

TẠ HỮU PHƠ – ĐOÀN VĂN TỀ

ÔN TẬP THI VÀO LỚP
10

Môn
TOÁN

Năm học 2023 – 2024



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TẠ HỮU PHƠ – ĐOÀN VĂN TÊ

ÔN TẬP THI VÀO LỚP 10

Môn TOÁN

Năm học 2023 – 2024

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "Ôn tập thi vào lớp 10 môn Toán năm học 2023 - 2024" do Công ty Cổ phần Sách và Thiết bị trường học Hà Tây, thành viên Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xuất bản.

Cuốn sách gồm ba phần:

Phần thứ nhất: Một số chủ đề Toán cơ bản.

- Chủ đề 1: Biểu thức chứa căn bậc hai, căn bậc ba.
- Chủ đề 2: Phương trình và hệ phương trình.
- Chủ đề 3: Hàm số và đồ thị.
- Chủ đề 4: Bất đẳng thức và cực trị.
- Chủ đề 5: Một số bài toán hình học trong mặt phẳng.
- Chủ đề 6: Một số bài toán ứng dụng thực tế.

Phần thứ hai: Một số đề tự luyện.

Gồm 15 đề tự luyện, tổng hợp các kiến thức ôn tập. Các đề này đều có hướng dẫn giải hoặc đáp số để các em học sinh có điều kiện thuận lợi, ôn thi vào lớp 10.

Phần thứ ba: Giới thiệu một số đề thi vào lớp 10 THPT.

Gồm ba đề thi môn Toán vào lớp 10 THPT với lời giải và biểu điểm chi tiết cho từng câu hỏi để học sinh tham khảo.

Chúng tôi mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc. Các ý kiến xin gửi về Công ty cổ phần Sách và Thiết bị trường học Hà Tây - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 72 đường Bà Triệu, phường Nguyễn Trãi, quận Hà Đông, Hà Nội.

Các tác giả

PHẦN THỨ NHẤT

MỘT SỐ CHỦ ĐỀ TOÁN CƠ BẢN

CHỦ ĐỀ 1. BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

1. Kiến thức cần nhớ

- $\sqrt{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \geq 0$.
- $\sqrt{A^2} = |A|$.
- $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ ($A, B \geq 0$).
- $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ ($A \geq 0, B > 0$).
- $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \cdot \sqrt{B}$ ($B \geq 0$).
- $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 \cdot B}$ nếu $A \geq 0, B \geq 0$.
- $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 \cdot B}$ nếu $A < 0, B \geq 0$.
- $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ ($A \cdot B \geq 0, B \neq 0$).
- $\frac{1}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{\sqrt{A \mp B}}{A - B^2}$ ($A \geq 0, A \neq B^2$).
- $\frac{1}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{\sqrt{A \mp \sqrt{B}}}{A - B}$ ($A \geq 0, B \geq 0, A \neq B$).

2. Bài tập minh họa

Bài 1. Với $x \geq 0$, phân tích các biểu thức sau thành nhân tử:

- a) $A = x - 2\sqrt{x}$;
 b) $B = x + \sqrt{x} - 2$;
 c) $C = x\sqrt{x} + 1$.

Lời giải:

- a) $A = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)$;
 b) $B = x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) + 2(\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$;
 c) $C = \sqrt{x^3} + 1^3 = (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$.

Bài 2. Tìm điều kiện để các biểu thức sau xác định:

- a) $M = \sqrt{-x - 2}$; b) $N = \sqrt{x + 1} - \sqrt{3 - x}$;
 c) $K = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4}$; d) $E = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

Lời giải:

- a) M xác định khi $-x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$;
 b) N xác định khi $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$;
 c) K xác định khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 16 \end{cases}$;
 d) E xác định khi $\sqrt[3]{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Bài 3. Rút gọn biểu thức $K = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2 - x}$.

Lời giải: $K = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{2-x}$. Điều kiện xác định $\begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 2$

$$K = \frac{|x-2|}{2-x}.$$

* Nếu $x > 2$; $K = \frac{x-2}{2-x} = \frac{-(2-x)}{2-x} = -1.$

* Nếu $x < 2$; $K = \frac{-(x-2)}{2-x} = \frac{2-x}{2-x} = 1.$

Bài 4. Tìm x:

a) $\sqrt{3-x} + \sqrt{27-9x} = 2 + \sqrt{12-4x}$ (1)

b) $\sqrt{x^2-2x+25} = 3x-1$ (2)

c) $8-2x-2\sqrt{x+2}-4\sqrt{1-3x} = 0$ (3)

Lời giải:

a) Điều kiện xác định $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{9(3-x)} = 2 + \sqrt{4(3-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} + 3\sqrt{3-x} - 2\sqrt{3-x} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{3-x} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3-x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy: $x = 2$ là nghiệm phương trình.

b) Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 & (a) \\ x^2-2x+25 = (3x-1)^2 & (b) \end{cases}$

* (a) $\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$

* (b) $\Leftrightarrow 8x^2 - 4x - 24 = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 16x + 12x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(8x+12) = 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ (thỏa mãn điều kiện) $x_2 = -\frac{3}{2}$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy: $x = 2$ là nghiệm phương trình.

c) Điều kiện xác định $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (*)

Phương trình (3) tương đương với:

$(x+2-2\sqrt{x+2}+1) + (1-3x-4\sqrt{1-3x}+4) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-1)^2 + (\sqrt{1-3x}-2)^2 = 0$ (4). Mà $(\sqrt{x+2}-1)^2 \geq 0,$

$(\sqrt{1-3x}-2)^2 \geq 0 \forall x$ thỏa mãn điều kiện (*) nên phương trình (4) tương

đương với $\begin{cases} (\sqrt{x+2}-1)^2 = 0 \\ (\sqrt{1-3x}-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 1 \\ \sqrt{1-3x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ 1-3x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

Vậy: $x = -1$ là nghiệm phương trình.

Bài 5. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

b) $B = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$;

c) $C = \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{10}-\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{5})$.

Lời giải:

a) $A = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} - \sqrt{2-2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$
 $= |\sqrt{2}+1| - |\sqrt{2}-1| = (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) = 2$.

b) Đặt $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $y = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ thì $x^3 + y^3 = 14$ và $xy = \sqrt[3]{49-50} = -1$.

Có: $B = x + y$ nên $B^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) \Rightarrow B^3 = 14 - 3B$.

Do đó $B^3 + 3B - 14 = 0 \Leftrightarrow B^3 - 8 + 3B - 6 = 0 \Leftrightarrow (B-2)(B^2 + 2B + 7) = 0$.

Mà $B^2 + 2B + 7 = (B+1)^2 + 6 > 0 \forall B$. Vậy $B - 2 = 0 \Leftrightarrow B = 2$.

c) $C = \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5}) = \sqrt{6-2\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})$
 $= \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} \cdot (3\sqrt{5}-3+5-\sqrt{5}) = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \cdot (2\sqrt{5}+2)$
 $= (\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1) \cdot 2 = (5-1) \cdot 2 = 8$.

Vậy $C = 8$.

Bài 6. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$; với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm x để $A = \frac{1}{2}$;

c) Tìm x để $A = \sqrt{x} - 1$.

Lời giải:

a) $A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 - (3\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$
 $= \frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$
 $= \frac{2x-2\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

b) $A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x}-2 = \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Do điều kiện $x \neq 1$ nên không có giá trị nào của x để $A = \frac{1}{2}$.

$$c) A = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 1 = x - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) = 0.$$

$$\bullet \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

$$\bullet \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}$$

$$\text{Vậy } A = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}.$$

Bài 7. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} \right)$; với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P;

b) Tìm x để $P < \frac{1}{4}$;

c) Tìm x để $P > \frac{1}{6}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} a) P &= \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \right) : \left(\frac{x - 1 - (x - 4)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \frac{3}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)}{3} = \frac{\sqrt{x} - 2}{3\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$b) P < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{3\sqrt{x}} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x} - 8 - 3\sqrt{x}}{12\sqrt{x}} < 0. \quad (1)$$

$$\text{Vì } x > 0 \text{ nên } 12\sqrt{x} > 0. \text{ Do đó } (1) \Leftrightarrow \sqrt{x} - 8 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 8 \Leftrightarrow x < 64.$$

$$\text{Vậy } P < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < x < 64; x \neq 1, x \neq 4.$$

$$c) P > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{3\sqrt{x}} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{x} - 12 - 3\sqrt{x}}{18\sqrt{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x} - 12}{18\sqrt{x}} > 0 \quad (2). \text{ Vì } x > 0 \text{ nên } 18\sqrt{x} > 0. \text{ Do đó } (2) \Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} > 12 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow x > 16.$$

$$\text{Vậy } P > \frac{1}{6} \Leftrightarrow x > 16.$$

Bài 8. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức Q;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của Q.

Lời giải:

$$a) Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 1 + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}.$$

b) $Q = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2, \text{ suy ra } Q \geq 3. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy min $Q = 3$ khi $x = 1$.

Bài 9. Cho biểu thức $M = \left(\frac{2x + 3\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}.$

- Rút gọn biểu thức M ;
- So sánh M và 1;
- Tìm $x \in \mathbb{R}$ để M có giá trị là số nguyên.

Lời giải:

a) Điều kiện xác định: $x > 0$.

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{2x + 3\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1 - (x - \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} \right) \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(x + 5\sqrt{x})(x - \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 5)}{(\sqrt{x} + 1)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1}. \end{aligned}$$

$$b) M - 1 = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} - 1 = \frac{\sqrt{x} + 5 - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{4}{\sqrt{x} + 1}.$$

$$\text{Với } x > 0 \text{ thì } \sqrt{x} + 1 > 0 \text{ nên } \frac{4}{\sqrt{x} + 1} > 0 \Rightarrow M > 1.$$

$$c) \text{ Ta có: } M = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} + 1}. \text{ Vì } x > 0 \text{ nên } \sqrt{x} + 1 > 1, \text{ do đó } \frac{4}{\sqrt{x} + 1} < 4.$$

Vậy $1 < M < 5$. Để $M \in \mathbb{Z}$ thì $M \in \{2; 3; 4\}$.

$$\bullet M = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 5 = 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

$$\bullet M = 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 5 = 3\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\bullet M = 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 5 = 4\sqrt{x} + 4 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} - \sqrt{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}.$$

Vậy $x \in \{9; 1; \frac{1}{9}\}$.

Bài 10. Cho biểu thức $M = \frac{x + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ (với $x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức M;

b) Tìm x để $M = \frac{1}{3}$.

Lời giải:

a) Đặt $\sqrt[3]{x} = a$. Ta có $M = \frac{a^3 + a - 2}{a^3 - 1} - \frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{a - 1}$.

$$M = \frac{a^3 + a - 2 - a + 1 + a^2 + a + 1}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} = \frac{a^3 + a^2 + a}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} = \frac{a(a^2 + a + 1)}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} \\ = \frac{a}{a - 1}. \text{ Vậy } M = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

$$b) M = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x} = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } x = -\frac{1}{8}.$$

3. Bài tập tự luyện

1. Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1}$.

2. Tính:

a) $x = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$;

b) $y = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$;

c) $z = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}$.

3. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 9}{x - 9}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm x để $A = \frac{1}{3}$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

(Đề thi vào lớp 10 thành phố Hà Nội năm học 2010 - 2011)

4. Cho biểu thức $B = \left(\frac{x + \sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$, với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức B;

b) Chứng minh $B < \frac{1}{3}$;

c) Tìm x để $B = \frac{1}{2\sqrt{x} + 1}$.

5. Cho biểu thức $Q = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q;

b) So sánh Q và 4.

6*. Cho $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$. Tính giá trị của $(x + y)$.

7*. Tìm x sao cho $x + 6\sqrt{x+8} + 4\sqrt{6-2x} = 27$.

8*. Tìm x sao cho $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Hướng dẫn – Lời giải – Đáp số

1. $M = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}$, điều kiện $x \neq -1$.

$$M = \frac{|x+1|}{x+1}.$$

+ Nếu $x > -1$ thì $M = \frac{x+1}{x+1} = 1$.

+ Nếu $x < -1$ thì $M = \frac{-(x+1)}{x+1} = -1$.

2. a) $x = \sqrt{5+4\sqrt{5}+4} + \sqrt{5-4\sqrt{5}+4} = \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$
 $= \sqrt{5} + 2 + |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5}$.

b) Đặt $a = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$, $b = \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ thì $a^3 + b^3 = 20$; $a.b = -2$.

Vì $y = a + b \Leftrightarrow y^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Leftrightarrow y^3 = 20 - 6y \Leftrightarrow y^3 + 6y - 20 = 0$
 $\Leftrightarrow y^3 - 8 + 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2 + 2y + 4) + 6(y-2) = 0$
 $\Leftrightarrow (y-2)(y^2 + 2y + 10) = 0$.

Mà $y^2 + 2y + 10 = (y+1)^2 + 9 > 0 \forall y$. Do đó $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.

c) $z = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}$
 $= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{100} - \sqrt{99}$
 $= -1 + \sqrt{100} = 9$.

3. a) $A = \frac{3}{\sqrt{x} + 3}$.

b) $x = 36$.

c) Vì $\sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0$ nên $\sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{3}{3} \Rightarrow A \leq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Vậy $\max A = 1$ khi $x = 0$.

4. a) $B = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\text{b) Xét } \frac{1}{3} - B = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{3(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)}.$$

$$\text{Với } x \geq 0 \Rightarrow 3(x + \sqrt{x} + 1) > 0. \text{ Do } x \neq 1 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - B > 0.$$

$$\text{Do đó } B < \frac{1}{3}.$$

$$\text{c) } B = \frac{1}{2\sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2\sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} = x + \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do $x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định nên không có giá trị nào của x để

$$B = \frac{1}{2\sqrt{x} + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{5. a) } Q &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} + \frac{x + 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

$$\text{b) Xét } Q - 4 = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow Q > 4.$$

$$\text{6*} \cdot \text{ Có } (x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x) = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

$$(y + \sqrt{y^2 + 1}) \cdot (\sqrt{y^2 + 1} - y) = y^2 + 1 - y^2 = 1.$$

$$\text{Do đó } \sqrt{y^2 + 1} + y = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = \sqrt{y^2 + 1} - y.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} + x + y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} - x - y.$$

$$\text{Do đó: } 2(x + y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0.$$

7*. Điều kiện xác định $-8 \leq x \leq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$-x - 6\sqrt{x + 8} - 4\sqrt{6 - 2x} + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 8 - 6\sqrt{x + 8} + 9) + [(6 - 2x) - 4\sqrt{6 - 2x} + 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x + 8} - 3)^2 + (\sqrt{6 - 2x} - 2)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } a^2 \geq 0 \forall a, \text{ dấu "=" xảy ra khi } a = 0 \text{ nên } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 8} = 3 \\ \sqrt{6 - 2x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

8*. Điều kiện xác định $2 \leq x \leq 4$.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với: } 2x^2 - 12x + 22 - 2\sqrt{x - 2} - 2\sqrt{4 - x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 - 2\sqrt{x - 2} + 1) + (4 - x - 2\sqrt{4 - x} + 1) + 2(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x - 2} - 1)^2 + (\sqrt{4 - x} - 1)^2 + 2(x - 3)^2 = 0. \text{ Vậy } x = 3.$$

• **Những sai lầm thường gặp:**

Trong quá trình ôn tập và giải bài thi về phân kiến thức này, học sinh hay mắc các sai lầm dẫn đến sai lệch kết quả. Sau đây là một số ví dụ minh họa và cách khắc phục các sai lầm đó.

Ví dụ 1. Tính $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Một học sinh giải như sau:

$$a = \sqrt{3 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + 4} + \sqrt{3 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} \\ = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 2 = 2\sqrt{3}.$$

Sai lầm này mắc phải do quên hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Cách giải đúng phải là:

$$a = |\sqrt{3} + 2| + |\sqrt{3} - 2| \text{ mà } \sqrt{3} < 2 \text{ nên } \sqrt{3} - 2 < 0 \text{ do đó } a = \sqrt{3} + 2 + 2 - \sqrt{3} = 4.$$

Ví dụ 2. Tìm x sao cho $\sqrt{3x - 2} = 4 - x$.

(1)

Một học sinh giải như sau:

$$\text{Điều kiện xác định: } 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Bình phương hai vế của (1) ta được:

$$3x - 2 = 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) - 9(x - 2) = 0$$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 9) = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 9$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Sai lầm trong cách giải này ở chỗ: để việc bình phương hai vế dẫn đến phương trình tương đương cần thêm điều kiện $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$ để loại đi nghiệm $x = 9$.

Có hai cách khác phục:

+ Cách 1: Giữ nguyên cách giải nhưng không dùng dấu tương đương, chỉ dùng dấu "=", sau đó thử lại kết quả trước khi kết luận.

$$+ \text{ Cách 2: Sử dụng định nghĩa căn bậc hai số học: } \sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó phương trình } \sqrt{3x - 2} = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0 & (a) \\ 3x - 2 = (4 - x)^2 & (b) \end{cases}$$

$$(a) \Leftrightarrow x \leq 4$$

$$(b) \Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 = 0, x_1 = 2 \text{ thỏa mãn điều kiện, } x_2 = 9 \text{ (loại)}.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 3. Biểu thức M có kết quả rút gọn $M = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ với điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$.

Tìm x để $M < \frac{1}{2}$.

Một học sinh giải như sau:

$$M < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x} + 2 < \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} < -3.$$

Mà $\sqrt{x} \geq 0$ với $x \geq 0$ nên không có giá trị nào của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Sai lầm mắc phải do học sinh không nhớ tính chất của bất đẳng thức: $a > b$ và $c < 0$ thì $ac < bc$; $a > b$ và $c > 0$ thì $ac > bc$. Để khắc phục, không nên "tích chéo" mà nên chuyển vế, rút gọn và xét dấu. Cụ thể cách giải bài tập trên như sau:

$$M < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{2(\sqrt{x}-1)} < 0. \quad (1)$$

Do $\sqrt{x} \geq 0$ với $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} + 3 > 0$, nên $(1) \Leftrightarrow 2(\sqrt{x} - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow x < 1.$$

Học sinh thường quên kết hợp với điều kiện của đề bài vì thế kết luận $x < 1$ là chưa chính xác. Vậy kết luận đúng là $M < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

CHỦ ĐỀ 2. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Kiến thức cần nhớ

• Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$).

$\Delta = b^2 - 4ac$. + Nếu $\Delta < 0$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta = 0$, phương trình (1) có nghiệm kép $x = \frac{-b}{2a}$.

+ Nếu $\Delta > 0$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Cho phương trình $ax^2 + 2b'x + c = 0$ (2) ($a \neq 0$)

$\Delta' = b'^2 - ac$. + Nếu $\Delta' < 0$, phương trình (2) vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta' = 0$, phương trình (2) có nghiệm kép $x = \frac{-b'}{a}$.

+ Nếu $\Delta' > 0$, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Hệ thức Vi-ét: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm là

$$x_1 \text{ và } x_2 \text{ thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

• Nếu có hai số u, v và $\begin{cases} u+v=S \\ u \cdot v=P \end{cases}$ thì hai số đó là nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0 \text{ với } S^2 - 4P \geq 0.$$

• Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$)

+ Nếu $a + b + c = 0$, phương trình (1) có hai nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$.

+ Nếu $a - b + c = 0$, phương trình (1) có hai nghiệm: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.

- Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình:

Bước 1: Lập phương trình, hệ phương trình:

- Chọn ẩn (đặt đơn vị và điều kiện thích hợp cho ẩn).
- Biểu thị các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình hoặc hệ phương trình biểu thị mối tương quan giữa các đại lượng trong bài toán.

Bước 2: Giải phương trình hoặc hệ phương trình.

Bước 3: Nhận định kết quả và trả lời.

2. Bài tập minh họa

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1)

b) $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ (2)

c) $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 1) = 0$. (3)

Lời giải:

a) Ta có $\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$. Phương trình (1) có nghiệm là:

$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{5+3}{4} = 2.$$

b) Ta có $\Delta = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 4\sqrt{6}$
 $= 3 + 2 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Phương trình (2) có nghiệm là:

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}.$$

c) Phương trình (3) là phương trình bậc hai có

$$a + b + c = \sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 0.$$

Phương trình (3) có nghiệm là: $x_1 = 1; x_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.

Bài 2. Cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2mx + (m + 3) = 0$ (1).

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (m - 1)(m + 3) > 0 \end{cases}$ (2)

• (2) $\Leftrightarrow m \neq 1$.

• (3) $\Leftrightarrow m^2 - m^2 - 3m + m + 3 > 0 \Leftrightarrow 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

Vậy $m < \frac{3}{2}$ và $m \neq 1$ là điều kiện phải tìm.

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 + mx - 2m - 4 = 0$. (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- a) Nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn;
- b) Nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

Lời giải:

Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-2m - 4 < 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = -m$.

- a) Nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow x_1 + x_2 > 0$
 $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy điều kiện cần tìm là $-2 < m < 0$.

- b) Nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.
Vậy điều kiện cần tìm là $m > 0$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$.

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt;
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải:

$\Delta' = m^2 - m^2 + 4 = 4 > 0 \forall m$. Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 4 \end{cases}$$

- a) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} 2m > 0 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

- b) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi $\begin{cases} 2m < 0 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$.

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$. (1)

- a) Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 13$;
- b) Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 9$.

Lời giải:

a) $\Delta = m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$.

Theo hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 4 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 8 = 13 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0,$$

suy ra $m_1 = -1, m_2 = 5$. Vậy $m = -1, m = 5$ là các số cần tìm.

$$\begin{aligned} \text{b) } x_1^3 + x_2^3 = 9 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \Leftrightarrow m^3 - 3(2m - 4)m = 9 \\ &\Leftrightarrow m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 1 \\ &\Leftrightarrow (m - 2)^3 = 1 \Leftrightarrow m - 2 = 1 \\ &\Leftrightarrow m = 3. \text{ Vậy } m = 3 \text{ là số cần tìm.} \end{aligned}$$

Bài 6. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:

- a) $x_1 = 2x_2$;
b) $|x_1 - x_2| = 4$.

Lời giải:

$\Delta' = 1 - m + 1 = 2 - m$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $2 - m > 0$

$$\Leftrightarrow m < 2. \text{ Theo hệ thức Vi-ét } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 & (2) \end{cases}$$

a) Thay $x_1 = 2x_2$ vào (1) ta có $3x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}; x_1 = \frac{4}{3}$.

Thay vào (2) ta có $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = m - 1 \Rightarrow m = \frac{17}{9}$ là số cần tìm.

b) $|x_1 - x_2| = 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16$
 $\Leftrightarrow 4 - 4(m - 1) = 16 \Leftrightarrow m = -2$ là số cần tìm.

Bài 7. Cho phương trình $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$. (1)

- a) Giải phương trình khi $m = 1$;
b) Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải:

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình (1) có dạng:

$$t^2 - 2(m + 1)t + 2m + 1 = 0. \quad (2)$$

a) Khi $m = 1$, phương trình (2) $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $t_1 = 1, t_2 = 3$.

$t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$t = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 1; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

b) Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt. Điều này chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} \Delta' = (m + 1)^2 - 2m - 1 > 0 \\ t_1 + t_2 = 2(m + 1) > 0 \\ t_1 t_2 = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ m > -1 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 8. Cho phương trình $x^3 - m(x + 2) + 8 = 0$. (1)

- a) Giải phương trình khi $m = 2$;
b) Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 ;

c) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 25$.

Lời giải:

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4) - m(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4-m) = 0. \quad (2)$$

a) Khi $m = 2$, phương trình (2) có dạng: $(x+2)(x^2-2x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $\Delta' = 1 - 2 < 0$. Vậy khi $m = 2$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$.

$$\text{b) Phương trình (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 - 2x + 4 - m = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Để (1) có ba nghiệm phân biệt thì (4) phải có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - 4 + m > 0 \\ (-2)^2 - 2(-2) + 4 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \neq 12. \end{cases}$$

c) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (4) thì $x_3 = -2$.

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 - m. \end{cases}$$

$$\text{Do đó } x_1^2 + x_2^2 + 4 - 2x_1x_2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 21$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4(4 - m) = 21 \Leftrightarrow 4m = 33 \Leftrightarrow m = \frac{33}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $m = \frac{33}{4}$ là giá trị cần tìm.

$$\text{Bài 9. Cho phương trình } \frac{5x-m}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = 0. \quad (1)$$

a) Giải phương trình khi $m = 14$;

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải:

Điều kiện xác định $x \neq \pm 2$. (*)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{5x-m+x+2+x^2-2x}{(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x+2-m}{(x-2)(x+2)} = 0. \quad (2)$$

$$\text{Với điều kiện (*), phương trình (2)} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 - m = 0. \quad (3)$$

$$\text{a) Khi } m = 14, \text{ phương trình (3)} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = -6, x_2 = 2$.

Đối chiếu với điều kiện chỉ có $x = -6$ là nghiệm của (1).

b) Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (3) phải có hai nghiệm phân biệt khác ± 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 2 + m > 0 \\ 4 + 8 + 2 - m \neq 0 \\ 4 - 8 + 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq 14 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Vậy $m > -2$ và $m \neq 14$ thỏa mãn đề bài.

Bài 10. Giải các phương trình sau:

a) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0; \quad (1)$

b) $x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 5x + 1 = 0; \quad (2)$

c) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24; \quad (3)$

d) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 10 = 0. \quad (4)$

Lời giải:

a) Phương trình (1) có điều kiện xác định là $x \neq 0$.

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Ta có phương trình $2(t^2 - 2) - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = 2; t_2 = -\frac{1}{2}$.

$t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2 = 0, \Delta = 1 - 16 < 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

b) Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của (2). Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$x^2 - 5x - 8 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x - \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$.

Đặt $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Phương trình có dạng:

$t^2 + 2 - 5t - 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$, phương trình có nghiệm $t_1 = -1; t_2 = 6$.

$t = -1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$, phương trình có nghiệm

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$t = 6 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 1 = 0$, phương trình có nghiệm

$x_3 = 3 - \sqrt{10}, x_4 = 3 + \sqrt{10}$.

c) Phương trình (3) $\Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 24$.

Đặt $t = x^2 + 3x$, ta có $t(t + 2) = 24 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là $t_1 = 4, t_2 = -6$.

$t = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$, phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -4$.

$t = -6 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 6 = 0, \Delta = 9 - 24 < 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x \in \{1; -4\}$.

d) Phương trình (4) $\Leftrightarrow (x^4 - 2x^3 + x^2) + 3(x^2 - x) - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) - 10 = 0.$$

Đặt $t = x^2 - x$, ta có: $t^2 + 3t - 10 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = -5, t_2 = 2$.

$t = -5 \Leftrightarrow x^2 - x + 5 = 0, \Delta = 1 - 20 < 0$, phương trình vô nghiệm.

$t = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$, phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x \in \{-1; 2\}$.

Bài 11. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - x + 9} = 2x + 1;$ (1)

b) $\sqrt{5x + 7} - \sqrt{x + 3} = \sqrt{3x + 1};$ (2)

c) $x^2 - 3x - 10 + 3\sqrt{x(x - 3)} = 0;$ (3)

d) $\sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x} + \sqrt{4 - x^2} = 2.$ (4)

Lời giải:

a) Phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x + 9 = (2x + 1)^2 \end{cases}$ (5)

$$(5) \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

(6) $\Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0$, phương trình có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -\frac{8}{3}$ (loại) không thỏa mãn (5). Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

b) Điều kiện xác định $x \geq -\frac{1}{3}$ (*)

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \sqrt{5x + 7} = \sqrt{x + 3} + \sqrt{3x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 5x + 7 = x + 3 + 3x + 1 + 2\sqrt{(x + 3)(3x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2 + 10x + 3} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 4(3x^2 + 10x + 3) = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \quad (7)$$

$$(8) \Leftrightarrow 11x^2 + 34x + 3 = 0. \text{ Phương trình này có hai nghiệm } x_1 = -3; x_2 = -\frac{1}{11}.$$

$x = -3$ không thỏa mãn điều kiện (*). Phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{11}$ (thỏa mãn (7)).

c) Điều kiện xác định $x(x-3) \geq 0$ hay $x^2 - 3x \geq 0$ (**).

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x}$, $t \geq 0$; ta có $t^2 - 10 + 3t = 0$. Phương trình $t^2 + 3t - 10 = 0$ có hai nghiệm $t_1 = -5$; $t_2 = 2$, $t \geq 0$, nên $t = 2$. Với $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$, phương trình có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ đều thỏa mãn điều kiện (**).

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{-1; 4\}$.

d) Điều kiện xác định $-2 \leq x \leq 2$.

Đặt $a = \sqrt{2-x}$, $b = \sqrt{x+2}$ ($a, b \geq 0$). Ta có

$$\begin{cases} a+b+ab=2 \\ a^2+b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b)+2ab=4 \\ a^2+b^2=4 \end{cases} \quad (9) \quad (10)$$

Cộng từng vế (9) và (10) ta được $(a+b)^2 + 2(a+b) = 8 \Leftrightarrow (a+b+1)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a+b=-4 \end{cases} \text{ (vô nghiệm do } a, b \geq 0).$$

Với $a+b=2$, từ (9) $\Rightarrow ab=0$. Vậy $\begin{cases} a=2, b=0 \\ a=0, b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2. \end{cases}$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \{-2; 2\}$.

Bài 12. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} (x+2)(y+1) = xy+7 \\ (x+1)(y-1) = xy. \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 4 \\ 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$$

Lời giải:

a) Điều kiện xác định $x, y \neq 0$. Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $a, b \neq 0$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a+b=3 \\ 3a-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-2a \\ 3a-2(3-2a)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-2a \\ 7a=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} \frac{1}{x}=1 \\ \frac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

b) Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} xy + x + 2y + 2 = xy + 7 \\ xy - x + y - 1 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \quad (1) \\ -x + y = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta được $3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$. Thay vào (2), suy ra $-x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Hệ có nghiệm duy nhất $(x = 1; y = 2)$.

c) Điều kiện $x \geq 0, y > 0$. Đặt $\sqrt{x} = a, \frac{1}{\sqrt{y}} = b$ ($a \geq 0, b > 0$). Ta có hệ phương

trình:
$$\begin{cases} a + 3b = 4 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 4 \\ 6a - 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 4 \\ 7a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Từ đó
$$\begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Bài 13. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \quad (1) \\ mx + y = 5 \quad (2) \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thoả mãn điều kiện:

a) x và y trái dấu;

b) x và y cùng dương.

Lời giải:

a) $(1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$; thay vào (2) ta được $mx + 2x - 1 = 5 \Leftrightarrow (m + 2)x = 6$. (3)

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì (3) phải có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2. \text{ Hệ có nghiệm duy nhất } (x; y) = \left(\frac{6}{m+2}; \frac{10-m}{m+2} \right).$$

x và y trái dấu $\Leftrightarrow xy < 0 \Leftrightarrow \frac{6(10-m)}{(m+2)^2} < 0$. Mà $(m+2)^2 > 0$ với $m \neq -2$ nên

$10 - m < 0 \Leftrightarrow m > 10$ là giá trị cần tìm.

b) x và y cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{m+2} > 0 \quad (4) \\ \frac{10-m}{m+2} > 0 \quad (5) \end{cases}$ từ đó $(4) \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Vì $m + 2 > 0$ nên $(5) \Leftrightarrow 10 - m > 0 \Leftrightarrow m < 10$. Vậy điều kiện cần tìm là $-2 < m < 10$.

Bài 14. Giải các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} x + y = 3 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 5 \quad (2) \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} 3x = y^2 + y + 1 \quad (3) \\ 3y = x^2 + x + 1 \quad (4) \end{cases}.$$

Lời giải:

a) $(1) \Leftrightarrow y = 3 - x$, thay vào (2) được: $x^2 + (3 - x)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Do đó hệ đã cho có hai nghiệm $(x = 1; y = 2), (x = 2; y = 1)$.

b) Trừ từng vế của các phương trình (3), (4) ta được: $3x - 3y = y^2 - x^2 + y - x$
 $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + 4 = 0. \end{cases}$

Với $x = y$, thay vào (4) được $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Với $x + y = -4 \Rightarrow x = -4 - y$, thay vào (3) ta được: $3(-4 - y) = y^2 + y + 1$

$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 13 = 0, \Delta' = 4 - 13 < 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Bài 15. Chiều dài của bể bơi là 100m. Trong đợt tập bơi phòng chống đuối nước ở một trường Trung học cơ sở, mỗi học sinh phải thực hiện bài tập bơi từ đầu này sang đầu kia của bể bơi theo vận tốc quy định. Trên $\frac{3}{5}$ quãng đường đầu, học sinh A bơi theo đúng vận tốc quy định. Trên quãng đường còn lại do mệt, học sinh A giảm vận tốc 1m/s so với vận tốc quy định.

Tổng thời gian bơi của học sinh A là 40 giây. Tính vận tốc quy định của học sinh A.

Lời giải:

Gọi vận tốc quy định của học sinh A là x (m/s) ($x > 1$). Thời gian bơi $\frac{3}{5}$ quãng đường đầu là $\frac{60}{x}$ (giây); thời gian bơi $\frac{2}{5}$ quãng đường còn lại là $\frac{40}{x - 1}$ (giây).

Vậy ta có phương trình: $\frac{60}{x} + \frac{40}{x - 1} = 40. \quad (1)$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 60(x - 1) + 40x = 40x(x - 1) \Leftrightarrow 100x - 60 = 40x^2 - 40x$
 $\Leftrightarrow 40x^2 - 140x + 60 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad (2)$

$\Delta = 49 - 24 = 25; \sqrt{\Delta} = 5$. Phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$ (loại)

$x_2 = \frac{7 + 5}{4} = 3$ (thỏa mãn điều kiện của ẩn).

Vậy vận tốc quy định của học sinh A là 3m/s.

Bài 16. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì làm xong trong 4 giờ. Nếu mỗi đội làm một mình xong công việc đó, đội thứ nhất cần thời gian ít hơn so với đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi mỗi đội làm một mình xong công việc đó trong bao lâu?

Lời giải:

Gọi thời gian để một mình đội thứ nhất làm xong công việc là x (giờ); thời gian để đội hai làm một mình xong công việc là $x + 6$ (giờ) ($x > 4$).

Trong một giờ, đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc); đội thứ hai làm được

$\frac{1}{x+6}$ (công việc), cả hai đội làm được $\frac{1}{4}$ (công việc). Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+6) + 4x = x(x+6)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 24 + 4x = x^2 + 6x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0.$$

$\Delta' = 1^2 + 24 = 25$, suy ra $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{25} = 5$, nên $x_1 = 1 + 5 = 6$, $x_2 = 1 - 5 = -4$ (loại).

Giá trị $x = 6$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy: Một mình đội thứ nhất làm xong công việc trong 6 giờ, một mình đội thứ hai làm xong công việc trong 12 (giờ).

Bài 17. Hai vòi nước chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 30 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 15 phút rồi khóa lại, sau đó mở vòi thứ hai trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao nhiêu lâu đầy bể?

Lời giải:

Gọi thời gian một mình vòi thứ nhất chảy đầy bể là x (giờ), $x > 1,5$.

Thời gian một mình vòi thứ hai chảy đầy bể là y (giờ), $y > 1,5$.

Trong một giờ, vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ (bể).

Cả hai vòi chảy được $\frac{2}{3}$ (bể).

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$.

Trong 15 phút ($\frac{1}{4}$ giờ) vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{4x}$ (bể), trong 20 phút ($\frac{1}{3}$ giờ)

vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{3y}$ (bể). Cả hai vòi chảy được $\frac{1}{5}$ (bể). Ta có phương trình:

$$\frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5}.$$

Kết hợp hai phương trình ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{1}{3y} = \frac{2}{9} \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) theo từng vế, ta có:

$$\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x} = \frac{2}{9} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{12x} = \frac{1}{45} \Leftrightarrow 12x = 45$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{4}, \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$\text{Thay } x = \frac{15}{4} \text{ vào phương trình (1), ta được: } \frac{1}{3y} = \frac{2}{9} - \frac{4}{45} \Leftrightarrow \frac{1}{3y} = \frac{2}{15}$$

$$\Leftrightarrow 6y = 15 \Leftrightarrow y = 2,5.$$

Các giá trị tìm được của x, y thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy: Một mình vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 3 giờ 45 phút, một mình vòi thứ hai chảy đầy bể trong 2 giờ 30 phút.

Bài 18. Người ta hòa lẫn 4kg chất lỏng I với 3kg chất lỏng II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng 700kg/m^3 . Biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng II là 200kg/m^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Lời giải:

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng I là $x(\text{kg/m}^3)$ thì khối lượng riêng của chất lỏng II là $x - 200 (\text{kg/m}^3)$. Điều kiện $x > 200$.

$$\text{Thể tích của chất lỏng I là } \frac{4}{x}(\text{m}^3), \text{ thể tích của chất lỏng II là } \frac{3}{x-200}(\text{m}^3),$$

$$\text{thể tích của hỗn hợp là } \frac{7}{700} = \frac{1}{100}(\text{m}^3).$$

$$\text{Ta có phương trình: } \frac{4}{x} + \frac{3}{x-200} = \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow 400(x-200) + 300x = x(x-200)$$

$$\Leftrightarrow 400x - 80000 + 300x = x^2 - 200x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 900x + 80000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 100x - 800x + 80000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-100) - 800(x-100) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-100)(x-800) = 0.$$

Suy ra $x = 100$ (loại), $x = 800$ (thỏa mãn điều kiện của ẩn).

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng I là 800kg/m^3 , khối lượng riêng của chất lỏng II là 600kg/m^3 .

Bài 19. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 192m^2 . Biết rằng chiều dài hơn chiều rộng 4m. Tính các kích thước của vườn.

Lời giải:

Gọi chiều rộng của vườn là $x(\text{m})$ ($x > 0$) thì chiều dài là $x + 4$ (m).

Vì diện tích vườn là 192m^2 nên ta có phương trình: $x(x + 4) = 192$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 16x - 192 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 12) + 16(x - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 12)(x + 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 & (\text{thoả mãn điều kiện}) \\ x = -16 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy chiều rộng mảnh vườn là 12m, chiều dài là 16m.

3. Bài tập tự luyện

1. Cho hai phương trình:

$$2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0 \quad (1)$$

$$4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0. \quad (2)$$

Với giá trị nào của m thì hai phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm chung? Tìm nghiệm chung đó.

2. Cho hai phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$cx^2 + bx + a = 0 \quad (2), \text{ với } a, c > 0.$$

a) Chứng minh rằng hai phương trình đã cho cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm.

b) Giả sử x_1, x_2 và x'_1, x'_2 lần lượt là các nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2). Chứng minh rằng $x_1x_2 + x'_1x'_2 > 2$.

3. Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:

a) $2x_1 - x_2 = 1$;

b) $|x_1| + |x_2| = 3$.

4. Cho phương trình $x^2 - (m + 1)x + m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.

5. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y = 5 & (1) \\ mx + y = 4. & (2) \end{cases}$$

Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hệ phương trình có nghiệm duy nhất và x, y là số nguyên.

6*. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1. & (2) \end{cases}$$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất ($x; y$) sao cho tích xy có giá trị nhỏ nhất.

7. Giải các hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6. \end{cases}$$

8. Giải hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} |x| + y = 3 & (1) \\ 2|x| - y = 3 & (2) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 & (3) \\ 3x + y = 6 & (4) \end{cases}$$

9*. Giải hệ phương trình

a)
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 \\ y^2 - 3xy = 4. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 5. \end{cases}$$

10*. Giải các phương trình sau:

a)
$$\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1).$$

(Đề thi vào lớp 10 – Hà Nội – Năm học 2009 – 2010).

b)
$$x^2 + 4x + 7 = (x + 4)\sqrt{x^2 + 7}.$$

(Đề thi vào lớp 10 – Hà Nội – Năm học 2010 – 2011).

11. Một ô tô đi từ A đến B cách nhau 840km trong thời gian quy định. Sau khi đi được nửa quãng đường, ô tô dừng lại nghỉ 30 phút nên trên quãng đường còn lại, ô tô phải tăng vận tốc thêm 2km/h để đến B đúng hạn. Tính vận tốc của ô tô lúc đầu.

12. Để hoàn thành một công việc theo dự định, cần một số công nhân làm trong một số ngày nhất định. Nếu bớt đi 3 công nhân thì phải mất thêm 6 ngày mới hoàn thành công việc. Nếu tăng thêm 2 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 2 ngày. Hỏi theo dự định, cần bao nhiêu công nhân và làm bao nhiêu ngày?

13. Trên một công trường xây dựng, một đội lao động phải vận chuyển 200m³ đất. Trong 4 ngày đầu họ thực hiện đúng quy định đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10m³, nên đã hoàn thành công việc sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày đội lao động đó phải vận chuyển bao nhiêu mét khối đất?

14. Một máy bơm theo kế hoạch phải bơm đầy nước vào một bể chứa có dung tích 50m³ trong một thời gian nhất định. Người công nhân vận hành máy đã cho máy bơm hoạt động với công suất tăng thêm 5m³/h, cho nên đã bơm đầy bể sớm hơn quy định 1 giờ 40 phút. Hãy tính xem theo kế hoạch mỗi giờ máy bơm phải bơm được bao nhiêu mét khối nước.

15. Một mảnh vườn hình chữ nhật trước đây có chu vi là 124m. Nay người ta mở rộng chiều dài thêm 5m, chiều rộng thêm 3m, do đó diện tích mảnh vườn tăng thêm 255m². Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lúc đầu.

16. Một tam giác vuông có cạnh góc vuông này hơn cạnh góc vuông kia là 1m và cạnh huyền dài 5m. Tính chu vi của tam giác vuông đó.

17. Hai bến sông A và B cách nhau 30km. Một ca-nô chạy xuôi dòng từ A đến B. Ca-nô đến B rồi quay lại A ngay. Cả đi lẫn về hết 2 giờ 30 phút. Khi ca-nô khởi hành từ A thì cùng lúc đó, một khúc gỗ cũng trôi tự do từ A theo dòng nước và gặp ca-nô trên đường trở về tại một điểm cách A là 10km. Tính vận tốc riêng của ca-nô và vận tốc của dòng nước.

18. Một phòng họp có 300 ghế ngồi nhưng phải xếp cho 357 người đến dự họp, do đó ban tổ chức đã kê thêm một hàng ghế và mỗi hàng ghế phải xếp nhiều hơn quy định 2 ghế mới đủ chỗ ngồi. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu hàng ghế và mỗi hàng ghế có bao nhiêu ghế?

Hướng dẫn – Lời giải – Đáp số

1. $x = 0$, phương trình (1) và phương trình (2) đều vô nghiệm. Vậy $x \neq 0$.

Từ (1) suy ra $m = \frac{2x^2 - 2x + 12}{3x}$. Thay vào (2) và thu gọn được

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ (loại)}, x_2 = 4.$$

$$\text{Với } x = 4, \text{ ta có } m = \frac{2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 12}{3 \cdot 4} = 3.$$

Vậy hai phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$ khi $m = 3$.

2. a) Vì $a > 0, c > 0$ nên (1) và (2) đều là phương trình bậc hai.

Ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = b^2 - 4ac$ suy ra Δ_1, Δ_2 hoặc cùng ≥ 0 hoặc cùng < 0 nên hai phương trình (1) và (2) hoặc cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm.

b) Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}, x'_1 x'_2 = \frac{a}{c}$. Khi đó $x_1 x_2 + x'_1 x'_2 = \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$.

$$\text{Xét hiệu } \frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2 = \frac{(a - c)^2}{ac} > 0 \text{ (vì } (a - c)^2 > 0 \text{ và } ac > 0).$$

$$\text{Do đó } \frac{c}{a} + \frac{a}{c} > 2 \text{ hay } x_1 x_2 + x'_1 x'_2 > 2.$$

3. Xét phương trình $x^2 - mx + 2m - 4 = 0$ (1), có $\Delta = (m - 4)^2$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $(m - 4)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$.

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m & (2) \\ x_1 x_2 = 2m - 4 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x_1 - x_2 = 1 &\Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - 1, \text{ thay vào (2): } 3x_1 - 1 = m \Leftrightarrow x_1 = \frac{m+1}{3} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{2m-1}{3}. \text{ Thay vào (3) ta có: } \frac{(m+1)(2m-1)}{9} = 2m-4 \Leftrightarrow 2m^2 - 17m + 35 = 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình này được $m \in \{5; \frac{7}{2}\}$.

$$\text{b) } |x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 9 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 9$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 9 \Leftrightarrow m^2 - (4m - 8) + 2|2m - 4| = 9. (*)$$

• Nếu $m \geq 2$ thì $(*) \Leftrightarrow m^2 = 9$; mà $m \geq 2$ nên $m = 3$.

• Nếu $m < 2$ thì $(*) \Leftrightarrow m^2 - 2(4m - 8) = 9 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 7 = 0$, suy ra $m = 1$ thỏa mãn điều kiện; $m = 7$ (loại).

Vậy $m \in \{1; 3\}$.

4. Xét phương trình $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ (1). Yêu cầu bài toán tương đương với: phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 > 0, x_2 > 0$ và $x_1^2 + x_2^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4m \geq 0 \\ x_1 + x_2 = m+1 > 0 \\ x_1 x_2 = m > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 \geq 0 \\ m > 0 \\ (m+1)^2 - 2m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

5. Xét hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 5 & (1) \\ mx + y = 4 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y & (3) \\ 5m - 2my + y = 4 & (4) \end{cases}$

$$(4) \Leftrightarrow (1 - 2m)y = 4 - 5m. \quad (5)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi $1 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$, từ (5) $\Rightarrow y = \frac{5m - 4}{2m - 1}$.

Từ đó $x = 5 - 2y = \frac{3}{2m - 1}$.

$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2m - 1$ là ước của 3, nên $(2m - 1) \in \{-3; -1; 1; 3\}$, do đó $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Các giá trị này của m đều thỏa mãn x, y là số nguyên.

Vậy $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

6*. Giải như bài 5, với $m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{3m+1}{m+1}; \frac{m-1}{m+1} \right)$.

Đặt $T = xy = \frac{(3m+1)(m-1)}{(m+1)^2} = \frac{3m^2 - 2m - 1}{(m+1)^2} = \frac{3(m+1)^2 - 8(m+1) + 4}{(m+1)^2}$
 $= 3 - \frac{8}{m+1} + \frac{4}{(m+1)^2} = \left(\frac{2}{m+1} - 2 \right)^2 - 1 \Rightarrow T \geq -1$, dấu "=" xảy ra khi $\frac{2}{m+1} = 2$
 $\Leftrightarrow m = 0$.

Vậy tích xy có giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $m = 0$.

7. a) $(x = 1; y = 4); (x = 4; y = 1)$.

b) $(x = 3; y = 2); (x = -2; y = -3)$.

8. a) Xét hệ $\begin{cases} |x| + y = 3 & (1) \\ 2|x| - y = 3 & (2) \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình được $3|x| = 6 \Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2; y = 1$.

Hệ có hai nghiệm $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; 1)\}$.

b) $(3) \Leftrightarrow x^2 - xy - 2xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x(x - y) - 2y(x - y) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2y \end{cases}$$

Lần lượt thay vào (4), hệ có nghiệm: $(x; y) \in \left\{ \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right); \left(\frac{12}{7}; \frac{6}{7} \right) \right\}$.

9*. a) Xét hệ $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 & (1) \\ y^2 - 3xy = 4 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow y \neq 0$. Đặt $x = ky$, hệ trở thành

$$\begin{cases} k^2 y^2 + y^2 - 4ky^2 = 1 \\ y^2 - 3ky^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(k^2 + 1 - 4k) = 1 & (3) \\ y^2(1 - 3k) = 4 & (4) \end{cases}$$

Từ (4) $\Rightarrow 1 - 3k > 0 \Leftrightarrow k < \frac{1}{3}$.

Chia từng vế của (3) và (4) ta được $\frac{k^2 + 1 - 4k}{1 - 3k} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4k^2 - 16k + 4 = 1 - 3k$

$\Leftrightarrow 4k^2 - 13k + 3 = 0$, phương trình có nghiệm $k_1 = 3$ (loại), $k_2 = \frac{1}{4}$.

Với $k = \frac{1}{4}$, thay vào (4) được $y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$.

• $y = 4 \Rightarrow x = 1$,

• $y = -4 \Rightarrow x = -1$.

Hệ có hai nghiệm $(x; y) \in \{(1; 4); (-1; -4)\}$.

b) Điều kiện $xy > 0$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}} = t, t > 0$. Ta có phương trình

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 2.$$

Do đó $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}$ và $\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$. Giải tiếp hai hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

ta được các nghiệm $(x; y) \in \{(1; 4); (4; 1)\}$.

10*. a) Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}(2x + 1)(x^2 + 1)$ (1)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \left|x + \frac{1}{2}\right| = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1) \quad (2). \text{ Do vế trái } \geq 0 \text{ nên vế phải } \geq 0.$$

Mà $x^2 + 1 > 0 \forall x$ nên $x + \frac{1}{2} \geq 0$, phương trình (2) tương đương với

$$\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1) \Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)[1 - (x^2 + 1)] = 0 \Leftrightarrow -x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Suy ra $x \in \left\{0; -\frac{1}{2}\right\}$.

b) $x^2 + 4x + 7 = (x + 4)\sqrt{x^2 + 7}$ (3). Đặt $a = \sqrt{x^2 + 7}$ ($a \geq \sqrt{7}$).

Ta có (3) $\Leftrightarrow a^2 + 4x = (x + 4)a \Leftrightarrow a^2 - xa + 4x - 4a = 0 \Leftrightarrow (a - x)(a - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ a = 4. \end{cases}$$

$$a = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 7} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 7 = x^2, \text{ hệ phương trình vô nghiệm.} \end{cases}$$

$$a = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 7} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 7 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

11. Gọi vận tốc lúc đầu của ô tô là x (km/h) ($x > 0$).

$$\text{Ta có phương trình: } \frac{420}{x} - \frac{420}{x+2} = \frac{1}{2}.$$

Biến đổi phương trình về dạng $x^2 + 2x - 1680 = 0$.

Giải phương trình này được $x_1 = -42$ (loại), $x_2 = 40$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vận tốc lúc đầu của ô tô là 40km/h.

12. Gọi x là số công nhân ($x \in \mathbb{N}^*$, $x > 3$), y là số ngày dự định, $y > 2$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-3)(y+6) = xy \\ (x+2)(y-2) = xy. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này được $x = 8$, $y = 10$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

13. Gọi số đất đội phải vận chuyển trong mỗi ngày theo kế hoạch là $x(m^3)$ thì thời gian dự định là $\frac{200}{x}$ (ngày) ($x > 0$).

Số đất đội vận chuyển trong 4 ngày đầu là $4x(m^3)$. Số đất còn phải vận chuyển là $200 - 4x(m^3)$. Số đất vận chuyển trong mỗi ngày sau ngày thứ 4 là $x + 10(m^3)$.

Thời gian vận chuyển hết số đất còn lại là: $\frac{200 - 4x}{x + 10}$ (ngày).

$$\text{Ta có phương trình: } \frac{200}{x} - \left(4 + \frac{200 - 4x}{x + 10}\right) = 2.$$

Biến đổi phương trình về dạng: $x^2 + 30x - 1000 = 0$.

Phương trình này có nghiệm $x_1 = -50$ (loại), $x_2 = 20$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

14. Gọi thể tích nước máy bơm phải bơm mỗi giờ theo kế hoạch là $x(m^3)$, $x > 0$.

$$\text{Ta có phương trình: } \frac{50}{x} - \frac{50}{x+5} = \frac{5}{3} \text{ hay } \frac{10}{x} - \frac{10}{x+5} = \frac{1}{3}.$$

Giải phương trình này được $x_1 = -15$ (loại), $x_2 = 10$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy, theo kế hoạch mỗi giờ máy bơm phải bơm $10m^3$ nước.

15. Gọi chiều dài của mảnh vườn lúc đầu là x (m), chiều rộng mảnh vườn lúc đầu là y (m) với $x \geq y > 0$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 62 \\ (x + 5)(y + 3) = xy + 255. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình được $x = 35$, $y = 27$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Chiều dài mảnh vườn là 35m, chiều rộng mảnh vườn là 27m.

16. Gọi chiều dài cạnh góc vuông này là x (m) thì chiều dài cạnh góc vuông kia là $x + 1$ (m), với $x > 0$.

Ta có phương trình: $x^2 + (x + 1)^2 = 25$.

Phương trình này có nghiệm $x_1 = -4$ (loại), $x_2 = 3$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Chu vi của tam giác vuông đó là: $3 + 4 + 5 = 12$ (m).

17. Gọi vận tốc riêng của ca-nô là x (km/h), vận tốc của dòng nước là y (km/h). Với $x > y > 0$ thì vận tốc của ca-nô khi xuôi dòng là $x + y$ (km/h), vận tốc của ca-nô khi ngược dòng là $x - y$ (km/h).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{30}{x+y} + \frac{30}{x-y} = \frac{5}{2} & (1) \\ \frac{30}{x+y} + \frac{20}{x-y} = \frac{10}{y}. & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) suy ra $x^2 - 5xy = 0 \Leftrightarrow x(x - 5y) = 0 \Rightarrow x = 5y$ (vì $x > 0$).
Thế vào phương trình (1) được $x = 25$, $y = 5$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vận tốc riêng của ca-nô là 25km/h, vận tốc của dòng nước là 5km/h.

18. Gọi số hàng ghế trong phòng họp lúc đầu là x , số ghế trong mỗi hàng là y ($x, y \in \mathbb{N}^*$) thì số ghế trong phòng họp là xy .

Ta có phương trình: $xy = 300$ (1)

Số hàng ghế trong phòng họp lúc sau là $x + 1$, số ghế trong mỗi hàng lúc này là $y + 2$ và số ghế trong phòng họp là $(x + 1)(y + 2)$

Ta có phương trình: $(x + 1)(y + 2) = 357$. (2)

Kết hợp (1) và (2) được hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy = 300 & (1) \\ (x + 1)(y + 2) = 357. & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow xy + 2x + y + 2 = 357$

$\Leftrightarrow 302 + 2x + y = 357 \Leftrightarrow 2x + y = 55 \Leftrightarrow y = 55 - 2x$. (3)

Thế (3) vào (1) rồi thu gọn phương trình được:

$$2x^2 - 55x + 300 = 0.$$

Giải phương trình này được $x_1 = \frac{30}{4}$ (loại), $x_2 = 20$ thỏa mãn điều kiện của ẩn,

suy ra $y = 55 - 40 = 15$.

Lúc đầu phòng họp có 20 hàng ghế, mỗi hàng ghế có 15 ghế.

Những sai lầm thường gặp:

Trong chủ đề này, học sinh thường mắc một số sai lầm. Sau đây là một số ví dụ minh họa và cách khắc phục các sai lầm đó.

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$(m-1)x^2 - 2mx + (m-2) = 0. \quad (1)$$

Một học sinh giải như sau:

$$\text{Ta có: } \Delta' = m^2 - (m-1)(m-2) = m^2 - (m^2 - 3m + 2) = 3m - 2.$$

$$\text{Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 3m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}.$$

Ở đây học sinh đã quên điều kiện để phương trình (1) là phương trình bậc hai là $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

$$\text{Vậy điều kiện cần tìm là } \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' = 3m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ví dụ 2. Tìm điều kiện của m để phương trình $(m-1)x^2 + mx - 2m + 1 = 0$ (2) có hai nghiệm phân biệt.

Một học sinh đã giải như sau:

Vì $a + b + c = m - 1 + m - 2m + 1 = 0$ nên phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = \frac{1-2m}{m-1}$.

Cách giải này mắc hai lỗi:

+ Thứ nhất: Quy tắc nhằm nghiệm chỉ áp dụng cho phương trình bậc 2 nên cần thêm điều kiện $m \neq 1$.

+ Thứ hai: Khi đã có điều kiện $m \neq 1$ rồi thì chắc gì $\frac{1-2m}{m-1} \neq 1$.

Vậy lời giải đúng là: Vì $a + b + c = 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khi } \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \frac{1-2m}{m-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1-2m \neq m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$. (3)

Tìm m để phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_2 = 2x_1$.

Một học sinh giải như sau: Phương trình (3) là phương trình bậc 2 có

$a + b + c = 1 - 2m - 1 + 2m = 0$ nên (3) có hai nghiệm là $x_1 = 1, x_2 = 2m$.

Do đó điều kiện cần tìm là $2m = 2 \Leftrightarrow m = 1$.

Sai lầm của lời giải ở chỗ x_1, x_2 chỉ là quy ước, do vậy cần xét cả trường hợp thứ hai là $x_1 = 2m, x_2 = 1$. Do đó trường hợp thứ hai cho kết quả $1 = 4m \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Kết quả cuối cùng là $m \in \left\{1; \frac{1}{4}\right\}$.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^3 - m(x - 1) - 1 = 0$. (4)

Tìm m để phương trình (4) có ba nghiệm phân biệt.

Một học sinh giải như sau:

$$(4) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) - m(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 1 - m = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Để phương trình (4) có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Do đó } \Delta = 1 - 4 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}.$$

Sai lầm của cách giải ở chỗ trong hai nghiệm của () có thể có một nghiệm bằng 1. Vậy lời giải đúng phải là:*

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác 1. Do đó, điều kiện cần tìm là } \begin{cases} \Delta = 4m - 3 > 0 \\ 1^2 + 1 + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m \neq 3. \end{cases}$$

Khi giải các phương trình hoặc hệ phương trình chứa ẩn ở mẫu học sinh thường quên đặt điều kiện cho ẩn hoặc khi tìm được kết quả thì quên loại đi các kết quả không thích hợp.

Sau đây là một ví dụ:

$$\text{Ví dụ 5. Giải phương trình } \frac{x-3}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 0. \quad (5)$$

Một học sinh giải như sau:

$$\text{Phương trình (5)} \Leftrightarrow \frac{x-3+x+1+2x-2}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x-4}{x^2-1} = 0.$$

$$\text{Suy ra } 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy phương trình có nghiệm } x = 1.$$

$$\text{Sai lầm ở chỗ quên đặt điều kiện } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Do đó $x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định. Phương trình vô nghiệm mới là câu trả lời đúng.

Ngoài ra trong các bài giải toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình học sinh hay bỏ sót đơn vị và điều kiện của ẩn hoặc đặt điều kiện không chính xác.

Ví dụ 6. Quãng đường AB dài 120km, một ô tô đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi từ B trở về A, ô tô giảm vận tốc 12km/h so với lúc đi, do đó thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Một học sinh giải như sau:

Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h) ($x > 0$) thì vận tốc lúc về là $x - 12$ (km/h)...

Sai lầm ở chỗ điều kiện $x > 0$ chưa đảm bảo cho $x - 12$ là số dương để biểu diễn vận tốc lúc về của ô tô. Để khắc phục học sinh cần được làm nhiều bài có tình huống tương tự và được nhắc nhở thường xuyên.

CHỦ ĐỀ 3. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. Kiến thức cần nhớ

• Hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến nếu $a > 0$; nghịch biến nếu $a < 0$.

• Đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng có hệ số góc bằng a .

• Cho hai đường thẳng (d_1) : $y = a_1x + b_1$ và (d_2) : $y = a_2x + b_2$.

$(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 \neq b_2$.

(d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.

(d_1) trùng $(d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

• Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$.

$a > 0$, hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$.

$a < 0$, hàm số đồng biến khi $x < 0$; nghịch biến khi $x > 0$.

• Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một parabol có đỉnh tại gốc tọa độ, có trục đối xứng là trục tung.

• Cho parabol (P) : $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d) : $y = mx + n$.

Xét phương trình $ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$. (1)

(d) và (P) không có điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

(d) và (P) tiếp xúc $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép.

(d) và (P) có hai điểm chung phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

2. Bài tập minh họa

Bài 1. Cho ba đường thẳng

(d_1) : $y = x + 2$, (d_2) : $y = -x - 2$,

(d_3) : $y = -2x + 2$, (d_1) cắt (d_2) tại A; (d_1) cắt (d_3) tại B, (d_2) cắt (d_3) tại C.

a) Xác định tọa độ của các điểm A, B, C;

b) Tính diện tích tam giác ABC.

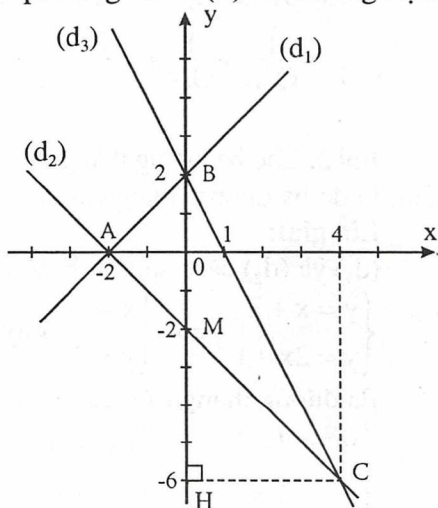
Lời giải (h.1):

a) Tọa độ của điểm A là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy A(-2; 0).

Tương tự, tọa độ của điểm B là B(0; 2); tọa độ của điểm C là C(4; -6).



Hình 1

b) $H(0; -6)$ là hình chiếu của C trên Oy , điểm $M(0; -2)$ là giao điểm của (d_2) với Oy .

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{BCM} = \frac{1}{2} AO.MB + \frac{1}{2} CH.MB$$

$$= \frac{1}{2} . 2.4 + \frac{1}{2} . 4.4 = 12 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Bài 2. Cho đường thẳng (d) :

$$y = mx + 2 \text{ (} m \neq 0 \text{)}.$$

Đường thẳng (d) cắt Ox tại A ; cắt

Oy tại B . Tìm m sao cho:

- Tam giác OAB vuông cân tại O ;
- Diện tích tam giác OAB bằng 3;
- Khoảng cách từ gốc tọa độ đến

đường thẳng (d) bằng 1.

Lời giải (h.2):

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$, (d) cắt Oy tại $B(0; 2)$, ta có $OB = 2$.

Cho $y = 0 \Rightarrow mx + 2 = 0 \Leftrightarrow mx = -2$ mà $m \neq 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{m}$.

(d) cắt Ox tại $A\left(\frac{-2}{m}; 0\right)$ ta có $OA = \frac{2}{|m|}$.

a) Tam giác OAB vuông cân tại $O \Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow \frac{2}{|m|} = 2 \Leftrightarrow |m| = 1$.

Vậy $m \in \{1; -1\}$.

b) $S_{OAB} = 3 \Leftrightarrow OA.OB = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{|m|} . 2 = 6 \Leftrightarrow |m| = \frac{2}{3}$, $m \in \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

c) Hạ $OH \perp (d)$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{\frac{4}{m^2}} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 = \frac{m^2 + 1}{4} \Leftrightarrow m^2 = 3. \text{ Vậy } m \in \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}.$$

Bài 3. Cho ba đường thẳng (d_1) : $y = x + 2$, (d_2) : $y = 2x + 1$, (d_3) : $y = (m^2 + 1)x + m$.

Tìm m để ba đường thẳng cắt nhau tại một điểm.

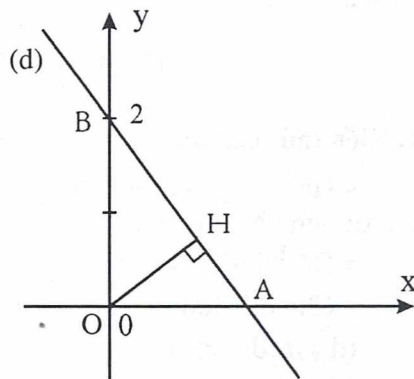
Lời giải:

(d_1) và (d_2) cắt nhau tại E , tọa độ của điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } E(1; 3).$$

Ba đường thẳng trên cắt nhau tại một điểm khi:

$$\begin{cases} m^2 + 1 \neq 1 \\ m^2 + 1 \neq 2 \\ E \in (d_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \neq 0 \\ m^2 \neq 1 \\ (m^2 + 1)1 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \pm 1 \\ m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$



Hình 2

Giải (3) được $m_1 = 1, m_2 = -2$. Chỉ có $m = -2$ thỏa mãn (1) và (2).

Vậy $m = -2$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B;

b) Tính diện tích tam giác OAB.

Lời giải (h.3):

a) Xét phương trình $x^2 = x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ (1). Phương trình

(1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1, x_2 = 2$ nên đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

• Với $x = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$.

• Với $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(2; 4)$.

b) Gọi E và H lần lượt là hình chiếu của A và B trên Ox thì

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= S_{AEHB} - S_{OAE} - S_{OBH} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}EH(AE + BH) - \frac{1}{2}AE.OE - \frac{1}{2}OH.BH \\ &= \frac{1}{2}.3(1 + 4) - \frac{1}{2}.1.1 - \frac{1}{2}.2.4 = 3 \text{ (đơn vị diện tích).} \end{aligned}$$

Bài 5. Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt;

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P), tìm m sao cho $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1 x_2 = 3$.

(Đề thi vào lớp 10 – Hà Nội năm học 2010 – 2011).

Lời giải:

a) Xét phương trình $-x^2 = mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$ (1)

$\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi giá trị của m. Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, do đó đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm thì x_1, x_2 là các nghiệm của (1).

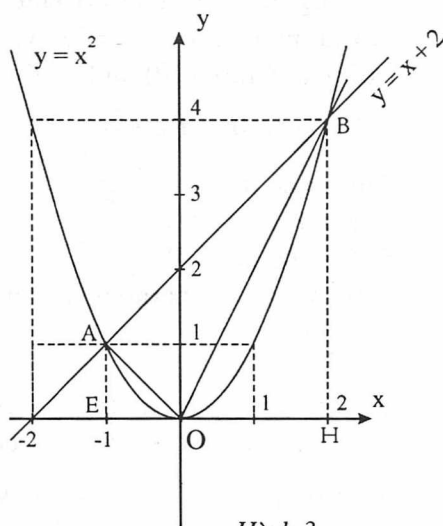
Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 \cdot x_2 = -1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1 x_2 &= 3 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2 - 1) = 3 \Leftrightarrow -1(-m - 1) = 3 \\ &\Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2. \end{aligned}$$

3. Bài tập tự luyện

1. Cho ba đường thẳng: $(d_1): y = x + 1, (d_2): y = 2, (d_3): y = (2m + 3)x - 1$.

Tìm m để ba đường thẳng trên đồng quy.



Hình 3

2. Cho parabol (P): $y = -2x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + m - 1$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt ở hai phía của trục tung.

3. Cho parabol (P): $y = 3x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x - m$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt ở bên phải trục tung.

4. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 2m + 2$.

Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_2 = 8x_1$.

5. Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = -mx + m - 1$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$.

6*. Cho đường thẳng (d): $y = (m^2 + 1)x + 2$. Đường thẳng (d) cắt Ox tại A, cắt Oy tại B. Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng (d) lớn nhất.

7*. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d) có hệ số góc là k ($k \neq 0$) và đi qua điểm M(0; 2).

a) Chứng minh (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B;

b) Gọi E và F là hình chiếu của A và B trên trục hoành. Chứng minh tam giác MEF vuông tại M.

Hướng dẫn – Lời giải – Đáp số

1. (d_1) cắt (d_2) tại E, tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2 \end{cases}$ suy ra

$E(1; 2)$. Để ba đường thẳng đồng quy thì $E \in (d_3)$. Do đó $2 = (2m + 3) \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow m = 0$.

2. Xét phương trình $-2x^2 = x + m - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x + m - 1 = 0$. (1)

Phương trình (1) phải có hai nghiệm trái dấu; muốn vậy thì $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

3. Xét phương trình $3x^2 = 2x - m \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + m = 0$ (1). Phương trình (1) phải có hai nghiệm dương phân biệt. Muốn vậy phải có:

$$\begin{cases} \Delta' = 1 - 3m > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{2}{3} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{3}.$$

4. Xét phương trình $\frac{1}{2}x^2 = mx - 2m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$. (1)

Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = 4m - 4 \end{cases}$ (2)

(3)

Do $x_2 = 8x_1$ nên từ (2) $\Rightarrow 9x_1 = 2m \Rightarrow x_1 = \frac{2m}{9}$; $x_2 = \frac{16m}{9}$.

Thay vào (3) được $\frac{32m^2}{81} = 4m - 4 \Leftrightarrow 32m^2 - 324m + 324 = 0$.

Giải phương trình này được $m_1 = 9$; $m_2 = \frac{9}{8}$ đều thỏa mãn điều kiện.

5. Xét phương trình $-x^2 = -mx + m - 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0$ (1)

$\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $m \neq 2$.

Theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$.

Ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{m}{m - 1} = \frac{3}{2}$ với $m \neq 2$, $m \neq 1$.

Suy ra $2m = 3m - 3 \Leftrightarrow m = 3$, thỏa mãn điều kiện.

6*. (h.4) Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$, đường thẳng (d) cắt Oy tại $B(0; 2)$ và $OB = 2$. Cho $y = 0 \Rightarrow (m^2 + 1)x + 2 = 0$. Mà $m^2 + 1 > 0$ nên $x = \frac{-2}{m^2 + 1}$, đường thẳng (d) cắt Ox tại

$A\left(\frac{-2}{m^2 + 1}; 0\right)$ và $OA = \left|\frac{-2}{m^2 + 1}\right| = \frac{2}{m^2 + 1}$.

Hạ $OH \perp (d)$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{(m^2 + 1)^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{m^4 + 2m^2 + 2}{4}.$$

Do đó: $OH^2 = \frac{4}{m^4 + 2m^2 + 2}$. Mà $m^4 + 2m^2 + 2 \geq 2$, dấu "=" xảy ra khi

$m = 0$ nên $OH^2 \leq 2 \Rightarrow OH \leq \sqrt{2}$, dấu "=" xảy ra khi $m = 0$.

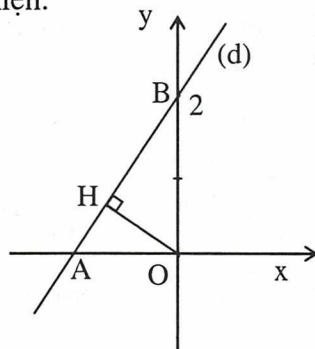
Vậy OH lớn nhất khi $m = 0$.

7*. (h.5) a) Đường thẳng (d) có phương trình $y = kx + b$. Vì $M(0; 2) \in (d)$ nên $2 = b$. Vậy phương trình của đường thẳng (d) là $y = kx + 2$.

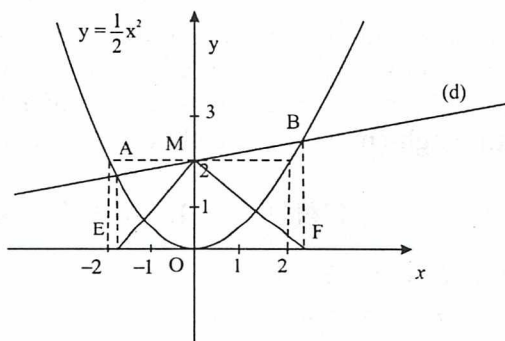
Xét phương trình $\frac{1}{2}x^2 = kx + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2kx - 4 = 0$ (1) có $\Delta' = k^2 + 4 > 0$ với mọi k nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của (1) thì $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của A và B trên Ox thì $OE = |x_1|$; $OF = |x_2|$.



Hình 4



Hình 5

Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 x_2 = -4 \Rightarrow OE \cdot OF = 4$. Mà $OM = 2$ nên $OE \cdot OF = OM^2 \Rightarrow \frac{OE}{OM} = \frac{OM}{OF}$, $\widehat{MOE} = \widehat{MOF} = 90^\circ \Rightarrow \triangle OME \sim \triangle OFM$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{OFM} \Rightarrow \widehat{OME} + \widehat{OMF} = 90^\circ \Rightarrow \triangle MEF$ vuông tại M.

• Những sai lầm thường gặp:

Sai lầm phổ biến ở những học sinh yếu là vẽ sai đồ thị do xác định nhầm điểm. Chẳng hạn điểm $E(-1;2)$ vẽ thành điểm $(2; -1)$, hay điểm $(1;0)$ vẽ thành điểm $(0;1)$. Để khắc phục, học sinh phải được ôn tập phần kiến thức về hệ trục tọa độ trước khi ôn tập về hàm số đồ thị.

Sai lầm khác cũng hay gặp là xác định độ dài dựa theo tọa độ điểm. Ví dụ sau đây cho thấy điều đó:

Ví dụ 1. Cho đường thẳng (d): $y = mx + 2$; ($m \neq 0$) đường thẳng (d) cắt Ox tại A, cắt Oy tại B. Tìm giá trị của m để tam giác OAB vuông cân tại O. (O là gốc tọa độ).

Một học sinh giải như sau:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$, đường thẳng (d) cắt trục Oy tại $B(0;2)$ và $OB = 2$. Cho $y = 0 \Rightarrow mx + 2 = 0 \Rightarrow mx = -2$ mà $m \neq 0$ nên $x = -\frac{2}{m}$. Đường thẳng (d) cắt Ox

tại $A\left(-\frac{2}{m}; 0\right)$ và $OA = \frac{-2}{m}$. Để tam giác OAB vuông cân tại O thì $OA = OB$. Suy ra

$\frac{-2}{m} = 2 \Rightarrow m = -1$. Sai lầm của học sinh ở chỗ, độ dài OA chỉ bằng $\frac{-2}{m}$ khi $\frac{-2}{m} > 0$.

Cách giải này làm thiếu một giá trị của m. Thực chất $OB = |2| = 2$;

$OA = \left| \frac{-2}{m} \right| = \frac{2}{|m|}$. Và với cách hiểu đúng này $OA = OB \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Để tránh sai lầm, học sinh cần được làm nhiều bài tập có tình huống tương tự và được sửa sai cẩn thận.

Một số sai lầm khác dẫn đến vẽ đồ thị không chính xác xuất phát từ việc chọn điểm thuộc đồ thị chưa hợp lý.

Ví dụ 2. Ta biết rằng đồ thị hàm số $y = x + 2$ là đường thẳng đi qua 2 điểm $A(-2; 0)$ và $B(0; 2)$. Tuy nhiên khi vẽ đồ thị học sinh đã cho 2 điểm $E(-1;1)$ và $F(1; 3)$ thuộc đồ thị nên có thể khi vẽ xong, đường thẳng (d) có thể không đi qua một, thậm chí cả hai điểm A và B, dẫn đến kết quả không chính xác. Đây là vấn đề kinh nghiệm và kĩ năng chọn điểm cần được uốn nắn kịp thời.

CHỦ ĐỀ 4. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

1. Kiến thức cần nhớ

- $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.
- $a > b, b > c \Rightarrow a > c$.
- $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.
- $a > b; c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
- $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$.
- $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

$$\bullet a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

$$\bullet a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\bullet a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

• Bất đẳng thức Cô-si: Với $a, b \geq 0$ ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

• Để chứng minh giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là m , ta chứng minh $A \geq m$ và chỉ ra ít nhất một giá trị của biến để $A = m$.

• Để chứng minh giá trị lớn nhất của biểu thức A là m , ta chứng minh $A \leq m$ và chỉ ra ít nhất một giá trị của biến để $A = m$.

2. Bài tập minh họa

Bài 1. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

a) Chứng minh $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$;

b) Chứng minh $\frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải:

a) Ta có $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \forall a, b, c$ nên

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0.$$

Từ đó suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq 3ab + 3ac + 3bc \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$ mà $a+b+c=1$, suy ra $3(ab+ac+bc) \leq 1 \Leftrightarrow ab+ac+bc \leq \frac{1}{3}$ (1).

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

b) Đặt $S = \frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2}$ thì $1 - S = a + b + c - S$.

Do đó $1 - S = a - \frac{a}{1+9b^2} + b - \frac{b}{1+9c^2} + c - \frac{c}{1+9a^2}$.

$$1 - S = \frac{9ab^2}{1+9b^2} + \frac{9bc^2}{1+9c^2} + \frac{9ca^2}{1+9a^2} \text{ mà } (1-3b)^2 \geq 0 \text{ nên}$$

$$1+9b^2 \geq 6b > 0 \Rightarrow \frac{9ab^2}{1+9b^2} \leq \frac{9ab^2}{6b} = \frac{3}{2}ab.$$

Lập luận tương tự suy ra $1 - S \leq \frac{3}{2}(ab + bc + ca)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $1 - S \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - S \leq \frac{1}{2} \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 2. Cho a, b, c là 3 số dương; $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{a(b+c)}{4} \geq \frac{1}{a} \text{ hay } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{ab+ac}{4} \geq \frac{1}{a}.$$

Lập luận tương tự suy ra

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} + \frac{ab+ac+bc}{2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc} = bc+ac+ab$ nên

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2}(ab+ac+bc).$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có: $ab+ac+bc \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$.

Do đó: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 3. Cho $x^2 + y^2 = 16$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{xy}{x+y+4}$.

Lời giải:

Đặt $a = x + y$ ($a \neq -4$) thì $a^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 16 + 2xy \Rightarrow xy = \frac{a^2 - 16}{2}$.

Do đó $M = \frac{a^2 - 16}{2(a+4)} = \frac{a-4}{2}$. Mặt khác vì $(x-y)^2 \geq 0 \forall x, y$

nên $(x-y)^2 + (x+y)^2 \geq (x+y)^2 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$ hay $(x+y)^2 \leq 32$,
 hay $a^2 \leq 32$ suy ra $a \leq 4\sqrt{2}$. Vậy $M \leq 2\sqrt{2} - 2$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 2\sqrt{2}$.

Vậy $\max M = 2\sqrt{2} - 2$ khi $x = y = 2\sqrt{2}$.

Bài 4. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của tích xy .

Lời giải:

Điều kiện $x \neq 0$.

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4}\right) = 2 - xy \text{ suy ra}$$

$$xy = 2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{y}{2}\right)^2. \text{ Mà } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0 \text{ và } \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ nên } xy \leq 2,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = \frac{1}{x} \\ x = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Vậy $\max(xy) = 2$ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Bài 5. Với $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 4x^2 - 3x + \frac{1}{4x} + 2011$.

(Đề thi vào lớp 10 – Hà Nội, năm học 2011 – 2012).

Lời giải:

$$M = (4x^2 - 4x + 1) + \left(x + \frac{1}{4x}\right) + 2010 = (2x - 1)^2 + \left(x + \frac{1}{4x}\right) + 2010.$$

Vì $x > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$x + \frac{1}{4x} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{1}{4x}} = 1, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{1}{4x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Mà $(2x - 1)^2 \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ nên $M \geq 2011$, dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$. Vậy min $M = 2011$ khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}. \quad (1)$$

Lời giải:

Điều kiện xác định: $x^2 + 1 \neq 0 \forall x$.

$$(1) \Rightarrow yx^2 + y = x \Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0. \quad (2)$$

Phương trình (2) ẩn x phải có nghiệm.

• Nếu $y = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x = 0$.

• Nếu $y \neq 0$ thì (2) có nghiệm khi $\Delta = 1 - 4y^2 \geq 0$.

$$\text{Suy ra } 4y^2 \leq 1 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}.$$

$$\bullet y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\bullet y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy max $y = \frac{1}{2}$ khi $x = 1$; min $y = -\frac{1}{2}$ khi $x = -1$.

Bài 7*. a) Cho $a, b, c > 0$, chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$. (1)

b) Cho các số thực x, y thỏa mãn:

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1; 2 \leq y < 3 \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2; \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$.

Từ đó suy ra $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

$$b) 2P = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \right) + \frac{3}{2x}.$$

Áp dụng kết quả câu a) ta có $\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \geq \frac{9}{2x+2y}$ mà $x + y = 3$ nên

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \geq \frac{3}{2}.$$

Lại có $0 < x \leq 1$ nên $\frac{1}{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{2x} \geq \frac{3}{2}$.

Do đó $2P \geq 3 \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{2x} = \frac{1}{y} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x; y) = (1; 2)$.

3. Bài tập tự luyện

1. a) Cho $x > 0, y > 0$, chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

2. Cho $a, b, c > 0, a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5.$$

3. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện:

$-1 \leq a; b; c \leq 2$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$.

4. Cho $x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}$.

5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -x + \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+1} + 2016$.

7. Cho $a, b > 0, a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

8. Cho $a, b > 0, ab + 4 \leq 2b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{a^2 + 2b^2}$.

9. Cho x, y, z thỏa mãn điều kiện: $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = x^{10} + y^6 + z^{2016} - xy - yz - xz$.

10. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\sqrt{xy}(x-y) = x+y$.

Chứng minh rằng $x + y \geq 4$.

Hướng dẫn – Lời giải – Đáp số

1. a) Xét $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} = \frac{x+y}{xy} - \frac{4}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{xy(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$.

Do $x, y > 0, (x-y)^2 \geq 0$ nên $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

b) Do a, b, c là ba cạnh tam giác nên $a + b - c > 0, b + c - a > 0, c + a - b > 0$.

Áp dụng câu a) ta có:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{2b}; \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{4}{2c}; \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{4}{2a}$$
$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b}\right) \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \text{ suy ra điều phải chứng minh.}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\sqrt{4a+1} = \sqrt{1 \cdot (4a+1)} \leq \frac{1+4a+1}{2}. \text{ Suy ra } \sqrt{4a+1} \leq 2a+1.$$

Tương tự $\sqrt{4b+1} \leq 2b+1; \sqrt{4c+1} \leq 2c+1$.

Do đó $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 2(a+b+c) + 3$.

Mà $a+b+c=1$ nên $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4a+1=4b+1=4c+1=1 \Rightarrow a=b=c=0$, trái giả thiết

$a, b, c > 0$. Vậy $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$.

3. Vì $-1 \leq a \leq 2 \Rightarrow (a+1)(a-2) \leq 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq a + 2$.

Tương tự: $b^2 \leq b + 2; c^2 \leq c + 2$. Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6$.

Mà $a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$. Dấu "=" xảy ra khi a, b, c là hoán vị của bộ số $(2; -1; -1)$.

4. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{4}{2+x+y}$. Áp dụng kết quả $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \leq 4$

$$\Rightarrow 0 < x+y \leq 2 \Rightarrow \frac{4}{2+x+y} \geq 1. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x=y=1.$$

Vậy min $M = 1$ khi $x = y = 1$.

5. Điều kiện: $1 \leq x \leq 3$. Ta có $P > 0$; nên $P^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)}$.

• Vì $2\sqrt{(x-1)(3-x)} \geq 0 \Rightarrow P^2 \geq 2 \Rightarrow P \geq \sqrt{2}$; khi $x \in \{1; 3\}$ thì $P = \sqrt{2}$.

Vậy min $P = \sqrt{2}$.

• Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $2\sqrt{(x-1)(3-x)} \leq x-1 + 3-x \Rightarrow P^2 \leq 4$
 $\Rightarrow P \leq \sqrt{4} \Rightarrow P \leq 2$; khi $x-1 = 3-x \Leftrightarrow x=2$ thì $P=2$. Vậy max $P=2$.

6. Điều kiện $x \geq 2$.

$$2A = -2x + 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{x+1} + 4032$$

$$= -(x-2-2\sqrt{x-2}+1) - (x+1-4\sqrt{x+1}+4) + 4036$$

$$= -(\sqrt{x-2}-1)^2 - (\sqrt{x+1}-2)^2 + 4036 \Rightarrow 2A \leq 4036 \Rightarrow A \leq 2018.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=1 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy $\max A = 2018$ khi $x = 3$.

$$7. P = \left(a^2 + \frac{1}{16a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{16b^2}\right) + \frac{15}{16}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$a^2 + \frac{1}{16a^2} \geq \frac{1}{2}; b^2 + \frac{1}{16b^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + \frac{1}{16a^2} + b^2 + \frac{1}{16b^2} \geq 1.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } a^2 = \frac{1}{16a^2}, b^2 = \frac{1}{16b^2} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Lại có } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{a^2 + b^2} \text{ và } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} = \frac{4}{2ab}.$$

$$\text{Suy ra } 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \frac{4}{a^2 + b^2} + \frac{4}{2ab} \geq 4\left(\frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab}\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \frac{16}{(a+b)^2} \geq 16 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 8 \Rightarrow \frac{15}{16}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow P \geq 8,5. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a = b = \frac{1}{2}. \text{ Vậy min } P = 8,5.$$

$$8. P = \frac{ab}{a^2 + 2b^2}. \text{ Có } a^2 + 2b^2 = a^2 + \frac{b^2}{16} + \frac{31b^2}{16}.$$

$$\text{Mà } a^2 + \frac{b^2}{16} \geq \frac{ab}{2} \text{ và } 2b \geq ab + 4 > 0 \Rightarrow 4b^2 \geq (ab + 4)^2 \geq 16ab.$$

$$\text{Suy ra } b^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{31}{16}b^2 \geq \frac{31}{4}ab > 0.$$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{ab}{\frac{ab}{2} + \frac{31ab}{4}} \Rightarrow P \leq \frac{4}{33}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a = \frac{b}{4} \\ ab + 4 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{4}{33} \text{ khi } a = 1, b = 4.$$

$$9. \text{ Xét } x^{10} - x = x(x^9 - 1). \text{ Do } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x(x^9 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x^{10} \leq x.$$

$$\text{Tương tự: } y^6 \leq y, z^{2016} \leq z.$$

$$\text{Do đó } M \leq x + y + z - xy - yz - xz.$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } (x-1)(y-1)(z-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow xyz + x + y + z - xy - yz - xz - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow x + y + z - xy - yz - xz \leq 1 - xyz \leq 1.$$

Suy ra $M \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi (x, y, z) là hoán vị của bộ số $(1; 0; 0)$.

Vậy $\max M = 1$.

10. Vì $\sqrt{xy}(x - y) = x + y$ (1) với $x, y > 0$ nên $x - y > 0 \Rightarrow x > y$.

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow xy(x - y)^2 = (x + y)^2 \Rightarrow xy[(x + y)^2 - 4xy] = (x + y)^2$$

$$\Rightarrow (x + y)^2(xy - 1) = 4x^2y^2 \quad (2). \text{ Do } (x + y)^2 > 0, 4x^2y^2 > 0 \text{ nên } xy > 1.$$

$$(2) \Rightarrow (x + y)^2 = \frac{4x^2y^2}{xy - 1} = \frac{4x^2y^2 - 4 + 4}{xy - 1} = 4(xy + 1) + \frac{4}{xy - 1}$$

$$= 4 \left[(xy - 1) + \frac{1}{(xy - 1)} \right] + 8. \text{ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương,}$$

$$\text{ta có: } (xy - 1) + \frac{1}{(xy - 1)} \geq 2. \text{ Suy ra } (x + y)^2 \geq 16 \Rightarrow x + y \geq 4.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } xy - 1 = \frac{1}{xy - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ y = 2 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

• Những sai lầm thường gặp:

Đây là phần bài tập khó nhất của bộ môn và thường là bài tập khó nhất của đề thi. Đối tượng làm được phần bài tập này thường là học sinh khá và giỏi. Vì vậy sai lầm ở phần này thường khó khắc phục và phụ thuộc nhiều vào năng lực học sinh.

Sai lầm phổ biến nhất là học sinh chưa nắm vững phương pháp tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, dẫn đến kết luận vội vàng, sai lệch.

Ví dụ 1. Cho $M = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của M .

Một học sinh giải như sau:

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

$$\text{Vì } x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0, \text{ vì } 3-x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3-x} \geq 0. \text{ Do đó } M \geq 0.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của M bằng 0. Lỗi giải này xuất phát từ hai nhận định đúng là $\sqrt{x-1} \geq 0, \sqrt{3-x} \geq 0$ nhưng kết luận sai là vì dấu "=" trong hai bất đẳng thức ấy xảy ra không đồng thời nên không chỉ ra được giá trị của biến x để $M = 0$.

Một trong các cách giải đúng là: $M = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \Rightarrow M \geq 0$.

$$M^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)}. \text{ Mà } 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \geq 0 \text{ nên } M^2 \geq 2.$$

$$\text{Suy ra } M \geq \sqrt{2} \quad (\text{do } M \geq 0). \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = 1 \text{ hoặc } x = 3.$$

$$M \text{ có giá trị nhỏ nhất bằng } \sqrt{2} \text{ khi } x = 1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Thông qua ví dụ này học sinh thấy rõ được vai trò của việc tìm giá trị của biến để dấu bằng xảy ra trong các bài toán cực trị. Một sai lầm khác hay gặp là áp dụng các bất đẳng thức hỗ trợ một cách máy móc, thiếu thận trọng, cân nhắc.

Ví dụ 2. Cho $x, y > 0, x + y \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Học sinh thường bắt đầu bằng việc áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, y + \frac{1}{y} \geq 2 \Rightarrow S \geq 4.$$

Tuy nhiên để xảy ra dấu bằng thì $x = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y = 1$. Điều này mâu thuẫn

với giả thiết $x + y \leq 1$. Đến đây có thể học sinh kết luận sai hoặc không giải tiếp được.

Các gợi ý sau sẽ giúp học sinh khắc phục được sai lầm này.

Vì x và y có vai trò như nhau nên khi dấu bằng xảy ra thì $x = y = \frac{1}{2}$.

Do đó x không bằng $\frac{1}{x}$ nhưng $x = \frac{m}{x}$ thì có thể được $\Rightarrow x^2 = m$, thay

$$x = \frac{1}{2} \text{ thì } m = \frac{1}{4}; \text{ tương tự } y = \frac{m}{y} \text{ khi } m = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Khi đó } S = \left(x + \frac{1}{4x}\right) + \left(y + \frac{1}{4y}\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $x + \frac{1}{4x} \geq 1, y + \frac{1}{4y} \geq 1$, dấu "=" xảy ra khi

$$x = \frac{1}{4x}, y = \frac{1}{4y} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Lại có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y$ mà $x + y \leq 1$ nên $\frac{4}{x+y} \geq 4$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 3 \Rightarrow S \geq 5. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\min S = 5$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Nếu được va chạm với nhiều tình huống tương tự, học sinh sẽ vượt qua sai lầm này.

Kinh nghiệm giải bài nếu không được áp dụng hợp lí đôi khi dẫn đến các sai lầm lớn trong giải bài toán cực trị. Ở lớp 8 học sinh được truyền thụ kinh nghiệm: đưa biểu thức đại số về dạng $S = A^2 + m$ do $A^2 \geq 0$ nên $S \geq m$, dấu bằng xảy ra khi $A = 0$ hay $S = -B^2 + n$ suy ra $S \leq n$, dấu bằng xảy ra khi $B = 0$. Nếu áp dụng nguyên vẹn kinh nghiệm ấy có thể dẫn đến những sai lầm lớn ở lớp 9. Ta xét bài toán sau:

Ví dụ 3. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - mx + 2m = 0$ (1).
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$. Học sinh giải bài này như sau:

Vì x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình (1) nên theo hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$$

$$\text{Do đó } S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 4m.$$

$S = (m^2 - 4m + 4) - 4 = (m - 2)^2 - 4$. Do đó $S \geq -4$ dấu bằng xảy ra khi $m = 2$. Kết luận này rõ ràng sai vì $x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ với mọi cặp giá trị x_1, x_2 .

Có sai lầm này là do không bám sát điều kiện có nghiệm của phương trình (1) là $\Delta = m^2 - 8m \geq 0 \Leftrightarrow m(m - 8) \geq 0 \Rightarrow m \leq 0$ hoặc $m \geq 8$.

* Xét $m \leq 0$ thì $m - 2 \leq -2 \Rightarrow (m - 2)^2 \geq 4 \Rightarrow (m - 2)^2 - 4 \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi $m = 0$ suy ra $S \geq 0$.

* Xét $m \geq 8$ suy ra $m - 2 \geq 6 \Rightarrow (m - 2)^2 \geq 36 \Rightarrow (m - 2)^2 - 4 \geq 32$ hay $S \geq 32$, dấu bằng xảy ra khi $m = 8$.

So sánh hai trường hợp kết luận $\min S = 0$ khi $m = 0$.

Những sai lầm trên chỉ là một số thống kê không đầy đủ. Điều quan trọng là trong quá trình ôn tập, cả thầy và trò cùng sáng suốt phát hiện ra và cùng giải quyết tốt bằng các biện pháp khắc phục hợp lí, hiệu quả.

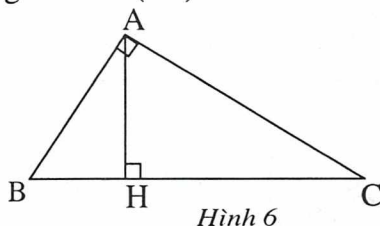
CHỦ ĐỀ 5. MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẪNG

1. Kiến thức cần nhớ

1.1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông và tỉ số lượng giác của góc nhọn

a) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (h.6). Ta có:

- $AB^2 = BH \cdot BC$.
- $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.
- $AH^2 = HB \cdot HC$.
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.



Hình 6

- $\sin B = \frac{AC}{BC}$; $\cos B = \frac{AB}{BC}$; $\tan B = \frac{AC}{AB}$; $\cot B = \frac{AB}{AC}$.
- $AB = BC \cdot \sin C$; $BC = AB \cdot \cos C$; $AB = AC \cdot \tan C$; $AC = AB \cdot \cot C$.

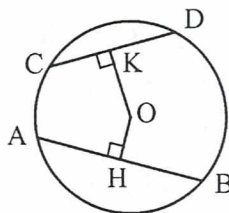
b) α là góc nhọn thì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

c) α, β là hai góc nhọn và $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì $\sin \alpha = \cos \beta$; $\tan \alpha = \cot \beta$.

1.2. Đường kính và dây cung

Trong một đường tròn:

- Đường kính là dây cung lớn nhất.
- Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Đường kính đi qua trung điểm của dây không qua tâm đường tròn thì vuông góc với dây ấy.

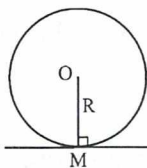


AB và CD là hai dây cung của đường tròn (O) thì:

$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OK.$$

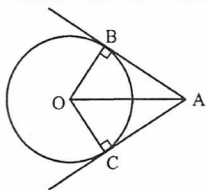
$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OK.$$

1.3. Tiếp tuyến của đường tròn



Đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O; R)

$$\Leftrightarrow a \perp OM \text{ tại } M \in (O; R)$$



AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) thì:

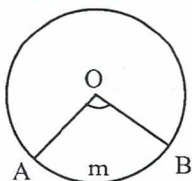
$$\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{BAO} = \widehat{CAO} \\ \widehat{AOB} = \widehat{AOC} \end{cases}$$

1.4. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Hai đường tròn (O; R) và (O'; r) với $R \geq r$:

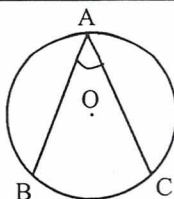
- Cắt nhau $\Leftrightarrow R - r < OO' < R + r$.
- Tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow OO' = R + r$.
- Tiếp xúc trong $\Leftrightarrow OO' = R - r$ với ($R > r$).
- Không cắt nhau $\Leftrightarrow OO' > R + r$ hoặc $OO' < R - r$.

1.5. Công thức tính số đo góc liên quan với đường tròn



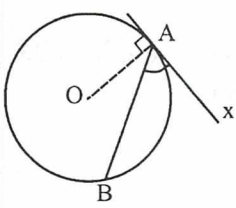
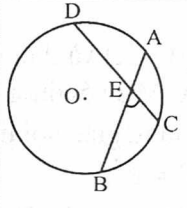
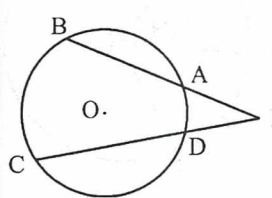
$$\widehat{AOB} = \text{sđ } \widehat{AmB}$$

Góc ở tâm

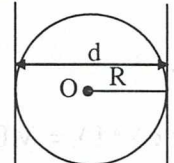
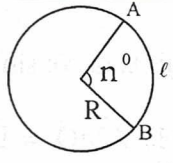
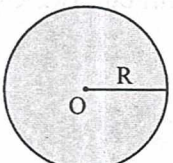
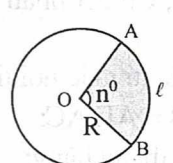


$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC}$$

Góc nội tiếp

 $\widehat{BAx} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AB}$ Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung	 $\widehat{BEC} = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{AD} + \text{sđ} \widehat{BC})$ Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn
 $\widehat{BEC} = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{BC} - \text{sđ} \widehat{AD})$ Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn	

1.6. Công thức tính độ dài đường tròn, độ dài cung tròn, diện tích hình tròn, diện tích hình quạt tròn

 $C = 2\pi R \text{ hay } C = \pi d.$ Độ dài đường tròn	 $\ell = \frac{\pi R n}{180}$ Độ dài cung tròn
 $S = \pi R^2.$ Diện tích hình tròn	 $S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S_{\text{quạt}} = \frac{\ell R}{2}.$ Diện tích hình quạt tròn

1.7. Tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có bốn đỉnh cùng nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).
- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng hai góc đối diện bằng 180° .
- Tứ giác thỏa mãn một trong các điều kiện sau là tứ giác nội tiếp:
 - Tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .
 - Có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới cùng một góc.

2. Bài tập minh họa

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M ở ngoài đường tròn sao cho $OM = 2R$. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Nối OM cắt AB tại H .

- Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp;
- Chứng minh $OH \cdot OM = R^2$;
- Chứng minh $\triangle MAB$ là tam giác đều.

Lời giải (h.7):

a) Theo tính chất tiếp tuyến $OA \perp MA$, $OB \perp MB$. Tứ giác $MAOB$ có

$\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà A và B là hai đỉnh đối diện $\Rightarrow MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ nên $MA = MB$ và MO là phân giác của $\widehat{AMB}$. Do đó $\triangle MAB$ cân tại M suy ra $MO \perp AB$ tại H .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AMO vuông tại A , đường cao AH ta có: $OH \cdot OM = OA^2 = R^2$.

c) Xét $\triangle AMO$ vuông tại A , ta có: $\sin \widehat{AMO} = \frac{AO}{MO} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$.

Do đó: $\widehat{AMO} = 30^\circ$. Mà $\widehat{AMO} = \widehat{BMO} \Rightarrow \widehat{AMB} = 60^\circ$. Lại có $MA = MB$ nên tam giác MAB là tam giác đều.

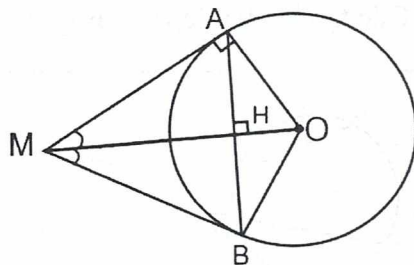
Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính AK . Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , gọi I là trung điểm của BC . Gọi M là giao điểm của AK và EF .

- Chứng minh $BCEF$ là tứ giác nội tiếp;
- Chứng minh $AF \cdot AB = AE \cdot AC$;
- Chứng minh H, I, K thẳng hàng;
- Chứng minh $OM \perp EF$.

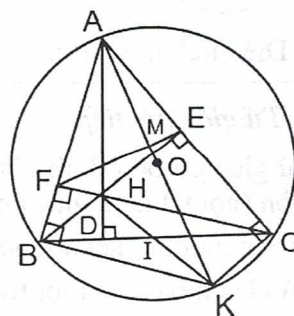
Lời giải (h.8):

a) Theo giả thiết $BE \perp AC$; $CF \perp AB$. Tứ giác $BCEF$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ mà E và F là hai đỉnh kề suy ra $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét hai tam giác AEB và AFC có $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$, $\widehat{BAC}$ chung
 $\Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle AFC$ (g-g)



Hình 7



Hình 8

$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB.$$

c) Vì B và C thuộc đường tròn đường kính AK $\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^\circ$. Do đó BK // CF và CK // BE $\Rightarrow BH // CK, CH // BK \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của BC $\Rightarrow I$ là trung điểm của HK $\Rightarrow H, I, K$ thẳng hàng

d) Tứ giác BCEF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{CEF} = 180^\circ$.

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn $\widehat{AC}$) nên $\widehat{AKC} + \widehat{CEF} = 180^\circ \Rightarrow CEMK$ là tứ giác nội tiếp.

Mà $\widehat{ECK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EMK} = 90^\circ$. Do đó $OM \perp EF$.

Bài 3. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ hai tia tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Điểm M thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Nối OC cắt MA tại E, nối OD cắt MB tại F. Kẻ MH $\perp$ AB tại H, BC cắt MH tại I.

- Chứng minh OMCA là tứ giác nội tiếp;
- Chứng minh $CD = AC + BD$;
- Chứng minh $AC.BD = R^2$;
- Chứng minh $MI = IH$;
- Tìm vị trí của M để diện tích OEMF đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải (h.9):

a) Theo tính chất tiếp tuyến: $OA \perp AC, OM \perp MC$.

Tứ giác OACM có: $\widehat{OAC} + \widehat{OMC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Mà A và M là hai đỉnh đối diện.

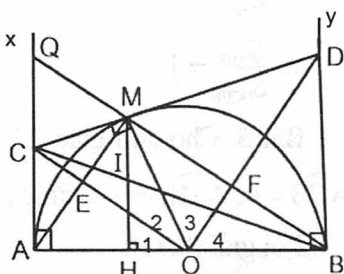
Do đó: OMCA là tứ giác nội tiếp.

b) Vì CA, CM là hai tiếp tuyến của đường tròn (O; R) $\Rightarrow CM = CA$. Tương tự $DM = DB \Rightarrow AC + BD = CM + MD = CD$.

c) Vì CA, CM là hai tiếp tuyến của đường tròn (O; R) nên OC là phân giác của $\widehat{MOA} \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$; tương tự ta có: $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$. Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ$

nên $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$. Do đó ΔOCD vuông tại O, lại có $OM \perp CD$ (tính chất tiếp tuyến), suy ra: $MC.MD = MO^2 = R^2$. Mà $AC = CM, BD = MD$ nên $AC.BD = R^2$.

d) Nối BM cắt AC tại Q. Vì $CA = CM, OA = OM = R$ nên OC là trung trực của AM $\Rightarrow OE \perp AM$ và $EA = EM$. Mặt khác $OA = OB = R$ nên OE là đường trung bình của $\Delta AMB \Rightarrow OE \parallel BM \Rightarrow OC \parallel BQ$. Mà $OA = OB$ nên $CA = CQ$. Ta có: $MH \parallel AQ$ (cùng $\perp AB$). Theo hệ quả định lý Ta lét, ta có:



Hình 9

$$\frac{MI}{CQ} = \frac{BI}{BC}, \frac{IH}{AC} = \frac{BI}{BC} \Rightarrow \frac{MI}{CQ} = \frac{IH}{AC} \text{ mà } CQ = AC \Rightarrow MI = IH.$$

e) Vì $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, $OA = OM$, OE chung $\Rightarrow \triangle OEA = \triangle OEM$ (c-g-c), tương tự $\triangle OFB = \triangle OFM \Rightarrow S_{OEM} = S_{OEA}$, $S_{OFM} = S_{OFB} \Rightarrow S_{OEMF} = \frac{1}{2} S_{MAB} = \frac{1}{4} MH \cdot AB$.

$$\text{Mà } MH \leq MO \Rightarrow S_{OEMF} \leq \frac{1}{4} OM \cdot AB = \frac{1}{4} R \cdot 2R \text{ hay } S_{OEMF} \leq \frac{R^2}{2}.$$

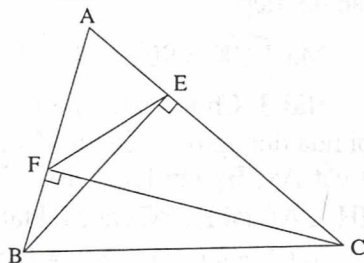
Dấu "=" xảy ra khi H trùng O . Khi đó $OM \perp AB$. Vậy S_{OEMF} lớn nhất khi $OM \perp AB$.

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC có góc $\widehat{A} = 45^\circ$.

Kẻ hai đường cao BE và CF của tam giác ABC .

a) Chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC$;

b) Tính tỉ số $\frac{S_{AEF}}{S_{BCEF}}$.



Hình 10

a) Theo giả thiết $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$, $\widehat{A}$ chung, nên $\triangle AEB \sim \triangle AFC$ (g-g) suy ra

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}; \text{ lại có } \widehat{A} \text{ chung. Suy ra } \triangle AEF \sim \triangle ABC \text{ (c-g-c).}$$

$$\text{b) } \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{AEF} = S_{BCEF}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{BCEF}} = 1.$$

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$, đường trung tuyến AM . Biết $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin \beta$.

Lời giải (h.11):

Hạ $AH \perp BC$ ($H \in BC$).

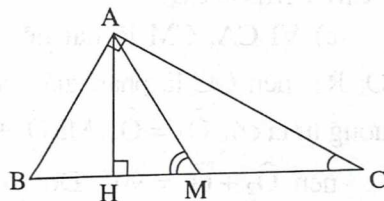
Vì $AB < AC \Rightarrow BH < HC$.

Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$$= 1 + 2 \frac{AB \cdot AC}{BC^2} = 1 + 2 \cdot \frac{AH \cdot BC}{BC^2} = 1 + \frac{2 \cdot AH}{BC}.$$

Mà $BC = 2AM$

$$\text{nên } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \frac{2AH}{2AM} = 1 + \frac{AH}{AM} = 1 + \sin \beta.$$



Hình 11

Bài 6. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A và B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B và C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại F.

a) Chứng minh FCDE là tứ giác nội tiếp;

b) Chứng minh $DA.DE = DB.DC$;

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE. Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$ và IC là tiếp tuyến của đường tròn (O);

d) Cho biết $DF = R$, chứng minh $\tan \widehat{AFB} = 2$.

(Đề thi vào lớp 10 – Hà Nội – Năm học 2010 – 2011)

Lời giải (h.12):

a) Có $\widehat{ACB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{FCD} = \widehat{FED} = 90^\circ \Rightarrow FCDE$ nội tiếp đường tròn đường kính DF.

b) Có $\widehat{ACB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$, $\widehat{ADC} = \widehat{BDE}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BDE \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{DE}$$

$$\Rightarrow AD.DE = BD.DC.$$

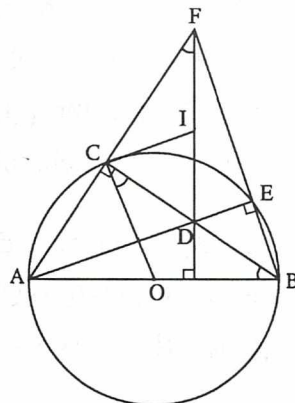
c) Vì $AE \perp FB$; $BC \perp AF$ nên D là trực tâm của $\triangle ABF$.

Suy ra $FD \perp AB \Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{CAB}$), mà $OB = OC = R$ nên $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{OCB}$.

Tam giác FCD vuông tại C, I là trung điểm của FD nên $IC = ID = IF \Rightarrow$ tam giác ICF cân tại I $\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{ICF} \Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{OCB}$. Mà $\widehat{ICF} + \widehat{ICD} = 90^\circ$ nên $\widehat{ICD} + \widehat{OCB} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp IC$ tại C. Do đó IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Theo chứng minh trên $\widehat{CBA} = \widehat{CFD}$ và $\widehat{FCD} = \widehat{ACB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle CAB \sim \triangle CDF \Rightarrow \frac{CB}{CF} = \frac{AB}{DF} \Rightarrow \tan \widehat{AFB} = \frac{2R}{R} = 2.$$



Hình 12

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB, điểm H thuộc đoạn OB, dây $MN \perp AB$ tại H. Hạ $HE \perp MA$, $HF \perp MB$. Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt AB tại K, đường thẳng EF cắt AB tại I.

a) Chứng minh tứ giác HEMF là hình chữ nhật;

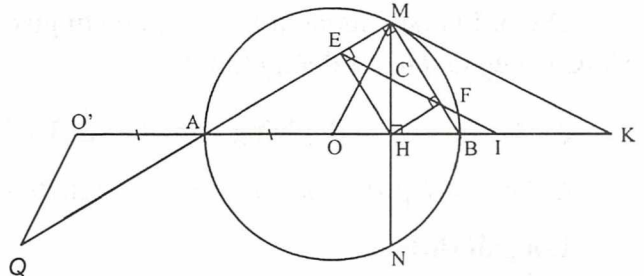
b) Chứng minh AEFB là tứ giác nội tiếp;

c) Chứng minh I là trung điểm của HK;

d) Lấy Q đối xứng với M qua A. Chứng minh, khi H chuyển động trên đoạn OB thì Q thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải (h.13):

a) Có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn),
 $\widehat{HEM} = \widehat{HFM} = 90^\circ$ (giả thiết)
 nên HEMF là hình chữ nhật.



Hình 13

b) Gọi C là giao điểm của MH và EF. Theo tính chất hình chữ nhật có $CM = CF$, nên $\widehat{CMF} = \widehat{CFM}$ mà $\widehat{MAB} = \widehat{CMF}$ (cùng phụ $\widehat{MBA}$) nên $\widehat{MAB} = \widehat{CFM} \Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{EFB} = 180^\circ \Rightarrow$ AEFB là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có $OA = OM = R$ nên tam giác OAM cân tại O $\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OMA}$. Mà $\widehat{OAM} = \widehat{MFE}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{MFE}$. Mà $\widehat{MFE} + \widehat{MEF} = 90^\circ$ nên $\widehat{OMA} + \widehat{MEF} = 90^\circ \Rightarrow OM \perp EF$. Lại có $OM \perp MK$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow EF \parallel MK$. Xét $\triangle HMK$ có $CH = CM$ (tính chất hình chữ nhật); $CI \parallel MK$ (chứng minh trên). Suy ra $HI = IK$.

d) Lấy O' đối xứng với O qua A. Vì O và A cố định nên O' cố định. Do $AQ = AM$, $AO = AO'$, $\widehat{O'AQ} = \widehat{OAM}$ (đối đỉnh) nên $\triangle AO'Q = \triangle AOM$ (c-g-c) $\Rightarrow O'Q = OM = R$ không đổi. Vậy Q thuộc đường tròn $(O'; R)$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC < AB$, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm C, bán kính CA cắt đường thẳng AH tại D. Đường thẳng qua H, song song với AB cắt cung nhỏ AD của đường tròn (C) tại E. Tia BE cắt đường tròn (C) tại F ($F \neq E$); cắt AD tại I. Gọi K là trung điểm của AF.

a) Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (C);

b) Chứng minh tứ giác BACD nội tiếp đường tròn;

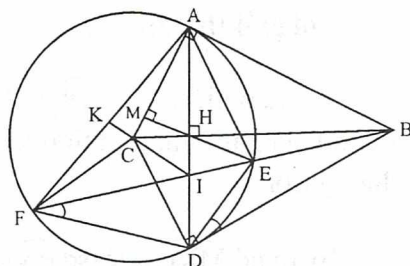
c) Chứng minh $BE \cdot BF = BH \cdot BC$;

d) Chứng minh ba điểm C, I, K thẳng hàng.

Lời giải (h.14):

a) Có $CA = CD = R$ nên $\triangle CAD$ cân tại C .
Mà $CH \perp AD$ nên $\widehat{HCA} = \widehat{HCD}$, lại có CB chung $\Rightarrow \triangle CAB = \triangle CDB$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{CAB} = 90^\circ$. Do đó $CD \perp BD$
nên BD là tiếp tuyến của đường tròn (C) .



Hình 14

b) Ta có $\widehat{CAB} + \widehat{CDB} = 180^\circ \Rightarrow$ BACD là tứ giác nội tiếp.

c) Vì $\widehat{EFD} = \widehat{EDB}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số $\widehat{DE}$).

Lại có $\widehat{FBD}$ chung nên $\triangle BDE \sim \triangle BFD$ (g-g) $\Rightarrow \frac{BD}{BF} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow BD^2 = BE.BF$ (1)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông DCB ta có: $BD^2 = BH.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE.BF = BH.BC$.

d) Gọi M là giao điểm của HE và CA $\Rightarrow$ HM $\perp$ CA. Do đó $\widehat{CAD} = \widehat{CHM}$
(cùng phụ với $\widehat{AHM}$) mà $\widehat{CHM} = \widehat{EHB}$ (đối đỉnh); nên $\widehat{CAD} = \widehat{EHB}$ (3)

$$\begin{aligned} &\text{Do } BE.BF = BH.BC \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BF}, \text{ lại có } \widehat{CBF} \text{ chung} \Rightarrow \triangle BHE \sim \triangle BFC \text{ (c-g-c)} \\ &\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{BFC}. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{CAI} = \widehat{CFI}$ (5). Lại có $CA = CF = R$ nên $\triangle CAF$ cân tại C
 $\Rightarrow \widehat{CAF} = \widehat{CFA}$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{IAF} = \widehat{IFA} \Rightarrow \Delta IAF$ cân tại I $\Rightarrow IA = IF$.

Mà $CA = CF = R$ nên C và I thuộc trung trục của $AF \Rightarrow I, C, K$ thẳng hàng.

Bài 9. Cho đường tròn $(O; R)$, dây AB cố định không qua O . Điểm C thuộc cung lớn AB . Gọi M là điểm chính giữa của cung AC không chứa B ; N là điểm chính giữa của cung nhỏ AB . Nối MN cắt AC tại H ; nối CN cắt MB tại K .

- a) Chứng minh MCKH là tứ giác nội tiếp;
b) Chứng minh ΔMCK cân;
c) Chứng minh $HK \parallel AB$;
d) Cho AB cố định, tìm vị trí của C để diện tích tứ giác AKBN lớn nhất.

Lời giải (h.15):

a) Theo giả thiết, $\widehat{AN} = \widehat{NB} \Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HCK}$. Mà M và C là hai đỉnh liên tiếp nên tứ giác MCKH nội tiếp đường tròn.

b) Ta có $\widehat{MKC} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{BN} + \text{sđ } \widehat{MC})$. Mà $\widehat{BN} = \widehat{AN}$; $\widehat{MC} = \widehat{MA}$ nên $\widehat{MKC} = \widehat{MCK} \Rightarrow \Delta MKC$ cân tại M.

c) Vì tứ giác MCKH nội tiếp nên $\widehat{CHK} = \widehat{CMK}$ (cùng chắn $\widehat{CK}$). Mà $\widehat{CMK} = \widehat{CAB}$ (cùng chắn $\widehat{BC}$), do đó $\widehat{CHK} = \widehat{CAB} \Rightarrow HK \parallel AB$.

d) Gọi I là giao điểm của AB và CN, hạ BE và AF vuông góc với CN. Ta có $\widehat{MCN} = \widehat{MBN}$ (cùng chắn $\widehat{MN}$), $\widehat{MKC} = \widehat{NKB}$ (đối đỉnh). Mà $\widehat{MCK} = \widehat{MKC}$ (cmt) nên $\widehat{NKB} = \widehat{NBK} \Rightarrow \Delta NBK$ cân tại N. Do đó $NK = NB$ không đổi.

$$\text{Ta có } S_{AKBN} = \frac{1}{2} AF \cdot NK + \frac{1}{2} BE \cdot NK = \frac{1}{2} NK(AF + BE).$$

Như vậy S_{AKBN} lớn nhất khi $AF + BE$ lớn nhất.

Mà $AF \leq AI$, $BE \leq BI$ nên $AF + BE \leq AB$.

Dấu "=" xảy ra khi $E \equiv F \equiv I$

$$\Leftrightarrow CN \perp AB \Leftrightarrow \widehat{CA} = \widehat{CB}.$$

$$\text{Vậy } S_{AKBN} \max \Leftrightarrow \widehat{CA} = \widehat{CB}.$$

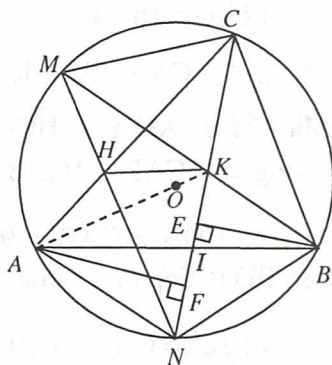
Bài 10. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Điểm E thuộc OC, nối AE cắt đường tròn (O) tại M.

a) Chứng minh OBME là tứ giác nội tiếp;

b) Chứng minh $AE \cdot AM = AC^2$;

c) Xác định vị trí của E để $MA = 2MB$;

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME. Chứng minh rằng khi E di chuyển trên OC thì I thuộc một đường thẳng cố định.



Hình 15

Lời giải (h.16):

a) Có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{COB} = 90^\circ$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{EOB} + \widehat{EMB} = 180^\circ \Rightarrow OBME$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét hai tam giác AOE và AMB có $\hat{A}$ chung; $\widehat{AOE} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ nên $\triangle AOE \sim \triangle AMB$ (g-g)
 $\Rightarrow \frac{AO}{AM} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AM \cdot AE = AO \cdot AB = 2R^2$. Theo định lí Py-ta-go $AC^2 = AO^2 + OC^2 = 2R^2 \Rightarrow AM \cdot AE = AC^2$.

c) Ta có $\tan \widehat{MAB} = \frac{MB}{MA}$; $MA = 2MB \Leftrightarrow \tan \widehat{MAB} = \frac{1}{2}$.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông OAE , ta có:

$$OE = OA \cdot \tan \widehat{MAB} = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2} \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } OC.$$

d) Trong đường tròn (O) ta có $\widehat{CMA} = \frac{1}{2} \widehat{COA} = 45^\circ$. Trong đường tròn (I) ta có $\widehat{CME} = \frac{1}{2} \widehat{CIE} \Rightarrow \widehat{CIE} = 90^\circ$. Lại có $IC = IE$ nên $\triangle ICE$ vuông cân tại I . Suy ra $\widehat{ECI} = 45^\circ$.

Ta có $OB = OC = R$ và $OC \perp OB$ nên $\triangle OBC$ vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCB} = 45^\circ$.

Do đó $\widehat{OCB} = \widehat{OCI} = 45^\circ \Rightarrow I \in BC$.

Vậy I luôn thuộc đường thẳng BC cố định.

3. Bài tập tự luyện

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Kẻ hai đường cao BE , CF . Lấy M thuộc BE , N thuộc CF sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$.

a) Chứng minh $AE \cdot AC = AF \cdot AB$;

b) Chứng minh tam giác AMN cân.

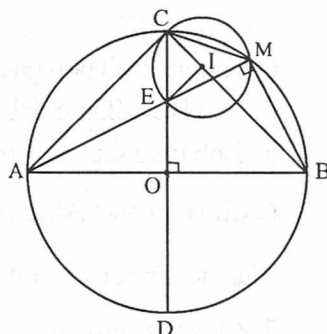
2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , đường phân giác trong AD .

Biết rằng $\frac{DB}{DC} = \frac{2}{3}$, tính $\frac{HB}{HC}$.

3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy M thuộc tia đối của tia DC , lấy N thuộc DC sao cho $\widehat{MAN} = 90^\circ$.

a) Chứng minh giá trị của tổng $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ không phụ thuộc vị trí của M và N ;

b) Tìm vị trí của M và N để diện tích tam giác AMN nhỏ nhất.



Hình 16

4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi AD là phân giác trong góc A của tam giác AHC.

a) Chứng minh tam giác BAD là tam giác cân;

b) Cho $BC = 25\text{cm}$, $HD = 6\text{cm}$, tính AB.

5. Tính tổng sau: $S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$.

6. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $\tan C = \frac{3}{4}$, $BC = 10\text{cm}$.

Tính độ dài các cạnh AB và AC.

7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $\widehat{A} = 60^\circ$, điểm $M \in BC$. Hạ $ME \perp AB$, $MF \perp AC$. Gọi I là trung điểm của AM.

a) Tính góc EIF;

b) Tính EF nếu $AM = a$ ($a > 0$);

c) Tìm vị trí của M để độ dài đoạn EF nhỏ nhất.

8. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} < 90^\circ$. Chứng minh $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Áp dụng: Tính S_{ABC} nếu $\widehat{A} = 30^\circ$, $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$.

9. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$, $BC = 10\text{cm}$, tính AB và AC.

10*. Cho $\triangle ABC$, chứng minh $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

11. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn tại A. Lấy $M \in Ax$, kẻ tiếp tuyến MC tới đường tròn, C là tiếp điểm. Gọi H là trực tâm của $\triangle MAC$.

a) Chứng minh MCBO là hình thang;

b) Cho $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tính theo R độ dài đoạn thẳng MA;

c) Chứng minh khi M chuyển động trên Ax thì H thuộc một đường tròn cố định.

12. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây $CD = R$ ($C \in \widehat{AD}$). Nối AC và BD, chúng cắt nhau tại M.

a) Chứng minh $\triangle MCD \sim \triangle MBA$;

b) Cho $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính theo R độ dài cung nhỏ AC và diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC;

c) Khi $CD \parallel AB$, hãy tính theo R diện tích tam giác MCD.

13. Cho đường thẳng d và đường tròn (O; R) không có điểm chung. Hạ $OH \perp d$ tại H. Điểm M thuộc d. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O; R). Nối AB cắt OH, OM lần lượt tại K và I.

a) Chứng minh năm điểm M, H, A, O, B thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh $OK \cdot OH = OI \cdot OM$;

c) Chứng minh khi M di chuyển trên d thì đường thẳng AB đi qua một điểm cố định;

d) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

14. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (O) đường kính AH, cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, nối AI cắt MN tại K.

a) Chứng minh M, O, N thẳng hàng;

b) Chứng minh $AK \cdot AI = \frac{1}{2} AH^2$;

c) Cho $S_{MBH} = 4\text{cm}^2$; $S_{NCH} = 9\text{cm}^2$, tính S_{ABC} ;

d) Chứng minh $BM \cdot BA + CN \cdot CA \geq 2AH^2$.

15. Cho đường tròn (O; R) đường kính BC. Gọi A là điểm chính giữa của cung BC. Điểm M thuộc đoạn BC. Kẻ $ME \perp AB$ ($E \in AB$), $MF \perp AC$ ($F \in AC$), $MN \perp EF$ ($N \in EF$).

a) Chứng minh năm điểm A, E, O, M, F thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh $BE \cdot BA = BO \cdot BM$;

c) Tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại A cắt MF tại K. Chứng minh $BE = KF$;

d) Khi M di chuyển trên BC, chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

16. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Kẻ đường cao AD của $\triangle ABC$ và đường kính AK của (O; R). Hạ BE và CF cùng vuông góc với AK.

a) Chứng minh ABDE và ACFD là các tứ giác nội tiếp;

b) Chứng minh $DF \parallel BK$;

c) Cho $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $R = 4\text{cm}$. Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OC, OK và cung nhỏ CK;

d) Cho BC cố định, A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

17. Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AO. Về phía ngoài tam giác vẽ hai nửa đường tròn: nửa đường tròn tâm I, đường kính AB và nửa đường tròn tâm K đường kính AC. Một đường thẳng d qua A cắt các nửa đường tròn tâm I và tâm K lần lượt tại M và N.

a) Tứ giác MNCB là hình gì?

b) Chứng minh $AM \cdot AN = MB \cdot NC$;

c) Chứng minh tam giác OMN cân;

d) Xác định vị trí của đường thẳng d để S_{BMNC} lớn nhất.

18. Cho đường tròn $(O; R)$, dây $AB = R\sqrt{2}$ cố định. Điểm M thuộc cung lớn AB sao cho ΔMAB có ba góc nhọn. Các đường cao AE, BF của tam giác MAB cắt nhau tại H , cắt đường tròn $(O; R)$ lần lượt tại P và Q . Đường thẳng PB cắt QA tại S . Nối SH cắt PQ tại I .

- Chứng minh tam giác OAB vuông cân;
- Chứng minh P, O, Q là ba điểm thẳng hàng;
- Chứng minh $SH = 2R$;

d) Cho M chuyển động trên cung lớn AB sao cho ΔMAB có ba góc nhọn. Chứng minh rằng I luôn thuộc một đường tròn cố định.

19. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O) . Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) , M và N là các tiếp điểm. Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$), d không đi qua O .

- Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp;
- Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4\text{cm}$, $AN = 6\text{cm}$;

c) Gọi I là trung điểm của BC . Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Chứng minh $MT \parallel AC$;

d) Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở K . Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.

(Đề thi vào lớp 10 - Thành phố Hà Nội, năm học 2013 – 2014).

20. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Bán kính OC vuông góc với AB . Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C); BM cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AB .

- Chứng minh $CBKH$ là tứ giác nội tiếp;

- Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$;

c) Trên đoạn BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM vuông cân tại C ;

d) Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A . Cho P là một điểm nằm trên d sao cho P nằm cùng phía với C đối với đường thẳng AB và $\frac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của HK .

(Đề thi vào lớp 10 – Thành phố Hà Nội, năm học 2012 – 2013).

21. Cho nửa đường tròn (O) , đường kính $AB = 2R$. Vẽ dây $AD = R$, dây $BC = \sqrt{2}R$. Kẻ AM và BN vuông góc với đường thẳng CD lần lượt tại M và N .

- So sánh độ dài các đoạn MD và NC ;
- Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông cân;
- Tính độ dài đoạn MN theo R ;
- Chứng minh $S_{AMNB} = S_{ADB} + S_{ACB}$.

Hướng dẫn – Lời giải – Đáp số

1. (h.17) a) Có $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$, $\widehat{A}$ chung

$\Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle AFC$ (g-g).

Suy ra $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông AMC và ANB ta có:

$AE \cdot AC = AM^2$; $AF \cdot AB = AN^2$.

Do đó $AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN$

$\Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A.

2. (h.18) Theo tính chất đường phân giác

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{2}{3}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có $BH \cdot BC = AB^2$, $CH \cdot BC = AC^2$.

Suy ra $\frac{BH \cdot BC}{CH \cdot BC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{4}{9}$.

3. (h.19) a) $\triangle AMN$ vuông tại A, có

$AD \perp MN$ nên $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$ không đổi.

b) Gọi I là trung điểm của MN ta có $AI = \frac{1}{2} MN$.

$S_{AMN} = \frac{1}{2} AD \cdot MN = AD \cdot AI$. Mà AD không

đổi nên S_{AMN} bé nhất khi AI bé nhất.

Ta có: $AI \geq AD$, AI bé nhất bằng AD khi $I \equiv D \Leftrightarrow \triangle AMN$ vuông cân tại A
 $\Leftrightarrow DM = DN = DA$.

4. (h.20). a) Có $\widehat{BAD} = 90^\circ - \widehat{A}_1$;

$$\widehat{BDA} = 90^\circ - \widehat{A}_2.$$

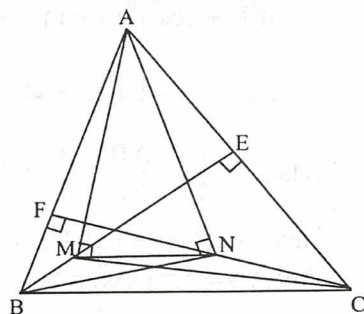
Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BDA} \Rightarrow \triangle BAD$ cân tại B.

b) Đặt $AB = x$ ($6 < x < 25$) thì $BD = x$, suy ra $BH = x - 6$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có:

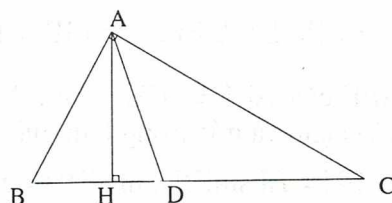
$$BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow (x - 6) \cdot 25 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 = 0.$$

Giải phương trình này được $x_1 = 10$, $x_2 = 15$ thỏa mãn điều kiện.

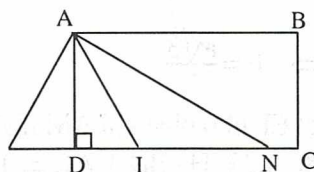
Vậy $AB = 10\text{cm}$ hoặc $AB = 15\text{cm}$.



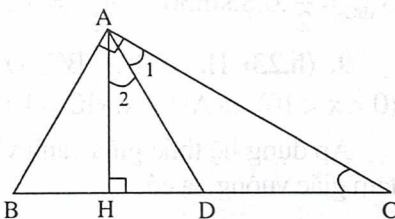
Hình 17



Hình 18



Hình 19



Hình 20

$$\begin{aligned}
 5. S &= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ \\
 &= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \frac{1}{2} \\
 &= 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{1}{2} = 44,5.
 \end{aligned}$$

$$6. \tan C = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = x \Rightarrow AB = 3x, AC = 4x (x > 0).$$

Theo định lí Py-ta-go ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 100 = 9x^2 + 16x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$.
 Vậy $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$.

7. (h.21) a) Vì $\widehat{AEM} = \widehat{AFM} = 90^\circ$ nên A, E, M, F thuộc đường tròn tâm I đường kính AM
 $\Rightarrow \widehat{EIF} = 2\widehat{EAF} = 120^\circ$.

b) Hạ $IH \perp EF$, ta có $IE = IF = \frac{1}{2} AM$ nên

$\triangle IEF$ cân tại I $\Rightarrow HE = HF$. Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ta có

$$EH = EI \cdot \sin \widehat{EIH}, \text{ mà } \widehat{EIH} = \widehat{FIH} = 60^\circ.$$

$$\text{Nên } EH = \frac{1}{2} AM \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c) EF nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM \perp BC$.

8. (h.22) Hạ $BH \perp AC \Rightarrow BH = AB \cdot \sin A$.

$$\bullet S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

• Khi $\widehat{A} = 30^\circ$, $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ thì

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12 (\text{cm}^2).$$

9. (h.23) Hạ $AH \perp BC$. Đặt $BH = x$

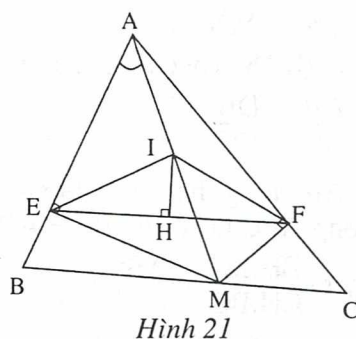
$$(0 < x < 10) \Rightarrow AH = x, HC = 10 - x.$$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

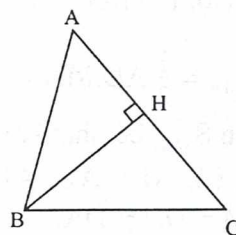
$$AH = HC \cdot \tan 30^\circ \Leftrightarrow x = (10 - x) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} + 1)x = 10, \text{ suy ra}$$

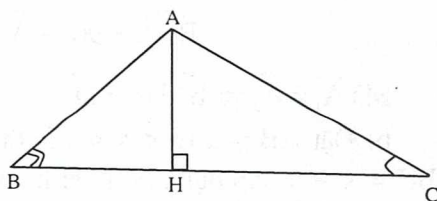
$$x = \frac{10}{\sqrt{3} + 1} = 5(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow AH = 5(\sqrt{3} - 1).$$



Hình 21



Hình 22



Hình 23

$$\text{Mà } AB = \frac{AH}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \text{ (cm)},$$

$$AC = \frac{AH}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = 10(\sqrt{3} - 1) \text{ (cm)}.$$

10*. (h.24). Đặt $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$ ($a, b, c > 0$)

Kẻ phân giác AD . Hạ BE , CF vuông góc với AD .

$$\text{Có } \sin \frac{A}{2} = \frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC} = \frac{BE + CF}{AB + AC}.$$

$$\text{Mà } BE \leq BD, CF \leq CD \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}.$$

$$\text{Vậy } \sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b + c} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \sin \frac{B}{2} \leq \frac{b}{a + c} \quad (2), \sin \frac{C}{2} \leq \frac{c}{a + b} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}; b + c \geq 2\sqrt{bc}; c + a \geq 2\sqrt{ac} \text{ và } a, b, c > 0.$$

$$\text{Do đó } (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc. \text{ Thay vào } (*) \text{ suy ra } \frac{abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \leq \frac{1}{8}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

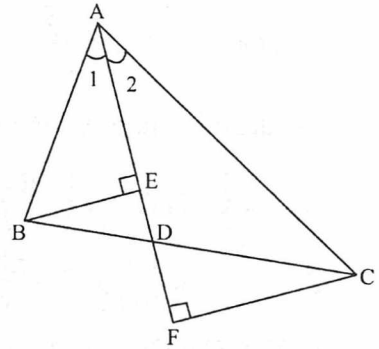
11. (h.25) a) Gọi I là giao điểm của OM và AC . Theo tính chất tiếp tuyến $MA = MC$ và MO là phân giác $\widehat{AMC} \Rightarrow MI \perp AC$.

Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $MO \parallel BC$. Do đó $MCBO$ là hình thang.

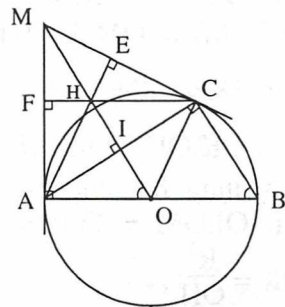
b) Có $\widehat{MOA} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ (đồng vị). Mà $OA \perp AM$ nên $AM = OA \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3}$.

c) Vì H là trực tâm của $\triangle MAC$ nên $AH \perp MC$, $CH \perp MA$. Mà $OA \perp AM$, $OC \perp MC$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow AH \parallel OC$ và $CH \parallel OA$. Suy ra $OAHC$ là hình bình hành, do đó $AH = OC = R$ không đổi, A cố định.

Vậy H thuộc đường tròn $(A; R)$.



Hình 24

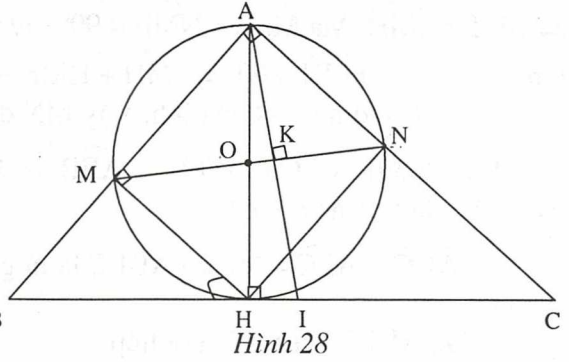


Hình 25

Vậy S_{IOK} lớn nhất khi $HM = HO$.

14. (h.28) a) Do $\widehat{MAN} = 90^\circ \Rightarrow MN$ là đường kính của đường tròn (O) nên M, O, N thẳng hàng.

b) Theo tính chất tam giác vuông $IA = IC \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{ICA}$. Mà $\widehat{ICA} = \widehat{HAB}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$). Có $OA = OM = R$ nên $\widehat{OAM} = \widehat{OMA} \Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{OMA}$. Suy ra $\widehat{IAC} + \widehat{ONA} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp MN$.



$$\text{Do đó } \triangle AOK \sim \triangle AIH \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AO}{AI} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow AK \cdot AI = AO \cdot AH = 2R^2 = \frac{1}{2} AH^2.$$

c) Có $\widehat{AMH} = 90^\circ$ nên $MH \parallel AC \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{NCH}$ (đồng vị). Lại có $\widehat{ANH} = 90^\circ$, do đó $\triangle MBH \sim \triangle NHC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{S_{MBH}}{S_{NHC}} = \left(\frac{BH}{HC}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Suy ra } \frac{BH}{BH + HC} = \frac{2}{3 + 2} \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{2}{5}.$$

$$\triangle BMH \sim \triangle BAC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{S_{BMH}}{S_{BAC}} = \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{25}{4} S_{BMH} = 25 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

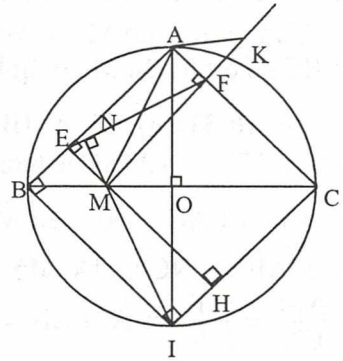
d) Có $BM \cdot BA = BH^2$, $CN \cdot CA = CH^2$, mà $BH^2 + CH^2 \geq 2BH \cdot CH = 2AH^2 \Rightarrow BM \cdot BA + CN \cdot CA \geq 2AH^2$.

15. (h.29) a) Vì $\widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow OA \perp BC$.

Do đó $\widehat{AEM} = \widehat{AOM} = \widehat{AFM} = 90^\circ$ nên năm điểm A, E, M, O, F cùng thuộc đường tròn đường kính AM.

$$\begin{aligned} \text{b) } \triangle BEM \sim \triangle BOA \text{ (g-g)} &\Rightarrow \frac{BE}{BO} = \frac{BM}{BA} \\ &\Rightarrow BE \cdot BA = BM \cdot BO. \end{aligned}$$

c) $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = 45^\circ$. Mà AK



Hình 29

là tiếp tuyến tại A nên $\widehat{KAC} = \widehat{ABC} = 45^\circ$. Lại có $\widehat{AFK} = 90^\circ$ nên $\triangle FAK$ vuông cân tại F $\Rightarrow AF = KF$. Tương tự $\triangle EBM$ vuông cân tại E $\Rightarrow BE = ME$.

Mà $ME = AF$ (cặp cạnh đối của hình chữ nhật MEAF) $\Rightarrow BE = KF$.

d) Vẽ đường kính AI $\Rightarrow AI \perp BC$, có $OB = OC = OA = OI = R \Rightarrow ABIC$ là hình vuông. Kéo dài EM cắt IC tại H. Có $\widehat{ABI} = \widehat{BIC} = 90^\circ$, $\widehat{MEB} = 90^\circ$ nên BEHI là hình chữ nhật $\Rightarrow IH = BE$. Mà $BE = ME$ nên $ME = IH$. Do CB là phân giác của $\widehat{ACI}$ nên $MH = MF$, có $\widehat{MHI} = \widehat{EMF} = 90^\circ$ suy ra $\triangle EMF = \triangle IHM$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{IMH}$. Mà $\widehat{MFE} + \widehat{NMF} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{IMH} + \widehat{NMF} = 90^\circ$. Lại có CHMF là hình vuông nên $\widehat{FMH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IMH} + \widehat{HMF} + \widehat{FMN} = 180^\circ \Rightarrow N, M, I$ thẳng hàng.

A và O cố định $\Rightarrow I$ cố định. Vậy MN đi qua điểm I cố định.

16. (h.30) a) Có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$
 $\Rightarrow ABDE$ là tứ giác nội tiếp.

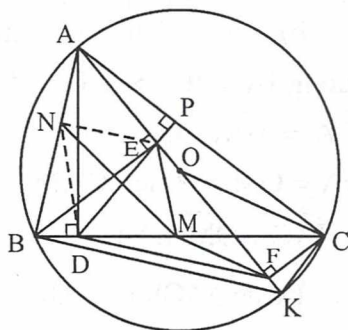
Có $\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90^\circ \Rightarrow ADFC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do ADFC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{ACD}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{AKB}$ (cùng chắn $\widehat{AB}$) $\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{AKB} \Rightarrow DF \parallel BK$.

c) $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{COK} = 60^\circ$.

$$S_{\text{quạt}} = \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 16 = \frac{8\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



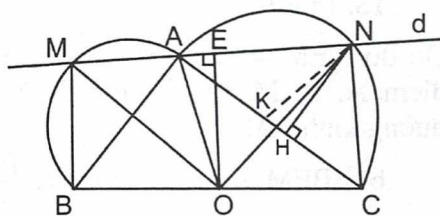
Hình 30

d) Tương tự như chứng minh trên, ta suy ra $DE \parallel CK$ mà $\widehat{ACK} = 90^\circ$ nên $DE \perp AC$ tại P. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC, AB $\Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow MN \perp DE$. Các tam giác ADB, AEB vuông nên $DN = EN = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle NDE$ cân tại N mà $MN \perp DE$ nên MN là trung trực của DE $\Rightarrow MD = ME$.

Tương tự ta có $ME = MF$. Vậy M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Do BC cố định nên M cố định.

17. (h.31) a) Có $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow BM \parallel CN \Rightarrow BMNC$ là hình thang vuông.

b) Vì $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên $\widehat{MAB} + \widehat{NAC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{NCA}$. Do đó $\triangle MAB \sim \triangle NCA$
 $\Rightarrow \frac{AM}{CN} = \frac{MB}{NA} \Rightarrow AM \cdot AN = MB \cdot NC$.



Hình 31

c) Gọi E là trung điểm của MN thì $OE \parallel MB \Rightarrow OE \perp MN$. Do đó $\triangle OMN$ cân tại O.

d) Vì $\triangle MAB \sim \triangle NCA$ nên $\frac{S_{MBA}}{S_{NAC}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = x^2$ (không đổi)

$\Rightarrow S_{MBA} = x^2 S_{NAC}$. Do đó $S_{BMNC} = S_{ABC} + (1 + x^2) \cdot S_{ANC}$. Mà S_{ABC} và $(1 + x^2)$ không đổi nên S_{BMNC} lớn nhất khi S_{ANC} lớn nhất.

Hạ $NH \perp AC$. Có AC không đổi nên S_{ANC} lớn nhất khi NH lớn nhất.

Do $NH \leq NK$, nên NH lớn nhất khi $H \equiv K \Leftrightarrow \triangle NAC$ vuông cân $\Leftrightarrow \widehat{NAC} = 45^\circ$. Vậy S_{BMNC} lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{MAB} = \widehat{NAC} = 45^\circ$.

18. (h.32) a) $AB^2 = 2R^2 = OA^2 + OB^2$
 $\Rightarrow \triangle OAB$ vuông tại O. Có $OA = OB = R$
 $\Rightarrow \triangle OAB$ vuông cân.

b) Có $\widehat{APB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 45^\circ \Rightarrow \triangle EPB$
 vuông cân tại E $\Rightarrow \widehat{PBE} = 45^\circ$. Tương tự
 $\triangle FMB$ vuông cân tại F $\Rightarrow \widehat{EBQ} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{PBQ} = 90^\circ$. Suy ra PQ là đường kính
 của đường tròn (O) nên ba điểm P, O, Q
 thẳng hàng;

c) Có $\widehat{SBH} = \widehat{QBP} = 90^\circ$, $\triangle BPH$ vuông cân tại B nên $BH = BP$; $\triangle BQS$ vuông cân
 tại B nên $BS = BQ$. Suy ra $\triangle BHS = \triangle BPQ$ (c-g-c) $\Rightarrow SH = PQ = 2R$.

d) Do $\widehat{PAQ} = \widehat{QBP} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên H là trực tâm
 của $\triangle SPQ$. Suy ra $SI \perp PQ$. Do đó AQIH và BPIH là các tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{AQH} = 45^\circ$, $\widehat{BIH} = \widehat{BPH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow I$ thuộc đường tròn
 đường kính AB.

19. (h.33) a) Có $OM \perp AM$, $ON \perp AN$
 $\Rightarrow \widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 180^\circ \Rightarrow AMON$ là tứ giác nội tiếp.

b) Có $\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$ (cùng bằng $\frac{1}{2} sđ \widehat{BN}$), $\widehat{NAB}$
 chung $\Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle ANC$. Do đó $\frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC}$
 $\Rightarrow AN^2 = AB.AC$.

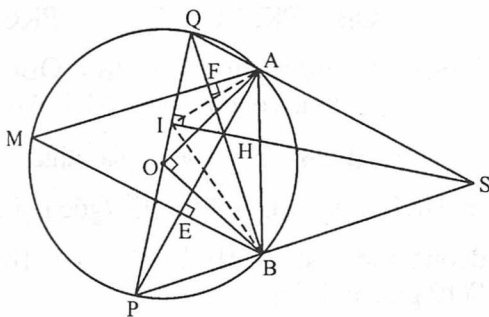
• Khi $AN = 6\text{cm}$, $AB = 4\text{cm} \Rightarrow 36 = 4.AC$
 $\Rightarrow AC = 9\text{cm} \Rightarrow BC = 5\text{cm}$.

c) Vì $IB = IC \Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow$ năm điểm A, M, O, I, N thuộc một đường tròn
 $\Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{AMN}$. Mà $\widehat{AMN} = \widehat{MTN} \Rightarrow \widehat{MTN} = \widehat{AIN} \Rightarrow MT \parallel AC$.

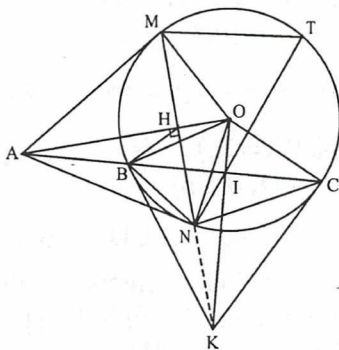
d) Gọi H là giao điểm của OA và MN.
 Vì $AM = AN$ và $OM = ON = R$ nên AO là trung trực của MN $\Rightarrow AH \perp MN$
 $\Rightarrow AN^2 = AH.AO$ (1)

Theo câu b) $AN^2 = AB.AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH.AO = AB.AC \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AO} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle ACO$ (c-g-c)
 $\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{ACO} \Rightarrow \widehat{BHO} + \widehat{ACO} = 180^\circ \Rightarrow BHOC$ là tứ giác nội tiếp.



Hình 32



Hình 33

Mà $OB \perp BK$, $OC \perp CK \Rightarrow OBKC$ là tứ giác nội tiếp. Do đó năm điểm O, H, B, C , K thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{OHK} = \widehat{OBK} = 90^\circ$ mà $\widehat{OHN} = 90^\circ$ nên H, N, K thẳng hàng. Vậy K thuộc đường thẳng MN cố định.

20. (h.34) a) Theo giả thiết $HK \perp AB \Rightarrow \widehat{HKB} = 90^\circ$. Có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $\widehat{HKB} + \widehat{HCB} = 180^\circ \Rightarrow BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Có $\widehat{MCA} = \widehat{MBA}$ (cùng chắn $\widehat{MA}$). Tứ giác $BCHK$ nội tiếp nên $\widehat{HBK} = \widehat{HCK} \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{KCA}$.

c) Vì $OC \perp AB \Rightarrow \widehat{CA} = \widehat{CB} \Rightarrow CA = CB$; $AM = BE$ (giả thiết); **Hình 34**

$\widehat{MAC} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn $\widehat{MC}$) $\Rightarrow \triangle MAC = \triangle EBC$ (c-g-c) $\Rightarrow CM = CE$ và $\widehat{MCA} = \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle CME$ vuông cân tại C .

d) Vì $\frac{AP \cdot MB}{MA} = R = OA \Rightarrow \frac{AP}{MA} = \frac{OA}{MB}$ và $\widehat{PAO} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ nên $\triangle APO \sim \triangle MAB$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{POA} = \widehat{MBA} \Rightarrow OP \parallel MB$. Gọi Q là giao điểm của BM với d . Xét $\triangle AQB$ có $OA = OB = R$, $OP \parallel BQ$ nên $PA = PQ$.

Gọi I là giao điểm của BP và HK , ta có $HK \parallel QA$ (cùng $\perp AB$) nên $\frac{IK}{PA} = \frac{BI}{BP} = \frac{IH}{PQ}$ mà $PA = PQ \Rightarrow IH = IK$. Vậy BP đi qua trung điểm của HK .

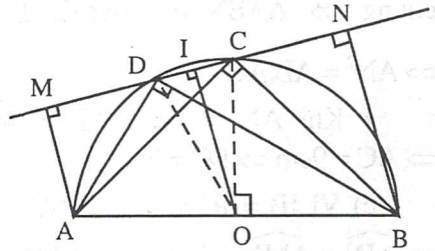
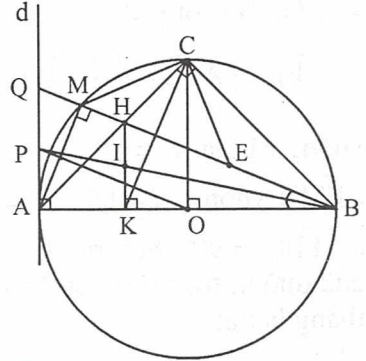
21. (h.35)

a) Kẻ $OI \perp CD$, ta có $IC = ID$.

Để dàng chứng minh được OI là đường trung bình của hình thang $AMNB$ nên $IM = IN$. Từ đó suy ra $MD = NC$.

b) $\triangle ACB$ vuông tại C vì có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ nên $AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + (\sqrt{2}R)^2 = (2R)^2 \Rightarrow AC^2 = 2R^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}R = BC \Rightarrow \triangle ACB$ vuông cân tại C .

c) $AD = AO = OD \Rightarrow \triangle AOD$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{AOD} = 60^\circ$. $\widehat{COD} = 180^\circ - \widehat{AOD} - \widehat{COB} = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{IOC} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{IOB} = 105^\circ \Rightarrow \widehat{MAO} = 105^\circ \Rightarrow \widehat{MAD} = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ$. Do đó $\triangle MAD$ vuông cân tại $M \Rightarrow 2MD^2 = R^2 \Rightarrow MD = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.



Ta có $\widehat{BDN} = 180^\circ - \widehat{MDA} - \widehat{ADB} = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ nên $\triangle BND$ vuông cân tại N $\Rightarrow 2DN^2 = BD^2 \Rightarrow DN = \frac{BD\sqrt{2}}{2}$. Mà $BD = R\sqrt{3}$ nên $DN = \frac{R\sqrt{6}}{2}$.

$$\text{Vậy } MN = \frac{R(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}.$$

$$d) S_{AMNB} = \frac{(AM + BN) \cdot MN}{2} = \frac{MN^2}{2} = \frac{R^2(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{4} : 2 = \frac{R^2(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{8} \quad (1)$$

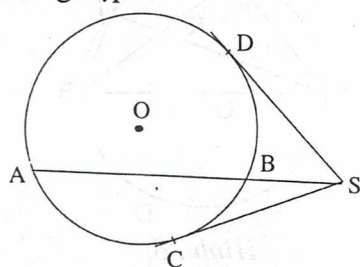
$$\begin{aligned} S_{ADB} + S_{ACB} &= \frac{AD \cdot DB}{2} + \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{R \cdot R\sqrt{3} + R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{R^2(\sqrt{3} + 2)}{2} = \frac{R^2(8 + 4\sqrt{3})}{8} = \frac{R^2(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{8} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{AMNB} = S_{ADB} + S_{ACB}$.

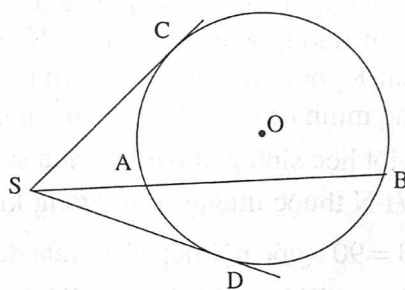
• Những sai lầm thường gặp:

Học sinh thường mắc nhiều sai lầm trong việc giải bài tập hình học. Những sai lầm này do nhiều nguyên nhân: không đọc kĩ đề bài, không hiểu đúng đề bài, không vẽ đúng hình kể cả trường hợp hình vẽ đơn giản, không biết vẽ thêm hình phụ, không nắm vững các kiến thức đã học,... Sau đây là một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 1 (h.36). Cho đường tròn (O; R) với dây AB không đi qua tâm. Lấy S là điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn (O; R) sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm)... (Trích đề thi vào lớp 10 năm học 2018-2019 của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội – Bài IV) khá nhiều học sinh vẽ hình sai ở bài tập này, phổ biến ở hai trường hợp sau:



a)



b)

Hình 36

Hình vẽ thứ nhất (36a) sai vị trí của S.

Hình vẽ thứ hai (36b) sai vị trí của C và D.

Với các sai lầm này, bài hình sẽ không được tính điểm trong tất cả các câu liên quan đến việc vẽ sai.

Để khắc phục, học sinh cần đọc kỹ đề và không được nhầm lẫn các khái niệm: tia, tia đối, cung nhỏ, cung lớn,...

Cũng có nhiều sai lầm trong việc vẽ hình khác nhưng mức độ nhỏ hơn như vẽ lệch các điểm giao cắt, vẽ vuông góc, song song không chính xác,... Chỉ cần học sinh cẩn thận, đọc kỹ đề sẽ không mắc phải sai lầm thường gặp. Thứ hai là trình bày bài thiếu luận cứ, ngộ nhận dẫn đến bị trừ điểm nhiều, thậm chí không cho điểm.

Ví dụ 2 (h.37). Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Nối OM cắt AB tại H. Chứng minh $OH \cdot OM = R^2$.

Lời giải đầy đủ như sau: Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MA = MB$ và $MA \perp OA$, MO là phân giác của $\widehat{AMB}$.

Do đó tam giác MAB cân tại M suy ra $MH \perp AB$ (tính chất tam giác cân).

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOM, đường cao AH ta có $OH \cdot OM = OA^2 = R^2$. Nhưng có học sinh giải như sau: Theo tính chất tiếp tuyến $OA \perp MA$ và $MO \perp AB$ tại H suy ra $OH \cdot OM = OA^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông). Cách trình bày này rõ ràng bộc lộ nhiều sai sót. Để khắc phục các sai sót này, học sinh phải được uốn nắn nhiều lần thông qua việc chấm, chữa bài trong quá trình ôn luyện.

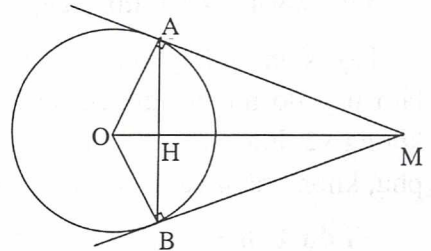
Ví dụ 3 (h.38). Cho đường tròn (O; R) đường kính AB, điểm H thuộc đoạn OB, dây $CD \perp AB$ tại H, lấy M thuộc tia đối tia CD, nối AM cắt đường tròn (O; R) tại N, nối BN cắt CD tại K, nối AK cắt đường tròn (O; R) tại I. Chứng minh ba điểm M, I, B thẳng hàng.

Một học sinh giải bài này như sau:

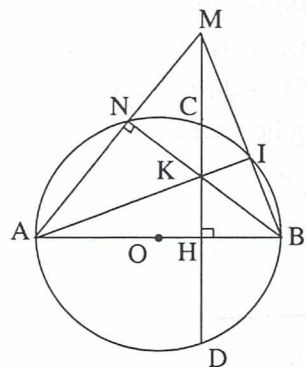
Vì N thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $BN \perp AM$, lại có $MH \perp AB$ (giả thiết) nên BN và MH là hai đường cao của tam giác MAB. Mà BN cắt MH tại K nên K là trực tâm tam giác MAB suy ra $AK \perp MB$. Mặt khác I thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AIB} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AIB} + \widehat{AIM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Do đó B, I, M thẳng hàng.



Hình 37



Hình 38

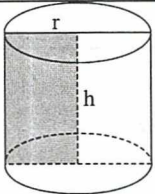
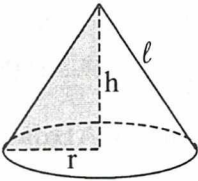
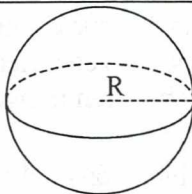
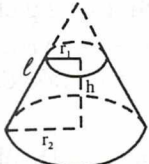
Sai lầm của lời giải trên ở chỗ $AK \perp BM$ chứ không phải MI vì lúc này B, I, M chưa thẳng hàng. Chỉ cần sửa một chút ta sẽ có lời giải đúng như sau: Sau khi có được $AK \perp MB$ và $\widehat{AIB} = 90^\circ$ suy ra BM và BI cùng vuông góc với AK . Do đó các đường thẳng BI và BK trùng nhau (dựa theo tiên đề O-clít), nên B, M, I thẳng hàng.

Những sai lầm hay gặp phải của học sinh nếu được phát hiện và uốn nắn kịp thời ngoài tác dụng nâng cao chất lượng bài giảng còn giúp cho học sinh thêm vững vàng kiến thức, có thái độ tự tin hơn trước các cuộc thi quan trọng để đạt kết quả cao nhất.

CHỦ ĐỀ 6. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ

1. Kiến thức cần nhớ

Công thức tính diện tích xung quanh (S_{xq}), diện tích toàn phần (S_{tp}) và thể tích hình trụ, hình nón, hình cầu, hình nón cụt

	$S_{xq} = 2\pi rh$ $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$ $V = \pi r^2 h$		$S_{xq} = \pi r \ell$ $S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2$ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
	$S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi R^2$ hay $S_{\text{mặt cầu}} = \pi d^2$ $V = \frac{4}{3} \pi R^3$		$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2) \ell$ $V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

2. Bài tập minh họa

Bài 1. Hộp sữa "Cô gái Hà Lan" là một hình trụ có đường kính đáy là 12cm, chiều cao hộp là 18cm. Tính thể tích hộp sữa (cho $\pi \approx 3,14$).

Lời giải:

Thể tích hộp sữa được tính bởi công thức: $V = \pi r^2 h$, trong đó $r = 6\text{cm}$, $h = 18\text{cm}$, $\pi \approx 3,14$. Vậy $V \approx 3,14 \cdot 36 \cdot 18 = 2034,72 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Bài 2. Mũ của chú hề trong rạp xiếc có dạng một hình nón mà đường kính đáy là 28cm, độ dài đường sinh là 24cm. Tính diện tích giấy cần dùng để làm một chiếc mũ như vậy (cho $\pi \approx 3,14$).

Lời giải:

Diện tích giấy cần dùng để làm một chiếc mũ bằng diện tích xung quanh của hình nón.

Ta có $S = \pi.r.l$ với $\pi \approx 3,14$, $r = 14\text{cm}$, $l = 24\text{ (cm)}$.

Vậy $S \approx 3,14.14.24 = 1055,04\text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 3. Trong dịp lễ Giáng sinh, Nam nhận được quà là một hộp kẹo sô-cô-la. Mỗi viên kẹo là một hình cầu có đường kính 4cm. Tính thể tích sô-cô-la cần dùng để làm 10 viên kẹo sô-cô-la đó (cho $\pi \approx 3,14$).

Lời giải:

Thể tích một viên kẹo là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, với $r = 2\text{cm}$, $\pi \approx 3,14$.

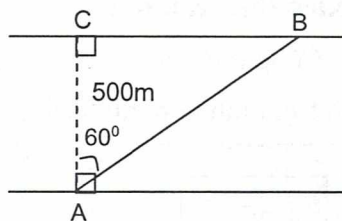
Ta có $V \approx \frac{4}{3}.3,14.8 \approx 33,5\text{ (cm}^3\text{)}$. Vậy thể tích sô-cô-la cần dùng để làm 10 viên kẹo là 335cm^3 .

Bài 4. Khúc sông rộng 500m, nước chảy xiết. Một con đò xuất phát từ bến A đi sang bờ bên kia. Do bị nước đẩy nên con đò đi theo đường AB. Biết $\widehat{CAB} = 60^\circ$, tính quãng đường AB (h.39a).

Lời giải: Coi hai bờ sông là hai đường thẳng song song. Trong tam giác ABC vuông tại C ta có:

$$\cos 60^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{500}{AB} \Rightarrow AB = 1000\text{ (m)}.$$

Vậy đò đã đi quãng đường AB dài 1000m.



Hình 39a

3. Bài tập tự luyện

1. Một cốc thủy tinh hình trụ đang chứa một lượng nước. Bán kính đáy của cốc nước hình trụ bằng 2cm. Người ta thả một viên bi hình cầu (không thấm nước) vào cốc, viên bi chìm xuống đáy cốc làm cho cột nước dâng cao thêm 3cm và nước chưa tràn ra ngoài. Tính thể tích viên bi (cho $\pi \approx 3,14$).

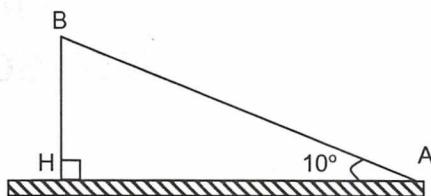
2. Chiếc nón do làng Chuông (Thanh Oai – Hà Nội) sản xuất là hình nón có đường sinh bằng 30cm, đường kính đáy bằng 40cm. Người ta dùng hai lớp lá để phủ lên bề mặt xung quanh của nón. Tính diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón (cho $\pi \approx 3,14$).

3. Một chiếc xô đựng nước có hình dạng là một hình nón cụt, có bán kính đáy lớn bằng 24cm, bán kính đáy nhỏ bằng 16cm, độ dài trục là 30cm. Tính thể tích của chiếc xô (cho $\pi \approx 3,14$).

4. Một quả bóng hình cầu có bán kính là 12cm. Tính diện tích da phải dùng để khâu thành quả bóng nếu tỉ lệ hao hụt là không đáng kể (cho $\pi \approx 3,14$).

5. Một tháp nước có bể chứa là một hình cầu, bán kính phía trong đo được 6m. Người ta dự tính lượng nước đựng đầy trong tháp đó đủ dùng cho một khu dân cư trong một ngày. Cho biết khu dân cư đó có 6520 người. Hỏi người ta đã dự tính mức bình quân mỗi người dùng bao nhiêu lít nước trong một ngày? (cho $\pi \approx 3,14$).

6. Một ngọn hải đăng HB cao 150m so với mặt nước biển (h.39b). Từ trên tàu biển A, người lái tàu nhìn thấy đỉnh B của ngọn hải đăng. Biết $\widehat{BAH} = 10^\circ$. Tính khoảng cách từ tàu tới chân ngọn hải đăng AH.



Hình 39b

Hướng dẫn giải – Lời giải – Đáp số

1. Thể tích viên bi bằng thể tích cột nước dâng lên

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4 \cdot 3 \approx 12,3,14 = 37,68(\text{cm}^3).$$

2. Bán kính đáy hình nón là 20cm. Diện tích lá cần sử dụng bằng hai lần diện tích xung quanh của hình nón. Mà diện tích xung quanh của hình nón là $S = \pi rl = \pi \cdot 20 \cdot 30 \Rightarrow S \approx 600 \cdot 3,14 = 1884(\text{cm}^2)$.

Vậy diện tích lá cần dùng cho một chiếc nón là 3768 (cm²).

3. Ta có $h = 30\text{cm}$, $R = 24\text{cm}$, $R' = 16\text{cm}$. Mà $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + R \cdot R')$.

Vậy thể tích xô đựng nước là $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 30(576 + 256 + 384) = 12160\pi(\text{cm}^3)$.

$$\Rightarrow V \approx 12160 \cdot 3,14 = 38182,4(\text{cm}^3).$$

4. Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 144 = 576\pi(\text{cm}^2)$.

Vậy diện tích da cần sử dụng là $S \approx 576 \cdot 3,14 = 1808,64(\text{cm}^2)$.

5. Thể tích bể chứa

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 6^3 = 904,32(\text{m}^3).$$

Lượng nước chứa đầy tháp xấp xỉ 904320 lít.

Lượng nước bình quân mỗi người dùng trong một ngày là:

$$904320 : 6520 \approx 138,699 \approx 139(\text{lít}).$$

6. Gọi chiều cao của hải đăng là HB, khoảng cách từ tàu đến chân ngọn hải đăng là AH.

$$\text{Ta có } HB = AH \cdot \tan \widehat{BAH} \Rightarrow AH = \frac{HB}{\tan \widehat{BAH}} = \frac{150}{\tan 10^\circ} \approx 851(\text{m}).$$

Vậy khoảng cách từ tàu đến chân ngọn hải đăng khoảng 851 (m).

PHẦN THỨ HAI

MỘT SỐ ĐỀ TỰ LUYỆN

ĐỀ BÀI

ĐỀ 1

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$; với $x \geq 0; x \neq 1$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 9$;
2. Rút gọn biểu thức $P = A - B$;
3. Chứng minh: $P < \frac{1}{3}$.

Câu II. 1. Tính diện tích mặt cầu có bán kính bằng 10cm.

2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất phải may được 2200 chiếc khẩu trang trong một ngày. Do tổ 1 làm vượt mức kế hoạch 12%, tổ hai làm vượt mức kế hoạch 10% nên cả hai tổ đã may được 2440 chiếc. Hỏi theo kế hoạch, mỗi tổ phải may được bao nhiêu khẩu trang trong một ngày.

Câu III. 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+2y} + y = -2 \\ \frac{2}{x+2y} - 3y = 1. \end{cases}$$

2. Cho phương trình: $x^2 - (m+1)x + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$;

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có diện tích bằng 3.

Câu IV. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Điểm M thuộc đường tròn sao cho $AM > MB$. Vẽ đường kính MN của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn cắt AM, AN lần lượt tại E và F. Đường thẳng MN cắt EF tại K. Đường thẳng AK cắt đường tròn (O; R) tại H.

1. Chứng minh $AM \cdot AE = AN \cdot AF$;

2. Chứng minh MNFE là tứ giác nội tiếp;

3. Chứng minh $KE \cdot KF = KB^2$ và $\widehat{EHF} = 90^\circ$.

Câu V. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2$ ($x \geq y, x \geq -y$)
 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

ĐỀ 2

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+10}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$; với $x \geq 0; x \neq 9$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 16$;
2. Rút gọn biểu thức $M = A : B$;
3. Tìm x để M đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu II. 1. Tính thể tích của một hình nón có đường cao bằng 10cm, bán kính đáy bằng 3cm.

2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai lớp 9A và 9B của một trường THCS có 85 bạn học sinh. Hướng ứng phong trào quyên góp sách vở tặng học sinh vùng núi gặp khó khăn. Mỗi bạn lớp 9A ủng hộ 4 quyển, mỗi bạn lớp 9B ủng hộ 5 quyển. Cả 2 lớp đã ủng hộ được 382 quyển sách vở. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Câu III. 1. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} |x| + y = m & (1) \\ 3|x| - y = 5 & (2) \end{cases}$$
 với x, y là ẩn.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 3$;

b) Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm.

2. Xác định tọa độ các giao điểm của Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2}$.

Câu IV. Cho đường tròn (O; R) và dây CD không qua O. Lấy điểm M thuộc tia đối tia DC. Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A thuộc cung lớn CD). Gọi I là trung điểm CD. Nối OI cắt AB tại K nối OM cắt AB tại H, CD cắt AB tại N.

1. Chứng minh MAOI là tứ giác nội tiếp;

2. Chứng minh $OH \cdot OM = OI \cdot OK$;

3. Qua B kẻ một đường thẳng song song với AI cắt CD; OK lần lượt tại E và F.

Chứng minh $\frac{IA}{IB} = \frac{NA}{NB}$ và $BE = BF$.

Câu V. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

ĐỀ 3

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1}$ và $B = \frac{x - 1}{2\sqrt{x}}$; với $x > 0; x \neq 1$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 9$;

2. Rút gọn biểu thức $P = A \cdot B$.

3. Tìm x để $\frac{1}{P} \geq \frac{\sqrt{x+9}}{8}$.

Câu II. 1. Một hộp sữa hình trụ có bán kính đáy là 6cm và chiều cao là 10cm. Tính diện tích vật liệu cần dùng để tạo nên một vỏ hộp sữa như vậy (cho $\pi \approx 3,14$).

2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình: Quãng đường AB dài 400km. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi từ B trở về A, ô tô tăng vận tốc thêm 10km/h so với lúc đi. Biết rằng tổng thời gian đi và về là 18 giờ. Tính vận tốc ô tô lúc đi từ A đến B.

Câu III. 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)(y-1) = xy \\ (x+2)(y+1) = xy + 7. \end{cases}$$

2. Cho đường thẳng (d): $y = 2mx + 3$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Chứng minh với mọi giá trị của m, (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm. Tìm m sao cho $\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = \frac{4}{3}$.

Câu IV. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB và dây EF ($E \in \widehat{AF}$; $AE < BF$). Các đường thẳng AE và BF cắt nhau tại M; AF cắt BE tại H. Gọi I là trung điểm của MH, nối OI cắt EF tại N. Kẻ $IK \perp OH$ tại K; IK cắt EF tại P.

1. Chứng minh MEHF là tứ giác nội tiếp;

2. Chứng minh $AE \cdot AM = AH \cdot AF$;

3. Chứng minh $OI \perp EF$ và $PH \parallel AB$.

Câu V. Giải phương trình: $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6 \cdot (x - 1)^2$.

ĐỀ 4

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{x+2}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$;

với $x \geq 0$; $x \neq 4$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 25$;

2. Rút gọn biểu thức $P = A : B$;

3. Tìm x để $P^2 = P + 2$.

Câu II. 1. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đường sinh bằng 20cm, bán kính đáy bằng 10cm. Cho $\pi \approx 3,14$.

2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình: Người ta định dùng một số xe cùng loại để chở hết 180 tấn hàng phục vụ đồng bào ở khu vực phong tỏa chống dịch covid 19. Lúc sắp khởi hành có 4 xe phải điều đi làm việc khác. Vì vậy, mỗi xe phải chở thêm 0,5 tấn hàng nữa mới hết. Hỏi lúc đầu, đội có bao nhiêu xe nếu khối lượng hàng các xe chở là như nhau.

Câu III. 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |x-1| + 2y = 5 & (1) \\ 2|x-1| - 3y = -4 & (2) \end{cases}$$

2. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 3x - m$.

a) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm. Tìm m sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 9$.

Câu IV. Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Kẻ cát tuyến MCD với đường tròn sao cho $MC < MD$ và A thuộc cung lớn CD. Gọi H là trung điểm CD. Nối BH cắt đường tròn tại N.

1. Chứng minh 5 điểm M, A, O, H, B cùng thuộc một đường tròn;

2. Chứng minh $MC \cdot MD = MA^2$;

3. Xác định vị trí của D để diện tích tam giác MND đạt giá trị lớn nhất.

Câu V. Giải phương trình: $x\sqrt[3]{91-x^3} \cdot (x + \sqrt[3]{91-x^3}) = 84$.

ĐỀ 5

Câu I. Cho các biểu $A = \frac{x+3\sqrt{x}}{x-25} + \frac{1}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$; với $x \geq 0, x \neq 25$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 9$;
2. Rút gọn biểu thức $P = A.B$;
3. Tìm x để $P > \frac{1}{3}$.

Câu II. 1. Tính diện tích mặt cầu nếu thể tích hình cầu là 36π (cm³).

2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai người làm chung một công việc thì sau 16 giờ sẽ xong. Nếu để người thứ nhất làm một mình trong 4 giờ, người thứ hai làm một mình trong 2 giờ thì cả hai người làm được $\frac{1}{6}$ công việc. Tính thời gian để mỗi người làm một mình xong toàn bộ công việc.

Câu III. 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{y-1} = -1 \\ \frac{3}{x+1} + \frac{2}{y-1} = 5. \end{cases}$$

2. Lập phương trình bậc 2 có hai nghiệm là: $\sqrt{2} + 1$ và $\sqrt{2} - 1$.

3. Cho đường thẳng (d): $y = mx + 2$ ($m \neq 0$), tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng bằng $\sqrt{2}$.

Câu IV. Cho đường tròn (O; R) và điểm A ở ngoài đường tròn sao cho $OA = 3R$. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Kẻ dây BM song song với AC. Nối MA cắt đường tròn tại N. Nối BN cắt AC tại K, cắt OA tại I.

1. Chứng minh ABOC là tứ giác nội tiếp;
2. Chứng minh $KC^2 = KN.KB$;
3. Tính AI theo R.

Câu V. Cho $x, y > 0$ và $x^2y + x + 1 \leq y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{xy}{(x+y)^2}$.

ĐỀ 6

Câu I. Cho các biểu thức: $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{8\sqrt{x}}{x-4}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$;

với $x \geq 0; x \neq 4$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 9$;
2. Rút gọn biểu thức $P = A : B$;
3. Với điều kiện để $\sqrt{P}$ xác định, tìm giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{P}$.

Câu II. 1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 20cm. Cạnh góc vuông nhỏ kém cạnh góc vuông lớn 4cm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác đó.

2. Tính thể tích hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy và diện tích xung quanh bằng $16\pi\text{cm}^2$.

Câu III. 1. Cho các đường thẳng $(d_1): y = (m^2 + 1)x + m$ và $(d_2): y = 5x + 2$.

Tìm m để hai đường thẳng song song.

2. Cho phương trình $x^3 - 3m(x - 1) - 1 = 0$. (1)

a) Giải phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu IV. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ hai tia tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Điểm M thuộc tia Ax . Kẻ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn $(C \neq A)$. Nối AC cắt By tại P . Nối OP cắt MB tại N .

1. Chứng minh $MAOC$ là tứ giác nội tiếp;

2. Chứng minh $AC \cdot AP = 4R^2$;

3. Chứng minh $\triangle MAB \sim \triangle OBP$; tìm vị trí của M trên Ax để diện tích tam giác ONB đạt giá trị lớn nhất.

Câu V. Cho $x, y > 0$; $x + y \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = x + 3y + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}.$$

ĐỀ 7

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x} + 10}{x - 9} - \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0$; $x \neq 9$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 16$;

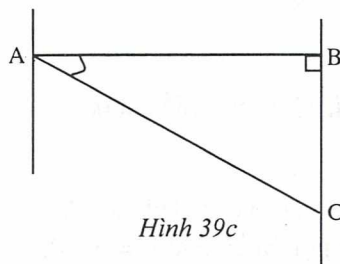
2. Rút gọn biểu thức $M = A : B$;

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của M .

Câu II. 1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một tổ sản xuất phải may được 600 khẩu trang chống dịch COVID-19 trong thời gian quy định. Do tăng năng suất lao động, mỗi giờ tổ đó may được nhiều hơn kế hoạch là 20 chiếc nên công việc được hoàn thành sớm hơn quy định 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch mỗi giờ tổ đó phải may được bao nhiêu khẩu trang?

2. (h.39c). Chiều rộng của con sông là $AB = 200\text{m}$. Một con đò xuất phát từ A đi sang bờ bên kia bị dòng nước đẩy nên đã đi theo đường AC . Biết $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính quãng đường AC mà đò đã đi.



Hình 39c

3. Tính thể tích hình cầu có diện tích của nó bằng $16\pi (\text{cm}^2)$.

Câu III.1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{2x+y} + \sqrt{y} = 2 \\ \frac{3}{2x+y} + 2\sqrt{y} = 5. \end{cases}$$

2. Cho đường thẳng (d): $y = (m + 2)x - 2m$ và parabol (P): $y = x^2$.

a) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt;

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm. Tìm m sao cho $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$.

Câu IV. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R); ($AB < AC$) ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt BC tại K.

1. Chứng minh AEHF là tứ giác nội tiếp;

2. Chứng minh DB.DC = DH.DA;

3. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AK tại M, cắt AD tại N. Chứng minh DH là phân giác của góc FDE và $FM = NF$.

Câu V. Giải phương trình $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(2 + 2\sqrt{1-x^2}) = 8$.

ĐỀ 8

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{6 - \sqrt{x}}{x - 4} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$

với $x \geq 0$; $x \neq 4$.

1. Tính giá trị của A khi $x = 9$;

2. Rút gọn biểu thức B;

3. Tìm các giá trị nguyên của x để $B - A \leq \frac{3}{5}$.

Câu II. 1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Quãng đường AB dài 300km, một ô tô đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi từ B về A, xe giảm vận tốc 10km/h so với lúc đi. Vì vậy thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 1 giờ. Tính vận tốc lúc đi.

2. Tính diện tích sơn cần dùng để sơn phủ kín mặt ngoài của một đoạn ống nước hình trụ có chiều dài $l = 4m$, đường kính đáy bằng 20cm (cho $\pi \approx 3,14$).

Câu III. 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = 3x + 2$ và parabol (P): $y = 2x^2$. Xác định tọa độ các giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P).

2. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$;

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất sao cho $x > 0$; $y > 0$.

Câu IV. Cho đường tròn (O) với dây AB cố định, (AB không qua O). Đường kính CD vuông góc với AB tại K (C thuộc cung lớn AB). Điểm N thuộc cung nhỏ AC. Nối CN cắt AB tại M, nối ND cắt AB tại E. Gọi H là trung điểm của NC, kẻ $HI \perp AN$ tại I.

1. Chứng minh CNEK là tứ giác nội tiếp;
2. Chứng minh $MN \cdot MC = MA \cdot MB$;
3. Cho N di chuyển trên cung nhỏ AC, chứng minh IH đi qua một điểm cố định và I thuộc một đường tròn cố định.

Câu V. Cho $a, b \geq 0, a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = ab + \frac{1}{a+b}$.

ĐỀ 9

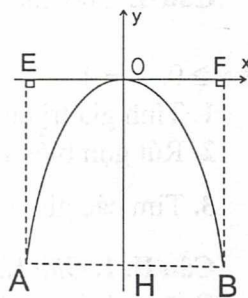
Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{6}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 4$;
2. Rút gọn biểu thức $P = A - B$;
3. Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $\frac{1}{P}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu II. 1 (h.40) Mặt cắt công vào một khu triển lãm có hình dạng một parabol (P): $y = -x^2$. Mặt trục đối xứng OH vuông góc với mặt đất. Biết bề rộng AB của công là 4m. Tính chiều cao HO của công.

2. Bể chứa nước của một khu tập thể là một hình cầu mà phần chứa nước có bán kính 1m. Khi bể đang chứa đầy nước, người ta cho nước chảy vào các thùng phi hình trụ mà phần chứa nước có đường kính đáy là 0,4m, chiều cao 0,8m. Hỏi bể có đủ nước để làm đầy 40 thùng phi như vậy không?

3. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình: Một thửa đất hình chữ nhật có chu vi là 40m, diện tích là $64m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của thửa đất.



Hình 40

Câu III. 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 5 \\ 2x - \sqrt{y} = 7. \end{cases}$$

2. Cho đường thẳng (d): $y = mx - m + 1$ và parabol (P): $y = x^2$.

- a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt;
- b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm, tìm m sao cho $x_2 = |x_1|$ và $x_2 > x_1$.

Câu IV. Cho đường tròn (O; R) đường kính BC, điểm A thuộc đường tròn ($AB < AC$). Kẻ $AH \perp BC$, $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của FA và FC.

1. Chứng minh $AE.AB = AF.AC$;
2. Chứng minh $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.

3. Gọi K là trực tâm tam giác HMN , cho $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính theo R độ dài đoạn HF và diện tích tam giác KMN .

Câu V. Giải phương trình $\frac{x^2}{(x+2)^2} = 3x^2 - 6x - 3$.

ĐỀ 10

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{11\sqrt{x}-3}{x-9}$; với $x \geq 0$;

$x \neq 9$.

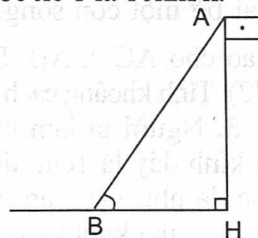
1. Tính giá trị của A khi $x = 36$;
2. Rút gọn biểu thức $M = A + B$;
3. Tìm x sao cho $M = M^4$.

Câu II. 1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Trên quãng đường AB dài 200km có hai ô tô đi ngược chiều. Xe 1 khởi hành từ A đi đến B , xe 2 khởi hành từ B đi đến A . Hai xe khởi hành cùng một lúc và sau hai giờ thì gặp nhau. Tính vận tốc mỗi xe nếu vận tốc xe 2 lớn hơn vận tốc xe 1 là 10km/h.

2. Một hộp sữa hình trụ có thể tích là 16π (cm³). Biết rằng đường kính đáy và độ dài trục của hình trụ bằng nhau. Tính diện tích vật liệu cần dùng để tạo nên một hộp sữa như vậy (bỏ qua diện tích phần ghép nối, cho $\pi \approx 3,14$).

3. Tính chiều cao cột cờ ở sân trường (đoạn AH), biết tia nắng AB tạo với bóng cột cờ HB góc 60° và đoạn BH dài 5m (h.41).



Hình 41

Câu III. 1. Cho đường thẳng $(d): y = mx - m + 1$ và parabol $(P): y = x^2$;

- a) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt;
- b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) , tìm m sao cho $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 2$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{x} + y = 5 \\ \frac{2}{x} - 2y = -2. \end{cases}$$

Câu IV. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên cung nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, kẻ hai tia tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn, tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C và D . Nối AD cắt BC tại N , MN cắt AB tại H .

1. Chứng minh $OACM$ là tứ giác nội tiếp;
2. Chứng minh tích $AC.BD$ không phụ thuộc vào vị trí của M ;

3. Chứng minh $MN \parallel BD$ và $MN = NH$.

Câu V. Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{ab}{c^2(a+b)} + \frac{ac}{b^2(a+c)} + \frac{bc}{a^2(b+c)}.$$

ĐỀ 11

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$

với $x \geq 0$; $x \neq 1$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 25$;

2. Rút gọn biểu thức A;

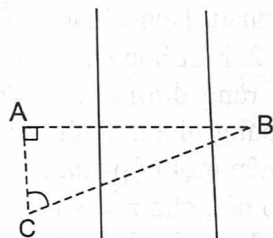
3. Tìm x để biểu thức $S = A.B$ có giá trị lớn nhất.

Câu II. 1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hưởng ứng phong trào trồng cây xanh vì môi trường xanh sạch đẹp; một chi đoàn dự định trồng được 600 cây xanh trong một thời gian quy định. Do mỗi ngày họ trồng được nhiều hơn dự định là 30 cây nên công việc được hoàn thành sớm hơn quy định 1 ngày. Tính số ngày mà chi đoàn dự kiến hoàn thành công việc.

2. Để đo khoảng cách giữa hai địa điểm A và B ở hai bờ một con sông, người ta đặt máy đo ở vị trí C sao cho $AC \perp AB$. Biết $AC = 20m$ và $\widehat{ACB} = 75^\circ$ (h.42). Tính khoảng cách AB (làm tròn đến mét).

3. Người ta làm các viên nước đá hình nón có bán kính đáy là 1cm, độ dài trục là 2cm. Cho 6 viên nước đá như vậy vào một cốc thủy tinh hình trụ rồi rót nước giải khát vào cho đến khi đầy cốc. Biết rằng cốc nước hình trụ ở cốc có bán kính đáy là 3cm, độ dài trục là 12cm. Hỏi thể tích nước giải khát rót vào cốc là bao nhiêu? (Cho $\pi \approx 3,14$).



Hình 42

Câu III. 1. Cho đường thẳng (d): $y = 2x + m$ và parabol (P): $y = x^2$. Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt nằm ở bên phải trục tung.

2. Giải phương trình $\frac{2x^2}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 1$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x| + y = 3 \\ 2|x| - y = 6. \end{cases}$

Câu IV. Cho đường tròn (O; R) với dây BC cố định (BC không qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Điểm E thuộc cung lớn BC. Nối AE cắt BC tại D. Gọi I là trung điểm của BC. Kẻ $CH \perp AE$ tại H, nối EB cắt CH tại M.

1. Chứng minh $AD.AE = AB^2$;

2. Chứng minh 4 điểm A, I, C, H cùng thuộc một đường tròn;

3. So sánh AM và AC; tìm vị trí của E để diện tích tam giác MAC lớn nhất.

Câu V. Giải phương trình $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$.

ĐỀ 12

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$ và $B = \frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 49$;

2. Rút gọn $M = A.B$;

3. Tìm x để $M = \frac{1}{3}$.

Câu II. 1. Có 5 viên bi thủy tinh hình cầu, đường kính mỗi viên là 2cm. Một cốc thủy tinh hình trụ có đường kính đáy là 6cm, đang đựng nước (6cm là đường kính cột nước).

a) Tính thể tích mỗi viên bi;

b) Thả 5 viên bi vào cốc nước; biết rằng cả năm viên bi ngập trong nước và nước không tràn ra ngoài, tính chiều cao cột nước dâng lên.

2. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai lớp 9A và 9B tham gia đợt trồng cây vì môi trường xanh, sạch, đẹp. Cả hai lớp có 81 bạn tham gia. Mỗi bạn lớp 9A trồng được 5 cây, mỗi bạn lớp 9B trồng được 4 cây. Cả hai lớp trồng được 364 cây. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Câu III. 1. Cho ba đường thẳng: $(d_1): y = x + 3$; $(d_2): y = -x + 1$ và $(d_3): y = \sqrt{2}x + \sqrt{2} + m$. Tìm m để ba đường thẳng đồng quy.

2. Cho phương trình $x^2 + mx - 2m - 4 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $x_2 = 2x_1$.

Câu IV. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB. Điểm H thuộc đoạn OA. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AH và đường tròn (O_2) đường kính BH. Nối AC cắt đường tròn (O_1) tại M, nối BC cắt đường tròn (O_2) tại N. Đường thẳng MN cắt đường tròn $(O; R)$ tại E và F.

1. Chứng minh CMHN là hình chữ nhật;

2. Cho AH = 4cm, HB = 9cm, tính MN;

3. Chứng minh CE = CF = CH.

Câu V. Tìm x, y > 0 sao cho: $\left(x^2 + y + \frac{3}{4}\right)\left(y^2 + x + \frac{3}{4}\right) = \left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2y + \frac{1}{2}\right)$.

ĐỀ 13

Câu I. Cho biểu thức: $M = \frac{2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5 - \sqrt{x}}{x - 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức M;

2. Tính giá trị của M khi $x = 4$;

3. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để M có giá trị là số nguyên.

Câu II. 1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
 Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28m. Đường chéo hình chữ nhật dài 10m. Tính độ dài hai cạnh của hình chữ nhật.

2. Để cứu một người ở ban công tầng 3 của một ngôi nhà bị hỏa hoạn, người ta bắc một chiếc thang AB. Biết độ cao ban công HB = 12m và thang tạo với mặt đất góc $\widehat{BAH} = 72^\circ$. Tính độ dài của thang (làm tròn đến cen-ti-mét).

3. Một lon nước ngọt hình trụ có đường kính đáy là 5cm, độ dài trục là 12cm. Tính thể tích lon nước ngọt (cho $\pi \approx 3,14$).

Câu III. 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

2. Cho đường thẳng (d): $y = mx + m + 1$ và parabol (P): $y = x^2$.

Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2}$.

Câu IV. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của OB. Tia CI cắt đường tròn (O; R) tại E. Nối AE cắt CD tại H; nối BD cắt AE tại K.

1. Chứng minh tứ giác OIED nội tiếp;

2. Chứng minh $AH \cdot AE = 2R^2$;

3. Tính tỉ số $\frac{OH}{OA}$; chứng minh $OK \perp BD$.

Câu V. Cho $4x + 2y + 2z - 4\sqrt{xy} - 4\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz} - 10\sqrt{z} - 6\sqrt{y} + 34 = 0$, với $x, y, z \geq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $M = (x - 15)^9 + (y - 8)^6 + (z - 24)^{2018}$.

ĐỀ 14

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$ với $x > 0$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 81$;

2. Rút gọn biểu thức $P = A : B$;

3. So sánh P và $\frac{1}{2}$.

Câu II. 1. Nón Huế là một hình nón có đường kính đáy bằng 40cm, độ dài đường sinh là 30cm. Người ta lát mặt xung quanh hình nón bằng 3 lớp lá khô. Tính diện tích lá cần dùng để tạo nên một chiếc nón Huế như vậy (làm tròn đến cm^2 , cho $\pi \approx 3,14$).

2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
 Quãng đường AB dài 48km trong đó đoạn đường qua khu dân cư dài 8km. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc quy định. Khi đi qua khu dân cư, xe phải giảm vận tốc

10km/h so với vận tốc quy định. Tính vận tốc của ô tô khi đi qua khu dân cư biết rằng thời gian ô tô đi từ A đến B là 1 giờ.

Câu III. 1. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1. & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$;

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất mà $x = |y|$.

2. Cho đường thẳng (d): $y = x + 6$ và parabol (P): $y = x^2$.

Xác định tọa độ các giao điểm của (d) và (P).

Câu IV. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính vuông góc là AB và CD.

Lấy điểm K thuộc cung nhỏ AC, kẻ $KH \perp AB$ tại H. Nối AC cắt HK tại I, tia BC cắt đường thẳng HK tại E; nối AE cắt đường tròn (O; R) tại F.

1. Chứng minh BHFE là tứ giác nội tiếp;

2. Chứng minh $EC \cdot EB = EF \cdot EA$;

3. Cho H là trung điểm OA, tính theo R diện tích tam giác CEF.

Câu V. Cho góc nhọn $\widehat{xAy}$, các điểm B và C thuộc tia Ay sao cho $AB = a$, $AC = 4a$ ($a > 0$). Xác định vị trí điểm M thuộc tia Ax sao cho $\widehat{BMC}$ có số đo lớn nhất.

ĐỀ 15

Câu I. Cho các biểu thức $A = \frac{x+3}{x-9} + \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

1. Tính giá trị của B khi $x = 16$;

2. Rút gọn biểu thức $M = A - B$;

3. Tìm x để $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$.

Câu II. 1. Tính thể tích một viên kẹo sô-cô-la hình cầu có đường kính bằng 3cm (làm tròn đến cm^3 , cho $\pi \approx 3,14$).

2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai tổ sản xuất cùng làm chung một công việc thì sau 12 giờ xong. Nếu tổ 1 làm một mình trong 2 giờ; tổ hai làm một mình trong 7 giờ thì cả hai tổ làm xong một nửa công việc. Tính thời gian mỗi tổ làm một mình xong toàn bộ công việc.

Câu III. 1. Cho phương trình $x - (m+3)\sqrt{x} + m + 2 = 0$. (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -4$;

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

2. Cho đường thẳng (d): $y = (m-1)x + 4$ ($m \neq 1$). Đường thẳng (d) cắt Ox tại A, cắt Oy tại B. Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 2.

Câu IV. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Điểm M trên cung nhỏ AC. Hạ $BK \perp AM$ tại K. Đường thẳng BK cắt tia CM tại E. Nối BE cắt đường tròn (O; R) tại N; ($N \neq B$).

1. Chứng minh tam giác MBE cân tại M;
2. Chứng minh $EN \cdot EB = EM \cdot EC$;
3. Tìm vị trí của M để tam giác MBE có chu vi lớn nhất.

Câu V. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 & (1) \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 & (2) \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

ĐỀ 1

Câu I. 1. $B = \frac{1}{2}$; $x \geq 0$; $x \neq 1$.

2. $P = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$.

3. $P - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{3} = \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1}{3(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)}$

Vì $x \geq 0$ nên $x + \sqrt{x} + 1 > 0$; $x \neq 1$ nên $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Rightarrow -(\sqrt{x} - 1)^2 < 0$

Do đó $P - \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow P < \frac{1}{3}$.

Câu II. 1. $S = 4\pi R^2 \Rightarrow S = 4\pi \cdot 100 = 400\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

2. Gọi số khẩu trang tổ 1 phải may trong một ngày là x chiếc thì số khẩu trang tổ 2 phải may trong một ngày là $(2200 - x)$ (chiếc) ($x \in \mathbb{N}^*$; $x < 2200$). Thực tế, tổ 1 may được $\frac{112}{100}x = 1,12x$ (chiếc); tổ 2 may được: $1,1(2200 - x)$ (chiếc).

Ta có phương trình: $1,12x + 1,1(2200 - x) = 2440$.

Giải phương trình này được $x = 1000$ thỏa mãn điều kiện. Vậy theo kế hoạch tổ 1 phải may 1000 khẩu trang, tổ hai phải may 1200 khẩu trang trong một ngày.

Câu III. 1. Điều kiện $x \neq -2y$; Hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; -1)$.

2. a) Khi $m = \sqrt{2}$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \sqrt{2}$.

b) $\Delta = (m + 1)^2 - 4m = (m - 1)^2 \geq 0 \forall m$. Phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Theo hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m. \end{cases}$$

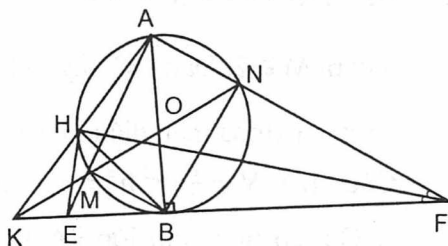
Ta phải tìm m sao cho $x_1 > 0, x_2 > 0$ và $x_1 \cdot x_2 = 6$. Do đó

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = m > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases} \quad \text{Vậy } m = 6 \text{ là điều kiện cần tìm.}$$

Câu IV. (h.43)

1. Có $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Theo tính chất tiếp tuyến $AB \perp EF$. Do đó: $AM \cdot AE = AB^2$ và $AN \cdot AF = AB^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) $\Rightarrow AM \cdot AE = AN \cdot AF$.

2. Có $\frac{AM}{AF} = \frac{AN}{AE}$ và $\widehat{MAN}$ chung



Hình 43

$\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle AFE$ (cg) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{AMN}$

$\Rightarrow \widehat{AFE} + \widehat{NME} = 180^\circ \Rightarrow MNFE$ là tứ giác nội tiếp.

3. Có $\widehat{KME} = \widehat{AMN}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{KME} = \widehat{AFE}$, có $\widehat{MKE}$ chung $\Rightarrow \triangle KME \sim \triangle KFN$ (cg) $\Rightarrow \frac{KM}{KF} = \frac{KE}{KN} \Rightarrow KE \cdot KF = KM \cdot KN$. (1)

Có: $\widehat{MBK} = \widehat{KNB} (= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{MB})$, $\widehat{MKB}$ chung $\Rightarrow \triangle KMB \sim \triangle KBN$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{KM}{KB} = \frac{KB}{KN} \Rightarrow KB^2 = KM \cdot KN$ (2). Từ (1) (2) $\Rightarrow KE \cdot KF = KB^2$.

Ta có: $\widehat{AHB} = 90^\circ \Rightarrow BH \perp AK$; $\triangle BKA$ vuông tại B $\Rightarrow KB^2 = KH \cdot KA$
 $\Rightarrow KE \cdot KF = KH \cdot KA \Rightarrow \frac{KH}{KE} = \frac{KF}{KA}$, $\widehat{HKE}$ chung $\Rightarrow \triangle KHE \sim \triangle KFA$ (cg)

$\Rightarrow \widehat{KHE} = \widehat{AFK} \Rightarrow \widehat{AFK} + \widehat{AHE} = 180^\circ \Rightarrow AHEF$ là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{EAF} = 90^\circ$.

Câu V. Từ giả thiết suy ra: $\sqrt{x+y} - 1 = 1 - \sqrt{x-y}$.

Đặt $a = \sqrt{x+y} - 1 = 1 - \sqrt{x-y}$ với $-1 \leq a \leq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = a+1 \\ \sqrt{x-y} = 1-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = (a+1)^2 \\ x-y = (1-a)^2 \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được $x = a^2 + 1$, $y = 2a \Rightarrow P = a^4 + 6a^2 + 1$.

Mà $a^4 \geq 0$, $a^2 \geq 0$ nên $P \geq 1$, dấu "=" xảy ra khi $a = 0$. Vậy min $P = 1$ tại $x = 1$, $y = 0$.

Vì $-1 \leq a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |a| \leq 1 \Rightarrow a^4 \leq 1$, $a^2 \leq 1 \Rightarrow P \leq 8$, dấu "=" xảy ra khi $a = \pm 1$.

Vậy max $P = 8$ khi $x = 2$; $y = 2$ hoặc $x = 2$; $y = -2$.

ĐỀ 2

Câu I. 1. $x = 16$; $B = 1$

2. $M = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$, $x \neq 9$

3. $M = \frac{x-9+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} = (\sqrt{x}+3) + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có: $(\sqrt{x} + 3) + \frac{16}{\sqrt{x} + 3} \geq 8$.

Suy ra $M \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} + 3 = \frac{16}{\sqrt{x} + 3}$

$\Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy min $M = 2$ khi $x = 1$.

Câu II. 1. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = 30\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

2. Gọi số học sinh lớp 9A là x (bạn) thì số học sinh lớp 9B quyền góp là $(85 - x)$ (bạn) ($x \in \mathbb{N}^*$, $x < 85$). Số sách vở lớp 9A quyền góp là: $4x$ (quyển), lớp 9B quyền góp được $(85 - x) \cdot 5$ (quyển). Vậy ta có phương trình: $4x + 5 \cdot (85 - x) = 382$. Giải phương trình này tìm được $x = 43$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy lớp 9A có 43 bạn, lớp 9B có 42 bạn.

Câu III. 1. a) Khi $m = 3$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} |x| + y = 3 \\ 3|x| - y = 5. \end{cases}$

Hệ có nghiệm $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; 1)\}$.

b) Cộng từng vế các phương trình của hệ ta được: $4|x| = m + 5$

$$\Leftrightarrow |x| = \frac{m + 5}{4}. \quad (3)$$

Hệ vô nghiệm khi (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -5$.

2. Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = (\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0.$$

Có $a + b + c = 0$; phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \sqrt{2}$.

• Với $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$.

• Với $x_2 = \sqrt{2} \Rightarrow y_2 = 2$.

Vậy (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm A (1; 1) và B ($\sqrt{2}$; 2).

Câu IV (h.44)

1. Có $OA \perp AM$, $OI \perp CD \Rightarrow \widehat{OAM} + \widehat{OIM} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ MAOI là tứ giác nội tiếp.

2. Vì $OA = OB = R$; $MA = MB$ (tính chất

tiếp tuyến)

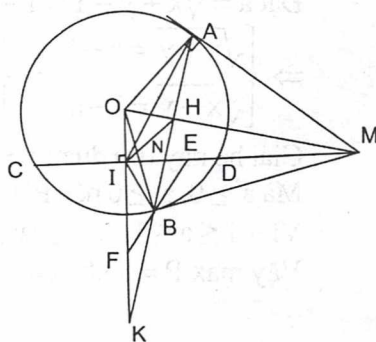
$\Rightarrow OM$ là trung trực của AB

$\Rightarrow OM \perp AB$ tại H.

Có $OI \perp CD$ (quan hệ đường kính – dây cung).

Có $\widehat{IOH}$ chung

$$\Rightarrow \triangle OHK \sim \triangle OIM \Rightarrow \frac{OH}{OI} = \frac{OK}{OM} \Rightarrow OH \cdot OM = OI \cdot OK.$$



Hình 44

3. * Vì $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = \widehat{OIM} = 90^\circ$ nên 5 điểm: M, A, O, I, B thuộc đường

tròn đường kính OM. Mà $MA = MB \Rightarrow \widehat{MA} = \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{BIM}$ nên IN là

phân giác trong của $\triangle IAB$, suy ra: $\frac{IA}{IB} = \frac{NA}{NB}$.

* Mặt khác do $EF \parallel IA$ nên $\widehat{IEB} = \widehat{MIA}$ (so le) $\Rightarrow \widehat{IEB} = \widehat{BIE}$. Do đó $\triangle BIE$ cân tại B $\Rightarrow BE = BI$. Mà $\triangle IEF$ vuông tại I nên $\widehat{BIE} + \widehat{BIF} = 90^\circ$, $\widehat{BEI} + \widehat{BFI} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{BFI} \Rightarrow \triangle BIF$ cân tại B $\Rightarrow BI = BF$. Vậy $BE = BF$.

Câu V. * Vì $(a - b)^2 \geq 0 \forall a, b$ nên $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Tương tự $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ac$.

Do đó: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow 3P \geq 9$.

Suy ra $P \geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy min $P = 3$ khi $a = b = c = 1$.

* Vì $0 \leq a, b, c \leq 2 \Rightarrow (2 - a)(2 - b)(2 - c) + abc \geq 0$

$\Rightarrow 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + ac + bc) \geq 0 \Rightarrow 2(ab + ac + bc) + 8 - 12 \geq 0$

$\Rightarrow 2ab + 2ac + 2bc \geq 4 \Rightarrow (a + b + c)^2 \geq 4 + a^2 + b^2 + c^2$.

Do đó: $9 \geq 4 + P \Rightarrow P \leq 5$. Dấu "=" xảy ra khi $(a; b; c)$ là các hoán vị của $(2; 1; 0)$. Vậy max $P = 5$.

ĐỀ 3

Câu I. 1. Khi $x = 9$; $B = \frac{4}{3}$.

2. $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

3. $\frac{1}{P} \geq \frac{\sqrt{x} + 9}{8} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 9}{8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{x} - x - 9\sqrt{x} - \sqrt{x} - 9}{8(\sqrt{x} + 1)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-x + 6\sqrt{x} - 9}{8(\sqrt{x} + 1)} \geq 0$ (1). Mà $8(\sqrt{x} + 1) > 0$ với $x > 0$ nên (1)

$\Leftrightarrow -x + 6\sqrt{x} - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)^2 \leq 0$. Mà $(\sqrt{x} - 3)^2 \geq 0$
 $\forall x > 0$ nên từ đó suy ra $(\sqrt{x} - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện).
 Vậy $x = 9$.

Câu II. 1. Diện tích vật liệu cần dùng là diện tích toàn phần của hình trụ.
 $S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \pi(2r \cdot h + 2r^2)$.

$S \approx 3,14 \cdot (120 + 72) = 602,88 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Vậy diện tích vật liệu cần dùng để tạo nên một vỏ hộp sữa là $602,88 \text{ cm}^2$.

2. Gọi vận tốc lúc đi là $x \text{ (km/h)}$ ($x > 0$) thì vận tốc lúc về là $x + 10 \text{ (km/h)}$.

Thời gian đi là: $\frac{400}{x} \text{ (giờ)}$. Thời gian về là $\frac{400}{x + 10} \text{ (giờ)}$

Vậy ta có phương trình $\frac{400}{x} + \frac{400}{x + 10} = 18$.

Giải phương trình này tìm được $x = 40$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy vận tốc lúc đi là 40 km/h .

Câu III. 1. Hệ có nghiệm: $(x; y) = (1; 2)$.

2. a) Xét phương trình: $x^2 = 2mx + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 3 = 0$. (1)

Có $\Delta' = m^2 + 3 > 0 \forall m$. Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, do đó đường thẳng (d) và parabol (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của (1). Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = -3. \end{cases}$

Xét hệ thức $\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = \frac{4}{3}$ (2). Do $x_1 \cdot x_2 = -3 \Rightarrow x_1, x_2 \neq 0$.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 x_2|} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 6 + 6 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 4.$$

Do đó $4m^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$. Vậy $m \in \{-1; 1\}$.

Câu IV (h. 45)

1. Vì E và F thuộc đường tròn đường kính AB

nên $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MEH} + \widehat{MFH} = 180^\circ$.

Suy ra MEHF là tứ giác nội tiếp.

2. $\triangle AEH \sim \triangle AFM$ (g-g) nên $\frac{AE}{AF} = \frac{AH}{AM}$

$$\Rightarrow AE \cdot AM = AF \cdot AH.$$

3. Xét $\triangle EMH$ vuông tại E, $\triangle FMH$ vuông tại F có I là trung điểm MH nên $EI = FI = \frac{1}{2}MH$ (tính chất tam giác vuông) $\Rightarrow I \in$ trung trực của EF. Mà $OE = OF = R$

$\Rightarrow O$ thuộc trung trực của EF $\Rightarrow OI$ là trung trực của EF $\Rightarrow OI \perp EF$ tại N.

* Vì $AF \perp MB$, $BE \perp MA$ nên H là trực tâm của $\triangle MAB \Rightarrow MH \perp AB$ tại D $\Rightarrow \widehat{DMB} + \widehat{DBM} = 90^\circ$. Mà $OB = OF = R$ nên $\triangle OBF$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBF} = \widehat{OFB}$.

Có $IM = IF = \frac{1}{2}MH$ nên $\triangle IMF$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IMF} = \widehat{IFM}$

$$\Rightarrow \widehat{IFM} + \widehat{OFB} = \widehat{IMF} + \widehat{FBO} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OFI} = 90^\circ. \text{ Do đó } \triangle FIO \text{ vuông tại F có: } FN \perp OI \text{ nên } IN \cdot IO = IF^2.$$

Lại có: $\widehat{IKO} = \widehat{INP} = 90^\circ$, $\widehat{KIN}$ chung $\Rightarrow \triangle IKO \sim \triangle INP$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{IN}{IK} = \frac{IP}{IO} \Rightarrow IN \cdot IO = IK \cdot IP \Rightarrow IK \cdot IP = IF^2. \text{ Mà } IF = IH \text{ nên } IH^2 = IK \cdot IP$$

$$\Rightarrow \frac{IH}{IK} = \frac{IP}{IH}; \widehat{HIK} \text{ chung} \Rightarrow \triangle IKH \sim \triangle IHP \text{ (cgc)} \Rightarrow \widehat{IHP} = \widehat{IKH} = 90^\circ \Rightarrow PH \perp MD$$

$\Rightarrow PH \parallel AB$ (cùng $\perp MD$).

Câu V. Giải phương trình: $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x - 1)^2$. (1)

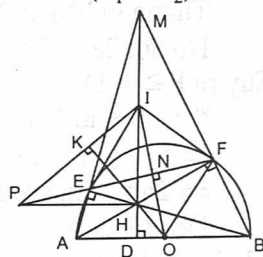
(1) $\Leftrightarrow [(x^2 - 4) - 5(x - 1)](x^2 - 4) = 6(x - 1)^2$. Đặt $a = x^2 - 4$, $b = x - 1$, ta có phương trình: $(a - 5b)a = 6b^2 \Leftrightarrow a^2 - 5ab - 6b^2 = 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - 6b) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 6b. \end{cases}$$

$$* a = -b \Leftrightarrow x^2 - 4 = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

$$* a = 6b \Leftrightarrow x^2 - 4 = 6x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$$

$$\text{Vậy: } x \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; 3 - \sqrt{7}; 3 + \sqrt{7} \right\}.$$



Hình 45

ĐỀ 4

Câu I. 1. $x = 25$ thì $B = \frac{1}{3}$.

2. $P = \frac{4\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$

3. $P^2 = P + 2 \Leftrightarrow P^2 - P - 2 = 0 \Leftrightarrow P^2 - 2P + P - 2 = 0 \Leftrightarrow P(P - 2) + (P - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (P - 2)(P + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = -1 \\ P = 2. \end{cases}$

* $P = -1 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = -1 \Rightarrow 4\sqrt{x} + 1 = -\sqrt{x} - 1$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{-2}{5}$ vô nghiệm

* $P = 2 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = 2 \Rightarrow 4\sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ thỏa mãn điều kiện. Vậy $x = \frac{1}{4}$.

Câu II. 1. $S_{xq} = \pi.r.l \Rightarrow S_{xq} \approx 3,14.10.20 = 628 \text{ (cm}^2\text{)}$

2. Gọi số xe lúc đầu là x (xe) ($x \in \mathbb{N}^*$, $x > 4$) thì mỗi xe chở $\frac{180}{x}$ (tấn).

Sau khi điều đi 4 xe, số xe còn lại là $x - 4$ (xe). Mỗi xe phải chở $\frac{180}{x - 4}$ (tấn).

Ta có phương trình $\frac{180}{x - 4} - \frac{180}{x} = \frac{1}{2}$. Giải phương trình này tìm được

$x_1 = -36$ (loại); $x_2 = 40$ thỏa mãn điều kiện của ẩn. Vậy lúc đầu đội có 40 xe.

Câu III. 1. Hệ có hai nghiệm $(x; y) \in \{(2; 2); (0; 2)\}$

2. Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 3x - m \Leftrightarrow x^2 - 3x + m = 0$. (1)

a) Đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$.

b) x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Theo hệ thức Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = m. \end{cases}$$

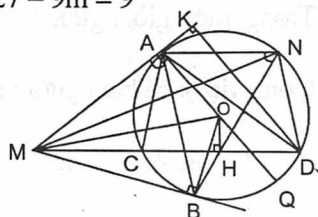
Mà $x_1^3 + x_2^3 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \Leftrightarrow 27 - 9m = 9$

$\Leftrightarrow 18 - 9m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thỏa mãn điều kiện. Vậy $m = 2$.

Câu IV. (h.46)

1. Theo tính chất tiếp tuyến $OA \perp AM$, $OB \perp BM$. Vì H là trung điểm CD nên $OH \perp CD$ (quan hệ đường kính - dây cung). Do đó:

$\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MHO} = 90^\circ$. Suy ra 5 điểm M, A, O, H, B thuộc đường tròn đường kính OM.



Hình 46

2. Có: $\widehat{MAC} = \widehat{CDA}$ và $\widehat{AMC}$ chung

$$\text{Suy ra } \triangle MAC \sim \triangle MDA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$$

$$\text{nên: } MA^2 = MC \cdot MD.$$

3. Vì 5 điểm M, A, O, H, B thuộc một đường tròn nên $\widehat{MHB} = \widehat{MAB}$.

$$\text{Mà } \widehat{MAB} = \widehat{ANB} \text{ (cùng bằng } \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{AB}) \Rightarrow \widehat{MHB} = \widehat{ANB} \Rightarrow AN \parallel MD \text{ do đó}$$

$S_{MND} = S_{MAD}$. Vì vậy: S_{MND} lớn nhất $\Leftrightarrow S_{MAD}$ lớn nhất. Kẻ $DK \perp MA$. Vì MA không đổi nên S_{MAD} lớn nhất khi DK lớn nhất. Vẽ đường kính AQ ta có: $DK \leq DA$, $DA \leq AQ$ (quan hệ dây và đường kính) nên $DK \leq AQ$. Dấu “=” xảy ra khi $D \equiv Q$.

Vậy S_{MND} lớn nhất khi $D \equiv Q$.

$$\text{Câu V. Đặt } a = \sqrt[3]{91 - x^3} \Rightarrow a^3 = 91 - x^3 \Rightarrow x^3 + a^3 = 91. \quad (2)$$

$$\text{Phương trình (1) có dạng } xa(a + x) = 84 \Leftrightarrow 3xa(a + x) = 252. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) } \Leftrightarrow x^3 + a^3 + 3xa(x + a) = 343 \Leftrightarrow (x + a)^3 = 343 \Leftrightarrow x + a = 7.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} xa = 12 \\ x + a = 7. \end{cases} \text{ Từ đó tìm được } x \in \{3; 4\}.$$

ĐỀ 5

$$\text{Câu I. 1. Khi } x = 9, B = \frac{-2}{5}.$$

$$2. P = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}.$$

$$3. P > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x} - 2}{3(\sqrt{x} + 2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 5}{3(\sqrt{x} + 2)} > 0. \quad (1)$$

$$\text{Do } x \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x} + 2 > 0 \Rightarrow 3(\sqrt{x} + 2) > 0. \text{ Do đó (1) } \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 5 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{5}{2}.$$

$$\text{Suy ra } x > \frac{25}{4}. \text{ Vậy: } P > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > \frac{25}{4} \text{ và } x \neq 25.$$

$$\text{Câu II. 1. Có } V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \pi r^3 = 36\pi \Leftrightarrow r = 3 \text{ (cm)} \Rightarrow S = 4\pi r^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2. Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong toàn bộ công việc là x (giờ); thời gian người thứ hai làm một mình xong toàn bộ công việc là y (giờ) (x, y > 16).

Trong một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc); người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$

$$\text{(công việc); cả hai người làm được } \frac{1}{16} \text{ công việc. Ta có phương trình: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}. \quad (1)$$

$$\text{Trong 4 giờ, người thứ nhất làm được } \frac{4}{x} \text{ (công việc), trong 2 giờ, người thứ hai làm được } \frac{2}{y} \text{ công việc. Ta có phương trình: } \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{6}. \quad (2)$$

$$\text{Vậy ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Giải hệ này tìm được $(x = 48, y = 24)$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy người thứ nhất làm một mình sau 48 giờ xong toàn bộ công việc người thứ hai làm một mình sau 24 giờ xong toàn bộ công việc.

Câu III. 1. Điều kiện $x \neq -1, y \neq 1$. Hệ có nghiệm là $(x = 0, y = 2)$

$$2. S = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}; P = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Phương trình cần lập là: $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.

3. Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$, (d) cắt Oy tại B $(0; 2)$ và $OB = 2$. Cho $y = 0$

$$\Rightarrow mx + 2 = 0, m \neq 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{m}, \text{ (d) cắt Ox tại A } \left(\frac{-2}{m}; 0 \right), OA = \left| \frac{-2}{m} \right|.$$

Kẻ $OH \perp (d)$ tại H. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \text{ hay vì } OH = \sqrt{2} \text{ nên } \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{4}{m^2}} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{m^2 + 1}{4} \Leftrightarrow 2 = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1. \text{ Vậy } m \in \{-1; 1\}.$$

Câu IV. (h.47)

1. Theo tính chất tiếp tuyến $OB \perp AB, OC \perp AC$ nên

$\widehat{OBA} + \widehat{OCA} = 180^\circ$ suy ra $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

$$2. \text{ Có: } \widehat{CBN} = \widehat{NCK} (= \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{CN})$$

và $\widehat{CKN}$ chung $\Rightarrow \triangle KCN \sim \triangle KBC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{KN}{KC} \Rightarrow KC^2 = KB \cdot KN. \quad (1)$$

3. Vì $BM \parallel AC$ nên $\widehat{BMN} = \widehat{NAC}$ (so le)

$$\text{Mà } \widehat{BMN} = \widehat{ABN} (= \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{BN})$$

$\Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{NAC}$. Lại có: $\widehat{NKA}$ chung $\Rightarrow \triangle KNA \sim \triangle KAB$ (g.g)

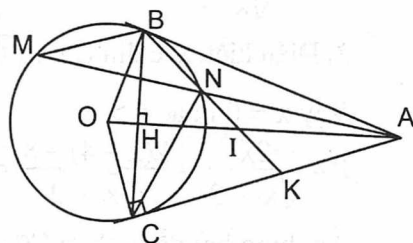
$$\Rightarrow \frac{KN}{KA} = \frac{KA}{KB} \Rightarrow KA^2 = KN \cdot KB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KA = KC$.

Gọi H là giao của OA và BC. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau có $AB = AC$ và $OB = OC = R$ nên OA là trung trực của BC suy ra $OA \perp BC$ tại H và $HB = HC$. Do đó AH và BK là trung tuyến của tam giác ABC suy ra I là trọng tâm của tam giác ABC.

$$\text{Từ đó ta có: } AI = \frac{2}{3} AH.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông COA có: $OH \cdot OA = OC^2$



Hình 47

$$\Rightarrow OH = \frac{OC^2}{OA} \Rightarrow OH = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3} \Rightarrow AH = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8R}{3} \Rightarrow AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{8R}{3}$$

$$\text{Vậy } AI = \frac{16R}{9}.$$

Câu V. Vì $x^2y + x + 1 \leq y \Rightarrow x + 1 \leq y(1 - x^2)$ mà $x + 1 > 0 \Rightarrow 1 \leq y(1 - x)$

$$\text{Do } y > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq 1 - x, \text{ do } x > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \leq x(1 - x).$$

$$\text{Có } x(1 - x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{4} \text{ dấu } = \text{ xảy ra khi } x = \frac{1}{2}, y = 2.$$

$$S = \frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{1}{\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}}. \text{ Ta có: } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = \frac{x}{y} + \frac{y}{16x} + \frac{15y}{16x} + 2.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cô-si: } \frac{x}{y} + \frac{y}{16x} \geq \frac{1}{2}, \text{ dấu } = \text{ xảy ra khi } y = 4x.$$

$$\text{Do } \frac{x}{y} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 4 \Rightarrow \frac{15y}{16x} \geq \frac{15}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 \geq \frac{25}{4} \Rightarrow S \leq \frac{4}{25}.$$

$$\text{Dấu } "=" \text{ xảy ra khi } x = \frac{1}{2}; y = 2. \text{ Vậy } \max S = \frac{4}{25} \text{ khi } x = \frac{1}{2}, y = 2.$$

ĐỀ 6

Câu I. 1. $B = \frac{1}{5}.$

2. $P = \frac{2x}{\sqrt{x} - 2}.$

3. Điều kiện xác định của $\sqrt{P}$ là $\frac{2x}{\sqrt{x} - 2} \geq 0$ mà $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 > 0 \Rightarrow x > 4.$

Vậy $x = 0$ hoặc $x > 4.$

$$P = \frac{2x}{\sqrt{x} - 2} = \frac{2(x - 4) + 8}{\sqrt{x} - 2} = 2(\sqrt{x} + 2) + \frac{8}{\sqrt{x} - 2} = 2(\sqrt{x} - 2) + \frac{8}{\sqrt{x} - 2} + 8.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương: $2(\sqrt{x} - 2) + \frac{8}{(\sqrt{x} - 2)} \geq 8$

$$\Rightarrow P \geq 16. \text{ Dấu } "=" \text{ xảy ra } \Leftrightarrow 2(\sqrt{x} - 2) = \frac{8}{\sqrt{x} - 2} \Leftrightarrow x = 16$$

$$\Rightarrow \sqrt{P} \geq 4. \text{ Dấu } "=" \text{ xảy ra khi } x = 16.$$

Vậy $\min \sqrt{P} = 4$ khi $x = 16.$

Câu II. 1. Gọi cạnh góc vuông lớn là x (cm) ($4 < x < 20$) thì cạnh góc vuông nhỏ là $(x - 4)$ (cm). Theo định lý Pytago, ta có phương trình:

$$x^2 + (x - 4)^2 = 400. \text{ Giải phương trình này tìm được } x_1 = -12 \text{ (loại),}$$

$x_2 = 16$ thỏa mãn điều kiện của ẩn. Vậy cạnh góc vuông lớn dài 16cm còn cạnh góc vuông nhỏ dài $16 - 4 = 12$ (cm).

2. Có $2\pi rh = 16\pi \Rightarrow 2rh = 16$ mà $h = 2r \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$ (cm) $\Rightarrow r = 2$ (cm).

Vậy $V = \pi r^2 h = 16\pi$ (cm³).

Câu III. 1. $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 1 = 5 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m \neq 2 \end{cases} \cdot \text{Vậy } m = -2.$

2. Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) - 3m(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1-3m) = 0. \quad (2)$

a) Khi $m = 1$, phương trình (2) có dạng: $(x-1)(x^2+x-2) = 0, x \in \{1; -2\}.$

b) Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 & (a) \\ x^2+x+1-3m=0 & (b) \end{cases}$

* (a) $\Leftrightarrow x = 1$. Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (b) phải có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$.

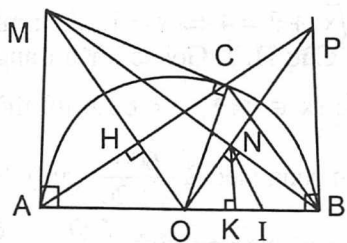
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4 + 12m > 0 \\ 1^2 + 1 + 1 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m \neq 1. \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi $m > \frac{1}{4}, m \neq 1$.

Câu IV (h.48)

1. Theo tính chất tiếp tuyến $OA \perp AM, OC \perp CM$. Do đó $\widehat{MAO} + \widehat{MCO} = 180^\circ \Rightarrow MAOC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Vì C thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Theo tính chất tiếp tuyến $OB \perp BP$ nên tam giác ABP vuông tại B . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BAP , đường cao BC ta có: $AC \cdot AP = AB^2 = 4R^2$.



Hình 48

3. Gọi H là giao của MO và AC . Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $MA = MC$, mà $OA = OC = R$ nên MO là trung trực của $AC \Rightarrow MO \perp AC$ tại $H \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{HAO}$ (cùng phụ $\widehat{AOM}$). Lại có: $\widehat{MAO} = \widehat{ABP} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle MAO \sim \triangle ABP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{AO}{BP}$. Mà $AO = BO = R$ nên $\frac{MA}{AB} = \frac{OB}{BP}$

lại có $\widehat{MAB} = \widehat{OBP} = 90^\circ \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle OBP$ (c.g.c).

Từ đó suy ra: $\widehat{MBA} = \widehat{OPB} \Rightarrow \widehat{OPB} + \widehat{NBP} = 90^\circ \Rightarrow \triangle NOB$ vuông tại N .

Gọi I là trung điểm $OB \Rightarrow NI = \frac{1}{2} OB$ không đổi. Kẻ $NK \perp OB$. Diện tích tam giác ONB lớn nhất khi NK lớn nhất. Mà $NK \leq NI$, dấu "=" xảy ra khi $K \equiv I \Leftrightarrow \triangle NOB$ vuông cân $\Leftrightarrow \widehat{NBO} = 45^\circ \Leftrightarrow \triangle AMB$ vuông cân tại $A \Leftrightarrow AM = AB = 2R$.

Vậy: S_{ONB} lớn nhất khi $MA = AB$.

Câu V. $S = x + \frac{1}{x} + 3y + \frac{3}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số

dương: $x + \frac{1}{x} \geq 2; 3y + \frac{3}{y} \geq 6$. Lại có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ mà $x + y \leq 2 \Rightarrow \frac{4}{x+y} \geq 2$.

Do đó $S \geq 10$, dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} x = \frac{1}{x} \\ 3y = \frac{3}{y} \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy: $\min S = 10$ khi $x = y = 1$.

ĐỀ 7

Câu I. 1. $x = 16$ thì $B = 1$.

2. $M = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3}.$

3. $M = \frac{x-9+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} = (\sqrt{x}+3) + \frac{16}{(\sqrt{x}+3)} - 6.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có: $(\sqrt{x}+3) + \frac{16}{\sqrt{x}+3} \geq 2\sqrt{16} = 8.$

Do đó $M \geq 2$, dấu = xảy ra khi $(\sqrt{x}+3) = \frac{16}{(\sqrt{x}+3)} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)^2 = 16$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = 4 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy: $\min M = 2$ khi $x = 1$.

Câu II. 1. Gọi số khẩu trang tổ sản xuất phải may trong một giờ theo kế hoạch là x chiếc ($x \in \mathbb{N}^*$, $x < 600$) thì thời gian quy định là $\frac{600}{x}$ (giờ). Thực tế, thời gian hoàn thành công việc là $\frac{600}{x+20}$ (giờ). Vì công việc được hoàn thành sớm hơn quy định là 1 giờ nên ta có phương trình: $\frac{600}{x} - \frac{600}{x+20} = 1$. Giải phương trình này tìm được $x = 100$ thỏa mãn điều kiện. Vậy theo kế hoạch, mỗi giờ tổ phải may được 100 khẩu trang.

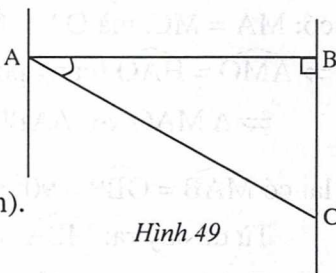
2. (h.49) Xét tam giác vuông BAC có $\hat{A} = 30^\circ$. Ta có:

$\cos A = \frac{AB}{AC}$ mà $\hat{A} = 30^\circ$ nên $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AB = 200$.

Do đó: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{200}{AC} \Rightarrow AC = \frac{400}{\sqrt{3}} = \frac{400\sqrt{3}}{3}$ (m).

3. Gọi r là bán kính mặt cầu thì $4\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r = 2$ (cm).

Vậy thể tích hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$ (cm³).



Hình 49

Câu III. 1. Điều kiện
$$\begin{cases} 2x+y \neq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Hệ tương đương với
$$\begin{cases} \frac{3}{2x+y} + 3\sqrt{y} = 6 & (3) \\ \frac{3}{2x+y} + 2\sqrt{y} = 5. & (4) \end{cases}$$

Trừ từng vế của (3) và (4) ta có: $\sqrt{y} = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Thay vào (3): $\frac{3}{2x+1} + 3 = 6 \Leftrightarrow 3 = 3(2x+1) \Leftrightarrow 2x+1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ có nghiệm $(x = 0; y = 1)$.

2. a) Xét phương trình $x^2 = (m+2)x - 2m \Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + 2m = 0$. (1)

Đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi phương trình

(1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = (m+2)^2 - 8m > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

b) x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) nên theo hệ thức Vi-ét

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m. \end{cases}$$

Ta có điều kiện $x_1, x_2 \neq 0 \Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

(*) $\Rightarrow 2x_1^2 + 2x_2^2 = 5x_1x_2 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow 2(m+2)^2 - 18m = 0$
 $\Leftrightarrow 2m^2 - 10m + 8 = 0, m_1 = 1, m_2 = 4$ thỏa mãn điều kiện. Vậy $m \in \{1; 4\}$.

Câu IV. (h.50)

1. Theo giả thiết $BE \perp AC, CF \perp AB$ nên $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$

Mà E và F là 2 đỉnh đối diện $\Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

2. Xét hai tam giác DBH và DAC có $\widehat{HDB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

$\widehat{DBH} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) nên

$\triangle DBH \sim \triangle DAC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{DH}{DC}$

$\Rightarrow DB \cdot DC = DH \cdot DA$.

3. Vì $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow ABDE$

là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABE}$. Lại có: $\widehat{BDH} + \widehat{BFH} = 180^\circ$

$\Rightarrow BDHF$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó: $\widehat{FBH} = \widehat{FDH}$. Suy ra: $\widehat{FDH} = \widehat{EDH} \Rightarrow DH$ là phân giác của $\widehat{FDE}$.

Mà: $KD \perp DH$ tại D $\Rightarrow KD$ là phân giác ngoài tại D của $\triangle DEF$.

Gọi I là giao điểm của DH và FE. Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{IF}{IE} = \frac{KF}{KE} = \frac{DF}{DE}.$$

Mà $MN \parallel AC$ nên theo hệ quả định lý Ta - lét:

$$\frac{MF}{AE} = \frac{KF}{KE}, \frac{FN}{AE} = \frac{IF}{IE} \Rightarrow \frac{MF}{AE} = \frac{FN}{AE} \Rightarrow MF = FN.$$

Câu V. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $a = \sqrt{1+x}, b = \sqrt{1-x}$ ($a, b \geq 0$) thì:

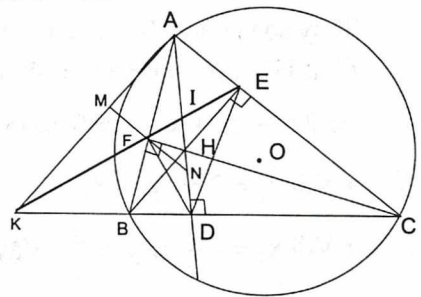
$a^2 + b^2 = 2; a \cdot b = \sqrt{1-x^2}$. Do đó: phương trình đã cho có dạng:

$(a+b)(a^2 + b^2 + 2ab) = 8 \Leftrightarrow (a+b)^3 = 8 \Leftrightarrow a+b = 2 \Leftrightarrow b = 2-a$.

mà $a^2 + b^2 = 2$ nên $a^2 + (2-a)^2 = 2 \Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Với $a = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = 1 \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.



Hình 50

ĐỀ 8

Câu I. 1. $x = 9$; $A = -\frac{1}{2}$.

2. $B = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

3. $B - A \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} - \frac{3}{5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 3}{5(1 + \sqrt{x})} \leq 0. \quad (1)$

Mà $5(1 + \sqrt{x}) > 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow 4x \leq 9$.

Vậy $0 \leq x \leq \frac{9}{4}$ mà x nguyên nên $x \in \{0; 1; 2\}$.

Câu II.1. Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h) ($x > 10$). Thì vận tốc lúc về là $(x - 10)$ (km/h).

Thời gian đi là: $\frac{300}{x}$ (giờ), thời gian về là $\frac{300}{x - 10}$ (giờ). Vì thời gian về nhiều hơn

thời gian đi là 1 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{300}{x - 10} - \frac{300}{x} = 1. \text{ Giải phương trình này tìm được } x = 60 \text{ thoả mãn điều kiện}$$

của ẩn. Vậy vận tốc lúc đi là 60km/h.

2. Ta có $r = 10\text{cm}$, $l = 4\text{m} = 400\text{cm}$ nên diện tích sơn cần dùng là $S_{xq} = 2\pi rl$.

Thay số ta được: $S = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 400 = 8000\pi \text{ (cm}^2\text{)} \Rightarrow S \approx 8000 \cdot 3,14 = 25120 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Câu III.1. Xét phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x + 1) = 0, x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

* Với $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 8$;

* Với $x_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2}$. Vậy các giao điểm cần tìm là $A(2; 8)$ và $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

2. a) Khi $m = 2$, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

b) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 1. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow y = 1 - mx$; thay vào (2) ta được $x + m(1 - mx) = 1 \Leftrightarrow (1 - m^2)x = 1 - m$.

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $1 - m^2 \neq 0$ hay $m \neq \pm 1$. Khi đó

$$x = \frac{1 - m}{1 - m^2} = \frac{1}{1 + m} \Rightarrow y = 1 - \frac{m}{1 + m} = \frac{1}{1 + m}.$$

Để $x > 0, y > 0$ thì $\frac{1}{1 + m} > 0 \Leftrightarrow 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Vậy điều kiện cần tìm là $m > -1$ và $m \neq 1$.

Câu IV. (h.51)

1. Vì N thuộc đường tròn đường kính CD nên $\widehat{CND} = 90^\circ$. Theo giả thiết $CK \perp AB$.

Do đó $\widehat{CNE} + \widehat{CKE} = 180^\circ \Rightarrow CNEK$ là tứ giác nội tiếp.

2. Tứ giác ABCN nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{MNA} = \widehat{MBC}$.

Do đó $\triangle MNA \sim \triangle MBC$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MN}{MB} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow MA \cdot MB = MN \cdot MC.$$

3. Kẻ đường kính AF $\Rightarrow F$ cố định

IH cắt CF tại Q. Ta có:

$\widehat{ANF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$HI \perp AN \Rightarrow HI \parallel NF$ hay $HQ \parallel NF$

mà $HN = HC \Rightarrow QC = QF$ mà C và F cố định

$\Rightarrow Q$ cố định. Có A, Q cố định, $\widehat{AIQ} = 90^\circ$

$\Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính AQ.

Câu V. Vì $a, b \geq 0, a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow 0 \leq a^2 \leq 1, 0 \leq b^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$

$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Rightarrow ab \geq a + b - 1.$

Do đó: $M = ab + \frac{1}{a+b} \geq a + b + \frac{1}{a+b} - 1.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $a + b + \frac{1}{a+b} \geq 2$ suy ra $M \geq 1.$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a+b = \frac{1}{a+b} \\ (a-1)(b-1) = 0 \Rightarrow (a, b) \text{ là hoán vị của } (1; 0). \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Vậy min $M = 1$ khi $(a, b) \in \{(1; 0); (0; 1)\}.$

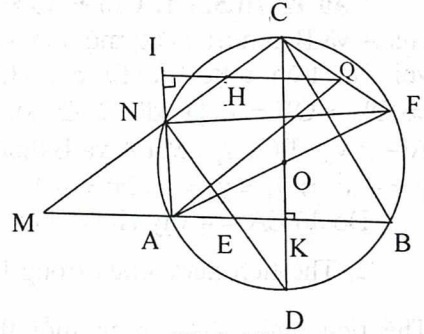
ĐỀ 9

Câu I. 1. B = 3.

$$\begin{aligned} 2. P &= \frac{6}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}-1} = \frac{6+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{6+x-\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x-4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x-\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$3. \frac{1}{P} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}.$$

• Nếu $0 \leq x < 9$ và $x \neq 1$ thì $P < 0 \Rightarrow \frac{1}{P} < 0.$



Hình 51

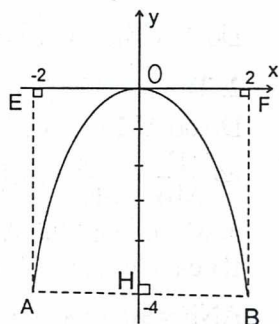
• Xét $x > 9$ mà $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 10 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{x} - 3 \geq \sqrt{10} - 3 > 0$.

Do đó $\frac{4}{\sqrt{x}-3} \leq \frac{4}{\sqrt{10}-3}$ nên $\frac{1}{P} \leq 1 + \frac{4}{\sqrt{10}-3}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 10$.

Vậy $x = 10$ thì $\frac{1}{P}$ có giá trị lớn nhất.

Câu II. (h.52) 1. Gọi E và F là hình chiếu của A và B trên trục Ox; một đơn vị trên trục ứng với 1m trên thực tế. Ta có: $HA = HB = 2 \Rightarrow OE = OF = 2$. Do đó $E(-2; 0)$; $F(2; 0)$. Điểm $A(-2; y_1)$ $B(2; y_2)$. Mà A và B thuộc parabol (P): $y = -x^2 \Rightarrow y_1 = y_2 = -(2)^2 = -4$.

Do đó $EA = 4$ vậy $HO = 4$ (m).



Hình 52

2. Thể tích nước chứa trong bể là $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ với $R = 1$ m. Do đó $V = \frac{4}{3} \pi$ (m^3).

Thể tích nước chứa trong mỗi thùng phi là $V_1 = \pi r^2 h$ với $r = 0,2$ m, $h = 0,8$ m $\Rightarrow V_1 = (0,2)^2 \cdot 0,8 \cdot \pi = 0,032\pi$ (m^3). Lượng nước cần dùng để làm đầy 40 thùng phi là $40 \cdot 0,032\pi = 1,28\pi$ (m^3). Vì $\frac{4}{3} > 1,28$ nên bể có đủ nước làm đầy 40 thùng phi như vậy.

3. Gọi chiều dài thửa đất là x (m) thì chiều rộng là $20 - x$ (m) ($10 \leq x < 20$). Vì diện tích thửa đất là 64 (m^2) nên ta có phương trình: $x(20 - x) = 64$

$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 64 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 16x + 64 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 16) = 0. \quad (1)$$

Giải (1) được $x_1 = 16$ thỏa mãn điều kiện của ẩn; $x_2 = 4$ (loại).

Vậy chiều dài thửa đất là 16m, chiều rộng là $20 - 16 = 4$ m.

Câu III. 1. Điều kiện $y \geq 0$, hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (4; 1)$.

2. a) Xét phương trình $x^2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0$. (1)

Có $\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$. Để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt. Muốn vậy $(m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Theo hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1. \end{cases}$$

Vì $x_2 = |x_1|$ nên $x_2 = x_1$ hoặc $x_2 = -x_1$ mà $x_2 > x_1$ nên $x_2 = -x_1$.

Vậy $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn điều kiện. Vậy $m = 0$.

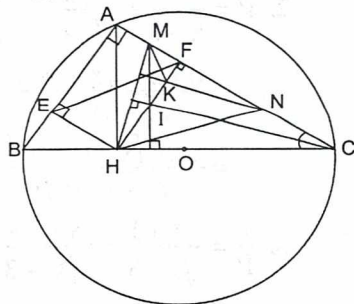
Câu IV (h.53).

1. Tam giác HAB vuông tại H, đường cao HE. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $AE \cdot AB = AH^2$. Tương tự $AF \cdot AC = AH^2 \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$. (1)

2. Từ (1) suy ra $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$, có $\widehat{BAC}$ chung

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AEF}$$

$$\Rightarrow \widehat{FCB} + \widehat{FEB} = 180^\circ \Rightarrow BCFE \text{ là tứ giác nội tiếp.}$$



Hình 53

3. • Vì A thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

$$\text{Do đó } AC = BC \cdot \cos 30^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Tam giác AHC vuông tại H nên $HC = AC \cdot \cos C$

$$\Rightarrow HC = R\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}.$$

$$\text{Tam giác FHC vuông tại F nên } HF = HC \cdot \sin C \Rightarrow HF = \frac{3R}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{3R}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3R}{4}.$$

• Gọi I là trung điểm của HF thì MI là đường trung bình của tam giác FAH nên $MI \parallel AH$ do đó $MI \perp CH$. Mà $HF \perp MC$ nên I là trực tâm $\triangle CMH$ suy ra $CI \perp HM$. Ta có $HF \perp MN$ nên $K \in HF$ và $NK \perp HM \Rightarrow NK \parallel CI$.

Xét tam giác FIC có $NF = NC$, $NK \parallel CI \Rightarrow KF = KI$. Do đó $KF = \frac{1}{4} HF$.

$$\text{Suy ra } S_{KMN} = \frac{1}{4} S_{HMN}. \text{ Mà } MN = \frac{1}{2} AC = \frac{R\sqrt{3}}{2}, HF = \frac{3R}{4}.$$

$$\text{Vậy } S_{KMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} MN \cdot HF = \frac{1}{8} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3R}{4} = \frac{3\sqrt{3} R^2}{64}.$$

Câu V. Điều kiện $x \neq -2$. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\frac{x^2}{(x+2)^2} - 2x + (x+2)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+2} - x - 2 \right)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+2} - x - 2 = 2x-1 & (1) \\ \frac{x}{x+2} - x - 2 = 1-2x. & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải phương trình (1) được } x_1 = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{-3+\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Giải phương trình (2) được } x_3 = \sqrt{6}, x_4 = -\sqrt{6}. \text{ Vậy } x \in \left\{ \frac{-3-\sqrt{3}}{3}; \frac{-3+\sqrt{3}}{3}; \pm\sqrt{6} \right\}.$$

ĐỀ 10

$$\text{Câu I. 1. } A = \frac{2\sqrt{36}}{\sqrt{36} + 3} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$2. M = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}; \text{ với } x \geq 0; x \neq 9.$$

$$3. M = M^4 \Leftrightarrow M - M^4 = 0 \Leftrightarrow M(1 - M^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M = 0 \\ M = 1. \end{cases}$$

$$* M = 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$* M = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} = 1 \Rightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = -3; \text{ vô lí.}$$

Vậy $M = M^4 \Leftrightarrow x = 0$.

Câu II. 1.

Gọi vận tốc xe 1 là x (km/h) thì vận tốc xe 2 là $x + 10$ (km/h) ($x > 0$).

Sau 2 giờ, xe 1 đi được $2x$ (km), xe 2 đi được $2(x + 10)$ (km).

Vậy ta có phương trình $2x + 2(x + 10) = 200$. (1)

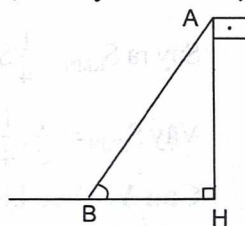
Giải phương trình (1) được $x = 45$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy vận tốc xe 1 là 45km/h và vận tốc xe 2 là 55km/h.

2. Ta có $V = \pi r^2 h$ mà $h = 2r$ nên $16\pi = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$ (cm).

Do đó $h = 4$ (cm). Diện tích vật liệu dùng để tạo nên một vỏ hộp sữa là diện tích toàn phần của hình trụ. Ta có $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(r^2 + rh)$. Thay số ta được $S = 2\pi(4 + 8) = 24\pi$ (cm²) $\Rightarrow S \approx 24 \cdot 3,14 = 75,36$ (cm²).

3. (h.54) Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông BHA ta có $AH = BH \cdot \tan B$
 $\Rightarrow AH = 5 \cdot \tan 60^\circ = 5\sqrt{3}$ (m).



Hình 54

Câu III. 1. a) Xét phương trình $x^2 = mx - m + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0$ (1) có $\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$.

Đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt; muốn vậy $(m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

b) Theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1. \end{cases}$

Ta có: $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 2 \Leftrightarrow m(m - 1) = 2$.

$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$. Suy ra $m_1 = -1$, $m_2 = 2$. Do điều kiện $m \neq 2$ nên $m = -1$.

Thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Điều kiện $x \neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

Câu IV. (h.55)

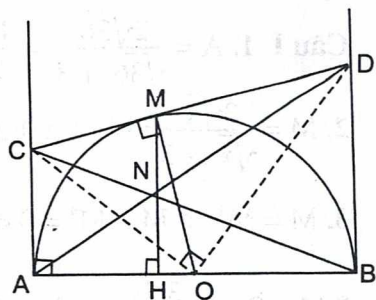
1. Theo tính chất tiếp tuyến $OA \perp AC$, $OM \perp CD$ nên: $\widehat{OAC} + \widehat{OMC} = 180^\circ$.

Hai góc này ở vị trí đối diện suy ra OACM là tứ giác nội tiếp.

2. Vì CA và CM là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên OC là phân giác của $\widehat{AOM}$;

tương tự OD là phân giác của $\widehat{BOM}$. Do đó $OC \perp OD$ nên $\triangle OCD$ vuông tại O, lại có $OM \perp CD$ nên áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $CM \cdot MD = OM^2 = R^2$.

Mà $CA = CM$, $BD = DM$ nên $AC \cdot BD = R^2$ không phụ thuộc vị trí M.



Hình 55

3. Ta có $AC \parallel BD$ (vì cùng $\perp AB$). Áp dụng hệ quả định lí Ta-lét ta có $\frac{AC}{BD} = \frac{CN}{NB}$ mà $AC = CM, BD = MD$ nên $\frac{CM}{MD} = \frac{CN}{NB} \Rightarrow MN \parallel BD$ (định lí Ta-lét đảo).

$$\text{Tương tự } \frac{MN}{BD} = \frac{CN}{CB}, \frac{CN}{CB} = \frac{AH}{AB}, \frac{AH}{AB} = \frac{NH}{BD}. \text{ Do đó } \frac{MN}{BD} = \frac{NH}{BD}.$$

Suy ra $MN = NH$.

Câu V. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có:

$$\frac{ab}{c^2(a+b)} + \frac{a+b}{4ab} \geq \frac{1}{c}; \frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{b+c}{4bc} \geq \frac{1}{a}; \frac{ac}{b^2(a+c)} + \frac{a+c}{4ac} \geq \frac{1}{b}.$$

$$\text{Suy ra } M + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ nên } M \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

$$\text{Mà } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \Rightarrow M \geq \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy min $M = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

ĐỀ 11

Câu I. 1. $B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$

2. $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

3. $S = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ mà $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2$
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2}$. Do đó $S \leq \frac{3}{2}$; dấu "=" xảy ra khi $x = 0$. Vậy max $S = \frac{3}{2}$ khi $x = 0$.

Câu II. 1. Gọi số ngày mà chi đoàn dự kiến hoàn thành công việc là x (ngày) ($x > 1$, x nguyên) thì số cây phải trồng một ngày là $\frac{600}{x}$ (cây). Số cây thực tế trồng trong một ngày là $\frac{600}{x} + 30$ (cây). Số ngày thực tế làm là $x - 1$ (ngày). Vậy ta có phương trình $(x - 1) \left(\frac{600}{x} + 30 \right) = 600$. Giải ra ta được $x = 5$ thoả mãn điều kiện của ẩn. Vậy số ngày dự kiến hoàn thành công việc là 5 ngày.

2. (h.56) Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông ta có: $AB = AC \cdot \tan C \Rightarrow AB = 20 \cdot \tan 75^\circ \approx 75(\text{m})$.

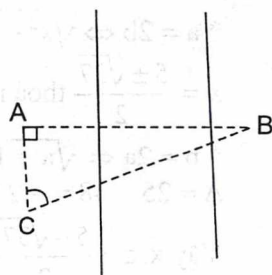
3. Thể tích một viên nước đá là: $V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2\pi}{3} (\text{cm}^3)$.

Thể tích cột nước là $V_2 = \pi \cdot 9 \cdot 12 = 108\pi (\text{cm}^3)$.

Vậy thể tích nước giải khát đổ vào cốc là:

$$V = V_2 - 6V_1 = 108\pi - 4\pi = 104\pi (\text{cm}^3).$$

Vậy $V \approx 104 \cdot 3,14 = 326,56 \text{ cm}^3$.



Hình 56

Câu III. 1. Xét phương trình $x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0$ (1), (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt nằm ở bên phải trục tung khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m > 0 \\ x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1 x_2 = -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0$.

2. Điều kiện $x \neq \pm 1$. Phương trình có nghiệm $x \in \{0; -3\}$.

3. Hệ có hai nghiệm $(x; y) \in \{(3; 0); (-3; 0)\}$.

Câu IV (h.57)

1. Do $\widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AE \cdot AD.$$

2. Vì $\widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow OA \perp BC$; mà I là trung điểm của BC nên $OI \perp BC$

$$\Rightarrow O, I, A \text{ thẳng hàng. Suy ra } \widehat{AHC} = \widehat{AIC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow A, I, C, H$ cùng thuộc một đường tròn.

3. Vì $\widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ mà $EH \perp CM$ nên $\triangle EMC$ cân tại E $\Rightarrow HM = HC$.
Do đó $\triangle AMC$ cân tại A nên $AM = AC$ không đổi.

Kẻ $MN \perp AC$ tại N. Vì AC không đổi nên diện tích tam giác MAC lớn nhất khi MN lớn nhất. Có $MN \leq MA$, dấu "=" xảy ra khi $N \equiv A$, khi đó $\triangle AMC$ vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{ACH} = 45^\circ$ nên $\triangle HAC$ vuông cân tại H $\Rightarrow \widehat{EAC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EOC} = 90^\circ$.

Vậy S_{MAC} lớn nhất khi $OE \perp OC$.

Câu V. Xét phương trình $5\sqrt{x^3 + 1} = 2(x^2 + 2)$ (1) điều kiện $x \geq -1$.

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2[(x^2-x+1) + (x+1)].$$

Đặt $a = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $b = \sqrt{x + 1}$ ($a, b \geq 0$). Ta có phương trình $5ab = 2(a^2 + b^2)$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 2b)(2a - b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = 2a. \end{cases}$$

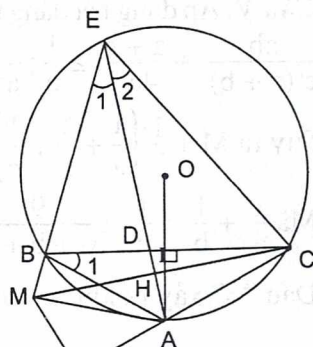
$$* a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 2\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0.$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$* b = 2a \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x + 1 = 4x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = 25 - 48 = -23 < 0, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{5 - \sqrt{37}}{2}; \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \right\}.$$



Hình 57

ĐỀ 12

Câu I. 1. $B = \frac{42}{15}$.

$$2. M = \left(\frac{\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(2\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x} + 1) \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}.$$

$$3. M = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$ thoả mãn điều kiện xác định.

$$\text{Vậy } M = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Câu II. 1. a) Bán kính viên bi hình cầu $R = 1\text{cm}$. Do đó thể tích mỗi viên bi là:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi \cdot 1 = \frac{4}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b) Khối nước hình trụ dâng lên bằng tổng thể tích của 5 viên bi thả vào cốc nước:

$$V_2 = 5 \cdot \frac{4}{3} \pi = \frac{20}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Bán kính đáy hình trụ là 3cm . Áp dụng hệ thức:

$$V = \pi r^2 h, \text{ ta có } h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{20\pi}{3} : (\pi \cdot 9) = \frac{20}{27}.$$

Vậy chiều cao cột nước dâng lên là $\frac{20}{27} \text{ (cm)}$.

2. Gọi số học sinh lớp 9A là x bạn, số học sinh lớp 9B là y bạn ($x, y \in \mathbb{N}^*$, $x, y < 81$). Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 81 \\ 5x + 4y = 364. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được $(x; y) = (40; 41)$, thoả mãn điều kiện. Vậy lớp 9A có 40 bạn; lớp 9B có 41 bạn.

Câu III. 1. (d_1) cắt (d_2) tại E, phương trình hoành độ giao điểm $x + 3 = -x + 1 \Leftrightarrow x = -1$. Suy ra $y = 2$. Do đó $E(-1; 2)$. Để ba đường thẳng đồng quy thì $E \in (d_3) \Rightarrow 2 = \sqrt{2} \cdot (-1) + \sqrt{2} + m \Rightarrow m = 2$.

2. a) Khi $m = 1$, $(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -3$.

b) $\Delta = m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Rightarrow m \neq -4$.

Theo hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = -2m - 4 & (3) \end{cases}$$

Do $x_2 = 2x_1$ nên từ (2) $\Rightarrow 3x_1 = -m \Rightarrow x_1 = \frac{-m}{3}$; $x_2 = \frac{-2m}{3}$.

Thay vào (3) được $\frac{2m^2}{9} = -2m - 4$. Giải phương trình này tìm được $m \in \{-3; -6\}$,

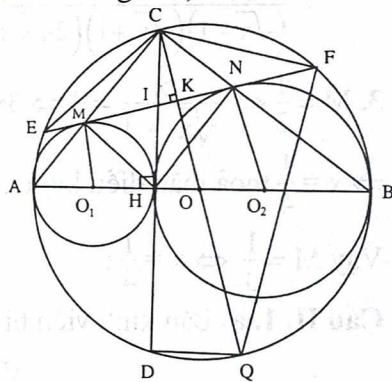
thoả mãn điều kiện $m \neq -4$.

Câu IV. (h. 58)

1. $\widehat{AMH} = \widehat{ACB} = \widehat{HNB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{CMH} = \widehat{CNH} = 90^\circ$. Suy ra CMHN là hình chữ nhật.

2. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB: $CH^2 = AH \cdot HB = 4 \cdot 9 = 36$. Suy ra $CH = 6$ nên $MN = 6$ (cm).

3. OC cắt MN tại K, cắt (O; R) tại Q $\Rightarrow \widehat{CDQ} = \widehat{CFQ} = 90^\circ$. Có $OC = OB = R \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$. Mà $O_2N = O_2B \Rightarrow \widehat{O_2NB} = \widehat{O_2BN}$, suy ra $\widehat{O_2NB} = \widehat{OCB} \Rightarrow O_2N \parallel OC \Rightarrow OC \perp MN$ tại K.



Hình 58

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông FCQ: $CF^2 = CK \cdot CQ$. (1)

Có $\triangle CKI \sim \triangle CDQ$ (g-g) $\Rightarrow CK \cdot CQ = CI \cdot CD$. Mà $OH \perp CD \Rightarrow HC = HD$.

Do đó $CI \cdot CD = \frac{1}{2} CH \cdot 2CH = CH^2$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow CF^2 = CH^2 \Rightarrow CF = CH$.

Có $OK \perp EF \Rightarrow KE = KF \Rightarrow \triangle CEF$ cân tại C $\Rightarrow CE = CF$.

Vậy $CE = CF = CH$.

Câu V. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm: $x^2 + \frac{1}{4} \geq x$, suy ra

$$x^2 + y + \frac{3}{4} \geq x + y + \frac{1}{2} > 0; \text{ tương tự } y^2 + x + \frac{3}{4} \geq x + y + \frac{1}{2} > 0.$$

Suy ra $\left(x^2 + y + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(y^2 + x + \frac{3}{4}\right) \geq \left(x + y + \frac{1}{2}\right)^2$. Dấu "=" xảy ra tại $x = y = \frac{1}{2}$.

$$\text{Tương tự: } \sqrt{\left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2y + \frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(2x + \frac{1}{2} + 2y + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2y + \frac{1}{2}\right) \leq \left(x + y + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Dấu "=" xảy ra tại $2x + \frac{1}{2} = 2y + \frac{1}{2}$ hay $x = y$.

$$\text{Vậy } \left(x^2 + y + \frac{3}{4}\right)\left(y^2 + x + \frac{3}{4}\right) = \left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2y + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

ĐỀ 13

Câu I. $M = \frac{5}{\sqrt{x} + 1}$, với $x \geq 0$; $x \neq 1$.

2. Khi $x = 4$; $M = \frac{5}{3}$.

3. Vì $\sqrt{x} + 1 > 0$ nên $M > 0$; lại có $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow M \leq 5$.

M có giá trị nguyên khi M nhận các giá trị thuộc $\{1; 2; 3; 4; 5\}$.

• $M = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$.

• $M = 2 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 1} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$.

Xét tương tự với các trường hợp còn lại, ta được kết quả là:

$$M \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{16}; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; 16\right\}.$$

Câu II. 1. Gọi chiều rộng mảnh đất là x (m) thì chiều dài là $14 - x$ (m); ($0 < x \leq 7$).

Ta có phương trình $x^2 + (14 - x)^2 = 100$. Giải phương trình này tìm được $x_1 = 6$ (thỏa mãn điều kiện); $x_2 = 8$ (loại).

Vậy chiều dài mảnh đất là 8m, chiều rộng là 6m.

2. (h.59) Có: $BH = AB \sin A \Rightarrow 12 = AB \cdot \sin 72^\circ$

$$\Rightarrow AB = \frac{12}{\sin 72^\circ} \approx 1262 \text{ (cm)}.$$

3. $R = \frac{5}{2}$ cm, $h = 12$ cm nên

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{25}{4} \cdot 12 = 75\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$V \approx 75 \cdot 3,14 = 235,5 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu III. 1. $(x; y) = (2; 2)$.

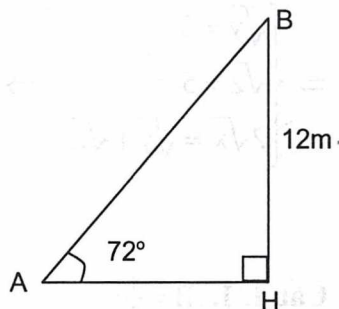
2. Xét phương trình $x^2 = mx + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - m - 1 = 0$. (1)

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Muốn vậy $\Delta = m^2 + 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -2$.

Theo hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -m - 1. \end{cases}$$

Với điều kiện $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1; \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-1}{2}$



Hình 59

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0 \Rightarrow 2m - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu IV. (h.60)

1. Ta có CD là đường kính của đường tròn

(O; R) nên $\widehat{CED} = 90^\circ$. Theo giả thiết $\widehat{BOD} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{IED} + \widehat{IOD} = 180^\circ \Rightarrow OIED$ là tứ giác nội tiếp.

$$2. \triangle AOH \sim \triangle AEB \text{ (g-g) nên } \frac{AO}{AE} = \frac{AH}{AB}$$

$$\Rightarrow AE \cdot AH = AO \cdot AB = 2R^2.$$

3. Ta có $\widehat{BEC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = 45^\circ$, $\widehat{AEC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = 45^\circ$ suy ra EI là phân giác của $\widehat{AEB}$.

$$\text{Do đó } \frac{EB}{EA} = \frac{IB}{IA} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } \tan \widehat{BAE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OH}{OA} = \frac{1}{3}.$$

Xét $\triangle OHA$ vuông tại O, ta có $OH = OA \tan \widehat{OAH}$ suy ra $OH = \frac{R}{3} = \frac{1}{3} DO$. Vì vậy H là trọng tâm của tam giác DAB. Do đó AK là trung tuyến của tam giác này. Suy ra $KB = KD$. Vì vậy $OK \perp BD$ (quan hệ đường kính - dây cung).

Câu V. Với $x, y, z \geq 0$, từ giả thiết suy ra

$$(2\sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z})^2 + (\sqrt{y} - 3)^2 + (\sqrt{z} - 5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{z} = 5 \\ 2\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ z = 25 \\ x = 16 \end{cases} \text{ Vậy } M = 1 + 1 + 1 = 3.$$

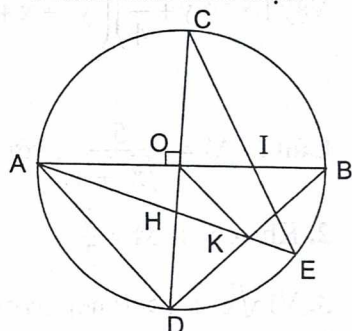
ĐỀ 14

Câu I. 1. $B = \frac{1}{5}$

$$2. P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{2} \\ = \frac{(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) \cdot 2} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}.$$

$$3. P - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Do } x > 0 \text{ nên } \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow P - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow P > \frac{1}{2}.$$



Hình 60

Câu II. 1. $S_{xq} = \pi rl$ với $r = 20\text{cm}$, $l = 30\text{cm}$.

Do đó $S_{xq} = \pi \cdot 20 \cdot 30 = 600\pi \text{cm}^2 \approx 1884 \text{cm}^2$.

Vậy diện tích lá nón cần dùng là: $3.1884 = 5652 (\text{cm}^2)$.

2. Gọi vận tốc ô tô khi qua khu dân cư là $x (\text{km/h})$ ($x > 0$) thì vận tốc quy định của xe là $x + 10 (\text{km/h})$. Ta có phương trình $\frac{40}{x+10} + \frac{8}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 38x - 80 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = -2$ (loại); $x_2 = 40$ thỏa mãn điều kiện của ẩn. Vậy vận tốc xe khi đi qua khu dân cư là 40km/h .

Câu III. 1. a) Khi $m = 1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 & (1') \\ x + y = 2. & (2') \end{cases}$

Từ (1') $\Rightarrow y = 2 - x$, thay vào (2') được $0x = 0$. Hệ vô số nghiệm (x tùy ý; $y = 2 - x$).

b) Từ (2) $\Rightarrow y = 3m - 1 - mx$, thay vào (1) được $(1 - m^2)x = -3m^2 + 2m + 1$ (3)
Hệ có nghiệm duy nhất khi (3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 1 - m^2 \neq 0$, suy ra

$m \neq \pm 1$. Khi đó $\left(x = \frac{3m+1}{m+1}; y = \frac{m-1}{m+1} \right)$. $x = |y| \Leftrightarrow \frac{3m+1}{m+1} = \left| \frac{m-1}{m+1} \right|$ (*)

Với điều kiện $\frac{3m+1}{m+1} \geq 0$, $m \neq \pm 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{m+1} = \frac{3m+1}{m+1} & (4) \\ \frac{m-1}{m+1} = \frac{-(3m+1)}{m+1} & (5) \end{cases}$

• (4) $\Leftrightarrow m - 1 = 3m + 1 \Leftrightarrow m = -1$ (loại).

• (5) $\Leftrightarrow m - 1 = -3m - 1 \Leftrightarrow 4m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ thỏa mãn các điều kiện.

Vậy $m = 0$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 = x + 6$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0. \quad (1)$$

Giải (1) được $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Suy ra (d) cắt (P) tại $A(-2; 4)$ và $B(3; 9)$.

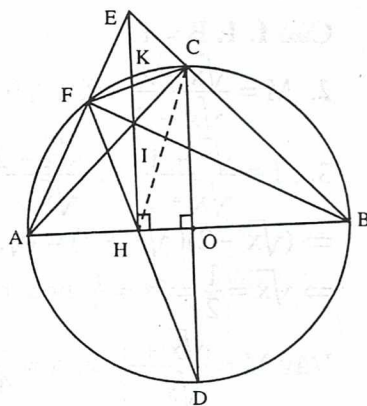
Câu IV. (h.61)

1. Do F thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AFB} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{BFE} = \widehat{BHE} = 90^\circ \Rightarrow BHFE$ là tứ giác nội tiếp.

2. Có $\widehat{ECA} = \widehat{EFB} = 90^\circ$, $\widehat{AEC}$ chung nên $\triangle ECA \sim \triangle EFB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{EC}{EF} = \frac{EA}{EB} \Rightarrow EC \cdot EB = EA \cdot EF$.

3. Từ chứng minh trên suy ra AC, BF, EH là 3 đường cao của tam giác EAB nên chúng đồng quy tại I.

Do $\frac{EC}{EF} = \frac{EA}{EB}$ và chung $\widehat{AEB}$ nên $\triangle ECF \sim \triangle EAB$.



Hình 61

$$\text{Do đó } \frac{S_{ECF}}{S_{EAB}} = \left(\frac{EC}{EA} \right)^2. \quad (1)$$

Vì $OB = OC = R$ nên $\triangle OBC$ vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC} = 45^\circ$. Do đó $\triangle HBE$ vuông cân tại $H \Rightarrow EH = HB = \frac{3R}{2}$. Mà $AH = \frac{R}{2}$ nên $AE^2 = AH^2 + HE^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{9R^2}{4} = \frac{10R^2}{4}$
 $\Rightarrow AE = \frac{R\sqrt{10}}{2}$.

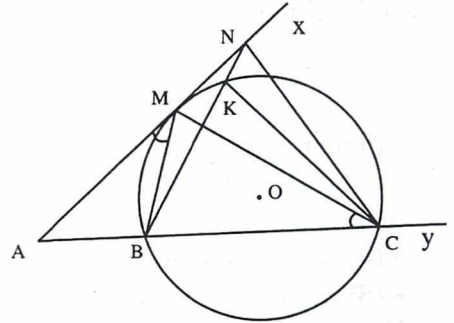
$$\text{Tương tự } BE^2 = HB^2 + HE^2 = \frac{9R^2}{2} \Rightarrow BE = \frac{3R}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Lại có } OC \parallel EH \text{ (cùng } \perp AB) \text{ nên } \frac{EC}{EB} = \frac{HO}{HB} = \frac{1}{3} \Rightarrow EC = \frac{1}{3} EB = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{EC}{EA} \right)^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{ECF} = \frac{1}{5} S_{EAB} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} EH \cdot AB = \frac{3R^2}{10}.$$

Câu V. (h.62)

Vẽ đường tròn (O) qua B và C , tiếp xúc với Ax tại M . Với N bất kì thuộc Ax , $N \neq M$. Nối NB cắt đường tròn (O) tại K , ta có $\widehat{BMC} = \widehat{BKC}$.
 Mà $\widehat{BKC} > \widehat{BNC} \Rightarrow \widehat{BMC} > \widehat{BNC}$. Vậy $\widehat{BMC}$ là góc lớn nhất.



Hình 62

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ACM}$, chung $\hat{A}$
 $\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle ACM$ (g-g).

$$\text{Suy ra } AM^2 = AB \cdot AC = 4a^2 \Rightarrow AM = 2a.$$

ĐỀ 15

Câu I. 1. $B = 1$.

$$2. M = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

$$3. M = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1) \Rightarrow x - 4 = x - 2\sqrt{x} - 3 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ thỏa mãn điều kiện xác định.}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Câu II. 1. $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ với $R = 1,5\text{cm} \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi (1,5)^3 \approx 14\text{cm}^3$.

2. Gọi thời gian một mình tổ 1 làm xong việc là x (giờ). Thời gian một mình tổ 2 làm xong việc là y (giờ) ($x, y > 12$). Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} & (1) \\ \frac{2}{x} + \frac{7}{y} = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được: $x = 60$; $y = 15$ thỏa mãn điều kiện của ẩn.

Vậy tổ 1 làm một mình sau 60 giờ xong việc; tổ 2 làm một mình sau 15 giờ xong việc.

Câu III. 1. a) Khi $m = -4$, ta có phương trình $x + \sqrt{x} - 2 = 0$ (*). Điều kiện $x \geq 0$. (*) $\Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = -2. \end{cases}$

Do $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$). Phương trình đã cho có dạng:

$t^2 - (m+3)t + m+2 = 0$ (2); có $a + b + c = 0$ nên (2) có nghiệm $t_1 = 1, t_2 = m+2$.

Để (1) có hai nghiệm phân biệt cần có các điều kiện sau $\begin{cases} m+2 \neq 1 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -2 \end{cases}$

2. Xét đường thẳng (d): $y = (m-1)x + 4$ ($m \neq 1$)

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4$; (d) cắt Oy tại B (0; 4); OB = 4.

Cho $y = 0 \Rightarrow (m-1)x + 4 = 0, x = \frac{-4}{m-1}$, (d) cắt Ox tại A $\left(\frac{-4}{m-1}; 0\right)$.

$$OA = \left| \frac{-4}{m-1} \right| = \frac{4}{|m-1|}; S_{OAB} = 2$$

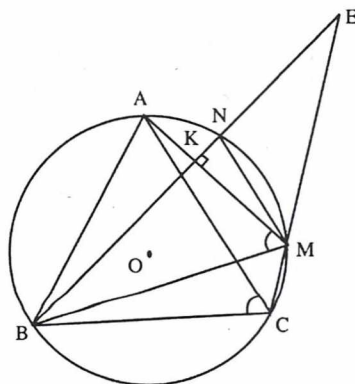
$$\Leftrightarrow OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{16}{|m-1|} = 4$$

$$\Leftrightarrow |m-1| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 4 \\ m-1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -3. \end{cases}$$

Câu IV. (h.63)

1. Có $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$. Tứ giác ABCM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ABC} = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{BMK} = \widehat{EMK} = 60^\circ$ mà $MK \perp BE$ nên $\triangle MBE$ cân tại M.



Hình 6.3

2. BCMN là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EMN} = \widehat{EBC}$ suy ra $\triangle EMN \sim \triangle EBC$ (g-g)
 $\Rightarrow \frac{EM}{EB} = \frac{EN}{EC} \Rightarrow EM \cdot EC = EN \cdot EB$.

3. Vì $\triangle MBE$ cân tại M, $MK \perp BE \Rightarrow BE = 2BK$, $MB = ME$.

Do đó chu vi $\triangle MBE = 2MB + 2BK$.

Mà $BK = MB \cdot \sin \widehat{AMB} = MB \cdot \sin 60^\circ = MB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên chu vi $\triangle MBE = MB(2 + \sqrt{3})$.

Vì vậy chu vi tam giác MBE lớn nhất khi MB lớn nhất, khi M, O, B thẳng hàng.

Câu V. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 & (1) \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x \neq 0$. Chia từng vế các phương trình cho x^2 ta được:

$$\begin{cases} \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x} = 6 & (3) \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = 5 & (4) \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{1}{x}$ ta có hệ
$$\begin{cases} a^2y + ay^2 = 6 \\ a^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ay(a+y) = 6 \\ (a+y)^2 - 2ay = 5. \end{cases}$$

Đặt $t = a + y$, $u = ay$ ta có hệ
$$\begin{cases} t \cdot u = 6 \\ t^2 - 2u = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{6}{t} \\ t^2 - \frac{12}{t} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ u = 2. \end{cases}$$

Từ đó $\begin{cases} a+y=3 \\ a \cdot y=2 \end{cases} \Leftrightarrow (a; y) \in \{(1; 2); (2; 1)\} \Rightarrow (x; y) \in \left\{(1; 2); \left(\frac{1}{2}; 1\right)\right\}$.

PHẦN THỨ BA
GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT
ĐỀ BÀI
ĐỀ 1

THI VÀO LỚP 10 THPT, THÀNH PHỐ HÀ NỘI
NĂM HỌC 2020 - 2021

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 5}{x - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

2) Chứng minh $B = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$.

3) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức $P = 2A.B + \sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài II (2,0 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Quãng đường từ nhà An đến nhà Bình dài 3km. Buổi sáng, An đi bộ từ nhà An đến nhà Bình. Buổi chiều cùng ngày, An đi xe đạp từ nhà Bình về nhà An trên cùng quãng đường đó với vận tốc lớn hơn vận tốc đi bộ của An là 9km/h. Tính vận tốc đi bộ của An, biết thời gian đi buổi chiều ít hơn thời gian đi buổi sáng là 45 phút. (Giả định rằng An đi bộ với vận tốc không đổi trên toàn bộ quãng đường đó).

2) Một quả bóng bàn có dạng một hình cầu có bán kính bằng 2cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

Bài III (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + \frac{3}{y-1} = 5 \\ 4x - \frac{1}{y-1} = 3. \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét đường thẳng (d): $y = mx + 4$ với $m \neq 0$.

a) Gọi A là giao điểm của đường thẳng (d) và trục Oy. Tìm tọa độ của điểm A.

b) Tìm tất cả giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm B sao cho tam giác OAB là tam giác cân.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và đường cao BE. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm E đến các đường thẳng AB và BC.

1) Chứng minh tứ giác BHEK là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $BH.BA = BK.BC$.

3) Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AB và I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh ba điểm H, I, K là ba điểm thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm)

Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = x^2 + 1$.

ĐỀ 2
THI VÀO LỚP 10 THPT, THÀNH PHỐ HÀ NỘI
NĂM HỌC 2021 - 2022
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài I. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 9}{x - 9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

2) Chứng minh $A + B = \frac{3}{\sqrt{x} + 3}$.

Bài II. (2,5 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đó đã làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 8 ngày trước khi hết thời hạn, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau).

2) Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao 1,6m và bán kính đáy 0,5m. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh của thùng nước này (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy $\pi \approx 3,14$).

Bài III. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{x+1} - 2y = -1 \\ \frac{5}{x+1} + 3y = 11. \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + m - 2$. Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Bài IV. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường tròn tâm C, bán kính CA. Từ điểm B kẻ tiếp tuyến BM với đường tròn (C; CA) (M là tiếp điểm, M và A nằm khác phía đối với đường thẳng BC).

1) Chứng minh bốn điểm A, C, M và B cùng thuộc một đường tròn.

2) Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng AB (N khác A, N khác B). Lấy điểm P thuộc tia đối của tia MB sao cho $MP = AN$. Chứng minh tam giác CPN là tam giác cân và đường thẳng AM đi qua trung điểm của đoạn thẳng NP.

Bài V. (0,5 điểm)

Với các số thực a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(a + b) + ab$.

ĐỀ 3
THI VÀO LỚP 10 THPT, THÀNH PHỐ HÀ NỘI
NĂM HỌC 2022 - 2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$ và $B = \frac{x+4}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$.

3) Tìm số nguyên dương x lớn nhất thoả mãn $A - B < \frac{3}{2}$.

Bài II. (2,0 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm A và đi đến địa điểm B. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 20km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường AB dài 60km, tính vận tốc của mỗi xe. (Giả định rằng vận tốc mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường AB).

2) Quả bóng đá thường được sử dụng trong các trận thi đấu dành cho trẻ em từ 6 tuổi đến 8 tuổi có dạng một hình cầu với bán kính bằng 9,5 cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

Bài III. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + \frac{12}{y+2} = 5 \\ 3x - \frac{4}{y+2} = 2 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + m^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$.

Bài IV. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A. Gọi E là một điểm bất kì trên tia CA sao cho điểm A nằm giữa hai điểm C và E. Gọi M và H lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng BC và BE.

1) Chứng minh tứ giác AMBH là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $BC \cdot BM = BH \cdot BE$ và HM là tia phân giác của góc AHB.

3) Lấy điểm N sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AN. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EN và AB. Chứng minh ba điểm H, K, M là ba điểm thẳng hàng.

Bài V. (0,5 điểm)

Với các số thực không âm x và y thoả mãn $x^2 + y^2 = 4$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

LỜI GIẢI TÓM TẮT VÀ BIỂU ĐIỂM

ĐỀ 1

Bài I. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$ 0,5đ

Thay $x = 4$ (thỏa mãn ĐKXĐ) vào biểu thức A, tính được: $A = \frac{3}{4}$.

2) Chứng minh

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}+1} \quad 1,0đ$$

$$B = \frac{3}{(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{3(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

3) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức

$P = 2AB + \sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất 0,5đ

$$P = 2AB + \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}+2} + \sqrt{x}$$

$$\text{Ta có: } P - 2 = \frac{4}{\sqrt{x}+2} + \sqrt{x} - 2$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x}+2} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0.$$

Suy ra $P \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

KL: $x = 0$ thì biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài II. (2,0 điểm)

1) Tính vận tốc đi bộ của An 1,5 đ

Gọi vận tốc đi bộ của An là x (đơn vị: km/h, $x > 0$).

Vận tốc đi xe đạp của An là $x + 9$ (km/h).

Thời gian An đi bộ từ nhà An đến nhà Bình là $\frac{3}{x}$ (giờ).

Thời gian An đi xe đạp từ nhà Bình về nhà An là $\frac{3}{x+9}$ (giờ).

Lập luận dẫn đến phương trình: $\frac{3}{x} - \frac{3}{x+9} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -12. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện loại $x = -12$, thử lại thấy $x = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

KL: vận tốc đi bộ của An là 3km/h.

2) Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn 0,5đ

Diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó là:

$$S = 4\pi R^2 \approx 4 \times 3,14 \times 2^2 = 50,24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài III (2,5 điểm)

$$1) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2x + \frac{3}{y-1} = 5 \\ 4x - \frac{1}{y-1} = 3 \end{cases} \quad 1,0đ$$

ĐKXĐ: $y \neq 1$.

$$\text{Đặt } \frac{1}{y-1} = b, \text{ ta có hệ } \begin{cases} 2x + 3b = 5 \\ 4x - b = 3. \end{cases}$$

Giải hệ

$$\begin{cases} 2x + 3b = 5 \\ 4x - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

$$\text{Với } b = 1 \Rightarrow \frac{1}{y-1} = 1 \Rightarrow y = 2 \text{ (thỏa mãn}$$

ĐKXĐ).

KL: hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 2)$

2a) Tìm tọa độ của điểm A 0,75đ

Gọi tọa độ điểm A là $(x_A; y_A)$. Do điểm A thuộc trục Oy nên $x_A = 0$.

Do điểm A thuộc đường thẳng (d): $y = mx + 4$ nên $y_A = mx_A + 4 = m \cdot 0 + 4 = 4$.

KL: tọa độ điểm A là $(0; 4)$.

b) Tìm tất cả giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm B sao cho tam giác OAB là tam giác cân. 0,75đ

Gọi tọa độ điểm B là $(x_B; y_B)$. Do điểm B thuộc trục Ox nên $y_B = 0$.

Vì điểm B thuộc đường thẳng (d):

$y = mx + 4$ dẫn đến $0 = mx_B + 4$.

Vì $m \neq 0 \Rightarrow x_B = \frac{-4}{m} \Rightarrow OB = |x_B| = \left| \frac{-4}{m} \right|$

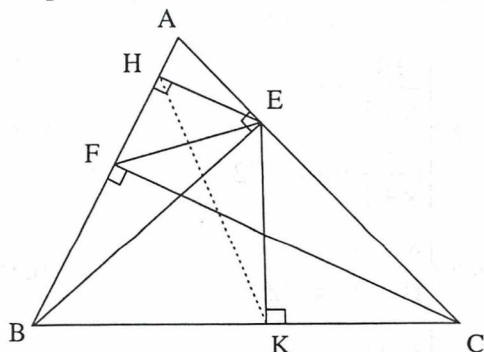
Vì $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên để tam giác OAB là tam giác cân thì $OA = OB$. Mà $OA = 4$ nên $OB = 4$.

Giải phương trình: $\left| \frac{-4}{m} \right| = 4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$. KL: $m = 1$ hoặc $m = -1$.

Bài IV (3 điểm) (h.64)

1) Chứng minh tứ giác BHEK là tứ giác nội tiếp. 1,0đ



Hình 64

Chứng minh được $\widehat{BHE} = 90^\circ$ và $\widehat{BKE} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{BHE} + \widehat{BKE} = 180^\circ$. Lập luận dẫn đến tứ giác BHEK là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $BH \cdot BA = BK \cdot BC$ 1,0đ

Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle AEB$ vuông tại E, đường cao EH có: $BH \cdot BA = BE^2$.

Chứng minh tương tự có: $BK \cdot BC = BE^2$

Vậy $BH \cdot BA = BK \cdot BC$.

3) Chứng minh ba điểm H, I, K là ba điểm thẳng hàng 1,0đ

Chứng minh được $\widehat{BHK} = \widehat{BEK}$ (1)
(BHEK là tứ giác nội tiếp).

Chứng minh được $\widehat{BEK} = \widehat{BCE}$ (2)
(cùng phụ với $\widehat{EBC}$).

Chứng minh được $\widehat{BCE} = \widehat{HFE}$ (3)
(BCEF là tứ giác nội tiếp).

Chứng minh được $\widehat{HFE} = \widehat{FHI}$ (4)
(tam giác FHI cân tại I).

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{FHI}$.

Do $\triangle ABC$ nhọn, hai điểm I và K nằm cùng phía đối với đường thẳng HF nên H, I, K là ba điểm thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm)

Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = x^2 + 1 \quad 0,5đ$$

$$\text{ĐKXD: } x \geq \frac{2}{3}.$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2\sqrt{3x-2} = 2x^2 + 2$$

$$\dots \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{3x-2}-1)^2 = 0.$$

Lập luận dẫn đến $x = 1$ (thỏa mãn ĐKXD).

KL: Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

ĐỀ 2

Bài I. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$ 1,0đ

Thay $x = 16$ (TMĐK) vào biểu thức A 0,5đ

Tính được $A = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{16}+3} = \frac{4}{7}$ 0,5đ

2) Chứng minh $A + B = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$ 1,0đ

$$A + B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - (3x+9)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

0,25đ

$$= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2x + 6\sqrt{x} - 3x - 9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

0,25đ

$$= \frac{3\sqrt{x} - 9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

0,25đ

$$= \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

0,25đ

Bài II. (2,5 điểm)

1) Hỏi mỗi ngày tổ đó phải sản xuất bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? 1,5đ

Gọi số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ sản xuất phải làm trong một ngày theo kế hoạch là x (bộ), ($x > 0$) 0,25đ

Thời gian dự kiến tổ hoàn thành 4800 bộ đồ bảo hộ y tế là $\frac{4800}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày tổ sản xuất làm được số bộ đồ bảo hộ y tế là $x + 100$ (bộ)

Thời gian thực tế tổ hoàn thành 4800 bộ đồ bảo hộ y tế là $\frac{4800}{x+100}$ (ngày) 0,25đ

Lập luận để có phương trình:

$$\frac{4800}{x} - \frac{4800}{x+100} = 8 \quad 0,5đ$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 100x - 60000 = 0 \text{ (vì } x > 0) \quad 0,5đ$$

Giải phương trình tìm được $x = -300$ hoặc $x = 200$ 0,25đ

Đối chiếu điều kiện và thử lại:

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm 200 bộ đồ bảo hộ y tế 0,25đ

2) Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước 1,0đ

Diện tích bề mặt được sơn là diện tích xung quanh của thùng nước

$$S = 2\pi Rh \approx 2 \times 3,14 \times 0,5 \times 1,6 = 5,024 \text{ (m}^2\text{)} \quad 0,5đ$$

Vậy diện tích cần tính là: 5,024 (m²) 0,5đ

Bài III. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình 1,0 đ

ĐKXD: $x \neq -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x+1} - 2y = -1 \\ \frac{5}{x+1} + 3y = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{x+1} - 6y = -3 \\ \frac{10}{x+1} + 6y = 22 \end{cases} \quad 0,25đ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{x+1} = 19 \\ \frac{10}{x+1} + 6y = 22 \end{cases} \quad 0,25đ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ 10+6y = 22 \end{cases} \quad 0,25đ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad 0,25đ$$

Đối chiếu điều kiện và kết luận:
 Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (0; 2)$.

2) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $|x_1 - x_2| = 2$ 1,0đ

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P):

$$x^2 = 2x + m - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 2 = 0 \quad (1) \quad 0,25đ$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1 \quad 0,25đ$$

Vì x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) nên x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Theo định lý Vi-ét, có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -m + 2. \end{cases}$$

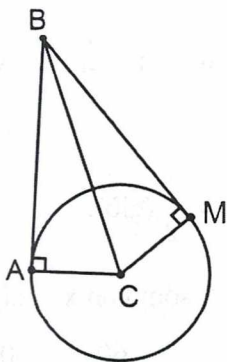
$$\text{Có } |x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4 \quad 0,25đ$$

$$\text{Do đó: } 4 - 4(-m + 2) = 4 \Leftrightarrow m = 2 \quad 0,25đ$$

Bài IV. (3,0 điểm)

1) Chứng minh bốn điểm A, C, M và B cùng thuộc một đường tròn (h.65) 1,5đ



Hình 65

Vẽ đúng $\triangle ABC$ vuông tại A 0,25đ

Vẽ phần hình còn lại đến hết ý 1. 0,25đ

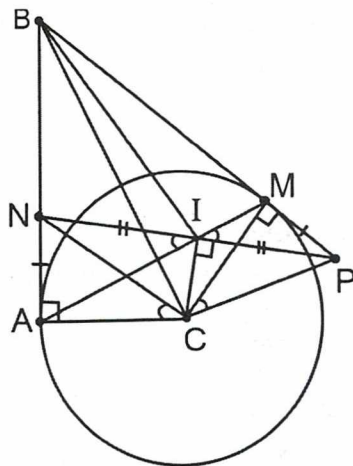
Chỉ ra được $\widehat{BMC} = 90^\circ, \widehat{BAC} = 90^\circ$ 0,25đ

Có $\widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính BC. 0,25đ

Có $\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính BC. 0,25đ

Vậy bốn điểm A, B, C và M cùng thuộc đường tròn đường kính BC 0,25đ

2) Chứng minh tam giác CPN là tam giác cân và đường thẳng AM đi qua trung điểm của đoạn thẳng NP (h.66) 1,5đ



Hình 66

Xét $\triangle CAN$ và $\triangle CMP$ có: $CA = CM$;

$$\widehat{CAN} = \widehat{CMB} = 90^\circ; AN = MP \quad 0,25đ$$

$$\Rightarrow \triangle CAN = \triangle CMP \text{ (c.g.c)} \quad 0,25đ$$

$$\Rightarrow CN = CP \quad 0,25đ$$

$$\Rightarrow \text{Tam giác CPN cân tại C} \quad 0,25đ$$

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng NP. Vì $\triangle CPN$ cân tại C và I là trung điểm của đoạn thẳng NP nên $CI \perp NP$.

Chứng minh tứ giác NACI là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{NIA} = \widehat{NCA}.$$

Chứng minh tứ giác CIMP là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{MIP} = \widehat{MCP}. \quad 0,25đ$$

$$\text{Có } \triangle CAN = \triangle CMP \Rightarrow \widehat{NCA} = \widehat{MCP}$$

Có $\widehat{NIA} + \widehat{PIA} = 180^\circ$ (vì I nằm giữa N và P)

$\Rightarrow \widehat{MIP} + \widehat{PIA} = 180^\circ$, mà hai góc này kề nhau

$\Rightarrow A, I, M$ là ba điểm thẳng hàng

$\Rightarrow$ Đường thẳng AM đi qua trung điểm của đoạn thẳng NP 0,25đ

Bài V. (0,5 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(a + b) + ab \quad 0,5đ$$

Từ điều kiện $a^2 + b^2 = 2$, ta có

$$(a + b)^2 - 2ab = 2 \Rightarrow ab = \frac{1}{2}(a + b)^2 - 1.$$

Đặt $x = a + b$

$$\text{Khi đó } P = 3x + \frac{1}{2}x^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2}(x + 3)^2 - \frac{11}{2} \quad 0,25đ$$

Vì $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ nên

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\text{Do đó } x + 3 \geq 1 \Rightarrow (x + 3)^2 \geq 1 \Rightarrow P \geq -5$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = -1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -5 0,25đ

ĐỀ 3

Bài I. (2,0 điểm)

1) Thay $x = 9$ (TMĐK) vào biểu thức A,

$$\text{ta có: } A = \frac{3\sqrt{9}}{\sqrt{9} + 2} = \frac{9}{5}.$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x + 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} - \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \\ &= \frac{x + 4 - 2(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}. \end{aligned}$$

$$3) \text{ Ta có: } A - B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}.$$

$$A - B < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x} < 3\sqrt{x} + 6 \text{ (vì } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 6, \text{ dẫn tới } x < 36$$

Kết hợp với điều kiện và yêu cầu của bài toán, suy ra $x = 35$.

Vậy số nguyên dương x lớn nhất thỏa mãn

$$A - B < \frac{3}{2} \text{ là } x = 35.$$

Bài II. (2,0 điểm)

1) Gọi vận tốc của xe máy khi đi chuyển từ A đến B là x (km/h). Điều kiện $x > 0$.

Vận tốc của ô tô là $x + 20$ (km/h)

Vì quãng đường AB dài 60km nên:

+ Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{60}{x}$ (giờ).

+ Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{60}{x + 20}$ (giờ).

$$\text{Đổi 30 phút} = \frac{1}{2} \text{ (giờ).}$$

Vì ô tô đến B sớm hơn xe máy $\frac{1}{2}$ giờ nên

$$\text{ta có phương trình } \frac{60}{x} - \frac{60}{x + 20} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 2400 = 0$$

$$\Delta' = 10^2 - 1 \cdot (-2400) = 2500 \Rightarrow \Delta' > 0,$$

$\sqrt{\Delta'} = 50$. Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-10+50}{1} = 40; x_2 = \frac{-10-50}{1} = -60.$$

Đối chiếu điều kiện ta được $x = 40$.

Vậy vận tốc xe máy là 40km/h và vận tốc ô tô là 60km/h.

2) Diện tích bề mặt quả bóng hình cầu là:

$$S = 4\pi R^2 \approx 4.3,14.(9,5)^2$$

$$\text{Vậy } S \approx 1133,54 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài III. (2,5 điểm)

1) ĐK: $y \neq -2$

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{12}{y+2} = 5 \\ 3x - \frac{4}{y+2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{12}{y+2} = 5 \\ 9x - \frac{12}{y+2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 11 \\ 2x + \frac{12}{y+2} = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{12}{y+2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, ta có hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; 2)$.

2) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P):

$$x^2 = 2x + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 = 0. \quad (1)$$

Ta có: $\Delta' = 1 + m^2$. Suy ra $\Delta' > 0$ với mọi giá trị của m .

Do đó phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Vì x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) nên x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. (1)

$$\text{Theo định lí Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -m^2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó: } (x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$$

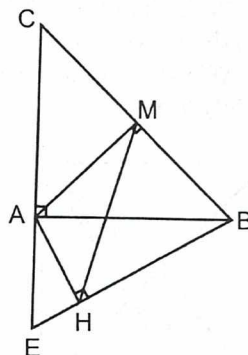
$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 4 = 0.$$

$$\text{Suy ra } 2 - m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy để } (x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3 \text{ thì } m = \pm\sqrt{6}.$$

Bài IV. (3,0 điểm)

1)



Hình 67

$$\text{Vì } AM \perp BC \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

$$\text{Vì } AH \perp BE \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ.$$

Xét tứ giác AMBH có:

$$\widehat{AMB} + \widehat{AHB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác AMBH là tứ giác nội tiếp.

2) Xét tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AM nên $AB^2 = BM \cdot BC$ (1) (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Xét tam giác ABE vuông tại A, có đường cao AH nên $AB^2 = BH \cdot BE$ (2) (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow BC \cdot BM = BH \cdot BE.$$

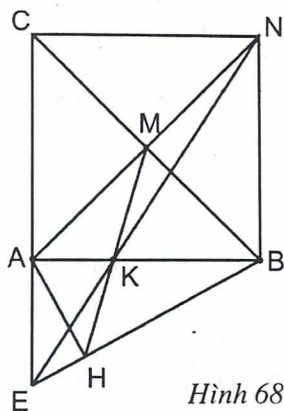
Ta có: $\widehat{AHM} = \widehat{ABM}$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMBH).

Ta có: $\widehat{BHM} = \widehat{BAM}$ (4) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMBH).

$$\text{Vì tam giác AMB cân tại M} \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{BHM}. \quad (5)$$

Vì tia HM nằm giữa hai tia HA, HB nên từ (3), (4), (5) suy ra tia HM là tia phân giác của $\widehat{AHB}$.

3) Vì tam giác ABC vuông cân tại A và $AM \perp BC$ nên M là trung điểm BC. Tứ giác ACNB có hai đường chéo AN và BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường chéo nên tứ giác ACNB là hình bình hành. Hình bình hành ACNB có hai đường chéo AN và BC vuông góc nhau nên tứ giác ACNB là hình thoi. Do đó $NB = AB$ và $NB \parallel AE$.



Hình 68

Áp dụng định lí Talet trong tam giác AKE ta có: $\frac{KA}{KB} = \frac{AE}{BN} = \frac{AE}{AB}$. (6)

Mặt khác $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{HB}$ ($= \tan \widehat{ABE}$). (7)

Từ (6), (7) suy ra: $\frac{KA}{KB} = \frac{AH}{HB}$, do đó tia

HK là tia phân giác của $\widehat{AHB}$. (8)

Mà tia HM là tia phân giác của $\widehat{AHB}$. (9)

Từ (8), (9) suy ra ba điểm H, K, M thẳng hàng.

Bài V. (0,5 điểm)

Vì $x, y \geq 0$ nên $P \geq 0$

và $P^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

$$= (x^2 + y^2) + (4xy + 3y^2) \geq 4.$$

Từ đó $P^2 \geq 4 \Leftrightarrow P \geq 2$.

Với $x = 2, y = 0$ (thỏa mãn điều kiện bài toán), ta có $P = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2.

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
Lời nói đầu	2
<i>Phần thứ nhất: MỘT SỐ CHỦ ĐỀ TOÁN CƠ BẢN</i>	3
Chủ đề 1. Biểu thức chứa căn bậc hai, căn bậc ba	3
Chủ đề 2. Phương trình và hệ phương trình	12
Chủ đề 3. Hàm số và đồ thị	33
Chủ đề 4. Bất đẳng thức và cực trị	38
Chủ đề 5. Một số bài toán hình học trong mặt phẳng	47
Chủ đề 6. Một số bài toán ứng dụng thực tế	71
<i>Phần thứ hai: MỘT SỐ ĐỀ TỰ LUYỆN</i>	74
Đề bài	74
Hướng dẫn - Lời giải - Đáp số	86
<i>Phần thứ ba: GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT</i>	113
Đề bài	113
Lời giải tóm tắt và biểu điểm	116