

ĐỀ 2

Bài 1: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2) Chứng minh: $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$.

Bài 2: (2,0 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu ô tô chạy mỗi giờ nhanh hơn 10km thì đến sớm hơn dự định 3 giờ, nếu ô tô chạy chậm lại mỗi giờ 10km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB.

2) Thầy Trung có một thùng hình trụ to. Thầy đặt một một bể cá hình trụ nhỏ có cùng chiều cao vào thùng hình trụ to, bán bể cá bằng nửa bán kính thùng hình trụ to. Thầy Trung dùng phần không gian giữa hai hình trụ đổ thêm nước để nuôi tép cảnh. Hỏi tỉ số thể tích giữa phần không gian nuôi tép và hình trụ to là bao nhiêu.

Bài 3: (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (3x+2)(2y-3) = 6xy \\ (4x+5)(y-5) = 4xy \end{cases}$$

2) Cho phương trình: $x^2 - 3x + m - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 9$.

Bài 4: (3,5 điểm) Cho nửa (O) đường kính $AB = 2R$, C là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho C khác A và $AC < CB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho: $COD = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AD và BC , F là giao điểm của AC và BD .

1) Chứng minh: $CEDF$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh: $FC.FA = FD.FB$

3) Gọi I là trung điểm của EF , chứng minh IC là tiếp tuyến của (O)

4) Hỏi khi C thay đổi thỏa mãn điều kiện bài toán, E thuộc đường tròn cố định nào?

Bài 5: (0,5 điểm) Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

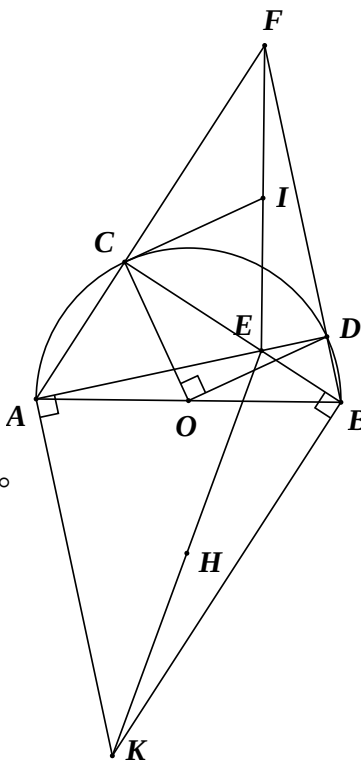
.....**Hết**.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Hướng dẫn chấm

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
1	1)	Có $x = 25$ (TMĐK) $\Rightarrow \sqrt{x} = 5$	0,25
		Thay $\sqrt{x} = 5$ vào A ta có: $A = \frac{25+7}{15} = \frac{32}{15}$ Vậy $x = 25$ thì $A = \frac{32}{15}$.	0,25
	2)	$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$ $B = \frac{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-3) + (\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}+3) - 7\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3) \cdot (\sqrt{x}+3)}$	0,25
		$B = \frac{2x-6\sqrt{x}+x+4\sqrt{x}+3-7\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3) \cdot (\sqrt{x}+3)}$	0,25
		$B = \frac{3x-9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3) \cdot (\sqrt{x}+3)}$	0,25
		$B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$	0,25
	3)	$P = A.B = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6$ Áp dụng bất đẳng thức cosi cho 2 số $\sqrt{x}+3$ và $\frac{16}{\sqrt{x}+3}$ ta có: $\sqrt{x}+3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{16}{\sqrt{x}+3}} = 8$ $\sqrt{x}+3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6 \geq 2 \Rightarrow P \geq 2$	0,25
		Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}+3 = \frac{16}{\sqrt{x}+3}$ $\Rightarrow (\sqrt{x}+3)^2 = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (tmđk) Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi $x = 1$.	0,25
2	1)	Gọi thời gian dự định là x (giờ), vận tốc của xe lúc đầu là y (km/h) Điều kiện: $x > 3, y > 10$ Chiều dài quãng đường AB là xy (km).	0,25
		Khi xe chạy nhanh hơn 10km mỗi giờ thì: +) Vận tốc của xe lúc này là: $y+10$ (km/h) +) Thời gian xe đi hết Quãng đường AB là: $x-3$ (giờ) Ta có phương trình: $(x-3)(y+10) = xy$ (1)	0,25
		Khi xe chạy chậm hơn 10km mỗi giờ thì: +) Vận tốc của xe lúc này là: $y-10$ (km/h)	0,25

		+) Thời gian xe đi hết quãng đường AB là: $x + 5$ (giờ) Ta có phương trình: $(x + 5)(y - 10) = xy$ (2)	
		Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x - 3)(y + 10) = xy \\ (x + 5)(y - 10) = xy \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 3y = 30 \\ 2y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 40 \end{cases}$	0,25
		Kết hợp điều kiện $\Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 40 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy thời gian xe dự định đi hết quãng đường AB là 15 giờ. Vận tốc của xe lúc đầu là 40 km/h . Quãng đường AB có độ dài là: $15.40 = 600 \text{ (km)}$.	0,25
	2)	Giả sử bán kính đáy của thùng hình trụ nhỏ là $R \Rightarrow$ bán kính đáy của thùng hình trụ to là $2R$ Gọi thể tích hình trụ nhỏ và thể tích hình trụ to lần lượt là $V_1; V_2$ ta có $V_1 = \pi R^2 h; V_2 = \pi 4R^2 h$ $\Rightarrow$ Thể tích phần không gian xen giữa hai thùng(Thể tích phần nước) là $V = V_2 - V_1 = 3\pi R^2 h$	0,25
		Tỉ số thể tích phần không gian xen giữa hai thùng và thể tích thùng to là $\frac{V}{V_2} = \frac{3\pi R^2 h}{4\pi R^2 h} = \frac{3}{4}$	0,25
3	1)	$\begin{cases} (3x + 2)(2y - 3) = 6xy \\ (4x + 5)(y - 5) = 4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy - 9x + 4y - 6 = 6xy \\ 4xy - 20x + 5y - 25 = 4xy \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 4y = 6 \\ -20x + 5y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 4y = 6 \\ -4x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 4y = 6 \\ -16x + 4y = 20 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 4y = 6 \\ 7x = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 4y = 6 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9.(-2) + 4y = 6 \\ x = -2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -9.(-2) + 4y = 6 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$	0,25
		Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-2; -3)$.	0,25
	2)	Có $\Delta = 9 - 4(m - 3) = 21 - 4m$ Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 21 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{21}{4}$.	0,25
		Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 3 \end{cases}$ Theo giả thiết: $x_1^3 + x_2^3 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = 9$ $\Rightarrow 3^3 - 3.3.(m - 3) = 9 \Leftrightarrow m = 5$	0,25

		Xét $\triangle ABF$ có BC, AD là hai đường cao cắt nhau tại E. $\Rightarrow E$ là trực tâm của $\triangle ABF$ $\Rightarrow EF \perp AB \Rightarrow F_1 + CAO = 90^\circ$ (3)	0,25
		Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow ICF + OCA = 90^\circ$ $\Rightarrow OCI = 90^\circ \Rightarrow OC \perp CI$ $\Rightarrow CI$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)	0,25
	4)	Ta có $\left. \begin{array}{l} O_1 + O_2 + O_3 = 180^\circ \\ O_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow O_1 + O_3 = 90^\circ$ Xét (O) ta có: $\left. \begin{array}{l} DAB = \frac{1}{2} O_1 \\ ABC = \frac{1}{2} O_3 \end{array} \right\}$ $\Rightarrow DAB + ABC = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ Xét $\triangle AEB$ ta có $DAB + ABC = 45^\circ$ $\Rightarrow AEB = 135^\circ$ Qua A kẻ $Ax \perp AE$. Qua B kẻ $By \perp BE$. $By \cap Ax = K$ Xét tứ giác $EAKB$ ta có $\left. \begin{array}{l} KAE = 90^\circ (Ax \perp AE) \\ KBE = 90^\circ (By \perp BE) \end{array} \right\}$ $\Rightarrow KAE + KBE = 180^\circ$ Mà hai góc nằm tại hai đỉnh đối nhau nên tứ giác $EAKB$ nội tiếp. $\Rightarrow AKB + AEB = 180^\circ \Rightarrow AKB + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow AKB = 45^\circ$ Gọi H là trung điểm của $EK \Rightarrow HA = HE = HK$ ($\triangle AEK$ v. uông tại A). $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EAKB$. 	0,25
		Xét (H) : $AKB = \frac{1}{2} AHB \Rightarrow AHB = 90^\circ$. Xét $\triangle AHB$ ($AHB = 90^\circ$) có : $HA = HB$ (bán kính đường tròn tâm H) $\Rightarrow \triangle AHB$ v. uông cân tại H. Mà AB không đổi nên H cố định. Áp dụng định lí Pytago vào $\triangle AHB$ ta có: $HA^2 + HB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2HA^2 = 4R^2 \Leftrightarrow HA^2 = 2R^2 \Leftrightarrow HA = \sqrt{2}R.$ Vậy khi C thay đổi E chạy trên đường tròn (H; $\sqrt{2}R$) cố định.	0,25

5		Ta có : $\frac{a}{1+b^2} = a \cdot \frac{1}{1+b^2} = a \left(1 - \frac{b^2}{1+b^2} \right) \geq a \left(1 - \frac{b}{2} \right) = a - \frac{ab}{2}$. Tương tự ta được : $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}, \quad \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$.	0,25
		Cộng vế với vế ta có : $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq (a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2}$. Vì : $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3 \Rightarrow (a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.	0,25