổ II có 12 người, tổ III có 15 người. Biết năng suất lao động của mỗi người là như nhau và số ngày làm của tổ I hơn số ngày làm của tổ II là 3 ngày. Tính số ngày làm của mỗi tổ.

Giải

Gọi số ngày làm của ba tổ lần lượt là x, y, z .

Với cùng một công việc thì số người làm tỉ lệ nghịch với số ngày làm.

Do đó ta có : $10x = 12y = 15z$, trong đó $x - y = 3$.

$$\text{Suy ra : } \frac{x}{\frac{1}{10}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{x - y}{\frac{1}{10} - \frac{1}{12}} = \frac{3}{\frac{1}{60}} = 180.$$

$$\text{Do đó : } x = \frac{1}{10} \cdot 180 = 18 ;$$

$$y = \frac{1}{12} \cdot 180 = 15 ;$$

$$z = \frac{1}{15} \cdot 180 = 12.$$

Vậy số ngày làm của ba tổ I, II, III lần lượt là : 18, 15, 12 (ngày).

Dạng 4. VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ ($a \neq 0$). XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ HOẶC KHÔNG THUỘC ĐỒ THỊ

Phương pháp giải

- Cách vẽ đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) :

Vẽ một điểm A khác gốc O. Đồ thị là đường thẳng OA.

- Nếu thay $x = x_0$; $y = y_0$ vào hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) mà được một đẳng thức đúng (hoặc sai) thì điểm $(x_0 ; y_0)$ thuộc (hoặc không thuộc) đồ thị của hàm số $y = ax$.

Ví dụ 1. Cho các hàm số $y = 1,5x$ và $y = -3x$.

- Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Điểm $M(-12 ; -18)$ thuộc đồ thị của hàm số nào trong hai hàm số đã cho ?

Giải. (h.12)

- Xét hàm số $y = 1,5x$.

Cho $x = 2$ thì $y = 3$.

Vẽ điểm A(2 ; 3).

Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = 1,5x$.

• Xét hàm số $y = -3x$.

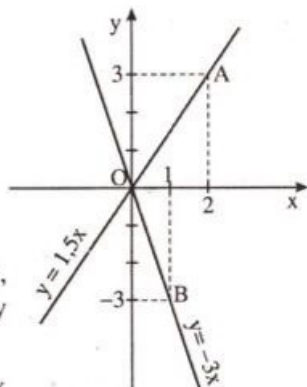
Cho $x = 1$ thì $y = -3$.

Vẽ điểm B(1 ; -3).

Đường thẳng OB là đồ thị của hàm số $y = -3x$.

b) • Thay $x = -12$; $y = -18$ vào hàm số $y = 1,5x$, ta được : $-18 = 1,5.(-12)$. Đẳng thức này đúng, vậy điểm M(-12 ; -18) thuộc đồ thị của hàm số $y = 1,5x$.

• Thay $x = -12$; $y = -18$ vào hàm số $y = -3x$ ta được $-18 \neq -3.(-12)$.



Hình 12

Đẳng thức này sai, vậy điểm M(-12 ; -18) không thuộc đồ thị của hàm số $y = -3x$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -2,5x$. Hai điểm P và Q thuộc đồ thị của hàm số này. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

- a) Đường thẳng PQ đi qua gốc toạ độ.
- b) Nếu hoành độ của P là 4 thì tung độ của P là 10.
- c) Nếu tung độ của Q là 15 thì hoành độ của Q là -6.

Giải

- a) Đúng vì đồ thị của hàm số $y = -2,5x$ là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ.
- b) Sai vì khi thay $x = 4$; $y = 10$ vào hàm số $y = -2,5x$ ta được một đẳng thức sai.
- c) Đúng vì khi thay $x = -6$; $y = 15$ vào hàm số $y = -2,5x$ ta được một đẳng thức đúng là : $15 = -2,5.(-6)$.

Ví dụ 3. Đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua điểm M(-3 ; 4,5). Hỏi N(8 ; -12) có thuộc đồ thị của hàm số $y = ax$ không ?

Giải

Thay $x = -3$; $y = 4,5$ vào hàm số $y = ax$ ta được :

$$4,5 = a.(-3) \Rightarrow a = -1,5.$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số $y = -1,5x$.

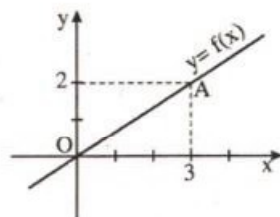
Thay $x = 8$; $y = -12$ vào hàm số $y = -1,5x$ ta được một đẳng thức đúng :

$$-12 = -1,5.8.$$

Vậy điểm N(8 ; -12) thuộc đồ thị của hàm số đã cho.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Biết rằng khi $x = 3$ thì $y = 5$.
 - Hỏi y và x liên hệ với nhau theo công thức nào ?
 - Tìm x khi $y = 7,5$.
- Cho y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Biết rằng khi $x = -2$ thì $y = 3$.
 - Hỏi y và x liên hệ với nhau theo công thức nào ?
 - Tìm y khi $x = 5$.
- Chia số 351 thành ba phần :
 - Tỉ lệ thuận với 3 ; 4 ; 6.
 - Tỉ lệ nghịch với 3 ; 4 ; 6.
- Chia số M thành ba phần tỉ lệ thuận với các số 5 ; 2 ; 4. Biết số nhỏ nhất bằng 10. Tính số M .
- Cho hàm số $y = f(x) = ax$ ($a \neq 0$).
 Biết $f(2) = -5$, tính $f(-1)$; $f\left(\frac{2}{3}\right)$.
- Hình 13 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.
 - Hỏi hàm số này được cho bởi công thức nào ?
 - Tính $f(6)$; $f(-4,5)$.



Hình 13

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

- $y = \frac{5}{3}x$;
 - $x = 4,5$.
- $y = \frac{-6}{x}$;
 - $y = -1,2$.
- 81 ; 108 ; 162 ;
 - 156 ; 117 ; 78.
- 55.
- $f(-1) = \frac{5}{2}$; $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}$.
- $y = \frac{2}{3}x$;
 - $f(6) = 4$; $f(-4,5) = -3$.

PHẦN HÌNH HỌC

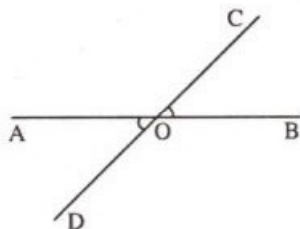
Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

§1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.
Trong hình 14 thì góc AOD đối đỉnh với góc BOC.
2. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau :

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOC} \text{ (h.14).}$$



Hình 14

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

Phương pháp giải

Xét xem mỗi cạnh của góc này có phải là tia đối của một cạnh của góc kia không ?

Ví dụ 1. Cho hai góc kề bù AOM và BOM trong đó $\widehat{AOM} = 120^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia OM ta vẽ tia ON sao cho $\widehat{AON} = 60^\circ$. Hỏi hai góc AON và BOM có phải là hai góc đối đỉnh không ? Vì sao ?

Giải. (h.15)

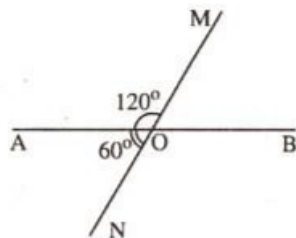
Xét hai góc kề $\widehat{AOM}$ và $\widehat{AON}$, ta có :

$$\widehat{AOM} + \widehat{AON} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Vậy hai góc $\widehat{AOM}$ và $\widehat{AON}$ là hai góc kề bù.

Suy ra hai tia OM, ON đối nhau.

Mặt khác hai tia OA, OB đối nhau nên hai góc $\widehat{AON}$ và $\widehat{BOM}$ là hai góc đối đỉnh.



Hình 15

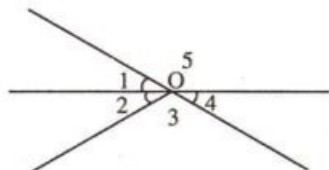
Ví dụ 2. Xem hình 16 rồi cho biết trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

(A) Hai góc $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_2}$ là hai góc đối đỉnh.

(B) Hai góc $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_4}$ là hai góc đối đỉnh.

(C) Hai góc $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_4}$ là hai góc đối đỉnh.

(D) Hai góc $\widehat{O_3}$ và $\widehat{O_5}$ là hai góc đối đỉnh.



Hình 16

Giải. (h.16)

Hai góc $\widehat{O_1}$ và $\widehat{O_4}$ là hai góc đối đỉnh vì mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh góc kia. Các khẳng định khác đều sai. Chọn (C).

Ví dụ 3. Ba đường thẳng AB, CD, EF cắt nhau tại điểm O, chúng tạo thành mấy cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt) ?

Giải. (h.17)

• Trước hết xét các góc "đơn", ta có :

– Góc $\widehat{O_1}$ đối đỉnh với góc $\widehat{O_4}$.

– Góc $\widehat{O_2}$ đối đỉnh với góc $\widehat{O_5}$.

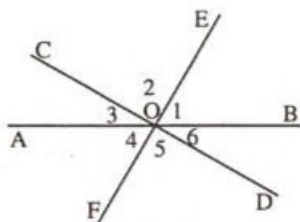
– Góc $\widehat{O_3}$ đối đỉnh với góc $\widehat{O_6}$.

• Xét các góc "đôi", ta có :

– Góc $\widehat{BOC}$ đối đỉnh với góc $\widehat{AOD}$.

– Góc $\widehat{AOE}$ đối đỉnh với góc $\widehat{BOF}$.

– Góc $\widehat{COF}$ đối đỉnh với góc $\widehat{DOE}$.



Hình 17

Dạng 2. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Có thể sử dụng các tính chất :

• Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

• Hai góc kề bù có tổng bằng 180° .

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kề góc bẹt. Biết $\widehat{AOC} = 55^\circ$, tính số đo ba góc còn lại.

Giải. (h.18)

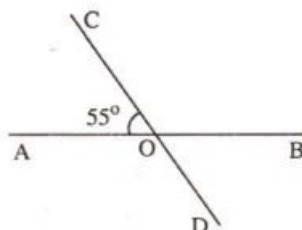
Hai góc AOC và BOC kề bù nhau nên :

$$\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^\circ.$$

$$\text{Suy ra : } \widehat{BOC} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ.$$

$$\text{Ta có : } \widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 125^\circ \text{ (đối đỉnh).}$$

$$\widehat{BOD} = \widehat{AOC} = 55^\circ \text{ (đối đỉnh).}$$



Hình 18

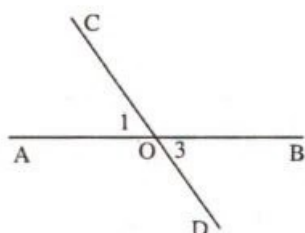
Ví dụ 2. Cho hình 19, biết $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 130^\circ$.
Tính số đo của bốn góc AOC, COB, BOD và DOA.

Giải. (h.19)

$$\text{Ta có : } \widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 130^\circ \text{ mà } \widehat{O_1} = \widehat{O_3} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\text{nên : } \widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 130^\circ : 2 = 65^\circ, \text{ do đó :}$$

$$\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 65^\circ.$$



Hình 19

$$\text{Hai góc BOC và AOC là hai góc kề bù nên } \widehat{BOC} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

$$\text{Suy ra : } \widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 115^\circ \text{ (đối đỉnh).}$$

Ví dụ 3. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kề góc bẹt. Biết tổng của ba trong bốn góc này bằng 250° , tính số đo của bốn góc đó.

Giải. (h.20)

$$\text{Giả sử : } \widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 250^\circ.$$

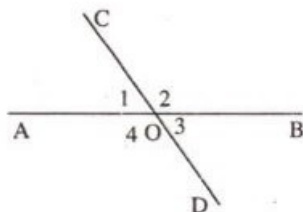
$$\text{Vì } \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\text{nên : } \widehat{O_3} = 250^\circ - 180^\circ = 70^\circ.$$

$$\text{Do đó } \widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 70^\circ \text{ (đối đỉnh).}$$

$$\text{Ta có : } \widehat{O_2} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

$$\text{Suy ra : } \widehat{O_4} = \widehat{O_2} = 110^\circ \text{ (đối đỉnh).}$$



Hình 20

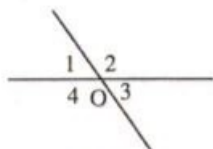
Ví dụ 4. Cho hình 21, giả sử góc O_2 lớn hơn góc O_3 là 30° . Tính góc O_1 .

Giải. (h.21)

Ta có : $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 180^\circ$ (kề bù),

mà $\widehat{O_2} - \widehat{O_3} = 30^\circ$ nên $\widehat{O_3} = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$.

Suy ra : $\widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 75^\circ$ (đối đỉnh).



Hình 21

Ví dụ 5. Cho hình 22, tia OM là tia phân giác của góc BOD. Biết $\widehat{AOC} = 70^\circ$, tính số đo của góc COM.

Giải. (h.22)

Ta có : $\widehat{BOD} = \widehat{AOC} = 70^\circ$ (đối đỉnh).

Vì tia OM là tia phân giác của góc BOD nên :

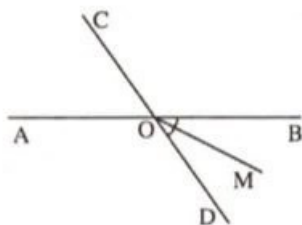
$$\widehat{BOM} = 70^\circ : 2 = 35^\circ.$$

Hai góc AOC và COB kề bù nên :

$$\widehat{COB} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Tia OB nằm giữa hai tia OC và OM nên :

$$\widehat{COM} = \widehat{COB} + \widehat{BOM} = 110^\circ + 35^\circ = 145^\circ.$$



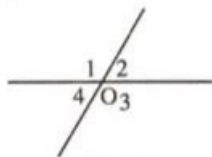
Hình 22

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

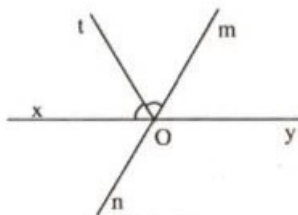
1. Cho hình 23, biết $\widehat{O_1} = 3\widehat{O_2}$. Tính số đo các góc $\widehat{O_1}, \widehat{O_2}, \widehat{O_3}, \widehat{O_4}$.

2. Hai đường thẳng xy và mn cắt nhau tại O. Vẽ tia phân giác Ot của góc xOm. Biết $\widehat{yOt} = 125^\circ$, tính số đo các góc xOm và yOn (xem hình 24).

3*. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O. Vẽ các tia OM, ON lần lượt là các tia phân giác của các góc BOC và AOD. Tính số đo của góc MON.



Hình 23



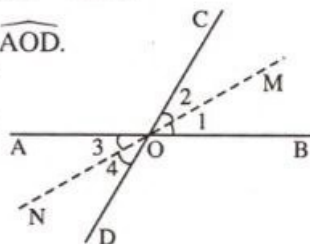
Hình 24

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

- Đáp số: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3 = 135^\circ$; $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_4 = 45^\circ$.
- Tính được $\widehat{xOt} = 55^\circ$ suy ra $\widehat{xOm} = 110^\circ$, do đó $\widehat{yOn} = 110^\circ$.
- (h.25). Ta có: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$; $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = \frac{1}{2}\widehat{AOD}$.

Mặt khác, $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_1$.

$$\begin{aligned}\text{Vậy ta có: } \widehat{MON} &= \widehat{O}_2 + \widehat{AOC} + \widehat{O}_3 \\ &= \widehat{O}_2 + \widehat{AOC} + \widehat{O}_1 \\ &= \widehat{AOB} = 180^\circ.\end{aligned}$$



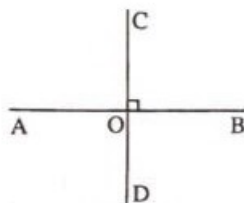
Hình 25

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- Hai đường thẳng vuông góc là hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông (h.26).

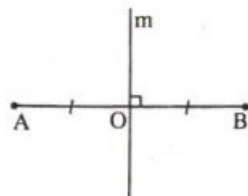
$$AB \perp CD \Leftrightarrow \begin{cases} AB \text{ và } CD \text{ cắt nhau tại } O, \\ \widehat{O} = 90^\circ. \end{cases}$$



Hình 26

- Có một và chỉ một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó (h.27).

$$m \text{ là đường trung trực của } AB \Leftrightarrow \begin{cases} m \perp AB, \\ OA = OB. \end{cases}$$



Hình 27

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Phương pháp giải

Xét xem góc tạo bởi hai đường thẳng có bằng 90° không ?

Ví dụ 1. Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia OC và OD sao cho $\widehat{AOC} = 60^\circ$; $\widehat{BOD} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$. Chứng tỏ rằng hai tia OC và OD vuông góc với nhau.

Giải. (h.28)

Hai góc AOC và BOC kề bù nên $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$.

Suy ra : $\widehat{BOC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Mặt khác, ta có : $\widehat{BOD} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

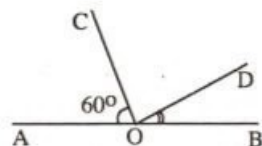
Tia OD nằm giữa hai tia OB và OC nên :

$$\widehat{BOD} + \widehat{DOC} = \widehat{BOC}.$$

Hay là : $30^\circ + \widehat{DOC} = 120^\circ$.

Suy ra : $\widehat{DOC} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

Do đó $OC \perp OD$.



Hình 28

Ví dụ 2. Trên đường thẳng AB lấy một điểm O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ox sao cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOx}$. Hãy cho biết vị trí của tia Ox đối với đường thẳng AB.

Giải. (h.29)

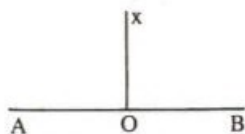
Hai góc AOx và BOx kề bù nên :

$$\widehat{AOx} + \widehat{BOx} = 180^\circ.$$

Mặt khác $\widehat{AOx} = \widehat{BOx}$ nên :

$$\widehat{AOx} = 180^\circ : 2 = 90^\circ.$$

Do đó : $Ox \perp AB$.



Hình 29

Ví dụ 3. Cho hình 30 có $\widehat{AOB}$ là góc bẹt, $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}$ và $\widehat{COE} = \widehat{COF}$. Giải thích tại sao $OC \perp AB$.

Giải. (h.30)

Ta có : $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}$; $\widehat{COE} = \widehat{COF}$ (đề bài).

Suy ra : $\widehat{AOE} + \widehat{COE} = \widehat{BOF} + \widehat{COF}$ (*).

Mặt khác, tia OE nằm giữa hai tia OC, OA ;

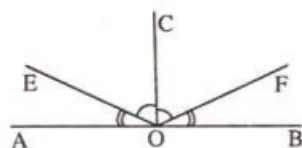
tia OF nằm giữa hai tia OC, OB

nên từ (*) suy ra : $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$.

Mặt khác : $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$ nên :

$$\widehat{AOC} = 180^\circ : 2 = 90^\circ.$$

Do đó : $OC \perp AB$.



Hình 30

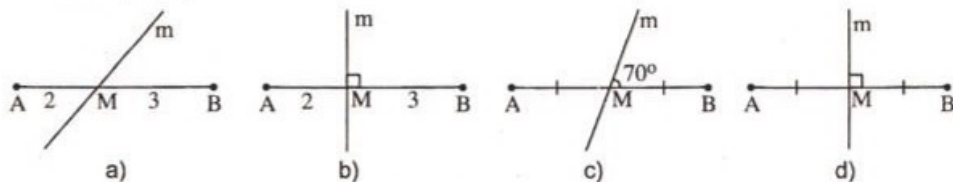
Dạng 2. NHẬN BIẾT MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

Phương pháp giải

Nếu $xy \perp AB$ tại M và $MA = MB$ thì xy là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Ví dụ 1. Trong các hình 31 dưới đây, hình nào có đường thẳng m là đường trung trực của đoạn thẳng AB ?

Giải. (h.31)



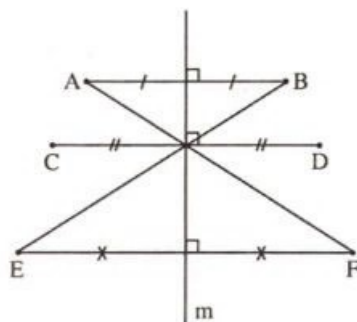
Hình 31

Ở hình 31d) có $m \perp AB$ tại M và $MA = MB$ nên đường thẳng m là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Ví dụ 2. Cho hình 32, đường thẳng m là đường trung trực của những đoạn thẳng nào ?

Giải. (h.32)

Đường thẳng m là đường trung trực của các đoạn thẳng AB , CD , EF vì đường thẳng m vuông góc với các đoạn thẳng này tại trung điểm của chúng.



Hình 32

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng $AB = 4\text{cm}$. Lấy điểm M nằm giữa A và B sao cho $AM = 2\text{cm}$. Qua M vẽ đường thẳng xy sao cho $\widehat{AMx} = \widehat{AMy}$. Chứng tỏ rằng đường thẳng xy là đường trung trực của AB .

Giải. (h.33)

Ta có điểm M nằm giữa hai điểm A và B nên :

$$AM + MB = AB$$

$$2 + MB = 4$$

$$MB = 2 \text{ (cm)}.$$

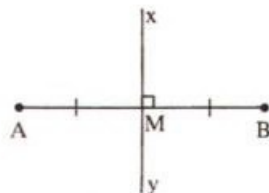
$$\text{Do đó : } MA = MB (= 2 \text{ cm}). \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \widehat{AMx} + \widehat{AMy} = 180^\circ \text{ (kề bù),}$$

$$\text{mà } \widehat{AMx} = \widehat{AMy} \text{ nên } \widehat{AMx} = 180^\circ : 2 = 90^\circ.$$

$$\text{Vậy } xy \perp AB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng xy là đường trung trực của AB .



Hình 33

Dạng 3. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

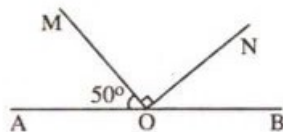
Góc tạo thành bởi hai đường thẳng vuông góc bằng 90° .

Ví dụ 1. Cho hai góc kề bù AOM và BOM trong đó $\widehat{AOM} = 50^\circ$. Vẽ tia ON ở trong góc BOM sao cho $ON \perp OM$. Tính số đo của góc BON .

Giải. (h.34)

Hai góc AOM và BOM kề bù nên :

$$\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ.$$



Hình 34

Suy ra : $\widehat{BOM} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Tia ON nằm giữa hai tia OB và OM nên :

$$\widehat{BON} + \widehat{NOM} = \widehat{BOM}.$$

Vậy $\widehat{BON} = 130^\circ - 90^\circ = 40^\circ$ (góc $\widehat{NOM} = 90^\circ$ vì $OM \perp ON$).

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau tại O. Tia OM là tia phân giác của góc BOC. Tính số đo của góc AOM.

Giải. (h.35)

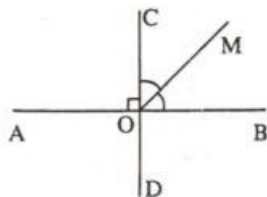
Vì $AB \perp CD$ nên $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

Mặt khác, tia OM là tia phân giác của góc BOC

nên $\widehat{BOM} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Hai góc AOM và BOM kề bù nên :

$$\widehat{AOM} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$



Hình 35

Ví dụ 3. Cho góc AOB có số đo là 150° . Vẽ vào trong góc này các tia OM và ON sao cho $OM \perp OA$, $ON \perp OB$.

a) Chứng tỏ rằng $\widehat{AON} = \widehat{BOM}$;

b) Tính số đo của góc MON.

Giải. (h.36)

a) Ta có $OM \perp OA$, $ON \perp OB$ nên :

$$\widehat{AOM} = 90^\circ ; \widehat{BON} = 90^\circ.$$

Tia ON nằm giữa hai tia OA, OB nên :

$$\widehat{AON} + \widehat{NOB} = \widehat{AOB}, \text{ do đó :}$$

$$\widehat{AON} = \widehat{AOB} - \widehat{NOB} = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ. \quad (1)$$

Tia OM nằm giữa hai tia OA, OB nên :

$$\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = \widehat{AOB}, \text{ do đó :}$$

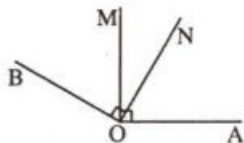
$$\widehat{BOM} = \widehat{AOB} - \widehat{AOM} = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $\widehat{AON} = \widehat{BOM} (= 60^\circ)$.

b) Tia ON nằm giữa hai tia OA, OM nên :

$$\widehat{AON} + \widehat{MON} = \widehat{AOM}.$$

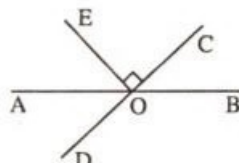
Suy ra : $\widehat{MON} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.



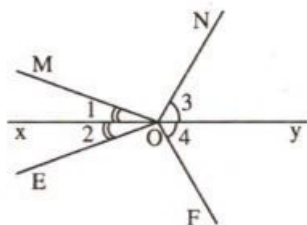
Hình 36

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho hình 37, hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O và $OE \perp CD$. Biết $\widehat{BOE} = 135^\circ$, chứng tỏ rằng tia OA là tia phân giác của góc DOE.
- Cho hình 38, biết đường thẳng xy lần lượt chứa các tia phân giác của các góc MOE và NOF. Muốn cho $OE \perp OF$ thì góc MON phải có số đo bằng bao nhiêu độ?



Hình 37



Hình 38

HƯỚNG DẪN – ĐÁP ÁN

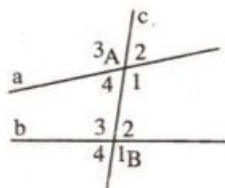
- Bạn tính được $\widehat{AOE} = 45^\circ$; $\widehat{BOC} = 45^\circ$. Sau đó dùng góc BOC làm trung gian để chứng tỏ $\widehat{AOE} = \widehat{AOD}$.
- Ta có: $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} + \widehat{MON} = \widehat{O_2} + \widehat{O_4} + \widehat{EOF} = 180^\circ$,
mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$; $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$ nên $\widehat{MON} = \widehat{EOF}$.
Muốn cho $OE \perp OF$ thì ta phải có $\widehat{EOF} = 90^\circ$, do đó $\widehat{MON} = 90^\circ$.

§3. CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG.

§4. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- Các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng (h.39)
 - Hai góc A_1 và B_3 cũng như hai góc A_4 và B_2 gọi là cặp góc so le trong.



Hình 39

- Hai góc A_1 và B_2 cũng như hai góc A_4 và B_3 gọi là *cặp góc trong cùng phía*.
- Các cặp góc A_1 và B_1 ; A_2 và B_2 ; A_3 và B_3 ; A_4 và B_4 được gọi là *các cặp góc đồng vị*.

2. Hai đường thẳng song song (h.40)

Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

Kí hiệu : $a \parallel b$.



Hình 40

3. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có :

- hoặc một cặp góc so le trong bằng nhau ;
- hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau ;
- hoặc một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì a và b song song với nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. XÁC ĐỊNH CẶP GÓC SO LE TRONG, CẶP GÓC TRONG CÙNG PHÍA, CẶP GÓC ĐỒNG VỊ

Phương pháp giải

Phải căn cứ vào vị trí của hai góc so với hai đường thẳng và đường thứ ba cắt chúng (cắt tuyến).

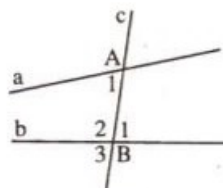
Ví dụ 1. Cho hình 41.

- Góc nào so le trong với góc A_1 ?
- Góc nào đồng vị với góc A_1 ?
- Góc nào trong cùng phía với góc A_1 ?

Giải. (h.41)

Xét hai đường thẳng a và b cùng với cắt tuyến c thì :

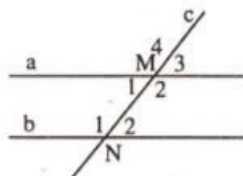
- Góc B_1 so le trong với góc A_1 ;
- Góc B_3 đồng vị với góc A_1 ;
- Góc B_2 trong cùng phía với góc A_1 .



Hình 41

Ví dụ 2. Cho hình 42, hãy kể tên :

- Góc so le trong với góc N_1 ;
- Góc đồng vị với góc N_2 ;
- Góc trong cùng phía với góc M_1 .



Hình 42

Giải. (h.42)

Xét hai đường thẳng a, b cùng với cát tuyến c thì :

- Góc M_2 so le trong với góc N_1 ;
- Góc M_3 đồng vị với góc N_2 ;
- Góc N_1 trong cùng phía với góc M_1 .

Ví dụ 3. Xem hình 43 rồi cho biết :

- Cặp góc so le trong của hai đường thẳng AB và CD đối với cát tuyến AD.
- Cặp góc so le trong của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến AD.
- Cặp góc trong cùng phía của hai đường thẳng AB và CD đối với cát tuyến AC.
- Cặp góc đồng vị của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến Cx.

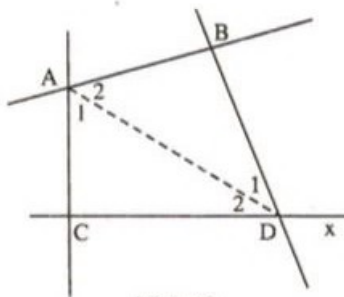
Giải. (h.43)

a) Cặp góc A_2 và D_2 là cặp góc so le trong của hai đường thẳng AB và CD đối với cát tuyến AD.

b) Cặp góc $\widehat{A_1}$ và $\widehat{D_1}$ là cặp góc so le trong của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến AD.

c) Cặp góc CAB và ACD là cặp góc trong cùng phía của hai đường thẳng AB và CD đối với cát tuyến AC.

d) Cặp góc ACD và BDx là cặp góc đồng vị của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến Cx.



Hình 43

Dạng 2. NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Phương pháp giải

Cần chứng tỏ cặp góc so le trong bằng nhau, hoặc cặp góc đồng vị bằng nhau, hoặc cặp góc trong cùng phía bù nhau.

Ví dụ 1. Cho hình 44, biết : $\widehat{A}_1 = 60^\circ$; $\widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\widehat{B}_2$. Chứng tỏ rằng $a \parallel b$.

Giải. (h.44)

Ta có : $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ (kề bù), mà

$$\widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\widehat{B}_2 \text{ nên } \widehat{B}_1 = 180^\circ : 3 = 60^\circ.$$

Suy ra : $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ ($= 60^\circ$).

Do đó $a \parallel b$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

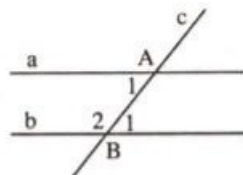
Ví dụ 2. Cho hình 45, biết : $\widehat{A}_2 = 70^\circ$; $\widehat{B} = 110^\circ$. Chứng tỏ rằng $Ax \parallel By$.

Giải. (h.45)

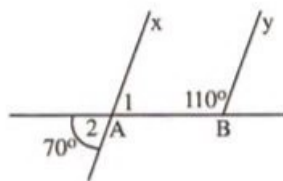
Ta có : $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 70^\circ$ (đối đỉnh).

Do đó : $\widehat{A}_1 + \widehat{B} = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$.

Suy ra $Ax \parallel By$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).



Hình 44



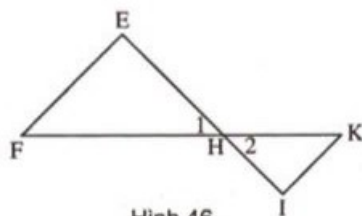
Hình 45

Ví dụ 3. Cho hình 46, biết : $\widehat{F} = \widehat{H}_1$; $\widehat{K} = \widehat{H}_2$. Chứng tỏ rằng $EF \parallel IK$.

Giải. (h.46)

Ta có : $\widehat{F} = \widehat{H}_1$; $\widehat{K} = \widehat{H}_2$ mà $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ (đối đỉnh), nên $\widehat{F} = \widehat{K}$.

Suy ra : $EF \parallel IK$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).



Hình 46

Ví dụ 4. Cho hình 47, biết :

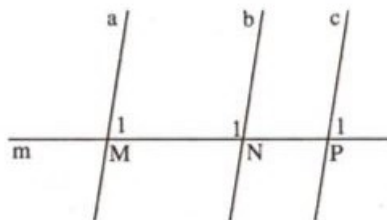
$$\widehat{M}_1 = 75^\circ ; \widehat{N}_1 = 105^\circ ; \widehat{P}_1 = 75^\circ.$$

Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song.

Giải. (h.47)

• Ta có : $\widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$.

Suy ra $a \parallel b$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).



Hình 47

- Ta có : $\widehat{M}_1 = \widehat{P}_1 (= 75^\circ)$.

Suy ra $a \parallel c$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

- Ta có $\widehat{bNP}$ kề bù với góc N_1 , do đó :

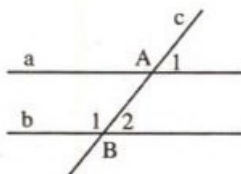
$$\widehat{bNP} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

Vậy : $\widehat{bNP} = \widehat{P}_1 (= 70^\circ)$.

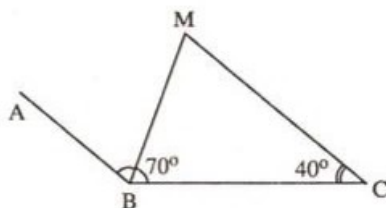
Suy ra $b \parallel c$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hình 48, biết : $\widehat{A}_1 = 72^\circ$; $\widehat{B}_2 = \frac{2}{3}\widehat{B}_1$. Chứng tỏ rằng $a \parallel b$.
2. Cho hình 49, biết tia BM là tia phân giác của góc ABC , $\widehat{MBC} = 70^\circ$, $\widehat{MCB} = 40^\circ$. Chứng tỏ rằng $AB \parallel MC$.

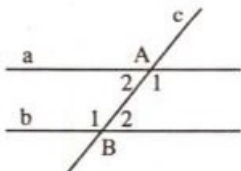


Hình 48

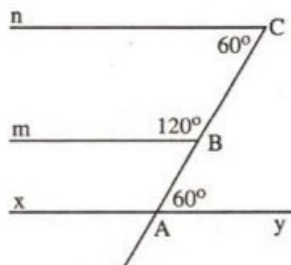


Hình 49

- 3*. Cho hình 50, biết : $\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 - \widehat{B}_2$. Chứng tỏ rằng $a \parallel b$.
4. Tìm trong hình 51 các cặp đường thẳng song song.



Hình 50



Hình 51

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Bạn tính được $\widehat{B}_2 = 72^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow a \parallel b$.
2. Bạn tính được $\widehat{ABC} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel MC$.
- 3*. Ta có : $\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 - \widehat{B}_2$ (để bài),
và $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ (kề bù).
Suy ra : $\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 - \widehat{B}_2 + \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2$,
hay $2\widehat{A}_1 = 2\widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.
Do đó $a \parallel b$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).
4. $n \parallel xy$; $n \parallel m$; $m \parallel xy$.

§5. TIÊN ĐỀ O-CLIT VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Tiên đề O-clit

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

2. Tính chất của hai đường thẳng song song

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì :

- a) Hai góc so le trong bằng nhau ;
- b) Hai góc đồng vị bằng nhau ;
- c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG TỎ HAI GÓC BẰNG NHAU, BÙ NHAU

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất của hai đường thẳng song song. Có thể dùng góc thứ ba làm trung gian.

Ví dụ 1. Trong hình 52 có : $\widehat{B} = \widehat{C}$ và $Ay \parallel BC$.

Chứng tỏ rằng tia Ay là tia phân giác của góc CAX .

Giải. (h.52)

Ta có $Ay \parallel BC$ (đề bài).

Suy ra : $\widehat{A_1} = \widehat{B}$ (cặp góc đồng vị) ;

$\widehat{A_2} = \widehat{C}$ (cặp góc so le trong).

Mặt khác, $\widehat{B} = \widehat{C}$ (đề bài) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. (1)

Tia Ay nằm giữa hai tia Ax và AC . (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia Ay là tia phân giác của góc CAX .

Ví dụ 2. Trong hình 53 có $DE \parallel BC$. Hãy kể tên các cặp góc bằng nhau.

Giải. (h.53)

Ta có $DE \parallel BC$ (đề bài).

Suy ra : $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$; $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$

(cặp góc đồng vị) ;

$\widehat{DEB} = \widehat{EBC}$ (cặp góc so le trong).

Ví dụ 3. Trong hình 54 có : $HI \parallel EF$, $HK \parallel EG$.

a) Hãy kể tên những góc bằng góc E .

b) Nếu $\widehat{F} - \widehat{G} = 25^\circ$ thì hiệu $\widehat{H_3} - \widehat{H_1}$ bằng bao nhiêu độ ?

Giải. (h.54)

a) Ta có $HI \parallel EF$ nên $\widehat{E} = \widehat{HIG}$ (cặp góc đồng vị) ;

$HK \parallel EG$ nên $\widehat{E} = \widehat{FKH}$ (cặp góc đồng vị).

Mặt khác, $\widehat{FKH} = \widehat{H_2}$ (cặp góc so le trong).

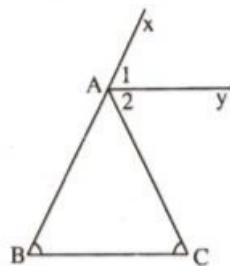
Do đó : $\widehat{E} = \widehat{HIG} = \widehat{FKH} = \widehat{H_2}$.

b) Ta có : $\widehat{F} = \widehat{H_3}$ (cặp góc đồng vị của $HI \parallel EF$) ;

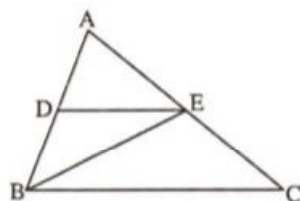
$\widehat{G} = \widehat{H_1}$ (cặp góc đồng vị của $HK \parallel EG$).

Do đó $\widehat{F} - \widehat{G} = \widehat{H_3} - \widehat{H_1}$.

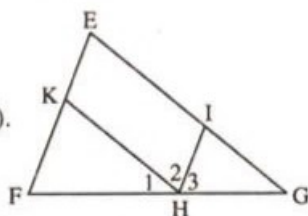
Vì $\widehat{F} - \widehat{G} = 25^\circ$ nên $\widehat{H_3} - \widehat{H_1} = 25^\circ$.



Hình 52



Hình 53



Hình 54

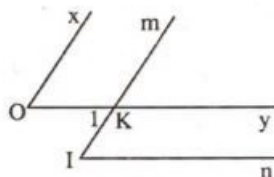
Ví dụ 4. Cho các góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{mIn}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn : $Ox \parallel Im$; $Oy \parallel In$ (xem hình 55). Chứng minh rằng $\widehat{O} = \widehat{I}$.

Giải. (h.55)

Ta có $Ox \parallel Im$ nên $\widehat{O} = \widehat{K_1}$ (cặp góc so le trong).

$Oy \parallel In$ nên $\widehat{K_1} = \widehat{I}$ (cặp góc so le trong). (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{O} = \widehat{I}$.



Hình 55

Nhận xét : Bài toán trên vẫn đúng nếu hai góc O và I cùng là góc tù. Nếu có một góc vuông thì góc kia cũng vuông.

Dạng 2. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Dùng tính chất của hai đường thẳng song song. Nếu biết số đo của một góc thì tính được số đo của góc kia.

Ví dụ 1. Cho hình 56, biết : $AB \parallel CD$, $\widehat{D} = 65^\circ$; $\widehat{BCx} = 130^\circ$. Tính số đo của góc A, góc B.

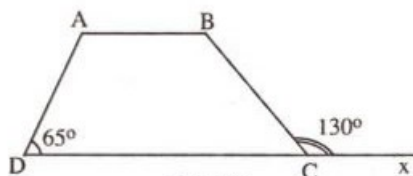
Giải. (h.56)

Ta có $AB \parallel CD$ (đề bài).

Suy ra : $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía).

Do đó : $\widehat{A} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

Ta có : $\widehat{B} = \widehat{BCx} = 130^\circ$ (cặp góc so le trong).



Hình 56

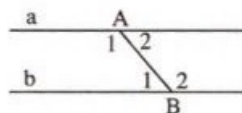
Ví dụ 2. Cho hình 57, biết : $a \parallel b$ và $\widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 50^\circ$. Tính số đo các góc A_2 và B_2 .

Giải. (h.57)

Ta có : $a \parallel b$ nên $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía).

Mặt khác : $\widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 50^\circ$ nên

$\widehat{A_1} = (180^\circ + 50^\circ) : 2 = 115^\circ$.



Hình 57

Từ đó ta có : $\widehat{B}_1 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

Suy ra : $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 = 65^\circ$; $\widehat{B}_2 = \widehat{A}_1 = 115^\circ$ (các cặp góc so le trong).

Ví dụ 3. Cho hình 58, biết : $\widehat{G}_1 = 50^\circ$; $\widehat{I}_1 = 60^\circ$; $\widehat{K}_1 = 60^\circ$. Tính số đo của góc H_2 .

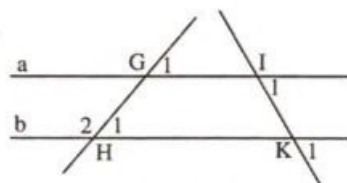
Giải. (h.58)

Ta có : $\widehat{I}_1 = \widehat{K}_1 (= 60^\circ)$.

Suy ra $a \parallel b$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Do đó : $\widehat{H}_1 = \widehat{G}_1 = 50^\circ$ (cặp góc đồng vị của hai đường thẳng song song).

Suy ra : $\widehat{H}_2 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.



Hình 58

Ví dụ 4. Cho hình 59, biết rằng tia Cx là tia phân giác của góc ACy. Chứng tỏ rằng :

- a) $Cx \parallel AB$; b) Tính số đo của góc A.

Giải. (h.59)

a) Ta có góc ACy và ACB là hai góc kề bù, nên :

$$\widehat{ACy} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

Tia Cx là tia phân giác của góc ACy nên :

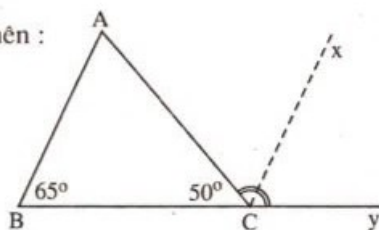
$$\widehat{xCy} = 130^\circ : 2 = 65^\circ.$$

Do đó $\widehat{xCy} = \widehat{B} (= 65^\circ)$.

Suy ra : $Cx \parallel AB$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

b) Ta có : $\widehat{A} = \widehat{ACx}$ (cặp góc so le trong của hai đường thẳng song song).

Mà $\widehat{ACx} = \widehat{xCy} = 65^\circ$ nên $\widehat{A} = 65^\circ$.



Hình 59

Dạng 3. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp giải

Dựa vào tiên đề Ô-clit.

Ví dụ. Trong hình 60 có $\widehat{A_1} = \widehat{B}$; $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ và AM, AN cùng bằng BC . Chứng tỏ rằng A là trung điểm của MN .

Giải. (h.60)

Ta có : $\widehat{A_1} = \widehat{B}$; $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ (đề bài cho).

Suy ra $AM \parallel BC$ và $AN \parallel BC$

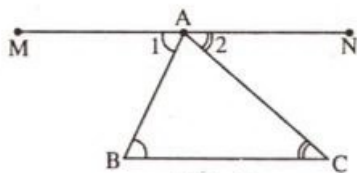
(vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Do đó ba điểm M, A, N thẳng hàng

(vì theo tiên đề O-clit, qua điểm A chỉ vẽ được một đường thẳng song song với BC). (1)

Mặt khác $AM = AN$ (vì cùng bằng BC). (2)

Từ (1) và (2) suy ra A là trung điểm của MN .

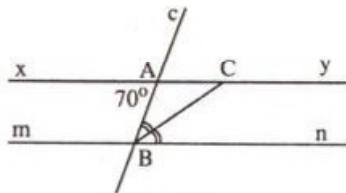


Hình 60

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Qua điểm O ở ngoài đường thẳng xy ta vẽ 10 đường thẳng. Hỏi ít nhất phải có mấy đường thẳng cắt xy ?

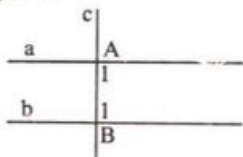
2. Trong hình 61 có $xy \parallel mn$. Tia BC là tia phân giác của góc ABn . Biết $\widehat{BAx} = 70^\circ$, tính góc ACB .



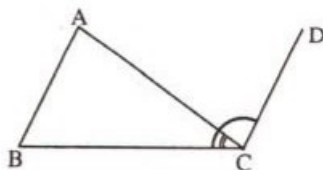
Hình 61

3. Trong hình 62 có $a \parallel b$ và $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$. Chứng tỏ rằng $c \perp a$ và $c \perp b$.

4. Trong hình 63 có $\widehat{BCD} = 115^\circ$; $\widehat{BCA} = 40^\circ$ và $CD \parallel AB$. Tính số đo của góc A , góc B .



Hình 62



Hình 63

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. 9 đường thẳng.
2. 35° .
3. Tính được $\widehat{A}_1 = 90^\circ$; $\widehat{B}_1 = 90^\circ$ suy ra $c \perp a$ và $c \perp b$.
4. Ta có $\widehat{ACD} = 115^\circ - 40^\circ = 75^\circ$.
Mặt khác, $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{ACD} = 75^\circ$.
Ta lại có $\widehat{B} + \widehat{BCD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

§6. TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG.

§7. ĐỊNH LÝ

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song*
 - Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường song song thì nó vuông góc với đường thẳng kia.
 - Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thứ ba thì song song với nhau.
 - Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thứ ba thì song song với nhau.
2. *Định lý*
 - Định lý là một khẳng định suy ra từ những khẳng định được coi là đúng.
 - Một định lý có thể phát biểu dưới dạng : "Nếu có A thì có B", trong đó A là phần giả thiết, B là phần kết luận.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Phương pháp giải

Ngoài những dấu hiệu đã biết trước đây, bạn có thể dựa vào hai dấu hiệu mới : cùng vuông góc hoặc cùng song song với một đường thứ ba.

Ví dụ 1. Trong hình 64 có $AB \perp AD$;
 $CD \perp AD$, $\widehat{CDE} = 130^\circ$ và $\widehat{E} = 130^\circ$. Chứng
 minh rằng $AB \parallel EF$.

Giải. (h.64)

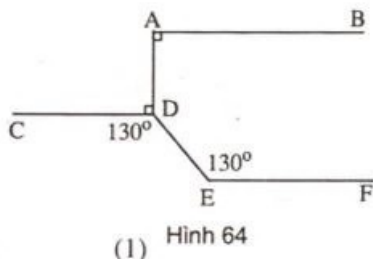
Ta có : $AB \perp AD$; $CD \perp AD$ (gt).

Suy ra $AB \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với AD)

Ta lại có : $\widehat{CDE} = \widehat{E} = 130^\circ$ (gt).

Suy ra : $EF \parallel CD$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \parallel EF$ (vì cùng song song với CD).



Ví dụ 2. Trong hình 65 có $\widehat{M} = 130^\circ$, $\widehat{P} = 120^\circ$ và $\widehat{MOP} = 110^\circ$. Biết tia
 Ot // MN. Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.

Giải. (h.65)

- Ta có : Ot // MN nên $\widehat{M} + \widehat{O_1} = 180^\circ$
 (cặp góc trong cùng phía).

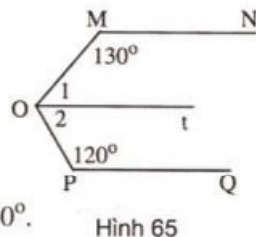
Suy ra : $\widehat{O_1} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{MOP} = 110^\circ$ nên $\widehat{O_2} = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ$.

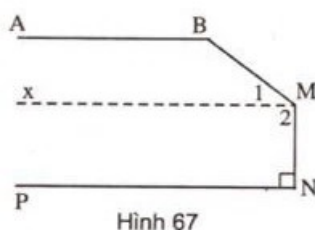
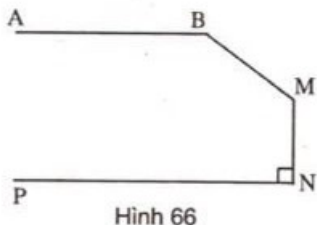
- Ta có : $\widehat{O_2} + \widehat{P} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$.

Suy ra : Ot // PQ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với Ot).



Ví dụ 3. Trong hình 66 có $MN \perp NP$, $\widehat{ABM} = \widehat{BMN} = 135^\circ$. Chứng minh
 rằng $AB \parallel NP$.



Giải. (h.67)

Vẽ tia Mx ở trong góc BMN sao cho $Mx \parallel AB$.

Ta có : $\widehat{ABM} + \widehat{M_1} = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía).

Suy ra : $\widehat{M}_1 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Do đó : $\widehat{M}_2 = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

Vậy $Mx \perp MN$.

Mặt khác $NP \perp MN$ (gt), suy ra $Mx \parallel NP$ (vì cùng vuông góc với MN), dẫn tới $AB \parallel NP$ (vì cùng song song với Mx).

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Phương pháp giải

Ngoài định nghĩa ra, bạn có thể dựa vào :

- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau.

Ví dụ 1. Cho hình 68, biết : $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ và $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$. Chứng minh rằng $m \perp b$.

Giải. (h.68)

Ta có : $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (gt).

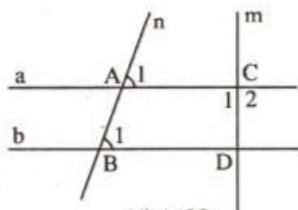
Suy ra $a \parallel b$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Mặt khác, $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ$ (kề bù), mà

$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (gt) nên $\widehat{C}_1 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

Vậy $m \perp a$.

Ta lại có $a \parallel b$ (chứng minh trên) nên $m \perp b$.



Hình 68

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Tia phân giác của góc BAC cắt BC tại D. Vẽ tia Ay nằm trong nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C sao cho $Ay \parallel BC$. Chứng minh rằng $Ay \perp AD$.

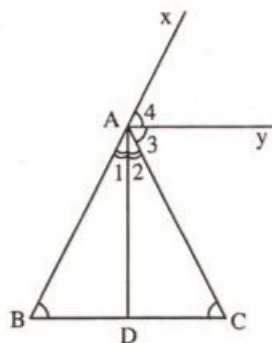
Giải. (h.69)

Vẽ tia Ax là tia đối của tia AB.

Kí hiệu các góc như trong hình 69.

Ta có : $Ay \parallel BC$ (gt).

Suy ra : $\widehat{A}_4 = \widehat{B}$ (cặp góc đồng vị) ;



Hình 69

$\widehat{A}_3 = \widehat{C}$ (cặp góc so le trong), mà : $\widehat{B} = \widehat{C}$ (gt) nên $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$. (1)

Tia Ay nằm giữa hai tia Ax và AC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia Ay là tia phân giác của góc CAX.

Mặt khác tia AD là tia phân giác của góc BAC (gt).

Suy ra $Ay \perp AD$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù).

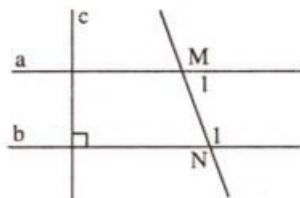
Ví dụ 3. Xem hình 70 rồi cho biết hai góc $\widehat{M}_1$ và $\widehat{N}_1$ phải có điều kiện gì để cho $c \perp a$?

Giải. (h.70)

Nếu : $\widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 = 180^\circ$ thì $a \parallel b$

(vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Khi đó thì $c \perp a$ (vì $c \perp b$).



Hình 70

Dạng 3. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Trước tiên chứng minh hai đường thẳng song song rồi dùng tính chất về góc của hai đường thẳng song song để tính.

Ví dụ 1. Cho hình 71, biết : $a \perp PQ$; $b \perp PQ$

và $\widehat{N} = 75^\circ$. Tính số đo x của góc M.

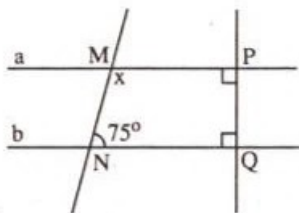
Giải. (h.71)

Ta có : $a \perp PQ$; $b \perp PQ$ (gt).

Suy ra $a \parallel b$ (vì cùng vuông góc với PQ).

Do đó : $x + 75^\circ = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía)

$$x = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$



Hình 71

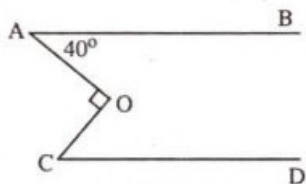
Ví dụ 2. Cho hình 72, biết : $AB \parallel CD$;

$\widehat{A} = 40^\circ$; $OA \perp OC$. Tính số đo của góc C.

Giải. (h.73)

Trong góc AOC ta vẽ tia $Ox \parallel AB$ thì $Ox \parallel CD$

(vì cùng song song với AB).

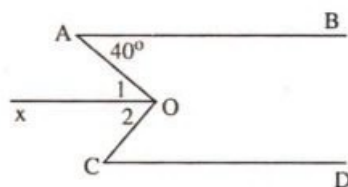


Hình 72

Ta có : $\widehat{O}_1 = \widehat{A} = 40^\circ$ (cặp góc so le trong).

Suy ra : $\widehat{O}_2 = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

Do đó : $\widehat{C} = \widehat{O}_2 = 50^\circ$ (cặp góc so le trong của $Ox \parallel CD$).



Hình 73

Ví dụ 3. Cho hình 74, biết $EF \parallel GH$ và $\widehat{F} = \widehat{O} = \widehat{H} = x$. Tính giá trị của x .

Giải. (h.75)

Trong góc FOH ta vẽ tia $Ox \parallel EF$ thì $Ox \parallel GH$ (vì cùng song song với EF).

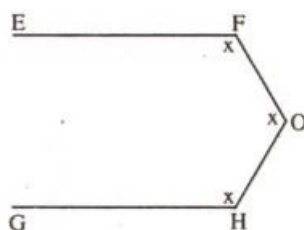
Ta có : $\widehat{F} + \widehat{O}_1 = 180^\circ$; $\widehat{H} + \widehat{O}_2 = 180^\circ$

(các cặp góc trong cùng phía).

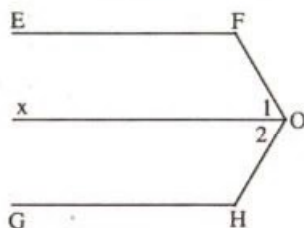
Do đó : $\widehat{F} + \widehat{O}_1 + \widehat{H} + \widehat{O}_2 = 360^\circ$.

Suy ra : $\widehat{F} + \widehat{H} + (\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2) = 360^\circ$.

Hay $x + x + x = 360^\circ$. Vậy $x = 120^\circ$.



Hình 74



Hình 75

Dạng 4. VIẾT GIẢ THIẾT, KẾT LUẬN CỦA MỘT ĐỊNH LÝ VÀ NGƯỢC LẠI, BIẾT GIẢ THIẾT KẾT LUẬN CỦA MỘT ĐỊNH LÝ, DIỄN ĐẠT ĐỊNH LÝ ĐÓ BẰNG LỜI

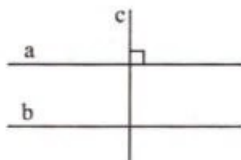
Phương pháp giải

Phải xác định xem đâu là điều đã cho, đâu là điều cần chứng minh. Điều đã cho là phần giả thiết, điều cần chứng minh là phần kết luận. Nếu định lý được phát biểu dưới dạng "Nếu... thì...", thì phần nằm giữa từ "nếu" và từ "thì" là phần giả thiết, phần sau từ "thì" là phần kết luận.

Ví dụ 1. Vẽ hình rồi ghi giả thiết, kết luận của định lý: "Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia".

Giải. (h.76)

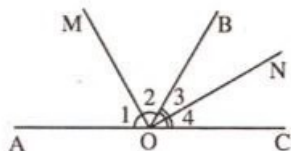
GT	$a // b$ $c \perp a.$
KL	$c \perp b.$



Hình 76

Ví dụ 2. Phát biểu định lí được diễn tả bởi giả thiết, kết luận và hình 77 :

GT	$\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ kề bù, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} ; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}.$
KL	$OM \perp ON.$



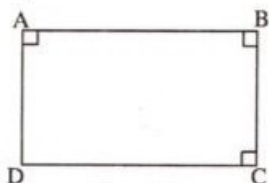
Hình 77

Giải. (h.77)

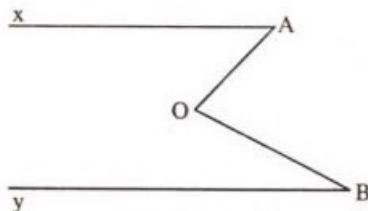
Hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc với nhau.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

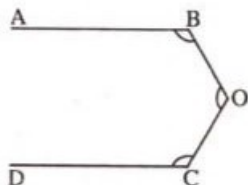
- Cho góc vuông xOy. Trên tia Ox lấy điểm A. Qua A vẽ đường thẳng mn // Oy. Trên các tia Am và An lần lượt lấy các điểm B và C sao cho AB = AC. Hỏi đường thẳng Ox có phải là đường trung trực của BC không ?
- Trong hình 78 có : $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$. Chứng tỏ rằng $\widehat{D} = 90^\circ$.
- Trong hình 79 có Ax // By. Chứng minh rằng $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{AOB}$.
- Trong hình 80 có : $\widehat{B} = \widehat{O} = \widehat{C} = 120^\circ$. Chứng minh rằng AB // CD.
- Diễn đạt bằng lời định lí sau (h.81) :



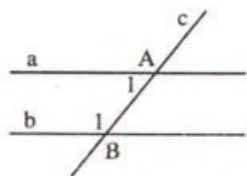
Hình 78



Hình 79



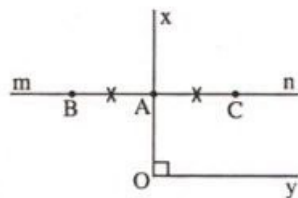
Hình 80



Hình 81

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.82) Ta có $Mn \parallel Oy$ mà $Ox \perp Oy$,
nên $Ox \perp mn$. (1)
Mặt khác, $AB = AC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra Ox là đường trung trực của BC .
2. Chứng minh $AB \parallel CD$ mà $AB \perp AD$ nên $CD \perp AD$.
Suy ra: $\widehat{D} = 90^\circ$.



Hình 82

3. Ở trong góc AOB vẽ tia $Ot \parallel Ax$ thì $Ot \parallel By$.
Dùng cách cộng góc suy ra điều phải chứng minh.
4. Ở trong góc BOC vẽ tia $Ot \parallel AB$. Tính số đo của các góc BOt và Cot , từ đó suy ra $Ot \parallel CD$, dẫn tới $AB \parallel CD$ (vì cùng song song với Ot).
5. Nếu hai đường thẳng bị một đường thẳng thứ ba cắt và chúng tạo thành một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Các khái niệm về hai góc đối đỉnh, hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song, định lý.
2. Các dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song, các tính chất của hai đường thẳng song song trong đó có tiên đề Ô-clít.
3. Quan hệ giữa tính chất vuông góc và song song.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Phương pháp giải

- Chứng minh góc giữa hai đường thẳng bằng 90° .
- Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.
- Hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc với nhau.

Ví dụ 1. Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn góc (không kể góc bẹt). Khi đó trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

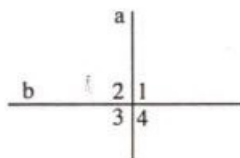
- Nếu bốn góc đó bằng nhau thì hai đường thẳng vuông góc.
- Nếu ba trong bốn góc đó bằng nhau thì hai đường thẳng vuông góc.
- Nếu hai góc kề bằng nhau thì hai đường thẳng vuông góc.

Giải. (h.83)

a) đúng, vì nếu bốn góc bằng nhau thì số đo của mỗi góc là $360^\circ : 4 = 90^\circ$, do đó hai đường thẳng vuông góc.

b) đúng, vì nếu ba góc bằng nhau thì có một cặp góc kề bù bằng nhau, do đó một góc có số đo là $180^\circ : 2 = 90^\circ$. Suy ra hai đường thẳng vuông góc.

c) đúng, vì hai góc kề trong trường hợp này là hai góc kề bù, chúng bằng nhau nên số đo của mỗi góc là $180^\circ : 2 = 90^\circ$, do đó hai đường thẳng vuông góc.



Hình 83

Ví dụ 2. Cho góc $\widehat{MON}$ có số đo là 130° . Vẽ tia OA ở trong góc đó sao cho $\widehat{MOA} = 50^\circ$. Vẽ tia OB là tia đối của tia ON và tia OC là tia phân giác của góc $\widehat{AON}$. Chứng minh rằng :

- Tia OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$;

- $OM \perp OC$.

Giải. (h.84)

- Hai góc $\widehat{MON}$ và $\widehat{MOB}$ kề bù nên :

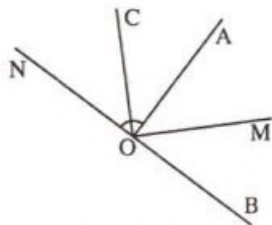
$$\widehat{MOB} = 180^\circ - \widehat{MON} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ.$$

$$\text{Suy ra : } \widehat{MOB} = \widehat{MOA} (= 50^\circ).$$

Mặt khác, tia OM nằm giữa hai tia OA và OB nên tia OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.

- Ta có tia OC là tia phân giác của góc $\widehat{AON}$ (gt).

Hai góc $\widehat{AON}$ và $\widehat{AOB}$ là hai góc kề bù nên hai tia phân giác của chúng vuông góc với nhau, do đó $OM \perp OC$.



Hình 84

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. Từ B vẽ tia Bx sao cho góc $\widehat{CBx}$ bằng và so le trong với góc $\widehat{ACB}$. Từ C vẽ tia Cy sao cho góc $\widehat{BCy}$ bằng và so le trong với góc $\widehat{ABC}$. Hãy kể tên các cặp đường thẳng vuông góc.

Giải. (h.85)

• Ta có, $\widehat{A} = 90^\circ$ nên $AB \perp AC$. (1)

• Ta có, $\widehat{CBx} = \widehat{ACB}$, nên $Bx \parallel AC$ (2)

(vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp Bx$. (3)

• Ta có, $\widehat{BCy} = \widehat{ABC}$ nên $AB \parallel Cy$. (4)

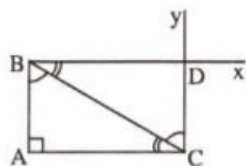
(vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Từ (3) và (4) suy ra $Cy \perp Bx$. (5)

• Ta có $AB \parallel Cy$ (chứng minh trên) mà $AB \perp AC$ nên $Cy \perp AC$.

Tóm lại, có bốn cặp đường thẳng vuông góc với nhau là :

$AC \perp AB$; $AB \perp Bx$; $Bx \perp Cy$; $Cy \perp AC$.



Hình 85

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Phương pháp giải

Dựa vào quan hệ bằng nhau hoặc bù nhau giữa các góc do hai đường thẳng tạo với một cát tuyến hoặc dùng một đường thẳng thứ ba làm trung gian.

Ví dụ 1. Trong hình 86 có $\widehat{MOP} = 130^\circ$;
 $\widehat{M} = 60^\circ$. Tính số đo của góc P để $MN \parallel PQ$.

Giải. (h.87)

Trong góc MOP vẽ tia Ox sao cho $Ox \parallel MN$.

Ta được : $\widehat{O_1} = \widehat{M} = 60^\circ$ (cặp góc so le trong).

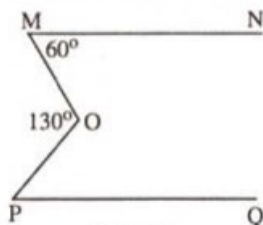
Suy ra : $\widehat{O_2} = 130^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

Muốn cho $PQ \parallel MN$ thì $PQ \parallel Ox$ (vì $Ox \parallel MN$).

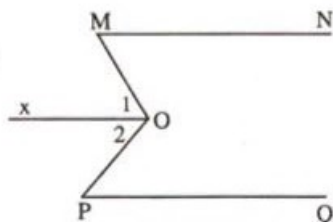
Muốn vậy, cặp góc so le trong phải bằng nhau,
 do đó ta phải có : $\widehat{P} = \widehat{O_2} = 70^\circ$.

Với $\widehat{P} = 70^\circ$ thì bạn dễ dàng chứng minh được

$PQ \parallel MN$.



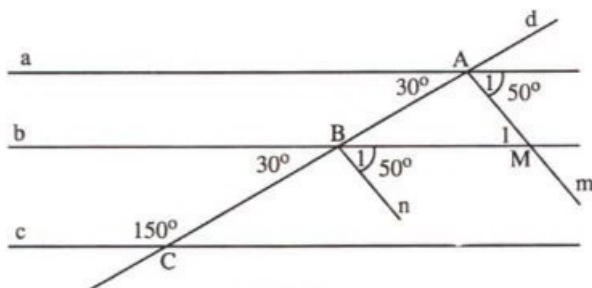
Hình 86



Hình 87

Ví dụ 2. Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song trong hình 88.

Giải. (h.88)



Hình 88

Ta có $a \parallel b$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

$b \parallel c$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

$a \parallel c$ (vì cùng song song với đường thẳng b).

Xét $a \parallel b$ có $\widehat{M}_1 = \widehat{A}_1 = 50^\circ$ (so le trong).

Suy ra : $\widehat{B}_1 = \widehat{M}_1 (= 50^\circ)$.

Do đó $Am \parallel Bn$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Tóm lại trong hình có bốn cặp đường thẳng song song là :

$a \parallel b$; $b \parallel c$; $c \parallel a$ và $Am \parallel Bn$.

Dạng 3. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Dùng tính chất về góc do hai đường thẳng song song tạo thành với một cát tuyến hoặc góc do hai đường thẳng vuông góc tạo thành là 90° .

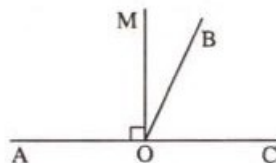
Ví dụ 1. Cho hình 89, biết : số đo của góc AOB lớn hơn số đo của góc BOC là 40° và $OM \perp AC$.

Tính số đo của góc MOB.

Giải. (h.89)

Ta có : $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ kề bù, nên :

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^\circ.$$



Hình 89

Mặt khác, $\widehat{AOB} - \widehat{BOC} = 40^\circ$ (gt), nên $\widehat{BOC} = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.

Vì $OM \perp AC$ nên $\widehat{MOC} = 90^\circ$.

Tia OB nằm giữa hai tia OC, OM nên :

$$\widehat{MOB} = \widehat{MOC} - \widehat{BOC} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ.$$

Ví dụ 2. Cho góc AOB có số đo bằng 130° . Vẽ ra ngoài góc đó các tia OM và ON sao cho $OM \perp OA$, $ON \perp OB$.

a) Tính số đo của góc MON.

b) Vẽ các tia Ox và Oy lần lượt là các tia phân giác của các góc MON và AOB. Chứng minh rằng Ox và Oy là hai tia đối nhau.

Giải. (h.90)

a) Ta có : $OM \perp OA$; $ON \perp OB$ nên :

$$\begin{aligned}\widehat{AOM} &= 90^\circ ; \widehat{BON} = 90^\circ. \text{ Do đó,} \\ \widehat{MON} &= 360^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{AOM} + \widehat{BON}) \\ &= 360^\circ - (130^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 50^\circ.\end{aligned}$$

b) Vì Ox là tia phân giác của góc MON ;
Oy là phân giác của góc AOB, nên :

$$\widehat{MOx} = 50^\circ : 2 = 25^\circ ; \widehat{AOy} = 130^\circ : 2 = 65^\circ.$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \widehat{xOy} &= \widehat{xOM} + \widehat{AOM} + \widehat{AOy} \\ &= 25^\circ + 90^\circ + 65^\circ = 180^\circ.\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{xOy}$ là góc bẹt, suy ra hai tia Ox, Oy đối nhau.

Ví dụ 3. Trong hình 91 có $\widehat{B_1} = 45^\circ$;
 $\widehat{D_1} = 55^\circ$ và $AB \parallel CD$. Tính số đo của góc xOy.

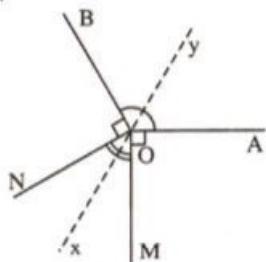
Giải. (h.92)

Trong góc xOy ta vẽ tia Ot // AB thì Ot // CD
(vì cùng song song với AB).

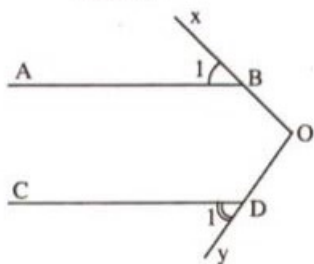
$$\begin{aligned}\text{Ta có : } \widehat{O_1} &= \widehat{B_1} = 45^\circ ; \widehat{O_2} = \widehat{D_1} = 55^\circ. \\ &\text{(các cặp góc đồng vị).}\end{aligned}$$

$$\text{Do đó, } \widehat{xOy} = \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 45^\circ + 55^\circ.$$

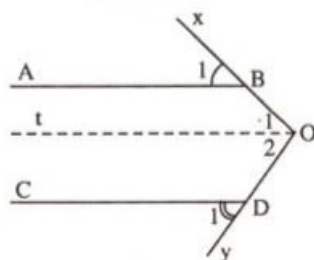
$$\text{Vậy } \widehat{xOy} = 100^\circ.$$



Hình 90



Hình 91

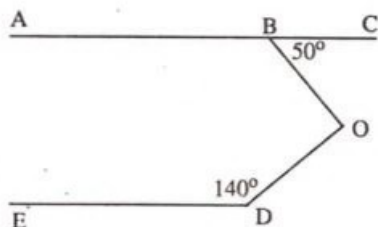


Hình 92

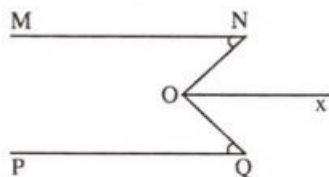
C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho hình 93, biết : $MN \parallel PQ \parallel Ox$ và $\widehat{N} = \widehat{Q}$. Chứng minh rằng tia Ox là tia phân giác của góc NOQ .
- Cho hình 94, biết : $AB \parallel DE$, $\widehat{OBC} = 50^\circ$; $\widehat{ODE} = 140^\circ$.

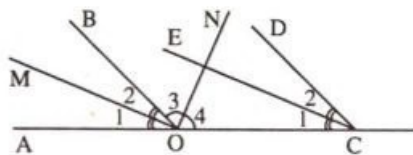
Chứng minh rằng $OB \perp OD$.



Hình 94



Hình 93



Hình 95

- Cho hình 95, biết : hai góc AOB và BOC kề bù, $CD \parallel OB$. Các tia OM , ON , CE lần lượt là các tia phân giác của các góc AOB , BOC và OCD . Chứng minh rằng :

a) $OM \parallel CE$;

b) $ON \perp CE$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

- Bạn chứng minh $\widehat{NOx} = \widehat{N}$; $\widehat{QOx} = \widehat{Q}$, từ đó suy ra $\widehat{NOx} = \widehat{QOx}$.
- Trong góc BOD vẽ tia $Ox \parallel AB$ rồi tính góc BOD .
- a) Ta có : $OB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{OCD} \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow OM \parallel CE$.
- b) Ta có : $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$, $\widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Rightarrow OM \perp ON$.

Mặt khác $OM \parallel CE$ nên $ON \perp CE$.

§1. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Tổng ba góc của một tam giác

Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

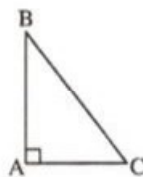
$$\Delta ABC \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

2. Áp dụng vào tam giác vuông

a) *Định nghĩa.* Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông (h.96).

b) *Tính chất.* Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

$$\begin{cases} \Delta ABC \\ \widehat{A} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ.$$



Hình 96

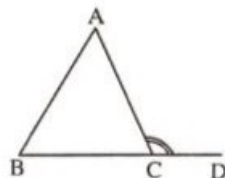
3. Góc ngoài của tam giác

a) *Định nghĩa.* Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác.

b) *Tính chất*

* Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

$$\widehat{ACD} = \widehat{A} + \widehat{B} \text{ (h.97).}$$



Hình 97

* Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất :

- Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .
- Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.
- Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^\circ$; $\widehat{C} = 40^\circ$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Tính $\widehat{ADC}$; $\widehat{ADB}$.

Giải. (h.98)

Tam giác ABC ta có : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

nên $\widehat{A} + 70^\circ + 40^\circ = 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{A} = 70^\circ$.

AD là đường phân giác nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{\widehat{A}}{2} = 35^\circ$.

Tam giác ABD có $\widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{A_1} = 70^\circ + 35^\circ = 105^\circ$ (góc ngoài của tam giác).

Suy ra $\widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} - \widehat{B} = 20^\circ$; $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{A}$.

Giải

Ta có : $\widehat{A} - \widehat{B} = 20^\circ$ hay $\widehat{A} = \widehat{B} + 20^\circ$; $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$ hay $\widehat{C} = \widehat{B} - 20^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{B} + 20^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} - 20^\circ = 180^\circ$.

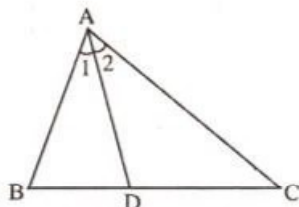
Suy ra : $\widehat{B} = 60^\circ$. Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} + 20^\circ = 80^\circ$.

Ví dụ 3. Tính số đo các góc của tam giác ABC, biết : $20.\widehat{A} = 15.\widehat{B} = 12.\widehat{C}$.

Giải

Từ $20.\widehat{A} = 15.\widehat{B} = 12.\widehat{C}$, ta có : $\frac{20.\widehat{A}}{60} = \frac{15.\widehat{B}}{60} = \frac{12.\widehat{C}}{60}$.

Hay $\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{C}}{5}$.



Hình 98

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{C}}{5} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{3+4+5} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ.$$

Suy ra $\widehat{A} = 3.15^\circ = 45^\circ$; $\widehat{B} = 4.15^\circ = 60^\circ$; $\widehat{C} = 5.15^\circ = 75^\circ$.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Kẻ $AH \perp BC$, tia phân giác của $\widehat{AHC}$ cắt AC tại D. Biết $\widehat{ABC} = 65^\circ$. Tính số đo $\widehat{ADH}$.

Giải. (h.99)

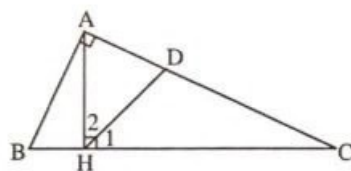
$\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$;

tức là $65^\circ + \widehat{C} = 90^\circ$ hay $\widehat{C} = 25^\circ$.

Mặt khác, HD là tia phân giác của góc AHC,

nên $\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{H} = 45^\circ$.

$\triangle HCD$ có $\widehat{ADH} = \widehat{H_1} + \widehat{C} = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ$.



Hình 99

Ví dụ 5. Cho hình 100, biết : $\widehat{C} = 70^\circ$;

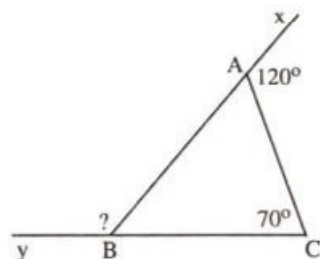
$\widehat{CAx} = 120^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{ABx}$.

Giải. (h.100)

$\triangle ABC$ có $\widehat{CAx} = \widehat{C} + \widehat{ABC}$

hay $70^\circ + \widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 50^\circ$.

Ta có : $\widehat{ABx} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ nên $\widehat{ABx} = 130^\circ$.



Hình 100

Dạng 2. TÌM MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GÓC

Phương pháp giải

- Ghép các góc cần xét vào các tam giác, sau đó tìm mối liên quan giữa các góc.
- So sánh các góc hoặc tìm sự liên hệ giữa chúng.

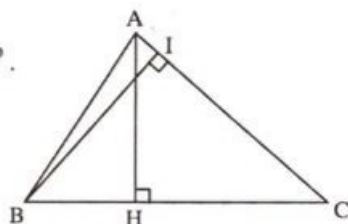
Ví dụ 1. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ $AH \perp BC$; $BI \perp AC$. Chứng minh $\widehat{IBC} = \widehat{HAC}$.

Giải. (h.101)

Tam giác HAC có $\widehat{H} = 90^\circ$ nên $\widehat{HAC} + \widehat{C} = 90^\circ$.

Tam giác IBC có $\widehat{I} = 90^\circ$ nên $\widehat{IBC} + \widehat{C} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{IBC} = \widehat{HAC}$.



Hình 101

Ví dụ 2. Góc nhọn tạo bởi các tia phân giác của các góc $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ của tam giác ABC có số đo bằng 45° . Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

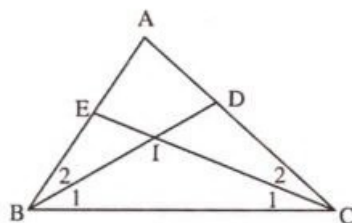
Giải. (h.102)

Gọi BD; CE là các đường phân giác của $\widehat{B}$; $\widehat{C}$, chúng cắt nhau tại I ta có: $\widehat{DIC} = 45^\circ$.

Tam giác BIC có $\widehat{DIC} = \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1$ (tính chất góc ngoài) nên $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 45^\circ$.

Mà $\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2}$; $\widehat{C}_1 = \frac{\widehat{C}}{2}$ nên $\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 45^\circ$.

Do đó $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$. Vậy tam giác ABC vuông tại A.



Hình 102

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ $AH \perp BC$. Các tia phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{BAH}$ cắt nhau tại K. Chứng minh $AK \perp CK$.

Giải. (h.103)

Xét tam giác ABH và tam giác ABC vuông tại H và A, ta có:

$$\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{B}; \quad \widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{B},$$

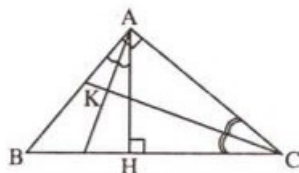
nên $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$.

$$\text{Ta có: } \widehat{BAK} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BAH}; \quad \widehat{HCK} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{ACB}$$

nên $\widehat{BAK} = \widehat{HCK}$.

Xét tam giác AKC, ta có: $\widehat{KAC} + \widehat{ACK} = \widehat{KAC} + \widehat{BAK} = 90^\circ$.

Do đó tam giác AKC vuông tại K hay $AK \perp CK$.



Hình 103

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác. Chứng minh rằng $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C}$.

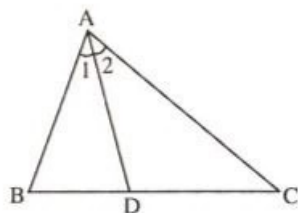
Giải. (h.104)

Tam giác ABD có : $\widehat{B} + \widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{A}_1$.

Tam giác ADC có : $\widehat{C} + \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{A}_2$.

Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ nên $\widehat{B} + \widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{ADC}$.

Suy ra $\widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{ADC} - \widehat{ADB}$.



Hình 104

Dạng 3. SỬ DỤNG GÓC NGOÀI CỦA TAM GIÁC ĐỂ SO SÁNH GÓC

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất : Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

Ví dụ. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là điểm nằm bên trong của tam giác đó. Chứng tỏ $\widehat{BMC}$ là góc tù.

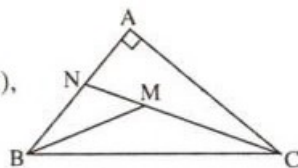
Giải. (h.105)

Kẻ CM cắt AB tại N.

Ta có : $\widehat{BMC} > \widehat{BNC}$ (góc ngoài của tam giác BNM),

$\widehat{BNC} > \widehat{BAC}$ (góc ngoài của tam giác ANC).

Do đó : $\widehat{BMC} > \widehat{BAC}$, suy ra $\widehat{BMC} > 90^\circ$.



Hình 105

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho tam giác ABC biết $\widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$. Tính số đo các góc $\widehat{A}$; $\widehat{B}$; $\widehat{C}$.
2. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 70^\circ$; $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$. Tính số đo các góc $\widehat{B}$; $\widehat{C}$.
3. Cho ΔABC có $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D. Tính số đo $\widehat{ADB}$.

4. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác đó. Chứng minh :

$$\widehat{BMC} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM} + \widehat{BAC}.$$

5. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BC tại D. Kẻ $AH \perp BC$. Tính $\widehat{HAD}$.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Từ $\widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$, ta có : $\widehat{A} = \widehat{B} + 10^\circ$; $\widehat{C} = \widehat{B} - 10^\circ$ mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{B} + 10^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} - 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3.\widehat{B} = 180^\circ$ hay $\widehat{B} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{A} = 70^\circ$; $\widehat{C} = 50^\circ$.

2. $\widehat{B} = 65^\circ$; $\widehat{C} = 45^\circ$.

3. $\widehat{ADB} = 80^\circ$.

4. (h.106) Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác, ta có : $\widehat{M_1} = \widehat{A_1} + \widehat{ABM}$; $\widehat{M_2} = \widehat{A_2} + \widehat{ACM}$.

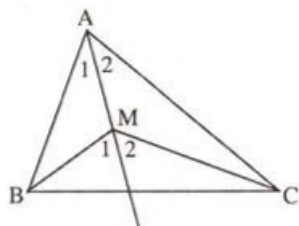
Nên $\widehat{BMC} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{BAC} + \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$.

5. (h.107) Theo Ví dụ 4, ta có : $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \widehat{B} - \widehat{C}$.

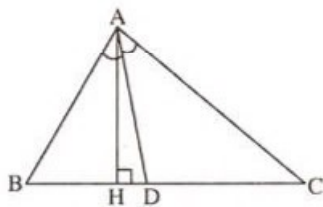
Do đó $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = 20^\circ$.

Suy ra $\widehat{ADB} = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{ADH}$, suy ra $\widehat{HAD} = 10^\circ$.



Hình 106



Hình 107

§2. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU.

§3. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC : CẠNH - CẠNH - CẠNH (C.C.C)

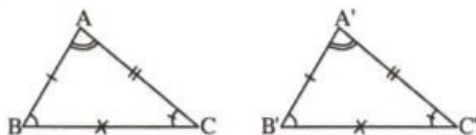
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định nghĩa hai tam giác bằng nhau

Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (h.108)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$$

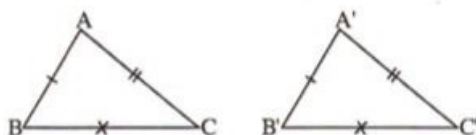


Hình 108

2. Trường hợp bằng nhau thứ nhất của tam giác : cạnh-cạnh-cạnh (c.c.c)

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array} \right\}$$



$$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (c.c.c) (h.109).}$$

Hình 109

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. XÁC ĐỊNH CÁC CẠNH BẰNG NHAU, CÁC GÓC BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Căn cứ vào cách viết các đỉnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau theo đúng thứ tự, ta viết được các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho $\Delta ABC = \Delta DEF = \Delta MNP$ và $AC = 5\text{cm}$, $DE = 6\text{cm}$, $NP = 7\text{cm}$. Xác định độ dài các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

Giải

$\Delta ABC = \Delta DEF = \Delta MNP$, suy ra :

$$AB = DE = MN = 6\text{cm} ;$$

$$BC = EF = NP = 7\text{cm} ;$$

$$AC = DF = MP = 5\text{cm}.$$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC = \triangle HIK = \triangle MNP$ có $\widehat{A} = 70^\circ$; $\widehat{I} = 50^\circ$. Xác định các góc còn lại của mỗi tam giác.

Giải

$\triangle ABC = \triangle HIK = \triangle MNP$, suy ra :

$$\widehat{A} = \widehat{H} = \widehat{M} = 70^\circ,$$

$$\widehat{B} = \widehat{I} = \widehat{N} = 50^\circ.$$

Tam giác ABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $70^\circ + 50^\circ + \widehat{C} = 180^\circ$, do đó $\widehat{C} = 60^\circ$.

$\triangle ABC = \triangle HIK = \triangle MNP$, suy ra :

$$\widehat{C} = \widehat{K} = \widehat{P} = 60^\circ.$$

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC = \triangle DEF$. Biết $AB + DE = 10\text{cm}$, $EF = 6\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$.
Tính chu vi $\triangle ABC$.

Giải

$\triangle ABC = \triangle DEF$ nên $AB = DE$; $BC = EF = 6\text{cm}$; $AC = DF = 7\text{cm}$.

Mà $AB + DE = 10\text{cm}$ do đó $AB = 5\text{cm}$.

Vậy chu vi $\triangle ABC$ là : $AB + BC + CA = 5 + 6 + 7 = 18 \text{ (cm)}$.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC = \triangle DEF$; biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$; $\widehat{E} + \widehat{F} = 120^\circ$.

Tính số đo các góc của hai tam giác.

Giải

$\triangle ABC = \triangle DEF$ nên $\widehat{B} = \widehat{E}$; $\widehat{C} = \widehat{F}$, do đó $\widehat{E} - \widehat{F} = \widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{E} + \widehat{F} = 120^\circ$ suy ra : $\widehat{E} = (120^\circ + 10^\circ) : 2 = 65^\circ$;

$$\widehat{F} = (120^\circ - 10^\circ) : 2 = 55^\circ.$$

Vậy $\widehat{D} = 180^\circ - (65^\circ + 55^\circ) = 60^\circ$.

Tam giác ABC có số đo các góc là : $\widehat{B} = 65^\circ$; $\widehat{C} = 55^\circ$; $\widehat{A} = 60^\circ$.

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

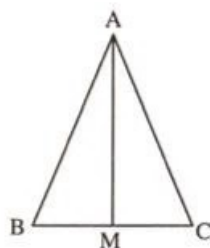
Phương pháp giải

- Xét hai tam giác ;
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau : cạnh - cạnh - cạnh ;
- Kết luận hai tam giác đó bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACM$.

Giải. (h.110)

Xét tam giác ABM và tam giác ACM có :
 $AB = AC$, $BM = CM$, AM là cạnh chung,
 suy ra $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c).



Hình 110

Ví dụ 2. Tìm các cặp tam giác bằng nhau trong hình vẽ 111.

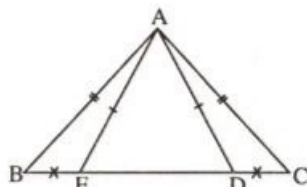
Giải

Dựa vào các cặp cạnh bằng nhau, cạnh chung, ta có :

$$\triangle AEB = \triangle ADC \text{ (c.c.c) ;}$$

$$\triangle ABD = \triangle ACE \text{ (c.c.c) .}$$

Nhận xét. Khi chứng minh hai tam giác bằng nhau, bạn nên nhớ yếu tố cạnh chung.



Hình 111

Dạng 3. SỬ DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Chọn hai tam giác có hai góc cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp c.c.c.
- Suy ra hai góc tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho hình vẽ 112, biết : $AB = CD$; $AD = BC$. Chứng minh $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$.

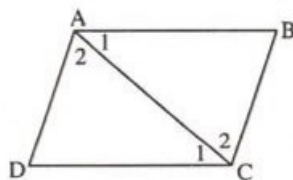
Giải

Xét tam giác ABC và tam giác CDA, ta có :
 $AB = CD$; $BC = DA$; AC là cạnh chung,
 suy ra $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c.c.c).

$$\text{Do vậy } \widehat{A_1} = \widehat{C_1} ; \widehat{C_2} = \widehat{A_2} .$$

$\widehat{A_1}$; $\widehat{C_1}$ là cặp góc so le trong bằng nhau nên $AB \parallel CD$.

$\widehat{C_2}$; $\widehat{A_2}$ là cặp góc so le trong bằng nhau nên $AD \parallel CB$.



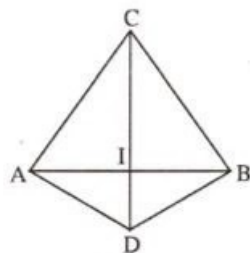
Hình 112

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng AB, hai điểm C và D cách đều hai điểm A, B (C và D khác phía đối với AB). CD cắt AB tại I. Chứng minh CD là tia phân giác của góc ACB.

Giải. (h.113)

Xét $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ có $AC = BC$, $AD = BD$,
CD là cạnh chung $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD$ (c.c.c).

Vậy $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ hay CD là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.



Hình 113

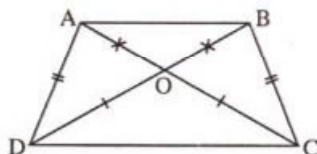
C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết $\widehat{A} = 42^\circ$; $\widehat{P} = 54^\circ$. Tính số đo góc N.
- Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$, biết $AC = 6\text{cm}$; $AB + BC = 8\text{cm}$; $MN - NP = 2\text{cm}$. Tính số đo các cạnh của $\triangle MNP$.
- Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết $AB = 4\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, $NP = 7\text{cm}$. Tính chu vi của tam giác MNP.

- Cho hình 114.

a) Tìm các cặp tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - cạnh - cạnh.

b) Chứng minh : $AB \parallel CD$.



Hình 114

- Cho góc xOy. Trên Ox lấy điểm A, trên Oy lấy B sao cho $OA = OB$. Lấy hai điểm M, N đều thuộc miền trong của góc xOy, sao cho $MA = MB$, $NA = NB$. Chứng minh rằng :

a) OM là tia phân giác của góc xOy ;

b) Ba điểm O, M, N thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

- Đáp số :** $\widehat{N} = 84^\circ$.
- Ta có : $AB + BC = MN + NP = 8\text{cm}$ và $MN - NP = 2\text{cm}$.
Suy ra : $MN = (8 + 2) : 2 = 5\text{cm}$,
 $NP = (8 - 2) : 2 = 3\text{cm}$,
 $PM = CA = 6\text{cm}$.
- Đáp số :** Chu vi của $\triangle MNP$ là 17cm .

4. a) Dựa vào các cặp cạnh bằng nhau, cạnh chung, ta có :
 $\triangle AOD = \triangle BOC$; $\triangle ABD = \triangle BAC$; $\triangle ACD = \triangle BDC$.

b) Ta có : $\triangle ACD = \triangle BDC$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$; (1)

$\triangle ABD = \triangle BAC$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{BAC}$. (2)

Mặt khác, $\triangle ABO$ có $\widehat{ABD} + \widehat{BAC} + \widehat{AOB} = 180^\circ$;

$\triangle COD$ có $\widehat{ACD} + \widehat{BDC} + \widehat{COD} = 180^\circ$.

Ta lại có $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (đối đỉnh).

Do đó $\widehat{ABD} + \widehat{BAC} = \widehat{ACD} + \widehat{BDC}$.

Kết hợp với (1), (2), ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ mà hai góc ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CD$.

Nhận xét :

Bài này để soát hai tam giác bằng nhau.

Cạnh chung của hai tam giác chính là một yếu tố cạnh bằng nhau.

Chú ý kí hiệu bằng nhau của hai tam giác.

5. (h.115) a) Ta có : $\triangle OMA = \triangle OMB$ (c.c.c).

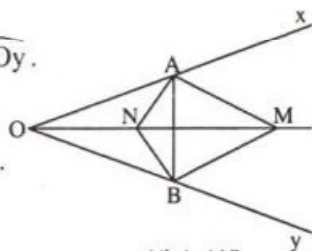
Suy ra $\widehat{MOA} = \widehat{MOB} \Rightarrow OM$ là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

- b) Tương tự câu a), ta có : $\triangle ONA = \triangle ONB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{BON}$ hay ON là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Do đó M, N cùng thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Vậy ba điểm O, M, N thẳng hàng.



Hình 115

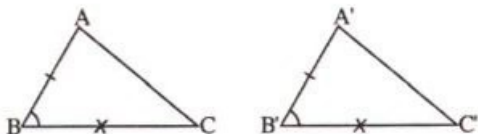
§4. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC : CẠNH - GÓC - CẠNH (C.G.C)

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Trường hợp bằng nhau thứ hai của tam giác : cạnh - góc - cạnh (c.g.c)

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{array} \right\}$$



$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (c.g.c) (h.116).}$

Hình 116

2. *Hệ quả.* Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Xét hai tam giác ;
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau : cạnh - góc - cạnh ;
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên cạnh Ox lấy hai điểm A và B, trên cạnh Oy lấy hai điểm C và D, sao cho $OA = OC$; $OB = OD$.

a) Chứng minh $\Delta OAD = \Delta OCB$.

b) Chứng minh $\Delta ACD = \Delta CAB$.

Giải. (h.117)

a) Xét tam giác OAD và tam giác OCB, ta

có : $OA = OC$, $\widehat{AOC}$ chung, $OD = OB$.

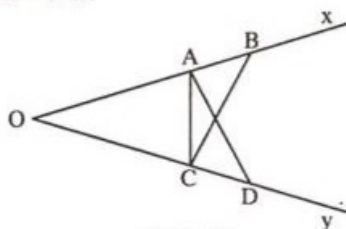
Suy ra $\Delta OAD = \Delta OCB$ (c.g.c).

b) Ta có : $OA = OC$; $OB = OD$ nên $AB = CD$.

$\Delta OAD = \Delta OCB$ suy ra $AD = CB$; $\widehat{D} = \widehat{B}$.

Xét tam giác ACD và tam giác CAB có $AB = CD$; $\widehat{D} = \widehat{B}$; $AD = CB$ nên

$\Delta ACD = \Delta CAB$ (c.g.c).



Hình 117

Dạng 2. SỬ DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU, HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải

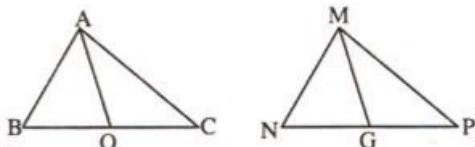
- Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp (c.g.c).
- Suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Gọi O và G lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và NP. Chứng minh $AO = MG$.

Giải. (h.118)

$\triangle ABC = \triangle MNP$ thì $AB = MN$,
 $\widehat{B} = \widehat{N}$, $BC = NP$,...

O là trung điểm BC nên $BO = \frac{1}{2}BC$;



Hình 118

G là trung điểm NP nên $NG = \frac{1}{2}NP$. Từ đó suy ra $BO = NG$.

Xét tam giác ABO và MNG, ta có :

$AB = MN$, $\widehat{B} = \widehat{N}$, $BO = NG$ nên $\triangle ABO = \triangle MNG$ (c.g.c), suy ra $AO = MG$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC. Trên tia đối của tia NB lấy điểm D sao cho $ND = NB$. Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MC$. Chứng minh :

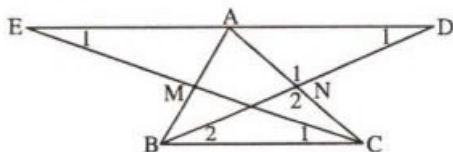
- $AD = BC$.
- $AE \parallel BC$.
- A là trung điểm của DE.

Giải. (h.119)

a) Xét $\triangle AND$ và $\triangle CNB$, ta có :

$AN = NC$; $\widehat{N}_2 = \widehat{N}_1$ (đối đỉnh) ; $ND = NB$ nên $\triangle AND = \triangle CNB$ (c.g.c).

Do đó $AD = BC$.



Hình 119

b) Tương tự ta có $\triangle AME = \triangle BMC$ (c.g.c), nên $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ mà $\widehat{E_1}$ và $\widehat{C_1}$ ở vị trí so le trong, do đó $AE \parallel BC$.

c) $\triangle AND = \triangle CNB$ nên $\widehat{D_1} = \widehat{B_2}$ mà $\widehat{D_1}$ và $\widehat{B_2}$ ở vị trí so le trong, do đó $AD \parallel BC$ mà $AE \parallel BC$, suy ra D, A, E thẳng hàng. (*)

$\triangle AEM = \triangle BCM$ nên $AE = BC$ mà $AD = BC$.

Do đó $AE = AD$, kết hợp với (*) suy ra A là trung điểm của ED.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Trên tia đối của tia BD lấy điểm N sao cho $BN = AC$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm P sao cho $CP = AB$.

a) Chứng minh $AN = AP$.

b) Tìm điều kiện của góc ACB để $AN \perp AP$.

Giải. (h.120)

Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$$

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_3} = 180^\circ$;

$$\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ.$$

Từ đó suy ra $\widehat{B_3} = \widehat{C_2}$.

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle PCA$ có $AB = CP$; $\widehat{B_3} = \widehat{C_2}$; $BN = CA$

$$\Rightarrow \triangle ABN = \triangle PCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AN = AP.$$

b) $\triangle ABN = \triangle PCA \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N}$.

$$\text{Vậy } \widehat{NAP} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{N} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^\circ$$

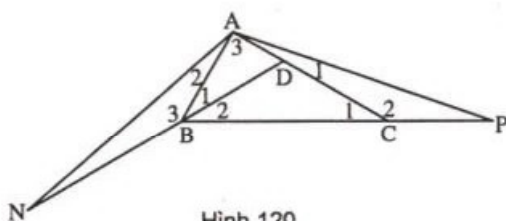
$$\Leftrightarrow \widehat{B_1} + \widehat{A_3} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{C_1} = 45^\circ.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BN và CM. Chứng minh:

a) $\triangle AMC = \triangle ABN$.

b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$

c) $AI = AK$ và $AI \perp AK$.



Hình 120

Giải. (h.121)

a) Ta có : $\widehat{MAC} = \widehat{BAN} (= 90^\circ + \widehat{BAC})$

nên $\triangle MAC = \triangle BAN$ (c.g.c).

b) $\triangle MAC = \triangle BAN$ suy ra $BN = MC$

và $\widehat{AMC} = \widehat{ABN}$.

Gọi P là giao điểm AB và CM.

Ta có : $\widehat{AMC} + \widehat{APM} = 90^\circ$ (vì $\triangle AMP$ vuông)

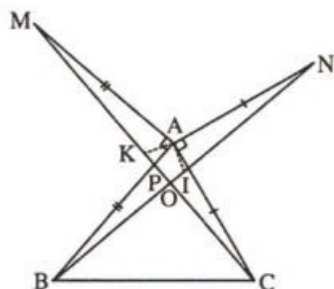
$\Rightarrow \widehat{ABN} + \widehat{BPO} = 90^\circ \Rightarrow BN \perp CM$.

c) $CM = BN \Rightarrow MK = BI$, mà $\widehat{AMK} = \widehat{ABN}$, $AM = AB$

nên $\triangle AMK = \triangle ABI$ (c.g.c) $\Rightarrow AK = AI$

$\Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{BAI}$; mà $\widehat{MAK} + \widehat{KAB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAI} + \widehat{KAB} = 90^\circ$ hay $AI \perp AK$.



Hình 121

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB. Chứng minh rằng : $BM = CN$.
- Cho tam giác nhọn ABC có M là trung điểm của BC. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $HE = HA$. Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MF = MA$. Chứng minh rằng :
a) $BE = CF$; b) $ME = MF$.
- Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Trên BC lấy M sao cho $BM = BA$. Chứng minh : $DM \perp BC$.
- Qua trung điểm M của đoạn AB kẻ đường thẳng xx' vuông góc với AB. Trên tia Mx lấy C và D sao cho $MC < MD$. Trên tia Mx' lấy E. Chứng minh :
a) $AC = BC$; b) $\triangle ACD = \triangle BCD$; c) $\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$.
- Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ $AH \perp BC$. Kẻ HP vuông góc với AB và kéo dài để có $PE = PH$. Kẻ HQ vuông góc với AC và kéo dài để có $QF = QH$. Chứng minh rằng :
a) $\triangle APE = \triangle APH$, $\triangle AQH = \triangle AQP$;
b) Ba điểm E, A, F thẳng hàng và A là trung điểm của EF;
c) $BE \parallel CF$.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

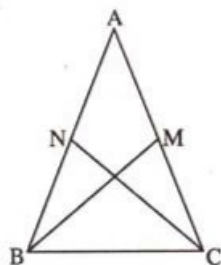
1. (h.122) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có

$AB = AC$; $\widehat{A}$ chung;

$$AM = AN \left(= \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB \right) \text{ nên}$$

$\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c)

Suy ra $BM = CN$.



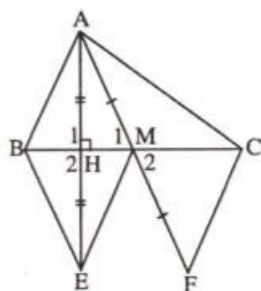
Hình 122

2. (h.123) a) $\triangle AHB = \triangle EHB$ (c.g.c)
do đó $AB = EB$. (1)

$\triangle AMB = \triangle FMC$ (c.g.c), do đó
 $AB = FC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$.

b) $\triangle AMH = \triangle EMH$ (c.g.c), do đó
 $AM = ME$ mà $AM = MF$ suy ra
 $ME = MF$.



Hình 123

3. (h.124) $\triangle ABD = \triangle MBD$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BMD} = \widehat{BAC}$ hay

$$\widehat{BMD} = 90^\circ \Rightarrow DM \perp BC.$$

Nhận xét: Để chứng minh một góc vuông, ta có thể chứng minh góc đó bằng góc vuông sẵn có, bằng cách chứng minh hai tam giác bằng nhau.

4. (h.125) a) $\triangle MAC = \triangle MBC$ (c.g.c),
suy ra $AC = BC$.

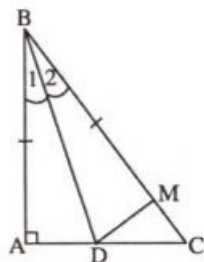
b) Tương tự câu a), ta có $\triangle MAD = \triangle MBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = BD$.

Xét $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ có $AD = BD$;
 $AC = BC$; CD là cạnh chung
 $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD$ (c.c.c).

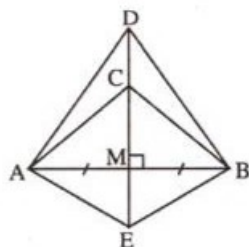
c) Xét $\triangle ADE$ và $\triangle BDE$ có $AD = BD$;
 $\widehat{ADE} = \widehat{BDE}$ (vì $\triangle ADC = \triangle BDC$);
 DE chung.

Từ đó suy ra $\triangle ADE = \triangle BDE$ (c.g.c).

Vậy $\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$.



Hình 124



Hình 125

5. (h.126) a) $\triangle APE = \triangle APH$ (c.g.c).

Tương tự ta có : $\triangle AQH = \triangle AQF$ (c.g.c)

b) Ta có : $\triangle APE = \triangle APH$ (cmt),

suy ra $AE = AH$; $\widehat{EAP} = \widehat{PAH}$.

Mặt khác, $\triangle AQH = \triangle AQF$ (cmt),

suy ra $AF = AH$; $\widehat{FAQ} = \widehat{HAQ}$.

Ta lại có : $\widehat{EAH} + \widehat{HAF}$

$$= 2.\widehat{PAH} + 2.\widehat{HAQ} = 2.\widehat{BAC} = 180^\circ.$$

Suy ra ba điểm E, A, F thẳng hàng.

Mặt khác, $AE = AF (= AH)$ do đó A

là trung điểm của EF.

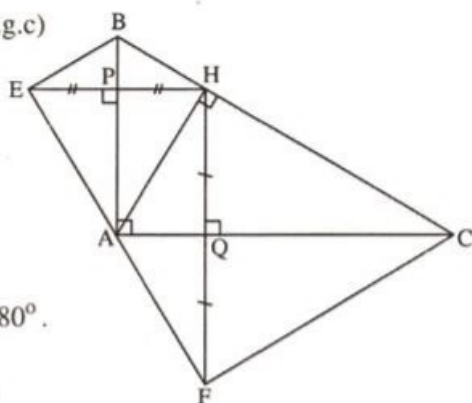
c) Xét $\triangle ABE = \triangle ABH$ có $AE = AH$;

$\widehat{EAB} = \widehat{BAH}$; AB là cạnh chung.

Từ đó suy ra $\triangle AEB = \triangle AHB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AHB} \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^\circ$.

Tương tự, ta có $\triangle AHC = \triangle AFC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AFC} = 90^\circ$.

Do đó $BE \parallel CF$.



Hình 126

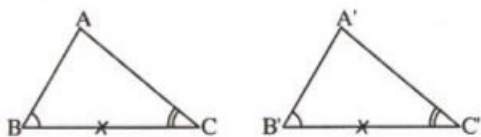
§5. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC : GÓC - CẠNH - GÓC (G.C.G)

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác : góc - cạnh - góc (g.c.g)

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{array} \right\}$$



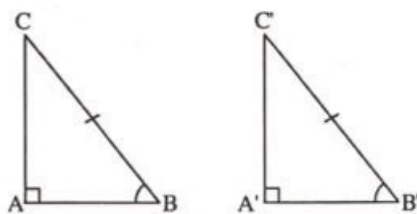
$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (g.c.g) (h.127).

Hình 127

2. Trường hợp bằng nhau cạnh huyền - góc nhọn của tam giác vuông

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array} \right\}$$



Hình 128

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (cạnh huyền - góc nhọn) (h.128).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

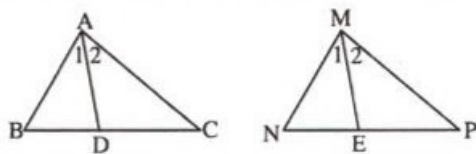
Dạng 1. CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Xét hai tam giác ;
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau : góc - cạnh - góc ;
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$.

Gọi AD là đường phân giác góc A của tam giác ABC. Gọi ME là đường phân giác góc M của tam giác MNP. Chứng minh $\triangle ABD = \triangle MNE$.



Hình 129

Giải. (h.129)

$\triangle ABC = \triangle MNP$ suy ra $\widehat{B} = \widehat{N}$; $\widehat{A} = \widehat{M}$; $AB = MN$.

Mặt khác, AD là đường phân giác của $\widehat{A}$ nên $\widehat{A_1} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{A}$;

ME là đường phân giác của $\widehat{M}$ nên $\widehat{M_1} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{M}$.

Do đó $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$.

Xét tam giác ABD và tam giác MNE có $\widehat{B} = \widehat{N}$, $AB = MN$, $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$.

Suy ra $\triangle ABD = \triangle MNE$ (g.c.g).

Ví dụ 2. Cho góc nhọn xOy có tia Oz là tia phân giác. Qua điểm A thuộc tia Ox , vẽ đường thẳng song song với Oy cắt Oz tại M . Qua M kẻ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại B .

a) Chứng minh $\triangle OAM = \triangle MBO$.

b) Từ M vẽ $MH \perp Ox$; $MK \perp Oy$. Chứng minh $MH = MK$.

Giải. (h.130)

a) Xét $\triangle OAM$ và $\triangle MBO$, ta có :

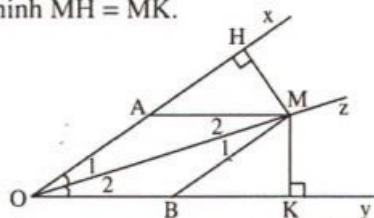
$\widehat{O_1} = \widehat{M_1}$; OM chung ; $\widehat{M_2} = \widehat{O_2}$

$\Rightarrow \triangle OAM = \triangle MBO$ (g.c.g).

b) Xét $\triangle OMH$ và $\triangle OMK$, ta có :

$\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$; $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$; OM chung

$\Rightarrow \triangle OMH = \triangle OMK$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow MH = MK$.



Hình 130

Dạng 2. SỬ DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU, HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp g.c.g. Suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có : $AB = AC$ và M là trung điểm của BC .

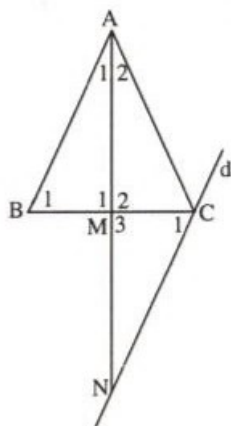
a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Chứng minh $AM \perp BC$.

c) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB cắt tia AM tại N . Chứng minh M là trung điểm của AN .

Giải. (h.131)

a) Xét tam giác ABM và tam giác ACM , ta có : $AB = AC$, $BM = MC$, AM là cạnh chung, suy ra $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ hay AM là tia phân giác của góc BAC .



Hình 131

b) Ta có $\triangle ABM = \triangle ACM$ nên $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, mà $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ$, do đó $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ$. Hay $AM \perp BC$.

c) Ta có $CN \parallel AB$ suy ra $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$.

Xét hai tam giác ABM và tam giác NCM , ta có $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$; $MB = MC$; $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ suy ra $\triangle ABM = \triangle NCM$ (g.c.g) do đó $AM = MN$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $BC = 5\text{cm}$. Trên tia AB lấy hai điểm K và D sao cho $AK = BD$.

Vẽ: $KI \parallel BC$; $DE \parallel BC$ ($I; E \in AC$).

a) Chứng minh $AI = CE$;

b) Tính độ dài $DE + KI$.

Giải. (h.132)

a) Kẻ $EM \parallel AB$ ($M \in BC$).

Tam giác DEM và tam giác MBD có $\widehat{D}_1 = \widehat{M}_1$; DM chung; $\widehat{D}_2 = \widehat{M}_2$ nên $\triangle DEM = \triangle MBD$ (g.c.g), suy ra $BD = ME$; $DE = BM$.

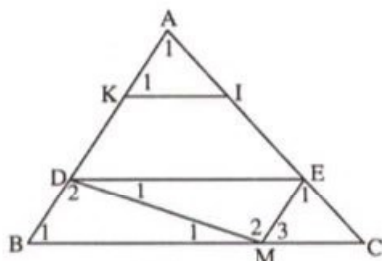
Ta có $AB \parallel EM$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$; $\widehat{B}_1 = \widehat{M}_3$;

$KI \parallel BC$ nên $\widehat{K}_1 = \widehat{B}_1$.

Tam giác AKI và tam giác EMC có $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$; $AK = EM (= BD)$; $\widehat{M}_3 = \widehat{K}_1 (= \widehat{B}_1)$ nên $\triangle AKI = \triangle EMC$ (g.c.g).

Suy ra $AI = EC$ và $KI = MC$.

b) Ta có $KI = MC$; $DE = BM$ suy ra $KI + DE = MC + BM = BC = 5\text{cm}$.



Hình 132

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) có M là trung điểm của BC . Vẽ BI và CK vuông góc với đường thẳng AM . Chứng minh rằng:

a) $BI = CK$;

b) $CI \parallel BK$.

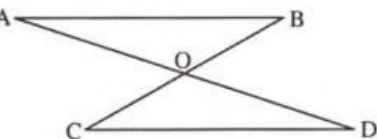
2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Tia phân giác của góc B và góc C cắt cạnh AC , AB lần lượt tại D , E và cắt nhau tại O . Chứng minh rằng $BE + CD = BC$.

3. Cho hình 133, trong đó $AB \parallel CD$, $AB = CD$.

Chứng minh rằng : $OA = OD$; $OB = OC$.

4. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = AC$. Lấy M thuộc BC ($BM > MC$). Kẻ BD và CE vuông góc với đường thẳng AM. Chứng minh rằng :

a) $\Delta ABD = \Delta CAE$; b) $BD - CE = DE$.



Hình 133

5. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Lấy I bất kì trên AD. Tia IO cắt BC tại K. Chứng minh $DI = CK$; $OI = OK$.
6. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AB. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại N, qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại E.

Chứng minh rằng : $AM = NE$; $AN = NC$.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. (h.134)

a) $\Delta BMI = \Delta CMK$ (cạnh huyền - góc nhọn).

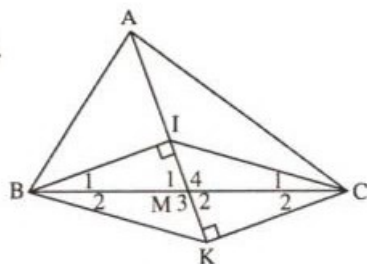
Suy ra $BI = CK$.

b) Xét ΔBMK và ΔCMI có : $MB = MC$,

$\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4$, $MI = MK$ (do $\Delta BMI = \Delta CMK$)

nên $\Delta BMK = \Delta CMI$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_2$ hay $CI \parallel BK$.



Hình 134

2. (h.135)

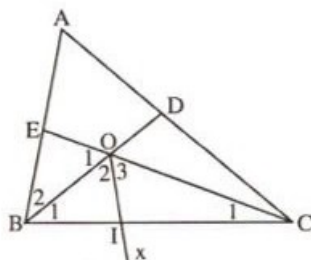
ΔABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Mà $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$.

Ta lại có $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = \frac{1}{2} \cdot \widehat{B} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{C} = 60^\circ$.

ΔBOC có $\widehat{BOC} + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ$

nên $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{O}_1 = 60^\circ$.



Hình 135

Kẻ Ox là tia phân giác của góc BOC, Ox cắt BC tại I.

$\Delta BEO = \Delta BIO$ (g.c.g). Suy ra $BE = BI$.

Chứng minh tương tự, ta có $\Delta COD = \Delta COI$ nên $CD = CI$.

Vậy $BE + CD = BC$.

3. $\Delta OAB = \Delta ODC$ (g.c.g) suy ra $OA = OD$; $OB = OC$.

4. (h.136)

a) Xét ΔABD và ΔCAE có $\widehat{BDA} = \widehat{AEC} = 90^\circ$,

$AB = AC$ (giả thiết), $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$)

do đó $\Delta ABD = \Delta CAE$ (cạnh huyền - góc nhọn).

b) $\Delta ABD = \Delta CAE$ nên $BD = AE$; $AD = CE$,

do đó $BD - CE = AE - AD$.

Vậy $BD - CE = DE$.

Nhận xét : Để chứng minh một đoạn bằng tổng hay một hiệu hai đoạn thẳng, ta thường biến đổi đoạn thẳng đó thành hai đoạn cùng nằm trên một đường thẳng và sử dụng phép toán cộng, trừ đoạn thẳng.

5. (h.137) $\Delta AOD = \Delta BOC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1}$.

Từ đó, suy ra $\Delta ODI = \Delta OCK$ (g.c.g)

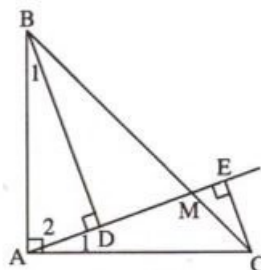
$\Rightarrow DI = CK$; $OI = OK$.

6. (h.138) $\Delta MEB = \Delta EMN$ (g.c.g)

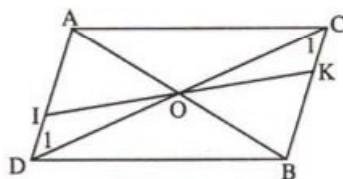
$\Rightarrow MB = NE \Rightarrow AM = NE$.

Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{E_1}$ ($= \widehat{B_1}$) ; $AM = NE$; $\widehat{A_1} = \widehat{N_1}$

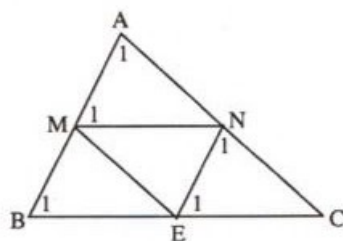
$\Rightarrow \Delta AMN = \Delta NEC$ (g.c.g) $\Rightarrow AN = NC$.



Hình 136



Hình 137



Hình 138

§6. TAM GIÁC CÂN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Tam giác cân

a) *Định nghĩa.* Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

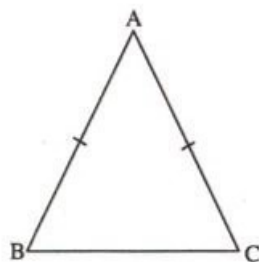
$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \text{ có} \\ AB = AC \end{cases} \quad (\text{h.139}).$$

b) *Tính chất.* Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}.$$

c) *Dấu hiệu nhận biết*

- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.



Hình 139

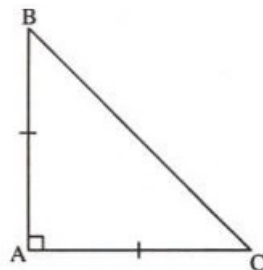
2. Tam giác vuông cân

a) *Định nghĩa.* Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

$$\Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ \widehat{A} = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases} \quad (\text{h.140}).$$

b) *Tính chất.* Mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng 45° .

$$\Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ.$$



Hình 140

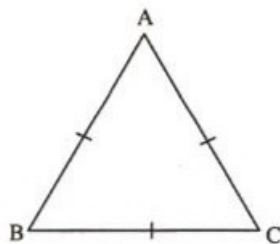
3. Tam giác đều

a) *Định nghĩa.* Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \text{ có} \\ AB = BC = CA. \end{cases} \quad (\text{h.141}).$$

b) *Tính chất.* Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60° .

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ.$$



Hình 141

c) Dấu hiệu nhận biết

- Theo định nghĩa ;
- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều ;
- Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC ĐỀU, TAM GIÁC VUÔNG CÂN ĐỂ TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất về hai góc ở đáy tam giác cân bằng nhau, mỗi góc của tam giác đều bằng 60° , góc nhọn của tam giác vuông cân là 45° .

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{B} = 50^\circ$. Tính số đo các góc $\widehat{C}$; $\widehat{A}$.

Giải

Tam giác ABC cân tại A thì $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên $\widehat{C} = 50^\circ$.

Tam giác ABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{A} + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ$ suy ra $\widehat{A} = 80^\circ$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{B} = 2\widehat{A}$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Giải

Ta có $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$,

mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

nên $\widehat{A} + 2\widehat{A} + 2\widehat{A} = 180^\circ$, suy ra $5\widehat{A} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 2\widehat{A} = 72^\circ$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ tam giác đều ABD ở phía ngoài tam giác ABC. Tính số đo các góc của tam giác BDC.

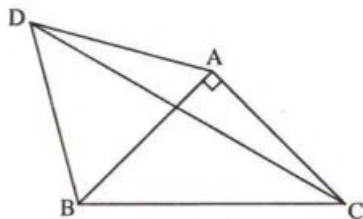
Giải. (h.142)

Ta có : $AB = AC = AD$ nên tam giác ADC cân tại A.

$$\begin{aligned}\widehat{DAC} &= \widehat{DAB} + \widehat{BAC} \\ &= 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.\end{aligned}$$

Mặt khác, tam giác ADC cân tại A thì :

$$\widehat{DCA} = \widehat{CDA} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$



Hình 142

Tam giác ABC vuông cân tại A nên $\widehat{ACB} = 45^\circ$.

$$\text{Do vậy } \widehat{BCD} = \widehat{ACB} - \widehat{ACD} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ.$$

Tam giác ABD đều nên $\widehat{ADB} = 60^\circ$.

$$\text{Do vậy } \widehat{BDC} = \widehat{ADB} - \widehat{ADC} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ ;$$

$$\widehat{CBD} = 180^\circ - \widehat{BCD} - \widehat{BDC} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ biết $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ và $BC = 2.AB$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Giải. (h.143)

Vẽ BN là phân giác của góc ABC ; Gọi M là trung điểm của BC.

$$\text{Suy ra } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 ; AB = BM = MC.$$

Do vậy $\triangle BNC$ cân tại N suy ra $NM \perp BC$.

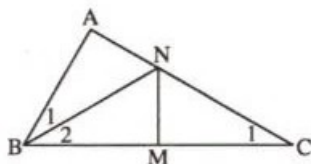
$$\text{Xét } \triangle ABN \text{ và } \triangle MBN \text{ có } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 ;$$

$AB = BM$; BN chung.

$$\text{Suy ra } \triangle ABN = \triangle MBN \text{ (c.g.c) hay } \widehat{A} = \widehat{M} = 90^\circ.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } \widehat{A} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow 2\widehat{C} + \widehat{C} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ ; \widehat{B} = 2\widehat{C} = 60^\circ ; \widehat{A} = 90^\circ.$$



Hình 143

Ví dụ 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = BA$, $CN = CA$. Tính số đo của góc MAN.

Giải. (h.144)

$BA = BM$ nên $\triangle ABM$ cân tại B,

$$\text{suy ra } \widehat{M_1} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2}.$$

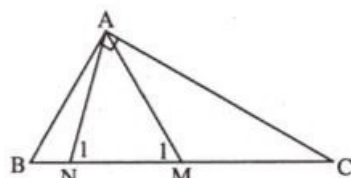
$CA = CN$ nên $\triangle CAN$ cân tại C,

$$\text{suy ra } \widehat{N_1} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}.$$

Xét $\triangle MNA$, ta có : $\widehat{MAN} = 180^\circ - (\widehat{M_1} + \widehat{N_1})$

$$\begin{aligned}\widehat{MAN} &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{B} + 180^\circ - \widehat{C}}{2} \\ &= 180^\circ - \frac{360^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})}{2} = 180^\circ - \frac{360^\circ - 90^\circ}{2}.\end{aligned}$$

Vậy : $\widehat{MAN} = 45^\circ$.



Hình 144

Dạng 2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TAM GIÁC CÂN ĐỂ SUY RA HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa, tính chất của tam giác cân để suy ra hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau.

Góc ngoài ở đỉnh tam giác cân bằng hai lần góc ở đáy.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có các tia phân giác trong của các góc B và C cắt nhau tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

Chứng minh $MN = MB + NC$.

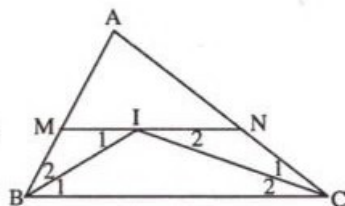
Giải. (h.145)

$MN \parallel BC$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{B_1}$; $\widehat{I_2} = \widehat{C_2}$.

Mà $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (vì BI là tia phân giác của góc B);

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (vì CI là tia phân giác của góc C).

Suy ra $\widehat{I_1} = \widehat{B_2}$; $\widehat{I_2} = \widehat{C_1}$.



Hình 145

Do vậy tam giác MIB và tam giác NCI là các tam giác cân đỉnh M và N nên :

$$MI = MB ; NI = NC.$$

$$\text{Vậy } MN = MI + NI = MB + NC.$$

Nhận xét. Từ bài toán này, bạn có thể giải được một lớp bài toán sau :

• Cho tam giác ABC. Nêu cách vẽ điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $MN = MB + NC$.

• Cho tam giác ABC. Nêu cách vẽ điểm M thuộc đường thẳng AB, điểm N thuộc đường thẳng AC sao cho $BC = MB + NC$.

• Cho tam giác ABC. Nêu cách vẽ điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $MN = MB - NC$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có tia phân giác góc A cắt BC tại D. Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$. Chứng tỏ $AD \parallel BM$.

Giải. (h.146)

$AB = AM$ nên tam giác BAM cân tại A, do vậy góc ngoài $\widehat{BAC} = 2.\widehat{B_1}$.

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, mà hai góc ở vị trí so le trong nên $AD \parallel BM$.

Ví dụ 3*. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$. Kẻ BD là tia phân giác của góc B ($D \in AC$). Chứng minh $AD + BD = BC$.

Giải (h.147)

Tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$ nên $\widehat{A} = 100^\circ$.

Trên BC lấy hai điểm E và F sao cho $BE = BA$, $BF = BD$.

Ta có $\triangle BAD = \triangle BED$ (c.g.c) nên :

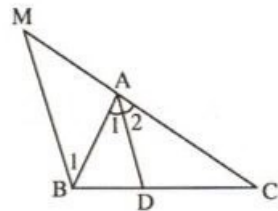
$$\widehat{BED} = \widehat{A} = 100^\circ \text{ suy ra } \widehat{DEF} = 80^\circ. \quad (1)$$

Tam giác BDF cân tại B nên $\widehat{B_2} = 20^\circ$ nên $\widehat{DFE} = 80^\circ. \quad (2)$

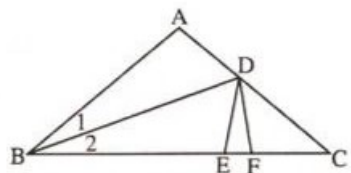
Từ (1) và (2) suy ra tam giác DEF cân $\Rightarrow DE = DF$.

Tam giác DFC có $\widehat{C} = 40^\circ$; $\widehat{DFE} = 80^\circ$ nên $\widehat{FDC} = 40^\circ$ hay tam giác DFC cân tại F suy ra $DF = FC$.

$$\text{Vậy } AD + BD = BF + FC = BC.$$



Hình 146



Hình 147

Dạng 3. NHẬN BIẾT MỘT TAM GIÁC CÂN, MỘT TAM GIÁC ĐỀU

Phương pháp giải

Dựa vào dấu hiệu nhận biết một tam giác là tam giác cân, một tam giác là tam giác đều trong phần trọng tâm kiến thức.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM = AN$. Gọi giao điểm BN và CM là I. Chứng minh tam giác BIC cân.

Giải. (h.148)

Ta có : $AB = AC$; $AM = AN$ nên $BM = CN$.

Xét tam giác BMC và tam giác CNB có :

$BM = CN$, BC là cạnh chung,

$\widehat{MBC} = \widehat{NCB}$ (tính chất tam giác cân ABC).

Suy ra $\triangle BMC = \triangle CNB$ (c.g.c) do vậy $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Hay tam giác BIC cân tại I.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy M, N, P sao cho $AM = BN = CP$. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

Giải. (h.149)

Tam giác đều ABC thì $AB = BC = CA$ mà $AM = BN = CP$ nên $BM = CN = AP$.

Xét tam giác AMP, tam giác BNM và tam giác CPN, ta có :

$AM = BN = CP$;

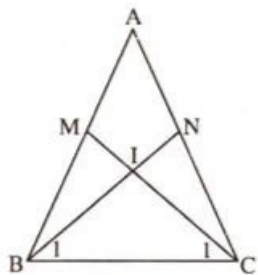
$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ (do tam giác ABC đều) ;

$BM = CN = AP$.

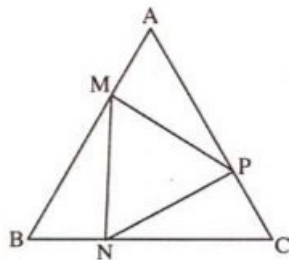
Do đó $\triangle AMP = \triangle BNM = \triangle CPN$ (c.g.c).

Suy ra $MP = NM = PN$ hay tam giác MNP là tam giác đều.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$; $\widehat{B} > \widehat{C}$. K là trung điểm của BC, đường trung trực của cạnh BC cắt AC tại D. Kẻ $AH \perp BC$ tại H, AH cắt BD tại E. Chứng minh tam giác ADE cân.



Hình 148



Hình 149

Giải. (h.150)

DK là đường trung trực của cạnh BC suy ra $\triangle DKB = \triangle DKC$ (c.g.c) $\Rightarrow DB = DC$.

Tam giác BCD cân nên $\widehat{B}_1 = \widehat{C}$.

Tam giác AHC, tam giác BEH là các tam giác vuông tại H.

Nên $\widehat{A}_1 + \widehat{C} = 90^\circ$; $\widehat{B}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_2$.

Mà $\widehat{E}_2 = \widehat{E}_1$ (đối đỉnh), do đó $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$ hay tam giác ADE cân.

Ví dụ 4. Cho hình 151, biết $AM = MN = NO = OP$ và $\widehat{MAN} = 20^\circ$. Chứng minh tam giác ONP là tam giác đều.

Giải

Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

$\triangle MAN$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{A} + \widehat{MNA} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$.

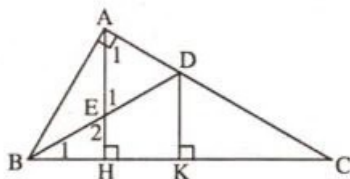
$\triangle MNO$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{OMN} = 40^\circ$.

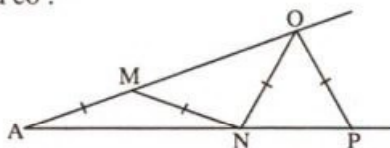
$\triangle OAN$ có $\widehat{ONP} = \widehat{A} + \widehat{AON} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

$\triangle ONP$ có $ON = OP$; $\widehat{ONP} = 60^\circ$.

Vậy $\triangle ONP$ là tam giác đều.



Hình 150



Hình 151

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

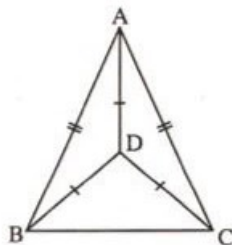
1. Kể tên các tam giác cân có trong hình 152.

2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D, E sao cho $AD = AE$. Chứng minh $DE \parallel BC$.

3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, có $\widehat{B} = \widehat{A} + 30^\circ$.

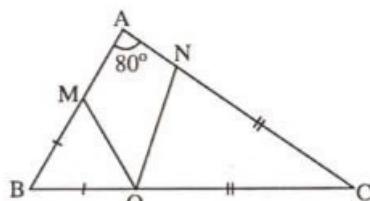
Tính số đo của góc $\widehat{A}$.

4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = BA$; $CE = CA$. Tính góc $\widehat{DAE}$.



Hình 152

5. Cho $\triangle ABC$ đều. Vẽ bên ngoài tam giác này hai tam giác vuông cân : $\triangle ABD$ vuông cân tại B, $\triangle ACE$ vuông cân tại C. Tính số đo góc nhọn của $\triangle ADE$.



Hình 153

6. Cho tam giác ABC như hình 153, có $\widehat{A} = 80^\circ$. Biết rằng $BO = BM$, $CO = CN$.

Tính số đo $\widehat{MON}$?

7. Cho tam giác ABC có $BC = 2 \cdot AB$. Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM. Chứng minh rằng $AC = 2 \cdot AD$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

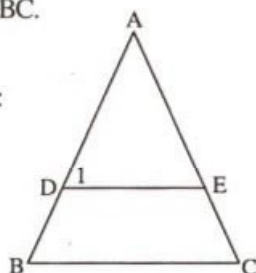
1. Các tam giác cân là : $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ADC$, $\triangle DBC$.

Vậy có bốn tam giác cân.

2. (h.154) Vận dụng tính chất của tam giác cân, ta có :

$$\widehat{B} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}; \quad \widehat{D_1} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}.$$

Do đó $\widehat{B} = \widehat{D_1}$ suy ra $DE \parallel BC$.



Hình 154

3. $\widehat{A} = 40^\circ$.

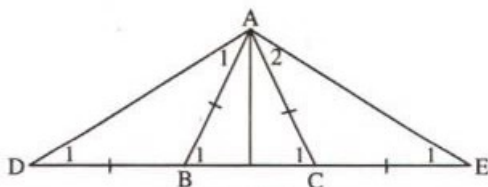
4. (h.155) $\triangle ABC$ cân tại A nên :

$$\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ.$$

$\triangle ABD$ cân tại B, suy ra :

$$\widehat{D_1} = \widehat{A_1} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{B_1}.$$

Tương tự, ta có $\widehat{E_1} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{C_1}$.



Hình 155

Từ đó ta có : $\widehat{D_1} + \widehat{E_1} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{B_1} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{C_1} = \widehat{B_1} = 65^\circ$.

$\triangle ADE$ có $\widehat{D_1} + \widehat{E_1} + \widehat{DAE} = 180^\circ$

nên $\widehat{DAE} = 180^\circ - (\widehat{D_1} + \widehat{E_1}) = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

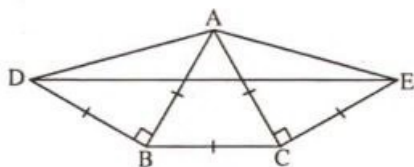
5. (h.156) Ta có $\triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c).

Suy ra $AD = AE$, $\widehat{DAB} = \widehat{CAE} = 45^\circ$.

Xét $\triangle ADE$ cân tại A, ta có :

$$\widehat{DAE} = 45^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 150^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$



Hình 156

6. Tam giác ABC có $\hat{A} = 80^\circ$ nên $\hat{B} + \hat{C} = 100^\circ$.

$$\text{Ta có : } \widehat{BOM} = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} ; \widehat{CON} = \frac{180^\circ - \hat{C}}{2}.$$

$$\text{Vậy : } \widehat{MON} = 180^\circ - (\widehat{BOM} + \widehat{CON}) = 180^\circ - \frac{360^\circ - \hat{B} - \hat{C}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 50^\circ.$$

7. (h.157) Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DA = DE$.

Ta có $\triangle ABD = \triangle EMD$ (c.g.c) suy ra

$$AB = ME ; \widehat{ABD} = \widehat{EMD} \text{ hay}$$

$$ME = MC = \frac{1}{2} BC$$

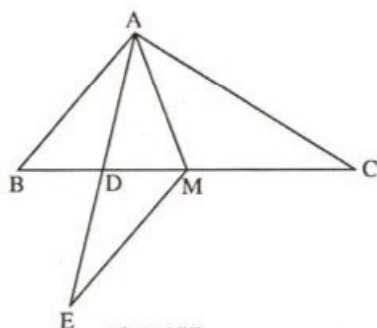
$$\text{Mà } \widehat{EMA} = \widehat{EMB} + \widehat{BMA} ;$$

$$\widehat{CMA} = \widehat{BAM} + \widehat{ABM}.$$

Và $\widehat{BAM} = \widehat{BMA}$ (tam giác BAM cân tại B), $\widehat{ABM} = \widehat{EMB}$

nên $\triangle AEM = \triangle ACM$ (c.g.c).

Vậy $AE = AC$ suy ra $AC = 2.AD$.



Hình 157

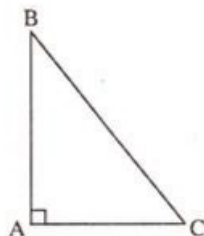
§7. ĐỊNH LÝ PY-TA-GO

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lý Py-ta-go

Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (h.158).}$$



Hình 158

2. Định lý Py-ta-go đảo

Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\triangle ABC \text{ có: } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH ĐỘ DÀI MỘT CẠNH CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Phương pháp giải

Xét tam giác vuông và vận dụng định lý Py-ta-go.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có các góc B, C nhọn. Kẻ AH vuông góc với BC. Biết $AB = 20\text{cm}$, $BH = 16\text{cm}$, $HC = 5\text{cm}$. Tính AH ; AC.

Giải. (h.159)

Tam giác ABH vuông tại H nên theo định lý Py-ta-go, ta có :

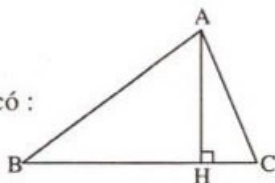
$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 + 16^2 = 20^2.$$

Vậy $AH^2 = 144$ do đó $AH = 12\text{cm}$.

Tam giác AHC vuông tại H, theo định lý Py-ta-go, ta có :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 12^2 + 5^2.$$

Vậy $AC^2 = 169$ do đó $AC = 13\text{cm}$.



Hình 159

Ví dụ 2. Từ điểm A người ta không thể đi thẳng đến C mà phải đi từ A đến D rồi từ D đến C hoặc là đi từ A đến B, rồi từ B đến C. Biết rằng $\triangle ABC$ vuông tại B; $\triangle ACD$ vuông tại C như hình 160. Theo bạn đường đi A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C và đường đi A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C, đường đi nào ngắn hơn ?

Giải

Áp dụng định lí Py-ta-go cho $\triangle ABC$ vuông tại B; $\triangle ACD$ vuông tại C, ta có :

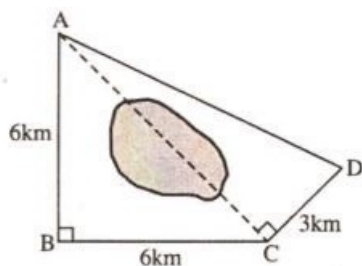
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 36 + 36 = 72 ;$$

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 72 + 9 = 81.$$

Vậy $AD = 9$ (km).

Suy ra $AB + BC = 6 + 6 = 12$ (km) ;

$$AD + CD = 9 + 3 = 12$$
 (km)



Hình 160

Vậy đường đi A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C và đường đi A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C bằng nhau.

Ví dụ 3. Độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông tỉ lệ với 8 và 15, cạnh huyền dài 51cm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông.

Giải

Giả sử $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$; $\frac{AB}{8} = \frac{AC}{15}$ và $BC = 51$ (cm).

$$\text{Ta có : } \frac{AB^2}{64} = \frac{AC^2}{225} = \frac{AB^2 + AC^2}{64 + 225} = \frac{BC^2}{289} = \frac{2601}{289} = 9.$$

Suy ra $AB^2 = 9.64 \Rightarrow AB = 3.8 = 24$ (cm) ;

$$AC^2 = 9.225 \Rightarrow AC = 3.15 = 45$$
 (cm).

Dạng 2. SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ PY-TA-GO ĐỂ NHẬN BIẾT TAM GIÁC VUÔNG

Phương pháp giải

- Tính bình phương các độ dài ba cạnh của tam giác.
- So sánh bình phương của cạnh lớn nhất với tổng các bình phương của hai cạnh kia.
- Nếu hai kết quả bằng nhau thì đó là tam giác vuông, cạnh lớn nhất là cạnh huyền.

Ví dụ. Trong các độ dài sau, ba số đo nào là số đo ba cạnh của một tam giác vuông ?

a) 6cm, 10cm, 8cm ;

b) 6cm, 9cm, 11cm.

Giải

a) Ta có : $6^2 = 36$; $10^2 = 100$; $8^2 = 64$.

Mà $36 + 64 = 100$ nên $6^2 + 8^2 = 10^2$, suy ra tồn tại một tam giác vuông có độ dài ba cạnh là 6cm, 10cm, 8cm.

b) Ta có : $6^2 = 36$; $9^2 = 81$; $11^2 = 121$.

Mà $36 + 81 \neq 121$ nên không tồn tại tam giác vuông có độ dài ba cạnh là 6cm, 9cm, 11cm.

Dạng 3. SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ PY -TA -GO ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

- Tính từng vế của đẳng thức theo định lí Py-ta-go.
- Hoặc biến đổi một vế theo định lí Py-ta-go rồi suy ra vế kia của đẳng thức.

Ví dụ 1. Cho hai đoạn AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại O. Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Giải. (h.161)

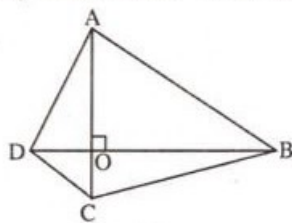
Áp dụng định lí Py-ta-go cho các tam giác vuông AOB, BOC, COD, DOA vuông tại O, ta có :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2. \quad (1)$$

$$BC^2 = BO^2 + OC^2. \quad (2)$$

$$CD^2 = CO^2 + OD^2. \quad (3)$$

$$DA^2 = DO^2 + OA^2. \quad (4)$$



Hình 161

Cộng từng vế của (1) với (3), ta có : $AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.

Cộng từng vế của (2) với (4), ta có : $BC^2 + AD^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2$.

Suy ra $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC ($AB = AC$) $\widehat{A} < 90^\circ$. Kẻ BH vuông góc với AC. Chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2$.

Giải. (h.162)

Áp dụng định lí Py-ta-go cho các tam giác vuông ABH, BCH vuông tại H, ta có :

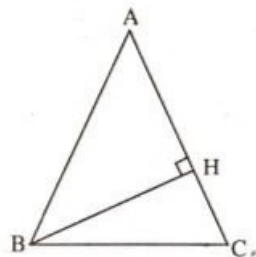
$$AB^2 = BH^2 + AH^2. \quad (1)$$

$$BC^2 = BH^2 + CH^2. \quad (2)$$

$$AC^2 = BH^2 + AH^2 \text{ (vì } AB = AC\text{)}. \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3), ta có :

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2.$$



Hình 162

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Chứng minh rằng $BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4}.AC^2$.
2. Cho tam giác ABC có các góc B, C nhọn. Kẻ AH vuông góc với BC, biết $AC = 15\text{cm}$, $HB = 5\text{cm}$, $HC = 9\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AB.
3. Cho ΔABC vuông tại A có $AB + AC = 17\text{cm}$, $AB - AC = 7\text{cm}$. Tính độ dài cạnh BC.
- 4*. Cho tam giác đều ABC có điểm M nằm bên trong của tam giác đó thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$. Tính số đo góc BMC.
5. (Toán cổ Ấn Độ)
Một cây sồi mọc thẳng đứng trên mặt đất bị sét đánh gãy. Chỗ bị gãy cách gốc cây 3 "phút", ngọn cây đổ xuống cách gốc cây 4 "phút". Hỏi độ cao cây sồi là bao nhiêu "phút" ?

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

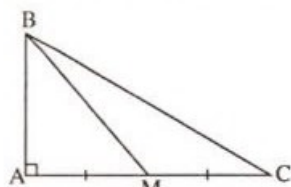
1. (h.163) Áp dụng định lí Py-ta-go cho các ΔBAM , ΔBAC vuông tại A, ta có :

$$BM^2 = AB^2 + AM^2.$$

$$\text{Suy ra } BM^2 = BC^2 - AC^2 + AM^2.$$

$$\text{Vậy } BM^2 = BC^2 - AC^2 + \frac{AC^2}{4},$$

$$\text{hay } BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4}AC^2.$$



Hình 163

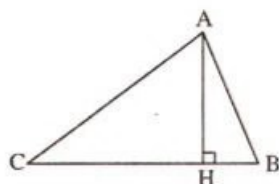
Nhận xét. Từ kết quả trên, bạn có thể làm được bài toán hay và khó sau :
 Chứng minh rằng trong tam giác vuông, tổng các bình phương khoảng cách từ đỉnh tam giác đến trung điểm cạnh đối diện bằng $\frac{3}{2}$ bình phương cạnh huyền.

2. (h.164) Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông ABH, ACH vuông tại H, ta có :

$$AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2 = AH^2$$

$$\Rightarrow AB^2 - 5^2 = 15^2 - 9^2.$$

Vậy $AB = 13\text{cm}$.



Hình 164

3. Ta có $AB + AC = 17\text{cm}$, $AB - AC = 7\text{cm}$ nên $AB = (17 + 7) : 2 = 12\text{ (cm)}$,
 $AC = (17 - 7) : 2 = 5\text{ (cm)}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta tính được : $BC = 13\text{cm}$.

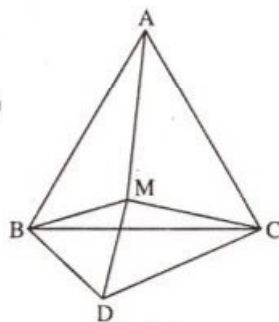
- 4*. Dựng $\triangle BMD$ đều (h.165) $\Rightarrow \triangle BAM = \triangle BCD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AM = CD.$$

$$\text{Do vậy } CD^2 = MB^2 + MC^2$$

$$\Rightarrow CD^2 = MD^2 + MC^2 \Rightarrow \triangle CDM \text{ vuông tại } M,$$

$$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BMD} + \widehat{DMC} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.$$



Hình 165

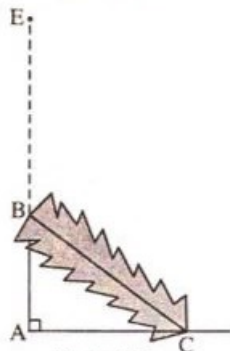
5. (h.166) Áp dụng định lí Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A, ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$

Vậy $BC = 5$ "phút".

Mặt khác, $BC = BE$, nên chiều cao cây sồi là :

$$AE = AB + BC = 3 + 5 = 8 \text{ "phút"}.$$



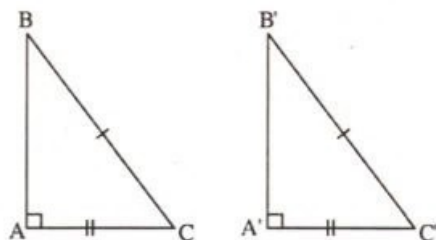
Hình 166

§8. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Ngoài các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông, còn có trường hợp bằng nhau theo cạnh huyền - cạnh góc vuông.

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau (h.167).



Hình 167

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC VUÔNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Xét hai tam giác vuông.
- Kiểm tra điều kiện bằng nhau : cạnh - góc - cạnh ; góc - cạnh - góc, cạnh huyền - cạnh góc vuông ; cạnh huyền - góc nhọn.
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A. Qua A kẻ đường thẳng d cắt BC. Vẽ BM, CN cùng vuông góc với d. Chứng minh rằng : $\triangle BAM = \triangle ACN$.

Giải. (h.168)

$$\text{Ta có : } \left. \begin{array}{l} \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ \\ \widehat{B_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ nên } \widehat{B_1} = \widehat{A_1}.$$

Xét $\triangle BAM$ và $\triangle ACN$, ta có :

$$\widehat{AMB} = \widehat{CNA} = 90^\circ ; \widehat{B_1} = \widehat{A_1} ; AB = AC.$$

Nên $\triangle AMB = \triangle CNA$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = CE < \frac{BC}{2}$.

Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với BC cắt AB ở M, đường thẳng kẻ từ E vuông góc với BC cắt AC tại N. Chứng minh rằng :

a) $\triangle DBM = \triangle ECN$;

b) $\triangle DME = \triangle END$;

c) Tam giác ADE cân.

Giải. (h.169)

a) Xét $\triangle DBM$ và $\triangle ECN$, ta có :

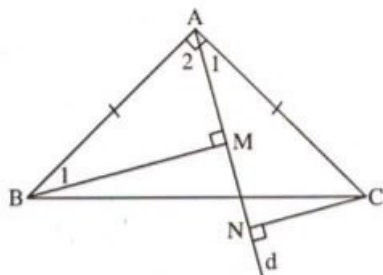
$$\widehat{BDM} = \widehat{CEN} = 90^\circ ; BD = CE ; \widehat{B} = \widehat{C}.$$

Vậy $\triangle DBM = \triangle ECN$ (g.c.g).

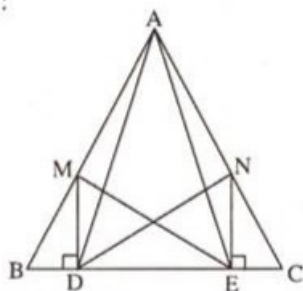
b) Xét $\triangle DME$ và $\triangle END$ có : $\widehat{EDM} = \widehat{DEN} = 90^\circ$; $MD = ME$; DE là cạnh chung.

Từ đó suy ra : $\triangle DME = \triangle END$ (c.g.c).

c) Ta có $\triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A.



Hình 168



Hình 169

Dạng 2. SỬ DỤNG TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Chọn hai tam giác vuông có cạnh là hai đoạn thẳng (hoặc có góc là hai góc) cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau.
- Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1. Gọi M là trung điểm của cạnh BC của $\triangle ABC$. Vẽ BI, CK vuông góc với đường thẳng AM . Chứng minh $BI = CK$.

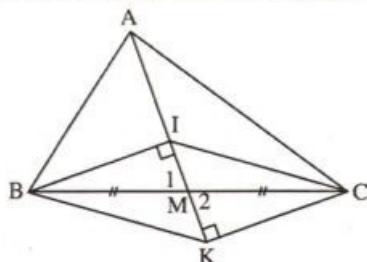
Giải. (h.170)

Xét $\triangle BMI$ và $\triangle CMK$, ta có :

$$\widehat{BIM} = \widehat{CKM} = 90^\circ ; \widehat{M_1} = \widehat{M_2} ; BM = CM.$$

Suy ra $\triangle BMI = \triangle CMK$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Vậy $BI = CK$.



Hình 170

Ví dụ 2. Cho góc nhọn xOy , lấy điểm A thuộc Ox , điểm B thuộc Oy sao cho $OA = OB$. Vẽ AC vuông góc với Oy ($C \in Oy$), BD vuông góc với Ox ($D \in Ox$).

a) Chứng minh $AC = BD$.

b) Gọi I là giao điểm AC và BD . Chứng tỏ OI là tia phân giác của xOy .

Giải. (h.171)

a) Xét $\triangle ACO$ và $\triangle BDO$, ta có : $\widehat{ACO} = \widehat{BDO} = 90^\circ$,

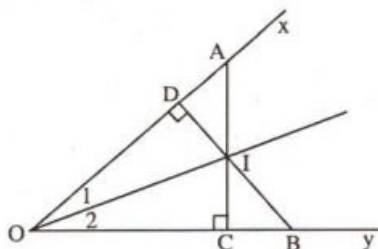
$OA = OB$, $\widehat{AOB}$ chung.

Vậy $\triangle ACO = \triangle BDO$ suy ra $AC = BD$.

b) $\triangle ACO = \triangle BDO$ nên $OC = OD$.

Xét $\triangle DIO$ và $\triangle CIO$ có $\widehat{ODI} = \widehat{OCI} = 90^\circ$,

$OD = OC$, OI cạnh chung.



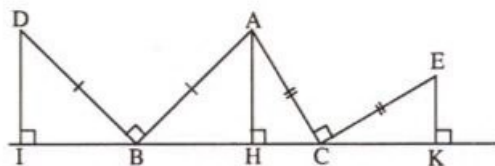
Hình 171

Nên $\triangle ICO = \triangle IDO$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông), từ đó suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$
hay OI là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Vẽ BD vuông góc và bằng AB, vẽ CE vuông góc và bằng AC. Vẽ DI, EK vuông góc với đường thẳng BC như hình bên 172.

Chứng minh rằng :

- $BI = AH$.
- $BI = CK$.
- $DI + EK = BC$.



Hình 172

Giải (h.172)

a) Ta có : $\widehat{DBI} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$) mà $DB = AB$; $\widehat{DIB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$
nên $\triangle DBI = \triangle BAH$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $BI = AH$.

b) Tương tự, ta có : $\triangle AHC = \triangle CKE$ suy ra $CK = AH$.

Do đó $BI = CK$ (vì cùng bằng AH).

c) $\triangle DBI = \triangle BAH$ suy ra $DI = BH$;

$\triangle AHC = \triangle CKE$ suy ra $EK = CH$.

Từ đó suy ra $DI + EK = BH + CH = BC$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho tam giác ABC cân tại A ; $\widehat{A} < 90^\circ$. Kẻ : $BH \perp AC$ ($H \in AC$), $CK \perp AB$ ($K \in AB$). BH cắt CK tại O. Chứng minh rằng :

- $AH = AK$.
- $\triangle BKO = \triangle CHO$.
- AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

2. Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A. Qua A kẻ đường thẳng xy bất kì không cắt đoạn BC. Kẻ BM và CN vuông góc với xy.

- Chứng minh $\triangle ACN = \triangle BAM$.
- Chứng minh $CN + BM = MN$.
- Chứng tỏ $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí của xy.

3. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABD và ACE là các tam giác vuông cân tại đỉnh A. Kẻ $AH \perp BC$. Đường thẳng AH cắt DE tại M. Vẽ DI và EK cùng vuông góc với AH. Chứng minh rằng :
- a) $DI = EK = AH$; b) M là trung điểm của DE.
4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có O là trung điểm của cạnh BC. Qua O kẻ đường thẳng d bất kỳ không qua đỉnh của tam giác. Kẻ BI, AH, CK vuông góc với d. Tính $BI^2 + CK^2 + 2.AH^2$, biết rằng $BC = 10\text{cm}$.
5. (h.177) Cho $\triangle ABC$ cân tại A, Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$). Kẻ đường thẳng d qua C vuông góc với AC. Kẻ $BK \perp d$ ($K \in d$). Chứng minh $CK = CH$.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. (h.173) a) $\triangle ABH = \triangle ACK$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $AH = AK$.

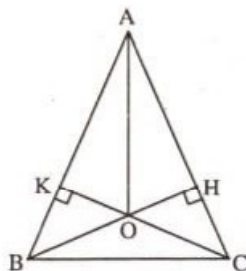
b) $\triangle ABH = \triangle ACK$ nên $AH = AK$;

mà $AC = AB$ do đó $CH = BK$.

Từ đó suy ra $\triangle BOK = \triangle COH$ (g.c.g).

c) $\triangle AHO = \triangle AKO$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Do đó $\widehat{KAO} = \widehat{HAO}$ hay AO là tia phân giác của góc A.



Hình 173

2. (h.174) a) Ta có : $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ$; $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$.

Vậy $\triangle ACN = \triangle BAM$ (cạnh huyền - góc nhọn).

b) $\triangle BMA = \triangle ANC$

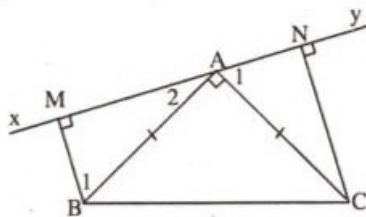
nên $BM = AN$; $AM = CN$

suy ra $BM + CN = AN + AM = MN$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có :

$$BM^2 + AM^2 = AB^2 \text{ hay } BM^2 + CN^2 = AB^2$$

suy ra $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí của xy.



Hình 174

3. (h.175) a) Tam giác DIA và tam giác AHB có :

$\widehat{DIA} = \widehat{AHB} = 90^\circ$; $AD = AB$; $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (cùng phụ với góc $\widehat{A}_2$).

3. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác

(c.c.c) ; (c.g.c) ; (g.c.g) ; (cạnh huyền - góc nhọn) ; (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

4. Tam giác đặc biệt : Tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông cân.

5. Định lý Py-ta-go

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

Vận dụng tính chất :

- Tổng ba góc trong của một tam giác, góc ngoài của tam giác.
- Tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông, tam giác vuông cân.

Ví dụ 1. Cho hình 178. Tính tổng của các góc $\widehat{A}$; $\widehat{B}$; $\widehat{C}$; $\widehat{D}$; $\widehat{E}$.

Giải

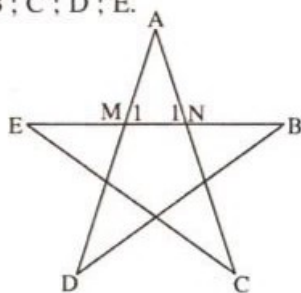
Áp dụng tính chất góc ngoài của các tam giác :

$$\Delta MBD \text{ có } \widehat{M}_1 = \widehat{B} + \widehat{D} ;$$

$$\Delta NCE \text{ có } \widehat{N}_1 = \widehat{C} + \widehat{E}.$$

$$\text{Mặt khác } \Delta AMN \text{ có } \widehat{A} + \widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{C} + \widehat{E} = 180^\circ.$$



Hình 178

Ví dụ 2. Cho hình 179, biết $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{C} = 60^\circ$; $OC = OD$. Tính số đo góc $\widehat{B}$.

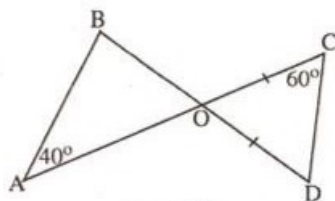
Giải

$$\Delta OCD \text{ có } OC = OD, \widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \Delta OCD \text{ đều}$$

$$\Rightarrow \widehat{COD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOA} = 60^\circ.$$

$$\Delta OAB \text{ có : } \widehat{A} + \widehat{AOB} + \widehat{B} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 40^\circ + 60^\circ + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 80^\circ.$$



Hình 179

Ví dụ 3. Cho hình 180, biết $AB = BE = EA = ED$; $BD = DC$; $\widehat{BED} = 90^\circ$.
 Tính số đo góc $\widehat{BDC}$?

Giải

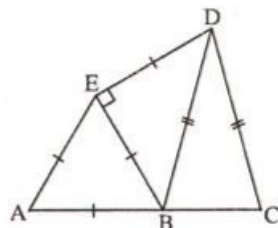
Ta có : $\widehat{ABE} + \widehat{EBD} + \widehat{DBC} = 180^\circ$

$$\Rightarrow 60^\circ + 45^\circ + \widehat{DBC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DBC} = 75^\circ.$$

$\triangle BDC$ cân tại D ($BD = CD$) nên $\widehat{BCD} = \widehat{DBC} = 75^\circ$.

$$\text{Do đó } \widehat{BDC} = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ.$$



Hình 180

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Dùng dấu hiệu nhận biết hai tam giác bằng nhau : (c-c-c) ; (c-g-c) ; (g-c-g).
- Dùng dấu hiệu nhận biết hai tam giác vuông bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho hình 181, biết :
 $\widehat{EAD} = \widehat{HAD}$, $HB \perp AE$, $EC \perp AH$.

Chứng minh rằng :

- $\triangle ABD = \triangle ACD$.
- $\triangle DBE = \triangle DCH$.
- $\triangle ABH = \triangle ACE$.

Giải

a) $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có : $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$;

AD là cạnh chung ; $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD$ (cạnh huyền - góc nhọn).

b) Xét $\triangle BDE$ và $\triangle CDH$ có $\widehat{DBE} = \widehat{DCH} (= 90^\circ)$;

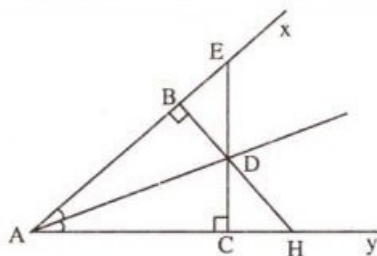
$BD = CD$ (vì $\triangle ABD = \triangle ACD$) ; $\widehat{BDE} = \widehat{CDH}$ (đối đỉnh).

Từ đó suy ra $\triangle BDE = \triangle CDH$ (g.c.g).

c) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACE$, ta có $\widehat{ABH} = \widehat{ACE} (= 90^\circ)$;

$AB = AC$ (vì $\triangle ABD = \triangle ACD$) ; $\widehat{EAH}$ chung.

Vậy $\triangle ABH = \triangle ACE$ (g.c.g).



Hình 181

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Kẻ tia phân giác của góc A cắt BC tại H. Trên cạnh AB, AC lấy N, M sao cho BN = AM. Chứng minh rằng :

- $\triangle AHN = \triangle CHM$.
- $\triangle AHM = \triangle BHN$.
- Tam giác MHN vuông cân.

Giải. (h.182)

- $\triangle ABC$ vuông cân tại A $\Rightarrow AB = AC$,
mà $BN = AM \Rightarrow AN = CM$.

Mặt khác, AH là đường phân giác của góc A nên

$\triangle AHC$ có $\widehat{CAH} = \widehat{ACH} = 45^\circ$, do đó $\triangle AHC$ vuông cân tại H.

Suy ra $AH = HC$ và $\widehat{AHC} = 90^\circ$.

Xét $\triangle AHN$ và $\triangle CHM$, ta có : $AN = CM$; $\widehat{HAN} = \widehat{MCH}$;

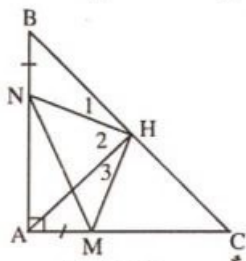
$HA = HC$ nên $\triangle AHN = \triangle CHM$ (c.g.c).

- Xét $\triangle AHM$ và $\triangle BHN$, ta có : $BN = AM$; $\widehat{HBN} = \widehat{HAM}$;

$HA = HB$ nên $\triangle AHM = \triangle BHN$ (c.g.c).

- Ta có $\triangle AHM = \triangle BHN$ nên $\widehat{H_1} = \widehat{H_3}$; $HM = HN$; mà $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^\circ$ nên $\widehat{H_3} + \widehat{H_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NHM} = 90^\circ$.

Do đó $\triangle HMN$ vuông cân tại H.



Hình 182

Dạng 3. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Ghép hai đoạn thẳng hoặc hai góc vào hai tam giác và chứng minh hai tam giác đó bằng nhau.
- Để chứng minh hai góc bằng nhau, bạn có thể chứng tỏ hai góc đó cùng phụ hoặc cùng bù với góc thứ ba.

Ví dụ 1. Cho $\widehat{xOy}$ (khác góc bẹt). Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Tia phân giác Oz của góc xOy cắt AB tại C.

a) Chứng minh $\triangle AOC = \triangle BOC$, từ đó suy ra $OC \perp AB$.

b) Trên tia đối của tia CO lấy điểm D sao cho $CD = CO$. Chứng minh $AD = BO$ và $AD \parallel BO$.

Giải. (h.183)

a) Xét $\triangle AOC$ và $\triangle BOC$, ta có : $OA = OB$; $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$;
OC là cạnh chung, suy ra $\triangle AOC = \triangle BOC$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{ACO} = \widehat{BCO}$.

Mà $\widehat{ACO} + \widehat{BCO} = 180^\circ$ (kề bù)

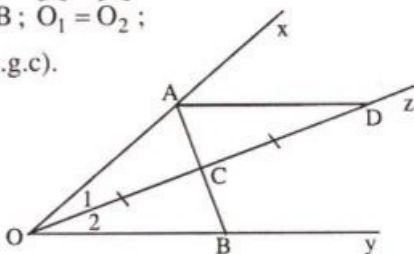
nên $\widehat{ACO} = \widehat{BCO} = 90^\circ$ hay $OC \perp AB$.

b) Xét $\triangle ACD$ và $\triangle BCO$, ta có :

$AC = BC$; $\widehat{ACD} = \widehat{BCO}$ (đối đỉnh) ; $CD = CO$.

Suy ra $\triangle ACD = \triangle BCO$ (c.g.c).

Do đó $AD = BO$ và $\widehat{ADC} = \widehat{BOC}$, mà hai góc ở vị trí so le trong nên $AD \parallel BO$.



Hình 183

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, gọi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trên tia đối của tia ED lấy điểm F sao cho $DE = EF$. Chứng minh rằng :

a) $BD = CF$ và $BD \parallel CF$;

b) $\triangle BCD = \triangle FDC$;

c) $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC$;

d) $\widehat{BDC} = \widehat{DAF}$.

Giải. (h.184)

a) Xét $\triangle AED$ và $\triangle CEF$, ta có :

$AE = CE$; $\widehat{AED} = \widehat{CEF}$; $ED = EF$

$\Rightarrow \triangle AED = \triangle CEF$ (c.g.c)

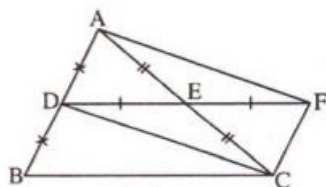
$\Rightarrow CF = AD \Rightarrow CF = BD$

$\Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{ECF}$ mà hai góc ở vị trí so le trong

$\Rightarrow AD \parallel CF$ hay $BD \parallel CF$.

b) Xét $\triangle BCD$ và $\triangle FDC$, ta có : $BD = CF$; $\widehat{BDC} = \widehat{FCD}$;

CD là cạnh chung $\Rightarrow \triangle BCD = \triangle FDC$ (c.g.c).



Hình 184

c) $\triangle BCD = \triangle FDC \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{FDC}$ mà hai góc ở vị trí so le trong nên $DE \parallel BC$.

$$\triangle BCD = \triangle FDC \Rightarrow DF = BC.$$

$$\text{Mà } DE = \frac{1}{2}DF \text{ suy ra } DE = \frac{1}{2}BC.$$

d) Xét $\triangle BDC$ và $\triangle DAF$, ta có :

$$BD = DA ; \widehat{DBC} = \widehat{ADF} ; BC = DF.$$

$$\text{Nên } \triangle BDC = \triangle DAF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{DAF}.$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$).

Trên tia đối của tia BD lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$.

b) $AH = AK$.

Giải. (h.185)

a) $\triangle ABD$ vuông tại D nên

$$\widehat{B_1} + \widehat{A_1} = 90^\circ. \quad (1)$$

$\triangle ACE$ vuông tại E nên

$$\widehat{C_1} + \widehat{A_1} = 90^\circ. \quad (2)$$

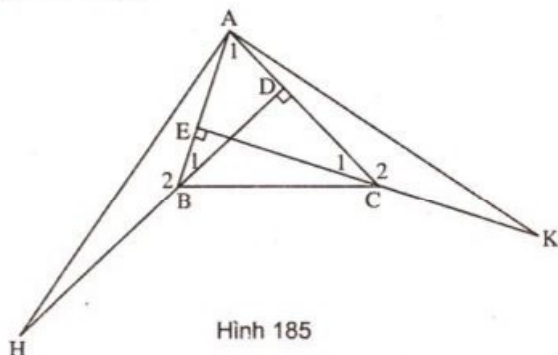
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Mặt khác, $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 180^\circ$; $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ$ nên $\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$ hay $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$.

b) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle KCA$, ta có :

$$AB = CK ; \widehat{ABH} = \widehat{ACK} ; BH = CA.$$

$$\text{Suy ra } \triangle ABH = \triangle KCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AH = AK.$$



Hình 185

Dạng 4. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp giải

Chứng tỏ rằng ba điểm đó tạo thành một góc có số đo 180° .

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là trung điểm của AC. Trên tia đối của tia IB lấy điểm K sao cho $IK = IB$.

a) Chứng minh $IC \perp CK$.

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và AK. Chứng minh ba điểm M, I, N thẳng hàng.

Giải. (h.186)

a) Xét $\triangle ABI$ và $\triangle CKI$, ta có :

$$IA = IC ; \widehat{AIB} = \widehat{CIK} ; IB = IK.$$

Suy ra $\triangle ABI = \triangle CKI$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{BAI} = \widehat{KCI}$.

Mà $\widehat{BAI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KCI} = 90^\circ$ hay $IC \perp CK$.

b) Xét $\triangle AIK$ và $\triangle CIB$, ta có :

$$AI = CI ; \widehat{AIK} = \widehat{CIB} ; IB = IK.$$

Suy ra $\triangle AIK = \triangle CIB$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{AKI} = \widehat{CBI} ; AK = BC \Rightarrow KN = BM$.

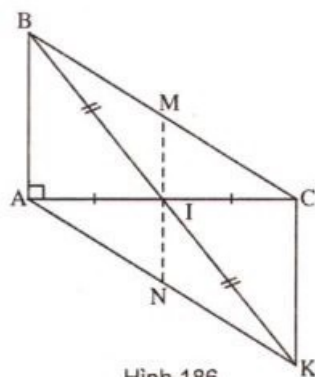
Xét $\triangle KIN$ và $\triangle BIM$, ta có :

$$BI = KI ; \widehat{IBM} = \widehat{IKN} ; KN = BM.$$

Suy ra $\triangle KIN = \triangle BIM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{KIN}$.

Mà $\widehat{KIN} + \widehat{NIB} = 180^\circ$ nên $\widehat{BIM} + \widehat{BIN} = 180^\circ$.

Do đó ba điểm M, I, N thẳng hàng.



Hình 186

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Dựng ra phía ngoài tam giác đó các tam giác đều ABM và ACN.

a) Chứng minh ba điểm M, A, N thẳng hàng.

b) Chứng minh $BN = CM$.

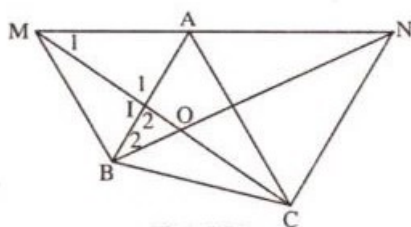
c) Gọi giao điểm của BN và CM là O.
Tính $\widehat{BOC}$.

Giải. (h.187)

a) Tam giác ABM và ACN là các tam giác đều nên $\widehat{MAB} = 60^\circ ; \widehat{NAC} = 60^\circ$.

$$\text{Suy ra } \widehat{MAB} + \widehat{BAC} + \widehat{NAC} = 180^\circ,$$

do đó ba điểm M, N, A thẳng hàng.



Hình 187

b) Xét $\triangle ABN$ và $\triangle AMC$, ta có :

$$AM = AB; \widehat{MAC} = \widehat{BAN} (= 120^\circ); AC = AN.$$

Suy ra $\triangle ABN = \triangle AMC$ (c.g.c) $\Rightarrow BN = CM$.

c) Gọi I là giao điểm AB và CM.

$$\triangle AMI \text{ có } \widehat{IAM} = 60^\circ \text{ nên } \widehat{M_1} + \widehat{I_1} = 120^\circ.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{M_1} = \widehat{B_2} \text{ (vì } \triangle AMC = \triangle ABN) \text{ và } \widehat{I_1} = \widehat{I_2}$$

$$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{I_2} = \widehat{M_1} + \widehat{I_1} = 120^\circ.$$

$$\text{Ta có : } \widehat{BOC} = \widehat{B_2} + \widehat{I_2} \text{ (góc ngoài của tam giác BIO)} \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho $\triangle ABC$, dựng $MN \parallel BC$ như hình 188. Biết rằng $\widehat{ABx} = 100^\circ$, $\widehat{MNC} = 140^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

2. Cho $\triangle ABC$, biết rằng $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} = 2 : 3 : 5$. Tính số đo góc các góc của tam giác ABC.

3. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và phân giác AD ($D \in BC$). Trên AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$.

a) Chứng minh $DB = DE$; $BF = CE$.

b) Chứng minh ba điểm F, D, E thẳng hàng.

c) Chứng minh $BE \parallel FC$ và $AD \perp FC$.

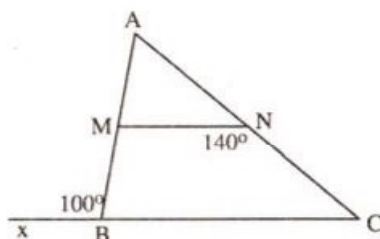
d) Chứng minh $\widehat{ADC}$ là góc tù.

4. Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 40^\circ$; $\widehat{B} = 70^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia phân giác của góc C cắt AH tại E. Trên CA lấy điểm K sao cho $CK = CH$.

a) Chứng minh $\triangle HCE = \triangle KCE$.

b) Chứng minh $HK \parallel AB$.

c) Tính các góc của tam giác CKE.



Hình 188

d) Trên tia đối của tia AH lấy điểm F sao cho $AF = BH$. Trên nửa mặt phẳng bờ BA không chứa C lấy điểm D sao cho $BD \perp AB$, $BD = BA$. Chứng minh $BF = DH$.

5. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M trên cạnh BC ($MB < MC$) trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Đường thẳng qua M vuông góc với BC cắt AB tại E. Đường thẳng qua N vuông góc với BC cắt tia AC tại F.

a) Chứng minh $EM = FN$.

b) Qua E kẻ $ED \parallel AC$ ($D \in AC$). Chứng minh $MB = MD$.

c) EF cắt BC tại O. Chứng minh $OE = OF$.

6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, $\hat{A} = 100^\circ$. Trên tia AC lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính góc CBD.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Đáp số: $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

2. Đáp số: $\hat{A} = 36^\circ$; $\hat{B} = 54^\circ$; $\hat{C} = 90^\circ$.

3. (h.189) a) $\triangle ABD = \triangle AED$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = DE$.

Lại có $AF = AC$ mà $AB = AE$ nên $BF = CE$.

- b) $\triangle ABD = \triangle AED$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{AED}$,

mà $\widehat{ABD} + \widehat{DBF} = 180^\circ$;

Mặt khác, $\widehat{AED} + \widehat{CED} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DBF} = \widehat{DEC}$.

Xét $\triangle BDF$ và $\triangle EDC$, ta có: $BD = ED$; $\widehat{DBF} = \widehat{DEC}$;

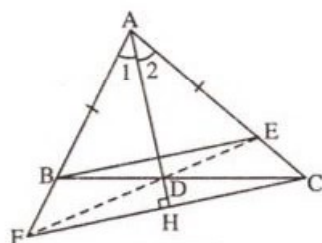
$BF = EC$ nên $\triangle BDF = \triangle EDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{EDC}$.

Mà $\widehat{EDC} + \widehat{EDB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDF} + \widehat{EDB} = 180^\circ$, suy ra ba điểm F, D, E thẳng hàng.

- c) $\triangle ABE$ cân ($AB = AE$) nên $\widehat{AEB} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$;

$\triangle AFC$ cân ($AF = AC$) nên $\widehat{ACF} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$.

Từ đó suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ACF}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $BE \parallel FC$.



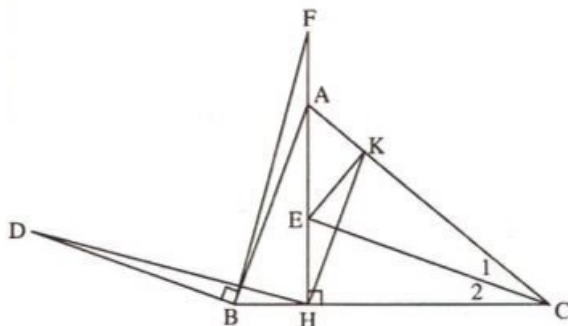
Hình 189

d) Gọi H là giao điểm của AD và FC.

Ta có $\triangle AFH = \triangle ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AHC}$ mà $\widehat{AHF} + \widehat{AHC} = 180^\circ$ nên $\widehat{AHF} = 90^\circ$. Suy ra $AH \perp CF$, hay $AD \perp FC$.

Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{DHC} + \widehat{HCD} = 90^\circ + \widehat{HCD} > 90^\circ$ hay góc $\widehat{ADC}$ là góc tù.

4. (h.190)



Hình 190

a) $\triangle ABC$ có $\widehat{C} = 40^\circ$; $\widehat{B} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 70^\circ$.

Để thấy $\triangle HCE = \triangle KCE$ (c.g.c).

b) $\triangle CHK$ cân ($CH = CK$); $\widehat{C} = 40^\circ$ nên $\widehat{CKH} = \widehat{CHK} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = 70^\circ$

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{KHC} (= 70^\circ)$, mà hai góc ở vị trí đồng vị, suy ra $HK \parallel AB$.

c) CE là tia phân giác của $\widehat{C} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \frac{1}{2}\widehat{C} = 20^\circ$.

$\triangle CKE = \triangle CHE \Rightarrow \widehat{CKE} = \widehat{CHE} \Rightarrow \widehat{CKE} = 90^\circ$.

$\triangle KCE$ có $\widehat{CKE} = 90^\circ$; $\widehat{C_1} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{CEK} = 70^\circ$.

d) $\widehat{HBD} = 90^\circ + \widehat{HBA} = 90^\circ + 90^\circ - \widehat{HAB} = 180^\circ - \widehat{HAB} \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{FAB}$.

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle AFB$, ta có: $AF = BH$; $\widehat{FAB} = \widehat{HBD}$;

$AB = BD$ nên $\triangle AFB = \triangle BHD$ (c.g.c) $\Rightarrow BF = DH$.

5. (h.191) a) $\triangle BEM = \triangle CFN$ (g.c.g) $\Rightarrow ME = NF$.

b) Xét $\triangle BME$ và $\triangle DME$, ta có :

$$\widehat{BME} = \widehat{DME} (= 90^\circ) ; \widehat{B_1} = \widehat{D_1} (= \widehat{C_1}) ;$$

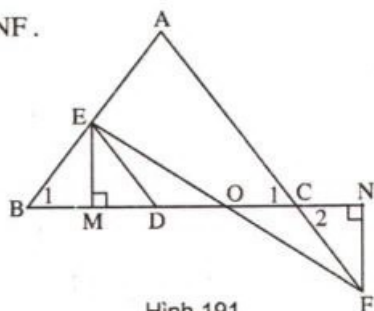
EM là cạnh chung.

Suy ra $\triangle BME = \triangle DME$ (g.c.g).

Do đó $BM = MD$.

c) $\triangle OME = \triangle ONF$ (g.c.g).

Suy ra $OE = OF$.



Hình 191

6. (h.192) Dựng tam giác đều ACE ra phía ngoài $\triangle ABC$.

Xét $\triangle ABC$, ta có : $AB = AC$; $\widehat{BAC} = 100^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^\circ$$

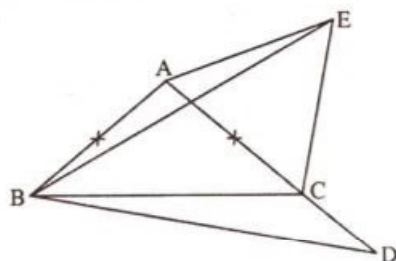
$$\Rightarrow \widehat{BCE} = 100^\circ .$$

Từ đó suy ra $\triangle ABD = \triangle CEB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{CBE}.$$

$$\triangle ABE \text{ cân tại A có } \widehat{BAE} = 160^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CBE} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 10^\circ .$$



Hình 192

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu

3

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I. SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

§1. Tập hợp Q các số hữu tỉ	5
§2. Cộng, trừ số hữu tỉ. §3. Nhân, chia số hữu tỉ	11
§4. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ. Cộng, trừ, nhân, chia số thập phân	17
§5, §6. Lũy thừa của một số hữu tỉ	23
§7. Tỷ lệ thức	32
§8. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau	37
§9. Số thập phân hữu hạn. Số thập phân vô hạn tuần hoàn. §10. Làm tròn số	44
§11. Số vô tỉ. Khái niệm về căn bậc hai. §12. Số thực	51

Ôn tập chương I	59
-----------------	----

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§1. Đại lượng tỉ lệ thuận. §2. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ thuận	68
§3. Đại lượng tỉ lệ nghịch. §4. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ nghịch	76
§5. Hàm số	85
§6. Mặt phẳng tọa độ. §7. Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$)	89

Ôn tập chương II	96
------------------	----

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

§1. Hai góc đối đỉnh	104
§2. Hai đường thẳng vuông góc	108
§3. Các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng. §4. Hai đường thẳng song song	113
§5. Tiên đềƠ-clit về đường thẳng song song	118
§6. Tứ giác. Góc đến song song. §7. Định lý	123

Ôn tập chương I	129
-----------------	-----

Chương II. TAM GIÁC

§1. Tổng ba góc của một tam giác	135
§2. Hai tam giác bằng nhau. §3. Trường hợp bằng nhau thứ nhất của tam giác : cạnh - cạnh - cạnh (c.c.c)	140
§4. Trường hợp bằng nhau thứ hai của tam giác : cạnh - góc - cạnh (c.g.c)	145
§5. Trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác : góc - cạnh - góc (g.c.g)	151
§6. Tam giác cân	157
§7. Định lý Py-ta-go	166
§8. Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông	171

Ôn tập chương II	176
------------------	-----

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc **NGUYỄN QUÝ THAO**

Tổ chức bản thảo
và chịu trách nhiệm nội dung : Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

Biên tập lần đầu và tái bản : **NGUYỄN TRỌNG THIỆP**

Trình bày bìa : **LƯƠNG QUỐC HIỆP**

Thiết kế sách : **NGUYỄN THANH THUÝ**

Sửa bản in : **NGUYỄN TRỌNG THIỆP**

Chế bản : **PHÒNG CHẾ BẢN - CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
HÀ NỘI**

Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

**TRỌNG TÂM KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP
GIẢI BÀI TẬP TOÁN 7 - TẬP MỘT**

Mã số : T7T70h3-NBE

Số ĐKKH xuất bản: 11-2013/CXB/103-1947/GD.

In 3.000 cuốn (QĐ: 02TK), khổ 17 x 24 cm. Số in : XB-30.
In tại Công ty CP in Hà Nội. Khu công nghiệp Ngọc Hồi - Thanh Trì - Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 03 năm 2013.