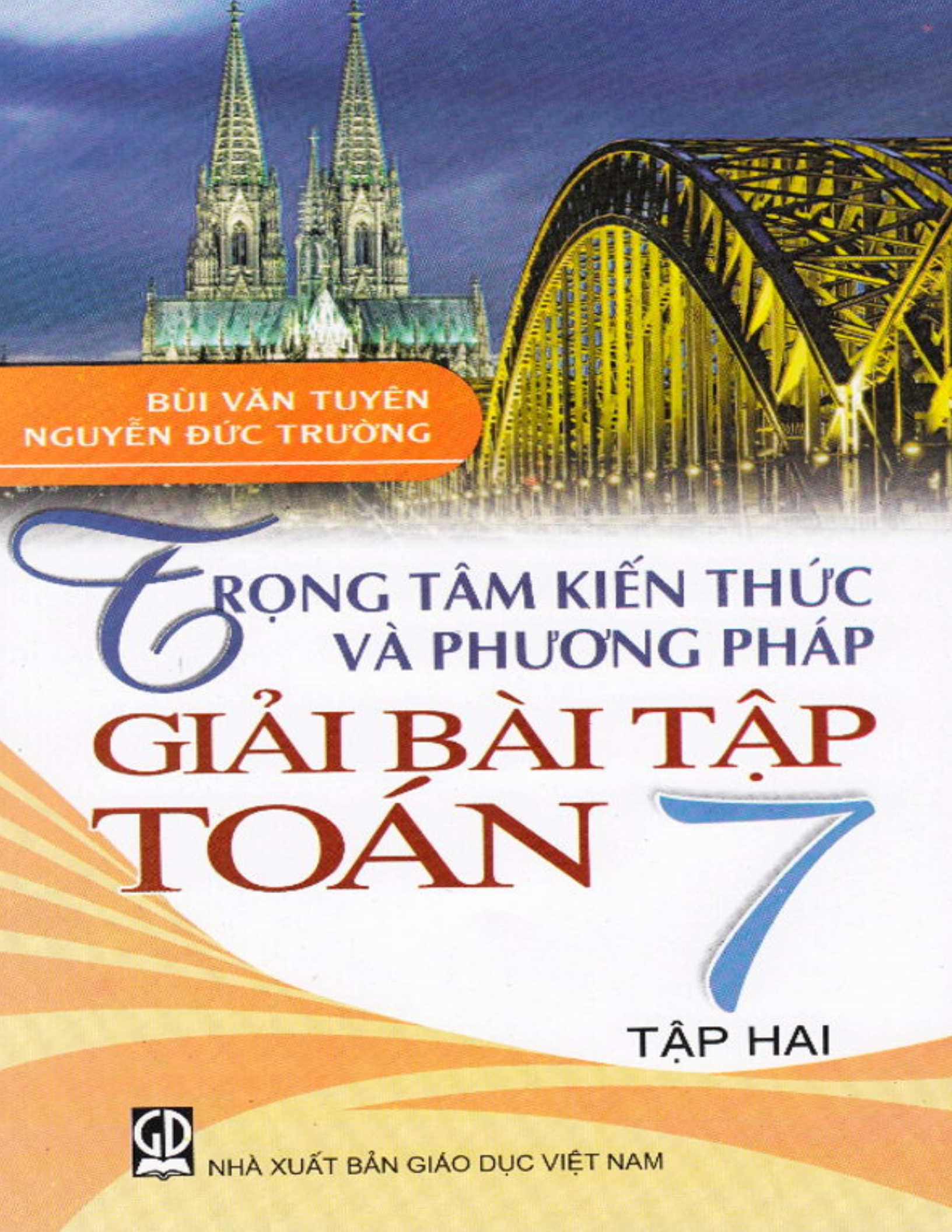


The background of the cover features a photograph of a Gothic cathedral with two prominent spires on the left and a large, illuminated arch bridge on the right. The scene is set at night with city lights reflecting on the water. An orange banner is positioned across the middle of the image.

BÙI VĂN TUYỀN
NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC
VÀ PHƯƠNG PHÁP
GIẢI BÀI TẬP
TOÁN

7
TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BÙI VĂN TUYÊN – NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

**TRỌNG TÂM KIẾN THỨC
VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP
TOÁN 7**

Tập hai

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến !

Các em đi học, ai cũng mong muốn mình học giỏi trong đó có môn Toán. Muốn vậy, các em cần nắm vững lí thuyết và biết cách vận dụng để giải bài tập. Lí thuyết thì nhiều và rộng nên cần biết chọn lọc đâu là vấn đề cơ bản, trọng tâm để học cho kĩ và ghi nhớ.

Bài tập có nhiều loại, vô cùng phong phú và đa dạng nên cần phân loại các dạng và đưa ra phương pháp giải của từng dạng ấy. Ngoài ra một điều quan trọng nữa là phải biết cách suy luận khi giải toán.

Cuốn sách này được biên soạn nhằm đáp ứng các yêu cầu trên đây của các em học sinh.

Sách được viết theo sát các chương và bài của sách giáo khoa. Mỗi bài gồm ba phần :

A. Trọng tâm kiến thức

Phần này tóm tắt các kiến thức cơ bản, trọng tâm của bài. Người ta thường nói "Có bột mới gột nên hồ", bột ở đây là các kiến thức cơ bản, trọng tâm của bài. Có nắm vững được thì mới có cơ sở để giải bài tập.

B. Các dạng bài tập và phương pháp giải

Quá trình "gột nên hồ" chính là quá trình luyện tập.

Dựa vào trọng tâm kiến thức đã nêu ở trên, các tác giả đã đưa ra các dạng bài tập để các em luyện giải.

Trong mỗi dạng có nêu ngắn gọn phương pháp giải và nhiều ví dụ minh họa. Điều đó giúp các em kinh nghiệm giải bài tập, định hướng được cách giải, các bước cần làm rồi thực hiện theo các bước đó.

Các bài toán trong mỗi ví dụ được lựa chọn là những bài tập tiêu biểu, đơn giản nhưng không tầm thường, chứa đựng nhiều kiến thức, kĩ năng và phương pháp suy luận mà chương trình đòi hỏi.

C. Bài tập tự luyện

Phần này gồm một số bài tập, có loại trung bình, có loại khó, giúp các em tự kiểm tra, đánh giá mức độ thành thạo của mình. Các em hãy cố gắng tự giải. Nếu gặp khó khăn có thể xem Hướng dẫn – Đáp số ở cuối bài. Các tác giả mong rằng cuốn sách này là một tài liệu có ích giúp các em tự học, tự đọc có kết quả.

Cuốn sách cũng cung cấp cho các thầy giáo, cô giáo những tài liệu tham khảo để chọn bài cho các tiết luyện tập, bồi dưỡng học sinh.

Các bậc phụ huynh cũng có thể dùng cuốn sách này để hướng dẫn con em học tập.

Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc cho cuốn sách.

Các ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ : Ban Biên tập sách Toán – Tin, Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, quận Đống Đa, Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III.

THỐNG KÊ

§1. THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ, TẦN SỐ

§2. BẢNG "TẦN SỐ" CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khi điều tra về một vấn đề nào đó, ta *thu thập số liệu*. Các số liệu ấy được ghi lại trong một bảng gọi là *bảng số liệu thống kê ban đầu*.

2. Vấn đề hay hiện tượng mà người điều tra quan tâm tìm hiểu gọi là *dấu hiệu* (kí hiệu bằng các chữ cái in hoa X, Y,...).

3. Ứng với mỗi đơn vị điều tra có một số liệu gọi là một *giá trị của dấu hiệu* (kí hiệu là x). Số các giá trị của dấu hiệu đúng bằng số các đơn vị điều tra (kí hiệu là N).

4. Số lần, xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu gọi là *tần số* của dấu hiệu đó (kí hiệu là n).

5. Từ bảng số liệu thống kê ban đầu có thể lập bảng "tần số" trong đó nêu rõ các giá trị khác nhau của dấu hiệu và các tần số tương ứng của các giá trị đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. Khai thác thông tin từ bảng số liệu thống kê ban đầu

Phương pháp giải

Ta cần xem xét :

- Dấu hiệu cần tìm hiểu.
- Số các giá trị của dấu hiệu (N).
- Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.
- Tần số của các giá trị khác nhau đó (n).

Ví dụ 1. Điểm kiểm tra học kì I môn Toán của 20 bạn trong một lớp được cho trong *bảng 1*.

7	8	7	9	8	10	9	6	7	5
8	9	8	7	10	6	9	7	7	8

Bảng 1

Hãy cho biết :

- Dấu hiệu ở đây là gì ?
- Số các giá trị của dấu hiệu ?
- Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu ?
- Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của dấu hiệu đó.

Giải

- Dấu hiệu ở đây : Điểm kiểm tra học kì I môn Toán của mỗi bạn.
- Số các giá trị của dấu hiệu là 20.
- Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 6.
- Các giá trị khác nhau là : 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Tần số của chúng lần lượt là : 1, 2, 6, 5, 4, 2.

Ví dụ 2. Số học sinh đi tham quan của các lớp được ghi trong *bảng 2*.

20	25	27	23	30	27	25	23
23	20	18	25	20	20	27	25
18	30	23	27	25	23	30	25

Bảng 2

Câu nào dưới đây **sai** ?

- (A) Dấu hiệu ở đây là số học sinh đi tham quan của mỗi lớp.
- (B) Số các giá trị của dấu hiệu là 24.
- (C) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 5.
- (D) Số các đơn vị điều tra là 24.

Giải

Có 6 giá trị khác nhau của dấu hiệu là :

18, 20, 23, 25, 27, 30. Vậy (C) sai.

Dạng 2. LẬP BẢNG "TẦN SỐ" VÀ RÚT RA NHẬN XÉT

Phương pháp giải

- Căn cứ vào bảng số liệu thống kê ban đầu, lập bảng tần số theo các bước sau :
 - Vẽ một khung hình chữ nhật gồm 2 dòng (hoặc 2 cột).
 - Dòng trên ghi các giá trị khác nhau của dấu hiệu theo thứ tự tăng dần.
 - Dòng dưới ghi các tần số tương ứng của mỗi giá trị đó.
 - Cuối cùng dưới ghi thêm giá trị của N.
- Rút ra nhận xét về :
 - Số các giá trị của dấu hiệu.
 - Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.
 - Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất.
 - Các giá trị thuộc khoảng nào là chủ yếu.

Ví dụ 1. Điểm kiểm tra học kì I môn Toán của 20 bạn trong một lớp được cho trong *bảng 3*

7	8	7	9	8	10	9	6	7	5
8	9	8	7	10	6	9	7	7	8

Bảng 3

Hãy lập bảng tần số và rút ra một số nhận xét.

Giải

• *Bảng tần số (bảng 4) :*

Giá trị (x)	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	1	2	6	5	4	2	N = 20

Bảng 4

• *Nhận xét :*

- Số các giá trị của dấu hiệu : 20.
- Số các giá trị khác nhau : 6.
- Điểm cao nhất là điểm 10, điểm thấp nhất là điểm 5 (không có điểm dưới trung bình).
- Điểm có tần số lớn nhất là 7.
- Điểm phổ biến nhất là điểm 7, điểm 8.

Ví dụ 2. Cho bảng số liệu thống kê ban đầu (*bảng 5*).

7	9	9	10	8	9	10	8	6	9
10	8	9	8	9	10	7	8	9	8
8	10	9	9	6	8	7	9	10	7

Bảng 5

Một bạn học sinh lập ra bảng "tần số" dưới đây (*bảng 6*).

Giá trị (x)	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	1	4	8	11	6	N = 30

Bảng 6

Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

- (A) Bảng 6 đúng hoàn toàn.
- (B) Bảng 6 có 2 cột sai.

(C) Bảng 6 có 3 cột sai.

(D) Bảng 6 có 4 cột sai.

Giải

Bảng 6 có hai cột sai : Tần số của giá trị 6 phải là 2 và tần số của giá trị 9 phải là 10. Chọn (B).

Ví dụ 3. Một cửa hàng ghi lại số xe đạp bán ra trong 14 ngày ở *bảng 7*.

15	16	12	10	12	15	16
12	15	10	20	16	15	15

Bảng 7

Hãy lập bảng tần số từ *bảng 7* rồi căn cứ vào đó, cho biết các khẳng định sau đúng sai thế nào ?

(A) Giá trị 10 có tần số nhỏ nhất.

(B) Giá trị 15 có tần số lớn nhất.

Giải

• Lập bảng tần số (*bảng 8*) :

Giá trị (x)	10	12	15	16	20	
Tần số (n)	2	3	5	3	1	N = 14

Bảng 8

• Giá trị 20 có tần số nhỏ nhất là 1. Vậy (A) sai.

• Giá trị 15 có tần số lớn nhất là 5. Vậy (B) đúng.

Ví dụ 4. Bảng 9 dưới đây thống kê điểm số một bài kiểm tra của 40 học sinh :

Loại điểm	4	5	6	7	8	9	10
Tần số (n)	1	0	x	15	10	y	2

Bảng 9

Biết số học sinh đạt từ điểm 8 trở lên chiếm tỉ lệ 40%. Hãy tính x và y.

Giải

Số học sinh đạt từ 8 trở lên là :

$$40 \cdot \frac{40}{100} = 16 \text{ (học sinh).}$$

Ta có $10 + y + 2 = 16 \Rightarrow y = 4$.

Mặt khác $1 + 0 + x + 15 + 10 + 4 + 2 = 40 \Rightarrow x = 8$.

Vậy $x = 8$; $y = 4$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Số tiền quyên góp ủng hộ đồng bào bị thiên tai của 20 bạn học sinh được cho trong *bảng 10* (đơn vị : nghìn đồng) :

5	10	8	7	5	8	5	5	10	5
7	6	5	10	8	6	10	5	6	8

Bảng 10

Hãy cho biết :

- Dấu hiệu ở đây là gì ?
 - Số các giá trị của dấu hiệu.
 - Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.
 - Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.
2. Chiều cao của mỗi cầu thủ trong một đội bóng được cho trong *bảng 11* (đơn vị : cm)

170	178	180	175	174	180	178	180	178
174	178	184	170	175	180	178	175	174

Bảng 11

- Dấu hiệu ở đây là gì ?
- Lập bảng tần số và rút ra một số nhận xét.

3. Một người thi bắn cung. Số điểm của mỗi lần bắn được ghi trong *bảng 12* dưới đây :

7	9	10	8	10	9	10	10	9	x
---	---	----	---	----	---	----	----	---	---

Bảng 12

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ?
b) Tìm x, biết số lần bắn trúng vòng 10 đạt tỉ lệ 50% số lần bắn.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Dấu hiệu ở đây là số tiền góp của mỗi bạn học sinh.
b) Số các giá trị của dấu hiệu là 20.
c) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 5.
d) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là : 5, 6, 7, 8, 10.
Tần số của chúng lần lượt là : 7 ; 3 ; 2 ; 4 ; 4.

2. a) Dấu hiệu ở đây là chiều cao của mỗi cầu thủ.
b) Xem *bảng 13* :

Giá trị (x)	170	174	175	178	180	184	
Tần số (n)	2	3	3	5	4	1	N = 18

Bảng 13

Nhận xét :

- Số các độ cao khác nhau là 6.
 - Cầu thủ cao nhất là 184cm, cầu thủ thấp nhất là 170cm.
 - Chiều cao phổ biến nhất là 178cm, 180cm.
3. a) Dấu hiệu ở đây là điểm của mỗi lần bắn.
b) Số lần bắn trúng vòng 10 là :

$$10 \times \frac{50}{100} = 5 \text{ (lần)}$$

Ở trong bảng đã có 4 điểm 10. Vậy điểm 10 thứ năm chính là x. Do đó x = 10.

§3. BIỂU ĐỒ

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- Biểu đồ cho ta một hình ảnh cụ thể về giá trị của dấu hiệu và tần số.
- Các loại biểu đồ : Biểu đồ đoạn thẳng, biểu đồ hình chữ nhật, biểu đồ hình quạt.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. DỰNG BIỂU ĐỒ ĐOẠN THẲNG (HOẶC BIỂU ĐỒ HÌNH CHỮ NHẬT)

Phương pháp giải

- Dụng hệ trục tọa độ : Trục hoành biểu diễn các giá trị x , trục tung biểu diễn tần số n .

Cũng có khi trục hoành biểu diễn thời gian, trục tung ghi các giá trị tương ứng của dấu hiệu.

- Vẽ các điểm có tọa độ đã cho trong bảng.
- Từ các điểm này vẽ các đoạn thẳng vuông góc với trục hoành.
- Nếu thay các đoạn thẳng bằng các cột hình chữ nhật có cùng độ cao thì ta được biểu đồ hình chữ nhật.

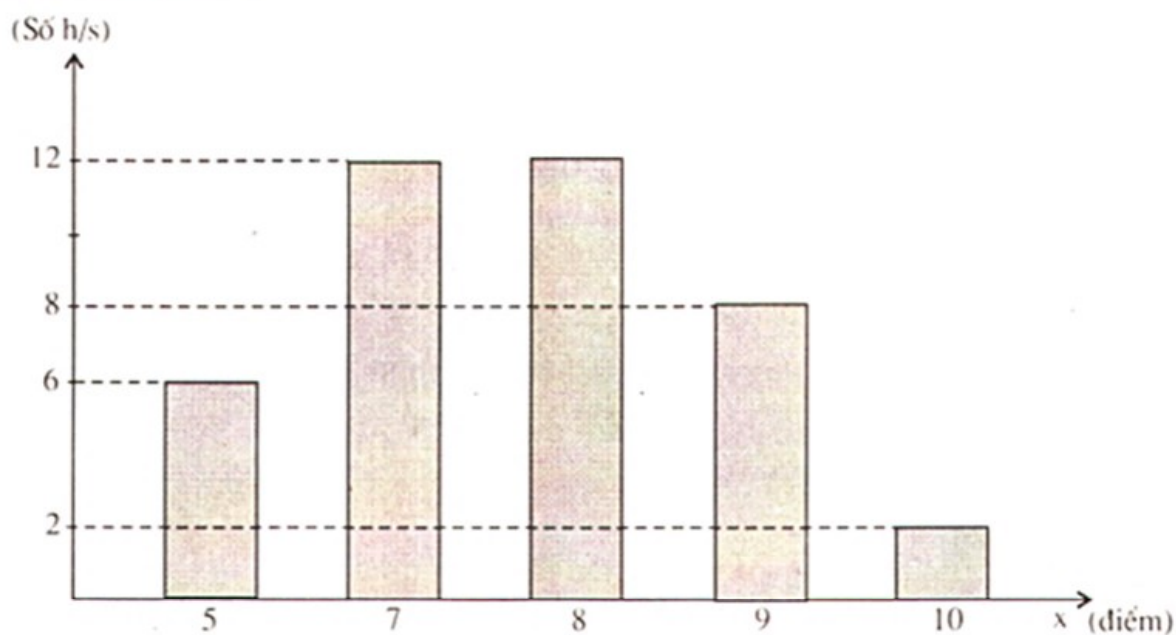
Ví dụ 1. Điểm kiểm tra học kì I môn Lịch sử của một lớp được cho trong *bảng 14* :

Giá trị (x)	5	7	8	9	10	
Tần số (n)	6	12	12	8	2	$N = 40$

Bảng 14

Hãy biểu diễn *bảng 14* bằng biểu đồ hình chữ nhật.

Giải. Xem hình 1 :



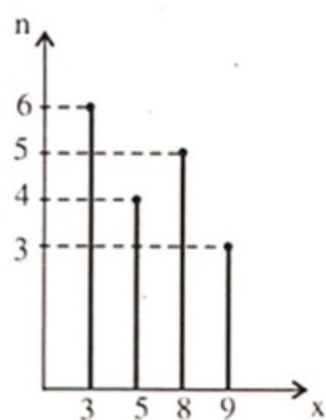
Hình 1

Ví dụ 2. Cho bảng tần số sau (bảng 15)

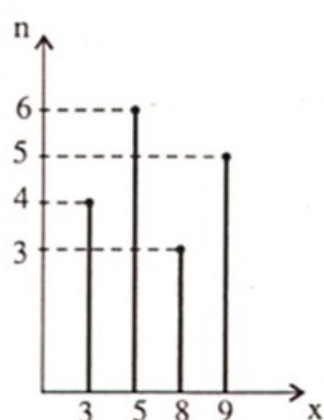
Giá trị (x)	3	5	8	9	
Tần số (n)	6	4	3	5	N = 18

Bảng 15

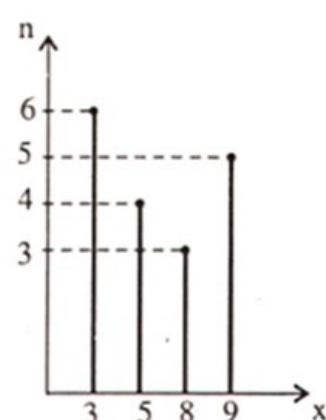
Có ba học sinh vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn bảng 15 như sau (h.2) :



a)



b)



c)

Hình 2

Hình nào biểu diễn đúng ?

Giải

Hình 2 a) và hình 2 b) biểu diễn sai.

Hình 2 c) biểu diễn đúng.

Dạng 2. DUNG BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT

Phương pháp giải

- Tính tần suất của mỗi giá trị theo công thức $f = \frac{n}{N}$ trong đó N là số các giá trị ; n là tần số của một giá trị, f là tần suất của giá trị đó (thường biểu diễn dưới dạng tỉ số phần trăm).
- Vẽ một hình tròn rồi chia ra thành các hình quạt mà góc ở tâm tỉ lệ với tần suất (tính góc ở tâm α bằng công thức $\alpha = 360^\circ \cdot f$).

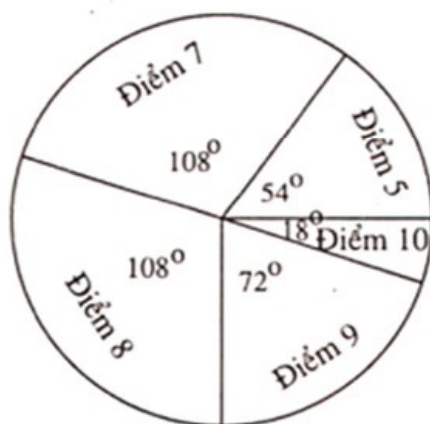
Ví dụ. Biểu diễn *bảng 14* bằng biểu đồ hình quạt.

Giải

Xem *bảng 16* và hình 3.

Giá trị (x)	5	7	8	9	10	
Tần số (n)	6	12	12	8	2	$N = 40$
Tần suất (f)	15%	30%	30%	20%	5%	100%
Số đo góc α ở tâm	54°	108°	108°	72°	18°	360°

Bảng 16



Hình 3

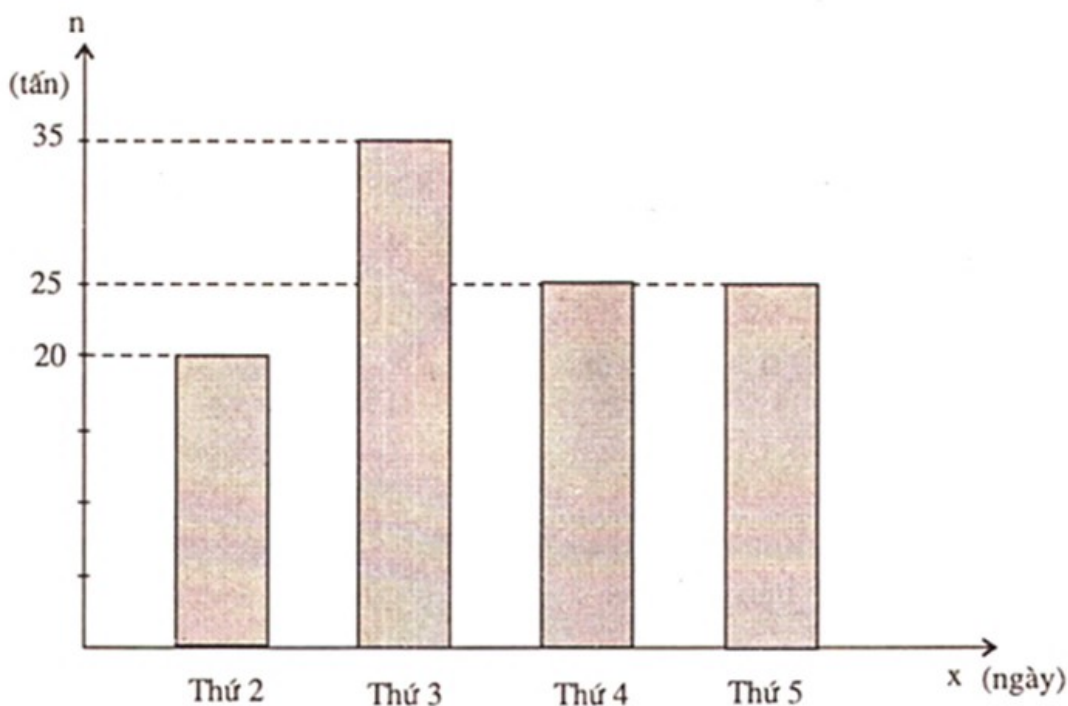
Dạng 3 : "ĐỌC" BIỂU ĐỒ

Phương pháp giải

Tìm hiểu các vấn đề sau :

- Biểu đồ biểu diễn cái gì ?
- Từng trục số biểu diễn giá trị của đại lượng nào ?
- Sự biến thiên của các giá trị như thế nào ?

Ví dụ 1. Biểu đồ ở hình 4 biểu diễn số gạo đã bán trong 4 ngày đầu tuần.



Hình 4

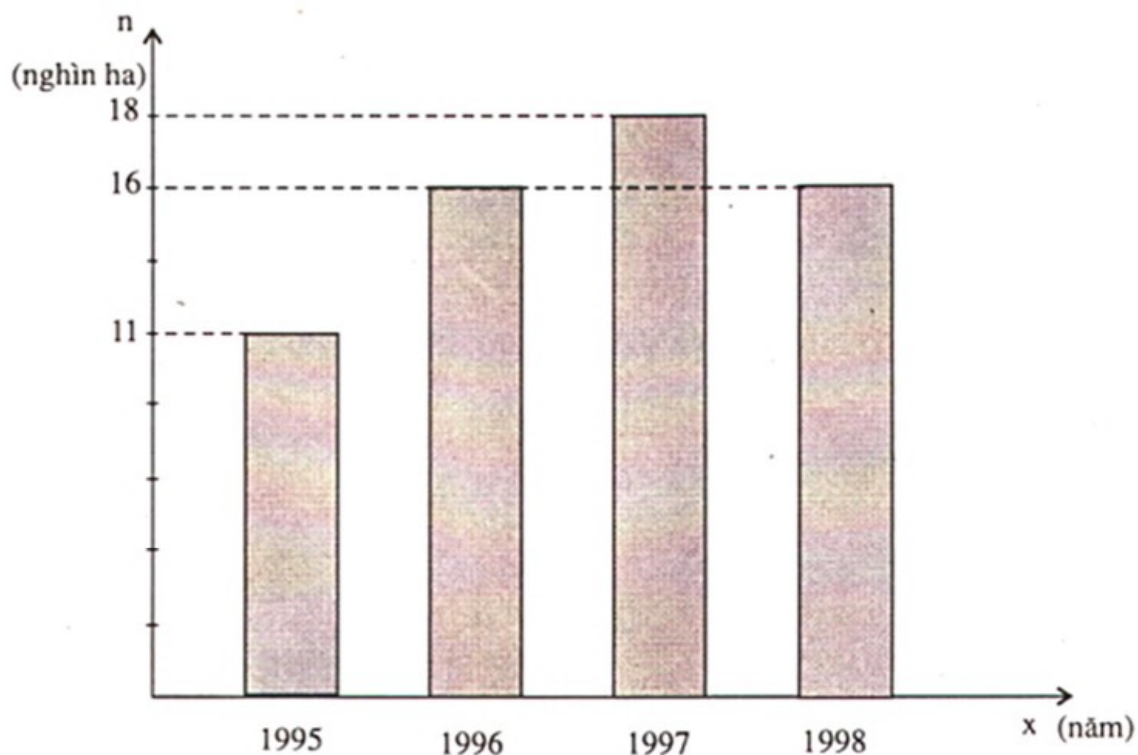
Hãy cho biết

- Ngày nào bán được ít nhất ? Bán được bao nhiêu tấn ?
- Khối lượng gạo bán trong ngày thứ ba hơn khối lượng gạo bán trong ngày thứ hai là bao nhiêu tấn ?
- So sánh khối lượng gạo bán trong ngày thứ tư và thứ năm.

Giải.

- Ngày thứ hai bán được ít gạo nhất : 20 tấn.
- Khối lượng gạo bán trong ngày thứ ba hơn ngày thứ hai là : $35 - 20 = 15$ (tấn).
- Khối lượng gạo bán trong ngày thứ tư và thứ năm là bằng nhau, cùng bằng 25 tấn.

Ví dụ 2. Diện tích trồng mía của Tây Nguyên trong các năm từ 1995 đến 1998 được biểu diễn bằng biểu đồ dưới đây (h.5) :



Hình 5

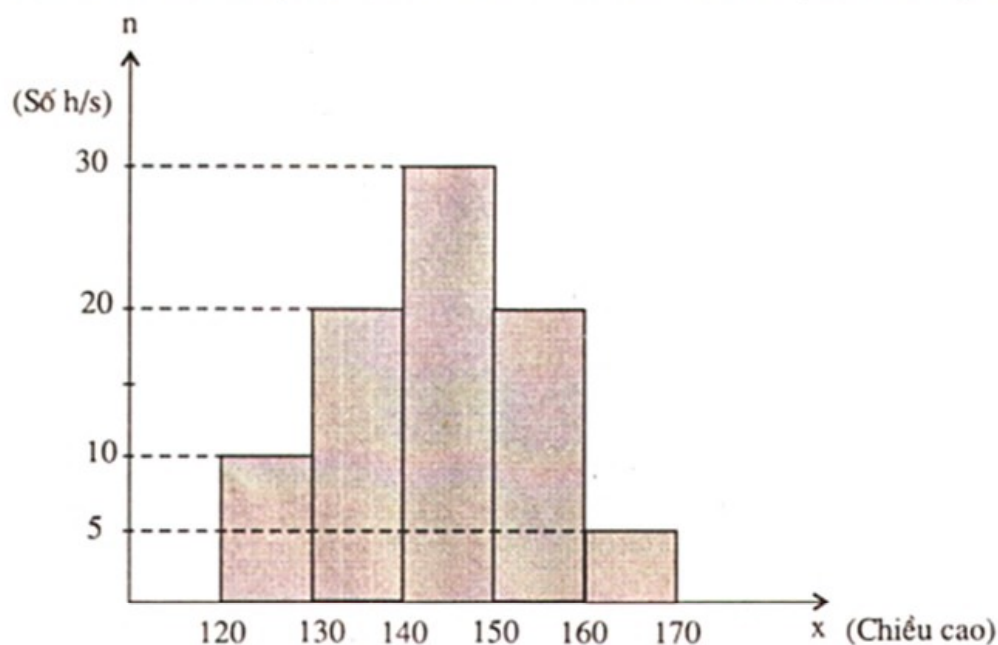
Căn cứ vào biểu đồ này hãy cho biết trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

- (A) Diện tích trồng mía lớn nhất của Tây Nguyên vào năm 1997.
- (B) Diện tích trồng mía của Tây Nguyên năm 1998 là 16 nghìn ha.
- (C) Diện tích trồng mía của Tây Nguyên trong các năm từ 1995 đến 1998 năm sau nhiều hơn năm trước.
- (D) Diện tích trồng mía của Tây Nguyên trong năm 1996 nhiều hơn năm 1995 là 5 nghìn ha.

Giải

- (A) Đúng (18 nghìn ha).
- (B) Đúng (16 nghìn ha).
- (C) Sai (vì năm 1998 trồng ít hơn năm 1997).
- (D) Đúng (vì $16 - 11 = 5$).

Ví dụ 3. Biểu đồ dưới đây (h.6) biểu diễn chiều cao của một nhóm học sinh.



Hình 6

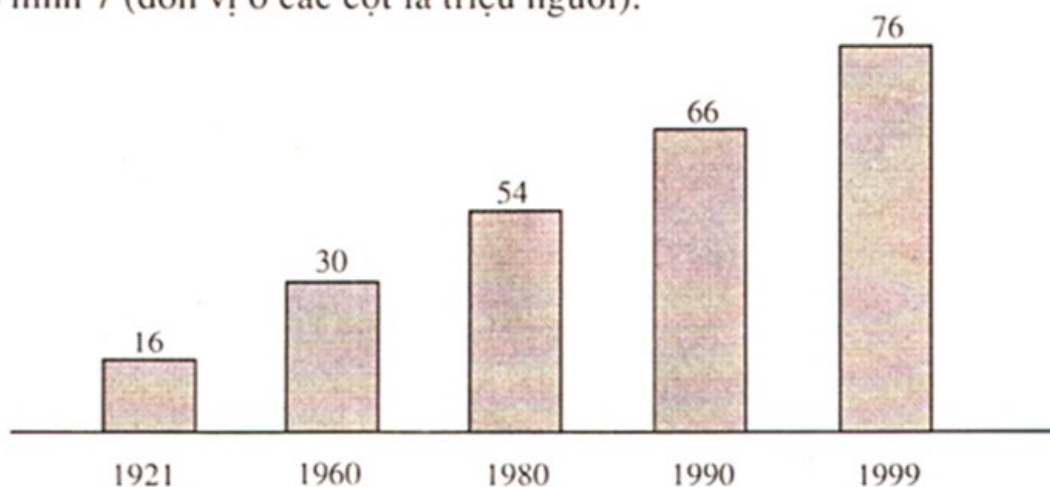
Hãy cho biết :

- Số học sinh có chiều cao trên 170cm.
- Tổng số học sinh trong nhóm đã cho.

Giải

- Số học sinh có chiều cao trên 170cm là : 0.
- Tổng số học sinh trong nhóm là : $10 + 20 + 30 + 20 + 5 = 85$ (học sinh).

Ví dụ 4. Dân số Việt Nam qua các đợt tổng điều tra được biểu diễn bằng biểu đồ hình 7 (đơn vị ở các cột là triệu người).



Hình 7

Từ biểu đồ này, một bạn học sinh lập ra bảng sau (bảng 17).

Năm	1921	1960	1980	1990	2000
Số dân (triệu người)	16	30	50	66	76

Bảng 17

Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

- (A) Bảng 17 sai một cột.
- (B) Bảng 17 sai hai cột.
- (C) Bảng 17 sai ba cột.
- (D) Bảng 17 đúng hoàn toàn.

Giải

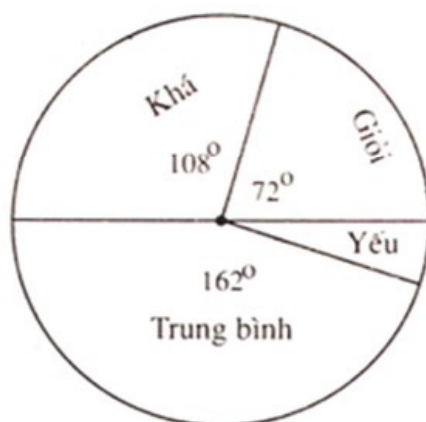
Bảng 17 có hai cột sai :

- Cột năm 1980 phải là 54 triệu người.
- Cột cuối cùng phải là năm 1999.

Chọn (B).

Ví dụ 5. Kết quả phân loại học lực học kì I của học sinh khối 7 được biểu diễn bằng biểu đồ hình quạt như hình 8 :

- a) Hãy cho biết tỉ lệ % học sinh đạt loại khá.
- b) Nếu số học sinh giỏi là 32 thì số học sinh trung bình là bao nhiêu ?



Hình 8

Giải

a) Tỷ lệ % học sinh đạt loại khá là :

$$108^{\circ} : 360^{\circ} = \frac{3}{10} = 30\%.$$

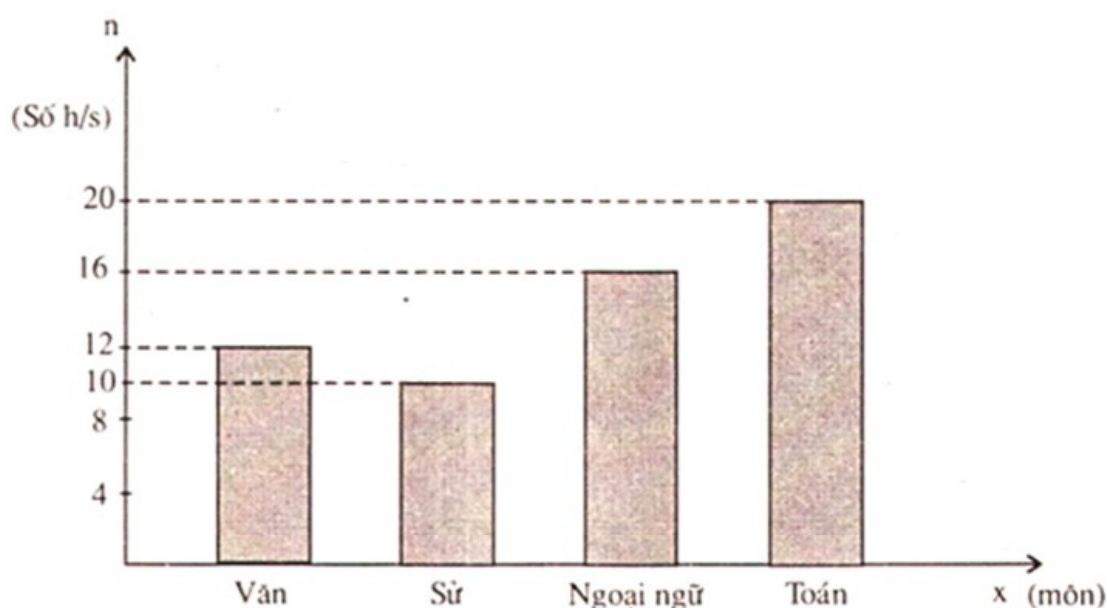
b) 72° ứng với 32 học sinh

$$162^{\circ} \text{ ứng với } \frac{32 \cdot 162}{72} = 72 \text{ (học sinh).}$$

Vậy số học sinh trung bình là 72 học sinh.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Số học sinh giỏi bộ môn trong một lớp học được biểu diễn bằng biểu đồ dưới đây (h.9) :



Hình 9

- a) Môn nào có nhiều học sinh giỏi nhất ? Có ít học sinh giỏi nhất ?
b) Số học sinh giỏi Ngoại ngữ là bao nhiêu ? Giỏi Văn là bao nhiêu ?

2. Số học sinh thi đỗ vào Đại học và Cao đẳng trong một xã được thống kê trong *bảng 18* :

Năm	2008	2009	2010	2011
Số học sinh đỗ	10	8	12	20

Bảng 18

- a) Hãy biểu diễn bảng trên bằng biểu đồ hình chữ nhật.
 b) Cột biểu diễn số học sinh đỗ vào Đại học và Cao đẳng năm 2011 cao gấp mấy lần năm 2009 ?
3. Số cây ăn quả trong một khu vườn được thống kê trong *bảng 19* :

Loại cây (x)	Cam	Quýt	Chanh	Bưởi
Số cây (n)	80	100	80	140

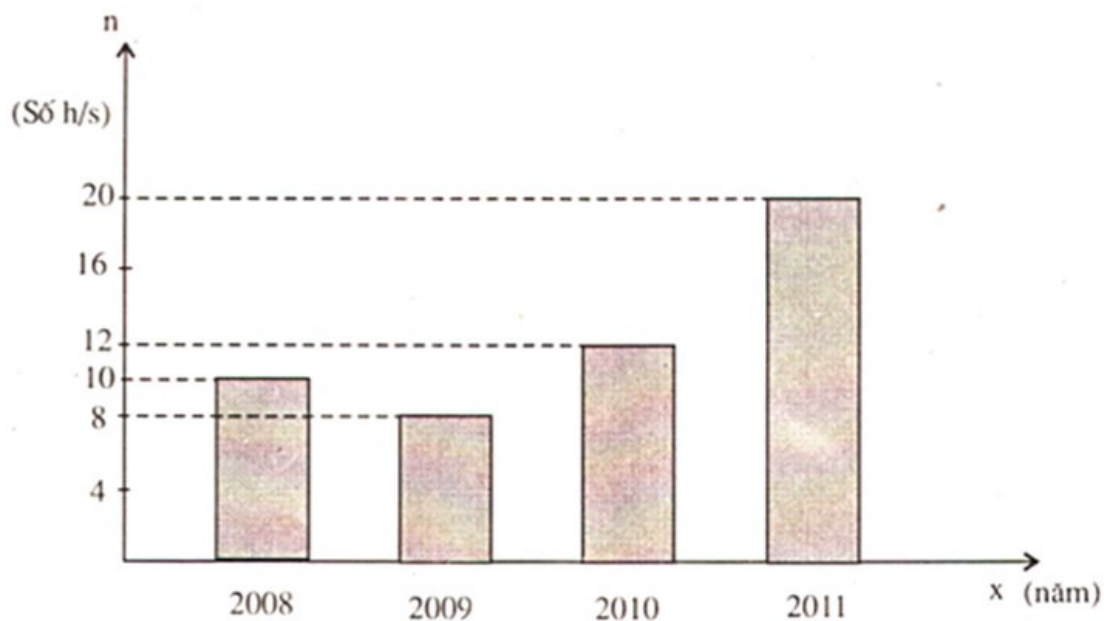
Bảng 19

Hãy biểu diễn bảng trên bằng :

- a) Biểu đồ hình chữ nhật ;
 b) Biểu đồ hình quạt.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

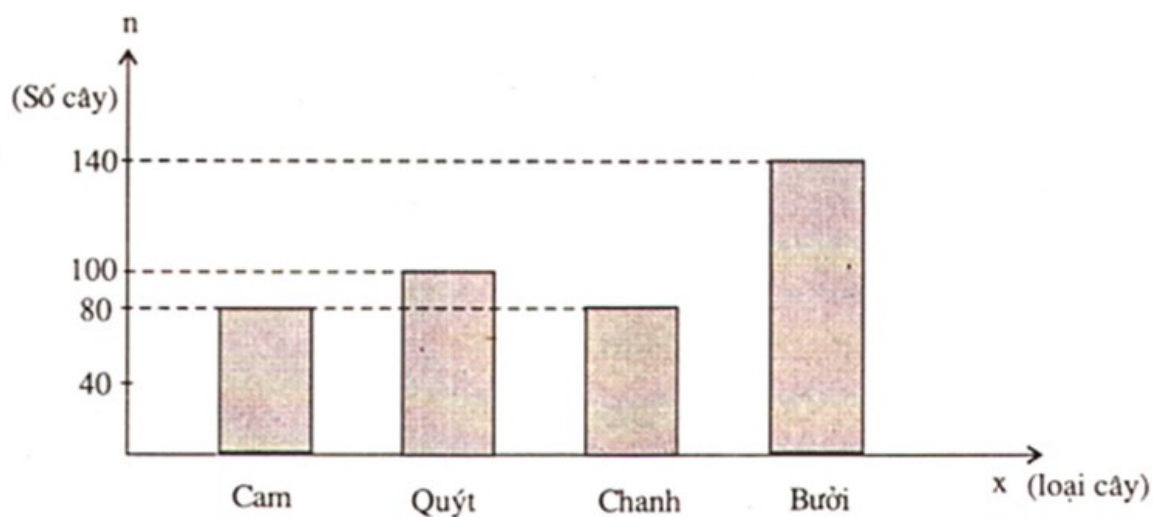
1. a) Môn Toán có nhiều học sinh giỏi nhất (20) ;
 Môn Sử có ít học sinh giỏi nhất (10).
 b) Số học sinh giỏi Ngoại ngữ là 16 ;
 Số học sinh giỏi Văn là 12.
2. a) Xem hình 10 :



Hình 10

b) Gấp 2,5 lần.

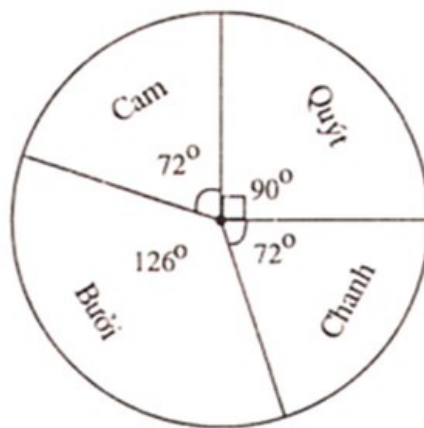
3. a) Xem hình 11a ; b) Xem bảng 20 và hình 11b.



Hình 11a

Loại cây	Cam	Quýt	Chanh	Bưởi	N = 400
Số cây	80	100	80	140	
Tỉ số %	20%	25%	20%	35%	
Số đo góc ở tâm	72°	90°	72°	126°	

Bảng 20



Hình 11b

§4. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Công thức tính số trung bình cộng của một dấu hiệu

Dựa vào bảng "tần số" (bảng dọc)

- Nhân từng giá trị với tần số tương ứng.
- Cộng tất cả các tích vừa tìm được.
- Chia tổng đó cho số các giá trị.

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + \dots + x_kn_k}{N}$$

2. Ý nghĩa của số trung bình cộng

- Số trung bình cộng thường được dùng làm "đại diện" cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại.
- Khi các giá trị của dấu hiệu có khoảng cách chênh lệch rất lớn thì không nên lấy số trung bình cộng làm "đại diện" cho dấu hiệu đó.

3. Mốt của dấu hiệu (kí hiệu M_0) :

Là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng "tần số".

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. Tính số trung bình cộng của dấu hiệu

Phương pháp giải

- Lập bảng "tần số" của dấu hiệu (bảng dọc).
- Thêm hai cột :
 - Cột tính các tích (x.n)
 - Cột tính $\bar{X} = \frac{\text{Tổng các tích (x.n)}}{N}$

Ví dụ 1. Bảng 21 dưới đây thống kê điểm một bài kiểm tra của học sinh trong một lớp. Tính điểm trung bình của bài kiểm tra này.

Điểm số (x)	4	5	6	7	8	9	10	
Số lượng (n)	1	0	8	18	7	4	2	N = 40

Bảng 21

Giải

Ta có bảng 22 dưới đây :

Điểm số (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
4	1	4	
5	0	0	
6	8	48	
7	18	126	
8	7	56	
9	4	36	
10	2	20	
	N = 40	Tổng : 290	$\bar{X} = \frac{290}{40} \approx 7,3.$

Bảng 22

Ví dụ 2. Một xe ô-tô chạy quãng đường AB trong 5 giờ (không kể nghỉ). Hai giờ đầu xe chạy với vận tốc 60km/h. Giờ thứ ba xe chạy với vận tốc 70km/h. Hai giờ cuối xe chạy với vận tốc 50km/h. Tính vận tốc trung bình của ô-tô trên quãng đường AB.

Giải. Ta có bảng 23.

Vận tốc (x)	Thời gian (n)	Quãng đường (x.n)	
60	2	120	
70	1	70	
50	2	100	
	N = 5	Tổng : 290	$\bar{X} = \frac{290}{5} = 58.$

Bảng 23

Vận tốc trung bình của ô-tô trên quãng đường AB là 58km/h.

Ví dụ 3. Tần số các giá trị của một dấu hiệu được ghi trong bảng 24. Tính số trung bình cộng của dấu hiệu.

Giá trị (x)	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	5	9	y	7	6	N = 40

Bảng 24

Giải. Trước hết ta tìm y, từ đó dễ dàng tìm được $\bar{X}$.

Ta có $5 + 9 + y + 7 + 6 = 40 \Rightarrow y = 13$. Ta có bảng sau (bảng 25) :

Giá trị (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
6	5	30	
7	9	63	
8	13	104	
9	7	63	
10	6	60	
	N = 40	Tổng : 320	$\bar{X} = \frac{320}{40} = 8.$

Bảng 25

Ví dụ 4. Bảng 26 là bảng "tần số" các giá trị của một dấu hiệu. Biết số trung bình cộng của dấu hiệu là 36. Tính x và y.

Giá trị (x)	30	34	37	x	45	
Tần số (n)	14	9	7	y	3	N = 50

Bảng 26

Giải

Trước hết tìm y ta được :

$$14 + 9 + 7 + y + 3 = 50 \Rightarrow y = 17.$$

Ta có :

$$\frac{30.14 + 34.9 + 37.7 + x.17 + 45.3}{50} = 36$$

Do đó :

$$17.x + 1120 = 1800$$

$$17.x = 680$$

$$x = 680 : 17$$

$$x = 40.$$

Vậy $x = 40$; $y = 17$.

Ví dụ 5. Đo chiều cao của 85 học sinh (đơn vị đo : cm) được kết quả trong bảng 27. Tính chiều cao trung bình của số học sinh nói trên.

Chiều cao (x)	Tần số (n)
120 – 130	10
130 – 140	20
140 – 150	30
150 – 160	20
160 – 170	5

Giải

Bảng "tần số" cho trong đề bài là bảng "tần số" "ghép lớp". Trước hết ta tính giá trị trung tâm của mỗi lớp bằng cách tính trung bình cộng trong từng khoảng. Sau đó tính số trung bình cộng như *bảng 28* dưới đây :

Chiều cao x	Giá trị trung tâm	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
120 – 130	125	10	1250	
130 – 140	135	20	2700	
140 – 150	145	30	4350	
150 – 160	155	20	3100	
160 – 170	165	5	825	
			Tổng : 12225	$\bar{X} = \frac{12225}{85} \approx 144 \text{ (cm).}$

Bảng 28

Dạng 2. TÌM MỐT CỦA DẤU HIỆU

Phương pháp giải

- Lập bảng tần số các giá trị của dấu hiệu.
- Xem giá trị nào của dấu hiệu có tần số lớn nhất, giá trị đó chính là một cận tìm.

Ví dụ 1. Một xạ thủ thi bắn cung. Điểm số của 30 lần bắn được ghi lại trong *bảng 29*. Tìm một của dấu hiệu.

8	10	8	9	6	9	9	8	9	10
9	9	10	9	7	9	8	10	9	9
9	7	9	10	9	8	10	8	10	9

Bảng 29

Giải

Trước hết ta lập bảng "tần số" các giá trị của dấu hiệu (*bảng 30*) :

Điểm số (x)	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	1	2	6	14	7	N = 30

Bảng 30

Trong bảng trên, giá trị có tần số lớn nhất là điểm 9. Vậy mốt của giá trị là $M_0 = 9$.

Ví dụ 2. Trong đợt quyên góp ủng hộ đồng bào bị lũ lụt, các bạn học sinh lớp 7A ủng hộ một số tiền và đã được thống kê trong *bảng 31* (đơn vị là nghìn đồng).

2	8	5	2	10	5	8	10	5	2
5	4	2	5	8	8	2	4	5	2
2	5	5	8	2	4	2	5	2	5
8	10	4	2	5	10	5	2	8	4

Bảng 31

- Tìm mốt của dấu hiệu.
- Tính số trung bình cộng của dấu hiệu.

Giải.

Trước hết ta lập bảng "tần số" của dấu hiệu (*bảng 32*) :

Mức góp (x)	2	4	5	8	10	
Số học sinh (n)	12	5	12	7	4	N = 40

Bảng 32

- Ta thấy giá trị có tần số lớn nhất là 2 và 5. Vậy $M_0 = 2$; $M_0 = 5$.
- Số trung bình cộng của dấu hiệu là :

$$\bar{X} = \frac{2.12 + 4.5 + 5.12 + 8.7 + 10.4}{40} = 5 \text{ (nghìn đồng).}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Số tiền quyên góp ủng hộ đồng bào bị thiên tai của 20 bạn học sinh được thống kê trong *bảng 33* (đơn vị : nghìn đồng).

Tính xem trung bình mỗi bạn đã ủng hộ bao nhiêu tiền ?

5	10	8	7	5	8	5	5	10	5
7	6	5	10	8	6	10	5	6	8

Bảng 33

2. Chiều cao của mỗi cầu thủ trong một đội bóng được cho trong *bảng 34* (đơn vị : cm).

170	178	180	175	174	180	178	180	178
174	178	184	170	175	180	178	175	174

Bảng 34

- a) Tính chiều cao trung bình của mỗi cầu thủ.
b) Tìm mốt của dấu hiệu.
3. Một người thi bắn cung. Số điểm của mỗi lần bắn được ghi trong *bảng 35*.

7	9	10	8	10	9	10	10	9	10
---	---	----	---	----	---	----	----	---	----

Bảng 35

- a) Tính điểm trung bình của mỗi lần bắn.
b) Tìm mốt của dấu hiệu.
4. *Bảng 36* là bảng tần số các giá trị của dấu hiệu.

Giá trị (x)	15	18	22	24	x	
Tần số (n)	3	y	5	7	6	N = 25

Bảng 36

- a) Tìm y, từ đó tìm mốt của dấu hiệu.
b) Tìm x, biết số trung bình cộng của dấu hiệu là 23.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Xem *bảng 37* dưới đây :

Mức góp (x)	Tần số (n)	Các tích (xn)	
5	7	35	
6	3	18	
7	2	14	
8	4	32	
10	4	40	
	N = 20	Tổng : 139	$\bar{X} = \frac{139}{20} = 6,95 \approx 7$ (nghìn đồng).

Bảng 37

2. a) Xem *bảng 38* dưới đây :

Chiều cao (x)	Tần số (n)	Các tích (xn)	
170	2	340	
174	3	522	
175	3	525	
178	5	890	
180	4	720	
184	1	184	
	N = 18	Tổng : 3181	$\bar{X} = \frac{3181}{18} = 176,72 \approx 177$ (cm).

Bảng 38

b) $M_0 = 178$.

3. a) $\bar{X} = 9,2$;

b) $M_0 = 10$.

4. a) $y = 4 \Rightarrow M_0 = 24$.

b) $x = 30$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Thu thập số liệu thống kê, tần số

- Làm quen với bảng số liệu thống kê ban đầu, bảng "tần số".
- Một số khái niệm : Dấu hiệu, các giá trị của dấu hiệu, tần số.

2. Biểu đồ

Gồm biểu đồ đoạn thẳng, biểu đồ hình chữ nhật, biểu đồ hình quạt.

3. Số trung bình cộng

Công thức tính số trung bình cộng ; một của dấu hiệu.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. LẬP BẢNG "TẦN SỐ" VÀ KHAI THÁC THÔNG TIN TỪ BẢNG "TẦN SỐ"

Phương pháp giải

- Có hai dòng (hoặc hai cột) :
 - Các giá trị khác nhau của dấu hiệu.
 - Các tần số tương ứng.
- Rút ra nhận xét.

Ví dụ 1. Người ta chọn ra 40 quả táo tùy ý trong một rổ táo rồi đem cân từng quả, kết quả được ghi lại trong *bảng 39* dưới đây (đơn vị : gam).

21	20	18	19	20	22	19	21	20	19
19	22	21	20	22	21	21	22	21	20
20	21	20	19	18	19	20	19	20	22
19	19	20	20	19	20	21	18	19	19

Bảng 39

Hãy lập bảng "tần số" và rút ra một số nhận xét.

Giải

- Lập bảng "tần số" (xem *bảng 40*) dưới đây :

Giá trị (x)	18	19	20	21	22	
Tần số (n)	3	12	12	8	5	N = 40

Bảng 40

- Nhận xét :

- Số các giá trị của dấu hiệu là 40.
- Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 5.
- Giá trị lớn nhất của dấu hiệu là 22, giá trị nhỏ nhất của dấu hiệu là 18.
- Các giá trị phổ biến nhất là 19, 22.

Ví dụ 2. Từ *bảng 40* trên đây, hãy cho biết các khẳng định sau đúng hay sai ?

- (A) Không có quả táo nào có khối lượng trên 22g.
- (B) Không có quả táo nào có khối lượng dưới 19g.
- (C) Mốt của dấu hiệu là 19 và 20.

Giải

- (A) Đúng vì giá trị lớn nhất của dấu hiệu là 22 (gam).
- (B) Sai vì có những quả táo có khối lượng là 18 (gam).
- (C) Đúng vì cả hai giá trị 19 và 20 đều có tần số lớn nhất là 12.

Dạng 2. DÙNG BIỂU ĐỒ VÀ ĐỌC BIỂU ĐỒ

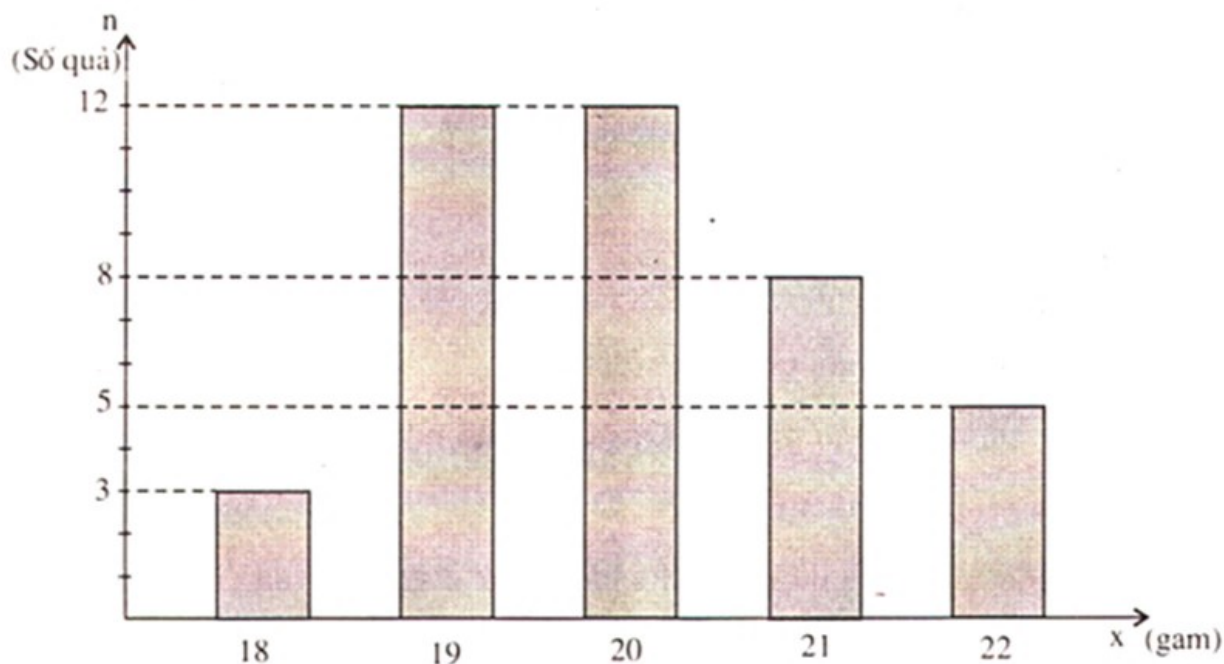
Phương pháp giải

- Dựng hệ trục tọa độ.
- Vẽ các điểm có tọa độ đã cho trong bảng.
- Từ các điểm này vẽ các đoạn thẳng vuông góc với trục hoành. Có thể thay các đoạn thẳng này bằng các cột có cùng độ cao.

Ví dụ 1. Dựng biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn các giá trị và tần số của chúng qua *bảng 40* trên đây.

Giải

Từ *bảng 40* ta có biểu đồ hình chữ nhật như sau (h.12) :



Hình 12

Ví dụ 2. Trong biểu đồ ở ví dụ 1, cột biểu diễn số quả có khối lượng 19 gam cao gấp mấy lần cột biểu diễn số quả có khối lượng 18 gam ?

Cột biểu diễn số quả có khối lượng 21 gam cao gấp mấy lần cột biểu diễn số quả có khối lượng 22 gam ?

Giải

- Cột biểu diễn số quả có khối lượng 19 gam so với cột biểu diễn số quả có khối lượng 18 gam thì cao gấp : $12 : 3 = 4$ (lần).
- Cột biểu diễn số quả có khối lượng 21 gam so với cột biểu diễn số quả có khối lượng 22 gam thì cao gấp : $8 : 5 = 1,6$ (lần).

Ví dụ 3. Nếu biểu diễn *bảng 40* trên đây bằng biểu đồ hình quạt thì mỗi loại quả tảo ứng với một hình quạt có góc ở tâm là bao nhiêu độ ?

Giải

- Góc ở tâm của hình quạt biểu diễn số quả táo có khối lượng 18 gam là :

$$\frac{360^\circ \cdot 3}{40} = 27^\circ.$$

- Góc ở tâm của hình quạt biểu diễn số quả táo có khối lượng 19 gam (hoặc 20 gam) là :

$$\frac{360^\circ \cdot 12}{40} = 108^\circ.$$

- Góc ở tâm của hình quạt biểu diễn số quả táo có khối lượng 21 gam là :

$$\frac{360^\circ \cdot 8}{40} = 72^\circ.$$

- Góc ở tâm của hình quạt biểu diễn số quả táo có khối lượng 22 gam là :

$$\frac{360^\circ \cdot 5}{40} = 45^\circ.$$

Dạng 3. TÍNH SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

Phương pháp giải

Dùng công thức $\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{N}$

Ví dụ 1. Tính khối lượng trung bình của mỗi quả táo trong *bảng 40* ở trên.

Giải

Ta có bảng sau (*bảng 41*) :

Giá trị (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
18	3	54	
19	12	228	
20	12	240	
21	8	168	
22	5	110	
	N = 40	Tổng : 800	$\bar{X} = \frac{800}{40} = 20 \text{ (g)}.$

Bảng 41

Ví dụ 2. Điểm thi học kì các môn của một học sinh được ghi trong *bảng 42* dưới đây :

Môn	Toán	Lí	Sinh học	Ngữ văn	Lịch sử	Địa lí	Ngoại ngữ	Công nghệ	Giáo dục công dân
Điểm thi	9	10	8	8	9	6	9	9	9

Bảng 42

- Tính điểm trung bình các môn thi trong bảng trên.
- Tìm một của dấu hiệu trong bảng trên.

Giải

- Ta có bảng (*bảng 43*) dưới đây :

Giá trị (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
6	1	6	
8	2	16	
9	5	45	
10	1	10	
	N = 9	Tổng : 77	$\bar{X} = \frac{77}{9} = 8,55... \approx 8,6$

Bảng 43

- $M_0 = 9$.

Ví dụ 3. *Bảng 44* là bảng tần số của một dấu hiệu. Biết số trung bình cộng của dấu hiệu là 3,15. Tính m và n.

Giá trị (x)	1	2	3	4	5	
Tần số (n)	m	n	8	2	5	N = 20

Bảng 44

Giải

Ta có $m + n + 8 + 2 + 5 = 20 \Rightarrow m + n = 5$. (1)

Mặt khác $\frac{1.m + 2.n + 3.8 + 4.2 + 5.5}{20} = 3,15,$

suy ra $m + 2n = 63 - 57$

$m + 2n = 6. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $n = 1$ và $m = 4$.

Vậy $m = 4$; $n = 1$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tuổi đời của một số người trong một Đội thanh niên xung phong được thống kê trong *bảng 45*.

26	23	30	20	25	25	30	20	23	30
20	25	20	23	30	23	25	30	25	25
25	23	26	25	26	20	26	25	30	26

Bảng 45

- Dấu hiệu ở đây là gì ?
 - Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu ?
 - Người nhiều tuổi nhất là bao nhiêu tuổi ? Ít tuổi nhất là bao nhiêu tuổi ?
 - Tính tuổi trung bình của toàn Đội.
 - Tìm mốt của dấu hiệu.
 - Dựng biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn tuổi đời của Đội thanh niên xung phong nói trên.
2. Người ta lấy 20 gói chè rồi đem cân từng gói, kết quả được ghi lại trong *bảng 46* dưới đây (đơn vị : gam)

50	49	51	48	50	50	51	49	50	49
51	50	50	50	49	50	51	50	48	50

Bảng 46

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ?
 - b) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu ?
 - c) Tính khối lượng trung bình của mỗi gói.
 - d) Tìm mốt của dấu hiệu.
 - e) Dựng biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn các giá trị và tần số của chúng.
3. Trong một giải bóng đá có 15 trận đấu. Số bàn thắng trong mỗi trận đấu được ghi trong *bảng 47* dưới đây :

2	0	1	4	3	1	0	2
1	3	1	3	1	2	3	

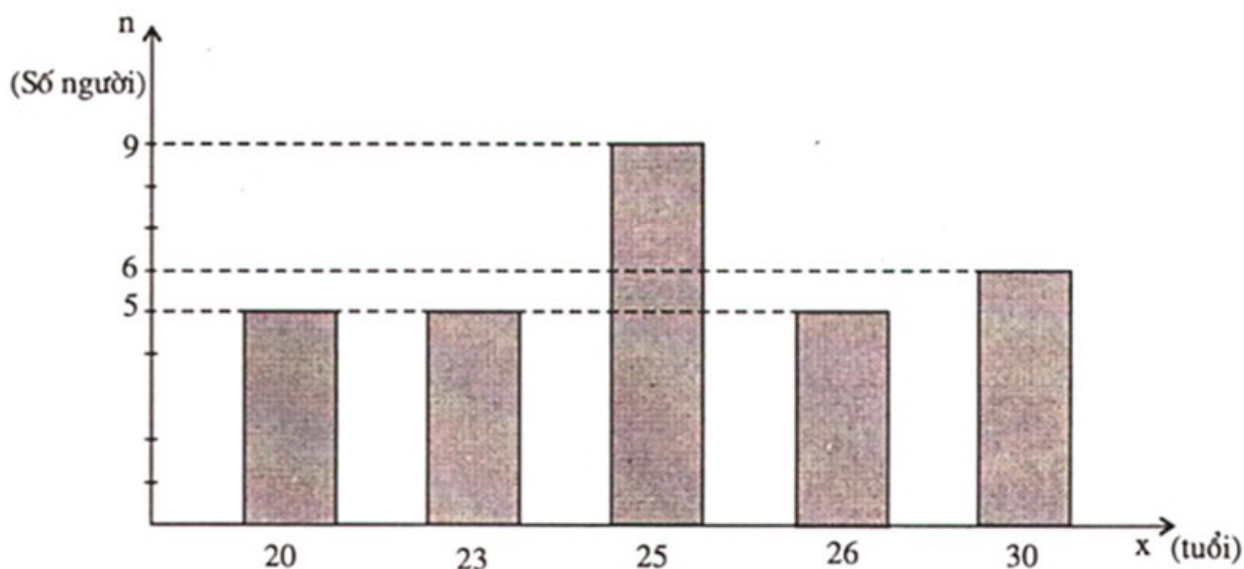
Bảng 47

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ?
- b) Tính số bàn thắng trung bình trong mỗi trận.
- c) Tìm mốt của dấu hiệu.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. b) 5 ; c) 30 ; 20 ; d) $\bar{X} = 25$; e) $M_0 = 25$.

f) Xem hình 13 dưới đây :



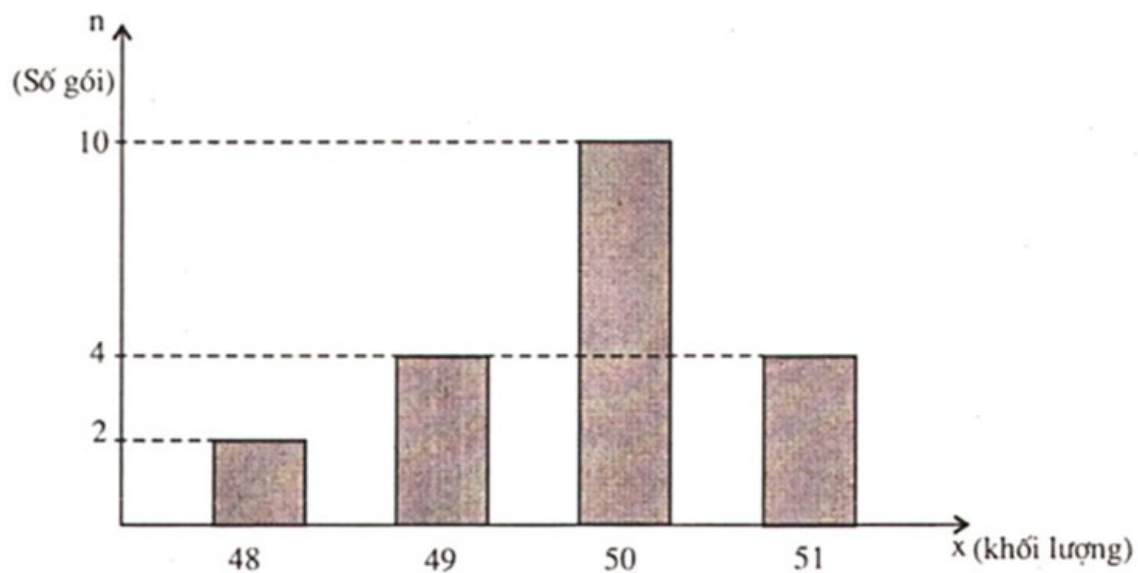
Hình 13

2. b) 4 ;

c) $\bar{X} = 49,9$ (gam) ;

d) $M_0 = 50$.

e) Xem hình 14 dưới đây :



Hình 14

3. b) $\bar{X} = 1,8$;

c) $M_0 = 1$.

§1. KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§2. GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khái niệm về biểu thức đại số

- Trong toán học, vật lí,..... ta thường gặp những biểu thức mà trong đó ngoài các số, các kí hiệu phép toán cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, còn cả các chữ (đại diện cho các số). Người ta gọi những biểu thức như vậy là biểu thức đại số.

- Trong biểu thức đại số, các chữ có thể đại diện cho những số tùy ý nào đó. Người ta gọi những chữ như vậy là biến số (còn gọi tắt là biến).

- Trong biểu thức đại số, vì chữ đại diện cho số nên khi thực hiện các phép toán trên các chữ, ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc như trên các số.

2. Giá trị của một biểu thức đại số

Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay các giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. VIẾT CÁC BIỂU THỨC ĐẠI SỐ THEO ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

Dùng các chữ, các số và các phép toán để diễn đạt các điều kiện.

Ví dụ 1. Viết biểu thức để diễn đạt ý :

- a) Hiệu các bình phương của a và b ;
- b) Bình phương của hiệu a và b ;
- c) Tích của x và y lập phương ;
- d) Tích của tổng a và b với hiệu của a và b.

Giải

- a) Hiệu các bình phương của a và b là : $a^2 - b^2$.
- b) Bình phương của hiệu a và b là : $(a - b)^2$.
- c) Tích của x và y lập phương là : xy^3 .
- d) Tích của tổng a và b với hiệu của a và b là : $(a + b)(a - b)$.

Ví dụ 2.Viết các biểu thức đại số biểu thị :

- a) Tổng các bình phương của hai số a và b.
- b) Tổng của hai lần bình phương số a và số b.
- c) Tổng của x bình phương và y lập phương.
- d) Nửa tổng các bình phương của hai số a và b.

Giải

- a) $a^2 + b^2$;
- b) $2a^2 + b$;
- c) $x^2 + y^3$;
- d) $\frac{a^2 + b^2}{2}$.

Dạng 2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Phương pháp giải

- Thay các chữ bởi các giá trị số đã cho.
- Thực hiện các phép tính theo thứ tự thực hiện các phép tính.

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $A = 2x^2 - 5x - 5$ tại $x = -2$ và $x = \frac{1}{2}$.

Giải

- Thay $x = -2$ vào biểu thức đã cho ta được $A = 2.(-2)^2 - 5.(-2) - 5 = 13$.

Vậy giá trị của biểu thức $A = 2x^2 - 5x - 5$ tại $x = -2$ là 13.

- Thay $x = \frac{1}{2}$ vào biểu thức đã cho ta được $A = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5.\left(\frac{1}{2}\right) - 5 = -7$.

Vậy giá trị của biểu thức $A = 2x^2 - 5x - 5$ tại $x = \frac{1}{2}$ là -7.

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x - y}$ tại $x = 3$; $y = -1$.

Giải

Thay $x = 3$; $y = -1$ vào biểu thức ta được : $B = \frac{3^2 + 2.3.(-1) + (-1)^2}{3 - (-1)}$

$$B = \frac{9 - 6 + 1}{3 + 1} = 1.$$

Vậy với $x = 3$; $y = -1$ thì giá trị biểu thức B là 1.

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $x^2 + xy - yz$ khi $x = -2$; $y = 3$; $z = 5$.

Giải

Thay $x = -2$; $y = 3$; $z = 5$ vào biểu thức ta có :

$$(-2)^2 + (-2).3 - 3.5 = 4 - 6 - 15 = -17.$$

Vậy với $x = -2$; $y = 3$; $z = 5$ thì giá trị biểu thức là -17.

Ví dụ 4. Cho biểu thức $P = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)...(x^2 - 2015)$.

Tính giá trị của P tại x thoả mãn $(x^2 + 2010)(x - 10) = 0$.

Giải

Từ $(x^2 + 2010)(x - 10) = 0$ ta có $x - 10 = 0$ vì $x^2 + 2010 > 0$.

Suy ra $x = 10$ do vậy $x^2 = 100$ nên $x^2 - 100 = 0$.

Vậy $P = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3) \dots (x^2 - 100) \dots (x^2 - 2015) = 0$.

Dạng 3. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC KHI BIẾT MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN

Phương pháp giải

- Sử dụng biểu thức liên hệ giữa các biến để xác định giá trị của các biến hoặc biểu thị biến này qua biến kia.
- Thay vào biểu thức đã cho để tính giá trị của nó.

Ví dụ 1. Tính giá trị biểu thức $A = 2x + \frac{x - y}{x + 2y}$.

Biết $x ; y$ thoả mãn $(x - 2)^2 + |y - 1| = 0$.

Giải

Ta có : $(x - 2)^2 \geq 0$,

$$|y - 1| \geq 0$$

nên $(x - 2)^2 + |y - 1| = 0$ xảy ra khi và chỉ khi $x = 2 ; y = 1$.

Thay vào biểu thức A, ta có : $A = 2.2 + \frac{2 - 1}{2 + 2.1} = 4\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{3a - b}{4a + b}$, biết $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$.

Giải

Cách 1. $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ nên $a = \frac{5}{2}b$. Thay vào biểu thức B ta có :

$$B = \frac{3 \cdot \frac{5}{2}b - b}{4 \cdot \frac{5}{2}b + b} = \frac{\frac{13}{2}b}{11b} = \frac{13}{22}.$$

Cách 2. $\frac{a}{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{2}$. Đặt $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = k$ thì $a = 5k, b = 2k$.

Do đó $B = \frac{3 \cdot 5k - 2k}{4 \cdot 5k + 2k} = \frac{13}{22}.$

Ví dụ 3. Cho biểu thức $M = 2x + 2y + 3xy(x + y) + 5x^2y^3 + 5x^3y^2 + 2$.

Với $x + y = 0$ thì giá trị của biểu thức M bằng bao nhiêu ?

Giải

Từ $x + y = 0$ ta có : $y = -x$, thay vào biểu thức M ta có :

$$\begin{aligned} M &= 2x + 2(-x) + 3x(-x)[x + (-x)] + 5x^2(-x)^3 + 5x^3(-x)^2 + 2 \\ &= 2x - 2x - 3x^2 \cdot (x - x) - 5x^5 + 5x^5 + 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Dạng 4. TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Phương pháp giải

Nếu A, B, C là các biểu thức đại số thì ta luôn có :

$$A^2 \geq 0 ; -B^2 \leq 0 ; |C| \geq 0 ; -|C| \leq 0$$

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

a) $A = (x - 3)^2 + 9 ;$

b) $B = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 10 ;$

c) $C = |x - 1| + (2y - 1)^4 + 1.$

Giải

a) $(x - 3)^2 \geq 0$ nên $A = (x - 3)^2 + 9 \geq 9$, do đó giá trị nhỏ nhất của A là 9 khi $x = 3$.

b) $(x - 1)^2 \geq 0$; $(y + 2)^2 \geq 0$ nên $B = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 10 \geq 10$,
do đó giá trị nhỏ nhất của B là 10 khi $x = 1$; $y = -2$.

c) $|x - 1| \geq 0$; $(2y - 1)^4 \geq 0$ nên $C = |x - 1| + (2y - 1)^4 + 1 \geq 1$,
do đó giá trị nhỏ nhất của C là 1 khi $x = 1$; $y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

a) $P = -2(x - 3)^2 + 5$;

b) $Q = \frac{5}{(x - 14)^2 + 21}$.

Giải

a) $(x - 3)^2 \geq 0$ nên $-2(x - 3)^2 \leq 0$, suy ra $P = -2(x - 3)^2 + 5 \leq 5$.

Do đó giá trị lớn nhất của P là 5 khi $x = 3$.

b) Ta có $(x - 14)^2 + 21 \geq 21$ nên $Q = \frac{5}{(x - 14)^2 + 21} \leq \frac{5}{21}$.

Do đó giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{21}$ khi $x = 14$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Viết các biểu thức đại số biểu thị :

- a) Tổng ba số nguyên liên tiếp ;
- b) Tổng các bình phương hai số lẻ liên tiếp ;
- c) Tích của số a và bình phương của số b.

2. Tính giá trị của biểu thức $A = 3x^2 - 4x + 2$ tại $x = -3$ và $x = \frac{2}{3}$.

Tính giá trị của biểu thức $B = (x + 3y)^2 + 2x - y$ tại $x = -2$; $y = 1$.

3. Tính giá trị của biểu thức $P = 3x + \frac{x-y}{x+y}$ với x, y thoả mãn :

$$|x - 2| + (y - 1)^2 = 0.$$

4. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{21.x - 14.y}{73.x + 79.y}$ với $\frac{x}{y} = -\frac{2}{3}$.

5. Tìm giá trị nguyên của x để $A = \frac{x-5}{x-3}$ có giá trị nguyên.

- 6*. Cho biểu thức $N = 2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$. Với $x^2 + y^2 = 1$, tính giá trị của biểu thức N .

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) $a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3$ (a là số nguyên).

b) $(2k + 1)^2 + (2k + 3)^2$ (k là số nguyên).

c) ab^2 .

2. Với $x = -3$, biểu thức đã cho $A = 41$.

Với $x = \frac{2}{3}$, biểu thức đã cho $A = \frac{2}{3}$.

Với $x = -2$; $y = 1$, biểu thức đã cho $B = -4$.

3. Ta có $|x - 2| \geq 0$; $(y - 1)^2 \geq 0$ mà $|x - 2| + (y - 1)^2 = 0$,

suy ra $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. Thay vào biểu thức $P = 3.2 + \frac{2-1}{2+1} = 6\frac{1}{3}$.

4. $\frac{x}{y} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y}{3}$. Đặt $\frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = k$ ta có $x = -2k$; $y = 3k$.

Thay vào biểu thức ta có :

$$A = \frac{21.(-2k) - 14.3k}{73.(-2k) + 79.3k} = \frac{-84k}{91k} = \frac{-12}{13}.$$

5. Ta có $A = \frac{x-5}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} - \frac{2}{x-3} = 1 - \frac{2}{x-3}$.

Để A có giá trị nguyên thì $\frac{2}{x-3}$ nhận giá trị nguyên, suy ra $x-3 \in U(2)$.

Do đó

- $x-3 = 1$ hay $x = 4$
- $x-3 = 2$ hay $x = 5$
- $x-3 = -1$ hay $x = 2$
- $x-3 = -2$ hay $x = 1$.

Vậy $x \in \{4; 5; 2; 1\}$ thì A nhận giá trị nguyên.

6*. Ta có
$$\begin{aligned} N &= 2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 + y^2 \\ &= 2x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) + y^2 \\ &= 2x^2 + y^2 + y^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 = 2.(x^2 + y^2) = 2. \end{aligned}$$

§3. ĐƠN THỨC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

• Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến hoặc một tích giữa các số và các biến.

- Số 0 được gọi là đơn thức không.
- Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương. Số nói trên gọi là hệ số, phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.
 - + Ta cũng coi một số là đơn thức thu gọn.
 - + Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần.
- Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.
 - + Số thực khác 0 là đơn thức bậc không.
 - + Số 0 được coi là đơn thức không có bậc.
- Để nhân hai đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT ĐƠN THỨC

Phương pháp giải

Để nhận biết một biểu thức đại số là đơn thức, ta căn cứ vào định nghĩa đơn thức (một số, một biến hoặc một tích giữa các số và các biến).

Ví dụ 1. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức ?

$$12x^2y; \quad \frac{3}{4} \cdot (-x) \cdot 2xy^3; \quad x \cdot (y + 1); \quad 2 - 3x; \quad 18; \quad \frac{5}{2x}.$$

Giải

Các đơn thức là : $12x^2y$; $\frac{3}{4} \cdot (-x) \cdot 2xy^3$; 18 .

Ví dụ 2. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào không phải là đơn thức ?

$$4x - 3xy + y; \quad a^2 + 2b + c; \quad 3abac^2.$$

Giải

Biểu thức không phải đơn thức là :

$$4x - 3xy + y ; \quad a^2 + 2b + c .$$

Dạng 2. TÍNH TÍCH CÁC ĐƠN THỨC

Phương pháp giải

Để nhân hai hay nhiều đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

Ví dụ 1. Thu gọn các đơn thức sau :

a) $x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}y\right) \cdot \left(\frac{1}{5}x^4\right)$.

b) $-\frac{1}{3}x^2y \cdot \frac{3}{2}xy^3$.

c) $\frac{2}{3} \cdot (x^2y^3)^2$.

Giải

a) $x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}y\right) \cdot \left(\frac{1}{5}x^4\right) = \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot y = -\frac{1}{15}x^6y$.

b) $-\frac{1}{3}x^2y \cdot \frac{3}{2}xy^3 = \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^3 = -\frac{1}{2}x^3y^4$.

c) $\frac{2}{3} \cdot (x^2y^3)^2 = \frac{2}{3} \cdot (x^2)^2 \cdot (y^3)^2 = \frac{2}{3}x^4y^6$.

Ví dụ 2. a) Thu gọn đơn thức $3x^2 \cdot 4x$ được đơn thức nào ?

b) Thu gọn đơn thức $4xyz \cdot 5x^2yz^3$ được đơn thức nào ?

Giải

a) Ta có : $3x^2 \cdot 4x = 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x = 12x^3$.

b) Ta có : $4xyz \cdot 5x^2yz^3 = 4 \cdot 5 \cdot x \cdot x^2 \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z^3 = 20x^3y^2z^4$.

Ví dụ 3. Xác định hệ số của đơn thức sau :

a) $2x(-4xy)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2\right)$; b) $-3xy^2 \cdot \left(-\frac{5}{3}x^2y^3\right)$.

Giải

a) Thu gọn ta được : $2x \cdot 16x^2y^2 \cdot \frac{1}{4}x^2 = 8x^5y^2$, đơn thức có hệ số là 8.

b) Thu gọn ta được : $(-3) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)xx^2y^2y^3 = 5x^3y^5$, đơn thức có hệ số là 5.

Nhận xét. Để xác định phần hệ số của đơn thức, bạn cần phải thu gọn đơn thức trước.

Dạng 3. XÁC ĐỊNH BẬC CỦA ĐƠN THỨC

Phương pháp giải

Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó.

Ví dụ 1. Tính tích của các đơn thức sau rồi tìm bậc của đơn thức thu gọn.

a) $-5xy^4$ và $-0,2 \cdot x^2y^2$;

b) $-\frac{7}{8}x^2y$ và $-\frac{1}{7}x^2y^3$.

Giải

a) $-5xy^4 \cdot (-0,2 \cdot x^2y^2) = [(-5) \cdot (-0,2)] \cdot x \cdot x^2 \cdot y^4 \cdot y^2 = 1 \cdot x^3 \cdot y^6 = x^3y^6$.

Đơn thức x^3y^6 có bậc 9.

b) $\left(-\frac{7}{8}x^2y\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}x^2y^3\right) = \left[\left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)\right] \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot y \cdot y^3 = \frac{1}{8}x^4y^4$.

Đơn thức $\frac{1}{8}x^4y^4$ có bậc là 8.

Ví dụ 2.

a) Bậc của đơn thức $7xy^2z^6$ bằng bao nhiêu ?

b) Bậc của đơn thức $A = 7.(x^2y)^2$ bằng bao nhiêu ?

Giải

a) Ta có bậc của đơn thức $7xy^2z^6$ là 9.

b) Ta có : $A = 7.(x^2y)^2 = 7x^4y^2$. Vậy đơn thức A có bậc là 6.

Ví dụ 3. Cho đơn thức : $P = (xy^2)^3 . \left(\frac{1}{2}x^2y\right)$. Xác định bậc của đơn thức P^3 .

Giải

$$\text{Ta có : } P = x^3y^6 . \frac{1}{2}x^2y = \frac{1}{2}x^5y^7 .$$

$$\text{Suy ra } P^3 = \frac{1}{8}x^{15}y^{21} .$$

Vậy đơn thức P^3 có bậc là 36.

Dạng 4. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA ĐƠN THỨC

Phương pháp giải

Thay giá trị của các biến vào đơn thức rồi thực hiện phép tính

Ví dụ 1. Tính giá trị của đơn thức $-\frac{3}{4}x^2y^2z$ tại $x = 3$; $y = -2$; $z = \frac{1}{3}$.

Giải

Thay $x = 3$, $y = -2$, $z = \frac{1}{3}$ vào đơn thức, ta có :

$$-\frac{3}{4}.3^2.(-2)^2.\frac{1}{3} = -\frac{3}{4}.9.4.\frac{1}{3} = -9.$$

Vậy tại $x = 3$; $y = -2$; $z = \frac{1}{3}$ giá trị của đơn thức là -9.

Ví dụ 2. Tính giá trị của đơn thức :

a) $2015.x^2y^2$ tại $x = -2$; $y = \frac{1}{2}$;

b) $\left(-\frac{1}{2}x^2yz^2\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}xy^2z\right)$ tại $x = 1$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = -2$.

Giải

a) Tại $x = -2$; $y = \frac{1}{2}$ thì giá trị đơn thức là :

$$2015.(-2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2015.$$

b) Với $x = 1$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = -2$ thì giá trị của đơn thức là :

$$\frac{2}{5} \cdot 1^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-2)^3 = \frac{2}{5}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức ?

$$\frac{4}{3}x^2yz^3 ;$$

$$\frac{2xy}{z} ;$$

$$xy.(z - 2) ;$$

$$21 + 14.y ;$$

$$2012 ;$$

$$\frac{xy^2}{3}.$$

2. Thu gọn các đơn thức sau :

a) $2x^2y.3xy^2$;

b) $2xy \cdot \frac{4}{5}x^2y^3 \cdot 10xyz$;

c) $-10y^2 \cdot (2xy)^3 \cdot (-3x)^2$.

3. Tính tích của các đơn thức sau rồi tìm bậc của đơn thức thu gọn :

a) $\frac{3}{8}xy^2z^3$ và $\frac{-4}{15}xyz$;

b) $-7xyz^2$ và $2ay^2z$ với a là hằng số ;

c) $-\frac{1}{3}x^2y^3$ và $-6x^3y^4$.

4. Tính giá trị của đơn thức $-\frac{4}{5}x^3y^2z$ với $x = -1$; $y = -2$; $z = 5$.

5. Xác định bậc của đơn thức :

a) $2xy \cdot \frac{4}{3}x^2y^4 \cdot 7xyz$;

b) $-4a^2x \cdot (-2abxy)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}ax^2y^3\right)$ (với a, b là hằng số).

6. Thu gọn đơn thức rồi cho biết hệ số, phần biến, bậc của đơn thức :

a) $2x^2y \cdot \left(-\frac{1}{2}xy\right)^2 \cdot 4xy^2$;

b) $(-2x^2yz^3) \cdot (-x^3y^2z)^3$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Các đơn thức là :

$$\frac{4}{3}x^2yz^3 ;$$

$$2012 ;$$

$$\frac{xy^2}{3}.$$

2. a) $6x^3y^3$;

b) $16x^4y^5z$;

c) $-10y^2 \cdot (2xy)^3 \cdot (-3x)^2 = -10y^2 \cdot 8x^3y^3 \cdot 9x^2 = -720x^5y^5$.

3. a) $-\frac{1}{10}x^2y^3z^4$. Đơn thức $-\frac{1}{10}x^2y^3z^4$ có bậc là 9.

b) $-14axy^3z^3$. Đơn thức $-14axy^3z^3$ có bậc là 7.

c) Ta có: $\left(-\frac{1}{3}x^2y^3\right) \cdot (-6x^3y^4) = \left(-\frac{1}{3}\right)(-6) \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^4 = 2x^5y^7$ có bậc là 12.

4. Thay $x = -1$; $y = -2$; $z = 5$ vào đơn thức, ta có: $-\frac{4}{5} \cdot (-1)^3 \cdot (-2)^2 \cdot 5 = 16$.

5. a) Thu gọn đơn thức: $\frac{56}{3}x^4y^6z$ có bậc là 11;

b) Thu gọn đơn thức: $4a^5b^2x^5y^5$ có bậc là 10.

6. a) Thu gọn đơn thức ta được: $2x^5y^5$.

Hệ số là 2; phần biến là x^5y^5 , bậc 10.

b) Thu gọn đơn thức ta được: $2x^{11}y^7z^6$.

Hệ số là 2; phần biến là $x^{11}y^7z^6$, bậc 24.

§4. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến. Các số khác 0 được coi là những đơn thức đồng dạng.

- Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

Phương pháp giải

Chú ý: Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và cùng phần biến. Các số khác 0 được coi là những đơn thức đồng dạng.

Ví dụ 1. Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng.

$$\frac{2}{3}xy ; \quad -\frac{1}{3}x^2z ; \quad \frac{3}{4}xyz ; \quad \frac{5}{6}xy ; \quad 7xyz ; \quad \frac{5}{6}x^2z ; \quad -3xy.$$

Giải

$$\text{Nhóm 1 : } \frac{2}{3}xy ; \frac{5}{6}xy ; -3xy.$$

$$\text{Nhóm 2 : } -\frac{1}{3}x^2z ; \frac{5}{6}x^2z.$$

$$\text{Nhóm 3 : } \frac{3}{4}xyz ; 7xyz.$$

Ví dụ 2. Tìm các đơn thức đồng dạng với nhau trong các đơn thức sau :

$$-\frac{2}{3}x^3y ; \quad -xy^2 ; \quad 5x^2y ; \quad -1 ; \quad 6xy^2 ; \quad 2x^3y ; \quad \frac{1}{2} ; \quad \frac{1}{2}x^2y.$$

Giải

Các đơn thức đồng dạng với nhau là :

$$-\frac{2}{3}x^3y \text{ và } 2x^3y$$

$$-xy^2 \text{ và } 6xy^2$$

$$5x^2y \text{ và } \frac{1}{2}x^2y$$

$$-1 \text{ và } \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3. Trong các đơn thức sau, đơn thức nào đồng dạng với đơn thức $-3x^2yz$?

$$-3xyz ; \quad \frac{2}{3}x^2zy ; \quad \frac{3}{2}yzx^2 ; \quad 4x^2y.$$

Giải

$$\text{Các đơn thức đồng dạng với đơn thức } -3x^2yz \text{ là : } \frac{2}{3}x^2zy ; \frac{3}{2}yzx^2.$$

Ví dụ 4. Trong các đơn thức sau, đơn thức nào không đồng dạng với đơn thức $2xy^2z^3$?

$$3x^2yz ; \quad -4y^2z^3x ; \quad 5xyz ; \quad -6z^3xy^2 .$$

Giải

Các đơn thức không đồng dạng với đơn thức $2xy^2z^3$ là : $3x^2yz ; 5xyz$.

Dạng 2. CỘNG TRỪ CÁC ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

Phương pháp giải

Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Ví dụ 1. Tính tổng :

a) $2x^4y^3 + \frac{2}{3}x^4y^3 ;$

b) $3xy^3 + 5xy^3 + xy^3 .$

Giải

a) $2x^4y^3 + \frac{2}{3}x^4y^3 = \left(2 + \frac{2}{3}\right)x^4y^3 = 2\frac{2}{3}x^4y^3 .$

b) $3xy^3 + 5xy^3 + xy^3 = (3 + 5 + 1)xy^3 = 9xy^3 .$

Ví dụ 2. Tính hiệu :

a) $3xy^2z^3 - 7xy^2z^3 ;$

b) $2x^2y - \left(-\frac{3}{4}x^2y\right) .$

Giải

a) $3xy^2z^3 - 7xy^2z^3 = (3 - 7)xy^2z^3 = -4xy^2z^3 .$

b) $2x^2y - \left(-\frac{3}{4}x^2y\right) = \left[2 - \left(-\frac{3}{4}\right)\right]x^2y = 2\frac{3}{4}x^2y .$

Ví dụ 3. Tính hiệu :

a) $7xy^2 - 6\frac{3}{4}xy^2$;

b) $-\frac{1}{2}xy^3 - \left(-\frac{5}{8}xy^3\right)$.

Giải

a) $7xy^2 - 6\frac{3}{4}xy^2 = \frac{1}{4}xy^2$.

b) $-\frac{1}{2}xy^3 - \left(-\frac{5}{8}xy^3\right) = -\frac{1}{2}xy^3 + \frac{5}{8}xy^3 = \frac{1}{8}xy^3$.

Ví dụ 4. Tính giá trị biểu thức $P = 2011x^2y + 12x^2y - 2015x^2y$, tại $x = -1$; $y = 2$.

Giải

Thu gọn đa thức, ta được : $P = (2011 + 12 - 2015)x^2y = 8x^2y$.

Với $x = -1$; $y = 2$ thì giá trị của P là : $P = 8.(-1)^2.2 = 16$.

Dạng 3. TÌM ĐƠN THỨC THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

- Phương pháp chung là sử dụng quy tắc chuyển vế.
- Nếu $M + B = A$ thì $M = A - B$
- Nếu $M - B = A$ thì $M = A + B$
- Nếu $B - M = A$ thì $M = B - A$

Ví dụ 1. Xác định đơn thức M để $2x^4y^3 + M = -3x^4y^3$.

Giải

$$2x^4y^3 + M = -3x^4y^3$$

$$M = -3x^4y^3 - 2x^4y^3 = -5x^4y^3.$$

Ví dụ 2. Cho đơn thức N thỏa mãn $-2xy + N = xy$. Tìm đơn thức N.

Giải

$$-2xy + N = xy$$

$$N = xy + 2xy = 3xy.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính

a) $\frac{7}{8}x^2y + 5x^2y + 10x^2y$;

b) $-x^2 + \frac{1}{5}x^2 + 4x^2 - 2x^2 + 3x^2$.

2. Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = 10x^3 + 7x^3 - 20.x.x^2$ tại $x = -3$.

b) $B = 20x^3y + 15x^3y - 40x^2.xy$ tại $x = -2$; $y = \frac{1}{5}$.

3. Thu gọn biểu thức :

a) $\frac{1}{2}x^2y + 3x^2y + \frac{1}{4}x^2y - \frac{1}{2}x^2y$;

b) $8xy^3 - 12xy^3$.

4. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{6}xy^2$ tại $x = 2$; $y = -1$.

5. Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = 2x^3y^3 + 10x^3y^3 + (-20x^3y^3)$ tại $x = 1$; $y = -1$;

b) $B = 15x^2y^4 + 6x^2y^2.y^2 - 10x^2y^3.y$ tại $x = \frac{1}{2}$; $y = 2$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) $15\frac{7}{8}x^2y$;

b) $4\frac{1}{5}x^2$.

2. a) $A = 10x^3 + 7x^3 - 20 \cdot x \cdot x^2 = 10x^3 + 7x^3 - 20x^3 = -3x^3$

Với $x = -3$ thay vào ta có $A = -3.(-3)^3 = 81$.

b) $B = 20x^3y + 15x^3y - 40x^2 \cdot xy = 20x^3y + 15x^3y - 40x^3y = -5x^3y.$

Với $x = -2$, $y = \frac{1}{5}$, thay vào ta có $B = -5.(-2)^3.\frac{1}{5} = 8$.

3. a) $3\frac{1}{4}x^2y$;

b) $-4xy^3$.

4. Thu gọn, ta được : $A = xy^2$.

Thay $x = 2$; $y = -1$ vào ta có : $A = 2.(-1)^2 = 2.1 = 2$.

5. a) Thu gọn biểu thức : $A = -8x^3y^3$.

Với $x = 1$; $y = -1$ thì $A = -8.1^3.(-1)^3 = 8$.

b) Thu gọn biểu thức : $B = 11x^2y^4$.

Với $x = \frac{1}{2}$; $y = 2$ ta có $B = 44$.

§5. ĐA THỨC

A. TRONG TÂM KIẾN THỨC

1. Đa thức. Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

- Mỗi đơn thức được coi là một đa thức.

2. Thu gọn đa thức. Đưa đa thức về dạng thu gọn tức là trong đa thức không còn hai hạng tử đồng dạng.

3. Bậc của đa thức. Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

- Số 0 cũng được gọi là đa thức không và nó không có bậc.
- Khi tìm bậc của một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN BIẾT ĐA THỨC

Phương pháp giải

- Đa thức là một tổng của các đơn thức.
- Mỗi đơn thức được coi là một đa thức.

Ví dụ 1. Hãy chỉ ra các đa thức trong các biểu thức sau :

$$\begin{array}{lll} x - 1 + \frac{2}{x} ; & xyz - ax^2 ; & 101 ; \\ y^3 - 4 ; & \frac{z+1}{x^2+2} + yz ; & x.(y+2). \end{array}$$

Giải

Các đa thức là : $xyz - ax^2$; 101 ; $y^3 - 4$; $x.(y+2)$.

Ví dụ 2. Cho a là hằng số. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đa thức ?

$$A = \frac{1}{a+1}.x + xy^2 + x^2y ;$$

$$B = x^2y + \frac{a}{x} + x^2y ;$$

$$C = \frac{x+y}{a} + 2x - 3y ;$$

$$D = -5xy - \frac{a}{x} + \frac{y}{a} + x^2y .$$

Giải

A ; C là các đa thức ;

B ; D không phải là đa thức (vì có chứa phép chia cho biến x).

Dạng 2. THU GỌN ĐA THỨC

Phương pháp giải

Muốn thu gọn một đa thức, ta thực hiện :

- Nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau ;
- Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng trong từng nhóm.

Ví dụ 1. Thu gọn các đa thức sau :

a) $A = 5x^3y^2 + 3y^2x^3 - 4x^3y^2$;

b) $B = 5x^2y - 2xy^2 + 3x^3y^3 + 3xy^2 - 4x^2y - 4x^3y^3$;

c) $(5x + 5y) - (3x - 2y)$.

Giải

a) Ta có : $A = 5x^3y^2 + 3y^2x^3 - 4x^3y^2$

$$= 5x^3y^2 + 3x^3y^2 - 4x^3y^2 = 4x^3y^2.$$

b) Ta có : $B = 5x^2y - 2xy^2 + 3x^3y^3 + 3xy^2 - 4x^2y - 4x^3y^3$

$$= 5x^2y - 4x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 + 3x^3y^3 - 4x^3y^3$$

$$= x^2y + xy^2 - x^3y^3.$$

c) Ta có : $(5x + 5y) - (3x - 2y) = 5x + 5y - 3x + 2y = 2x + 7y$.

Ví dụ 2. Thu gọn các đa thức sau :

a) $3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 + 7xy^2 - 3x^5y^3$.

b) $-\frac{1}{2}xy^2z + 3x^3y^2 + 2xy^2z - \frac{2}{3}xy^2z - \frac{1}{3}x^3y^2 + xy^2z$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & 3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 + 7xy^2 - 3x^5y^3 \\ &= (3x^5y^3 - 3x^5y^3) + (-4x^4y^3 + 2x^4y^3) + 7xy^2 \\ &= 0 + (-2x^4y^3) + 7xy^2 = 7xy^2 - 2x^4y^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & -\frac{1}{2}xy^2z + 3x^3y^2 + 2xy^2z - \frac{2}{3}xy^2z - \frac{1}{3}x^3y^2 + xy^2z \\ &= \left(-\frac{1}{2}xy^2z + 2xy^2z - \frac{2}{3}xy^2z + xy^2z\right) + \left(3x^3y^2 - \frac{1}{3}x^3y^2\right) \\ &= 1\frac{5}{6}xy^2z + 2\frac{2}{3}x^3y^2. \end{aligned}$$

Dạng 3. TÌM BẬC CỦA ĐA THỨC

Phương pháp giải

- Viết đa thức dưới dạng thu gọn (nếu đa thức chưa thu gọn).
- Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

Ví dụ 1. Thu gọn các đa thức sau, rồi tìm bậc của chúng :

$$\text{a) } A = 3x^4y^3 - 4x^2y^3 + 2x^2y^3 + 5x^2y - 4x^4y^3 ;$$

$$\text{b) } B = 3x^2y^3z^4 + 3x^4 - 5x^2y^3z^4 + 6y^2z^3 + 2x^2y^3z^4.$$

Giải

$$\text{a) } A = (3x^4y^3 - 4x^4y^3) + (-4x^2y^3 + 2x^2y^3) + 5x^2y = -x^4y^3 - 2x^2y^3 + 5x^2y.$$

Bậc của đa thức A là 7.

$$\text{b) } B = (3x^2y^3z^4 - 5x^2y^3z^4 + 2x^2y^3z^4) + 3x^4 + 6y^2z^3 = 3x^4 + 6y^2z^3$$

Bậc của đa thức B là 5.

Ví dụ 2. Tìm bậc của đa thức sau :

a) $A = 2x^2y^3 + 3x^4 - 7x^2 + 6x^4 - x^2y^3$.

b) $B = 2x^2y^3 + 4x^4 - 5x^2 + 3x^4 - 2x^2y^3$.

Giải

a) Thu gọn đa thức :

$$A = 2x^2y^3 - x^2y^3 + 3x^4 + 6x^4 - 7x^2$$

$$A = x^2y^3 + 9x^4 - 7x^2. \text{ Bậc của đa thức } A \text{ là } 5.$$

b) Thu gọn đa thức :

$$B = 2x^2y^3 - 2x^2y^3 + 4x^4 + 3x^4 - 5x^2$$

$$B = 7x^4 - 5x^2. \text{ Bậc của đa thức } B \text{ là } 4.$$

Ví dụ 3. Thu gọn các đa thức sau rồi tìm bậc của chúng :

a) $P = -4x^3y^3 - 3x^4y^3 + x^4y^3 - 6xy^2 + 4x^3y^3$;

b) $Q = xy - x + 1 + 2xy - (xy - x + 2)$;

c) $R = x^2y + 2xxy - 3xz + x^2y - 2xy + 3xz$.

Giải

a) Ta có $P = -4x^3y^3 + 4x^3y^3 - 3x^4y^3 + x^4y^3 - 6xy^2$

$$P = -2x^4y^3 - 6xy^2.$$

Suy ra đa thức P có bậc là 7.

b) Ta có : $Q = xy - x + 1 + 2xy - xy + x - 2$

$$Q = 2xy - 1.$$

Suy ra đa thức Q có bậc là 2.

c) Ta có : $R = x^2y + 2x^2y + x^2y - 3xz + 3xz - 2xy$

$$R = 4x^2y - 2xy.$$

Suy ra đa thức R có bậc là 3.

Ví dụ 4. Cho đa thức $P = 4x^5y^2 - 3x^3y + 7x^3y + ax^5y^2$ (a hằng số). Để đa thức P có bậc là 4 thì giá trị của a là bao nhiêu ?

Giải

$$\text{Ta có : } P = (4 + a).x^5y^2 + 4x^3y.$$

Để đa thức P có bậc là 4 thì $4 + a = 0$ hay $a = -4$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đa thức ?

$$\begin{array}{lll} x^2 + 2y ; & 2x^2y ; & \frac{2x^2}{y} ; \\ \frac{x^2 + 2}{y} ; & \frac{x^2 + y}{2} ; & 2012 - xya. \end{array}$$

2. Thu gọn các đa thức sau :

$$A = 2x^2 - 3y^3 - z^4 - 4x^2 + 2y^4 + 3z^4 ;$$

$$B = 2x^2y - 5xy^2 + 4x^2y - 6xy^2.$$

3. Tìm x , biết :

$$\text{a) } (2x - 3) + (3x - 4) - (4x + 5) = 6 ;$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{2}x - 1\right) + \left(\frac{2}{3}x - 2\right) - \left(\frac{3}{4}x - 3\right) = 4.$$

4. Tìm bậc của đa thức :

$$\text{a) } B = 6xy^2 + 7xy^3 + 8x^2y^3.$$

$$\text{b) } M = x^6 + 2x^2y^3 - x^5 + xy - xy^5 - x^6.$$

$$\text{c) } N = 7x^2y - 4x^6 + 3y^2z + 4x^6.$$

5. Tính giá trị của đa thức $P = x^2y + xy^2$ tại $x = -3$; $y = -2$.

6. Cho a, b, c , là những hằng số thoả mãn $a + b + c = 2015$.

Tìm giá trị của đa thức $A = axy^2z^3 + bx^3y + cxy^2z$, với $x = 1; y = 1; z = 1$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Các đa thức là : $x^2 + 2y$; $2x^2y$; $\frac{x^2 + y}{2}$; $2012 - xya$.

2. a) $A = 2z^4 + 2y^4 - 3y^3 - 2x^2$; b) $B = 6x^2y - 11xy^2$.

3. a) $2x - 3 + 3x - 4 - 4x - 5 = 6$

$$x - 12 = 6$$

$$x = 18.$$

$$b) \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) + \left(\frac{2}{3}x - 2 \right) - \left(\frac{3}{4}x - 3 \right) = 4$$

$$\frac{1}{2}x - 1 + \frac{2}{3}x - 2 - \frac{3}{4}x + 3 = 4$$

$$\frac{5}{12}x = 4 \Leftrightarrow x = 9\frac{3}{5}.$$

4. a) Bậc của đa thức B là 5.

$$b) \text{Ta có : } M = x^6 + 2x^2y^3 - x^5 + xy - xy^3 - x^6$$

$$= 2x^2y^3 - x^5 + xy - xy^3.$$

Do đó bậc của đa thức M là 5.

$$c) \text{Ta có : } N = 7xy - 4x^6 + 3y^2z + 4x^6 = 7xy + 3y^2z.$$

Do đó bậc của đa thức N là 3.

5. Thay $x = -3; y = -2$ vào đa thức P ta có :

$$(-3)^2 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-2)^2 = -30.$$

6. Với $x = 1; y = 1; z = 1$ thì $A = a.1.1^2.1^3 + b.1^3.1 + c.1.1^2.1$

$$A = a + b + c = 2015.$$

§6. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Khi cộng hoặc trừ hai đa thức, ta thường làm như sau :

- Viết hai đa thức trong dấu ngoặc ;
- Bỏ dấu ngoặc theo quy tắc "dấu ngoặc".
- Nhóm các hạng tử đồng dạng.
- Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH TỔNG, HIỆU CỦA HAI ĐA THỨC

Phương pháp giải

- Viết hai đa thức trong dấu ngoặc ;
- Thực hiện bỏ dấu ngoặc theo quy tắc "dấu ngoặc" ;
- Nhóm các hạng tử đồng dạng ;
- Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng.

Ví dụ 1. Tính tổng của hai đa thức :

a) $M = -5x^2y + 3xy^2 + 7$ và $N = -6x^2y + 4xy^2 - 5$;

b) $P = 5,7x^2y - 3,1xy + 8y^3$ và $Q = 2,3x^2y - 8y^3 - 6,9xy$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } M + N &= (-5x^2y + 3xy^2 + 7) + (-6x^2y + 4xy^2 - 5) \\ &= -5x^2y + 3xy^2 + 7 - 6x^2y + 4xy^2 - 5 \\ &= (-5x^2y - 6x^2y) + (3xy^2 + 4xy^2) + (7 - 5) \\ &= -11x^2y + 7xy^2 + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P + Q &= (5,7x^2y - 3,1xy + 8y^3) + (2,3x^2y - 8y^3 - 6,9xy) \\
 &= 5,7x^2y - 3,1xy + 8y^3 + 2,3x^2y - 8y^3 - 6,9xy \\
 &= (5,7x^2y + 2,3x^2y) + (-3,1xy - 6,9xy) + (8y^3 - 8y^3) \\
 &= 8x^2y - 10xy.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính tổng của hai đa thức :

$$\text{a) } M = 2x^2y + xy^2 - 2 \text{ và } N = -2xy^2 + x^2y + 1.$$

$$\text{b) } P = 2x^2y + 9xy^2 - 5y^3 \text{ và } Q = 6x^2y + xy^2.$$

Giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) Ta có : } M + N &= 2x^2y + xy^2 - 2 - 2xy^2 + x^2y + 1 \\
 &= 3x^2y - xy^2 - 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có : } P + Q &= 2x^2y + 9xy^2 - 5y^3 + 6x^2y + xy^2 \\
 &= 8x^2y + 10xy^2 - 5y^3.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính hiệu của hai đa thức M và N, biết :

$$\text{a) } M = 15x^2y - 7xy^2 - 6y^3 \text{ và } N = 12x^2y - 2y^3 - 7xy^2.$$

$$\text{b) } M = 1,2x - 3,5y + 2 \text{ và } N = 0,2x - 2,5y + 3.$$

Giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } M - N &= (15x^2y - 7xy^2 - 6y^3) - (12x^2y - 2y^3 - 7xy^2) \\
 &= 15x^2y - 7xy^2 - 6y^3 - 12x^2y + 2y^3 + 7xy^2 \\
 &= (15x^2y - 12x^2y) + (-7xy^2 + 7xy^2) + (-6y^3 + 2y^3) \\
 &= 3x^2y - 4y^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } M - N &= (1,2x - 3,5y + 2) - (0,2x - 2,5y + 3) \\
 &= 1,2x - 3,5y + 2 - 0,2x + 2,5y - 3 \\
 &= (1,2x - 0,2x) + (-3,5y + 2,5y) + (2 - 3) \\
 &= x - y - 1.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính tổng và hiệu của hai đa thức P và Q, biết :

a) $P = xy - x + 1$ và $Q = 2xy - (xy - x + 5)$;

b) $P = y - [y - (y + x)]$ và $Q = y - [y - x + (2x - 2y)]$.

Giải

a) Ta có : $Q = 2xy - xy + x - 5 \Leftrightarrow Q = xy + x - 5$.

• Tổng của đa thức P và Q là :

$$P + Q = (xy - x + 1) + (xy + x - 5) = 2xy - 4.$$

• Hiệu của đa thức P và Q là :

$$P - Q = (xy - x + 1) - (xy + x - 5) = -2x + 6.$$

b) Ta có : $P = y - (y - y - x)$

$$= y - (-x) = y + x$$

và $Q = y - (y - x + 2x - 2y)$

$$= y - (x - y)$$

$$= y - x + y = 2y - x.$$

• Tổng của đa thức P và Q là : $P + Q = (y + x) + (2y - x) = 3y$.

• Hiệu của đa thức P và Q là : $P - Q = (y + x) - (2y - x) = 2x - y$.

Ví dụ 5. Cho hai đa thức $M = 2x^2 + 4xy - 4y^2$ và $N = 3x^2 - 2xy + 2y^2$.

Tính giá trị của đa thức $M + N$ tại $x = 1$; $y = -2$.

Giải

Ta có :

$$M + N = 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 3x^2 - 2xy + 2y^2$$

$$= 5x^2 + 2xy - 2y^2.$$

$$\text{Thay } x = 1 ; y = -2 \text{ vào ta có : } M + N = 5.1^2 + 2.1.(-2) - 2.(-2)^2 = -7.$$

Dạng 2. TÌM ĐA THỨC THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

- Phương pháp chung là sử dụng quy tắc chuyển vế.
- Nếu $M + B = A$ thì $M = A - B$.
- Nếu $M - B = A$ thì $M = A + B$.
- Nếu $B - M = A$ thì $M = B - A$.

Ví dụ 1. Tìm đa thức M , biết :

a) $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

b) $M - (4xy - 3y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$.

c) $(25x^2y - 13xy^2 + x^3) - M = 11x^2y - 2x^3$

Giải

a) $M = (6x^2 + 9xy - y^2) - (5x^2 - 2xy)$

$$M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2.$$

b) $M = (x^2 - 7xy + 8y^2) + (4xy - 3y^2)$

$$M = x^2 + (-7xy + 4xy) + (8y^2 - 3y^2) = x^2 - 3xy + 5y^2.$$

c) $M = (25x^2y - 13xy^2 + x^3) - (11x^2y - 2x^3)$

$$M = 25x^2y - 13xy^2 + x^3 - 11x^2y + 2x^3$$

$$M = (25x^2y - 11x^2y) - 13xy^2 + (x^3 + 2x^3) = 14x^2y - 13xy^2 + 3x^3.$$

Ví dụ 2. Cho đa thức $P = x^2 - 2x^2y + x$. Tìm đa thức M thoả mãn :

$$M + P = 3x^2y + 2x - 1.$$

Giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } M &= (3x^2y + 2x - 1) - (x^2 - 2x^2y + x) \\
&= 3x^2y + 2x - 1 - x^2 + 2x^2y - x \\
&= -x^2 + 5x^2y + x - 1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tìm đa thức P biết $2.P + (2x^2 + 3y^2) = 6x^2 - 3y^2 - 2x^2y^2$.

Giải

$$\text{Ta có : } 2P = (6x^2 - 3y^2 - 2x^2y^2) - (2x^2 + 3y^2)$$

$$2P = 6x^2 - 3y^2 - 2x^2y^2 - 2x^2 - 3y^2$$

$$2P = 4x^2 - 6y^2 - 2x^2y^2$$

$$\text{nên } P = 2x^2 - 3y^2 - x^2y^2.$$

Dạng 3. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CHIA HẾT**Phương pháp giải**

Vận dụng kiến thức về chia hết : Cho a, b, m là số nguyên thì :

- Nếu a, b chia hết cho m thì tổng $a + b$ chia hết cho m.
- Nếu a chia hết cho m thì tích ab chia hết cho m.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng : $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ chia hết cho 37.

Giải

Ta có :

$$\begin{aligned}
\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} &= 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b \\
&= 111.a + 111.b + 111.c = 111(a + b + c).
\end{aligned}$$

Mà $111:37$ nên $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} : 37$.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là số nguyên. Đặt $A = 3a - 5b$, $B = 7b - 9c$; $C = 11c - 13a$. Chứng tỏ tích $A.B.C$ là số chẵn.

Giải

$$\text{Xét } A + B + C = 3a - 5b + 7b - 9c + 11c - 13a$$

$$\Rightarrow A + B + C = -10a + 2b + 2c : 2.$$

Suy ra trong ba số A, B, C phải tồn tại một số chẵn, do đó tích A.B.C là số chẵn.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính tổng của hai đa thức :

a) $A = 2x^2 + 3y^2$ và $B = 3x^2 - 4y^2$;

b) $P = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ và $Q = 3x^2 + xy - 2y^2$.

2. Tìm hiệu của hai đa thức M và N với :

a) $M = x^2 + y^2 + 2xy$ và $N = x^2 + y^2 - 2xy$;

b) $M = 2,3x + 3,2y - 10$ và $N = -0,3x + 2,2y - 5$.

3. Tìm đa thức M, biết :

a) $M + (2x - 3y) = x - 4y + 5$;

b) $M - (2xy - 0,5y^2) = -2xy + 5y^2$;

c) $(2x^2 - 3xy + 4y^2) - M = 5x^2 + 6xy - 7y^2$.

4. Cho đa thức $Q = 3xy^2 - 2xy + x^2y - 2y^4$. Tìm đa thức N thoả mãn :

$$Q - N = 2y^4 + x^2y + xy^2.$$

5. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng :

$$A = 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n \text{ chia hết cho } 10.$$

6. Cho $P = x^2 - y^2 + 1$ và $Q = 3 - y^2 - 2x^2$. Tính $P - Q$ và $P + Q$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) $A + B = 5x^2 - y^2$; b) $P + Q = 5x^2 - 2xy + 3y^2$.
2. a) $M - N = 4xy$; b) $M - N = 2,6x + y - 5$.
3. a) $M = -x - y + 5$;
b) $M = 4,5y^2$;
c) $M = -3x^2 - 9xy + 11y^2$.
4. Ta có : $N = Q - (2y^4 + x^2y + xy^2)$
$$= 3xy^2 - 2xy + x^2y - 2y^4 - 2y^4 - x^2y - xy^2$$
$$= 2xy^2 - 2xy - 4y^4 .$$
5. Ta có : $A = 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n = 3^2 \cdot 3^n + 3^n - 2^3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}$
$$= 9 \cdot 3^n + 3^n - 8 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}$$
$$= 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1} .$$

Mà $10 \cdot 3^n : 10$ và $10 \cdot 2^{n-1} : 10$ với n nguyên dương.
Vậy $A : 10$.

6. $P - Q = 3x^2 - 2$.
 $P + Q = -x^2 - 2y^2 + 4$.

§7. ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.
- + Mỗi số được coi là đa thức một biến.

+ Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.

• Để thuận lợi cho việc tính toán đối với các đa thức một biến người ta thường sắp xếp các hạng tử của chúng theo lũy thừa tăng hoặc giảm của biến.

+ Để sắp xếp các hạng tử của một đa thức, trước hết phải thu gọn đa thức đó.

+ Những chữ đại diện cho các số xác định cho trước được gọi là hằng số (còn gọi tắt là hằng).

• Hệ số của lũy thừa bậc 0 gọi là hệ số tự do. Hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của biến gọi là hệ số cao nhất.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. SẮP XẾP CÁC HẠNG TỬ CỦA ĐA THỨC

Phương pháp giải

- Viết đa thức đã cho dưới dạng thu gọn.
- Sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa tăng hay giảm của biến.

Ví dụ 1. Hãy sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức sau theo lũy thừa giảm của biến.

$$A(x) = 2 + 5x^7 - 6x^2 - 8 - 11x^7 + x^5 + 7x^2.$$

$$B(x) = 8x^5 + 7x - 6x^2 - 3x^5 + 2x + 15.$$

Giải

$$\begin{aligned} A(x) &= (5x^7 - 11x^7) + x^5 + (-6x^2 + 7x^2) + (2 - 8) \\ &= -6x^7 + x^5 + x^2 - 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= (8x^5 - 3x^5) - 6x^2 + (7x + 2x) + 15 \\ &= 5x^5 - 6x^2 + 9x + 15. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Hãy sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức sau theo lũy thừa tăng của biến.

$$P(x) = 6x^3 - 8x^2 + 12 + 2x + 7x^2 - 3x^3.$$

$$Q(x) = -x - 3 + 2x^2 + 6x.$$

Giải

$$P(x) = 12 + 2x + (-8x^2 + 7x^2) + (6x^3 - 3x^3)$$

$$= 12 + 2x - x^2 + 3x^3.$$

$$Q(x) = -3 + (-x + 6x) + 2x^2 = -3 + 5x + 2x^2.$$

Dạng 2. XÁC ĐỊNH BẬC CỦA ĐA THỨC

Phương pháp giải

Viết đa thức dưới dạng thu gọn, bậc của đa thức một biến là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.

Ví dụ 1. Tìm bậc của mỗi đa thức sau :

$$A(x) = 8 - 5x^2 + 3x^7 - 6x^3 + 2x - 3x^7.$$

$$B(x) = 0,3x^2 - 6x^4 - 7x^5 + 8 - x + 9x^3 - 9 + 6x.$$

Giải

$$\bullet A(x) = (3x^7 - 3x^7) - 6x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = -6x^3 - 5x^2 + 2x + 8.$$

Đa thức $A(x)$ có bậc là 3.

$$\bullet B(x) = 0,3x^2 - 6x^4 - 7x^5 + (8 - 9) + (-x + 6x) + 9x^3$$

$$= 0,3x^2 - 6x^4 - 7x^5 - 1 + 5x + 9x^3.$$

Đa thức $B(x)$ có bậc là 5.

Ví dụ 2. Cho đa thức $A(x) = (2a + 1)x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x^3 - 5x^4$.

Xác định giá trị của a để đa thức $A(x)$ có bậc là 3.

Giải

Ta có : $A(x) = (2a - 4)x^4 + 8x^3 - 2x^2$.

Để đa thức $A(x)$ có bậc là 3 thì $2a - 4 = 0$ hay $a = 2$.

Dạng 3. TÌM CÁC HỆ SỐ CỦA MỘT ĐA THỨC

Phương pháp giải

Viết đa thức dưới dạng thu gọn.

Sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần hoặc tăng dần của biến.

Từ đó xác định được các hệ số.

Ví dụ 1. Tìm các hệ số của đa thức sau :

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 5 - 8x^3.$$

Giải

$$P(x) = (2x^3 - 8x^3) - 6x^2 + 3x + 5$$

$$P(x) = -5x^3 - 6x^2 + 3x + 5.$$

Hệ số cao nhất là -5 ;

Hệ số của các lũy thừa bậc 2, bậc 1 thứ tự là -6 ; 3

Hệ số tự do là 5 .

Ví dụ 2. Tìm bậc và các hệ số của đa thức sau (liệt kê đầy đủ các hệ số từ lũy thừa 0 đến lũy thừa cao nhất) :

$$Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5 - 8x^6.$$

Giải

Ta sắp xếp các hạng tử của $Q(x)$ theo lũy thừa giảm của biến :

$$Q(x) = -8x^6 + 4x^3 - 6x^2 + 5$$

$$= -8x^6 + 0.x^5 + 0.x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 0.x + 5.$$

Đa thức $Q(x)$ có bậc là 6.

Hệ số cao nhất là -8 .

Hệ số các lũy thừa bậc 5, bậc 4 ; bậc 3 ; bậc 2 ; bậc 1 thứ tự là 0 ; 0 ; 4 ; -6 ; 0.

Hệ số tự do là 5.

Ví dụ 3. Cho đa thức

$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x^4 - 6x^2 + 3x^4 + 2x - x^5 + 3x^3 - 7x + 9.$$

a) Thu gọn và sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tìm hệ số tự do và hệ số cao nhất của đa thức $P(x)$.

Giải

a) Ta có : $P(x) = x^5 - x^5 - x^4 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^3 - 6x^2 + 2x - 7x + 9$

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 5x + 9.$$

b) Hệ số tự do là : 9.

Hệ số cao nhất là : 2.

Dạng 4. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC

Phương pháp giải

Thay giá trị của biến vào đa thức rồi thực hiện các phép tính

Ví dụ 1. Tính giá trị của đa thức : $P(x) = x^2 - 5x + 4$, tại $x = 4$ và $x = -4$.

Giải

• Với $x = 4$, ta có $P(4) = 4^2 - 5.4 + 4 = 0$.

• Với $x = -4$, ta có : $P(-4) = (-4)^2 - 5.(-4) + 4 = 40$.

Ví dụ 2. Tính giá trị đa thức $P(x) = 5x^{100} + 5x^{99} + 5x^{98} + \dots + 5x + 9$, tại $x = -1$.

Giải

$$\begin{aligned}\text{Với } x = -1, \text{ ta có } P(-1) &= 5.(-1)^{100} + 5.(-1)^{99} + 5.(-1)^{98} + \dots + 5(-1) + 9 \\ &= 5 - 5 + 5 - 5 + \dots - 5 + 9 = 9.\end{aligned}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Thu gọn và sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến. Tìm bậc và hệ số tự do của chúng.

$$P(x) = x^6 - 3x^3 + 3x^2 - 6x + 2x^3 + 10 - 3x^2 - x^6 ;$$

$$Q(x) = 3x^2 - 5x + 2 - 6x^2 + 4x^3 + 5 - 8x^5 - x^3.$$

2. Thu gọn và sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến. Tìm bậc và hệ số tự do của chúng.

a) $f(x) = 5 - 7x^4 + 3x^3 + 2x + 6x^4 + 2x^2 + 4x^4 :$

b) $g(x) = x^5 + 2x^4 - 3x + 8 - 3x^4 - x^5$.

3. Cho $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$. Tính giá trị $f(x)$ tại $x = 1$; $x = -1$; $x = -\frac{1}{2}$.

4. Tìm bậc của đa thức sau :

a) $12 - 5x^2 + 4x^6 - 6x^3 + 2x^2 - 4x^6$; b) $-2x + 12$;

c) $2x^2 - 5x^5$; d) 2015.

- ### 5. Tính giá trị của đa thức

a) $M(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ tai $x = -2$;

b) $P(x) = x^{199} + x^{198} + x^{197} + \dots + x^2 + x$ tai $x = -1$.

6. Tìm x thỏa mãn đẳng thức :

$$6x^3 - 5x^2 + 2x - 1 + (3 - x + 5x^2 - 6x^3) = -3.$$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $P(x) = -x^3 - 6x + 10$.

Đa thức $P(x)$ có bậc là 3, hệ số tự do là 10.

$$Q(x) = -8x^5 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 7.$$

Đa thức $Q(x)$ có bậc là 5, hệ số tự do là 7.

2. a) $f(x) = 5 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 3x^4$.

Đa thức $f(x)$ có bậc là 4, hệ số tự do là 5.

b) $g(x) = 8 - 3x - x^4$.

Đa thức $g(x)$ có bậc là 4, hệ số tự do là 8.

3. Với $x = 1$, ta có : $f(1) = 2.1^3 + 3.1^2 - 4.1 - 5 = -4$.

Với $x = -1$, ta có : $f(-1) = 2.(-1)^3 + 3.(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 0$

Với $x = -\frac{1}{2}$, ta có : $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4.\left(-\frac{1}{2}\right) - 5 = -2\frac{1}{2}$.

4. a) Thu gọn : $-6x^3 - 3x^2 + 12$ có bậc là 3 ;

b) Có bậc 1 ;

c) Có bậc 5 ;

d) Có bậc 0.

5. a) Giá trị $M(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + 2(-2) - 1 = -9$.

b) Giá trị $P(-1) = (-1)^{199} + (-1)^{198} + (-1)^{197} + \dots + (-1)^2 + (-1)$
 $= (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) = -1$.

6. $x = -5$.

§8. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Để cộng hoặc trừ hai đa thức một biến, ta có thể thực hiện theo một trong hai cách sau :

Cách 1. Thực hiện theo cách cộng, trừ đa thức đã học.

Cách 2. Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc tương tự như cộng trừ các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH TỔNG HOẶC HIỆU CỦA CÁC ĐA THỨC

Phương pháp giải

Cách 1. Cộng trừ đa thức theo "hàng ngang".

Cách 2. Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức theo cùng một lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc.

Ví dụ 1. Tính $f(x) + g(x)$ sau khi sắp xếp chúng theo lũy thừa giảm của biến.

$$f(x) = -7x^3 + 6x - \frac{1}{3} + 8x^4 + 7x^2 - \frac{1}{5}x ;$$

$$g(x) = 28 - 5x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 3x^4 - \frac{2}{3}.$$

Giải

$$f(x) = 8x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 5\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}.$$

Thu gọn đa thức, ta được :

$$g(x) = -8x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 27\frac{1}{3}.$$

Thực hiện phép cộng

$$\begin{array}{r} f(x) = 8x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 5\frac{4}{5}x - \frac{1}{3} \\ + \quad g(x) = -8x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 27\frac{1}{3} \\ \hline f(x) + g(x) = -14x^3 + 4x^2 + 5\frac{4}{5}x + 27. \end{array}$$

Ví dụ 2. Tính $f(x) - g(x)$ sau khi sắp xếp chúng theo lũy thừa giảm của biến.

$$f(x) = 4 - x^3 + \frac{1}{3}x^2;$$

$$g(x) = -\frac{2}{3}x^2 - x^3 + 4 + x.$$

Giải

$$\begin{array}{r} f(x) = -x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 4 \\ - \\ g(x) = -x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x + 4 \\ \hline f(x) - g(x) = x^2 - x \end{array}$$

Ví dụ 3. Cho $f(x) = 6x^7 - 5x^3 + 1$;

$$g(x) = -3 + 2x - 4x^7 ;$$

$$h(x) = -2x^7 + 2x + 7x^2 .$$

a) Tính $f(x) + g(x) + h(x)$.

b) Tính $f(x) + g(x) - h(x)$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) + g(x) + h(x) &= (6x^7 - 5x^3 + 1) + (-3 + 2x - 4x^7) + (-2x^7 + 2x + 7x^2) \\ &= 6x^7 - 5x^3 + 1 - 3 + 2x - 4x^7 - 2x^7 + 2x + 7x^2 \\ &= (6x^7 - 4x^7 - 2x^7) - 5x^3 + 7x^2 + (2x + 2x) + 1 - 3 \\ &= -5x^3 + 7x^2 + 4x - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) + g(x) - h(x) &= (6x^7 - 5x^3 + 1) + (-3 + 2x - 4x^7) - (-2x^7 + 2x + 7x^2) \\ &= 6x^7 - 5x^3 + 1 - 3 + 2x - 4x^7 + 2x^7 - 2x - 7x^2 \\ &= (6x^7 - 4x^7 + 2x^7) - 5x^3 - 7x^2 + (2x - 2x) + 1 - 3 \\ &= 4x^7 - 5x^3 - 7x^2 - 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Cho $M(x) = 2x^3 - x^2 + x$ và $N(x) = 2x^2 - 2x^3 + 2x - 1$. Tìm bậc của đa thức tổng $M(x) + N(x)$.

Giải

$$\begin{array}{r} M(x) = 2x^3 - x^2 + x \\ + \\ N(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \\ \hline M(x) + N(x) = x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

Do đó bậc của đa thức tổng $M(x) + N(x)$ là 2.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH ĐA THỨC

Phương pháp giải

Phương pháp chung là sử dụng quy tắc chuyển vế.

- Nếu $M + B = A$ thì $M = A - B$.
- Nếu $M - B = A$ thì $M = A + B$.
- Nếu $B - M = A$ thì $M = B - A$.

Ví dụ 1. Tìm đa thức $f(x)$ biết :

a) $f(x) + (3x^2 - 5x) = 2x^2 - 4x$.

b) $(2x^2 - 3x - 4) - f(x) = 3x^2 + 4x - 5$

Giải

a) $f(x) = (2x^2 - 4x) - (3x^2 - 5x) = 2x^2 - 4x - 3x^2 + 5x$

$$f(x) = -x^2 + 5x - 4.$$

b) $f(x) = (2x^2 - 3x - 4) - (3x^2 + 4x - 5) = 2x^2 - 3x - 4 - 3x^2 - 4x + 5$

$$f(x) = -x^2 - 7x + 1.$$

Ví dụ 2. Cho

$$P(x) + Q(x) = 5x^2 - 4x + 1$$

$$P(x) - Q(x) = x^2 + 2x - 5.$$

Tìm đa thức $P(x)$; $Q(x)$

Giải

$$\text{Ta có : } P(x) = (5x^2 - 4x + 1 + x^2 + 2x - 5) : 2$$

$$= 3x^2 - x - 2.$$

$$Q(x) = [(5x^2 - 4x + 1) - (x^2 + 2x - 5)] : 2$$

$$= (5x^2 - 4x + 1 - x^2 - 2x + 5) : 2$$

$$= 2x^2 - 3x + 3.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính tổng $f(x)$ và $g(x)$ với :

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ và $g(x) = -x^2 + 3x$;

b) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ và $g(x) = 4x^2 - 2x + 6$.

2. Tính hiệu $f(x) - g(x)$ với :

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ và $g(x) = 3x^2 + 5x$;

b) $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$ và $g(x) = -2x^2 + 3x + 4$.

3. Cho $f(x) = 2x^2 + 5$; $g(x) = 3x^2 + 2x + 4$; $h(x) = x^2 - 4$

a) Tính $f(x) + g(x) - h(x)$;

b) Tính $f(x) - g(x) + h(x)$.

4. a) Cho $f(x) = -5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$ và $g(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x + 8$.

Tính $f(x) + g(x)$.

b) Cho hai đa thức $P(x) = x^2 - 1$ và $Q(x) = x + 1$. Tính hiệu $P(x) - Q(x)$.

5. Cho $P(x) = 4x^2 - 5$; $Q(x) = -3x^2 + x$; $R(x) = x^2 + 2x - 5$

Thực hiện phép tính : $P(x) + Q(x) - R(x)$.

6. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $13a + b + 2c = 0$. Chứng tỏ $f(-2).f(3) \leq 0$.

7. Cho các đa thức :

$$A(x) = 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 2$$

$$B(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 2$$

$$C(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x + 2\frac{3}{4}.$$

a) Tính $M(x) = A(x) - 2.B(x) + C(x)$;

b) Tính giá trị của $M(x)$ khi $x = -\sqrt{0,25}$;

c) Có giá trị nào của x để $M(x) = 0$ không ?

8. Chứng minh rằng tổng của năm số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) $f(x) + g(x) = 2x^2 - 2x + 2$.

b) $f(x) + g(x) = 2x^3 + 3x + 3$.

2. a) $f(x) - g(x) = -x^2 - 2x - 1$.

b) $f(x) - g(x) = 7x^2 - 6x + 3$.

3. a) $f(x) + g(x) - h(x) = 4x^2 + 2x + 13$.

b) $f(x) - g(x) + h(x) = -2x - 3$.

4. a) $f(x) + g(x) = -5x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 3x + 8$.

b) $P(x) - Q(x) = (x^2 - 1) - (x + 1) = x^2 - x - 2$.

5. Ta có : $P(x) + Q(x) - R(x) = (4x^2 - 5) + (-3x^2 + x) - (x^2 + 2x - 5) = -x$.

6. Ta có : $f(-2) = 4a - 2b + c$; $f(3) = 9a + 3b + c$.

Suy ra $f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$.

Do đó $f(-2)$ và $f(3)$ đối nhau $\Rightarrow f(-2).f(3) \leq 0$.

7. a) Ta có :

$$M(x) = 5x^4 + 2x^2 + \frac{3}{4}.$$

b) $x = -\sqrt{0,25} = -0,5$ thì giá trị của đa thức là :

$$M(-0,5) = 5.(-0,5)^4 + 2.(-0,5)^2 + \frac{3}{4} = \frac{25}{16}.$$

c) $x^4 \geq 0$; $x^2 \geq 0$ với mọi x

nên $M(x) = 5x^4 + 2x^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x .

Vậy không tồn tại giá trị nào của x để $M(x) = 0$.

8. Gọi năm số nguyên liên tiếp là : $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4$ với $a \in \mathbb{Z}$.

Tổng của chúng bằng : $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 = 5a + 10$

chia hết cho 5.

§9. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

- Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm.

- Người ta đã chứng minh được rằng số nghiệm của một đa thức (khác đa thức không) không quá bậc của nó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. KIỂM TRA XEM $x = a$ CÓ LÀ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC $P(x)$ HAY KHÔNG ?

Phương pháp giải

Thay $x = a$ vào $P(x)$, nếu $P(a) = 0$ thì a là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Ví dụ 1. Kiểm tra rằng :

a) Đa thức $4x + \frac{1}{2}$ có nghiệm là $x = -\frac{1}{8}$.

b) Đa thức $3x^2 + x - \frac{2}{3}$ có hai nghiệm là $x = \frac{1}{3}$ và $x = -\frac{2}{3}$.

Giải

a) Đặt $P(x) = 4x + \frac{1}{2}$.

Ta có : $P\left(-\frac{1}{8}\right) = 4.\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$ nên $x = -\frac{1}{8}$ là nghiệm của đa thức $4x + \frac{1}{2}$.

b) Đặt $Q(x) = 3x^2 + x - \frac{2}{3}$.

Ta có : $Q\left(\frac{1}{3}\right) = 3.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 0$

$$Q\left(-\frac{2}{3}\right) = 3.\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0.$$

Do đó $x = \frac{1}{3}$ và $x = -\frac{2}{3}$ là các nghiệm của đa thức $3x^2 + x - \frac{2}{3}$.

Ví dụ 2. Trong các giá trị : 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 ; $1\frac{1}{2}$; 2 ,

giá trị nào là nghiệm của đa thức $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$?

Giải

$$P(0) = 2.0^2 - 5.0 + 2 = 2 ;$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5.\frac{1}{2} + 2 = 0 ;$$

$$P(1) = 2.1^2 - 5.1 + 2 = -1 ;$$

$$P\left(1\frac{1}{2}\right) = 2.\left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 5.1\frac{1}{2} + 2 = -1 ;$$

$$P(2) = 2.2^2 - 5.2 + 2 = 0.$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ và $x = 2$ là các nghiệm của đa thức $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

Dạng 2. TÌM NGHIỆM CỦA ĐA THỨC**Phương pháp giải**

- Để tìm nghiệm của đa thức $P(x)$, ta tìm giá trị x sao cho $P(x) = 0$.
- Nếu $x^2 = m > 0$ thì $x = \sqrt{m}$; $x = -\sqrt{m}$ là nghiệm.
- Nếu $A.B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm của đa thức sau :

a) $M(x) = 7x + 3$;

b) $N(x) = \frac{1}{3}x - 2$;

c) $Q(x) = -2x + \frac{1}{3}$.

Giải

a) Từ $7x + 3 = 0 \Rightarrow 7x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{7}$.

Vậy đa thức $M(x)$ có nghiệm là $-\frac{3}{7}$

b) Từ $\frac{1}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 2 \Rightarrow x = 6$.

Vậy đa thức $N(x)$ có nghiệm là 6.

c) Từ $-2x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow -2x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$.

Vậy đa thức $Q(x)$ có nghiệm là $\frac{1}{6}$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của đa thức :

a) $P(x) = (x - 3).(x + 4)$;

b) $Q(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right).\left(2x - \frac{2}{3}\right)$.

Giải

a) Từ $(x - 3).(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4. \end{cases}$

Vậy đa thức $P(x)$ có hai nghiệm là 3 và -4.

b) Từ $\left(\frac{1}{2}x - 1\right).\left(2x - \frac{2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 = 0 \\ 2x - \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Vậy đa thức $Q(x)$ có hai nghiệm là 2 và $\frac{1}{3}$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm của đa thức :

a) $P(x) = x^2 - 9$;

b) $Q(x) = 4x^2 - 25$;

c) $R(x) = x^2 - 3$.

Giải

a) Từ $x^2 - 9 = 0$ suy ra $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Vậy đa thức $P(x)$ có hai nghiệm là 3 và -3.

b) Từ $4x^2 - 25 = 0$ suy ra $x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{2}$.

Vậy đa thức $Q(x)$ có hai nghiệm là $\frac{5}{2}$ và $-\frac{5}{2}$.

c) Từ $x^2 - 3 = 0$ suy ra $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy đa thức $R(x)$ có hai nghiệm là $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$.

Ví dụ 4. Tìm nghiệm của đa thức.

a) $x^2 - 7x + 12$;

b) $2x^2 - 5x + 2$.

Giải

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ suy ra $x^2 - 3x - 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) - 4(x - 3) = 0$

hay $(x - 3)(x - 4) = 0$, do đó $x = 3$; $x = 4$.

Vậy $x^2 - 7x + 12$ có hai nghiệm $x = 3$; $x = 4$.

b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ suy ra $2x^2 - x - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(2x - 1) - 2(2x - 1) = 0$

hay $(2x - 1)(x - 2) = 0$, do đó $x = \frac{1}{2}$; $x = 2$.

Vậy $2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm $x = \frac{1}{2}$; $x = 2$.

Dạng 3. TÌM HỆ SỐ CỦA ĐA THỨC KHI BIẾT NGHIỆM CỦA NÓ

Phương pháp giải

Nếu x_0 là nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $P(x_0) = 0$, từ đó tìm được hệ số.

Ví dụ 1. Đa thức $P(x) = ax^2 + 5x - 2$ có một nghiệm là 1 thì hệ số của a là bao nhiêu ?

Giải

Để $x = 1$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $a.1^2 + 5.1 - 2 = 0$

$$a + 5 - 2 = 0 \text{ hay } a = -3.$$

Ví dụ 2. Cho đa thức $P(x) = 2x^2 + mx - 10$.

a) Tìm m để $P(x)$ có một nghiệm là 2.

b) Tìm nghiệm còn lại.

Giải

a) Để $P(x)$ có một nghiệm là 2 thì $P(2) = 0 \Rightarrow 2.2^2 + m.2 - 10 = 0 \Rightarrow m = 1$.

b) Với $m = 1$ thì $P(x) = 2x^2 + x - 10$.

Xét $2x^2 + x - 10 = 0$

$$2x^2 - 4x + 5x - 10 = 0$$

$$2x(x - 2) + 5.(x - 2) = 0$$

$$(x - 2).(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm thứ hai của $P(x)$ là $-\frac{5}{2}$.

Dạng 4. CHỨNG MINH MỘT ĐA THỨC KHÔNG CÓ NGHIỆM

Phương pháp giải

• Để chứng minh đa thức $P(x)$ không có nghiệm. Ta chứng minh $P(x)$ nhận giá trị khác 0 với mọi x .

• Chú ý : $x^n \geq 0$ với n chẵn.

Ví dụ. Chứng tỏ rằng các đa thức sau không có nghiệm.

a) $x^4 + 4$;

b) $x^2 + 2x + 2$;

c) $x^2 - 6x + 10$.

Giải

a) $x^4 \geq 0$ với mọi x nên $x^4 + 2 \geq 2 > 0$ với mọi x , do đó $x^4 + 2$ khác 0.

Vậy đa thức $x^4 + 2$ vô nghiệm.

b) Ta có :
$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 2 &= x^2 + x + x + 1 + 1 \\&= x(x + 1) + (x + 1) + 1 \\&= (x + 1).(x + 1) + 1 \\&= (x + 1)^2 + 1.\end{aligned}$$

Với mọi x thì $(x + 1)^2 \geq 0$ nên $(x + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $x^2 + 2x + 2$ không có nghiệm.

c) Ta có :
$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 10 &= x^2 - 3x - 3x + 9 + 1 = x(x - 3) - 3(x - 3) + 1 \\&= (x - 3).(x - 3) + 1 = (x - 3)^2 + 1.\end{aligned}$$

Với mọi x thì $(x - 3)^2 \geq 0$ nên $(x - 3)^2 + 1 > 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $x^2 - 6x + 10$ không có nghiệm.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Kiểm tra xem

a) $x = -2$ có là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - 4$ không ?

b) $x = \frac{1}{2}$ và $x = -3$ có là nghiệm của đa thức $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$ không ?

2. Tìm nghiệm của các đa thức sau :

a) $-4x + 3$;

b) $5x + 12$;

c) $x^2 - 4x$.

3. Tìm nghiệm của các đa thức sau :

a) $x^2 + 4x$;

b) $x^2 + 4x + 3$;

c) $4x^2 - 9$.

4*. Chứng tỏ rằng đa thức sau không có nghiệm

a) $x^2 + 2$;

b) $x^2 + 4x + 5$;

c) $2x^2 - 2x + 3$.

5*. Chứng minh rằng đa thức sau không có nghiệm

a) $P(x) = x^2 + (x - 3)^2$;

b) $Q(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$.

6*. Cho đa thức $f(x)$ thoả mãn :

$$x.f(x + 1) = (x + 3).f(x).$$

Chứng tỏ rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) $x = -2$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

b) $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của đa thức $g(x)$;

$x = -3$ là nghiệm của đa thức $g(x)$.

2. a) $\frac{3}{4}$.

b) $-\frac{12}{5}$.

c) 0 và 4.

3. a) 0 và -4.

b) -1 và -3.

c) $\frac{3}{2}$ và $-\frac{3}{2}$.

4*. a) $x^2 \geq 0$ với mọi x nên $x^2 + 2 \geq 2 > 0$ với mọi x , do đó đa thức $x^2 + 2$ vô nghiệm.

b) Ta có : $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2x + 2x + 4 + 1$

$$= x(x + 2) + 2.(x + 2) + 1 = (x + 2).(x + 2) + 1 = (x + 2)^2 + 1.$$

Với mọi x thì $(x + 2)^2 \geq 0$ nên $(x + 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $x^2 + 4x + 5$ không có nghiệm.

c) $2x^2 - 2x + 3 = x^2 + x^2 - x - x + 1 + 2$

$$= x^2 + x(x - 1) - (x - 1) + 2$$

$$= x^2 + (x - 1).(x - 1) + 2$$

$$= x^2 + (x - 1)^2 + 2.$$

Với mọi x ta có $x^2 \geq 0$ và $(x - 1)^2 \geq 0$ nên $x^2 + (x - 1)^2 + 2 > 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $2x^2 - 2x + 3$ không có nghiệm.

5*. a) Ta có : $x^2 \geq 0$ và $(x - 2)^2 \geq 0$, dấu bằng không cùng xảy ra nên $P(x) > 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $P(x)$ vô nghiệm.

b) Xét $x \geq 1$ thì $Q(x) = x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0$ với mọi x ,

suy ra $Q(x)$ không có nghiệm với $x \geq 1$,

Xét $x < 1$ thì $Q(x) = 1 - x + x^2(1 - x^3) + x^8 > 0$ với mọi x

Suy ra $Q(x)$ không có nghiệm với $x < 1$.

Vậy đa thức $Q(x)$ không có nghiệm.

6*. Chọn $x = 0$, ta có : $0.f(1) = 3.f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Suy ra $x = 0$ là một nghiệm của đa thức $f(x)$.

Chọn $x = -3$, ta có : $-3.f(-2) = 0.f(-3) \Rightarrow f(-2) = 0$.

Suy ra $x = -2$ là một nghiệm của đa thức $f(x)$.

Vậy đa thức trên có ít nhất hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -2$.

Nhận xét. Dựa vào kĩ thuật trên, có thể làm được bài toán hay và khó :

Cho đa thức $f(x)$ thoả mãn : $x.f(x + 2) = (x^2 - 9).f(x)$. Chứng tỏ rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất ba nghiệm.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

- Khái niệm biểu thức đại số, đơn thức, đa thức, hệ số, phần biến số.
- Nhân đơn thức, bậc của đơn thức.
- Đơn thức đồng dạng, cộng trừ đơn thức đồng dạng.
- Đa thức, bậc của đa thức, cộng trừ đa thức.
- Đa thức một biến, cộng trừ đa thức một biến, nghiệm của đa thức một biến.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÍNH GIÁ TRỊ

Phương pháp giải

- Thay các biến bởi các giá trị số đã cho.
- Thực hiện các phép tính theo thứ tự thực hiện các phép tính.

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = \frac{2x^2 - 3xy + y^2}{2x + y}$ tại $x = \frac{1}{2}$; $y = 1$.

b) $B = \frac{4x^2 - x + 2}{2x^2 + x}$ tại $|x| = \frac{1}{2}$.

c) $C = \frac{2a + 3b}{4a - 5b}$ với $\frac{a}{b} = \frac{6}{7}$.

Giải

a) Với $x = \frac{1}{2}$; $y = 1$ ta có :

$$A = \frac{2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\frac{1}{2}.1 + 1^2}{2.\frac{1}{2} + 1} = 0.$$

b) Ta có : $|x| = \frac{1}{2}$ thì $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$.

Với $x = \frac{1}{2}$, ta có :

$$B = \frac{4.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2}{2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{2}.$$

Với $x = -\frac{1}{2}$, ta có :

$$B = \frac{4.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2}{2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{3,5}{0} \text{ không xác định.}$$

Vậy với $|x| = \frac{1}{2}$ thì giá trị của B là $\frac{5}{2}$ hoặc B không xác định.

c) Từ $\frac{a}{b} = \frac{6}{7}$ suy ra $\frac{a}{6} = \frac{b}{7}$. Đặt $\frac{a}{6} = \frac{b}{7} = k \Rightarrow a = 6k$; $b = 7k$.

Thay vào biểu thức ta có :

$$C = \frac{12k + 21k}{24k - 35k} = \frac{33k}{-11k} = -3.$$

Ví dụ 2. Cho x ; y thoả mãn $x^2 + y^2 = 1$.

Tính giá trị của đa thức $M = 2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 - x^2 + 10$.

Giải

$$\text{Ta có : } M = 2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 - x^2 + 10$$

$$M = 2x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) - x^2 + 10$$

$$M = 2x^2 + y^2 - x^2 + 10$$

$$M = x^2 + y^2 + 10 = 1 + 10 = 11.$$

Dạng 2. THU GỌN ĐƠN THỨC

Phương pháp giải

Để thu gọn đơn thức hoặc nhân hai hay nhiều đơn thức, ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

Ví dụ 1. Thu gọn đơn thức sau :

$$A = \left(-\frac{1}{3}xy\right) \cdot (-3y^2) \cdot (-x) ;$$

$$B = \left(-\frac{1}{4}ax^2y\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}x^2y^2z\right)^2 \cdot (2xy^3)^2 \text{ với } a \text{ là hằng số.}$$

Giải

$$\text{a) } A = -x^2y^3.$$

$$\text{b) } B = \left(-\frac{1}{4}ax^2y\right) \cdot \left(\frac{16}{25}x^4y^4z^2\right) \cdot (4x^2y^6) = -\frac{16}{25}ax^8y^{11}z^2.$$

Ví dụ 2. Trong hai số a và b có một số dương, một số âm. Biết $-\frac{1}{2}a^2b^3$ và $\frac{3}{4}a^3b$ là hai số cùng dấu. Xác định dấu của a và b .

Giải

$$\text{Do } -\frac{1}{2}a^2b^3 \text{ và } \frac{3}{4}a^3b \text{ cùng dấu nên } -\frac{1}{2}a^2b^3 \cdot \frac{3}{4}a^3b > 0 \text{ hay } -\frac{3}{8}a^5b^4 > 0.$$

Suy ra $a < 0$.

Mà a và b khác dấu, vậy dấu của b là dương.

Dạng 3. NHẬN BIẾT ĐƠN THỨC, ĐA THỨC

Phương pháp giải

- Để nhận biết một biểu thức đại số là *đơn thức*, ta căn cứ vào định nghĩa đơn thức (một số, một biến hoặc một tích giữa các số và các biến). Mỗi đơn thức gồm hai phần : Phần hệ số và phần biến.
- *Đa thức* là một tổng của các đơn thức. Mỗi *đơn thức* được coi là một *đa thức*.

Ví dụ 1. Cho đơn thức $M = -\frac{5}{2}xy.(3x)^2.\frac{4}{5}y$.

a) Thu gọn và xác định bậc, hệ số, phần biến của đơn thức M.

b) Tính giá trị của M tại $x = -1$; $y = 2$.

Giải

a) $M = -\frac{5}{2}xy.9x^2.\frac{4}{5}y = -18x^3y^2$.

Bậc của đơn thức M là 5.

Hệ số là -18.

Phần biến là : x^3y^2 .

b) Với $x = -1$; $y = 2$ thì $M = (-18).(-1)^3.2^2 \Rightarrow M = 72$.

Ví dụ 2. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đa thức ?

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{x} ; \quad \frac{3x^3 + y^3}{4} ; \quad -5xy + 3x - 2 ; \quad \frac{2x}{y} + 3 ; \quad -\frac{1}{2}x^2.$$

Giải

Biểu thức là đa thức là :

$$\frac{3x^3 + y^3}{4} ; \quad -5xy + 3x - 2 ; \quad -\frac{1}{2}x^2.$$

Ví dụ 3. Cho đơn thức $P = \left(-2x^2y^3\right)^2 \cdot \frac{-3}{10}x^4y^2$.

- a) Thu gọn và xác định bậc, phần hệ số, phần biến của đơn thức M.
b) Chứng tỏ đơn thức P nhận giá trị không dương với mọi giá trị của biến.

Giải

a) $P = 4x^4y^6 \cdot \frac{-3}{10}x^4y^2 = \frac{-6}{5}x^8y^8$.

Bậc của đơn thức là 16.

Hệ số là $\frac{-6}{5}$.

Phần biến là : x^8y^8 .

b) Ta có : $x^8 \geq 0$; $y^8 \geq 0$ với mọi x, y

mà $\frac{-6}{5} < 0$ nên $P = \frac{-6}{5}x^8y^8 \leq 0$ với mọi x, y.

Ví dụ 4. Cho các biểu thức đại số :

$$A = \frac{1}{3} \cdot (xy)^2 \cdot \frac{3}{5}x^3 ; \quad B = xy^2 + \frac{2}{7} ; \quad C = -2x^3y \cdot \frac{1}{5}x^2y ;$$

$$D = -\frac{2}{5} \cdot xy^3 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2y^2\right) ; \quad E = \frac{x^2y}{2x+3y} ; \quad F = \frac{1}{2}xy .$$

- a) Trong các biểu thức trên, biểu thức nào là đơn thức ?
b) Tìm các đơn thức đồng dạng.
c) Tính A.F ; A + C ; A - C ; A.D.

Giải

a) Các đơn thức là :

$$A = \frac{1}{3}(xy)^2 \cdot \frac{3}{5}x^3 ;$$

$$C = -2x^3y \cdot \frac{1}{5}x^2y ;$$

$$D = -\frac{2}{5}xy^3\left(\frac{1}{4}x^2y^2\right);$$

$$F = \frac{1}{2}xy.$$

b) Thu gọn các đơn thức, ta được

$$A = \frac{1}{5}x^5y^2; \quad C = -\frac{2}{5}x^5y^2;$$

$$D = -\frac{1}{10}x^3y^5; \quad F = \frac{1}{2}xy.$$

Các đơn thức đồng dạng là A và C.

$$c) \quad A.F = \frac{1}{5}x^5y^2 \cdot \frac{1}{2}xy = \frac{1}{10}x^6y^3$$

$$A + C = \frac{1}{5}x^5y^2 + \left(-\frac{2}{5}x^5y^2\right) = -\frac{1}{5}x^5y^2$$

$$A - C = \frac{1}{5}x^5y^2 - \left(-\frac{2}{5}x^5y^2\right) = \frac{3}{5}x^5y^2$$

$$A.D = \frac{1}{5}x^5y^2 \cdot \left(-\frac{1}{10}x^3y^5\right) = -\frac{1}{50}x^8y^7.$$

Dạng 4. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

Phương pháp giải

- Đối với các đa thức bất kì, thực hiện các bước sau :
 - Viết hai đa thức trong dấu ngoặc ;
 - Thực hiện bỏ dấu ngoặc theo quy tắc dấu ngoặc ;
 - Nhóm các hạng tử đồng dạng ;
 - Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng.
- Đối với các đa thức một biến, ngoài cách trên, ta có thể cộng theo cột dọc.

Ví dụ 1. Tính hiệu :

a) $(2,4x^2 + 1,7y^2 + 2xy) - (0,4x^2 - 1,3y^2 + xy)$;

b) $(5,7x^2 - 2,7xy + 5y^2) - (1,3xy - 3,3x^2 + 5y^2)$.

Giải

a) $(2,4x^2 + 1,7y^2 + 2xy) - (0,4x^2 - 1,3y^2 + xy)$

$$= 2,4x^2 + 1,7y^2 + 2xy - 0,4x^2 + 1,3y^2 - xy = 2x^2 + 3y^2 + xy.$$

b) $(5,7x^2 - 2,7xy + 5y^2) - (1,3xy - 3,3x^2 + 5y^2)$

$$= 5,7x^2 - 2,7xy + 5y^2 - 1,3xy + 3,3x^2 - 5y^2 = 9x^2 - 4xy.$$

Ví dụ 2. Cho $P = 3x^2 + 2xy - 4y^2$ và $Q = -2x^2 - 2xy + 5y^2$. Chứng minh rằng không tồn tại giá trị nào của x và y để hai đa thức cùng có giá trị âm.

Giải

Xét $P + Q = x^2 + y^2 \geq 0$ với mọi x ; y nên không thể hai đa thức P và Q cùng có giá trị âm được.

Ví dụ 3. Cho đa thức : $f(x) = -3x^2 + x - 1 + x^4 - x^3 - x^2 + 3x^4$;

$$g(x) = x^4 + x^2 - x^3 + x - 5 + 5x^3 - x^2.$$

a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến ;

b) Tính $f(x) - g(x)$; $f(x) + g(x)$;

c) Tính $g(x)$ tại $x = -1$.

Giải

a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến là :

$$f(x) = 4x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 1 ;$$

$$g(x) = x^4 + 4x^3 + x - 5.$$

b) Thực hiện phép tính ta được :

$$\begin{array}{r}
 f(x) = 4x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 1 \\
 - \quad g(x) = x^4 + 4x^3 \quad \quad + x - 5 \\
 \hline
 f(x) - g(x) = 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 \quad + 4 \\
 \\
 \begin{array}{r}
 f(x) = 4x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 1 \\
 + \quad g(x) = x^4 + 4x^3 \quad \quad + x - 5 \\
 \hline
 f(x) + g(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x - 6
 \end{array}
 \end{array}$$

c) Thay $x = -1$ vào, ta có : $g(-1) = (-1)^4 + 4(-1)^3 + (-1) - 5 = -9$.

Ví dụ 4. Cho đa thức $f(x) = -6x^2 + 3x - 4$

a) Tính giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = 2$; $x = -\frac{2}{3}$;

b) Tìm đa thức $g(x)$ sao cho $g(x) - f(x) = 2x^2 + 7x - 2$;

c) Tìm đa thức $h(x)$ sao cho $f(x) - h(x) = -7x^2 + 2x - 6$.

Giải

a) Thay $x = 2$ vào đa thức ta được ;

$$f(2) = -6.2^2 + 3.2 - 4 = -22.$$

Thay $x = -\frac{2}{3}$ vào đa thức ta được :

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -6.\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 3.\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -\frac{26}{3}.$$

b) Ta có : $g(x) - f(x) = 2x^2 + 7x - 2$

$$g(x) = 2x^2 + 7x - 2 + f(x)$$

$$g(x) = 2x^2 + 7x - 2 - 6x^2 + 3x - 4$$

$$g(x) = -4x^2 + 10x - 6.$$

c) Ta có : $f(x) - h(x) = -7x^2 + 2x - 6$

$$h(x) = f(x) - (-7x^2 + 2x - 6)$$

$$h(x) = -6x^2 + 3x - 4 + 7x^2 - 2x + 6$$

$$h(x) = x^2 + x + 2.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính giá trị của các biểu thức sau :

$$P = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 5, \text{ với } x + y = 0.$$

$$Q = 3x^2 + 2xy - 2y^2 \text{ tại } x = 1 ; y = -1.$$

2. Tìm nghiệm của đa thức $x^2 - x$.

3. Tìm bậc của của đa thức sau :

$$M = x^5 + y^6 + x^4y^4 + 1,$$

$$N = 4x^4 + 2x^3 - x^4 - x^2 + 2x^2 - 3x^4 - x + 5,$$

$$P = x^2 + y^3.$$

4. Để đa thức $ax + 6$ có nghiệm là $x = -\frac{3}{2}$ thì giá trị của a bằng bao nhiêu ?

5. Cho đa thức $Q = ax^2y^2 - 2xy + 3xy - 2x^2y^2 + 5$. Biết rằng đa thức Q có bậc là 4 và a là số nguyên tố nhỏ hơn 5. Tìm giá trị của a .

6. Cho đa thức $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 2x^3 - 3x^2 + 6$

và $Q(x) = 3x^4 + 2x^2 - 3x^4 - 4x - 6.$

- a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến ;

- b) Tính $P(2)$ và $Q(-1)$;

- c) Tìm $F(x) = P(x) + Q(x)$;

- d) Tìm nghiệm của đa thức $F(x)$.

7. Cho đa thức $A(x) = -3x^3 + 5x^5 + 2x^4 + x^2 + 2$

và $B(x) = 4x^2 - \frac{1}{2} + 3x^3 - 5x^5.$

a) Tính $P(x) = A(x) + B(x)$;

b) Chứng tỏ đa thức $P(x)$ không có nghiệm.

8. Cho đa thức $F(x) = 4x^2 + 3x - 2$

$$G(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

$$H(x) = 5x^2 - 2x + 3.$$

a) Tính $F(1)$; $G\left(\frac{-1}{3}\right)$; $H(-2)$;

b) Tìm x để $F(x) + G(x) - H(x) = 0$;

c) Chứng tỏ $F(x) - 3x + 5$ luôn dương với mọi x .

9. Cho $f(x) = x^3 - 2ax + a^2$ và $g(x) = x^2 + (3a + 1)x + a^2$.

a) Tìm a sao cho $f(1) = g(3)$;

b) Với a tìm được, hãy tính $f(x) - g(x)$.

10*. Cho biểu thức $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

a) Tính $f(7)$;

b) Tìm x để $f(x) = \frac{1}{4}$;

c) Tìm x là số nguyên để $f(x)$ có giá trị nguyên ;

d) Tìm điều kiện của x để $f(x) > 1$.

11. **Đố.** Trên bảng viết bốn đơn thức $x^4y^2z^5$; $x^2y^3z^6$; xy^5z^5 ; $x^7y^2z^2$.

Hãy chọn một trong bốn đơn thức sau để bổ sung thêm cho hợp logic :

A. xyz ;

B. $x^3y^4z^4$;

C. x^4yz^2 ;

D. xy^3z^5 .

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Giá trị của P là 5.
b) Giá trị của biểu thức là : $Q = -1$.
2. Nghiệm của đa thức là 0 ; 1.
3. a) Bậc của đa thức M là 8.
b) Thu gọn đa thức ta được : $N = 2x^3 + x^2 - x + 5$. Đa thức N có bậc là 3.
c) Bậc của đa thức P là 3
4. Đáp số : $a = 4$.
5. Ta có : $Q = (a - 2).x^2y^2 + xy + 5$.
Để đa thức Q có bậc là 4 thì $a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ mà a là số nguyên tố nhỏ hơn 5 nên $a = 3$.
6. a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến, ta được :

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 ;$$

$$Q(x) = 2x^2 - 4x - 6 .$$

b) Tại $x = 2$, ta có : $P(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 0 ;$

Tại $x = -1$, ta có : $Q(-1) = 2.(-1)^2 - 4.(-1) - 6 = 0 .$

c) Ta có : $F(x) = 3x^2 - 9x$

d) $F(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của đa thức F(x) là $x = 0$ và $x = 3$.

7. a) Ta có : $P(x) = A(x) + B(x) \Rightarrow P(x) = 2x^4 + 5x^2 + \frac{3}{2}$

b) Ta có : $x^4 \geq 0 ; x^2 \geq 0$ với mọi x nên $P(x) = 2x^4 + 5x^2 + \frac{3}{2} > 0$ với mọi x.

Suy ra đa thức P(x) không có nghiệm.

8. a) Ta có : $F(1) = 5$; $G\left(-\frac{1}{3}\right) = 6$; $H(-2) = 27$.

b) Ta có : $F(x) + G(x) - H(x) = 2x^2 + 3x$.

Để $F(x) + G(x) - H(x) = 0$, thì $2x^2 + 3x = 0$.

Suy ra $x = 0$ và $x = -\frac{3}{2}$.

c) Ta có : $F(x) - 3x + 5 = 2x^2 + 5$.

Mà $2x^2 \geq 0$ với mọi x , suy ra điều phải chứng minh.

9. a) $f(1) = g(3) \Rightarrow 1 - 2a + a^2 = 9 + 3(3a + 1) + a^2$

$\Rightarrow 1 - 2a = 9 + 9a + 3 \Rightarrow -2a - 9a = 9 + 3 - 1 \Rightarrow -11a = 11 \Rightarrow a = -1$.

b) Với $a = -1$, ta có : $f(x) = x^3 + 2x + 1$ và $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

$\Rightarrow f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + 4x$.

10*. a) $f(7) = \frac{3}{2}$.

b) Ta có : $f(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(x+2) = 1(x-1) \Rightarrow x = -3$.

c) Ta có : $f(x) = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$.

Để $f(x) \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}$. Suy ra $x-1 \in U(3)$ hay $x-1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Vậy $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$ thì $f(x)$ có giá trị nguyên.

d) $f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy $x > 1$ thì $f(x) > 1$.

11. Chọn đáp án B.

Vì bốn đơn thức đã cho đều có bậc 11.

PHẦN HÌNH HỌC

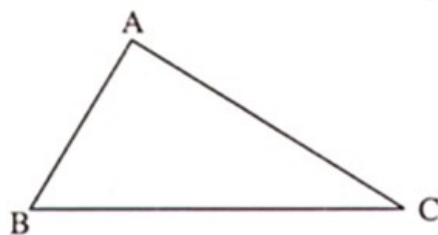
Chương III. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

§1. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lí 1. Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Trong hình 15 : $\triangle ABC$, $AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$.



Hình 15

2. Định lí 2. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Trong hình 15 : $\triangle ABC$, $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. SO SÁNH HAI GÓC TRONG MỘT TAM GIÁC

Phương pháp giải

- Xét hai góc cần so sánh đưa về hai góc của một tam giác .
- So sánh hai cạnh đối diện của hai góc đó.
- Từ đó suy ra góc nào là góc lớn hơn trong hai góc cần so sánh.

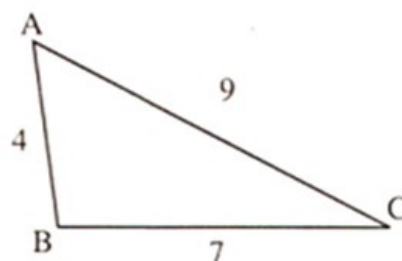
Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 4\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. So sánh các góc của tam giác ABC .

Giải. (h.16)

Ta có : $AB = 4\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$

Nên $AB < BC < AC$ theo định lí 1 suy ra :

$$\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B}.$$



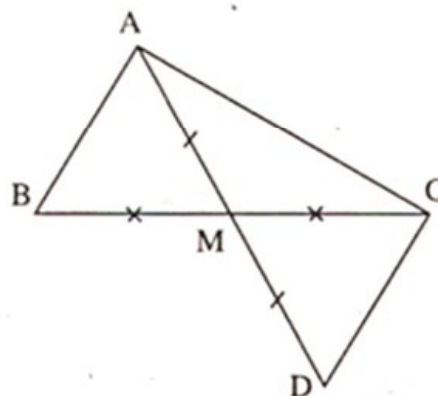
Hình 16

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng tỏ rằng $\widehat{MAB} > \widehat{MAC}$.

Giải. (h.17)

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có $MA = MD$,
 $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh), $MB = MC$ nên
 $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c), suy ra $AB = DC$,
 $\widehat{MAB} = \widehat{MDC}$.



Hình 17

Ta có $AB = DC$ và $AB < AC$ nên $DC < AC$.

Xét $\triangle ADC$ có $AC > DC$. Theo định lí 1, ta có : $\widehat{ADC} > \widehat{DAC}$.

Suy ra : $\widehat{MAB} > \widehat{MAC}$.

Nhận xét :

- Hai góc $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MAC}$ không phải là hai góc của một tam giác. Do đó cần tìm một tam giác có hai góc tương ứng bằng $\widehat{MAB}$; $\widehat{MAC}$ và liên quan đến $AB < AC$ nên ta vẽ đường phụ $MD = MA$, thỏa mãn yêu cầu trên.

- Ta có thể thay giả thiết $AB < AC$ bằng giả thiết $\widehat{B} > \widehat{C}$ ta cũng có kết luận $\widehat{MAB} > \widehat{MAC}$.

- Bạn có thể vận dụng tương tự để giải bài toán ngược : Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm cạnh BC . Biết rằng $\widehat{MAB} > \widehat{MAC}$, chứng minh $AB < AC$.

Dạng 2. SO SÁNH HAI CẠNH TRONG MỘT TAM GIÁC

Phương pháp giải

- Xét hai cạnh cần so sánh là hai cạnh của một tam giác ;
- So sánh hai góc đối diện với hai cạnh ấy ;
- Từ đó suy ra cạnh nào là cạnh lớn hơn trong hai cạnh cần so sánh.

Ví dụ 1. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$, biết $\hat{A} = 100^\circ$; $\hat{B} = 50^\circ$.

Giải

$\triangle ABC$ có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ nên $100^\circ + 50^\circ + \hat{C} = 180^\circ$, suy ra $\hat{C} = 30^\circ$.

Do đó : $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$, theo định lí 2, ta có : $AB < AC < BC$.

Ví dụ 2. Một tam giác cân có góc ở đỉnh lớn hơn 60° . So sánh cạnh bên với cạnh đáy.

Giải

Giả sử $\triangle ABC$, $AB = AC$, $\hat{A} > 60^\circ$.

Ta có : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ nên $\hat{B} + \hat{C} < 120^\circ$ mà $\hat{B} = \hat{C}$,

do đó $\hat{B} = \hat{C} < 60^\circ < \hat{A}$ suy ra $AB < BC$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$; $\hat{B} = \hat{C} + \alpha$ (với $\alpha > 0^\circ$). So sánh độ lớn ba cạnh tam giác ABC .

Giải

Ta có : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, $\hat{A} = 60^\circ$ nên $\hat{B} + \hat{C} = 120^\circ$.

Mà $\hat{B} = \hat{C} + \alpha$ ($\alpha > 0^\circ$) do đó $\hat{B} > \hat{C}$, suy ra $\hat{B} > 60^\circ > \hat{C}$

hay $\hat{B} > \hat{A} > \hat{C}$. Vậy $AC > BC > AB$.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Tia phân giác góc BAC cắt BC tại D . So sánh BD và CD .

Giải. (h.18)

Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AED \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BD = ED; \widehat{D_1} = \widehat{D_2}.$$

Theo tính chất góc ngoài tam giác, ta có :

$$\widehat{D_2} > \widehat{C}; \widehat{E_1} > \widehat{D_1}.$$

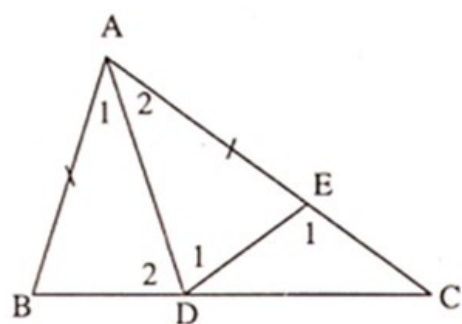
$$\text{Mà } \widehat{D_1} = \widehat{D_2} \Rightarrow \widehat{E_1} > \widehat{C}.$$

$$\text{Xét } \triangle EDC \text{ có } \widehat{E_1} > \widehat{C} \Rightarrow DC > DE \Rightarrow DC > BD.$$

Nhận xét :

- Sai lầm có thể mắc là tưởng rằng : $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ thì $BD = CD$. Lưu ý rằng khi so sánh hai đoạn thẳng, bạn nên đưa về cạnh của một tam giác và dùng định lí 2.

- Kĩ thật dùng tính chất góc ngoài của tam giác là điểm mạnh của bài toán này.



Hình 18

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho tam giác MNP có $MN = 5\text{cm}$, $NP = 7\text{cm}$, $MP = 8\text{cm}$. So sánh độ lớn ba góc tam giác MNP.
- Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 70^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. So sánh độ dài ba cạnh tam giác ABC.
- Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 50^\circ$; $\widehat{B} : \widehat{C} = 2 : 3$. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$.
- Cho tam giác ABC có $10.\widehat{A} = 15.\widehat{B} = 12.\widehat{C}$.
 - Tính số đo góc của $\triangle ABC$.
 - Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). So sánh BH, CH với AH.
- Cho $\triangle ABC$ cân tại đỉnh A. Trên BC lấy điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$.
 - Chứng minh $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.
 - so sánh $\widehat{BAM}$ và $\widehat{MAN}$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. Đáp số : $\hat{P} < \hat{M} < \hat{N}$.

2. Đáp số : $AB < AC < BC$.

3. $\triangle ABC$ có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$; $\hat{A} = 50^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 130^\circ$; mà $\frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2 + 3} = \frac{130^\circ}{5} = 26^\circ.$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 52^\circ; \hat{C} = 78^\circ.$$

Do đó : $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$ (vì $50^\circ < 52^\circ < 78^\circ$), suy ra $BC < AC < AB$.

4. (h.19)

a) Từ $10.\hat{A} = 15.\hat{B} = 12.\hat{C}$.

Ta có : $\frac{\hat{A}}{6} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{\hat{A}}{6} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{6 + 4 + 5} = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ.$$

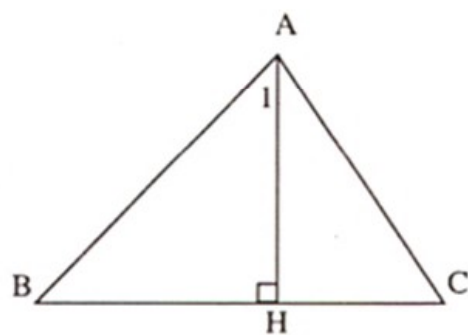
Suy ra $\hat{A} = 72^\circ$, $\hat{B} = 48^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$.

b) Xét $\triangle AHB$ có $\hat{H} = 90^\circ$ nên $\hat{B} + \hat{A}_1 = 90^\circ$

Suy ra $\hat{A}_1 = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$.

Do đó $\hat{A}_1 < \hat{B}$ hay $BH < AH$.

$\widehat{CAH} = 30^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$ nên $\widehat{CAH} < \hat{C}$ suy ra $CH < AH$.



Hình 19

5. (h.20) a) $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c), suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

b) $\triangle ANC$ có $\widehat{N_1} > \widehat{C}$ (tính chất góc ngoài tam giác)

nên $\widehat{N_1} > \widehat{B}$.

$\triangle ABN$ có $\widehat{N_1} > \widehat{B}$, suy ra $AB > AN$.

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

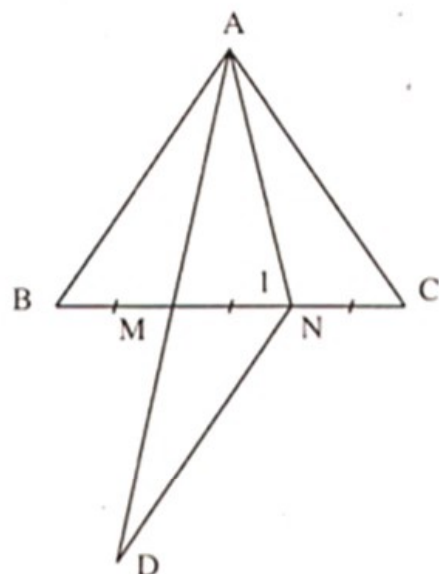
Nên $\triangle MAB = \triangle MDN$ (c.g.c), suy ra $AB = DN$;

$\widehat{MAB} = \widehat{MDN}$.

$\triangle AND$ có $AN < ND$ (vì $AN < AB$) nên

$\widehat{ADN} < \widehat{NAD}$.

Suy ra $\widehat{BAM} < \widehat{MAN}$.



Hình 20

§2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

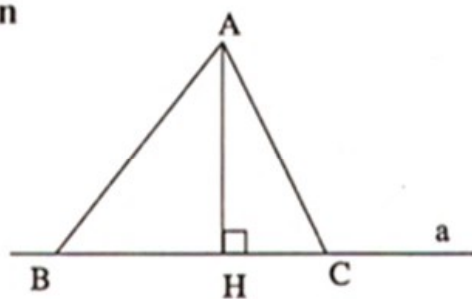
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Định lí 1. Trong các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.

Trong hình 21 :

$$AH \perp a \Rightarrow AH < AB, AH < AC.$$



Hình 21

2. Quan hệ giữa các đường xiên và các hình chiếu của chúng.

Định lí 2. Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó :

a) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

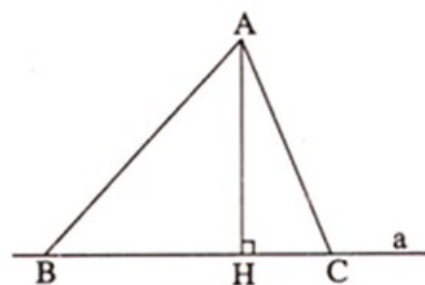
Trong hình 22a : $AH \perp a$, $HB > HC \Rightarrow AB > AC$.

b) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

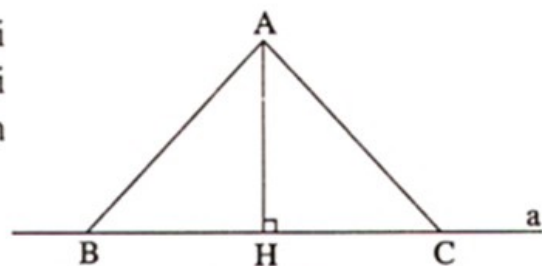
Trong hình 22a : $AH \perp a$, $AB > AC \Rightarrow HB > HC$.

c) Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

Trong hình 22b : $AB = AC \Leftrightarrow HB = HC$.



Hình 22a



Hình 22b

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. SO SÁNH HAI ĐƯỜNG XIÊN HOẶC HAI HÌNH CHIẾU

Phương pháp giải

Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó :

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

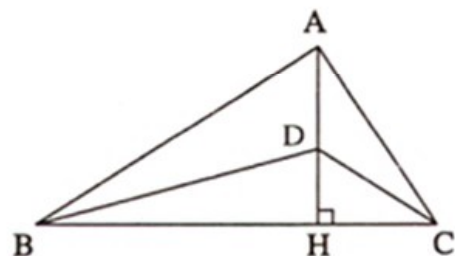
Ví dụ 1. Cho hình 23 có $AB > AC$ và $AH \perp BC$. So sánh DB và DC.

Giải. (h.23)

Ta có $AB > AC$ nên $BH > CH$ (quan hệ đường xiên và hình chiếu)

$BH > CH$ nên $DB > DC$ (quan hệ đường xiên và hình chiếu)

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$, $AB > AC$. Đường trung trực của đoạn BC cắt AB tại D cắt BC tại E. Lấy M trên cạnh AB sao cho $AM > AD$. Chứng minh $DB < CM$.



Hình 23

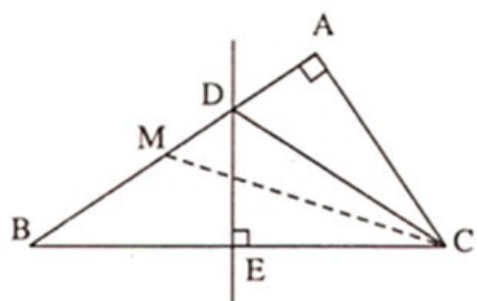
Giải. (h.24)

Ta có EB và EC lần lượt là hình chiếu của DB và DC trên BC. Mặt khác $EB = EC$ nên $DB = DC$. (1)

Vì $\hat{A} = 90^\circ$ nên AD và AM lần lượt là hình chiếu của CD và CM trên AB.

Mặt khác $AM > AD$ nên $CM > CD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD < CM$.



Hình 24

Dạng 2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

Phương pháp giải

Sử dụng định lí đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên kẻ từ một điểm đến cùng một đường thẳng.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn, điểm D nằm giữa B và C sao cho AD không vuông góc với BC. Gọi H và K là chân đường vuông góc kẻ từ B và C đến đường thẳng AD.

a) So sánh $BH + CK$ với $AB + AC$.

b) So sánh $BH + CK$ với BC .

Giải. (h.25)

a) $BH \perp AH$ nên $BH < AB$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).

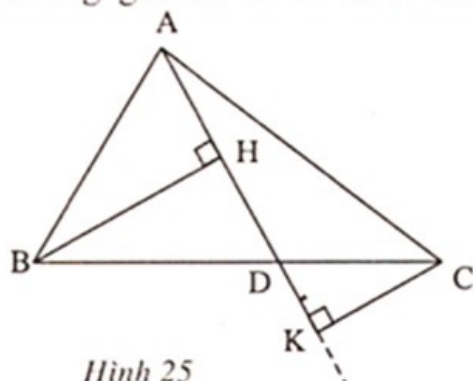
$CK \perp AK$ nên $CK < AC$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).

Suy ra $BH + CK < AB + AC$.

b) $BH \perp DH$ nên $BH < BD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).

$CK \perp DK$ nên $CK < CD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).

Do đó $BH + CK < BD + CD$, suy ra $BH + CK < BC$.



Hình 25

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại B. Gọi M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy E sao cho $ME = AM$. Chứng minh :

a) $\triangle ABM = \triangle ECM$;

b) $AC > CE$.

Giải. (h.26)

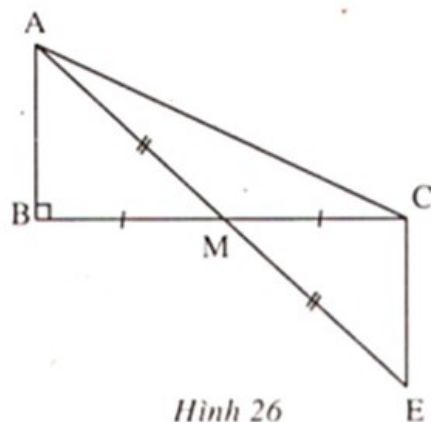
a) $\triangle ABM$ và $\triangle ECM$ có $MA = ME$;

$\widehat{AMB} = \widehat{EMC}$; $BM = CM$

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ECM$ (c.g.c)

b) $\triangle ABM = \triangle ECM$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CE$.

$AB \perp BC$ nên $AC > AB$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên) $\Rightarrow AC > CE$.



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

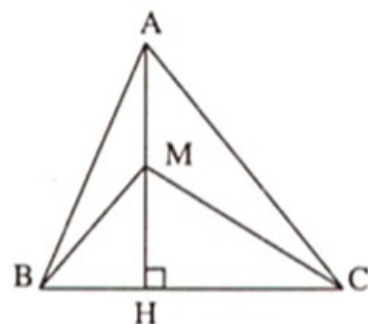
1. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, đường cao AH.

Lấy điểm M bất kì thuộc AH ($M \neq H$) như hình 27. Chứng minh rằng :

a) $BH < HC$;

b) $BM < MC$;

c) $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$.



2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, Vẽ AH vuông góc với BC.

Chứng minh rằng : $AB + AC < AH + BC$.

3. Cho $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB < AC$. Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC tại D. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC, cắt đường thẳng BD tại E. Chứng minh rằng : $CE > AC$.

4. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ AH ; BK ; CI lần lượt vuông góc với các cạnh BC ; AC ; AB. Chứng minh :

a) $AH < \frac{AB + AC}{2}$.

b) $AH + BK + CI < AB + AC + BC$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.27) Theo quan hệ đường xiên và hình chiếu, ta có :

a) $AB < AC$ thì $HB < HC$

b) $HB < HC$ thì $BM < MC$.

c) $AB < AC$ nên $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$.

Mặt khác $\widehat{ABH} + \widehat{HAB} = 90^\circ$, $\widehat{ACH} + \widehat{HAC} = 90^\circ$, do đó $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$.

2. (h.28) Trên cạnh BC lấy D sao cho $BD = BA$

$\Rightarrow \triangle BAD$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{BAD}$

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Vẽ $DE \perp AC \Rightarrow \triangle AHD = \triangle AED$

(cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = AE$.

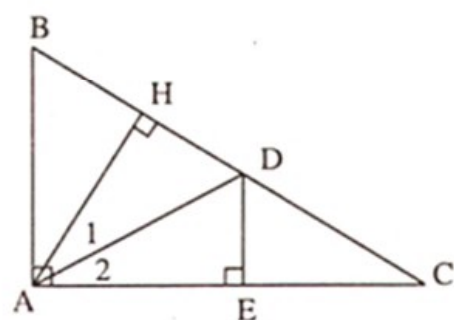
Ta có $CD > EC$ (quan hệ đường xiên và đường vuông góc)

$\Rightarrow CD + BD > EC + BD$

$\Rightarrow BC > EC + AB$

$\Rightarrow BC + AH > AE + EC + AB$ (vì $AH = AE$)

$\Rightarrow BC + AH > AC + AB$.



Hình 28

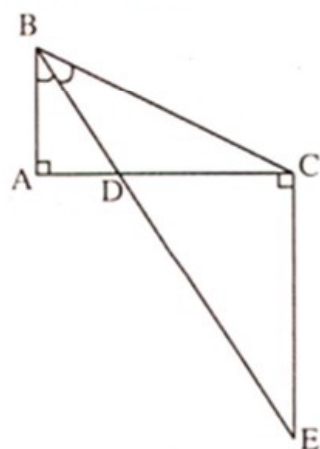
3. (h.29) Ta có : $AB \parallel CE$ (cùng vuông góc với AC) nên $\widehat{ABE} = \widehat{CEB}$.

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$, suy ra $\widehat{CEB} = \widehat{CBE}$, do đó $\triangle CBE$ cân, suy ra $CB = CE$

Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$ thì $BC > AC$, do đó $CE > AC$.

4. (h.30) a) $AH \perp BC \Rightarrow AH < AB$; $AH < AC$

$\Rightarrow 2.AH < AB + AC \Rightarrow AH < \frac{AB + AC}{2}$.



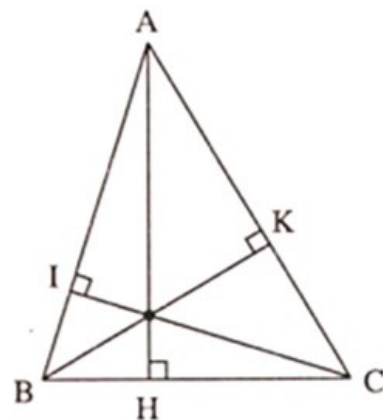
Hình 29

b) Theo câu a) ta có $AH < \frac{AB + AC}{2}$ (1) ;

Tương tự ta có : $BK < \frac{AB + BC}{2}$ (2) ;

$CI < \frac{CB + CA}{2}$ (3).

Từ (1), (2), (3) cộng vế với vế, ta có điều phải chứng minh.



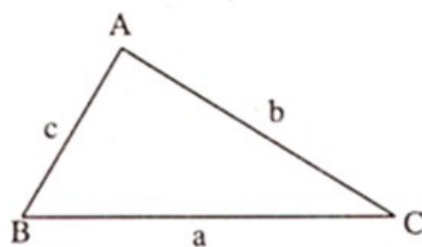
Hình 30

§3. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh kia.

Trong hình 31 : $|b - c| < a < b + c$



Hình 31

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. KHẲNG ĐỊNH TỒN TẠI HAY KHÔNG MỘT TAM GIÁC KHI BIẾT ĐỘ DÀI BA ĐOẠN THẲNG

Phương pháp giải

Nếu các độ dài a, b, c không thỏa mãn : $|b - c| < a < b + c$ thì a, b, c không thể là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Ví dụ 1. Có thể có tam giác nào mà độ dài ba cạnh như sau không?

a) 8cm, 4cm, 13cm.

b) 5cm, 9cm, 7cm.

c) 7cm, 4cm, 3cm.

Giải

a) Ta có $8 + 4 = 12 < 13$ do vậy không tồn tại một tam giác mà độ dài ba cạnh là 8cm, 4cm, 13cm.

b) *Cách 1 :*

$5 < 7 < 9$ và $9 < 5 + 7$ do vậy có thể tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh là 5cm, 9cm, 7cm.

Cách 2 :

$5 < 7 < 9$ và $5 > 9 - 7$ do vậy có thể tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh là 5cm, 9cm, 7cm.

c) $4 + 3 = 7$ do vậy không tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh là 7cm, 4cm, 3cm.

Ví dụ 2. Tính chu vi của một tam giác cân có hai cạnh là 6cm, 13cm.

Giải

Giả sử $\triangle ABC$ có $AB = AC$.

Nếu $AB = AC = 6\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$ thì $AB + AC = 12\text{cm}$. Suy ra $AB + AC < BC$. Điều này trái với bất đẳng thức tam giác, do đó trường hợp này không xảy ra.

Vậy $AB = AC = 13\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$. Do đó chu vi $\triangle ABC$ là

$$AB + AC + BC = 13 + 13 + 6 = 32\text{cm}.$$

Ví dụ 3. Một tam giác ABC có $AB = 1\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, cạnh CA có độ dài là một số nguyên (cm). Tính độ dài cạnh AC.

Giải

Đặt $CA = x$ (cm), $x \in \mathbb{N}^*$

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có :

$5 - 1 < x < 5 + 1$ hay $4 < x < 6$, mà $x \in \mathbb{N}^*$, suy ra $x = 5$ hay $CA = 5\text{cm}$.

Dạng 2. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH MỘT BẤT ĐẲNG THỨC VỀ ĐỘ DÀI.

Phương pháp giải

- Sử dụng bất đẳng thức tam giác và các biến đổi về bất đẳng thức.

- Bất đẳng thức hay dùng là :

+ Cộng hai vế của bất đẳng thức với cùng một số :

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

+ Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều

$$\left. \begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c < b + d.$$

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm N nằm giữa A và B. Chứng tỏ

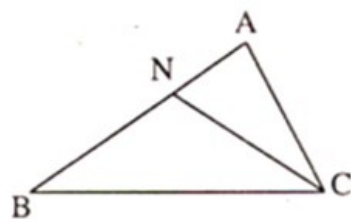
$$NB + NC < AB + AC.$$

Giải. (h.32)

$\triangle ANC$ có $NC < AN + AC$ (bất đẳng thức tam giác) .

Do đó $BN + NC < BN + AN + AC$.

Suy ra $BN + NC < AB + AC$.



Hình 32

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng :

$$AB + AC > 2.AM$$

Giải. (h.33)

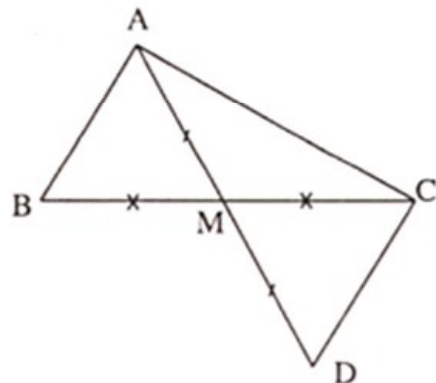
Lấy điểm D trên tia đối của tia MA sao cho $MD = MA$.

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có $MA = MD$,
 $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$;

$MB = MC$ nên $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c).

Suy ra $AB = DC$.

Xét $\triangle ACD$ có $DC + AC > AD$ (bất đẳng thức tam giác)



Hình 33

nên $AB + AC > 2.AM$ (do $AD = 2.AM$).

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Gọi M, N là trung điểm cạnh AB ; AC. Chứng minh rằng BC nhỏ hơn chu vi tam giác AMN.

Giải. (h.34)

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có :

$$BM + MC > BC$$

$$MN + NC > CM$$

$$\text{Suy ra } BM + MC + MN + NC > BC + MC$$

$$\text{hay } BM + MN + NC > BC.$$

$$\text{Do đó } MN + AN + AM > BC.$$

Dạng 3. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA TỔNG HAI ĐỘ DÀI.

Phương pháp giải

Với ba điểm A, B, M bất kì ta có :

+ $AM + BM > AB$ khi M không thuộc đoạn thẳng AB.

+ $AM + BM = AB$ khi M thuộc đoạn AB.

Như vậy : Nếu độ dài AB không đổi thì tổng $AM + BM$ nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi M thuộc đoạn AB.

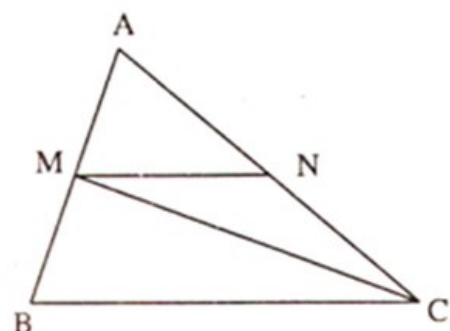
Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ a. Tìm vị trí điểm M thuộc a sao cho $AM + BM$ nhỏ nhất.

Giải. (h.35)

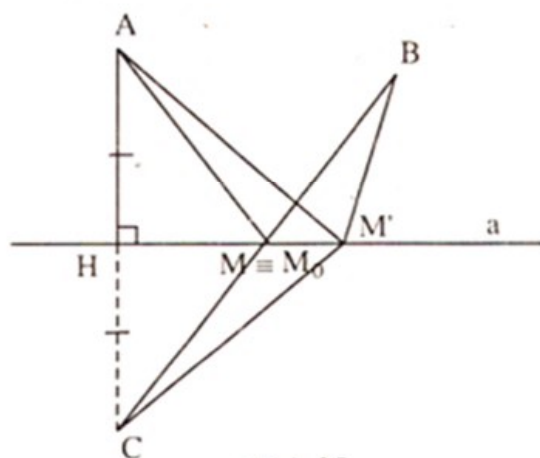
Kẻ $AH \perp a$, trên tia đối của tia HA lấy điểm C sao cho $HC = HA$. Gọi M_0 là giao điểm của a với BC.

Xét $\triangle HAM_0$ và $\triangle HCM_0$ có $HA = HC$,

$$\widehat{AHM_0} = \widehat{CHM_0} ; HM_0 \text{ chung}$$



Hình 34



Hình 35

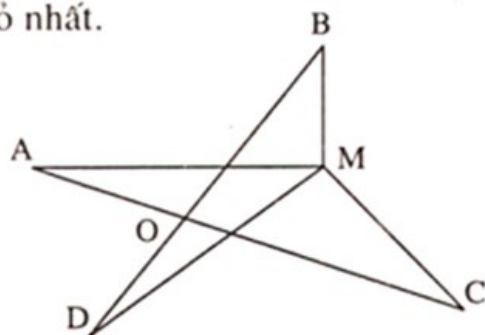
nên $\Delta HAM_0 = \Delta HCM_0$ (c.g.c) suy ra $M_0A = M_0C$.

Ta có $M_0A + M_0B = M_0C + M_0B = BC$. (1)

Gọi $M' \in a$ và $M' \neq M_0$. Ta có $M'A + M'B = M'C + M'B > BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M \equiv M_0$ thì $MA + MB$ nhỏ nhất.

Ví dụ 2. Cho bốn xã là A, B, C, D như hình 36. Người ta muốn xây dựng một trạm biến thế sao cho tổng độ dài đường dây dẫn đến bốn xã là ngắn nhất. Em hãy xác định vị trí đó.



Hình 36

Giải. (h.36)

Gọi M là điểm bất kì, ta có :

$MA + MC \geq AC$ (dấu "=" xảy ra khi M thuộc đoạn thẳng AC)

$MB + MD \geq BD$ (dấu "=" xảy ra khi M thuộc đoạn thẳng BD)

Suy ra $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$

Nên tổng dây dẫn đến bốn xã : $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất bằng $AC + BD$ khi và chỉ khi M trùng với giao điểm O của AC và BD.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Có thể có tam giác nào mà độ dài ba cạnh như sau không?
 - 4cm ; 10cm ; 5cm.
 - 5, 2cm ; 3,1cm ; 2,1cm.
 - 5cm ; 6cm ; 10cm.
- Một tam giác cân có độ dài hai cạnh là 5cm, 11cm. Tính chu vi của tam giác ấy.
- Một tam giác có độ dài các cạnh là 3(cm), 10(cm), p(cm). Nếu p là số nguyên tố thì p có thể là bao nhiêu?
- Ba cạnh của tam giác tỉ lệ với 6 : 8 : 10. Cạnh lớn nhất lớn hơn cạnh nhỏ nhất là 12(cm). Tính độ dài các cạnh của tam giác.

5. Chu vi của một tam giác cân là 30cm, một cạnh dài 6cm. Tính độ dài hai cạnh còn lại.
6. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Chúng minh rằng $\frac{AC - AB}{2} < AM < \frac{AC + AB}{2}$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) $4 + 5 = 9 < 10$, do vậy không tồn tại một tam giác mà độ dài ba cạnh là 4cm, 10cm, 5cm.
 b) $3,1 + 2,1 = 5,2$, do vậy không tồn tại một tam giác mà độ dài ba cạnh là 5,2cm ; 3,1cm ; 2,1cm.
 c) $5 < 6 < 10$ và $10 < 5 + 6$ do vậy có thể tồn tại một tam giác mà độ dài ba cạnh là 5cm, 6cm, 10cm.

2. Giả sử $\triangle ABC$ có $AB = AC$.

Nếu $AB = AC = 5\text{cm}$, $BC = 11\text{cm}$ thì $AB + AC = 5 + 5 = 10 < BC$ không xảy ra (vô lí)

Vậy $AB = AC = 11\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$.

Do đó chu vi $\triangle ABC$ là : $AB + AC + BC = 11 + 11 + 5 = 27\text{cm}$.

3. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có : $10 - 3 < p < 10 + 3$ hay $7 < p < 13$ mà p là số nguyên tố nên $p = 11$.
4. Đặt a, b, c là ba cạnh của tam giác.

Ta có : $\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{10} = \frac{c-a}{10-6} = \frac{12}{4} = 3$. Vậy $a = 18\text{cm}$, $b = 24\text{cm}$, $c = 30\text{cm}$.

5. Giả sử $\triangle ABC$ có $AB = AC$ thoả mãn điều kiện.

Nếu $AB = AC = 6(\text{cm})$ thì $BC = 30 - 6 - 6 = 18(\text{cm})$.

Khi đó $AB + AC < BC$ (vì $6 + 6 < 18$) nên trường hợp này không xảy ra.

Vậy $BC = 6(\text{cm})$. Khi đó $AB + AC = 30 - 6 = 24(\text{cm})$ hay $AB = AC = 12(\text{cm})$ và $AB + BC > AC$ ($12 + 6 > 12$), do đó hai cạnh còn lại là : $AB = AC = 12\text{cm}$.

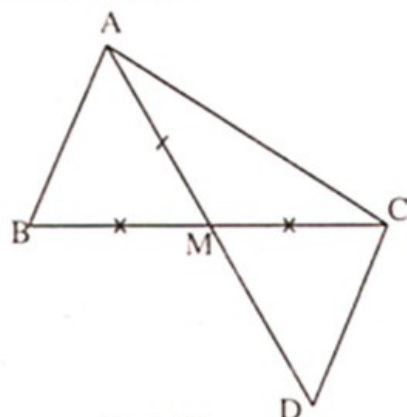
6. (h.37) Lấy điểm D trên tia đối của tia MA sao cho $MD = MA$.

Suy ra $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = DC$.

Xét $\triangle ACD$ có $AC - CD < AD < AC + CD$

nên $AC - AB < 2.AM < AC + AB$.

$$\text{Suy ra } \frac{AC - AB}{2} < AM < \frac{AC + AB}{2}.$$



Hình 37

§4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm.

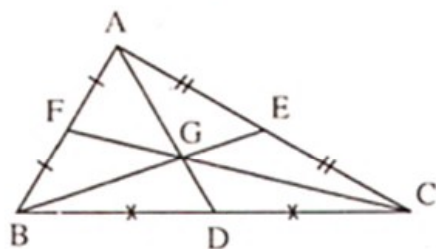
Điểm gặp nhau của ba đường trung tuyến gọi là *trọng tâm* của tam giác đó.

2. Vị trí của trọng tâm

Trọng tâm của tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

G là trọng tâm của $\triangle ABC$ (h.38) :

$$AG = \frac{2}{3}AD ; BG = \frac{2}{3}BE ; CG = \frac{2}{3}CF.$$



Hình 38

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN VÀ TÍNH CHẤT TRỌNG TÂM CỦA TAM GIÁC. SO SÁNH ĐỘ DÀI HAI ĐOẠN THẲNG.

Phương pháp giải

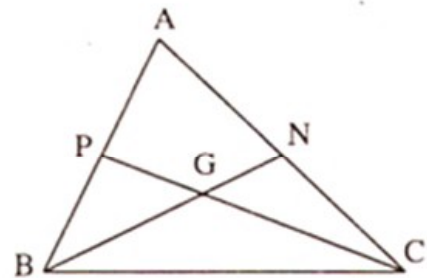
– Sử dụng tính chất trọng tâm : Nếu $\triangle ABC$ có trung tuyến AM , trọng tâm G thì

$$AG = \frac{2}{3} AM ; AG = 2GM ; GM = \frac{1}{3} AM .$$

– Nếu một đường thẳng đi qua một đỉnh và trọng tâm thì chia đôi cạnh đối diện.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có hai trung tuyến BN ; CP và trọng tâm G . Chứng minh rằng $BN + CP > \frac{3}{2} BC$.

Giải. (h.39)



Hình 39

Xét $\triangle GBC$ có $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác)

Mà $GB = \frac{2}{3} BN$, $GC = \frac{2}{3} CP$ (tính chất trọng tâm) nên :

$$\frac{2}{3} BN + \frac{2}{3} CP > BC . \text{ Vậy } BN + CP > \frac{3}{2} BC .$$

Nhận xét :

- Những bài toán liên quan đến đường trung tuyến, bạn nên nghĩ đến tính chất trọng tâm tam giác.

- Vận dụng kết quả trên bạn có thể chứng minh được bài toán khó sau : Cho tam giác ABC có AM , BN , CP là các đường trung tuyến. Chứng minh : $AM + BN + CP > \frac{3}{4}(AB + BC + CA)$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến AM , BN vuông góc với nhau, trọng tâm G . Biết $AM = 4,5\text{cm}$, $BN = 6\text{cm}$. Tính độ dài AB .

Giải. (h.40)

Xét $\triangle ABC$ có $AG = \frac{2}{3} AM$, $BG = \frac{2}{3} BN$ (tính chất trọng tâm)

nên $AG = 3\text{cm}$, $BG = 4\text{cm}$.

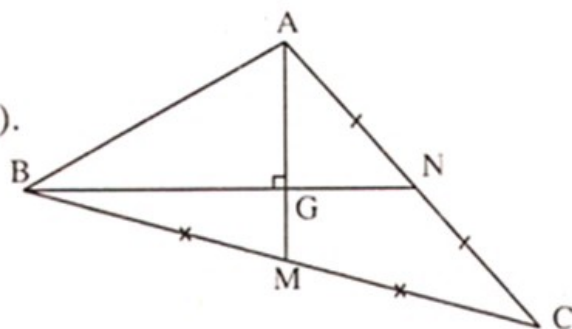
Xét $\triangle ABG$ có $\widehat{AGB} = 90^\circ$ (vì $AM \perp BN$).

Theo định lí Py-ta-go, ta có :

$$AB^2 = AG^2 + BG^2$$

$$AB^2 = 9 + 16 = 25.$$

Suy ra : $AB = 5\text{cm}$.



Hình 40

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BM , CN cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia MG lấy điểm I sao cho $MI = MG$. Trên tia đối của tia NG lấy điểm K sao cho $NK = NG$.

Chứng minh rằng $IK = BC$; $IK \parallel BC$.

Giải. (h.41)

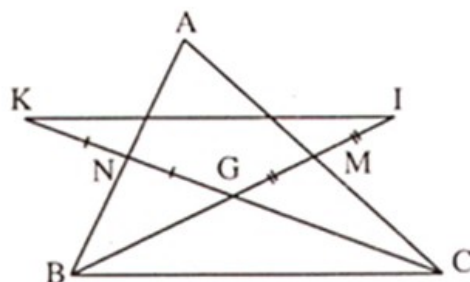
Ta có $GK = GC$ ($= 2GN$) ; $GI = GB$ ($= 2GM$)

Xét $\triangle GBC$ và $\triangle GIK$ có $GK = GC$, $\widehat{KGI} = \widehat{BGC}$,

$$GB = GI \text{ nên } \triangle GBC = \triangle GIK \text{ (c.g.c)}$$

Suy ra $IK = BC$.

$$\widehat{GIK} = \widehat{GBC} \text{ do đó } IK \parallel BC.$$



Hình 41

Dạng 2. ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN ĐỐI VỚI CÁC TAM GIÁC ĐẶC BIỆT

Phương pháp giải

Chú ý đến tính chất đường trung tuyến đi qua trung điểm của một cạnh, từ đó kết hợp với tính chất của tam giác đặc biệt suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có đường trung tuyến AM .

a) Chứng minh $AM \perp BC$

b) Cho $AB = 13\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$. Tính AM .

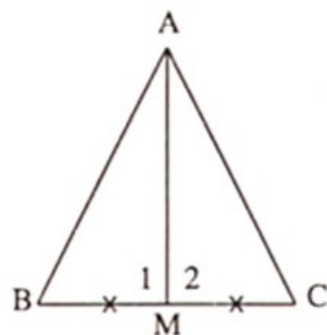
Giải. (h.42)

a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có $AB = AC$, AM chung, $BM = MC$ nên $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c),

do đó $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (tính chất).

Mặt khác $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^\circ$ (kề bù)

nên $\widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^\circ$ hay $AM \perp BC$.



Hình 42

b) Xét $\triangle ABM$ có $\widehat{M_1} = 90^\circ$. Theo định lí Py-ta-go, ta có :

$$AM^2 + BM^2 = AB^2 \text{ hay } AM^2 + 5^2 = 13^2$$

$$AM^2 + 25 = 169$$

$$AM^2 = 144 \text{ suy ra } AM = 12\text{cm}.$$

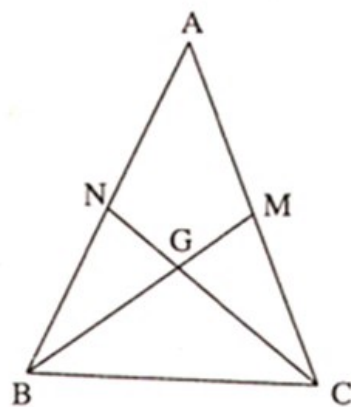
Ví dụ 2. Chứng minh rằng một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Giải. (h.43)

Giả sử $\triangle ABC$ có BM , CN là các đường trung tuyến, $BM = CN$, G là trọng tâm.

$$BG = \frac{2}{3}BM ; CG = \frac{2}{3}CN ;$$

$$GM = \frac{1}{3}BM ; GN = \frac{1}{3}CN .$$



Hình 43

Suy ra : $BG = CG$; $GM = GN$ mà $\widehat{BGN} = \widehat{CGM}$,

do đó $\triangle BGN = \triangle CGM$ (c.g.c) $\Rightarrow BN = CM \Rightarrow AB = AC$ hay $\triangle ABC$ cân tại A.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

Giải. (h.44)

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có đường trung tuyến AM , ta sẽ chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$.

Trên tia đối tia MA lấy D sao cho $MD = MA$.

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có $AM = MD$,

$$\widehat{AMC} = \widehat{DMB}, BM = MC$$

nên $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c).

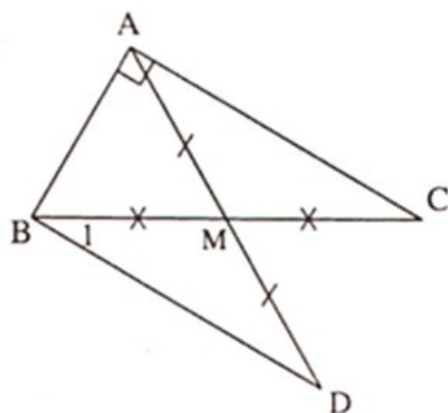
Suy ra $BD = AC$, $\widehat{B_1} = \widehat{C}$, do đó $BD \parallel AC$.

Mặt khác $AC \perp AB$ nên $BD \perp AB$.

Xét $\triangle ACB$ và $\triangle BDA$ có $AC = BD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DBA} = 90^\circ$,

AB cạnh chung, nên $\triangle ACB = \triangle BDC$ (c.g.c), suy ra $BC = AD$.

Mà $AM = \frac{1}{2}AD$ nên $AM = \frac{1}{2}BC$.



Hình 44

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

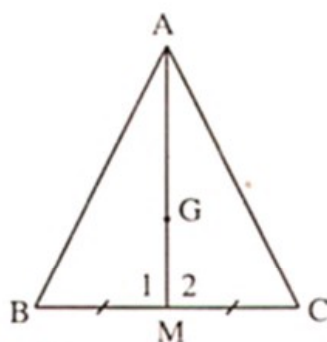
1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 5\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$. Đường trung tuyến AM , trọng tâm G . Tính độ dài đoạn AG .
2. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN , CP vuông góc với nhau tại G . Biết độ dài $BC = 5\text{cm}$. Tính độ dài AG .
3. Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy E sao cho $AE = 2AB$. Trên tia đối của tia BC lấy D sao cho $BD = BC$. Chứng minh rằng :
 - a) A là trọng tâm của $\triangle CDE$;
 - b) CA đi qua trung điểm của DE .
4. Cho $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm. Trên tia đối của tia MG lấy điểm D sao cho $MD = MG$. Chứng minh rằng CG là đường trung tuyến của $\triangle ACD$.
5. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BM , CN cắt nhau tại G . Biết $BM = CN$. Chứng minh rằng $AG \perp BC$.
6. Cho hai đoạn thẳng AC , BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC , CD . Đoạn thẳng AM , AN cắt BD lần lượt tại I và K .

Chứng minh $BI = IK = KD$.

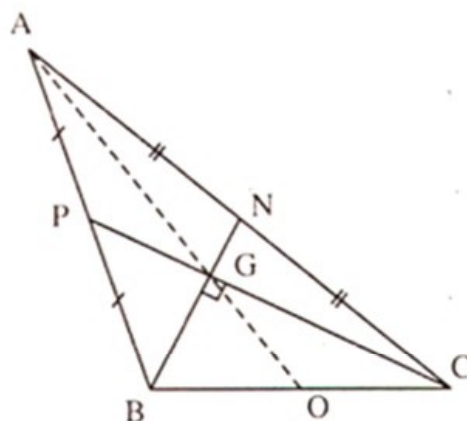
HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.45) Chứng minh $AM \perp BC$ rồi dùng định lí Py-ta-go tính được : $AM = 3\text{cm}$.

G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên : $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.3 = 2(\text{cm})$.



Hình 45



Hình 46

2. (h.46) AG cắt BC tại O thì $OB = OC$.

Xét $\triangle BGC$ có $\widehat{BGC} = 90^\circ$, $OB = OC$ nên $OG = OB = OC = \frac{1}{2}BC$.

Mà $OG = \frac{1}{2}AG$ (theo tính chất trọng tâm), suy ra $AG = BC = 5\text{cm}$.

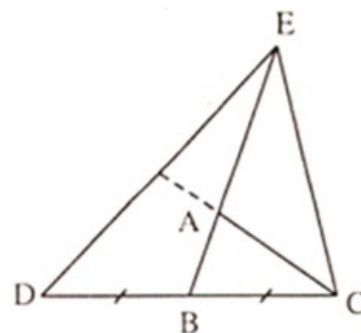
Nhận xét

Dựa vào kĩ thuật trên, ta có thể chứng minh được bài toán sau : Cho $\triangle ABC$ có AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Biết $BN \perp CP$. Chứng minh

$$AM = \frac{3}{2}BC.$$

3. (h.47) a) $BC = BD$ nên EB là đường trung tuyến của $\triangle EDC$, mà $AB = \frac{1}{2}AE$, suy ra A là trọng tâm của $\triangle CDE$.

b) A là trọng tâm $\triangle ECD$ nên CA đi qua trung điểm DE.



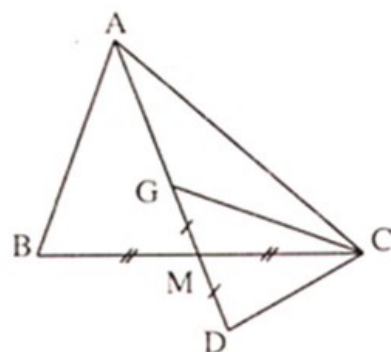
Hình 47

4. (h.48) AM là trung tuyến, G là trọng tâm
nên $MG = \frac{1}{2}AG$.

$$\text{Mặt khác } MG = MD \Rightarrow MG = \frac{1}{2}GD.$$

Do đó $GA = GD$.

Vậy CG là đường trung tuyến của $\triangle ACD$.



Hình 48

5. (h.49) Ta có : $BG = \frac{2}{3}BM$; $CG = \frac{2}{3}CN$.

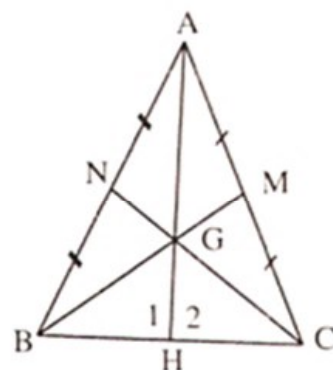
Mà $BM = CN$ (gt) nên $BG = CG$.

Gọi giao điểm của AG và BC là H, theo tính chất ta có : $HC = HB$.

$$\triangle GHB = \triangle GHC \text{ (c.c.c)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{H_1} = \widehat{H_2} \text{ mà } \widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 180^\circ.$$

Do đó $\widehat{H_1} = 90^\circ$ hay $AG \perp BC$.



Hình 49

6. (h.50) Xét $\triangle ABC$ có AM, BO là các đường trung tuyến, suy ra I là trọng tâm

$$\Rightarrow BI = \frac{2}{3}BO$$

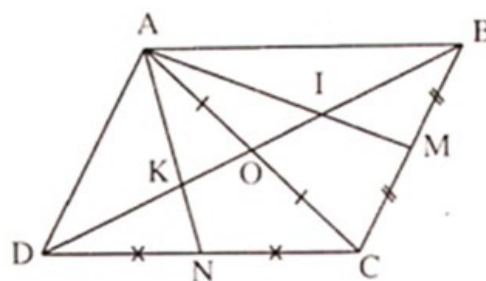
$$\Rightarrow BI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD. \quad (1)$$

Tương tự ta có K là trọng tâm $\triangle ACD$

$$\Rightarrow DK = \frac{1}{3}BD. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow KI = BD - BI - DK = \frac{1}{3}BD.$$

Vậy $BI = IK = KD$.



Hình 50

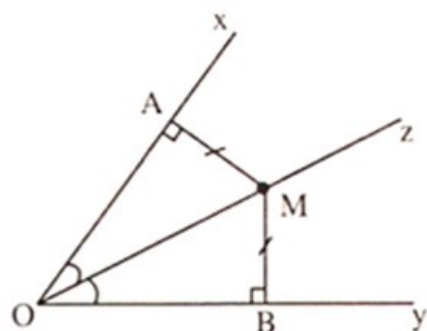
§5. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lí 1. Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

Trong hình 51 :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{xOz} = \widehat{zOy} \\ M \in Oz \\ MA \perp Ox ; MB \perp Oy \end{array} \right\} \Rightarrow MA = MB.$$



Hình 51

2. Định lí 2. Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

3. Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải

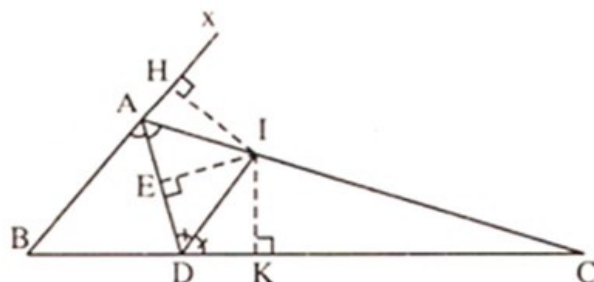
Vận dụng định lí : Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

Ví dụ. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BC tại D. Tia phân giác của $\widehat{ADC}$ cắt AC tại I. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của I trên đường thẳng AB ; BC. Chứng minh $IH = IK$.

Giải. (h.52)

Kẻ $IE \perp AD$. Gọi Ax là tia đối của tia AB.

$$\widehat{BAC} = 120^\circ \text{ nên } \widehat{CAx} = 60^\circ.$$



Hình 52

AD là phân giác $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{CAx}$ hay AC là tia phân giác của $\widehat{DAx}$ do đó $IH = IE$.

Mặt khác, DI là phân giác của $\widehat{ADC}$ nên $IK = IE$. Vậy $IH = IK$.

Dạng 2. CHỨNG MINH MỘT TIA LÀ TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

Phương pháp giải

Vận dụng định lí : Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng $\triangle BCD$ vuông cân tại D. Chứng minh AD là tia phân giác của góc A.

Giải. (h.53)

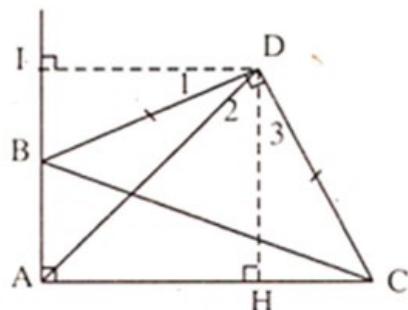
Kẻ $DI \perp AB$, $DH \perp AC$, ta có : $DI \parallel AC$

nên $DI \perp DH$.

Xét $\triangle BDI$ và $\triangle CDH$ có $\hat{I} = \hat{H} = 90^\circ$, $BD = DC$,

$\widehat{D_1} = \widehat{D_3}$ (cùng phụ với $\widehat{D_2}$), nên $\triangle BDI = \triangle CDH$.

Suy ra $DI = DH$ do đó AD là tia phân giác $\hat{A}$.



Hình 53

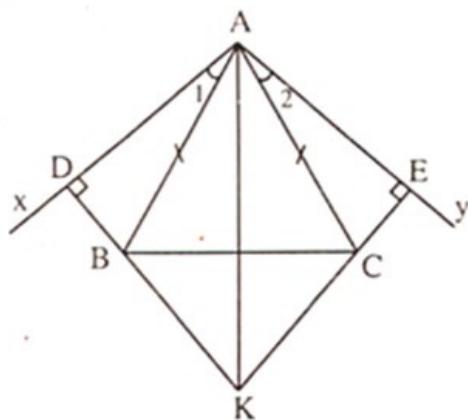
Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ tia Ax, trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Ay sao cho $\widehat{xAB} = \widehat{yAC}$. Kẻ $BD \perp Ax$ ($D \in Ax$), $CE \perp Ay$ ($E \in Ay$). Đường thẳng BD và CE cắt nhau tại K. Chứng minh KA là tia phân giác của $\widehat{DKE}$.

Giải. (h.54)

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$; $AB = AC$ nên $\triangle ABD = \triangle ACE$.

Do đó $AD = AE$, suy ra KA là tia phân giác $\widehat{DKE}$.



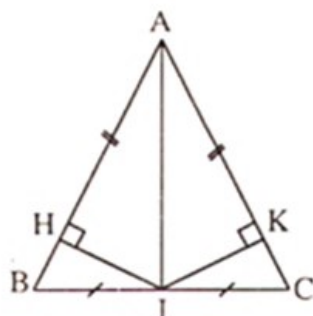
Hình 54

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi I là trung điểm của BC. Từ I vẽ $IH \perp AB$; $IK \perp AC$.
 - Chứng minh $\triangle IBH = \triangle ICK$;
 - Chứng minh AI là tia phân giác góc BAC.
- Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B lấy điểm D sao cho $CD \perp CA$; $CD = 10\text{cm}$.
 - Chứng minh BD là tia phân giác góc ABC;
 - Gọi I là trung điểm của BD. Kẻ $IM \perp AB$; $IN \perp BC$; $IP \perp CD$. Chứng minh rằng $IM = IN = IP$.
- Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^\circ$. Vẽ tia Bx trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A sao cho $\widehat{CBx} = \widehat{CBA}$. Trên Bx lấy điểm D sao cho $CA = CD$ và $\widehat{CDB} > 90^\circ$. Chứng minh rằng $\widehat{CDB} = \widehat{CAB}$.
- Chứng minh rằng: Tam giác ABC có trung tuyến AM đồng thời là phân giác thì tam giác ABC cân.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

- (h.55) a) $\triangle IBH = \triangle ICK$ (cạnh huyền, góc nhọn).
 b) $IH = IK$ (vì $\triangle IBH = \triangle ICK$)
 $\Rightarrow$ AI là tia phân giác góc BAC.



Hình 55

2. (h.56) a) Áp dụng định lí Py-ta-go, ta tính được :
 $BC = 10\text{cm}$.

$$\triangle BDC \text{ cân tại } C \Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{D_1}.$$

$$\text{Mà } \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \text{ (so le trong)} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$$

$\Rightarrow BD$ là tia phân giác của góc ABC .

$$\text{b) } \triangle CIB = \triangle CID \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{BCI} = \widehat{DCI}$$

$\Rightarrow CI$ là tia phân giác $\widehat{BCD} \Rightarrow IN = IP$.

BI là phân giác $\widehat{ABC} \Rightarrow IM = IN$.

Suy ra $IM = IN = IP$.

3. (h.57) Vẽ $CI \perp AB$, $CK \perp BD$.

BC là tia phân giác $\widehat{ABD} \Rightarrow CI = CK$.

Từ đó suy ra $\triangle IAC = \triangle KDC$

(cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{KDC} \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{CDB}.$$

4. (h.58) Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

Suy ra $\triangle AMB = \triangle DMC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = CD \text{ và } \widehat{A_1} = \widehat{D}$$

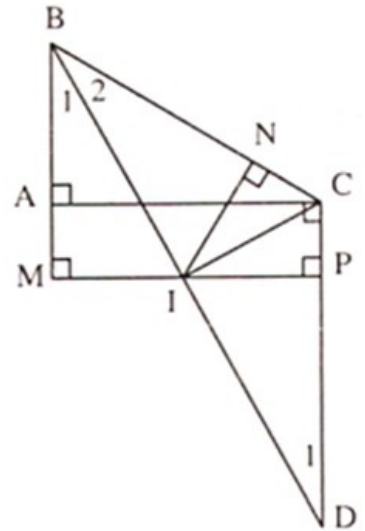
$$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{D} (= \widehat{A_1})$$

$\Rightarrow \triangle ACD$ cân tại C

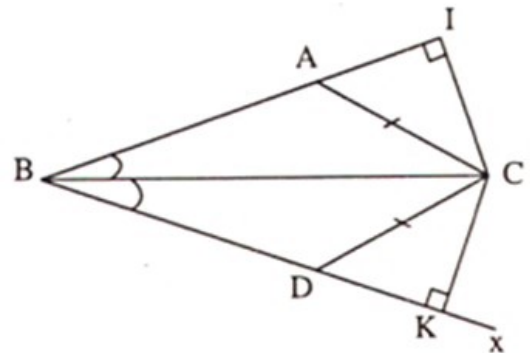
$$\Rightarrow AC = CD.$$

$$\Rightarrow AC = AB (= CD).$$

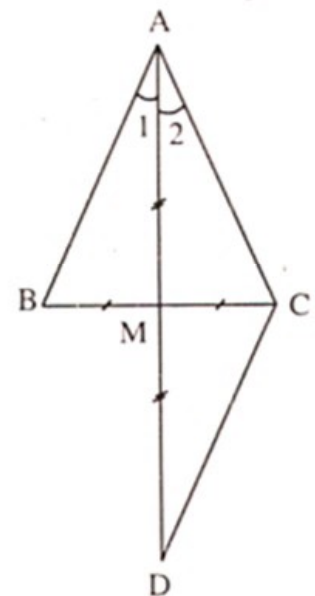
Vậy tam giác ABC cân tại A .



Hình 56



Hình 57



Hình 58

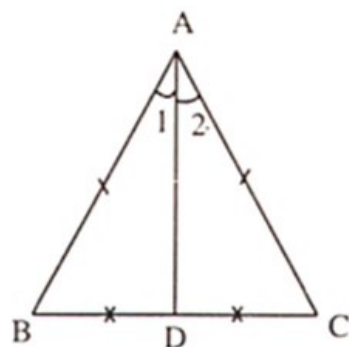
§6. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lí 1. Trong một tam giác cân, đường phân giác của góc ở đỉnh đồng thời là đường trung tuyến của tam giác đó.

Trong hình 59 :

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : AB = AC \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow BD = DC.$$



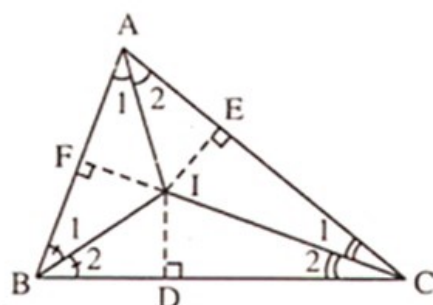
Hình 59

2. Định lí 2. Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Trong hình 60 :

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2, \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2, \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$$

$$\Rightarrow ID = IE = IF.$$



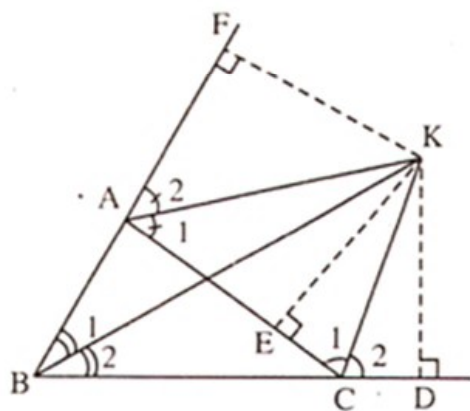
Hình 60

3. Chú ý. Hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác và đường phân giác của góc trong không kề chúng cùng đi qua một điểm (điểm này cũng cách đều ba đường thẳng chứa cạnh của tam giác đó).

Trong hình 61 :

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2, \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2, \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$$

$$\Rightarrow KD = KE = KF.$$



Hình 61

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH MỘT TIA LÀ TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

Phương pháp giải

Vận dụng định lí : Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia BC lấy M sao cho $BM = BA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $CN = CA$. Qua M kẻ đường thẳng song song với AB và qua N kẻ đường thẳng song song với AC, chúng cắt nhau tại S. Chứng minh SA là tia phân giác của $\widehat{MSN}$.

Giải. (h.62)

BA = BM nên $\triangle BAM$ cân tại B, do đó $\widehat{A_1} = \widehat{M_2}$.

Mà $AB \parallel SM$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$.

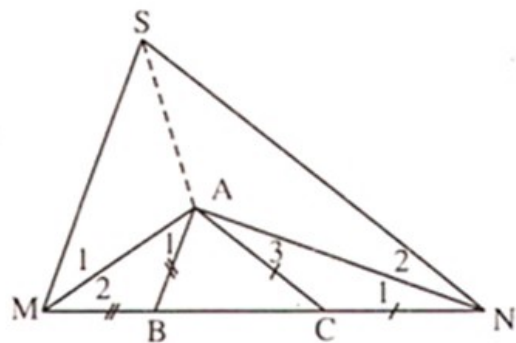
Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ hay MA là tia phân giác của $\widehat{SMN}$.

Tương tự, NA là tia phân giác của $\widehat{SNM}$.

Xét $\triangle SMN$ có MA ; NA là các đường phân giác cắt nhau tại A nên SA cũng là đường phân giác của $\widehat{MSN}$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. Các đường phân giác AD và CE cắt nhau ở O. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC tại F. Chứng minh :

- $BO \perp BF$;
- DF là tia phân giác góc ADB.



Hình 62

Giải. (h.63)

a) Xét $\triangle ABC$ có AD ; CE là phân giác cắt nhau tại $O \Rightarrow BO$ là tia phân giác của $\widehat{ABC}$.

Mặt khác BF là tia phân giác của $\widehat{ABx}$ nên $BO \perp BF$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù).

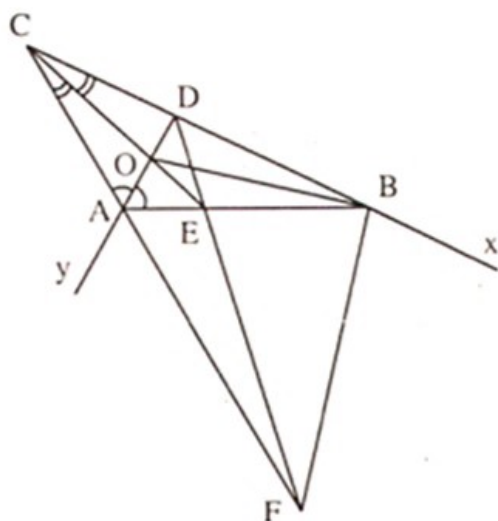
b) Ta có $\widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAF} = 60^\circ$,

$$\text{mà } \widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BAC} = 60^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{FAy} = 60^\circ \Rightarrow AF$ là tia phân giác của $\widehat{BAy}$.

$\triangle ABD$ có BF và AF là đường thẳng chứa tia phân giác ngoài đỉnh A và B

$\Rightarrow DF$ là tia phân giác của $\widehat{ADB}$.



Hình 63

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Vận dụng tính chất : Giao điểm của hai đường phân giác của hai góc trong một tam giác nằm trên đường phân giác thứ ba.

Ví dụ. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) có I là giao điểm các đường phân giác góc B , góc C . Kẻ AI cắt BC tại D . Kẻ $IH \perp BC$. Chứng minh $\widehat{BIH} = \widehat{CID}$.

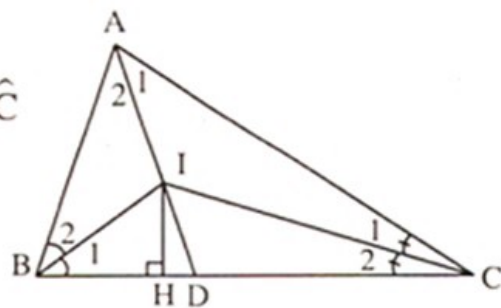
Giải. (h.64)

Ta có BI , CI là các đường phân giác của $\widehat{B}$; $\widehat{C}$

nên AI là đường phân giác của $\widehat{A}$.

Theo tính chất góc ngoài, ta có :

$$\widehat{CID} = \widehat{A_1} + \widehat{C_1}$$



Hình 64

$$\text{hay } \widehat{CID} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{BIH} = 90^\circ - \widehat{B}_1 = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BIH} = \widehat{CID}.$$

Dạng 3. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

- Sử dụng tính chất tia phân giác của một góc.
- Ba đường phân giác trong của một tam giác cùng đi qua một điểm.
- Hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác và đường phân giác của góc trong không kề chúng cùng đi qua một điểm.
- Vận dụng tính chất về tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 70^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I. Tính $\widehat{AIC}$.

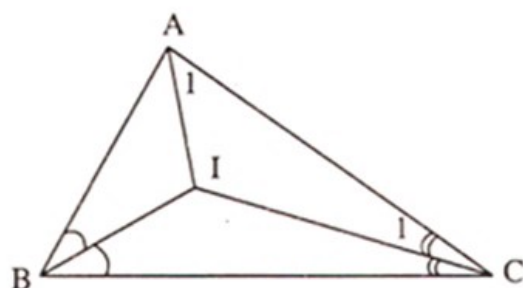
Giải. (h.65)

BI, CI là các đường phân giác của $\triangle ABC$ nên AI là phân giác của $\widehat{A}$.

$$\text{Xét } \triangle AIC \text{ có } \widehat{AIC} + \widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ$$

$$\text{nên } \widehat{AIC} = 180^\circ - \widehat{A}_1 - \widehat{C}_1 = 180^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{AIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2} = 125^\circ.$$



Hình 65

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 80^\circ$. Hai đường phân giác góc ngoài đỉnh A và C cắt nhau tại K. Tính số đo góc BKC.

Giải. (h.66)

Ta có AK, CK là phân giác góc ngoài đỉnh A và C nên BK là phân giác góc B.

Ta có :

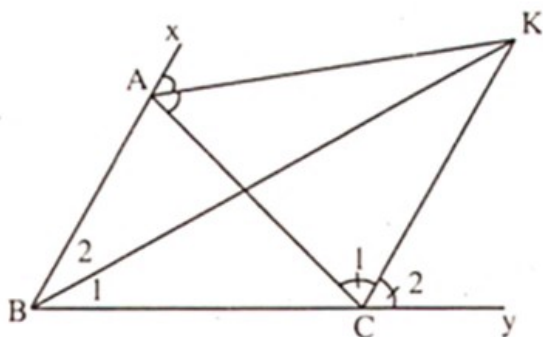
$$\widehat{ACy} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 80^\circ + 2.\widehat{B_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{C_2} = \frac{1}{2}\widehat{ACy} = 40^\circ + \widehat{B_1}.$$

Mặt khác $\widehat{C_2} = \widehat{B_1} + \widehat{BKC}$ (tính chất góc ngoài)

$$\Rightarrow \widehat{BKC} = 40^\circ.$$

Nhận xét. Có thể chứng minh được nếu $\widehat{A} = \alpha$ thì $\widehat{BKC} = \frac{\alpha}{2}$.



Hình 66

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 70^\circ$; $\widehat{B} = 60^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ cắt nhau tại I. Kẻ đường thẳng qua C song song với AB cắt tia BI tại M. Tính các góc của $\triangle MIC$.
- Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Đường phân giác BD, CE của góc B và góc C cắt nhau tại O. Kẻ OK, OH lần lượt vuông góc với AC và AB. Chứng minh :
 - $\triangle BCD = \triangle CBE$;
 - $OB = OC$;
 - $OH = OK$.
- Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{C} = 45^\circ$ và $\widehat{A} > 90^\circ$. Kẻ tia BD cắt tia đối của tia CA ở D sao cho $\widehat{CBD} = \widehat{ABC}$. Kẻ $AH \perp BD$ tại H. Tính $\widehat{CHD}$.
- Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH. Vẽ HM, HN lần lượt vuông góc với AB, AC. Trên tia đối của tia MH lấy MD = MH, trên tia đối NH lấy điểm E sao cho NE = NH. Gọi I và K là giao điểm của DE với AB và AC. Chứng minh rằng :

- a) IB là tia phân giác của góc HID ;
- b) HA là tia phân giác của góc IHK ;
- c*) IC là tia phân giác của góc HIK ;
- d*) $IB \perp IC$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.67) $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{C} = 50^\circ$.

$\triangle ABC$ có phân giác của $\widehat{B}$, $\widehat{A}$ cắt nhau tại I nên CI là tia phân giác của $\widehat{C}$.

Do đó $\widehat{C}_1 = \frac{1}{2} \cdot \widehat{C} = 25^\circ$.

$\widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \cdot \widehat{B} = 30^\circ$.

$\triangle BIC$ có $\widehat{CIM} = \widehat{C}_1 + \widehat{B}_1$

(góc ngoài tam giác)

hay $\widehat{CIM} = 55^\circ$.

$AB \parallel CM$ nên $\widehat{M} = \widehat{B}_2$ hay $\widehat{M} = 30^\circ$.

$\triangle CIM$ có $\widehat{MCI} = 180^\circ - \widehat{CIM} - \widehat{M} = 95^\circ$.

2. (h.68) a) Xét $\triangle BCD$ và $\triangle CBE$ có : $\widehat{EBC} = \widehat{DCB}$;

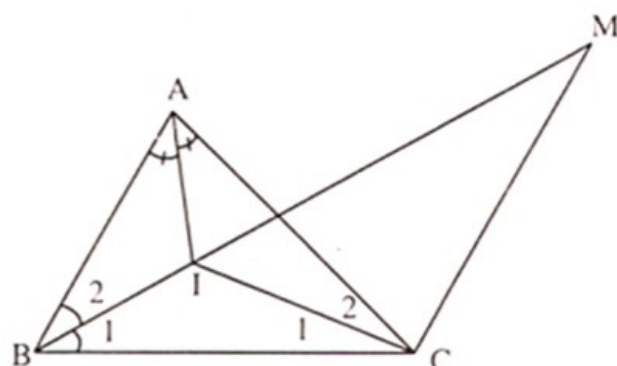
BC cạnh chung ; $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (vì $\frac{1}{2} \cdot \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{ACB}$)

$\Rightarrow \triangle BCD = \triangle CBE$ (g.c.g).

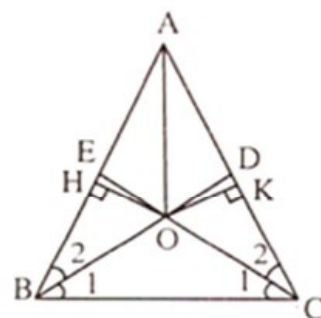
b) $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (vì $\frac{1}{2} \cdot \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{ACB}$) $\Rightarrow \triangle BOC$ cân tại O.

c) $\triangle ABC$ có BD ; CE là đường phân giác cắt nhau tại O

$\Rightarrow AO$ là tia phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow OH = OK$.



Hình 67



Hình 68

§7. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định nghĩa đường trung trực.

Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó.

Trong hình 71, d là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Ta cũng nói : A đối xứng với B qua d .

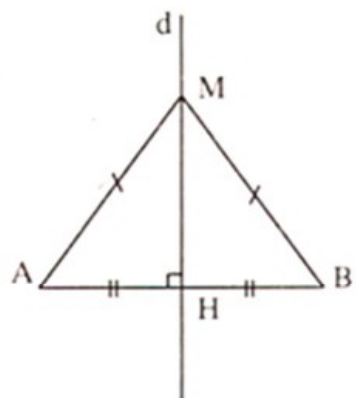
2. Định lí 1. Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

3. Định lí 2. Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Trong hình 71 :

$MA = MB \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB .

4. Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.



Hình 71

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. CHỨNG MINH MỘT ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG

Phương pháp giải

Để chứng minh một điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB ta chứng minh $MA = MB$.

Ví dụ 1. Cho ΔABC nhọn có hai đường cao BD và CE . Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng DE .

Giải. (h.72)

Xét ΔBDC có $\widehat{BDC} = 90^\circ$, $BM = MC$ nên DM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền.

$$\text{Suy ra } DM = \frac{1}{2}BC. \quad (1)$$

Xét ΔBEC có $\widehat{BEC} = 90^\circ$, $BM = MC$ nên EM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền.

$$\text{Suy ra } EM = \frac{1}{2}BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $DM = EM$ suy ra M thuộc đường trung trực của DE .

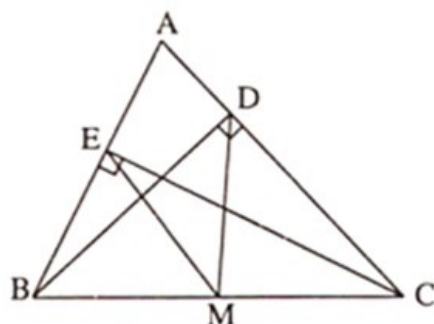
Ví dụ 2. Cho ΔABC nhọn, H là một điểm thuộc cạnh BC . Vẽ $HD \perp AB$ ($D \in AB$), trên tia đối của tia DH lấy điểm M sao cho $DM = DH$. Vẽ $HE \perp AC$ ($E \in AC$), trên tia đối của tia EH lấy điểm N sao cho $EN = EH$. Chứng minh rằng điểm A thuộc đường trung trực của đoạn MN .

Giải. (h.73)

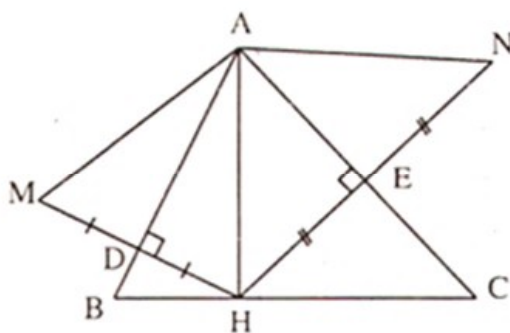
Ta có : $AB \perp HD$, $MD = HD$ nên AB là đường trung trực của MH , suy ra $AM = AH$. (1)

Ta có : $AC \perp HE$, $EH = EN$ nên AC là đường trung trực của HN , suy ra $AN = AH$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $AM = AN$. Vậy A thuộc đường trung trực của đoạn MN .



Hình 72



Hình 73

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Vận dụng định lí : Điểm nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn, AH là đường cao, AM là trung tuyến. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $HE = HA$. Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = MA$. Chứng minh $BE = CI$.

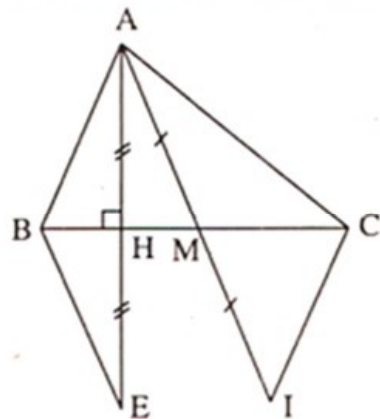
Giải. (h.74) $\triangle ABM = \triangle ICM$ (c.g.c),

suy ra $AB = CI$. (1)

Ta có $AE \perp BH$, $HA = HE$, nên BH là đường trung trực của đoạn HE ,

suy ra $BE = BA$. (2)

Từ (1) và (2), ta có : $BE = CI$.



Hình 74

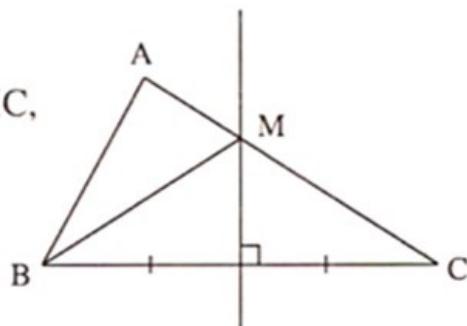
Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$, $AB < AC$. Đường trung trực của BC cắt AC tại M . Chứng minh $AM + BM = AC$.

Giải. (h.75)

M thuộc đường trung trực của BC nên $BM = MC$,

do đó $AM + BM = AM + MC$.

Suy ra $AM + BM = AC$.



Hình 75

Dạng 3. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Phương pháp giải

- Vận dụng tính chất đường trung trực để thay thế một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng khác có độ dài bằng nó.
- Dùng quy tắc ba điểm : Với A, B, M bất kì ta có $AM + MB \geq AB$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn AB .

Ví dụ 1. Cho góc nhọn xOy có điểm A cố định nằm trong góc đó. Xác định vị trí điểm B thuộc Ox , điểm C thuộc Oy sao cho chu vi $\triangle ABC$ nhỏ nhất.

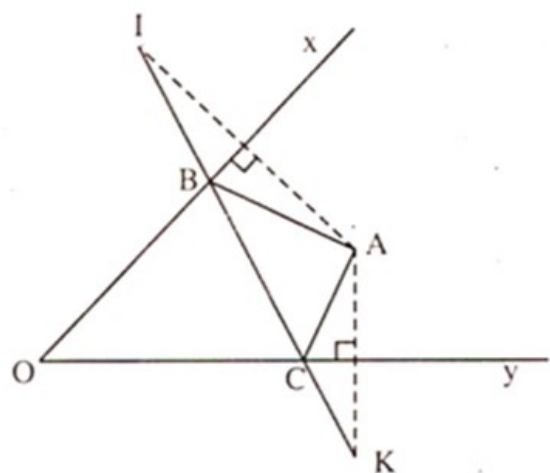
Giải. (h.76)

Lấy I sao cho Ox là đường trung trực của AI và K sao cho Oy là trung trực của AK , suy ra I, K cố định.

IK cắt Ox tại B , cắt Oy tại C .

Ta có $AB = IB$; $AC = KC$

Vậy chu vi $\triangle ABC = AB + BC + CA = IB + BC + KC = IK$ (có độ dài ngắn nhất).



Hình 76

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $\hat{B} = 28^\circ$. Đường trung trực của cạnh BC cắt AB tại M . Tính số đo góc $\widehat{MCA}$.
- Cho $\widehat{xOy} = 50^\circ$, điểm A nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của AB . Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AC . Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.
- Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có BE là phân giác của $\hat{B}$ (E thuộc AC). Kẻ EH vuông góc với BC (H thuộc BC). Gọi K là giao điểm của AB và HE . Chứng minh rằng :
 - BE là đường trung trực của AH ;
 - BE là đường trung trực của CK .
- Cho $\triangle ABC$ cân tại A và $\hat{A} = 120^\circ$. Đường trung trực của các cạnh AB, AC cắt BC tại D và E . Chứng minh $\triangle ADE$ đều.
- Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Hai đường trung trực của BD và AC cắt nhau tại E . Chứng minh rằng :
 - $\triangle AEB = \triangle CED$;
 - AE là tia phân giác trong tại đỉnh A của $\triangle ABC$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.77) $\widehat{C} = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.

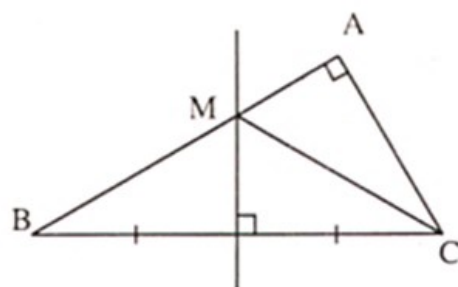
M thuộc đường trung trực của BC nên $MB = MC$ hay $\triangle MBC$ cân. Do đó $\widehat{MCB} = \widehat{B} = 28^\circ$.

Suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{ACB} - \widehat{MCB} = 62^\circ - 28^\circ = 34^\circ$.

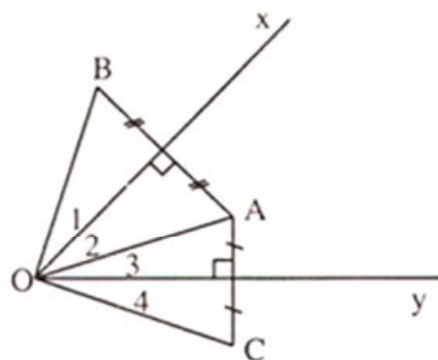
2. (h.78) Chứng minh $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$; $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$.

Ta có $\widehat{BOC} = 2 \cdot (\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) = 2 \cdot 50^\circ = 100^\circ$.

Nhận xét. Nếu góc xOy không quá 90° thì ta luôn có $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{xOy}$.



Hình 77



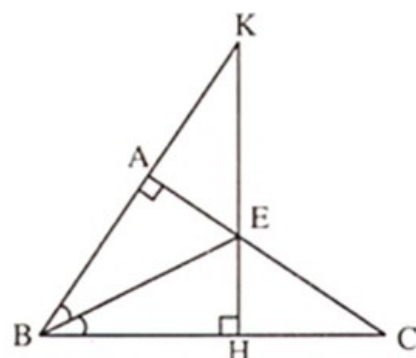
Hình 78

3. (h.79) a) $\triangle ABE = \triangle HBE$ (cạnh huyền, góc nhọn) nên $BA = BH$, $EA = EH$. Vậy BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

b) $\triangle ABC = \triangle HBK$ (g.c.g)

$\Rightarrow AC = HK$, $BK = BC$

$\Rightarrow EK = EC$, $BK = BC$. Vậy BE là đường trung trực của đoạn thẳng CK.



Hình 79

4. (h.80) $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^\circ$.

Chứng minh $\triangle DBA$ cân, do đó

$$\widehat{A_1} = \widehat{B} = 30^\circ.$$

$\triangle ADB$ có $\widehat{D_1} = \widehat{A_1} + \widehat{B} = 60^\circ$
(góc ngoài tam giác).

Tương tự, $\widehat{E_1} = 60^\circ$ suy ra $\triangle ADE$ đều.



Hình 80

5. (h.81) a) Vì E thuộc đường trung trực của BD và AC nên $EB = ED$ và $EA = EC$.

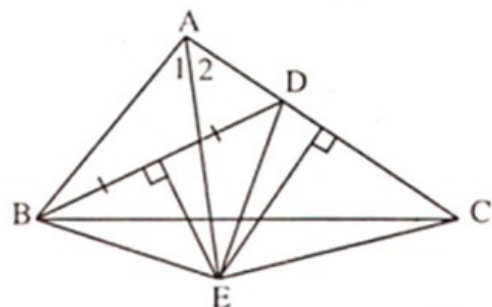
Do đó, ta có : $\triangle AEB = \triangle CED$ (c.c.c). (1)

b) Từ (1) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{ECD}$ (hai góc tương ứng) (2)

Mặt khác, vì $EA = EC$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AEC$ cân tại E $\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{ECD}$. (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Vậy AE là tia phân giác trong của $\triangle ABC$ tại đỉnh A.



Hình 81

§8. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lý 1. Trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh này.

Trong hình 82, $\triangle ABC$ cân tại A :

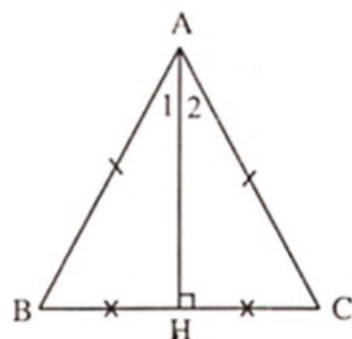
AH là trung trực của BC $\Rightarrow$ AH là trung tuyến.

2. Định lý 2. Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

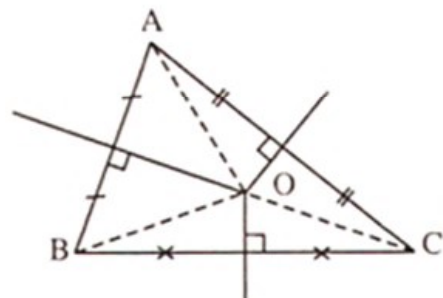
Trên hình 83, điểm O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$. Ta có $OA = OB = OC$.

Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

3. Bổ sung. Nếu một tam giác có một đường vừa là đường trung trực, vừa là đường trung tuyến (hoặc đường phân giác) thì tam giác đó là tam giác cân.



Hình 82



Hình 83

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. ĐƯỜNG TRUNG TRỰC ĐỐI VỚI TAM GIÁC CÂN

Phương pháp giải

Lưu ý rằng trong tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Đường trung trực của cạnh AB cắt đường cao AH tại I. Lấy điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho $AD = CE$. Chứng minh :

a) $IA = IC$;

b) $ID = IE$.

Giải. (h.84)

a) $\triangle ABC$ cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường trung trực, đường phân giác, do đó I là giao điểm ba đường trung trực. Vậy $IA = IC$.

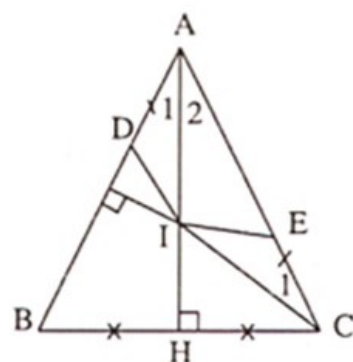
b) AH là đường phân giác nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

$AI = CI$ nên $\triangle AIC$ cân tại I do đó $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$.

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$.

Xét $\triangle ADI$ và $\triangle CEI$ có $AD = CE$, $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$, $AI = CI$

nên $\triangle ADI = \triangle CEI$ (c.g.c) suy ra $ID = IE$.



Hình 84

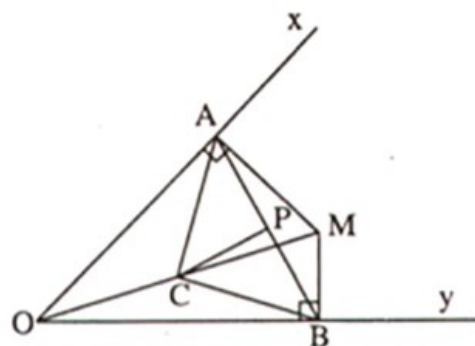
Ví dụ 2. Cho góc nhọn xOy và một điểm M nằm trong góc ấy. Từ M kẻ các đường vuông góc MA, MB lần lượt xuống Ox, Oy. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng OM, P là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng : CP là một đường trung trực của tam giác ABC.

Giải. (h.85)

Xét $\triangle AOM$ vuông tại A, đường trung tuyến AC $\Rightarrow AC = \frac{1}{2}OM$ (tính chất tam giác vuông). (1)

Xét $\triangle BOM$ vuông tại B, đường trung tuyến BC $\Rightarrow BC = \frac{1}{2}OM$ (tính chất tam giác vuông). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại C. Do vậy đường trung tuyến CP cũng đồng thời là đường trung trực của $\triangle ABC$.



Hình 85

Dạng 2. CHỨNG MINH ĐIỂM CÁCH ĐỀU BA ĐỈNH TAM GIÁC

Phương pháp giải

Chứng minh điểm đó là giao điểm ba đường trung trực của tam giác.

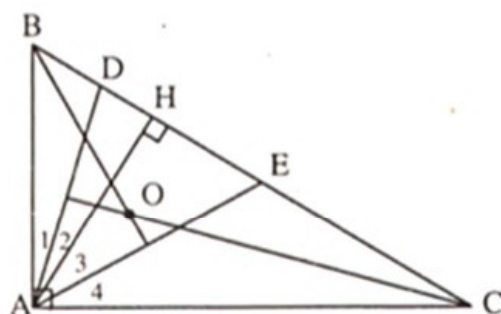
Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A. Kẻ AH vuông góc với BC, $H \in BC$. Tia phân giác của góc HAB cắt BC tại D, tia phân giác của góc HAC cắt BC tại E. Chứng minh rằng, điểm cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$ chính là điểm cách đều ba đỉnh của $\triangle ADE$.

Giải. (h.86)

Vẽ các tia phân giác của $\hat{B}$ và $\hat{C}$ của $\triangle ABC$, chúng cắt nhau tại O, suy ra O cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$.

Ta có : $\widehat{AEB} = \hat{C} + \widehat{A_4}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Vì $\hat{C} = \widehat{HAB}$ (do cùng phụ với góc B) và $\widehat{A_4} = \widehat{A_3}$ (gt), nên $\widehat{AEB} = \widehat{EAB}$.
Do vậy $\triangle ABE$ cân tại B, suy ra đường phân giác BO của góc B cũng là đường trung trực của cạnh AE. (1)



Hình 86

Chứng minh tương tự ta có : đường phân giác CO của góc C là đường trung trực của cạnh AD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra O cách đều ba đỉnh của $\triangle ADE$.

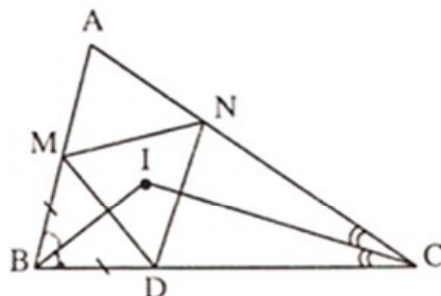
Nhận xét. Có thể chứng minh được câu khó hơn sau : Chứng minh tam giác ODE vuông cân.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$. Trên cạnh BA lấy điểm M, trên cạnh CA lấy điểm N sao cho $BM + CN = BC$. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua điểm cố định.

Giải. (h.87)

Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BM = BD$
 $\Rightarrow CN = CD$.

Gọi I là giao điểm hai đường phân giác của $\hat{B}$; $\hat{C} \Rightarrow I$ là điểm cố định.



Hình 87

$\triangle BMD$ cân tại B $\Rightarrow BI$ là đường trung trực của đoạn MD.

$\triangle CND$ cân tại C $\Rightarrow CI$ là đường trung trực của đoạn ND.

$\triangle MND$ có đường trung trực các cạnh MD ; ND cắt nhau tại I

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực cạnh MN.

Do đó đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua điểm I cố định.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G cách đều ba đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.
- Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$), O là giao điểm hai đường trung trực hai cạnh AB, BC (O nằm trong tam giác). Trên tia đối của các tia AB và CA ta lấy hai điểm M ; N sao cho $AM = CN$.
 - Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$;
 - Chứng minh $\triangle AOM = \triangle CON$;
 - Hai đường trung trực của OM ; ON cắt nhau tại I. Chứng minh OI là tia phân giác của $\widehat{MON}$.

3. Cho tam giác ABC nhọn, $\widehat{A} = 70^\circ$. Đường trung trực của AB, AC cắt nhau tại O. Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.
4. Cho $\triangle ABC$. Đường trung trực của AC cắt đường trung trực của BC tại O. Đường vuông góc với OA tại A cắt đường vuông góc với OB tại B ở D. Chứng minh OD là đường trung trực của AB.

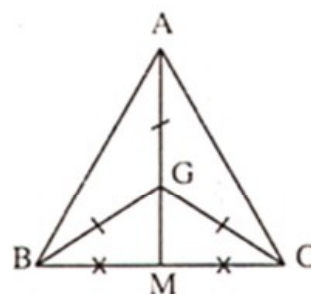
HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.88) Kẻ AG cắt BC tại M, suy ra $MB = MC$ hay GM là đường trung trực của đoạn BC.

Suy ra AM là đường trung trực của BC do đó $AB = AC$.

Tương tự ta có $AC = CB$.

Vậy $\triangle ABC$ đều.



Hình 88

2. (h.89) a) $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{CAO}$.

O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC

$$\Rightarrow OA = OC$$

$$\Rightarrow \triangle OAC \text{ cân tại O}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{OCA}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BAO} = \widehat{OCA}.$$

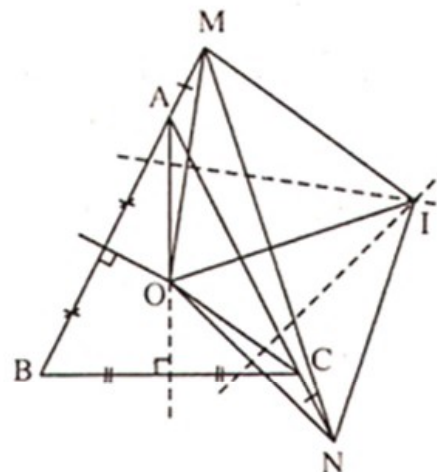
$$\text{b) } \widehat{BAO} = \widehat{OCA} \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OCN}$$

$$\Rightarrow \triangle OAM = \triangle OCN \text{ (c.g.c)}$$

$$\text{c) } \triangle OAM = \triangle OCN \Rightarrow OM = ON$$

$$\Rightarrow \triangle OMN \text{ cân tại O, mặt khác I là giao điểm hai đường trung trực của OM, ON}$$

$$\Rightarrow OI \text{ là đường trung trực của MN} \Rightarrow OI \text{ là phân giác của góc } \widehat{MON}.$$



Hình 89

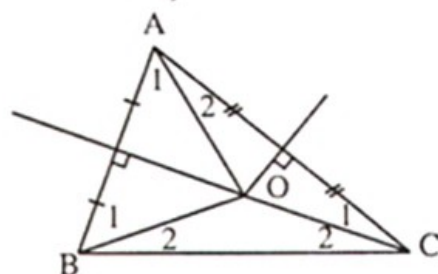
3. (h.90) Ta có $OA = OB = OC$.

$$\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 70^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = 40^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BOC} = 140^\circ.$$



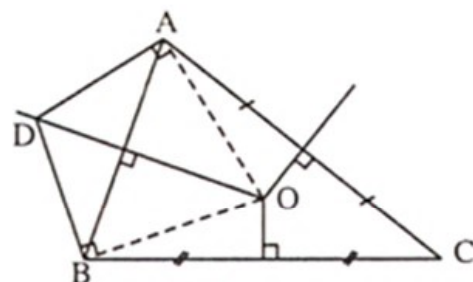
Hình 90

4. (h.91) Ta có $OA = OB$. (1)

$\Rightarrow \triangle AOD = \triangle BOD$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow DA = DB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra OD là đường trung trực của AB.



Hình 91

Nhận xét. Có thể làm được câu khó hơn :
Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để C, O, D thẳng hàng.

§9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

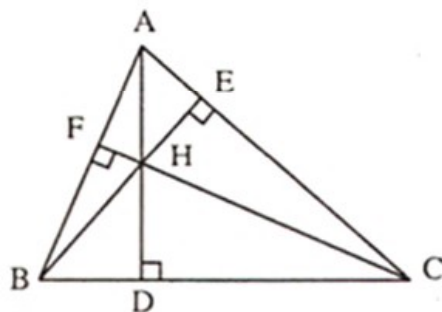
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Định lí 1. Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm.

Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác.

Trên hình 92, H là trọng tâm của $\triangle ABC$.

2. Định lí 2. Trong một tam giác cân, đường cao ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến, đường trung trực của tam giác đó.



Hình 92

3. Nhận xét. Trong một tam giác, nếu có hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực, đường cao) trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC ĐỐI VỚI TAM GIÁC CÂN

Phương pháp giải

- Sử dụng tính chất vuông góc của đường cao với cạnh đối diện.
- Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác.
- Sử dụng tính chất của tam giác cân.

Ví dụ. Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\widehat{A} \neq 90^\circ$), hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H, tia AH cắt BC tại M. Chứng minh rằng :

- a) $BD = CE$;
- b) $MB = MC$;
- c) $HB = HC$.

Giải. (h.93)

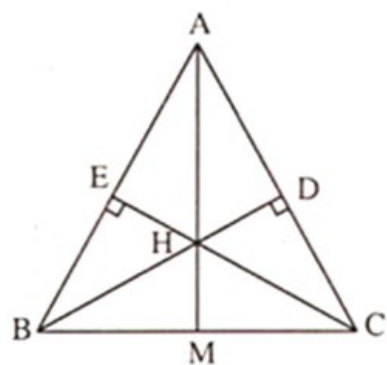
a) Xét $\triangle CDB$ và $\triangle BEC$ có : $\widehat{CDB} = \widehat{BEC} = 90^\circ$,
 $\widehat{DCB} = \widehat{ECB}$, cạnh BC chung nên $\triangle CDB = \triangle BEC$
 (cạnh huyền, góc nhọn).

Suy ra $BD = CE$.

b) $\triangle ABC$ có BD, CE là đường cao cắt nhau tại H nên H là trực tâm suy ra AM là đường cao.

$\triangle ABC$ cân tại A, mà AM là đường cao nên AM là đường trung trực. Vậy $MB = MC$.

c) $\triangle ABC$ cân tại A ; AM là đường trung trực của BC mà H thuộc AM nên $HB = HC$.



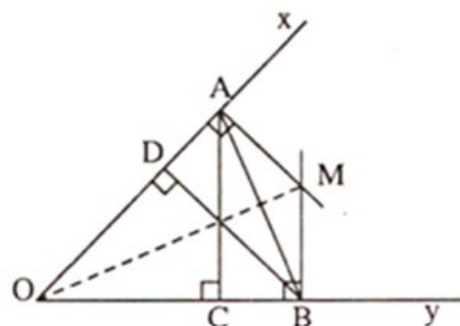
Hình 93

Dạng 2. CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Phương pháp giải

Nếu ba đường thẳng là ba đường cao của một tam giác thì chúng cắt nhau tại một điểm (đồng quy).

Ví dụ 1. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Kẻ $AC \perp Oy$; $BD \perp Ox$. Đường thẳng vuông góc với Ox kẻ từ A cắt đường thẳng vuông góc với Oy kẻ từ B tại M. Chứng minh OM, AC, BD đồng quy.



Hình 94

Giải. (h.94)

Xét $\triangle AMO$ và $\triangle BMO$ có :

$$\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ,$$

$OA = OB$, OM là cạnh chung

nên $\triangle AMO = \triangle BMO$, suy ra $MA = MB$.

Ta có : $OA = OB$, $MA = MB$, suy ra OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB do đó $OM \perp AB$.

Xét $\triangle AOB$ có AC, BD, OM là ba đường cao nên chúng cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Vẽ CH vuông góc với BD. Chứng minh rằng BA, DE, CH đồng quy.

Giải. (h.95)

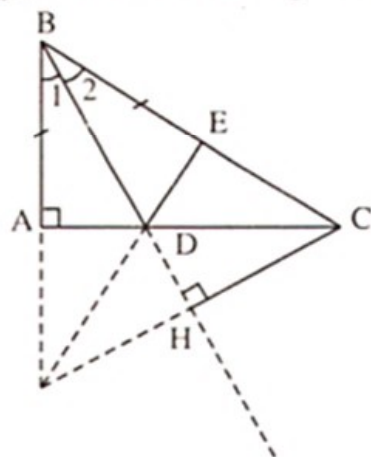
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có :

$$AB = EB; \widehat{B_1} = \widehat{B_2}; BD \text{ cạnh chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ.$$

Xét tam giác BDC có BA, DE, CH là đường cao nên BA, DE, CH đồng quy.



Hình 95

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho $\triangle ABC$ nhọn có đường cao AE và BD cắt nhau tại H . Biết rằng $AH = BC$.
Tính $\widehat{BAC}$.
2. Cho đoạn thẳng AB có điểm M nằm giữa. Kẻ tia Mx vuông góc với AB .
Trên Mx lấy D, C sao cho $MD = AM, MC = MB$. Chứng minh $BC \perp AD$.
3. **Đố**

Bốn bạn cùng nhìn vào một hình tam giác và phát biểu nhưng có một bạn khẳng định "trái ý" với ba bạn còn lại. Đó là khẳng định nào?

- (A) Trục tâm trùng với đỉnh.
- (B) Tổng hai góc bằng góc còn lại.
- (C) Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm một cạnh.
- (D) Tam giác có ba góc nhọn.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.96) $\triangle ABC$ có AE, BD là đường cao nên H là trực tâm. Kẻ CH cắt AB tại F , suy ra $CF \perp AB$.

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle BCD$ có: $\widehat{ADH} = \widehat{BDC} = 90^\circ$,
 $AH = BC$, $\widehat{HAD} = \widehat{CBD}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)
 nên $\triangle AHD = \triangle BCD$, suy ra $DA = DB$.

Do đó $\triangle DAB$ vuông cân tại D .

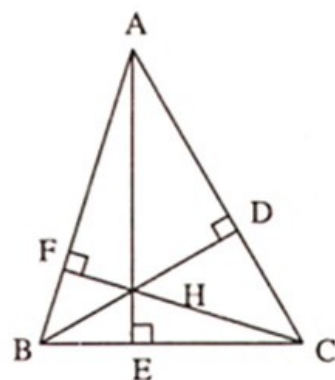
Suy ra $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

2. (h.97) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có: $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$,

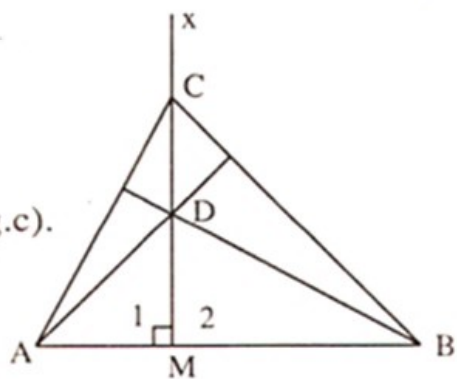
$MA = MD, MC = MB$ nên $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{MAC} = \widehat{MDB}$.

Mà $\widehat{MDB} + \widehat{MBD} = 90^\circ$,



Hình 96



Hình 97

do đó $\widehat{MAC} + \widehat{MBD} = 90^\circ$.

Vậy $BD \perp AC$.

Xét $\triangle ABC$ có : $CM \perp AB$, $BD \perp AC$ suy ra D là trực tâm.

Vậy $AD \perp BC$.

Cách khác : $\triangle MAD$ và $\triangle MBC$ vuông cân tại M nên $\widehat{MAD} = \widehat{MBC} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{MAD} + \widehat{MBC} = 90^\circ$, suy ra $AD \perp BC$.

3. Tổng hai góc bằng góc còn lại thì tam giác đó vuông. Tam giác vuông thì có trực tâm trùng với đỉnh và tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền.

Vậy khẳng định "trái ý" là (D).

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác

- Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác.
- Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu.
- Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức tam giác.

2. Các đường đồng quy của tam giác

- Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác.
- Tính chất tia phân giác của một góc. Tính chất ba đường phân giác của tam giác.
- Tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng. Tính chất ba đường trung trực của tam giác.
- Tính chất đường cao của tam giác.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. SO SÁNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Phương pháp giải

Vận dụng các định lí sau :

- Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.
- Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh kia.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 60^\circ$; $\hat{B} = 105^\circ$. So sánh độ dài ba cạnh của tam giác ABC.

Giải

$$\triangle ABC \text{ có } \hat{A} = 60^\circ ; \hat{B} = 105^\circ \Rightarrow \hat{C} = 15^\circ$$

$$\text{nên } \hat{C} < \hat{A} < \hat{B} \Rightarrow AB < BC < AC.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 11\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$. So sánh độ lớn ba góc của tam giác ABC.

Giải

$$BC < AC < AB \Rightarrow \hat{A} < \hat{B} < \hat{C}.$$

Ví dụ 3. Cho năm đoạn thẳng có độ dài là 2cm, 3m, 5cm, 7cm, 11cm. Hỏi có thể vẽ được bao nhiêu tam giác phân biệt với ba cạnh là ba trong năm đoạn đó?

Giải

- Nếu cạnh lớn nhất là 11cm, thì độ dài hai cạnh còn lại là 5cm ; 7cm.
- Nếu cạnh lớn nhất là 7cm, thì độ dài hai cạnh còn lại là 3cm ; 5cm.
- Cạnh lớn nhất không thể là 5cm (vì $2 + 3 = 5$)

Vậy có thể chỉ vẽ được hai tam giác phân biệt với ba cạnh có số đo như trên.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Lấy điểm M bất kì thuộc cạnh BC (M khác B và C). Chứng minh rằng : $AM < AB$.

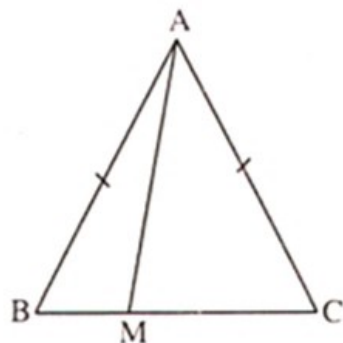
Giải. (h.98)

Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có $\widehat{AMB} > \widehat{C}$,

mà $\widehat{B} = \widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{AMB} > \widehat{B}$

$\Rightarrow AB > AM$.



Hình 98

Dạng 2. TÍNH SỐ ĐO GÓC

Phương pháp giải

- Sử dụng tính chất tia phân giác của một góc, tính chất đồng quy của ba đường phân giác trong của tam giác, tính chất đồng quy của hai đường phân giác ngoài và một đường phân giác trong của tam giác.
- Sử dụng tính chất đường cao và trục tâm của tam giác.

Ví dụ . Cho $\triangle ABC$ có góc B bằng 45° , góc C bằng 120° . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2BC$. Tính góc ADC.

Giải. (h.99)

Vẽ tia $Bx \perp BD$, tia phân giác góc ACB cắt Bx tại E

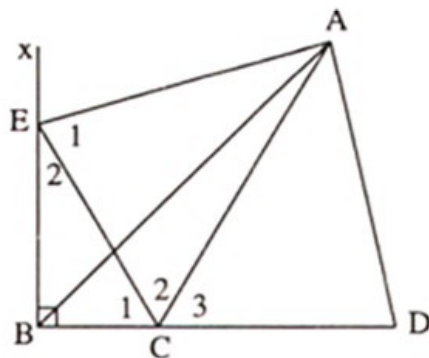
$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3} = 60^\circ$.

$\triangle BCE$ có $\widehat{B} = 90^\circ; \widehat{C_1} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{E_2} = 30^\circ; EC = 2BC$.

Xét $\triangle ACE$ và $\triangle ACD$ có :

$CE = CD (= 2BC), \widehat{C_2} = \widehat{C_3}, AC$ cạnh chung



Hình 99

$$\Rightarrow \triangle ACE = \triangle ACD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{E_1}. \quad (1)$$

$\triangle BCE$ có BA, CA là đường phân giác

$$\Rightarrow EA \text{ là đường phân giác } \widehat{CEx} \Rightarrow \widehat{E_1} = \frac{1}{2} \widehat{CEx} = 75^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADC} = 75^\circ$.

Dạng 3. BA ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

Phương pháp giải

Trong một tam giác :

- Ba đường trung tuyến cắt nhau tại một điểm.
- Ba đường phân giác cắt nhau tại một điểm.
- Ba đường trung trực cắt nhau tại một điểm.
- Ba đường cao cắt nhau tại một điểm.

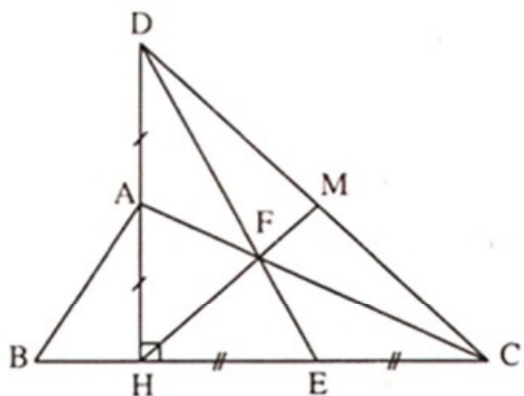
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Kẻ AH vuông góc với BC . Trên tia đối của tia AH lấy D sao cho $AH = AD$. Gọi E là trung điểm của HC , F là giao điểm của AC và DE . Chứng minh :

a) $AF = \frac{1}{3} AC$;

b) H, F và trung điểm M của DC thẳng hàng ;

c) $HF = \frac{1}{3} CD$.

Giải. (h.100)



Hình 100

a) Xét ΔHDC có DE ; CA là hai đường trung tuyến cắt nhau tại F

$\Rightarrow F$ là trọng tâm, suy ra $AF = \frac{1}{3}AC$.

b) ΔHDC có HM là đường trung tuyến, F là trọng tâm

$\Rightarrow H, F, M$ thẳng hàng.

c) ΔHDC có HM là đường trung tuyến F là trọng tâm

$$\Rightarrow HF = \frac{2}{3}HM. \quad (1)$$

ΔDHC vuông có HM là đường trung tuyến

$$\Rightarrow HM = \frac{1}{2}CD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $HF = \frac{1}{3}CD$.

Ví dụ 2. Cho ΔABC có I là giao điểm các đường phân giác trong AD và BE . Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC tại K . Chứng minh $\widehat{AIC} = \widehat{AKC}$.

Giải. (h.101)

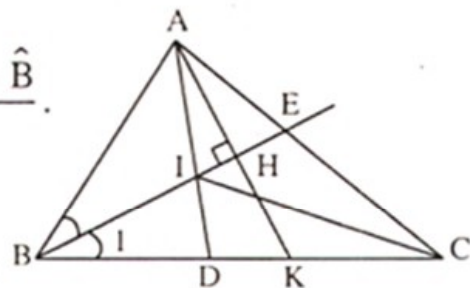
ΔABC có AD, BE là các đường phân giác cắt nhau tại I

$\Rightarrow CI$ là đường phân giác góc C .

$$\text{Suy ra : } \widehat{ACI} + \widehat{CAI} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2}.$$

$$\text{Mà : } \widehat{AIC} = 180^\circ - (\widehat{ACI} + \widehat{CAI})$$

$$\Rightarrow \widehat{AIC} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}.$$



Hình 101

Gọi giao điểm AK và BE là H . Ta có $\widehat{AKC} = \widehat{BHK} + \widehat{B_1}$

$$\text{hay } \widehat{AKC} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}. \text{ Vậy } \widehat{AIC} = \widehat{AKC}.$$

Ví dụ 3. Cho ΔABC vuông tại A ($AC > AB$). Gọi I là trung điểm của BC. Vẽ đường trung trực của cạnh BC cắt AC tại D. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AD$. Gọi F là giao điểm của BE và đường thẳng AI. Chứng minh :

a) $CD = BE$;

b) $\widehat{BEC} = 2.\widehat{BCE}$;

c) ΔAEF cân ;

d) $AC = BF$.

Giải. (h.102)

a) D thuộc đường trung trực của cạnh BC $\Rightarrow CD = BD$.

BA là đường trung trực của đoạn thẳng DE $\Rightarrow BD = BE$

Suy ra $CD = BE$.

b) ΔBED cân (vì $BE = BD$) $\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BDE}$.

ΔBDC cân tại D (vì $BD = CD$)

$\Rightarrow \widehat{BDE} = 2.\widehat{BCD}$ (tính chất góc ngoài)

$\Rightarrow \widehat{BEC} = 2.\widehat{BCE}$.

c) ΔABC vuông tại A có AI là đường trung tuyến

$\Rightarrow AI = IC \Rightarrow \Delta AIC$ cân

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{A}_1 \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{A}_2$.

Mà $\widehat{BEC} = 2.\widehat{BCE} \Rightarrow \widehat{BEC} = 2.\widehat{A}_2$.

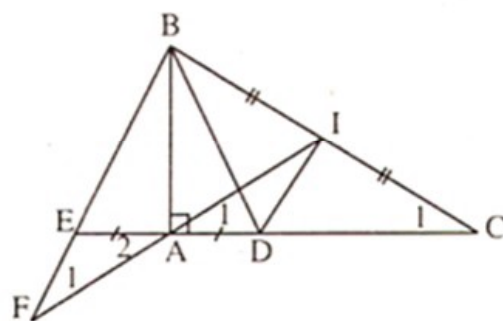
Mặt khác $\widehat{BEC} = \widehat{A}_2 + \widehat{F}_1$ (tính chất góc ngoài)

$\Rightarrow 2.\widehat{A}_2 = \widehat{A}_2 + \widehat{F}_1 \Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{F}_1 \Rightarrow \Delta AEF$ cân tại F.

d) Ta có $BF = BE + EF$

$AC = CD + AD$.

Mà $BE = CD$; $EF = AD (= AE) \Rightarrow BF = AC$.



Hình 102

Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC có BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H. Gọi M, N là trung điểm của AH và BC. Chứng minh :

a) MN là đường trung trực của DE ;

b) $\widehat{MDN} = 90^\circ$.

Giải. (h.103)

a) Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta có :

$$MD = ME \left(= \frac{1}{2} AH \right) \Rightarrow M \text{ thuộc đường trung trực DE.}$$

$$ND = NE \left(= \frac{1}{2} BC \right) \Rightarrow N \text{ thuộc đường trung trực DE.}$$

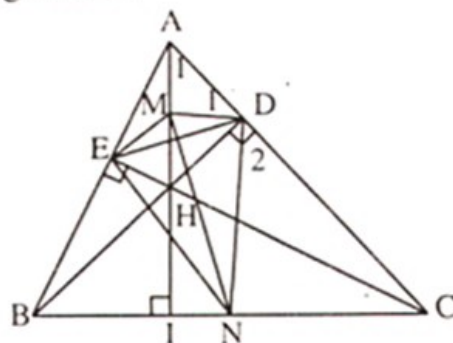
Vậy MN là đường trung trực của DE.

b) I là giao điểm của AH và BC $\Rightarrow AI \perp BC$.

Ta có $MD = MA \Rightarrow \triangle MAD$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{A_1}$.

$NC = ND \Rightarrow \triangle NCD$ cân tại N $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D_2}$.

Mặt khác $\widehat{A_1} + \widehat{C} = 90^\circ$ (do $\triangle AIC$ vuông) $\Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MDN} = 90^\circ$.



Hình 103

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho $\triangle ABC$ có tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I. Biết $IB < IC$. Chứng minh $AB < AC$.
- Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Gọi AD là tia phân giác của góc A (D thuộc BC). Chứng minh rằng :
 - $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$;
 - $DB < DC$.
- Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$ và BD là đường phân giác. Trên BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$.
 - Chứng minh $AD = DE$ và BD là đường trung trực của đoạn thẳng AE ;

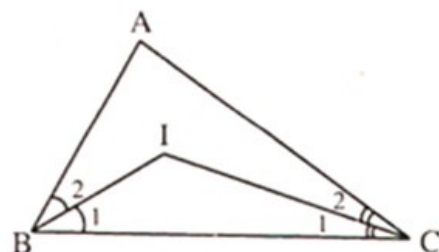
- b) Kẻ AH vuông góc với BC. Chứng minh : AE là tia phân giác của góc HAC ;
- c) Chứng minh $AD < CD$;
- d) Gọi tia Cx là tia đối của tia CB. Tia phân giác của góc ACx cắt đường thẳng BD tại K. Tính số đo góc BAK.
4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Đường phân giác của $\hat{B}$ cắt AC tại M.
Kẻ $ME \perp BC$ ($E \in BC$). Đường thẳng EM cắt BA tại I.
- Chứng minh $\triangle ABM = \triangle EBM$;
 - Chứng minh BM là đường trung trực của AE ;
 - So sánh AM và MC ;
 - Chứng minh $\triangle BCI$ cân .
5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, vẽ đường trung tuyến AM. Từ M vẽ ME vuông góc với AB, vẽ MF vuông góc với AC .
- Chứng minh $\triangle CFM = \triangle BEM$;
 - Chứng minh AM là đường trung trực của EF ;
 - Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại B, từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại C, hai đường này cắt nhau ở D. Chứng minh ba điểm A, M, D thẳng hàng.
6. Cho $\triangle ABC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB ; AC. Trên tia đối của tia FB lấy P sao cho $PF = BF$. Trên tia đối của tia EC lấy điểm Q sao cho $QE = CE$.
- Chứng minh A là trung điểm của PQ ;
 - Chứng minh $BQ \parallel AC$ và $CP \parallel AB$;
 - Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB. Chứng minh chu vi $\triangle PQR$ bằng hai lần chu vi $\triangle ABC$;
 - Chứng minh AR ; BP, CQ cắt nhau tại một điểm.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. (h.104) $\triangle IBC$ có $IB < IC \Rightarrow \hat{C}_1 < \hat{B}_1$.

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = 2.\hat{B}_1 ; \widehat{ACB} = 2.\hat{C}_1$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} < \widehat{ABC} \Rightarrow AB < AC.$$



Hình 104

2. (h.105) a) Trên cạnh AB lấy E sao cho $AE = AB$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AED \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}.$$

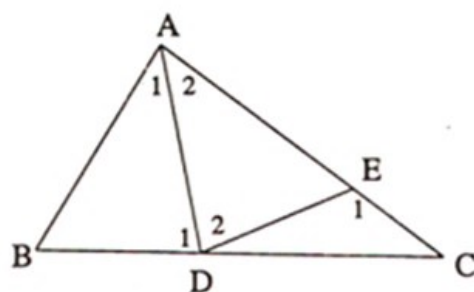
$$\text{Mà } \widehat{D_2} < \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ADB} < \widehat{ADC}.$$

b) Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

$$\widehat{E_1} > \widehat{D_2} \Rightarrow \widehat{E_1} > \widehat{D_1}$$

$$\text{và } \widehat{D_1} > \widehat{C} \Rightarrow \widehat{E_1} > \widehat{C} \Rightarrow DC > DE$$

$$\text{mà } DE = DB \Rightarrow DC > DB.$$



Hình 105

3. (h.106) a) $\triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AD = DE$$

$\Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AE.

$BA = BE$ suy ra B thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AE.

Suy ra BD là đường trung trực của đoạn thẳng AE.

$$\text{b) } \triangle ABD = \triangle EBD$$

$$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ.$$

$$AH \parallel DE (\perp BC) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}.$$

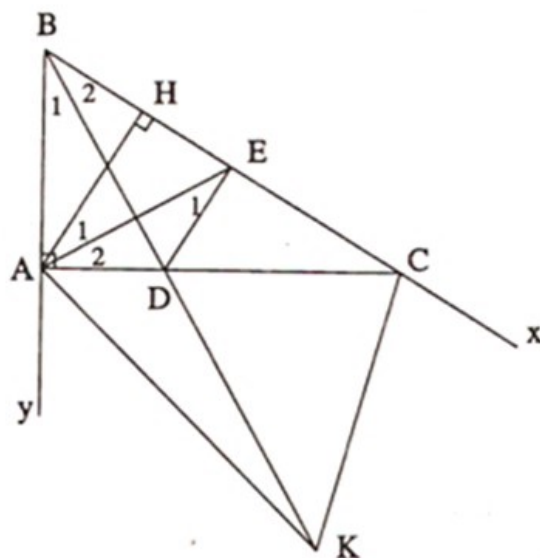
$$AD = DE \Rightarrow \triangle AED \text{ cân tại } D \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{E_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \text{tia AE là phân giác của góc HAC.}$$

$$\text{c) } \triangle DEC \text{ vuông tại } C \Rightarrow DE < DC, \text{ do đó } AD < DC.$$

d) $\triangle ABC$ có BD là đường phân giác góc trong ; CK là đường phân giác góc ngoài $\widehat{ACx}$ nên AK là đường phân giác góc ngoài $\widehat{CAy}$, suy ra

$$\widehat{CAK} = \frac{1}{2} \widehat{CAy} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAK} = 135^\circ.$$



Hình 106

Nhận xét : Khi giải bài toán có nhiều câu hỏi, ta nên khai thác các yếu tố đã làm ở câu trên.

Khi tính số đo góc, ta nên lưu ý đến tính chất ba đường phân giác đồng quy.

4. (h.107) a) $\triangle ABM = \triangle EBM$ (cạnh huyền, góc nhọn).

b) $\triangle ABM = \triangle EBM$. Suy ra :

$BA = BE$, suy ra điểm B thuộc đường trung trực của AE.

$MA = ME \Rightarrow$ điểm M thuộc đường trung trực của AE.

Suy ra BM là đường trung trực của AE.

c) $\triangle MEC$ có $\widehat{MEC} = 90^\circ \Rightarrow ME < MC$

$\Rightarrow MA < MC$ (vì $MA = ME$).

d) $\triangle BIC$ có IE là đường cao (vì $IE \perp BC$), CA là đường cao (vì $CA \perp BI$)

$\Rightarrow M$ là trực tâm $\Rightarrow BM \perp CI$.

Mà BM là phân giác $\widehat{CBI} \Rightarrow \triangle BCI$ cân tại B.

5. (h.108) a) $\triangle BME = \triangle CMF$ (cạnh huyền, góc nhọn).

b) Ta có : $AB = AC$ mà $BE = CF$ (vì $\triangle BME = \triangle CMF$)

$\Rightarrow AE = AF$, suy ra điểm A thuộc đường trung trực của EF.

Mà $ME = MF$, suy ra điểm M thuộc đường trung trực của EF.

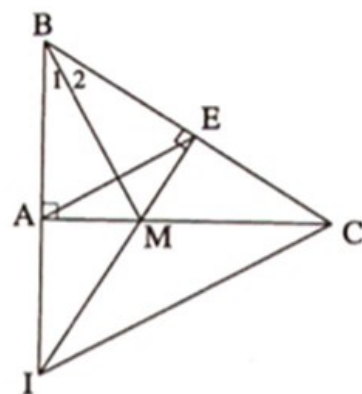
Vậy AM là đường trung trực của EF.

c) $\triangle ABD = \triangle ACD$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông).

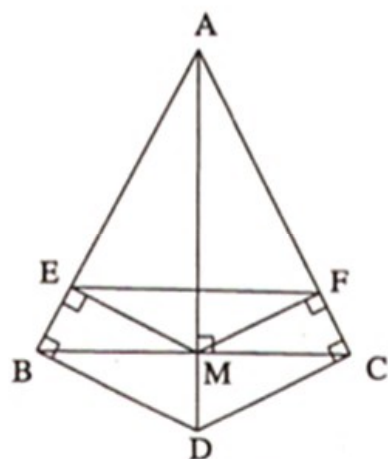
$\Rightarrow DB = DC \Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Mà AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC, suy ra $D \in AM$.

Vậy A, M, D thẳng hàng.



Hình 107



Hình 108

6. (h.109) a) $\triangle AEQ = \triangle BEC$ (c.g.c),
suy ra :

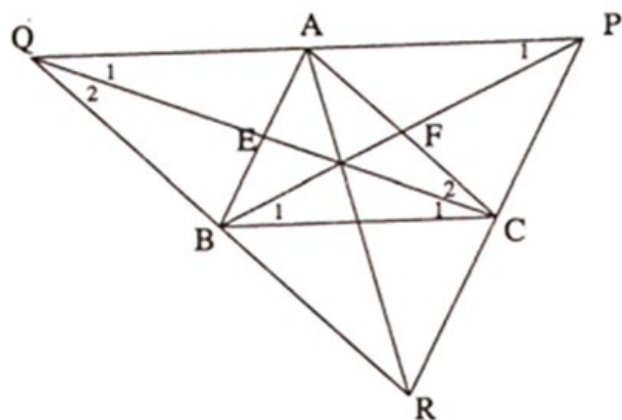
$$AQ = BC \quad (1)$$

$$\widehat{Q_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow AQ \parallel BC. \quad (2)$$

$\triangle AFP = \triangle CFB$ (c.g.c), suy ra :

$$AP = BC \quad (3)$$

$$\widehat{P_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow AP \parallel BC. \quad (4)$$



Hình 109

Từ (1) và (3) suy ra $AQ = AP$, từ (2) và (4) suy ra Q, A, P thẳng hàng.
Vậy A là trung điểm của PQ .

$$b) \triangle BEQ = \triangle AEC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{Q_2} \Rightarrow BQ \parallel AC.$$

Tương tự, ta có : $CP \parallel AB$.

$$c) \text{ Ta có : } \triangle ABR = \triangle RCA \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BR = AC ; CR = AB.$$

Theo phần b, $\triangle BEQ = \triangle AEC$, suy ra $BQ = AC$; tương tự ta có $CP = AB$.

$$\text{Do đó } PQ + PR + QR = 2BC + 2AB + 2AC = 2(BC + AB + AC).$$

Vậy chu vi $\triangle PQR$ bằng hai lần chu vi $\triangle ABC$.

d) Xét $\triangle PQR$ có RA ; PB ; QC là các đường trung tuyến nên AR, BP, CQ cắt nhau tại một điểm.

MỤC LỤC

Lời nói đầu

3

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III. Thống kê

§1. Thu thập số liệu thống kê, tần số	5
§2. Bảng "tần số" các giá trị của dấu hiệu	5
§3. Biểu đồ	12
§4. Số trung bình cộng	22
Ôn tập chương III	30

Chương IV. Biểu thức đại số

§1. Khái niệm về biểu thức đại số	38
§2. Giá trị của một biểu thức đại số	38
§3. Đơn thức	45
§4. Đơn thức đồng dạng	52
§5. Đa thức	57
§6. Cộng, trừ đa thức	64
§7. Đa thức một biến	70
§8. Cộng, trừ đa thức một biến	76
§9. Nghiệm của đa thức một biến	82
Ôn tập chương IV	92

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III. Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác.

Các đường đồng quy của tam giác

§1. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác	104
§2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu	109
§3. Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức tam giác	114
§4. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác	120
§5. Tính chất tia phân giác của một góc	127
§6. Tính chất ba đường phân giác của tam giác	131
§7. Tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng	138
§8. Tính chất ba đường trung trực của tam giác	143
§9. Tính chất ba đường cao của tam giác	148
Ôn tập chương III	152

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**

Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc **NGUYỄN QUÝ THAO**

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

Biên tập lần đầu và tái bản :

HOÀNG VIỆT

Trình bày bìa :

LUƠNG QUỐC HIỆP

Sửa bản in :

HOÀNG VIỆT

Chế bản :

TRẦN THANH HẰNG

Công ty Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP
TOÁN 7 – TẬP HAI

Mã số : **T7T71h3-NBE**

Số đăng ký KHXB: 11 – 2013/CXB/104 – 1947/GD

In 3.000 cuốn (QĐ in số: 02TK), khổ 17 x 24 cm.

In tại Công ty TNHH In & TM Sông Lam.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2013.