

ĐỀ 4

Bài I. (2 điểm) Cho hai biểu thức $P = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 64$.

2) Chứng minh: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

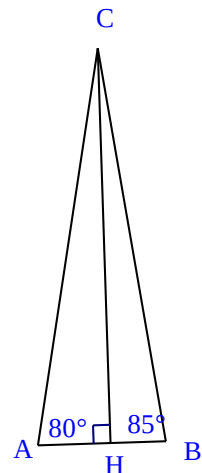
3) Với $x \in \mathbb{Z}$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = Q.(P-1)$.

Bài II. (2 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một ô tô đi từ trường TH, THCS & THPT Đa Trí Tuệ đến Yên Tử (Thượng Yên Công, Uông Bí, Quảng Ninh) cách trường 140km với vận tốc dự định. Sau khi ô tô đi được nửa quãng đường đầu thì ô tô tăng vận tốc thêm 10km/h trên hết quãng đường còn lại nên đến sớm hơn dự định 10 phút. Tính vận tốc dự định của ô tô.

2) Hai ngư dân đứng ở hai vị trí A và B ở một bên bờ hồ Đại Lải (Ngọc Thanh, Vĩnh Phúc) cách nhau 300m cùng nhìn thấy Đảo Ngọc ở vị trí C với các góc lần lượt là $\angle CAB = 80^\circ$ và $\angle CBA = 85^\circ$ như hình vẽ. Hãy tính khoảng cách từ bờ hồ đến Đảo Ngọc (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

**Bài III. (2,5 điểm)**

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 2 \\ 2\sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1 \end{cases}$$

2) Cho hàm số $y = (m-1)x + 3 - m$ với m là tham số và $m \neq 1$ có đồ thị là đường thẳng d .

a) Tìm m để d đi qua điểm $M(-1; 4)$.

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d là $\sqrt{5}$.

Bài IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , kẻ đường kính AN của (O) . Gọi M là trung điểm của BC . HO cắt AM tại G .

a) Chứng minh tam giác ANC, ABN là các tam giác vuông.

b) Chứng minh tứ giác $BHCN$ là hình bình hành và $HO = 3GO$.

c) Chứng minh bốn điểm E, F, D, M cùng thuộc một đường tròn.

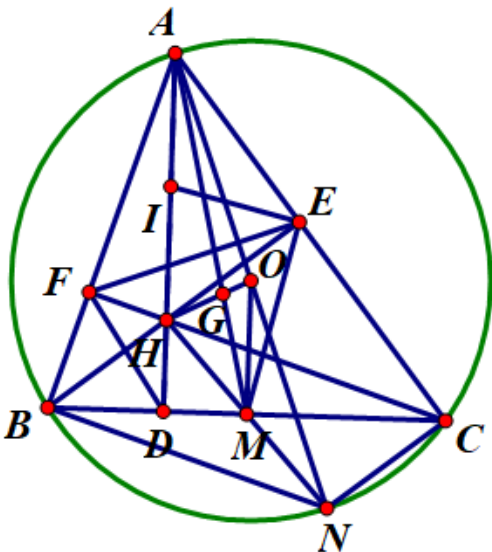
Bài V. (0,5 điểm) Cho ba số a, b, c dương. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ac} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{a+b+c}{2abc}$

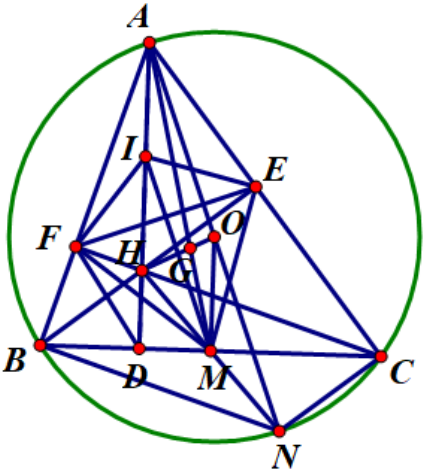
.....Hết.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	ý	Nội dung	Điểm
I	1)	Thay $x = 64$ (TMĐK) vào Q ta được	0,25
		$Q = \frac{\sqrt{64}-2}{\sqrt{64}-3} = \frac{8-2}{8-3} = \frac{6}{5}$ Vậy khi $x = 64$ thì $Q = \frac{6}{5}$.	0,25
	2)	$P = \frac{x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$	0,25
		$= \frac{x+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
		$= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$	0,25
	3)	$: K = Q.(P-1) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 \right) = \frac{2}{\sqrt{x}-3}$ *) TH1: Với $0 \leq x < 9$ và $x \neq 4$ thì $\sqrt{x}-3 < 0 \Rightarrow K < 0$ *) TH2: Với $x > 9$ thì $\sqrt{x}-3 > 0 \Rightarrow K > 0$	0,25
		Ta có: $K_{\max} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)_{\min} \Leftrightarrow (\sqrt{x})_{\min} \Leftrightarrow x_{\min}$ $\left. \begin{array}{l} x_{\min} \\ \text{Ta có: } x \in \mathbb{Z} \\ x > 9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 10$ Thay $x = 10$ vào biểu thức K , ta có: $K = 6 + 2\sqrt{10}$ Vậy với $x \in \mathbb{Z}; x = 10$ thì GTLN của biểu thức K là $6 + 2\sqrt{10}$	0,25
II	1)	Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h) (điều kiện : $x > 0$)	0,25
		Thời gian dự định của ô tô là $\frac{140}{x}$ (h)	0,25
		Thời gian ô tô đi nửa quãng đường đầu là $\frac{70}{x}$ (h).	
		Vận tốc ô tô đi nửa quãng đường sau là: $x+10$ (km/h)	0,25
		Thời gian ô tô đi nửa quãng đường sau là $\frac{70}{x+10}$ (h).	
		Đổi: 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ Vì xe đến Yên Tử sớm hơn thời gian dự định 10 phút nên ta có phương trình: $\frac{70}{x} + \frac{70}{x+10} + \frac{1}{6} = \frac{140}{x}$ (1)	0,25

III		Giải phương trình (1) ta tìm được $x = 60 \text{ km/h}$.	0,25
		Vậy vận tốc dự định của ô tô là 60 km/h .	0,25
	2)	Lập luận : $d = \frac{300}{\cot 80^\circ + \cot 85^\circ}$	0,25
		Tính : $d \approx 1137,16 \text{ m}$ Vậy: Tính khoảng cách d từ bờ hồ đến Đảo Ngọc là	0,25
	1)	Điều kiện xác định $x \geq \frac{1}{2}, x - y > 0$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2x-1} \\ v = \frac{1}{\sqrt{x-y}} \end{cases} (u \geq 0, v > 0)$	0,25
		Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u + v = 2 \\ 2u - v = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ 3u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u + v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$	0,5
		$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$.	0,25
	2)		
	a)	Thay $x = -1; y = 4$ vào phương trình đường thẳng d $\Rightarrow 4 = (m-1) \cdot (-1) + 3 - m \Rightarrow m = 0 \text{ (TMĐK)}$	0,75
	b)	Đk: $m \neq 3$ Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với trục hoành và trục tung. $\Rightarrow A\left(\frac{m-3}{m-1}; 0\right); B(0; 3-m)$ $\Rightarrow OA = \left \frac{m-3}{m-1}\right ; OB = 3-m = m-3 $.	0,25
		Xét $\triangle OAB$ vuông tại O có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$. $\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{m^2 - 2m + 2}{(m-3)^2}$	0,25
		Vậy Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d là $\sqrt{5}$. Suy ra: $m = \frac{1}{2}$. Vậy $m = \frac{1}{2}$.	0,25

IV			0,25
		Vẽ hình tới câu a)	
a)	Xét (O) có đường kính AN Có A, C, N thuộc (O) $\Rightarrow$ Tam giác CAN nội tiếp (O), đường kính AN $\Rightarrow$ Tam giác CAN vuông tại C (đpcm)	0,5	
	Có A, B, N thuộc (O) $\Rightarrow$ Tam giác ABN nội tiếp (O), đường kính AN $\Rightarrow$ Tam giác ABN vuông tại B (đpcm)	0,25	
b)	Có tam giác CAN vuông tại C $\Rightarrow ACN = 90^0 \Rightarrow CN \perp AC$ Mà $BH \perp AC$ ($BE \perp AC, H \in BE$) $\Rightarrow BH // CN$ (1)	0,5	
	Có tam giác ABN vuông tại B $ABN = 90^0 \Rightarrow BN \perp AB$ Mà $CH \perp AB$ ($CF \perp AB, H \in CF$) $\Rightarrow CH // BN$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác BHCN là hình bình hành.	0,5	
	Mà M là trung điểm BC (gt) $\Rightarrow$ M là trung điểm HN (tính chất hình bình hành)	0,25	
	Xét tam giác AHN: M là trung điểm HN O là trung điểm AN HO cắt AM tại G $\Rightarrow$ G là trọng tâm tam giác AHN $\Rightarrow HO = 3GO$.	0,25	

	c)	 Chứng minh tam giác IFM vuông tại F Chứng minh các điểm E, F, D, M cùng thuộc đường tròn đường kính IM	0,25
V		Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{2}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{a\sqrt{bc}} = \sqrt{\frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{ac}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \right)$ Tương tự : $\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{b^2 + ac} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ba} + \frac{1}{bc} \right) \\ \frac{2}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ca} + \frac{1}{cb} \right) \end{cases}$	0,25
		$\Rightarrow \frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{2abc}$ Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.	0,25