

ĐỀ 7

Bài I. (2 điểm) Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$)

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Đặt $P=AB$. Tìm x để $P \geq \frac{\sqrt{x}+9}{8}$.

Bài II. (2,5 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một hội trường có 100 ghế ngồi được kê thành những dãy ghế, mỗi dãy ghế có số ghế ngồi như nhau. Sau đó, khi sửa chữa người ta đã bỏ sung thêm 5 dãy ghế. Để đảm bảo số chỗ ngồi của hội trường như ban đầu, mỗi dãy ghế được kê ít hơn so với ban đầu là 1 ghế. Hỏi ban đầu, hội trường có bao nhiêu dãy ghế?

2) Bạn Dũng có một chiếc cốc thủy tinh có lòng là một hình trụ có chiều cao 15cm và bán kính đáy bằng 2,5cm đang đựng $\frac{2}{3}$ nước. Dũng đang muốn thả các viên bi ve hình cầu có bán kính 1cm vào cốc để trang trí. Hỏi bạn có thể thêm vào đó nhiều nhất bao nhiêu viên bi để nước không bị tràn ra khỏi cốc?

Bài III. (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(x-2) + |2y-5| = -1 \\ x+2-3|2y-5| = 0 \end{cases}$$

2) Trong mặt tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (m-1)x + 2$ (m là tham số) và Parabol $(P): y = x^2$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m .

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích ΔOAC gấp đôi diện tích ΔOBC (với C là giao điểm của đường thẳng (d) với trục tung và A là điểm có hoành độ âm).

Bài IV. (3,0 điểm) Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây BC cố định, điểm A trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi K là trung điểm của BC .

a) Chứng minh $BCEF$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AM của (O) . Chứng minh $AB.AC = AD.AM$ và $AH = 2OK$.

c) Chứng minh rằng khi A di động trên cung lớn BC thì đoạn EF có độ dài không đổi.

Bài V. (0,5 điểm) Cho a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$ Chứng minh rằng :

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3.$$

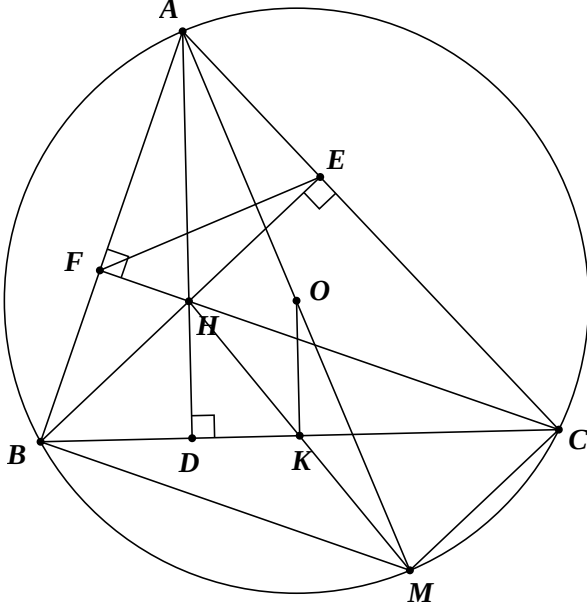
.....**Hết**.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	ý	Đáp án	Điểm
Bài 1	1)	Thay $x=9$ (TMĐK) vào A ta được	0,25
		Thay $x=9$ vào A ta có: $A = \frac{2\sqrt{9}}{\sqrt{9}-2} = 6$	0,25
	2)	$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{3-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1) + 3 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$	0,25
		$= \frac{x - \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1 + 3 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$	
		$= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$	0,25
	3)	Ta có: $P = A.B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$	0,25
		$P \geq \frac{\sqrt{x}+9}{8} \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{x} - (\sqrt{x}+1)^2 - 8(\sqrt{x}+1)}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0$	
Bài 2		$\Leftrightarrow \frac{-x+6\sqrt{x}-9}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \leq 0$	
		Với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$ thì $8(\sqrt{x}+1) > 0$ và $(\sqrt{x}-3)^2 \geq 0$ nên VT ≥ 0 với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$.	0,25
		Để VT ≤ 0 thì VT = 0 $\Rightarrow x = 9$ (tmđk) Vậy: $x = 9$.	
Bài 2		Gọi số dãy ghế ban đầu là x (dãy). Điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*$	0,25
		Số ghế ở mỗi dãy lúc đầu là: $\frac{100}{x}$ (ghế).	0,25
		Số dãy ghế lúc sau là $x+5$ (dãy).	

		Số ghế ở mỗi dãy lúc sau là: $\frac{100}{x+5}$ (ghế).	
		Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{100}{x} - \frac{100}{x+5} = 1$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{100(x+5) - 100x}{x(x+5)} = \frac{x(x+5)}{x(x+5)} \Leftrightarrow x^2 + 5x - 500 = 0$	0,25
		$\Delta = 5^2 - 4.1.(-500) = 2025$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{2025}}{2} = 20$ (nhận); $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{2025}}{2} = -25$ (loại)	0,25
		Vậy ban đầu hội trường có 20 dãy ghế.	0,25
		Thể tích còn trống của bể là: $\frac{1}{3} \cdot 15 \cdot \pi \cdot (2,5)^2 = \frac{125}{4} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$ Thể tích một viên bi là: $\frac{4}{3} \cdot 1^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$	0,25
		Số viên bi thêm vào là: $\frac{125}{4} \pi : \frac{4}{3} \pi \approx 23,4375$ Vậy bạn có thể thêm vào đó nhiều nhất 23 viên bi để nước không bị tràn ra khỏi cốc	0,25
Bài 3	1)	Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 2x + 2y - 5 = 3 \\ x - 3 2y - 5 = -2 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 5 = 3 \\ 2y - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \\ 2y - 5 = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 5 = 3 \\ 2x - 6 2y - 5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 5 = 3 \\ 7 2y - 5 = 7 \end{cases}$	0,5
		$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2y - 5 = 1 \\ 2y - 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $(x; y) \in \{(1; 3); (1; 2)\}$	0,25
	2)		
		Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) : $x^2 = (m-1)x + 2$ $\Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - 2 = 0 \quad (1)$ Vì $ac = -2 < 0 \Rightarrow (1)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .	0,25
		Hệ thức Vi – et : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$	0,25

		Vì $ac = -2 < 0 \Rightarrow x_1.x_2 < 0$ giả sử $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$.	
		Có $C(0;2) \Rightarrow OC = 2$. Vì $S_{\Delta OAC} = 2S_{\Delta OBC} \Rightarrow x_1 = 2 x_2 \Rightarrow x_1 = -2x_2$	0,25
		Lại có $x_1.x_2 = -2 \Rightarrow -2x_2^2 = -2 \Rightarrow x_2 = 1; x_1 = -2$ Thay vào $x_1 + x_2 = m - 1 \Rightarrow m = 0$ Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
Bài 4		Vẽ hình đến câu a) 	0,25
	a	Xét ΔABC có ba đường cao AD, BE, CF nên $BE \perp AC$; $CF \perp AB$; $AD \perp BC$	0,25
		Xét tứ giác $BFEC$ có $BFC = 90^\circ$; $BEC = 90^\circ$ khi đó ta có hai đỉnh kề E, F cùng nhìn cạnh BC dưới cùng góc 90° nên suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp.	0,5
	b	Xét đường tròn (O) có $ABD = AMC = \frac{1}{2}$ số đo cung AC (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) Xét ΔBDA và ΔMCA có $ABD = AMC$; $ADB = ACM = 90^\circ$ suy ra $\Delta BDA \sim \Delta MCA$ (g.g) Suy ra: $\frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AM$.	0,75
		Xét đường tròn (O) có đường kính AM nên $ABM = ACM = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Ta có: $AB \perp BM$; $AB \perp CF \Rightarrow BM \parallel CF$ hay $BM \parallel CH$ Ta có: $AC \perp CM$; $AC \perp BE \Rightarrow CM \parallel BE$ hay $BH \parallel CM$ Từ đó suy ra tứ giác $BHCM$ là hình bình hành.	0,75

		Xét tam giác AHM có OK là đường trung bình . Vậy $AH = 2OK$	
	c	Vì (O) và dây BC cố định nên O, K cố định suy ra OK không đổi, từ đó suy ra AH cũng không đổi.	0.25
		Vì dây BC cố định nên EAF không đổi. Lại có $EF = AH \cdot \sin EAF$ nên EF cố định.	0.25
Bài 5		Chứng minh rằng: $\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3$. Vì $a + b + c = 1$ nên $P = \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) = abc + \frac{1}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1$ Từ bất đẳng thức Cô-si cho 3 số dương ta có: $\frac{1}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{27}$	0,25
		Đặt $x = abc$, thì $0 < x \leq \frac{1}{27}$ Do đó $x + \frac{1}{x} - 27 - \frac{1}{27} = \frac{(27-x)(1-27x)}{27x} \geq 0$ Suy ra $x + \frac{1}{x} = abc + \frac{1}{abc} \geq 27 + \frac{1}{27} = \frac{730}{27}$ Mặt khác $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ Nên $P \geq \frac{730}{27} + 10 = \frac{1000}{27} = \left(\frac{10}{3}\right)^3$ Vậy $\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3$; dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}.$	0,25