

ĐỀ 6

Bài I. (2 điểm) Cho hai biểu thức $P = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 64$.

2) Chứng minh: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3) Với $x \in \mathbb{Z}$, tìm GTLN của biểu thức $K = Q.(P-1)$.

Bài II. (2 điểm)

1. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai ca nô cùng khởi hành từ A và B cách nhau 85 km và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi ca nô khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng là 9km/h và vận tốc dòng nước là 3km/h.

2. Một hình nón có bán kính đáy bằng 5cm và diện tích xung quanh là 65cm². Tính thể tích của khối nón đó.

Bài III. (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 2 \\ 2\sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1 \end{cases}$$

2) Cho hàm số bậc nhất $y = (m-1)x + 3 - m$ với m là tham số và $m \neq 1$ có đồ thị là đường thẳng d .

a) Tìm m để d đi qua điểm $M(-1; 4)$.

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d là lớn nhất.

Bài IV. (3,5 điểm) Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

1) Chứng minh: Tứ giác: $DCEH$ nội tiếp và $AD.AE = AH.AC$.

2) Tia AD và BE cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N .

Chứng minh: H và M đối xứng với nhau qua BC và $\triangle CMN$ cân

3) Gọi K là trung điểm BC . Chứng minh 4 điểm D, E, F, K cùng thuộc 1 đường tròn

Bài 5. (0,5 điểm) Cho ba số a, b, c dương.

Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{a+b+c}{2abc}$$

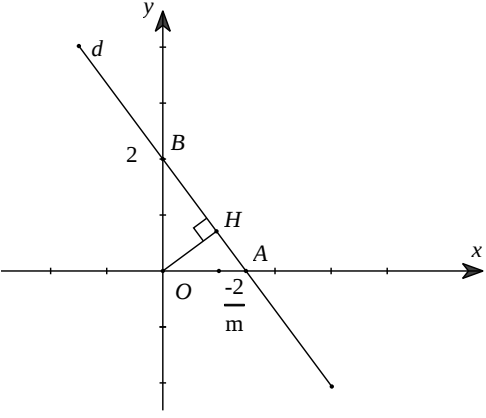
.....**Hết**.....

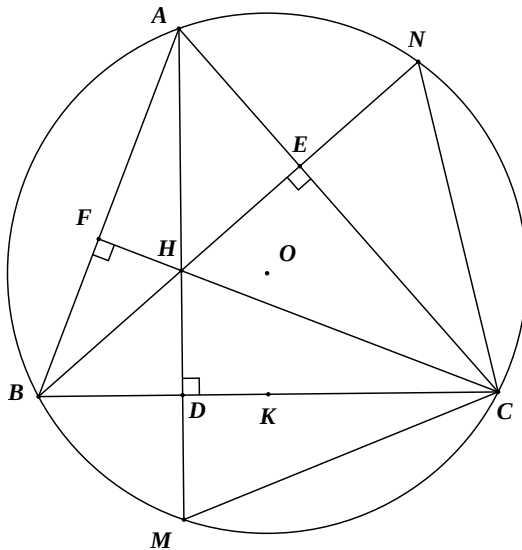
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

ĐÁP ÁN

Bài	ý	Đáp án	Điểm
Bài 1	1)	Thay $x = 64$ (TMĐK) vào Q ta được	0,25
		$Q = \frac{\sqrt{64}-2}{\sqrt{64}-3} = \frac{8-2}{8-3} = \frac{6}{5}$ Vậy khi $x = 64$ thì $Q = \frac{6}{5}$.	0,25
	2)	$P = \frac{x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$	0,25
		$= \frac{x + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
		$= \frac{x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$	0,25
	3)	$: K = Q.(P-1) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 \right) = \frac{2}{\sqrt{x}-3}$ *) TH1: Với $0 \leq x < 9$ và $x \neq 4$ thì $\sqrt{x}-3 < 0 \Rightarrow K < 0$ *) TH2: Với $x > 9$ thì $\sqrt{x}-3 > 0 \Rightarrow K > 0$	0,25
		Ta có: $K_{\max} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)_{\min} \Leftrightarrow (\sqrt{x})_{\min} \Leftrightarrow x_{\min}$ $\left. \begin{array}{l} x_{\min} \\ \text{Ta có: } x \in \mathbb{Z} \\ x > 9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 10$ Thay $x = 10$ vào biểu thức K , ta có: $K = 6 + 2\sqrt{10}$ Vậy với $x \in \mathbb{Z}; x = 10$ thì GTLN của biểu thức K là $6 + 2\sqrt{10}$	0,25
Bài 2	1)	Gọi vận tốc thực của ca nô đi xuôi dòng là x (km/h) (điều kiện : $x > 0$) Vận tốc của thực ca nô đi ngược dòng là y (km/h) (điều kiện: $y > 3$)	0,25
		Vận tốc của ca nô khi đi xuôi dòng là $x+3$ (km/h). Vận tốc của ca nô đi ngược dòng là $y-3$ (km/h).	0,25
		Đôi: 1 giờ 40 phút = $\frac{5}{3}$ giờ Quãng đường ca nô đi xuôi dòng $\frac{5}{3}$ giờ là $\frac{5}{3}(x+3)$ km. Quãng đường ca nô đi ngược dòng $\frac{5}{3}$ giờ là $\frac{5}{3}(y-3)$ km.	0,5

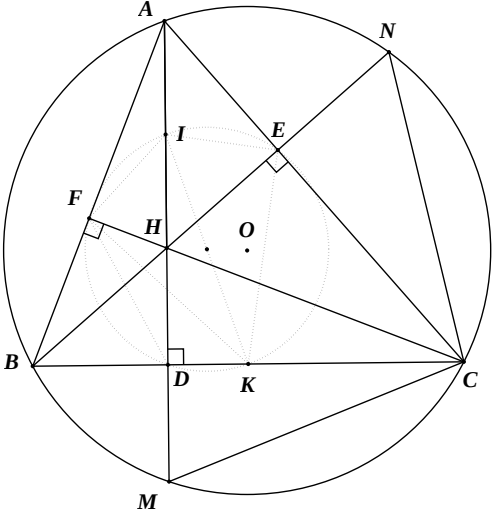
		Hai ca nô gặp nhau thì tổng quãng đường của 2 ca nô bằng tổng quãng đường AB. Vậy a có phương trình: $\frac{5}{3}(x+3) + \frac{5}{3}(y-3) = 85$ (1)	
		Có vận tốc ca nô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng là 9 km/h. Ta có phương trình: $x+3-(y-3)=9$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+3-(y-3)=9 \\ \frac{5}{3}(x+3) + \frac{5}{3}(y-3) = 85 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=27 \\ y=24 \end{cases}$ Kết hợp điều kiện $\Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=40 \end{cases}$ (thỏa mãn).	0,25
		Vậy vận tốc thật của ca nô xuôi dòng khi nước yên lặng là 27(km/h) và vận tốc của ca nô ngược dòng khi nước yên lặng là 24(km/h).	0,25
	2)	Có diện tích xung quang là $65cm^2$ $\Rightarrow \pi Rl = 65\pi \Rightarrow l = \frac{65\pi}{5\pi} = 13(cm)$	0,25
		Chiều cao của nón là : $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(cm)$ Vậy Thể tích hình nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2.h = \frac{1}{3}.5^2.12.\pi = 100\pi (cm^3)$	0,25
Câu 3	1)	Điều kiện xác định $x \geq \frac{1}{2}, x-y > 0$. $\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{2x-1} \\ v = \frac{1}{\sqrt{x-y}} \end{cases} (u \geq 0, v > 0)$	0,25
		Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u+v=2 \\ 2u-v=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ 3u=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ u+v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$	0,5
		$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-y}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;0)$.	0,25
	2)		
	a)	Thay $x=-1; y=4$ vào phương trình đường thẳng d $\Rightarrow 4 = (m-1).1 + 3 - m \Rightarrow m = 0$ (TMĐK)	0,25

	b)	Trường hợp 1: $m-3=0 \Leftrightarrow m=3 \Rightarrow d$ đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow$ Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d bằng 0.	0,25
		Trường hợp 2: $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$  Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với trục hoành và trục tung. $\Rightarrow A\left(\frac{m-3}{m-1}; 0\right); B(0; 3-m)$ $\Rightarrow OA = \left \frac{m-3}{m-1}\right ; OB = 3-m = m-3 .$ Xét $\triangle OAB$ vuông tại O có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}.$ $\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{m^2 - 2m + 2}{(m-3)^2}$	0,25
		Có $\frac{1}{OH^2} = \frac{m^2 - 2m + 2}{(m-3)^2} = \frac{(m-3)^2 + 4(m-3) + 5}{(m-3)^2} = \frac{5}{(m-3)^2} + \frac{4}{m-3} + 1$ $= \frac{5}{(m-3)^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{m-3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \left(\frac{\sqrt{5}}{m-3} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{5}$ Có $\left(\frac{\sqrt{5}}{m-3} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{OH^2} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow OH \leq \sqrt{5}.$ Có $\sqrt{5} > 2$ Vậy Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d lớn nhất là $\sqrt{5}.$ Khi $\left(\frac{\sqrt{5}}{m-3} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$ Vậy $m = \frac{1}{2}$ thì Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d lớn nhất.	0,25
Câu 4			0,25



Vẽ hình đúng tới câu 1)

1)	Có $BE \perp AC$ (gt) $\Rightarrow HEC = 90^\circ$	0,25
	Có $AD \perp BC$ (gt) $\Rightarrow HDC = 90^\circ$	0,25
	$\Rightarrow$ Tứ giác $DCHE$ nội tiếp	0,25
	Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ADC$ có A chung $\angle AEH = \angle ADC = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle ADC$ (g.g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD \cdot AE = AH \cdot AC$	0,25
2)	Xét (O) có $\angle BCM = \angle BAD$ (góc nội tiếp cùng chắn BM) $\angle HCD = \angle BAD$ (hai góc cùng phụ với $\angle ABC$) $\Rightarrow \angle BCM = \angle HCD \Rightarrow CD$ là tia phân giác $\angle HCM$.	0,25
	Xét $\triangle HCM$ có CD là tia phân giác kẻ từ đỉnh C (cmt) CD là tia đường cao kẻ từ đỉnh C (vì $AD \perp CB$) $\Rightarrow \triangle HCM$ cân tại C $\Rightarrow HD = MD$ mà $HM \perp BC$ (vì $AD \perp CB$) Suy ra : H và M đối xứng với nhau qua BC	0,25
	Có $\triangle HCM$ cân tại $C \Rightarrow CH = CM$	0,25
	Chứng minh: $\triangle CHN$ cân tại $C \Rightarrow CH = CN$ $\Rightarrow CM = CN \Rightarrow \triangle CMN$ cân tại C .	0,25

4)	 Gọi I là trung điểm AH $\Rightarrow D$ thuộc đường tròn đường kính IK.	0,25
	Chứng minh: $IEK = IFK = 90^\circ$ $\Rightarrow E, F$ thuộc đường tròn đường kính IK. Vậy: 4 điểm D, E, F, K cùng thuộc 1 đường tròn đường kính IK.	0,25
Câu 5	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{2}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{a\sqrt{bc}} = \sqrt{\frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{ac}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \right)$ Tương tự: $\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{b^2 + ac} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ba} + \frac{1}{bc} \right) \\ \frac{2}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ca} + \frac{1}{cb} \right) \end{cases}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{2abc}$ Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.	0,25