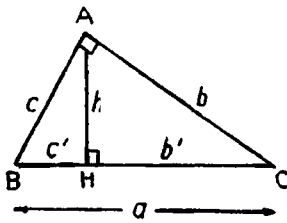


CHƯƠNG II

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§10. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG. ĐỊNH LÝ PITAGO

Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , đường cao AH . Kí hiệu $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AH = h$, $HB = c'$, $HC = b'$. Ta có :



Hình 37

- i) $h^2 = b'c'$;
- 2) $c^2 = ac'$; $b^2 = ab'$;
- 3) $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pitago);
- 4) $ah = bc$;
- 5) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ (h.37).

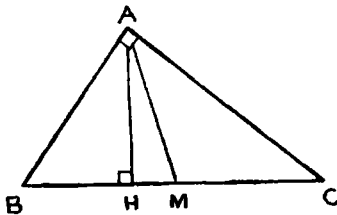
Ví dụ 19. Cho tam giác ABC vuông ở A , $AB = 30\text{cm}$, $AC = 40\text{cm}$, đường cao AH , trung tuyến AM .

- a) Tính độ dài BH , HM , MC .
- b) Tính độ dài AH bằng nhiều cách.

Giải (h.38)

a) Áp dụng định lý Pitago trong $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 = 30^2 + 40^2 = 2500 = 50^2 \Rightarrow BC = 50(\text{cm}). \\ \text{Do đó } BM &= MC = 25\text{cm}. \end{aligned}$$



Hình 38

Áp dụng công thức $c^2 = ac'$, ta có $AB^2 = BC.BH$

$$\Rightarrow BH = AB^2 : BC = 30^2 : 50 = 18 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Suy ra } HM = BM - BH = 25 - 18 = 7 \text{ (cm)}.$$

b) *Cách 1.* Áp dụng công thức $ah = bc$ ta có :

$$AB.AC = BC.AH \Rightarrow 30.40 = 50.AH \Rightarrow AH = 24 \text{ cm}.$$

Cách 2. Áp dụng công thức $h^2 = b'c'$ ta có :

$$AH^2 = HB.HC = 18.32 = 9.2.32 = (3.8)^2 \Rightarrow AH = 24 \text{ cm}.$$

Cách 3. Áp dụng định lí Pitago trong $\triangle AHB$, ta có :

$$\begin{aligned} AH^2 &= AB^2 - BH^2 = 30^2 - 18^2 = (30 + 18)(30 - 18) = 48.12 \\ &= 16.3.12 = (4.6)^2 \Rightarrow AH = 24 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Cách 4. Áp dụng định lí Pitago trong $\triangle AHM$.

Cách 5. Áp dụng định lí Pitago trong $\triangle AHC$.

BÀI TẬP

90. Tính độ dài cạnh hình thoi biết các đường chéo của nó dài 10cm và 24cm.

91. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. M, N thứ tự là trung điểm của AB, AC. Biết $HM = 15 \text{ cm}$, $HN = 20 \text{ cm}$. Tính độ dài HB, HC, AH.

92. Giải ví dụ 10 bằng cách dùng định lí Pitago.

93. Cho tam giác ABC cân ở A, đường cao BK. Tính BC biết rằng $AK = 7 \text{ cm}$, $KC = 2 \text{ cm}$.

94. Cho tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AH, gọi E là giao điểm của BI và AC. Tính độ dài AE, EC biết rằng $AH = 12 \text{ cm}$, $BC = 18 \text{ cm}$.

95. Tính diện tích tam giác ABC vuông ở A biết rằng $AC = 20 \text{ cm}$, chiều cao AH bằng 12cm.

96. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng $AH = 12 \text{ cm}$, $\frac{BH}{HC} = \frac{9}{16}$.

97. Chứng minh rằng trong tam giác vuông, bình phương của tỉ số hai cạnh góc vuông bằng tỉ số các hình chiếu tương ứng của chúng trên cạnh huyền.

98. Chứng minh rằng nếu một tam giác vuông có một cạnh góc vuông gấp đôi cạnh góc vuông kia thì đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh ấy ra hai đoạn thẳng có tỉ số 4 : 1.

99. Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh ấy thành hai đoạn thẳng có tỉ số 4 : 9. Đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền theo tỉ số nào ?

100. Tam giác ABC vuông ở A có $AB = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$, đường cao AH. Tính chu vi tam giác ABH.

101. Cho tam giác vuông ở A, đường cao AH. Biết rằng chu vi tam giác AHB bằng 18cm, chu vi tam giác AHC bằng 24cm.

a) Tính tỉ số $AB : AC$.

b) Tính chu vi tam giác ABC.

102. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, đường cao AH (H nằm giữa B và C), $HB = c'$, $HC = b'$. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nếu có một trong các điều kiện :

a) $c^2 = ac'$;

b) $b^2 = ab'$.

103. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AC = 3 AB$. Trên cạnh AC lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^\circ$ bằng các cách sau

Cách 1. Gọi M là điểm đối xứng với B qua D rồi chứng minh các tam giác EAB và BMC đồng dạng.

Cách 2. Chứng minh các tam giác CDB và BDE đồng dạng.

104. Hình thoi ABCD có $BD = 30\text{cm}$, $AC = 40\text{cm}$.

a) Tính cạnh hình thoi.

b) Tính diện tích hình thoi.

c) Vẽ các đường cao BE, BF của hình thoi. Tính diện tích tứ

giác BEDF .

105. Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = 9\text{cm}$, $CD = 15\text{cm}$, $AC = 17\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh bên.

106. Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết $OA = 4\text{cm}$, $OD = 8\text{cm}$. Tính diện tích hình thang.

107. Một hình thang cân có đường chéo là phân giác của góc tù ở đáy, đáy nhỏ dài 3cm, chu vi bằng 42cm. Tính diện tích hình thang.

108. Một hình thang cân có đường chéo là phân giác của góc nhọn ở đáy, đáy nhỏ dài 17m, chu vi bằng 84m. Tính diện tích hình thang.

109. Điểm M là điểm bất kì trong hình chữ nhật ABCD. Chứng minh rằng $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

110. Tứ giác ABCD có AD vuông góc với BC. Chứng minh rằng tổng bình phương các đường chéo bằng tổng bình phương các cạnh AB và CD.

111. Cho hình vuông ABCD tâm O có cạnh bằng a, một đường thẳng d đi qua O. Tính tổng bình phương các khoảng cách từ A, B, C, D đến đường thẳng d.

112. Cho tam giác ABC, một điểm O nằm trong tam giác. Gọi D, E, F thứ tự là hình chiếu của O trên AB, BC, CA. Chứng minh rằng $AD^2 + BE^2 + CF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$.

113. Chứng minh rằng trong tam giác vuông :

a) lập phương của cạnh huyền lớn hơn tổng các lập phương các cạnh góc vuông;

b) bình phương của cạnh huyền lớn hơn hoặc bằng nửa bình phương của tổng các cạnh góc vuông.

114. Cho tam giác ABC có $AC = b$, $AB = c$, $b > c$. Lấy M bất kì thuộc đường cao AH. Tính $MC^2 - MB^2$.

115. Một hình thang cân có đáy a và b , cạnh bên c , đường chéo d . Chứng minh rằng $d^2 = ab + c^2$.

116. Dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho $x^2 = ab$ (a và b là các độ dài cho trước).

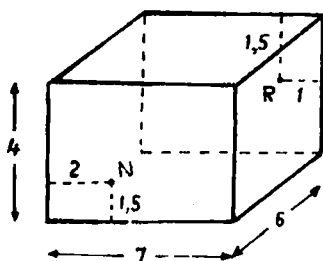
117. Để tính diện tích tam giác cân, người Ai Cập cổ lấy nửa đáy nhân với cạnh bên. Tính tỉ số phần trăm của diện tích tam giác tính theo công thức này so với diện tích đúng của nó nếu tam giác cân có đáy dài 18m, cạnh bên dài 41m.

118. Để tính diện tích hình thang cân, người Ai Cập cổ lấy nửa tổng hai đáy nhân với cạnh bên. Tính tỉ số phần trăm của diện tích hình thang cân tính theo công thức này so với diện tích đúng của nó nếu hình thang cân có các cạnh đáy dài 30m và 16m, cạnh bên dài 25m.

119. Một cây bị gãy cách gốc 3 thước, chỗ ngọn cây chạm đất cách gốc 4 thước. Tính chiều cao của cây (*Bài toán cổ Ấn Độ*).

120. Một cây sậy mọc từ đáy ao, ngọn cây nhô khỏi mặt ao $1/2$ thước. Một cơn gió thổi làm ngọn cây chạm vào mặt nước, cách chỗ cũ (chỗ thân cây chạm mặt nước) là 2 thước. Tính chiều cao của cây sậy (*Bài toán cổ Ấn Độ*).

121. Nhện và ruồi. Một con nhện và một con ruồi đậu trên hai mặt tường đối diện nhau của một căn phòng dài 7m, rộng 6m, cao 4m. Con nhện ở cách mép tường 2m, cách mặt sàn 1,5m (thuộc

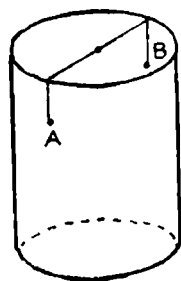


Hình 39

mặt tường 7m x 4m). Còn con ruồi đậu cách mép tường đối diện 1m, cách trần 1,5m (h.39). Đường nào ngắn nhất dẫn con nhện bò đến chỗ con ruồi? [*Bài toán của Lép Tônxiôi (1828-1910), nhà văn Nga*].

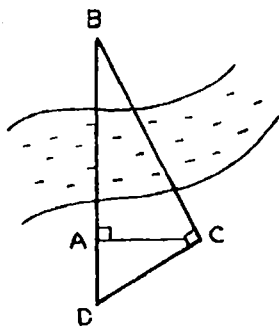
122. Chú kiến và giọt mật. Một chú kiến ở vị trí A trên mặt ngoài lọ thủy tinh hình trụ, nhìn thấy một giọt mật ở thẳng trước mặt tại vị trí

B trên mặt trong của lọ (h.40). Biết A và B đều cách miệng lọ 3,5cm và chu vi của miệng lọ bằng 48cm. Tính độ dài ngắn nhất để chú kiến bò tới chỗ giọt mật.



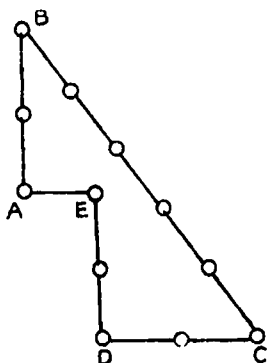
Hình 40

123. Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B nằm ở hai phía một con sông, ta lấy điểm D trên tia đối của tia AB, rồi lấy điểm C trên đường vuông góc với AB tại B sao cho $\angle BCD = 90^\circ$ (h.41). Biết $AD = 20\text{m}$, $AC = 150\text{m}$. Tính độ dài AB.



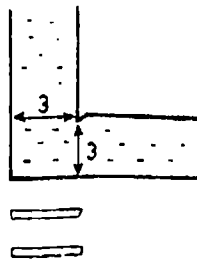
Hình 41

124. Hình 42 gồm 12 chiếc que, mỗi chiếc dài 1cm, ghép lại thành một hình ngũ giác (các góc A, E, D là góc vuông). Bạn hãy tính nhẩm diện tích của ngũ giác đó trong vòng một phút.



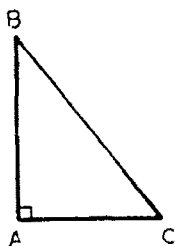
Hình 42

125. *Đố vui.* Trong một công viên có một đảo bị ngăn bởi hào nước rộng 3m như hình 43. Ở cạnh hào có hai tấm ván, nhưng mỗi tấm chỉ dài đúng 3m. Có cách nào bắc ván vào thăm đảo được không?



Hình 43

§1. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỎ



Hình 44

$$0^\circ < \hat{B} < 90^\circ$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$$

$$\operatorname{cotg} B = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$

$$\sin B = \cos C, \sin C = \cos B, \operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C, \operatorname{tg} C = \operatorname{cotg} B.$$

Ví dụ 20. a) Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh rằng

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

[kí hiệu $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$, $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$].

b) Cho $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính $\cos \alpha$.

Giải

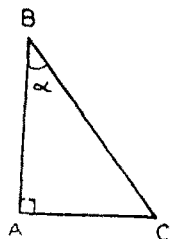
Kí hiệu như trên hình 45, ta có

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC}, \cos \alpha = \frac{AB}{BC}.$$

a) Ta có : $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$

$$= \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 + \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 =$$

$$= \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$



Hình 45

b) Cách 1. $\sin \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$

Đặt $\frac{AC}{5} = \frac{BC}{13} = k$ thì $AC = 5k$, $BC = 13k$. Do đó :

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 169k^2 - 25k^2 = 144k^2 = (12k)^2 \Rightarrow AB = 12k.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$

Cách 2. Áp dụng công thức ở câu a, ta có :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} = \left(\frac{12}{13}\right)^2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{13}.$$

BÀI TẬP

126. Chứng minh rằng nếu $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì :

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$;

b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cot \alpha = 1$;

c) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$;

d) $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$; $\operatorname{tg} \alpha = \cot (90^\circ - \alpha)$.

127. Dùng định nghĩa tỉ số lượng giác, tính :

a) $\operatorname{tg} 45^\circ$; $\sin^2 45^\circ$; $\cos^2 45^\circ$;

b) $\sin 30^\circ$; $\cos^2 30^\circ$; $\operatorname{tg}^2 30^\circ$;

c) $\cos 60^\circ$; $\sin^2 60^\circ$; $\operatorname{tg}^2 60^\circ$.

128. Cho tam giác ABC vuông ở A.

a) Giải thích tại sao $\sin B < 1$, $\cos B < 1$?

b) Khi nào thì $\operatorname{tg} B = 1$, $\operatorname{tg} B > 1$, $\operatorname{tg} B < 1$?

129. Cho tam giác ABC vuông ở A, $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$. Tính $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

130. Cho tam giác ABC vuông ở A.

a) Biết $\cos B = \frac{24}{25}$. Tính $\sin B$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{cotg} B$.

b) Biết $\operatorname{tg} C = 0,75$. Tính $\sin C$, $\cos C$, $\operatorname{cotg} C$.

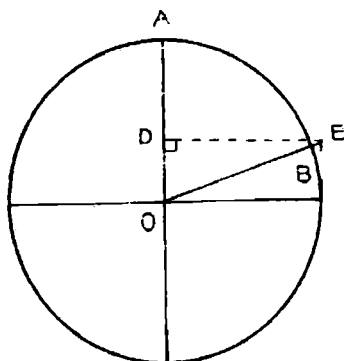
c) Biết $\operatorname{tg} B = 2$. Tính $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$

131. Cho tam giác ABC có $B, C < 90^\circ$ và $AB = 2AC$.

Tính tỉ số $\sin B : \sin C$.

§12. BẢNG LƯỢNG GIÁC

Ví dụ 21. Một học sinh vẽ gần đúng góc AOB bằng 72° (để chia đường tròn bán kính R thành năm phần bằng nhau, như trong hình 46, trong đó $\triangle ODE$ vuông ở D, $OD = \frac{R}{3}$, $DE = R$. Dùng bảng lượng giác tính góc AOB theo cách dựng đó.



Hình 46

Giải

Trong tam giác vuông ODE,

$$\operatorname{tg} DOE = \frac{DE}{OD} = 3. \text{ Tra bảng}$$

ta được $\widehat{DOE} \approx 71^\circ 34'$. Do đó $\widehat{AOB} \approx 71^\circ 34'$ (chỉ chênh lệch $0^\circ 26'$ so với góc 72°).

BÀI TẬP

132. Để dựng gần đúng một tam giác cân có góc đỉnh bằng 20° , một học sinh dựng tam giác cân có đáy 2 cm, cạnh bên 6cm. Dùng bảng lượng giác tính góc đỉnh của tam giác cân đó.

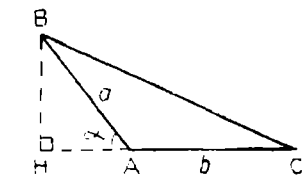
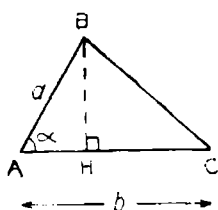
§13. HỆ THỨC GIỮA CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Trong tam giác vuông :

- cạnh góc vuông = cạnh huyền $\times$ sin của góc đối;
- cạnh góc vuông = cạnh huyền $\times$ cosin của góc kề;
- cạnh góc vuông = cạnh góc vuông kia $\times$ tang của góc đối;
- cạnh góc vuông = cạnh góc vuông kia $\times$ cotang của góc kề.

Ví dụ 22. Chứng minh rằng nếu a, b là độ dài hai cạnh của một tam giác và α là góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy thì diện tích S của tam giác bằng :

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$



Hình 47

Giải

Giả sử ΔABC có $AB = a$, $AC = b$, góc nhọn tạo bởi AB và AC bằng α (h. 47). Vẽ đường cao BH . Trong tam giác vuông ABH , ta có

$$BH = AB \sin \alpha. \text{ Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$

BÀI TẬP

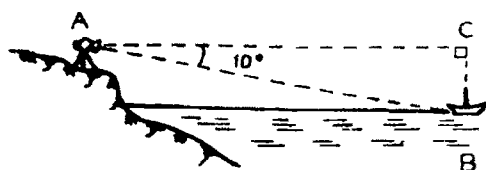
133. Tính các góc của tam giác ABC cân ở A , đường cao BH biết rằng $AH = 2HC$.

134. Tính góc tạo bởi đường thẳng chứa cạnh bên của hình thang cân có đáy lớn bằng a , đáy nhỏ bằng b , chiều cao bằng h . Áp dụng tính với $a = 42\text{mm}$, $b = 30\text{mm}$, $h = 50\text{mm}$.

135. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$, trung tuyến AM . Tính $\widehat{AMC}$.

§14. ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỎ

Ví dụ 23. Từ một người quan sát cao 100m so với mặt biển, người quan sát nhìn thấy một con tàu theo góc 10° so với phương nằm ngang. Tính khoảng cách từ chòi quan sát đến con tàu.



Hình 48

Giải

Gọi A là vị trí của người quan sát, B là vị trí con tàu (h.48). Tam giác vuông ABC có $A = 10^\circ$, $BC = 100\text{m}$. Ta có $BC = AB \cdot \sin A$

$$\Rightarrow AB = \frac{BC}{\sin A} \approx \frac{100}{\sin 10^\circ} \approx \frac{100}{0,1736} \approx 576(\text{m}).$$

Khoảng cách từ người quan sát đến con tàu bằng 576m.

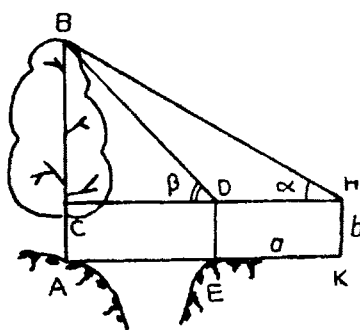
BÀI TẬP

136. Một quả đồi dốc 13° , quãng đường thẳng từ chân lên đỉnh đồi dài 200m. Tính độ cao của đỉnh đồi so với chân đồi.

137. Một người đi ôtô trên đường thẳng AD. Ở vị trí A người đó nhìn thấy địa điểm C theo góc $CAD = \alpha$, ở vị trí B người đó nhìn thấy địa điểm đó theo góc $CBD = \alpha + 90^\circ$. Tính khoảng cách BC, biết rằng $AB = 1000\text{m}$ và :

a) $\alpha = 50^\circ$; b) $\alpha = 30^\circ$.

138. Để xác định chiều cao AB của một cây ở bờ suối bên kia (h.49), ta đặt



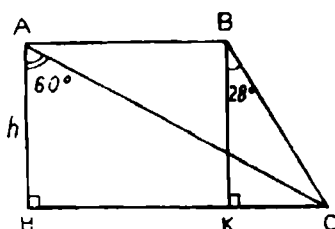
Hình 49

giác kể ở H, đo góc α giữa HB với phương nằm ngang (đi từ H đến thân cây). Sau đó dời giác kể đến D trên đường nằm ngang từ I đến thân cây, đo góc β giữa DB với phương nằm ngang (đi từ D đến thân cây). Biết $HI = a$ và chiều cao của giác kể bằng b

Tính AB với $a = 3\text{m}$; $b = 1,5\text{m}$; $\alpha = 50^\circ$; $\beta = 65^\circ$.

139. Để đo độ cao AB của một máy bay đang ở vị trí B, hai người quan sát đặt giác kể ở H và D (sao cho B thuộc mặt phẳng HDEK, xem hình 49), cùng một lúc xác định các góc $CHB = \alpha$, $CDB = \beta$. Tính độ cao AB biết rằng $HD = a$ và chiều cao giác kể bằng b . Áp dụng với $a = 100\text{m}$; $b = 1,5\text{m}$; $\alpha = 40^\circ$; $\beta = 42^\circ$.

140. Một máy bay chuyển động thẳng đều theo phương nằm ngang với vận tốc 150m/s . Ở vị trí A phi công nhìn địa điểm C ở mặt đất thẳng phía trước máy bay theo góc 60° so với phương thẳng đứng, và sau đó 20 s đến B lại nhìn thấy địa điểm đó theo góc 28° (h.50). Tính độ cao của máy bay.



Hình 50

Về phương pháp giải toán

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Khi tính độ dài đoạn thẳng hoặc số đo góc, nhiều khi ta nên biểu thị một đại lượng chưa biết làm ẩn số rồi thiết lập phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng trong bài toán.

Ví dụ 24. Cạnh góc vuông của một tam giác vuông dài 8cm , tổng của cạnh huyền và cạnh góc vuông kia bằng 32cm . Tính độ dài cạnh huyền và cạnh góc vuông kia.

Giải

Gọi độ dài cạnh huyền là x (cm) thì độ dài cạnh góc vuông cần

tính bằng $32 - x$ (cm). Theo định lý Pitago ta có phương trình :

$$8^2 + (32 - x)^2 = x^2.$$

Giải phương trình :

$$64 + 1024 - 64x + x^2 = x^2$$

$$64x = 1088$$

$$x = 17.$$

Vậy cạnh huyền bằng 17cm, cạnh góc vuông kia bằng 15cm.

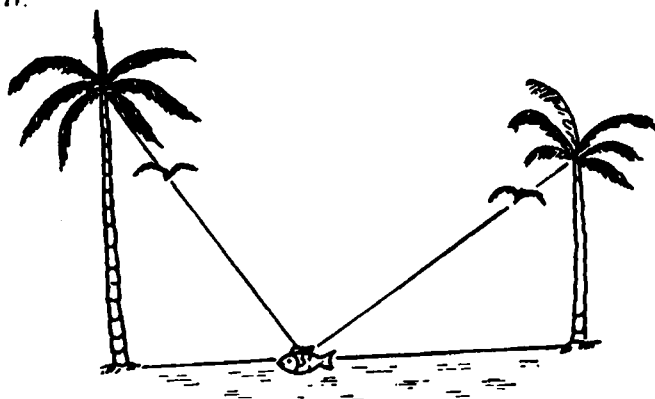
BÀI TẬP VẬN DỤNG

141. Tính cạnh hình vuông nội tiếp tam giác cân có đáy dài 12 thước, cạnh bên 10 thước, biết rằng một cạnh hình vuông nằm trên đáy của tam giác, hai đỉnh còn lại của hình vuông nằm trên hai cạnh bên (*Bài toán của Al-Khòrêzmi, nhà toán học Ả Rập thế kỉ IX*).

142. Tính diện tích hình thoi biết một đường chéo dài 15cm, chiều cao 12cm.

143. Hai cây cọ mọc đối diện nhau ở hai bên bờ sông, cách nhau 50 thước, một cây cao 30 thước, một cây cao 20 thước (h. 51). Trên ngọn mỗi cây có một con chim. Bỗng nhiên cả hai con chim đều nhìn thấy một con cá bơi trên mặt nước giữa hai cây; chúng cùng bổ nhào xuống con cá với vận tốc như nhau và cùng đạt đến đích một lúc.

Tính khoảng cách từ gốc cây cao hơn đến con cá. (*Bài toán cổ Ả Rập thế kỉ XI*).



Hình 51

144.* Tính độ dài các cạnh của một tam giác vuông có chu vi 60cm, chiều cao ứng với cạnh huyền 12cm.

145.* Một tam giác cân có đáy dài 12cm, cạnh bên dài 18cm. Tính khoảng cách giữa chân hai đường cao ứng với cạnh bên.

DÙNG ĐỊNH LÝ ĐÁO PITAGO ĐỂ CHỨNG MINH GÓC VUÔNG

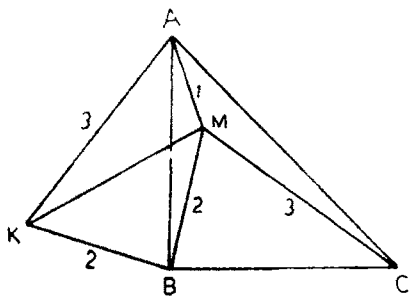
Ta đã biết trong tam giác, các cạnh và các góc có quan hệ với nhau. Từ quan hệ giữa các cạnh, ta có thể chứng minh được các góc bằng nhau, tính được số đo của các góc (chẳng hạn 60° , 45° , 30° ...). Hệ thức giữa độ dài các cạnh của tam giác cũng cho ta chứng minh góc vuông nhờ định lý Pitago đảo.

Ví dụ 25. Cho tam giác ABC vuông cân ở B và một điểm M nằm trong tam giác. Biết $MA = 1\text{cm}$, $MB = 2\text{cm}$, $MC = 3\text{cm}$.

a) Vẽ tam giác MBK vuông cân ở B (K và A nằm cùng phía đối với BM). Tính độ dài AK.

b) Chứng minh rằng $\widehat{AMK} = 90^\circ$.

c) Tính $\widehat{AMB}$.



Hình 52

Giải (h.52)

a) $\triangle ABK = \triangle CBM$ (c.g.c) suy ra $AK = CM = 3\text{cm}$.

b) Xét $\triangle AMK$, ta có $AM^2 = 1$, $AK^2 = 9$, $KM^2 = BM^2 + BK^2 = 2^2 + 2^2 = 8$.

Như vậy $AK^2 = AM^2 + KM^2$.
Do đó $\widehat{AMK} = 90^\circ$.

c) $\widehat{AMB} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

BÀI TẬP

146. Cho hình vuông ABCD cạnh 5cm. Trên cạnh AD lấy điểm

E sao cho $AE = 2\text{cm}$. Trên cạnh DC lấy điểm H sao cho $DH = 1\text{cm}$. Tam giác BEH có là tam giác vuông không ?

147. Tính diện tích tam giác có một cạnh bằng 10cm , các trung tuyến ứng với hai cạnh kia bằng 9cm và 12cm .

148. Tính diện tích tam giác có ba trung tuyến dài 12cm , 9m , 15cm .

149. Tính diện tích hình thang biết hai đáy bằng 4cm và 14cm , hai cạnh bên bằng 6cm và 8cm .

HỆ THỐNG MỘT SỐ CÁCH CHỨNG MINH CÁC QUAN HỆ HÌNH HỌC

(tiếp theo tập II)

1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

– Hai đoạn thẳng có tỉ số bằng 1.

– Dùng bổ đề hình thang.

2. Tìm tỉ số của hai đoạn thẳng. Chứng minh các cặp đoạn thẳng tỉ lệ

– Dùng định lý Talet.

– Dùng tính chất đường phân giác của tam giác.

– Các cặp cạnh tương ứng của hai tam giác đồng dạng.

– Xét các đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng, các diện tích của hai tam giác đồng dạng.

3. Chứng minh hai góc bằng nhau

– Cặp góc tương ứng của hai tam giác đồng dạng.

4. Chứng minh hai đường thẳng song song

– Dùng định lý Talet đảo.

5. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

– Dùng định lý Pitago đảo.

6. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy

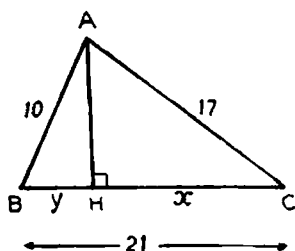
– Dùng bổ đề hình thang.

Bài đọc thêm

TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC THEO BA CẠNH CỦA NÓ

Ví dụ 26. Tam giác ABC có $AB = 10\text{cm}$, $AC = 17\text{cm}$, $BC = 21\text{cm}$.
Vẽ đường cao AH.

- Tính độ dài HC, HB.
- Tính diện tích tam giác ABC.



Hình 53.

Giải (h.53)

a) Vì BC là cạnh lớn nhất của tam giác nên $\widehat{B} < 90^\circ$, $\widehat{C} < 90^\circ$, do đó H nằm giữa B và C.

Đặt $HC = x$, $HB = y$, ta có

$$x + y = 21 \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lí Pitago trong các tam giác vuông AHB, AHC,

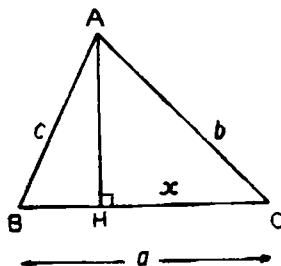
$$\text{ta có : } AH^2 = 10^2 - y^2, AH^2 = 17^2 - x^2 \text{ nên } x^2 - y^2 = 17^2 - 10^2 = 289 - 100 = 189 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $x + y = 21$, $x - y = 9$. Do đó $x = 15$, $y = 6$. Ta có $AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64$ nên $AH = 8$ (cm).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8 = 84 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 27. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, diện tích S. Chứng minh rằng với p là nửa chu vi của tam giác, ta có

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$



Hình 54

Giải

Giả sử $a \geq b \geq c$. Vẽ đường cao AH (h.54). Do a là cạnh lớn nhất của tam giác nên B và C là các góc nhọn, do đó H nằm giữa B và C (chú ý rằng nếu không sắp xếp $a \geq b \geq c$ thì phải xét hai trường hợp : H thuộc hoặc không thuộc đoạn thẳng BC, phức tạp hơn).

Trước hết ta tính CH theo a, b, c . Đặt $CH = x$, ta có $AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$ (cùng bằng AH^2). Do đó:

$$\begin{aligned}c^2 - (a - x)^2 &= b^2 - x^2 \\2ax &= a^2 + b^2 - c^2 \\x &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\end{aligned}$$

Trong tam giác vuông AHC, ta có :

$$\begin{aligned}AH^2 &= AC^2 - CH^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2 = \\&= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra : } S^2 &= \left(\frac{1}{2} BC \cdot AH \right)^2 = \frac{1}{4} BC^2 \cdot AH^2 \\&= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16}.\end{aligned}$$

Từ của phân thức trên có thể biến đổi thành :

$$\begin{aligned}(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 &= \\&= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\&= [(a + b)^2 - c^2] [c^2 - (a - b)^2] \\&= (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b) \\&= 2p(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2a) \\&= 16p(p - c)(p - b)(p - a). \\ \text{Vậy } S^2 &= p(p - a)(p - b)(p - c).\end{aligned}$$

Chú ý

1) Dùng công thức trên kiểm tra lại kết quả ở ví dụ 26 :

$$a = 10, b = 17, c = 21, p = (10 + 17 + 21) : 2 = 24.$$

$$S^2 = 24(24 - 10)(24 - 17)(24 - 21)$$

$$= 24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3$$

$$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 7)^2 = 84^2.$$

$$S = 84(\text{cm}^2).$$

2) Công thức $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ được mang tên Hêrôn, nhà toán học Hi Lạp thế kỉ I. Thực ra trước Hêrôn hai thế kỉ, Acsimet đã tìm ra công thức này dưới một dạng khác, nhưng Hêrôn là người đầu tiên chứng minh công thức ấy.

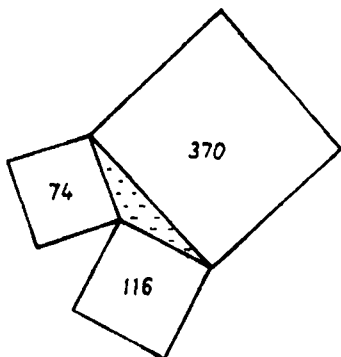
3) Trong một số trường hợp đặc biệt, có thể dùng định lí Pitago đảo để tính diện tích tam giác (bài 147, 148).

Trong một số trường hợp đặc biệt khác, còn có những cách đo đạc để tính diện tích tam giác biết ba cạnh như bài toán dưới đây của Xem Lôđơ (Sam Loyd, Mĩ, 1841 - 1911).

Ví dụ 28. Bán đất và hồ

Ở một hội chợ, người ta quảng cáo bán một hồ hình tam giác và ba miếng đất hình vuông dựng trên ba cạnh (h.55a). Diện tích ba miếng đất đó bằng 74 acơ, 116 acơ, 370 acơ (1 acơ = 4047 m²).

Bảng quảng cáo không nói rõ diện tích của hồ làm nhiều người thắc mắc không rõ diện tích đó lớn hay nhỏ. Bạn hãy tìm diện tích của hồ.



Hình 55a

Giải

Sẽ không đơn giản khi dùng công thức Hêrôn để giải bài toán trên. Đặc điểm của bài toán là :

$$74 = 49 + 25 = 7^2 + 5^2;$$

$$116 = 100 + 16 = 10^2 + 4^2;$$

$$(10 + 7)^2 + (5 + 4)^2 = 17^2 + 9^2 = 370.$$

Ta vẽ tam giác ABC vuông ở A, $AC = 7 + 10 = 17$, $AB = 4 + 5 = 9$ (h.55b). Ta có :

$$BC^2 = 9^2 + 17^2 = 370,$$

$$BK^2 = 7^2 + 5^2 = 74,$$

$$KC^2 = 10^2 + 4^2 = 116.$$

Như vậy ba cạnh của ΔBKC chính là ba cạnh của hồ nước. Ta dễ dàng tính được :

$$S_{ABC} = 17.9 : 2 = 76,5 \text{ (acơ)}.$$

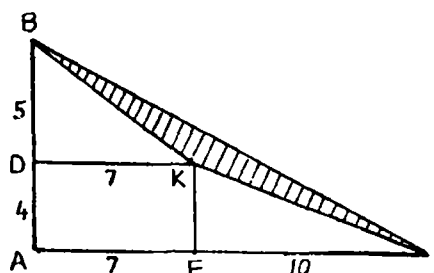
$$S_{BDK} = 5.7:2 = 17,5 \text{ (acơ)}.$$

$$S_{KEC} = 4.10:2 = 20 \text{ (acơ)}.$$

$$S_{ADKE} = 4.7 = 28 \text{ (acơ)}.$$

$$S_{BKC} = 76,5 - 17,5 - 20 - 28 = 11 \text{ (acơ)}.$$

Diện tích hồ nước bằng 11 acơ.



Hình 55b

BÀI TẬP VẬN DỤNG

150. Tính diện tích tam giác biết độ dài ba cạnh là 13cm, 14cm, 15cm bằng công thức Hêrôn.

151*. Theo phương pháp của ví dụ 28, hãy tính diện tích tam giác có ba cạnh a , b , c mà $a^2 = 41$, $b^2 = 45$, $c^2 = 164$.

PITAGO VÀ ĐỊNH LÝ PITAGO

I- Vài nét tiểu sử

Pitago (Pythagore) là nhà toán học cổ Hi Lạp sống khoảng năm 580 – 500 trước công nguyên. Ông sinh ở đảo Xamôx, một đảo buôn bán giàu có ở ven biển Êgiê.

Mới 16 tuổi, cậu bé Pitago đã nổi tiếng về năng khiếu khác thường. Cậu theo học nhà toán học nổi tiếng Talet, và chính Talet cũng phải kinh ngạc về tài năng của cậu.

Để tìm hiểu nền khoa học của các dân tộc, Pitago đã dành nhiều năm viễn du Ấn Độ, Babilon. Ai Cập và đã trở thành con người uyên bác trong hầu hết các lĩnh vực quan trọng : số học, hình học, thiên văn, địa lý, âm nhạc, y học, triết học.



Hình 56

Vào tuổi 50, Pitago mới trở về tổ quốc của mình. Ông thành lập một ngôi trường ở miền Nam Italia, nhận hàng trăm môn sinh, kể cả phụ nữ, với thời gian học 5 năm gồm bốn bộ môn : hình học, toán học, thiên văn, âm nhạc. Chỉ những học sinh giỏi vào cuối năm thứ ba mới được chính Pitago trực tiếp dạy. Trường phái Pitago đã đóng một vai trò quan trọng trong việc phát triển khoa học thời cổ, đặc biệt là về số học và hình học.

Theo Prôclơ thì Pitago nghiên cứu hình học "xuất phát từ một số cơ sở đầu tiên của nó và cố gắng chứng minh các định lý bằng suy luận logic chứ không phải bằng dựa vào trực giác". Như vậy Pitago là người đầu tiên xây dựng hình học như một khoa học suy diễn. Trường phái Pitago đã chứng minh định lý về liên hệ giữa độ dài ba cạnh của tam giác vuông, nhờ đó người ta tìm được nhiều hệ thức lượng trong các hình và xây dựng được nhiều định lý quan trọng khác.

Trường phái Pitago còn khảo sát hình vuông có cạnh dài một đơn vị và nhận ra rằng không thể biểu thị độ dài đường chéo của nó bằng một số nguyên hay phân số, tức là tồn tại các đoạn thẳng vô ước. Sự kiện này được so sánh với việc tìm ra hình học phi Ôclit ở thế kỷ XIX .

Trường phái Pitago cũng nghiên cứu âm nhạc. Họ giải thích rằng độ cao của âm thanh tỉ lệ nghịch với chiều dài của dây và ba sợi dây đàn có chiều dài tỉ lệ với 6, 4, 3 sẽ cho một hợp âm êm tai.

Pitago còn nghiên cứu cả kiến trúc và thiên văn. Ông cho rằng trái đất có hình cầu và ở tâm của vũ trụ.

Pitago và các môn đệ của ông tôn thờ các con số và gán cho mỗi con số một ý nghĩa thần bí : họ cho rằng số 1 là nguồn gốc của mọi số, biểu thị cho lẽ phải; số lẻ là "số nam", số chẵn là "số nữ"; số 5 biểu thị việc xây dựng gia đình; số 7 mang tính chất của sức khỏe; số 8 biểu thị cho tình yêu... Trước lúc vào nghe giảng, các học trò của Pitago đọc những câu kinh như : "hãy ban ơn cho chúng tôi, bởi những con số thần linh đã sáng tạo ra loài người!"

Pitago cũng viết nhiều văn thơ và nêu lên những phương châm xử thế như :

- hãy sống giản dị, không xa hoa;
- hãy tôn trọng cha mẹ;
- hãy tập chiến thắng sự đói khát, sự lười biếng và sự giận dữ;
- chớ coi thường sức khỏe. Hãy cung cấp cho cơ thể đúng lúc những đồ ăn, thức uống và sự luyện tập cần thiết;
- chưa nhắm mắt ngủ nếu chưa soát lại tất cả các việc đã làm trong ngày;
- đừng thấy cái bóng to của mình trên vách mà tưởng mình vĩ đại;
- hãy chỉ làm những việc mà sau đó mình không hối hận và bạn mình không phỉ nhổ;
- trong xã giao đừng đối bạn thành thù mà hãy đối thù thành bạn;
- hoa quả của đất chỉ có một lần trong năm, còn hoa quả của tình bạn thì nở suốt bốn mùa.

II- Định lí Pitago

Định lí Pitago là một trong những định lí đẹp của hình học.

"Hình học có hai kho báu: định lí Pitago và tỉ số vàng^(*)" (Kêple). Trong lịch sử, định lí Pitago được phát biểu đầu tiên dưới dạng: diện tích của hình vuông dựng trên cạnh huyền của tam giác vuông bằng tổng diện tích các hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông.

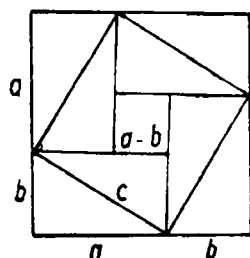
Trước Pitago rất lâu, người Ai Cập, người Babilon, người Trung Quốc và người Ấn Độ đã biết đến định lí này.

Từ hàng nghìn năm trước công nguyên, người Ai Cập cổ đã dùng sợi dây chia đều thành 12 đoạn bằng nhau để dựng góc vuông bởi tam giác có ba cạnh dài 3, 4, 5 đoạn (do đó tam giác này được gọi là tam giác Ai Cập). Người ta cũng tìm thấy những bản đất sét nung, trên đó người Babilon đã khắc các bộ ba số Pitago khá phức tạp như (65, 72, 97), (3367, 3456, 4825).

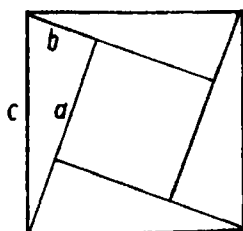
Cuốn sách cổ nhất của Trung Quốc là *Chu bản toán kinh* có ghi lại câu đối thoại giữa Chu Công và Thương Cao:

"câu tam, cổ tứ, ngũ huyền" (câu là

cạnh góc vuông ngắn, cổ là cạnh góc vuông dài, huyền là cạnh huyền), ý nói nếu hai cạnh góc vuông bằng 3 và 4 thì cạnh huyền bằng 5. Cuốn sách *Cửu chương toán thuật* của Trần Sanh (thế kỉ II) cũng cho biết khoảng năm 1100 trước công nguyên, người Trung Quốc đã biết tam giác có ba cạnh 3, 4, 5 là tam giác vuông. Trong cuốn sách này, định lí Pitago được chứng minh bằng hình vẽ (h.57): một mặt ta có $(a + b)^2 = 2ab + c^2$, mặt khác $(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$, do đó $c^2 = a^2 + b^2$.



Hình 57



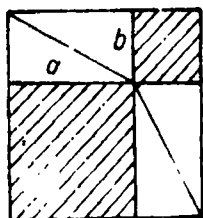
Hình 58

(*) Về tỉ số vàng, xem *Các bài tập và chuyên đề về đường tròn*.

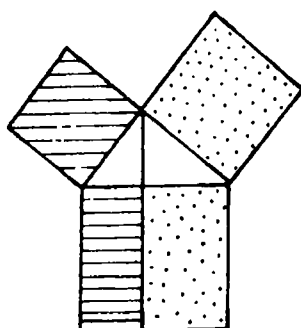
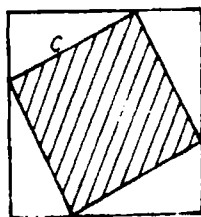
Từ thế kỷ VIII trước công nguyên, người Ấn Độ cũng đã biết đến định lý Pitago dưới tên gọi "quy tắc căng dây". Cuốn sách của Bkhaṣkara (thế kỷ XII) đưa ra hai cách chứng minh định lý Pitago bằng hình vẽ.

Cách thứ nhất ở hình 58: ta có $c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a - b)^2$, do đó $c^2 = a^2 + b^2$.

Cách thứ hai ở hình 59: so sánh diện tích các hình vuông được gạch chéo, ta cũng có $a^2 + b^2 = c^2$. Các cách chứng minh này gọn hơn so với cách của người Trung Quốc.



Hình 58



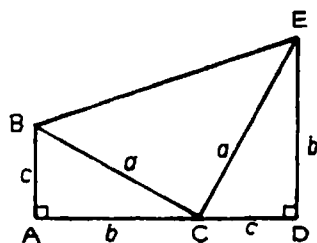
Hình 60

Một cách chứng minh khác do Oclit nêu ra trong bộ *Nguyên lý*: vẽ đường cao ứng với cạnh huyền (h.60) đường thẳng này chia hình vuông dựng trên cạnh huyền thành hai hình chữ nhật có diện tích bằng diện tích hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông.*

Chính tổng thống Mỹ Garphit (A. Garfield, 1831-1891) cũng đưa ra một cách chứng minh định lý Pitago: đặt hai tam giác vuông bằng nhau ABC, DCE như hình 61 thì BCE là tam giác vuông. Ta có:

$$S_{ABED} = S_{ABC} + S_{CDE} + S_{BCE}$$

$$\Rightarrow \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$



Hình 61

(*) Xem Các bài tập và chuyên đề về tứ giác.

$$\Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Một cuốn sách xuất bản năm 1940 đã đưa ra 370 cách chứng minh định lí Pitago. Còn chính Pitago đã chứng minh định lí này bằng cách nào thì cho đến nay chúng ta vẫn chưa biết rõ.

III- Bộ ba số Pitago

Các bộ ba số nguyên dương a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông gọi là bộ ba số Pitago, chẳng hạn (3, 4, 5); (5, 12, 13); (6, 8, 10)...

Bộ ba số Pitago có ước chung lớn nhất bằng 1 gọi là bộ ba số Pitago gốc. Tất cả các bộ ba số Pitago gốc được biểu thị theo công thức sau:

$$a = xy, b = \frac{x^2 - y^2}{2}, c = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

với x và y là các số lẻ, nguyên tố cùng nhau, $x > y$, chẳng hạn :

x	y	a	b	c
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65
...	...	...	...	...

Cách tìm ra các biểu thức trên, xem *Một số vấn đề phát triển Đại số 9*. Bộ ba số Pitago còn liên quan đến "định lí lớn Fecma", cũng xem cuốn sách trên.

LỜI GIẢI HOẶC CHỈ DẪN

CHƯƠNG I

ĐỊNH LÝ TA LET VÀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. (h. 62) *Cách 1.* Đặt $AC = x$. Giải $\frac{x}{x+5} = \frac{3}{4}$ được $x = 15$.



Hình 62

Cách 2. $\frac{CA}{3} = \frac{CB}{4} = \frac{CB - CA}{4 - 3} =$
 $= \frac{AB}{1} = 5$ nên $CA = 15$ cm.

2. (h. 63)



Hình 63

a) Tính độ dài AC được 3 cm, tính độ dài AD được 9 cm. Trên tia AB ta có các điểm C và D mà $AC < AD$ nên C nằm giữa A và D.

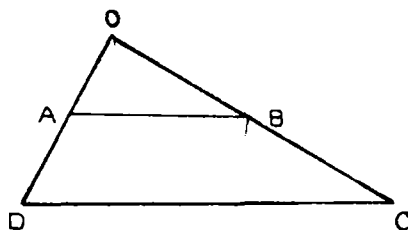
b) Theo câu a ta có $AC + CD = AD$

$$\Rightarrow 3 + CD = 9 \Rightarrow CD = 6 \text{ cm.}$$

3. Đáp số: 14 cm.

4. (h. 64)

Ta có $AB \parallel CD$ nên $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} =$
 $= \frac{AB}{CD} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.



Hình 64

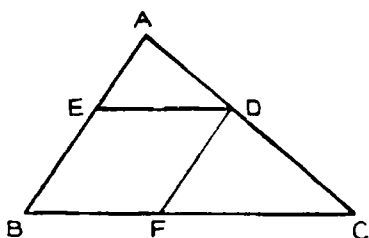
Do đó $\frac{OA}{OD - OA} = \frac{OB}{OC - OB} = \frac{2}{5 - 2}$.

Suy ra $\frac{OA}{9} = \frac{OB}{15} = \frac{2}{3}$.

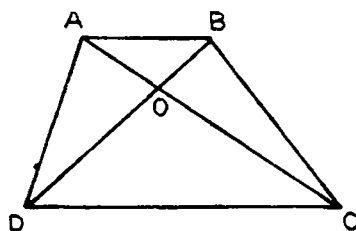
Từ đó $OA = 6$ cm, $OB = 10$ cm.

5. (h. 65)

$OA = 4$ cm, $OB = 3$ cm, $OC = 12$ cm, $OD = 9$ cm.



Hình 65



Hình 66

6. (h. 66) a) Đặt $AB = x$, ta có:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{24}{24+36} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{x-30}{x} = \frac{ED}{BC} = \frac{2}{5}$$

Từ đó $x = 50$, $BC = 75$. Vậy $AB = 50$ cm, $BC = 75$ cm.

b) Đặt $BE = ED = y \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{10-y}{10} = \frac{y}{15} \Rightarrow y = 6$.

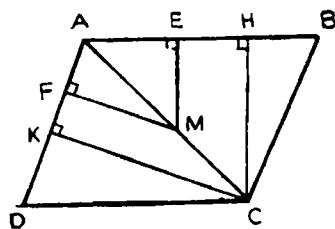
Cạnh hình thoi bằng 6 cm.

7. (h. 67)

a) Lấy C bất kì trên Ax . Kẻ ME và CH vuông góc với AB , kẻ MF và CK vuông góc với AD . Ta có:

$$\frac{ME}{CH} = \frac{MA}{CA} = \frac{MF}{CK} \text{ nên } \frac{ME}{MF} = \frac{CH}{CK}$$

b) Ta có $\frac{ME}{MF} = \frac{CH}{CK}$. Ta lại có



Hình 67

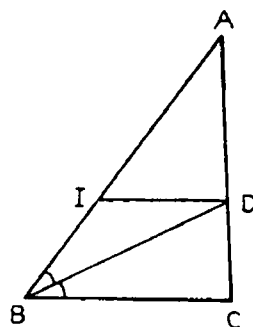
$$CH.a = CK.b \text{ nên } \frac{CH}{CK} = \frac{b}{a} \quad \text{Vậy } \frac{ME}{MF} = \frac{b}{a}$$

8. (h. 68)

$\triangle BID$ cân nên $BI = ID = 6$ cm. Do $ID \parallel BC$

$$\text{nên } \frac{AI}{AB} = \frac{ID}{BC} \text{ suy ra } \frac{AI}{AI + 6} = \frac{6}{10}$$

Từ đó $AI = 9$ cm, $AB = 15$ cm.



Hình 68

9. (h. 69)

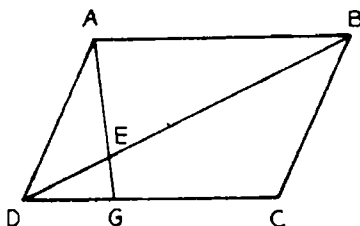
$$\text{a) } \frac{DE}{EB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{DG}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{DG}{DC} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{DG}{DC - DG} = \frac{1}{4 - 1} \Rightarrow \frac{DG}{GC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \frac{DC}{DG} = k \Rightarrow \frac{AB}{DG} = k \Rightarrow \frac{EB}{DE} = k$$

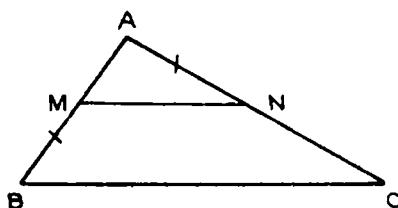
$$\Rightarrow \frac{EB + DE}{DE} = k + 1 \Rightarrow \frac{DB}{DE} = k + 1$$



Hình 69

10. (h. 70)

Ta có $MN \parallel BC$ nên $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Hình 70

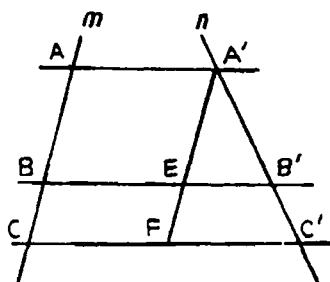
Do $AN = BM$ nên:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{4} &= \frac{AN}{6} = \frac{MN}{8} = \frac{BM}{6} = \\ &= \frac{AM + BM}{4 + 6} = \frac{AB}{10} = \frac{4}{10} \end{aligned}$$

Từ đó $AN = 2,4 \text{ cm}$; $MN = 3,2 \text{ cm}$.

11. Chứng minh rằng $\frac{DM}{DC} = \frac{CN}{CD}$.

12. (h. 71)



Hình 71

Ba đường thẳng song song với nhau, cắt hai cát tuyến m và n tại A và A' , B và B' , C và C' .

Ta sẽ chứng minh rằng $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Nếu $m \parallel n$, hiển nhiên $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Nếu m không song song với n , qua A' vẽ đường thẳng song song với m , cắt BB' và CC' thứ tự ở E và F . Ta có $\frac{A'E}{EF} = \frac{A'B'}{B'C'}$,

$A'E = AB$, $EF = BC$ nên $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

13. Chứng minh rằng đoạn thang dưới dài hơn đoạn thang liền trên một độ dài x như nhau. Ta có $30 + 7x = 44$ nên $x = 2$.

Đáp số: 32, 34, 36, 38, 40, 42 (cm).

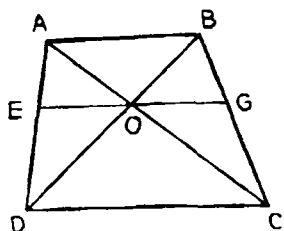
14. Đáp số: 14 cm.

15. Đáp số: $EF = b + \frac{a-b}{3} = \frac{a+2b}{3}$.

16. (h. 72)

Do $EO \parallel DC$ nên $\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC}$. (1)

Do $AB \parallel CD$ nên $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} \Rightarrow$



Hình 72

$$\frac{AO}{AO + OC} = \frac{a}{a + b} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{a}{a + b} \quad (2)$$

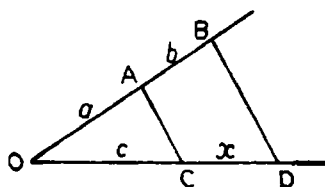
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OE}{b} = \frac{a}{a + b}$ nên $OE = \frac{ab}{a + b}$

Tương tự $OG = \frac{ab}{a + b}$

17. Ta cần dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Cách dựng (h. 73):

- Dựng một góc O tùy ý.
- Trên một cạnh của góc O , đặt liên tiếp $OA = a$, $AB = b$.
- Trên cạnh kia của góc O , đặt $OC = c$.

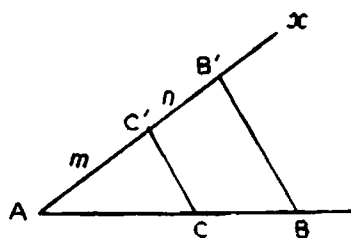


Hình 73

- Qua B dựng đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng OC ở D.

Đoạn thẳng CD có độ dài x là đoạn thẳng phải dựng.

18. Gọi đoạn thẳng đã cho là AB. Cách dựng (h.74):



Hình 74

- Trên tia Ax bất kì, đặt liên tiếp các đoạn thẳng $AC' = m$, $C'B' = n$. Nối $B'B$.

- Qua C' dựng đường thẳng song song với $B'B$, cắt AB ở C . Ta có

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B'} = \frac{m}{n}$$

19. Sai lầm ở chỗ kết luận rằng tỉ số $\frac{y - x}{x - y} = -1$. Chỉ xảy ra đẳng thức trên khi $x \neq y$ nhưng điều này không xảy ra: ta sẽ chứng

tỏ rằng $x = y$.

Thật vậy từ $\frac{m+y}{x} = \frac{a}{b}$, $\frac{m+x}{y} = \frac{a}{b}$, ta có

$$\frac{m+x}{y} = \frac{m+y}{x} \quad . \text{ Do đó:}$$

$$(m+x)x - (m+y)y = 0$$

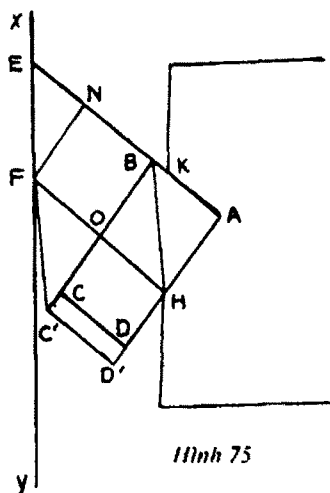
$$mx + x^2 - my - y^2 = 0$$

$$m(x-y) + (x+y)(x-y) = 0$$

$$(x-y)(m+x+y) = 0.$$

Hiển nhiên $m+x+y > 0$ nên $x = y$. Do đó không thể khẳng định được $\frac{y-x}{x-y} = -1$.

20. (h. 75)



Hình 75

Gọi giao điểm của AB với XY là E, giao điểm của HF với BC là O. Vẽ $FN \perp AE$.

$$\text{Ta có } FC' \parallel BH \Rightarrow \frac{OF}{OH} = \frac{OC'}{OB}$$

$$\Rightarrow OF \cdot OB = OH \cdot OC'$$

$$\Rightarrow S_{OBNF} = S_{OC'D'H}$$

$$\Rightarrow S_{ABC'D'} = S_{AHFN}$$

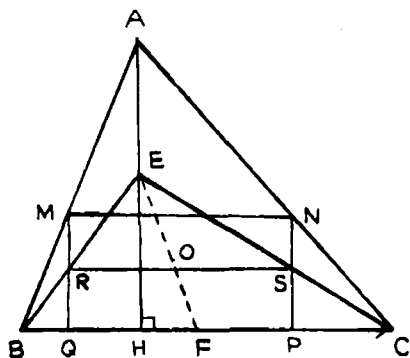
Để thấy S_{AHFN} bằng diện tích hình bình hành KHFE, do đó bằng: $1 \times 1,2 = 1,2 \text{ (m}^2\text{)}.$

Do đó $BC' = 1,2 : 0,8 = 1,5 \text{ (m)}$. Còn $BC = 1,4 \text{ m}$, nên C nằm trong đoạn thẳng BC' . Điều đó chứng tỏ rằng khi di chuyển cạnh AB trượt qua K thì chiếc tủ luôn luôn nằm về một phía của XY. Đến khi B trùng với K, đầu kia của tủ vẫn chưa chạm vào mặt tường XY và ta đưa được chiếc tủ vào phòng.

Chú ý

Với chiều rộng cửa 1 m, chiều rộng hành lang 1,2 m, tất cả các tủ có đáy là hình chữ nhật mà diện tích không quá $1,2 \text{ m}^2$ (và chiều rộng chiếc tủ nhỏ hơn 1 m) đều mang được vào phòng.

21. (h. 76)



Hình 76

a) Xét hình thang AMQH, E và R là trung điểm của hai đáy, B là giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên nên B, R, E thẳng hàng.

b) Xét hình thang ANPH và chứng minh tương tự câu a, ta được C, S, E thẳng hàng.

c) Xét hình thang BRSC và cũng chứng minh tương tự như trên, ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Chú ý

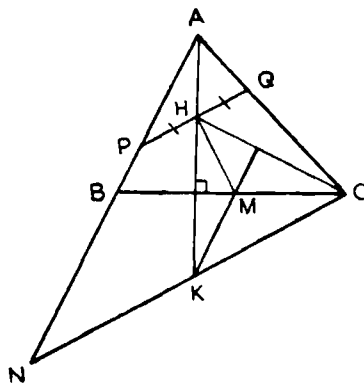
– Câu a và b có tác dụng gợi ý để giải câu c.

– Nếu tìm tập hợp tâm các hình chữ nhật MNPQ khi đỉnh M chuyển động trên cạnh AB thì tập hợp phải tìm là đoạn thẳng EF trừ các điểm E và F.

22. (h. 77)

a) Xét hình thang PQCN, H là trung điểm của đáy PQ, A là giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên nên K là trung điểm của CN.

b) KM là đường trung bình của $\triangle CBN$ nên $KM \parallel NA$, mà $NA \perp CH$, do đó $KM \perp CH$.



Hình 77

c) Tam giác CHK có $CM \perp HK$, $KM \perp CH$ nên M là trực tâm của tam giác. Do đó $HM \perp CK$. Ta lại có $CK \parallel PQ$, suy ra $HM \perp PQ$.

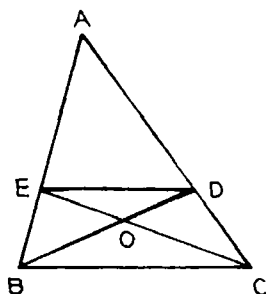
Chú ý

Câu a và b nhằm gợi ý cho câu c.

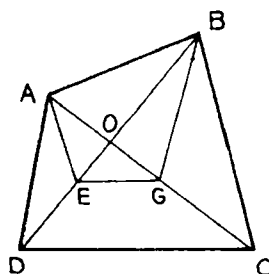
23. (h. 78) .

Ta có $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ nên $DE \parallel BC$.

Do đó $\frac{OD}{OB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$



Hình 78



Hình 79

24. (h. 79)

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $AE \parallel BC$ nên

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}, \quad (1)$$

$$BG \parallel AD \text{ nên } \frac{OB}{OD} = \frac{OG}{OA} \quad (2)$$

Nhân từng vế (1) và (2) được $\frac{OE}{OD} = \frac{OG}{OC}$, do đó $EG \parallel DC$.

Chú ý. Cách giải khác

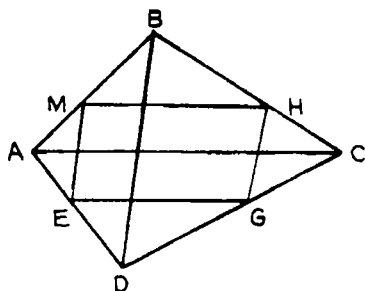
Ta có $BG \parallel AD$ nên $S_{ABD} = S_{AGD}$. Cùng trừ đi S_{AOD} ta được $S_{AOB} = S_{DOG}$. (1)

Chứng minh tương tự $S_{AOB} = S_{COE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{DOG} = S_{COE}$. Cùng trừ đi S_{EOG} được $S_{DEG} = S_{CEG}$, do đó $EG \parallel DC$.

25. (h. 80)

Cách 1 (không dùng định lý Talet đảo)



Hình 80

$$\text{Ta có } \frac{ME}{BD} = \frac{AE}{AD} = \frac{CG}{CD} = \frac{HG}{BD}$$

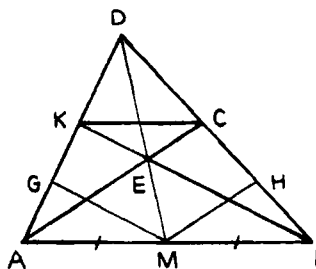
suy ra $ME = HG$. Ta lại có $ME \parallel HG$.
Vậy MEGH là hình bình hành.

Cách 2 (dùng định lý Talet đảo)

$$\text{Ta có } \frac{BM}{MA} = \frac{DE}{EA} = \frac{DG}{GC} = \frac{BH}{HC} \text{ nên}$$

$MH \parallel AC$. Tứ giác MEGH có $MH \parallel EG$, $ME \parallel HG$ nên là hình bình hành.

26. (h. 81)



Hình 81

$MG \parallel BK$, $MH \parallel AC$ nên

$$\frac{DC}{CH} = \frac{DE}{EM} = \frac{DK}{KG}. \text{ Suy ra } \frac{DC}{2CH} = \frac{DK}{2KG}$$

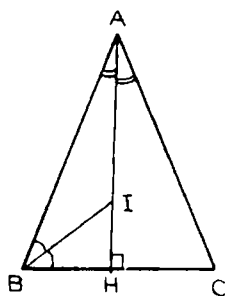
$$\Rightarrow \frac{DC}{CB} = \frac{DK}{KA} \Rightarrow CK \parallel AB.$$

Chú ý. Bài toán này cho ta bài toán dựng hình: cho đoạn thẳng AB và trung điểm M của nó. Qua điểm C nằm ngoài đường thẳng AB, chỉ dùng thước dựng đường thẳng song song với AB.

27. (h. 82)

BI là phân giác của $\triangle ABH$ nên

$$\frac{AB}{BH} = \frac{AI}{IH} \Rightarrow \frac{60}{BH} = \frac{12}{5}$$



Hình 82

Do đó $BH = 25 \text{ cm}$, $BC = 50 \text{ cm}$.

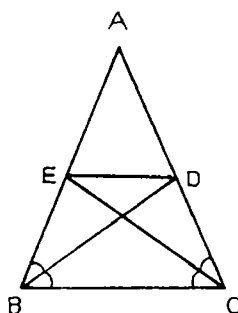
28. Ta có $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$

nên $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{4} = \frac{AC}{3}$.

Do đó $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{4} = \frac{AC}{3} = \frac{AB + BC + AC}{2 + 4 + 3} = \frac{18}{9} = 2$.

Từ đó $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$.

29. (h. 83)



Hình 83

BD là phân giác góc B nên

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DC} = \frac{3}{3+2}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{6} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow AD = 3,6 \text{ cm}.$$

Ta có $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB}$ nên $ED \parallel BC$.

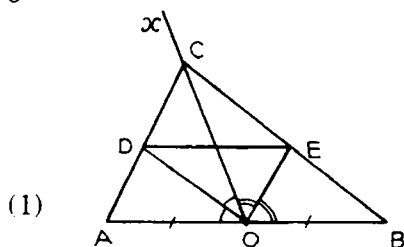
Do đó $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{ED}{4} = \frac{3,6}{6} \Rightarrow ED = 2,4 \text{ cm}.$

30. (h. 84)

a) OD là phân giác của $\triangle AOC$

nên $\frac{DC}{DA} = \frac{OC}{OA}$

OE là phân giác của $\triangle BOC$ nên



Hình 84

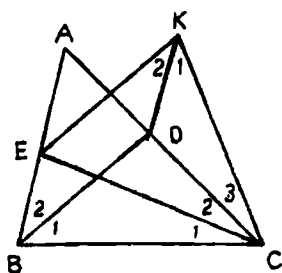
$$\frac{EC}{EB} = \frac{OC}{OB} \quad (2)$$

$$\text{Ta lại có } OA = OB \quad (3)$$

nên từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{DC}{DA} = \frac{EC}{EB}$, vậy $DE \parallel AB$.

b) DE là đường trung bình của $\triangle ABC \Leftrightarrow DC = DA \Leftrightarrow OC = OA$ [do (1)].

31. (h. 85)



Hình 85

a) Tính các độ dài CD , BE , ta được

$$CD = \frac{ab}{a+c}, \quad BE = \frac{ac}{a+b} \quad (\text{xem ví dụ 6})$$

Ta lại có $b > c$ nên

$$\frac{ab}{a+c} > \frac{ac}{a+c} > \frac{ac}{a+b} \quad \text{tức là } CD > BE.$$

b) Ta có $CD > BE$ mà $BE = DK$ nên

$$CD > DK, \text{ suy ra } \widehat{K_1} > \widehat{C_3} \quad (1)$$

Ta lại có $b > c$ nên $\widehat{B_2} > \widehat{C_2}$, mà $\widehat{B_2} = \widehat{K_2}$ nên

$$\widehat{K_2} > \widehat{C_2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{K_1} + \widehat{K_2} > \widehat{C_3} + \widehat{C_2}$

$$\Rightarrow \widehat{EKC} > \widehat{ECK}$$

$$\Rightarrow CE > EK.$$

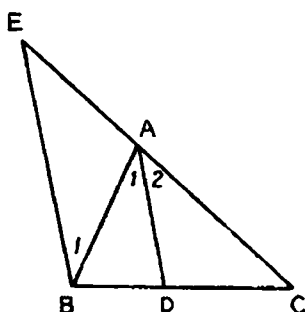
c) $CE > EK$ mà $EK = BD$ nên $CE > BD$.

Chú ý. Từ bài toán trên suy ra

– Trong tam giác có hai cạnh không bằng nhau, phân giác ứng với cạnh lớn hơn thì nhỏ hơn.

– Tam giác có hai phân giác bằng nhau là tam giác cân (một cách chứng minh bài toán này, xem Các bài tập và chuyên đề về tam giác).

32. a) (h. 86)



Hình 86

Kẻ $BE \parallel AD$ thì $\frac{DB}{DC} = \frac{AE}{AC}$. Theo

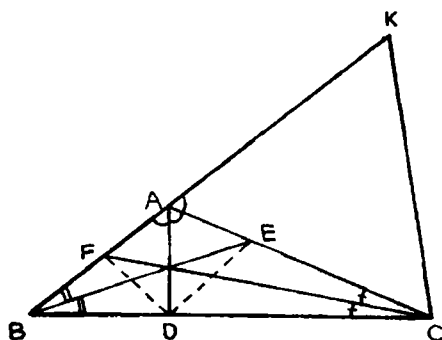
giả thiết ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Suy ra

$AE = AB$. Do đó $\widehat{E} = \widehat{B}_1$.

Ta lại có $AD \parallel BE$ nên $\widehat{E} = \widehat{A}_2$,
 $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$. Từ đó $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

Chú ý. Bài toán trên là định lý đảo của tính chất đường phân giác của tam giác.

b) (h. 87)



Hình 87

Qua C vẽ đường thẳng song song với DA, cắt BA ở K. Để thấy ACK là tam giác đều. Ta có:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{CK}{CB} = \frac{CA}{CB} = \frac{FA}{FB},$$

do đó DF là tia phân giác của góc ADB (theo kết quả của câu a).

Chứng minh tương tự, DE là tia phân giác của góc ADC.

Vậy $\widehat{EDF} = 90^\circ$ (vì DE, DF là các tia phân giác của hai góc kề bù).

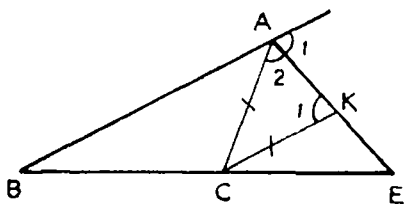
Chú ý. Cách giải khác chỉ dùng kiến thức lớp 7:

$\triangle ABD$ có AE là phân giác góc ngoài, BE là phân giác góc trong nên DE là phân giác góc ngoài. Vậy DE là phân giác của góc ADC.

Tương tự DF là phân giác của góc ADB. Do đó $\widehat{EDF} = 90^\circ$.

33. (h. 88)

Gọi E là giao điểm của tia phân giác góc ngoài đỉnh A với đường



Hình 88

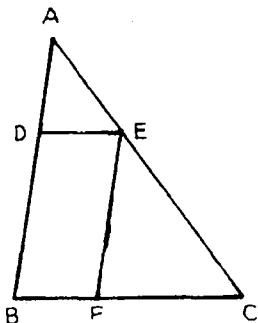
thẳng BC. Vẽ $CK \parallel AB$ thì

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{CK}, \quad (1)$$

$$\widehat{K_1} = \widehat{A_1}. \text{ Nhưng } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ nên } K_1 = A_2, \text{ do đó } AC = CK. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$

34. (h. 89)



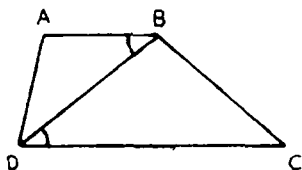
Hình 89

a) Các cặp tam giác đồng dạng: ADE và ABC, EFC và ABC, ADE và EFC.

b) $AD = 6 \text{ cm}$, $\triangle ABC$ cân ở B.

35. Chứng minh rằng $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}.$

36. (h. 90)

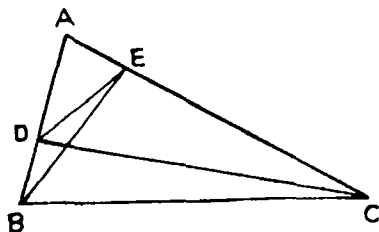


Hình 90

$\triangle ABD$ và $\triangle BDC$ đồng dạng (c.g.c) suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{BCD}$. Vậy $\widehat{BCD} = 40^\circ$.

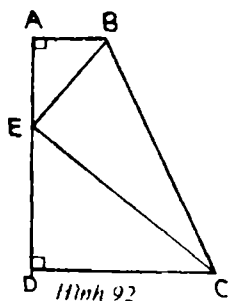
37. (h. 91)

Các tam giác đó đồng dạng theo trường hợp c.g.c.



Hình 91

38. (h. 92)



Hình 92

Chứng minh rằng $\triangle BAE$ và $\triangle EDC$ đồng dạng.

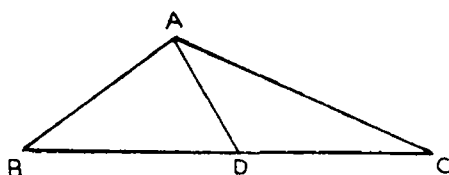
39. (h. 93)

$\triangle ABC$ và $\triangle DAC$ đồng dạng vì góc C chung,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{3}{2} \quad \text{Do đó}$$

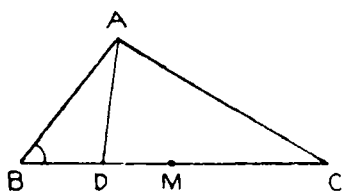
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{4}{AD} = \frac{6}{4}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{8}{3} \text{ cm.}$$



Hình 93

40. (h. 94)



Hình 94

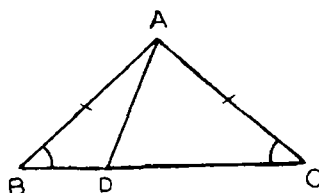
$\triangle DBA$ và $\triangle ABC$ đồng dạng (c.g.c) nên

$$\frac{DA}{AC} = \frac{DB}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } AD = \frac{1}{2} AC.$$

41. Mệnh đề đó không đúng.
Dưới đây là hai ví dụ

- Ví dụ 1. Xét $\triangle ABC$ cân ở A.
D thuộc đáy BC nhưng không là trung điểm của BC (h. 95a). $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có $\hat{B} = \hat{C}$,



Hình 95a

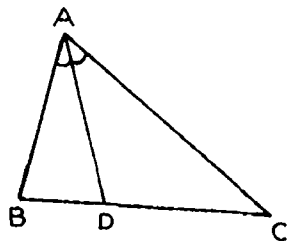
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} \text{ nhưng chúng không}$$

đồng dạng.

– Ví dụ 2. Xét $\triangle ABC$ có $AB \neq AC$,
phân giác AD (h. 95b). $\triangle ABD$ và

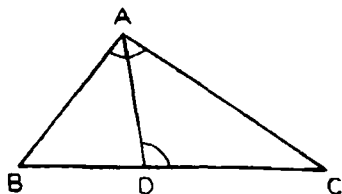
$$\triangle ACD \text{ có } \hat{A}_1 = \hat{A}_2, \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ nhưng}$$

chúng không đồng dạng.



Hình 95b

42. (h. 96) $\triangle ABC$ và $\triangle DAC$ đồng dạng (g.g)



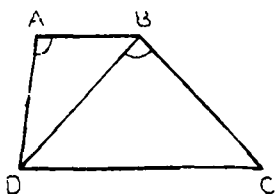
Hình 96

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{16} = \frac{DC}{12}$$

$$\Rightarrow DC = 9 \text{ cm.}$$

43. (h. 97)



Hình 97

$\triangle ABD$ và $\triangle BDC$ đồng dạng (g.g).

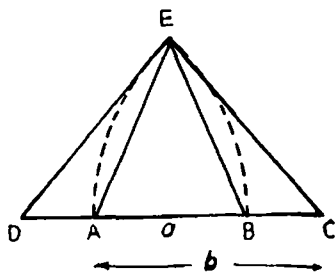
$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{a}{BD} = \frac{BD}{b}$$

$$\Rightarrow BD^2 = a.b.$$

44. (h. 98)

Do $CE = DE$ nên $\triangle CED$ cân; $\triangle ADE = \triangle BCE$ (c.g.c) nên $AE = BE$. Các tam giác cân AEB , ACE có góc đáy A là góc chung

nên đồng dạng (g.g) suy ra $\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AE}$

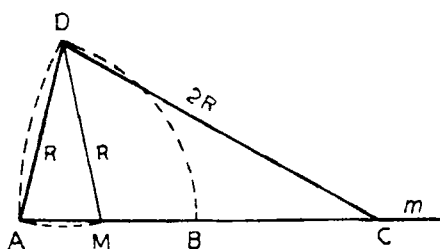


Hình 98

do đó $AE^2 = AB.AC = ab$.

Chú ý. Bài toán này cho ta một cách dựng đoạn trung bình nhân của hai đoạn thẳng a và b .

45. (h. 99)



Hình 99

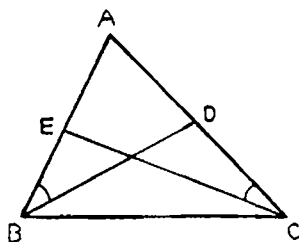
Đặt $AB = R$ thì $DM = R$,
 $CA = CD = 2R$. Các tam
giác cân DAM và CAD có
 $DAM = CAD$ nên đồng dạng
 $(g.g) \Rightarrow$

$$\frac{AM}{AD} = \frac{DM}{CD} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

Vậy M là trung điểm của
 AB .

Chú ý. Bài toán này cho ta bài toán dựng hình: cho điểm B thuộc
tia Am . Chỉ dùng compa, dựng trung điểm của AB .

46. (h. 100)



Hình 100

a) $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ đồng dạng $(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB} \quad (\text{vì } AD = \frac{1}{2}AC,$$

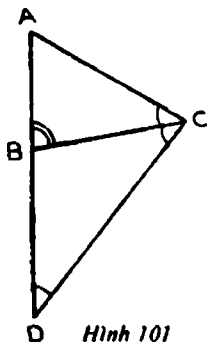
$$AE = \frac{1}{2}AB)$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 \Rightarrow AB = AC$$

b) Chú ý rằng $\triangle AEC$ có $AE = \frac{1}{2}AC$

AC và $\widehat{ACE} = 30^\circ$ nên chứng minh
được $\widehat{AEC} = 90^\circ$ (kẻ $AE' \perp CE$ rồi
chứng tỏ rằng E' trùng E). Do đó $\widehat{A} = 60^\circ$. Vậy $\triangle ABC$ là tam giác
đều.

47. (h. 101)



Hình 101

a) Trên tia đối của tia BA lấy D sao cho $BD = BC$. Cách vẽ này vừa làm xuất hiện $AD = AB + BC$, vừa làm xuất hiện $\widehat{ACD} = 2\widehat{ACB}$ (vì $\triangle BDC$ cân nên $\widehat{BCD} = \widehat{D} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$) do đó $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$.

Ta có $\triangle ACD$ và $\triangle ABC$ đồng dạng (g.g) nên $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD = AB(AB + BC)$.

Cách khác. Trên tia đối của tia BC, lấy K sao cho $BK = BA$ rồi chứng minh $\triangle ABK$ và $\triangle KAC$ đồng dạng.

b) Cũng vẽ điểm D như câu a. Ta có $AC^2 = AB(AB + BC) = AB \cdot AD$ nên $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$. Do đó $\triangle ACD$ và $\triangle ABC$ đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow$

$$\widehat{D} = \widehat{ACB}. \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{ABC} = \widehat{D} + \widehat{BCD} = 2\widehat{D} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$.

c) Áp dụng câu a. Đáp số: $BC = 10$ cm.

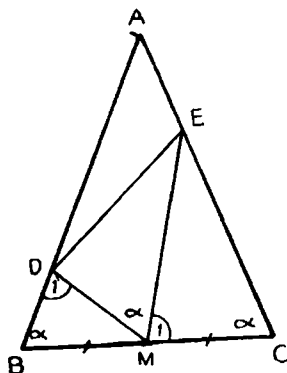
48. (h. 102)

a) $\triangle BDM$ và $\triangle CME$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE}.$$

Ta có $BM = CM$ nên $BD \cdot CE = BM^2$.

b) Từ $\triangle BDM$ và $\triangle CME$ đồng dạng suy ra



Hình 102

$$\frac{DM}{ME} = \frac{BD}{CM} \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{BM} \quad (\text{vì } CM = BM).$$

Ta lại có $\widehat{DME} = \widehat{DMC} - \widehat{M_1} = (\widehat{B} + \widehat{D_1}) - \widehat{M_1} = \widehat{B}$. Do đó $\triangle MDE$ và $\triangle BDM$ đồng dạng (c.g.c).

c) Từ câu b suy ra $\widehat{MDE} = \widehat{BDM}$, do đó DM là tia phân giác của góc BDE.

49. a) Viết độ dài các cạnh mỗi tam giác từ nhỏ đến lớn: 14, 21, 28 và 4, 6, 8. Ta thấy $\frac{14}{4} = \frac{21}{6} = \frac{28}{8}$. Vậy hai tam giác đồng dạng (c.c.c).

b) Hai tam giác đồng dạng (c.c.c) vì $\frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{18}{27}$.

50. Không thể khẳng định như vậy.

– Ví dụ 1. Hai tam giác ở câu b của bài 49 có hai cặp cạnh bằng nhau và ba cặp góc bằng nhau (vì hai tam giác đồng dạng) nhưng hiển nhiên chúng không bằng nhau.

– Ví dụ 2. $\triangle ABC$ và $\triangle DAC$ ở bài 39.

51. Ta có $9h_a = 6h_b = 4h_c (= 2S_{ABC})$

$$\Rightarrow \frac{h_a}{4} = \frac{h_b}{6} = \frac{h_c}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{h_a}{AB} = \frac{h_b}{AC} = \frac{h_c}{BC}.$$

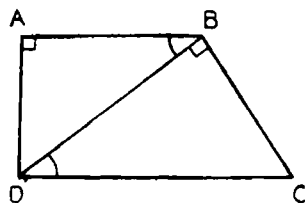
Vậy $\triangle ABC$ đồng dạng với tam giác có ba cạnh bằng h_a, h_b, h_c .

Chú ý. Nếu một tam giác có một cạnh bằng trung bình nhân của hai cạnh còn lại thì tam giác đó đồng dạng với tam giác có ba cạnh bằng ba đường cao của tam giác ban đầu.

52. (h. 103) Gọi ABCD là hình thang vuông ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $BD \perp BC$. Chứng minh rằng $\triangle ABD$ và $\triangle BDC$ đồng dạng

$$\Rightarrow BD^2 = AB \cdot DC.$$

53. Đáp số: $AH = 6$ cm.



Hình 103

54. (h. 104)

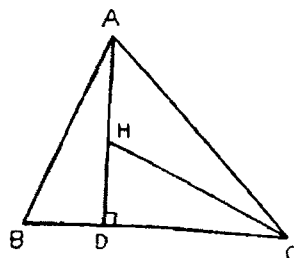
$\triangle ABD$ và $\triangle CHD$ đồng dạng (g.g),
 $HD = 5 \text{ cm}$.

55. $\triangle AHB'$ và $\triangle BHA'$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HB'}{HA'} \Rightarrow$$

$$AH \cdot HA' = BH \cdot HB'.$$

$$\text{Tương tự } AH \cdot HA' = CH \cdot HC'.$$



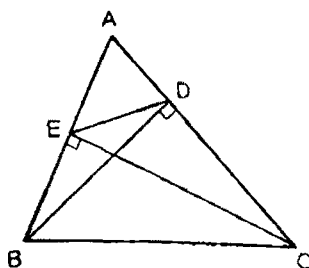
Hình 104

56. (h.105)

a) $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ đồng dạng (g.g).

b) Từ câu a suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$.

Do đó $\triangle ADE$ và $\triangle ABC$ đồng dạng (c.g.c).

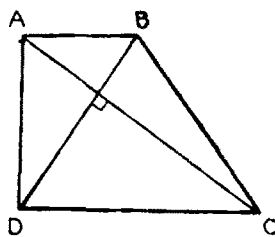


Hình 105

57. Gọi $\triangle ABC$ là tam giác vuông ở A, đường cao AH. $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} = \frac{AB}{CA}$

$$\Rightarrow \frac{12}{HC} = \frac{HB}{12} = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra}$$

$$HB = 9 \text{ cm}, HC = 16 \text{ cm}.$$



Hình 106

58. (h. 106)

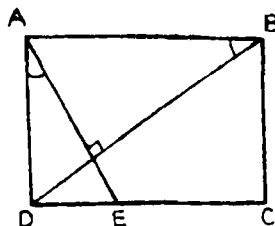
a) $\triangle ABD$ và $\triangle DAC$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{DA} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow AD^2 = AB \cdot DC = 4 \cdot 9 = 36. \text{ Vậy } AD = 6 \text{ cm}.$$

b) Hai tam giác trên đồng dạng suy ra $\frac{BD}{AC} = \frac{AB}{DA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

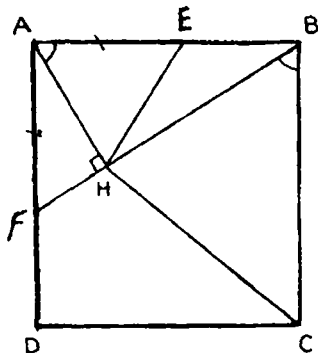
59. (h. 107)

$\triangle EDA$ và $\triangle DAB$ đồng dạng (g.g). Đáp số: $EC = 7$ cm.



Hình 107

60. (h. 108)



Hình 108

a) $\triangle AHE$ và $\triangle BHC$ đồng dạng (g.g)
nên $\frac{AH}{BH} = \frac{AE}{BC}$, do đó $\frac{AH}{BH} = \frac{AE}{BC}$. Còn

$\widehat{HAE} = \widehat{HBC}$ (góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc). Vậy $\triangle HAE$ và $\triangle HBC$ đồng dạng (c.g.c).

b) Từ câu a suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{BHC}$.
Ta lại có $\widehat{AHE} + \widehat{EHB} = 90^\circ$ nên
 $\widehat{BHC} + \widehat{EHB} = 90^\circ$, tức là $\widehat{EHC} = 90^\circ$.

Chú ý

- Câu a nhằm gợi ý cho chứng minh câu b.
- Cách khác để chứng minh $\widehat{EHC} = 90^\circ$, xem Các bài tập và chuyên đề về tứ giác.

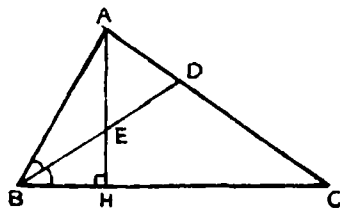
61. (h. 109)

Theo tính chất đường phân giác của $\triangle ABH$ và $\triangle ABC$, ta có

$$\frac{HE}{EA} = \frac{BH}{BA}, \quad \frac{AD}{DC} = \frac{BA}{BC} \quad \text{Nhưng}$$

$\triangle AHB$ và $\triangle CAB$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{HE}{EA} = \frac{AD}{DC}$$



Hình 109

62. (h. 110)

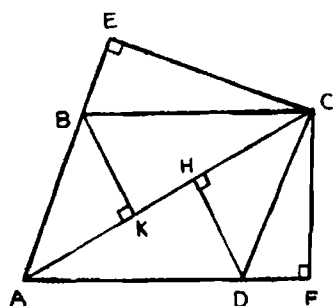
a) Do AC là đường chéo lớn nên $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} > 90^\circ$, do đó E và F nằm ngoài các cạnh AB, AD. Ta có $\triangle AFC$ và $\triangle AHD$ đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AF}{AH} \Rightarrow AD \cdot AF = AC \cdot AH \quad (1)$$

b) Vẽ $BK \perp AC$ và chứng minh tương tự, ta được $AB \cdot AE = AK \cdot AC$ (2)

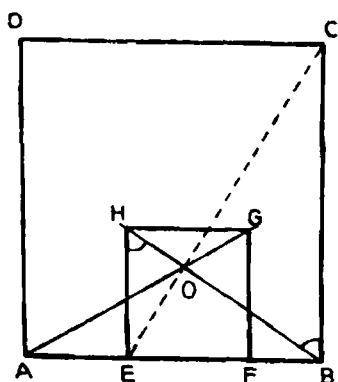
Từ (1) và (2) suy ra: $AD \cdot AF + AB \cdot AE = AC \cdot AH + AC \cdot AK = AC(AH + AK) = AC^2$ (vì $AH + AK = AC$ do $AK = CH$).

Chú ý. Nếu hình bình hành ABCD là hình chữ nhật thì E trùng B, F trùng D. Khi đó ta có $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Kết quả này cho ta một cách chứng minh định lý Pitago.



Hình 110

63. (h. 111)



a) Ta có $\frac{OH}{OB} = \frac{OG}{OA} = \frac{HG}{AB} = \frac{HE}{BC}$.

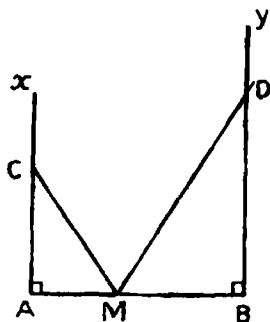
Ta lại có $\widehat{OHE} = \widehat{OBC}$ (so le trong, $HE \parallel BC$). Do đó $\triangle OHE$ và $\triangle OBC$ đồng dạng (c.g.c).

b) Từ câu a suy ra $\widehat{EOH} = \widehat{BOC}$. Dễ dàng chứng minh được E, O, C thẳng hàng. Tương tự, F, O, D thẳng hàng.

64. (h. 112)

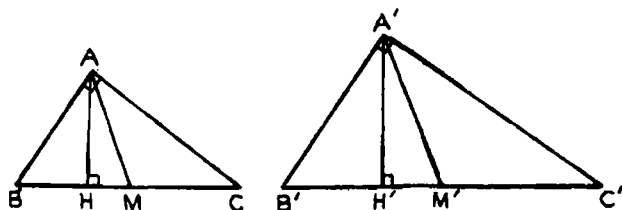
$\triangle AMC$ và $\triangle BMD$ đồng dạng (trường hợp cạnh huyền và cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{AM}{BM} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$



Hình 112

65. (h. 113)



Hình 113

Gọi ABC , $A'B'C'$ là các tam giác vuông ở A , A' ; đường cao AH , $A'H'$; M và M' là trung điểm của BC và $B'C'$ (giả sử $AC \geq AB$, $A'C' \geq A'B'$).

a) Trước hết chứng minh $\triangle AHC$ và $\triangle A'H'C'$ đồng dạng (trường hợp cạnh huyền và cạnh góc vuông) để suy ra $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

b) Trước hết chứng minh $\triangle AHM$ và $\triangle A'H'M'$ đồng dạng (trường hợp cạnh huyền và cạnh góc vuông) để suy ra $\widehat{AMH} = \widehat{A'M'H'}$, do đó $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

66. Khoảng cách từ người đến con đường gấp: $120:0,6 = 200$ lần khoảng cách từ người đến cửa sổ.

Do đó quãng đường ô tô đi trong 20s bằng:

$$1 \text{ m} \times 200 = 200 \text{ m.}$$

Vận tốc ô tô bằng 10 m/s hay 36 km/h.

67. a) 20 cm.

b)
$$\frac{bh}{a - b}$$

68. Chứng minh rằng $\frac{BC}{DE}$ là hằng số, suy ra DE là hằng số.

69. Đáp số:
$$\frac{ah}{a + h} .$$

70. ΔABC và ΔDEF đồng dạng với tỉ số $\frac{1}{2}$ nên tỉ số diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

71. ΔDEF và ΔABC đồng dạng (c.c.c), tỉ số đồng dạng bằng $\frac{1}{2}$, tỉ số diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

72. (h. 114)

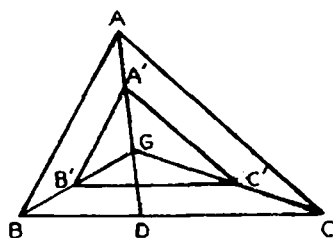
Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Ta có

$$AA' = \frac{1}{4} AD = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} AG = \frac{3}{8} AG$$

$$\text{nên } \frac{GA'}{GA} = \frac{5}{8}. \text{ Tương tự } \frac{GB'}{GB} = \frac{5}{8},$$

do đó $\Delta GA'B'$ và ΔGAB đồng dạng

$$(c.g.c), \text{ suy ra } \frac{A'B'}{AB} = \frac{5}{8}.$$



Hình 114

$$\text{Chứng minh tương tự } \frac{A'C'}{AC} = \frac{5}{8}, \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{5}{8}.$$

Vậy $\Delta A'B'C'$ và ΔABC đồng dạng (c.c.c), tỉ số đồng dạng bằng

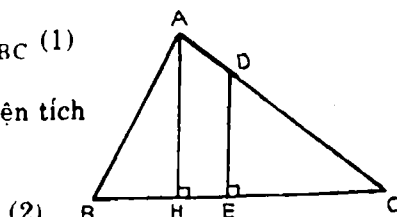
$$\frac{5}{8}, \text{ tỉ số diện tích bằng } \frac{25}{64}.$$

73. Cho ΔABC , đường cao AH, HB = 7 cm, HC = 18 cm (h. 115).

$$\text{Ta có } \frac{HC}{BC} = \frac{18}{25} \text{ nên } S_{AHC} = \frac{18}{25} S_{ABC} \quad (1)$$

Vì DE chia ΔABC ra hai phần có diện tích bằng nhau nên

$$S_{DEC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

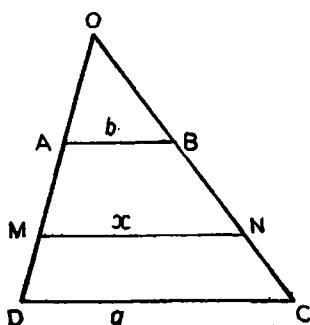


Hình 115

Từ (1) và (2) suy ra $S_{DEC} : S_{AHC} = \frac{1}{2} : \frac{18}{25} = \frac{25}{36} = (\frac{5}{6})^2$.

Suy ra $\frac{EC}{HC} = \frac{5}{6}$. Từ đó $EC = 15$ cm, $EB = 10$ cm.

74. (h. 116)



Hình 116

a) Gọi O là giao điểm của các đường thẳng AD và BC, đặt

$$S_{ABNM} = S_{MNCD} = S.$$

Ta có $\triangle OAB$ và $\triangle OMN$ đồng

dạng nên: $\frac{S_{OAB}}{S_{OMN}} = (\frac{AB}{MN})^2$

$$\Rightarrow \frac{S_{OMN} - S}{S_{OMN}} = \frac{AB^2}{MN^2} \quad (1)$$

Ta có $\triangle ODC$ và $\triangle OMN$ đồng dạng nên:

$$\frac{S_{ODC}}{S_{OMN}} = (\frac{DC}{MN})^2 \Rightarrow \frac{S_{OMN} + S}{S_{OMN}} = \frac{CD^2}{MN^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{AB^2 + CD^2}{MN^2} = \frac{S_{OMN} + S + S_{OMN} - S}{S_{OMN}} = \frac{2S_{OMN}}{S_{OMN}} = 2.$$

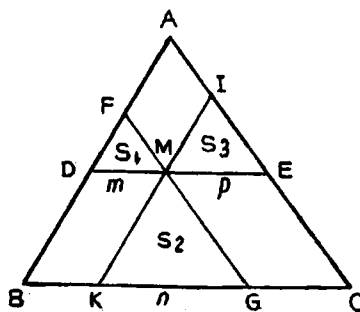
b) $MN = 5$ cm.

75. (h. 117)

Gọi diện tích các tam giác FDM, MKG, IME thứ tự là S_1, S_2, S_3 . Các tam giác trên đồng dạng với $\triangle ABC$ nên:

$$(\frac{m}{BC})^2 = \frac{S_1}{S} = \frac{4}{81} \Rightarrow \frac{m}{BC} = \frac{2}{9},$$

$$(\frac{n}{BC})^2 = \frac{S_2}{S} = \frac{16}{81} \Rightarrow \frac{n}{BC} = \frac{4}{9}$$



Hình 117

$$\text{Do } \frac{m}{BC} + \frac{n}{BC} + \frac{p}{BC} = \frac{BK + KG + GC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

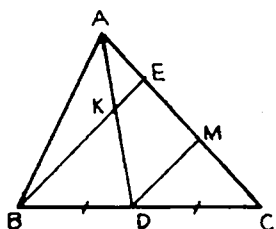
$$\text{nên } \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{p}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{p}{BC} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } \frac{S_3}{S} = \left(\frac{p}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}. \text{ Vậy } S_3 = 9 \text{ cm}^2.$$

76. Đáp số: 25 m.

77. $\triangle OCA$ và $\triangle OC'A'$ đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OC'A'}$. $\triangle OCB$ và $\triangle OC'B'$ đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OC'B'}$. Do đó $\widehat{OCA} + \widehat{OCB} = \widehat{OC'A'} + \widehat{OC'B'} = 180^\circ$. Vậy A, C, B thẳng hàng.

78. (h. 118)



Hình 118

$$\text{Kẻ } DM \parallel BE. \text{ Ta có } \frac{AE}{EM} = \frac{AK}{KD} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Còn } \frac{EM}{EC} = \frac{1}{2}. \text{ Do đó } \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

79. Vẽ $EF \parallel BD$ rồi chứng minh

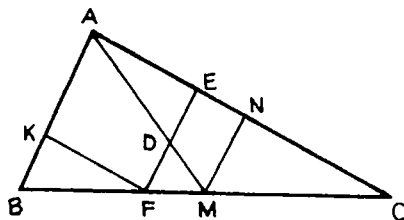
$DC = DF$, suy ra $OE = OC$.

80. (h. 119)

Để chứng tỏ $BK = DE$, ta sẽ

$$\text{chứng minh rằng } \frac{BK}{BA} = \frac{DE}{BA}.$$

$$\text{Vẽ } MN \parallel BA \text{ thì } MN = \frac{BA}{2}$$



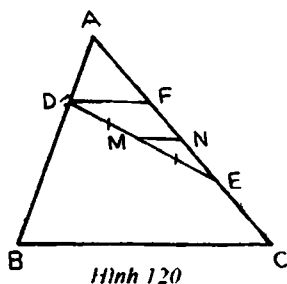
Hình 119

Chú ý đến các cặp đường thẳng song song ta có

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BF}{BC} = \frac{BF}{2BM} = \frac{AD}{2AM} = \frac{DE}{2MN} = \frac{DE}{BA}.$$

Do đó $BK = DE$.

81. Cách 1.



Hình 120

Để làm xuất hiện một tỉ số bằng $\frac{AD}{AB}$,

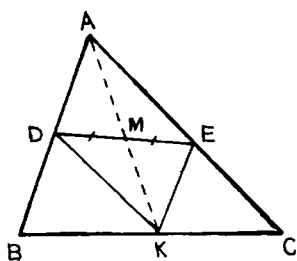
ta vẽ $DF \parallel BC$ (h.120), thế thì $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$,

mà $\frac{AD}{AB} = \frac{CE}{CA}$, do đó $AF = CE$. (1)

Qua M vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC ở N, ta có $FN = NE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra N là trung điểm của AC. Dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Để làm xuất hiện một tỉ số



Hình 121

bằng $\frac{CE}{CA}$, ta vẽ $EK \parallel AB$ (h. 121),

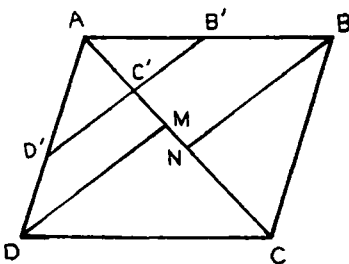
thế thì $\frac{CE}{CA} = \frac{CK}{CB}$, mà $\frac{AD}{AB} = \frac{CE}{CA}$

nên $\frac{CK}{CB} = \frac{AD}{AB}$, do đó $DK \parallel AC$.

Như vậy ADKE là hình bình hành, do đó M là trung điểm của AK. Dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

82. (h. 122)

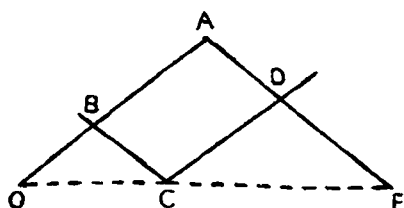
Vẽ DM, BN song song với $D'B'$ (M, N thuộc AC). Ta có $\triangle ADM = \triangle CBN$ (g.c.g) nên $AM = CN$.



Hình 122

$$\text{Ta có } \frac{AB}{AB'} + \frac{AD}{AD'} = \frac{AN}{AC'} + \frac{AM}{AC'} = \frac{AN + CN}{AC'} = \frac{AC}{AC'}.$$

83. (h. 123)



Hình 123

a) ABCD là hình bình hành nên $\widehat{OBC} = \widehat{A}$. Các tam giác cân OBC, OAE có cặp góc ở đỉnh bằng nhau nên đồng dạng (c.g.c).

b) Từ câu a suy ra $\widehat{BOC} = \widehat{AOE}$, do đó ba điểm O, C, E thẳng hàng.

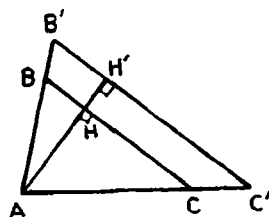
Chú ý. Nếu cố định điểm O thì khi mũi nhọn ở C vẽ một hình nào đó, đầu

bút chỉ ở E vẽ hình đồng dạng với hình ấy theo tỉ số $\frac{OA}{OB}$.

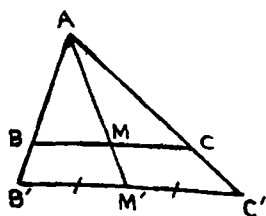
84. a) (h. 124) – Dựng $\widehat{A} = 80^\circ$. Trên hai cạnh của góc A, đặt $AB' = 2$ đơn vị dài, $AC' = 3$ đơn vị dài.

– Dựng đường cao AH' . Trên tia AH' đặt $AH = 1,5$ cm.

– Qua H, dựng $BC \parallel B'C'$.



Hình 124



Hình 125

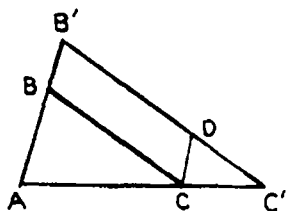
b) (h. 125)

– Dựng $\triangle AB'C'$ có $\widehat{B'} = 70^\circ$, $\widehat{C'} = 40^\circ$.

– Dựng trung tuyến AM' .

– Trên tia AM' đặt $AM = 1,5$ cm.

– Qua M dựng $BC \parallel B'C'$.

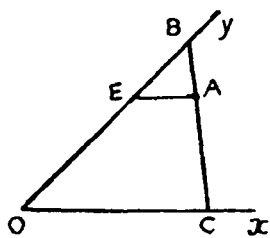


Hình 126

c) (h. 126)

- Dựng $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 70^\circ$, $AB' = 3$ đơn vị dài, $AC' = 5$ đơn vị dài.
- Trên tia $B'C'$ đặt $B'D = 2$ cm.
- Qua D dựng $DC \parallel AB'$.
- Dựng $CB \parallel C'B'$.

85. (h. 127)



Hình 127

- Qua A dựng đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở E.

- Trên tia Ey đặt $EB = \frac{1}{2}EO$.

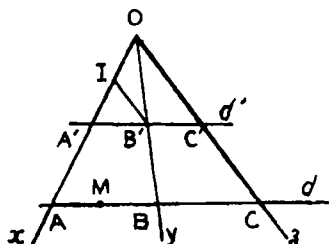
- BA cắt Ox ở C.

Bài toán có một nghiệm hình nếu $\widehat{xOy} \neq 180^\circ$.

86. (h. 128)

a) *Phân tích.* Giả sử đã dựng được đường thẳng d qua M, cắt Ox, Oy, Oz thứ tự ở A, B, C sao cho B là trung điểm của AC.

Vẽ đường thẳng bất kỳ d' // d, cắt Ox, Oy, Oz thứ tự ở A', B', C'. Do $AB = BC$ nên dễ dàng chứng minh được $A'B' = B'C'$.



Hình 128

Như vậy nếu dựng được đường thẳng d' thì ta sẽ dựng được đường thẳng d. Để dựng đường thẳng d', ta chỉ việc lấy B' bất kì trên Oy rồi dựng qua B' đường thẳng cắt Ox, Oz ở A', C' sao cho B' là trung điểm của A'C'. Dễ dàng dựng được đường thẳng d' như vậy.

b) *Cách dựng*

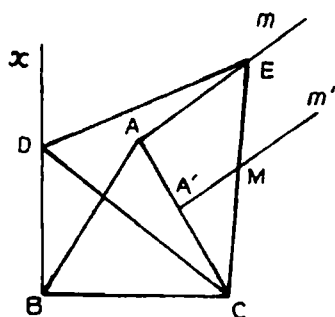
- Qua B' bất kì thuộc Oy, dựng đường thẳng song song với Oz, cắt Ox ở I.

- Dựng A' đối xứng với O qua I .
- $A'B'$ cắt Oz ở C' .
- Qua M dựng đường thẳng d song song với đường thẳng $A'B'C'$, cắt Ox, Oy, Oz thứ tự ở A, B, C .

c) *Chứng minh.* Bạn đọc tự chứng minh.

d) *Biện luận.* Bài toán có một nghiệm hình.

87. (h. 129)



Hình 129

$$\begin{aligned} & \text{a) } \triangle ACE = \triangle BCD \text{ (c.g.c)} \\ & \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CBD} = 90^\circ. \end{aligned}$$

b) Lấy A' là trung điểm của AC thì A' là điểm cố định. $A'M$ là đường trung bình của $\triangle ACE$ nên $A'M \parallel AE$, M chạy trên tia $A'm' \perp AC$ tại A' .

Bạn đọc tự chứng minh phần đảo.

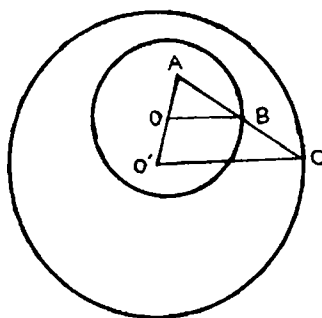
Chú ý. M là ảnh của E trong phép vị tự tâm C tỉ số $\frac{1}{2}$, tập hợp các điểm

E là tia $Am \perp AC$ tại A , nên tập hợp các điểm M là tia $A'm'$, ảnh của tia Am trong phép vị tự nói trên.

88. (h. 130)

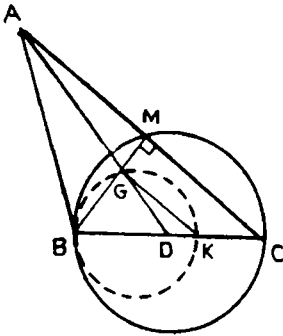
C là ảnh của B trong phép vị tự tâm A tỉ số 2, tập hợp các điểm B là đường tròn $(O; 1\text{cm})$, do đó tập hợp các điểm C là đường tròn $(O'; 2\text{cm})$ với O' là ảnh của O trong phép vị tự trên.

Bằng cách giải thông thường, ta vẽ O' đối xứng với A qua O rồi chứng minh rằng $O'C = 2\text{ cm}$.



Hình 130

89 (h. 131)



Hình 131

Gọi M là trung điểm của AC thì G là ảnh của M trong phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{2}{3}$. Tập hợp các điểm M là

đường tròn có đường kính BC (trừ các điểm B và C). Do đó ta vẽ điểm K trên cạnh BC sao cho $BK = \frac{2}{3} BC$.

Tập hợp các điểm G là đường tròn có đường kính là BK (trừ các điểm B và K).

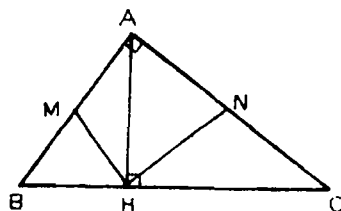
CHƯƠNG II

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

90. Đáp số: 13 cm.

91. (h. 132)

Đáp số: HB = 18 cm, HC = 32 cm,
AH = 24 cm.



Hình 132

92. (h. 133)

Trong tam giác vuông BKA:

$$BK^2 = AB^2 - AK^2.$$

Trong tam giác vuông BKC:

$$BK^2 = BC^2 - KC^2. \text{ Do đó}$$

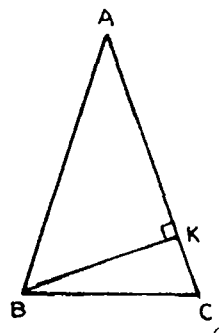
$$AB^2 - AK^2 = BC^2 - KC^2. \quad (1)$$

Đặt $KC = x$, từ (1) suy ra:

$$32^2 - (32 - x)^2 = 24^2 - x^2$$

Giải phương trình này, ta được $x = 9$.

Vậy $KC = 9$ cm.



Hình 133

93. (h. 133)

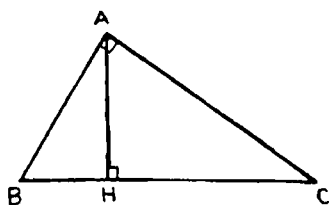
Trong tam giác vuông ABK: $BK^2 = AB^2 - AK^2 = 9^2 - 7^2 = 32$.

Trong tam giác vuông BKC: $BC^2 = BK^2 + KC^2 = 32 + 4 = 36$

Vậy $BC = 6$ cm.

94. Tính AC được 15 cm. Vẽ $HK \parallel BE$. Đáp số: $AE = 5$ cm,
 $EC = 10$ cm.

95. (h. 134)



Hình 134

Cách 1. Lần lượt tính $HC = 16$ cm, $BC = 25$ cm. Do đó $S_{ABC} = 25 \cdot 12 : 2 = 150$ (cm²).

Cách 2. Tính AB theo công thức

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \text{ được } c = 15.$$

Do đó $S_{ABC} = 20 \cdot 15 : 2 = 150$ (cm²).

96. (h. 134)

Đặt $\frac{BH}{9} = \frac{HC}{16} = k$ thì $BH = 9k$, $HC = 16k$.

Ta có $AH^2 = BH \cdot HC = 9k \cdot 16k = 144k^2$

$\Rightarrow 12^2 = (12k)^2 \Rightarrow k = 1$.

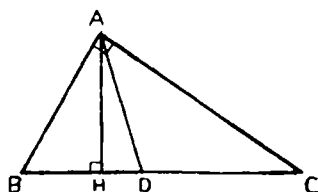
Để dàng tính được $BH = 9$ cm, $HC = 16$ cm, $BC = 25$ cm, $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm.

97. Gọi a là độ dài cạnh huyền của tam giác vuông, kí hiệu b , c , b' , c' như đã quy ước. Từ công thức $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$ suy ra

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b'}{c'}.$$

98. Theo bài 97, do $\frac{b}{c} = 2$ nên $\frac{b'}{c'} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 4$.

99. (h. 135)

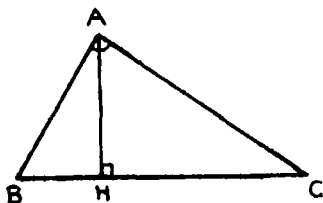


Hình 135

Cho ΔABC vuông ở A, phân giác AD, đường cao AH. Trước hết tính $AB : AC$ theo bài 97.

Đáp số: $DB : DC = 2 : 3$.

100 (h. 136)



Hình 136

Cách 1. Lần lượt tính $BC = 25$ cm, $AH = 12$ cm, $BH = 9$ cm, chu vi $\triangle ABH$ bằng 36 cm.

Cách 2. Tính $BC = 25$ cm nên chu vi $\triangle ABC$ bằng 60 cm.

$\triangle AHB$ và $\triangle CAB$ đồng dạng nên

$$\frac{\text{chu vi } AHB}{\text{chu vi } CAB} = \frac{AB}{CB} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Do đó chu vi AHB bằng: $60 \cdot \frac{3}{5} = 36$ (cm).

101. (h. 136)

a) $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$ đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AB}{CA} = \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} = \frac{AB + AH + HB}{CA + CH + HA} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}. \quad (1)$$

b) $\triangle AHB$ và $\triangle CAB$ đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AH}{CA} = \frac{HB}{AB} = \frac{AB + AH + HB}{CB + CA + AB} = \frac{18}{\text{chu vi } ABC}. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $AB = 3k$, $CA = 4k$, do đó $BC = 5k$. Như vậy

$$\frac{AB}{CB} = \frac{3}{5}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra chu vi ABC bằng 30 cm.

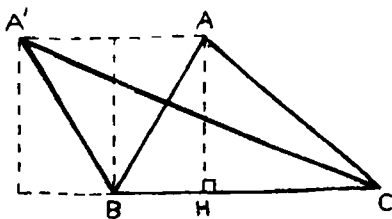
102. (h. 137)

a) $\triangle ABC$ và $\triangle HBA$ có $\angle ABC$ là góc chung (do H nằm giữa B và C),

$$\frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB} \quad (\text{vì } c^2 = ac') \text{ nên đồng dạng}$$

c.g.c), suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BHA} = 90^\circ$.

(b) Giải tương tự như câu a.



Hình 137

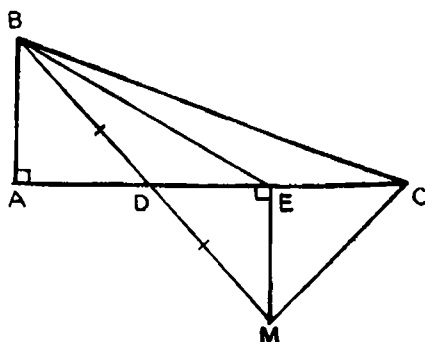
Chú ý. Nếu không có điều kiện H nằm giữa B và C thì chưa thể kết luận được $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Thật vậy, trong hình 137, nếu lấy A' đối xứng với A qua đường vuông góc với BC tại B thì $\triangle A'BC$ cũng có điều kiện $c^2 = ac'$ nhưng $\widehat{BA'C}$ không phải là góc vuông.

103. Cách 1 (h. 138)

$\triangle EAB$ vuông có $AE = 2AB$,
 $\triangle BMC$ vuông có $MB = 2MC$, do
 đó hai tam giác đồng dạng (c.g.c).

Suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{MBC}$, do đó
 $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = \widehat{MBC} + \widehat{ACB} =$
 $= \widehat{ADB} = 45^\circ$.

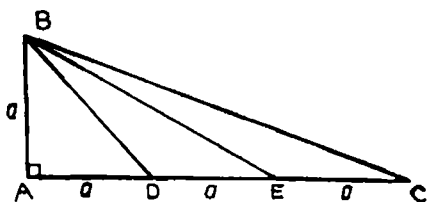


Hình 138

Cách 2 (h. 139)

Đặt $AB = AD = DE = EC = a$ thì $BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Còn

$CD \cdot ED = 2a \cdot a = 2a^2$. Do đó $BD^2 = CD \cdot ED \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{BD}{ED}$.



Hình 139

Như vậy $\triangle CDB$ và $\triangle BDE$ đồng
 dạng (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{DBE}$.

Do đó $\widehat{DCB} + \widehat{DEB} = \widehat{DBE} +$
 $+ \widehat{DEB} = \widehat{ADB} = 45^\circ$.

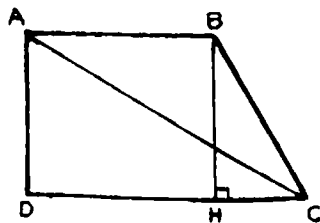
104. a) $AB = 25$ cm.

b) Diện tích hình thoi bằng 600 cm².

c) Diện tích $BEDF$ bằng 432 cm².

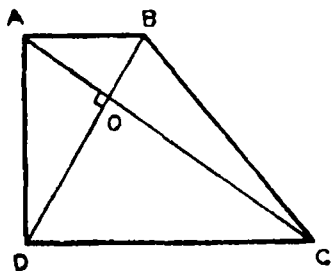
105. (h. 140)

Vẽ $BH \perp CD$. Lần lượt tính $AD = 8$ cm,
 $BH = 8$ cm, $BC = 10$ cm.



Hình 140

106. (h. 141)



Hình 141

Áp dụng công thức $h^2 = b'c'$ vào $\triangle ADC$ vuông, ta được:

$$OC = OD^2 : OA = 82 : 4 = 16 \text{ (cm)}.$$

Tương tự đối với $\triangle ABD$ vuông được $OB = 2 \text{ cm}$.

Diện tích hình thang bằng: $AC \cdot BD : 2 = 20 \cdot 10 : 2 = 100 \text{ (cm}^2\text{)}.$

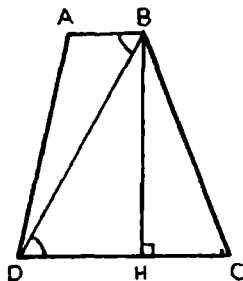
107. (h. 142)

Để dễ dàng chứng minh BCD là tam giác cân ở C nên $DC = BC = AD = \frac{42 - 3}{3} = 13 \text{ (cm)}.$

Vẽ đường cao BH. Ta có:

$$HC = \frac{13 - 3}{2} = 5 \text{ (cm)}.$$

Từ đó tính được $BH = 12 \text{ cm}$, diện tích hình thang 96 cm^2 .



Hình 142

108. Đáp số: 375 m^2 .

109. Vẽ $MH \perp AB$, $MK \perp CD$. Áp dụng định lý Pitago trong các tam giác vuông.

110. (h. 143)

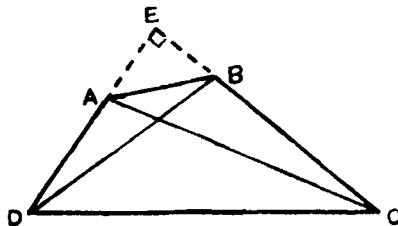
Gọi E là giao điểm của AD và BC.

Ta có

$$AC^2 = AE^2 + CE^2, BD^2 = BE^2 + DE^2,$$

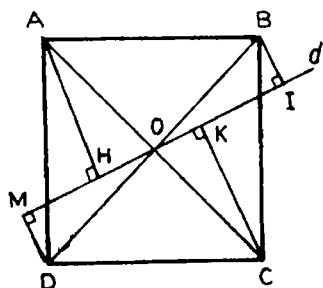
suy ra:

$$AC^2 + BD^2 = (AE^2 + BE^2) + (CE^2 + DE^2) = AB^2 + CD^2.$$



Hình 143

111. (h. 144)



Hình 144

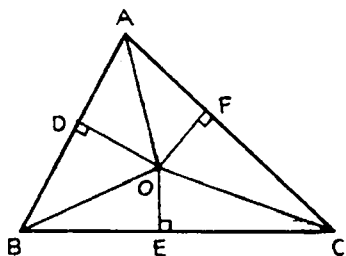
$\Delta AHO = \Delta OMD$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow OH = DM$.

$$\text{Ta có } AH^2 + DM^2 = AH^2 + OH^2 = OA^2 \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } AH = CK, DM = BI \text{ nên } CK^2 + BI^2 = OA^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH^2 + DM^2 + CK^2 + BI^2 = 2OA^2 = AD^2$, là hằng số.

112. (h. 145)



Hình 145

$$\begin{aligned} AD^2 + BE^2 + CF^2 &= (OA^2 - OD^2) + (OB^2 - OE^2) + (OC^2 - OF^2) \\ &= (OA^2 - OF^2) + (OB^2 - OD^2) + (OC^2 - OE^2) \\ &= AF^2 + BD^2 + CE^2. \end{aligned}$$

113. Gọi a là độ dài cạnh huyền, b và c là độ dài các cạnh góc vuông.

a) Nhân hai vế của $a^2 = b^2 + c^2$ với a ta được,
 $a^3 = ab^2 + ac^2$.

Nhưng $ab^2 > b^3$, $ac^2 > c^3$ (vì $a > b$, $a > c$).

Do đó $a^3 > b^3 + c^3$.

b) Để chứng tỏ $a^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2}$, hãy chứng minh bất đẳng thức
 $b^2 + c^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2}$.

114. (h. 146)

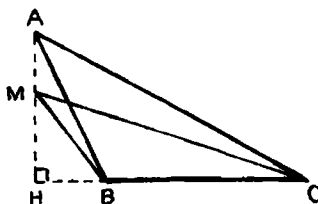
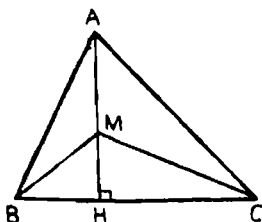
$$AC^2 - HC^2 = AB^2 - HB^2 \text{ (cùng bằng } AH^2), \quad (1)$$

$$MC^2 - HC^2 = MB^2 - HB^2 \text{ (cùng bằng } MH^2\text{)}. \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) theo từng vế ta được:

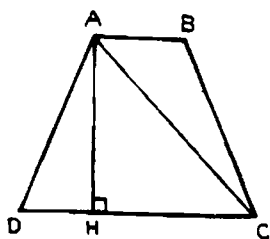
$$AC^2 - MC^2 = AB^2 - MB^2$$

$$\Rightarrow MC^2 - MB^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2.$$



Hình 146

115. (h. 147)



Hình 147

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AC^2 &= AH^2 + CH^2 \\ &= (AD^2 - DH^2) + CH^2 \\ &= AD^2 + (CH^2 - DH^2) \\ &= AD^2 + (CH + DH)(CH - DH). \end{aligned}$$

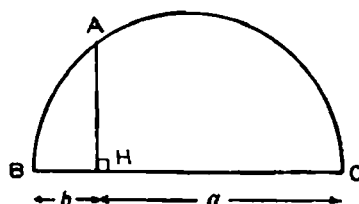
Do đó $d^2 = c^2 + ab$.

116. Cách 1 (h. 148)

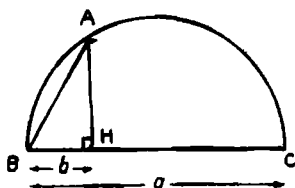
- Trên hai tia đối nhau gốc H, đặt $HC = a$, $HB = b$.

- Đường vuông góc với BC tại H cắt đường tròn có đường kính BC ở A.

AH là đoạn thẳng phải dựng.



Hình 148



Hình 149

Cách 2 (h. 149)

- Trên cùng một tia gốc B, đặt $BC = a$, $BH = b$ (giả sử $a > b$).

- Dựng đường vuông góc với BC tại H, cắt đường tròn có đường kính BC ở A.

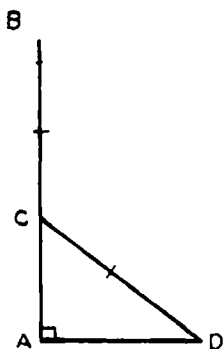
AB là đoạn thẳng phải dựng.

117. Đáp số: 102,5%.

Chú ý. Góc ở đỉnh của tam giác cân càng nhỏ thì sai số càng ít.

118. Đáp số: 104,2%.

119. (h. 150)

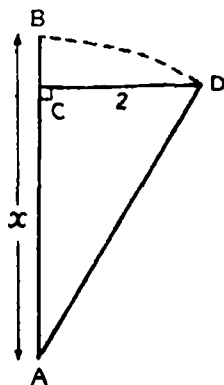


Hình 150

Để dàng tính được $CD = 5$ nên
 $AB = AC + CD = 3 + 5 = 8$
 (thước)

120. (h. 151)

Gọi chiều cao cây sậy là $AB = x$ thước.
 Phần nhô khỏi mặt nước là $CB = 0,5$ thước,
 phần ngập trong nước là $AC = x - 0,5$. Khi
 ngọn cây chạm mặt ao ở D thì $CD = 2$,
 $AD = AB = x$.



Hình 151

Trong $\triangle ACD$ vuông:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow x^2 = (x - 0,5)^2 + 2^2.$$

Giải phương trình này ta được $x = 4,25$.

Cây sậy cao 4,25 thước.

121. Khai triển các mặt của gian phòng trên một mặt phẳng, ta có hình 152. Con nhện có thể bò theo đường qua mặt tường bên trái đến R_1 , hoặc qua mặt tường bên phải đến R_2 , hoặc qua trần đến R_3 , hoặc qua sàn đến R_4 . Quãng đường ngắn nhất là một trong bốn đoạn thẳng NR_1 , NR_2 , NR_3 , NR_4 .

Nhờ định lí Pitago ta có:

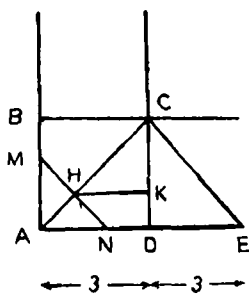
là phải đi từ A tới MN rồi tới B. Như vậy chú phải giải bài toán: tìm điểm C trên MN để $AC + CB$ ngắn nhất (C là giao điểm của MN với AB' trong đó B' là điểm đối xứng với B qua MN). Dễ dàng tính được $AC + CB = 25$ cm (bỏ qua chiều dày của lọ).

Chú ý rằng nếu chú kiến ở vị trí A thuộc mặt trong của lọ thì quãng đường ngắn nhất để chú kiến bò tới chỗ giọt mật là 24 cm, chỉ giảm được có 1 cm.

123. Do $AC^2 = AB \cdot AD$ nên $AB = 150^2 : 20 = 1125$ (m).

124. Diện tích ngũ giác phải tìm bằng hiệu của diện tích một tam giác vuông (6 cm^2) và diện tích một hình chữ nhật (2 cm^2).
Đáp số: 4 cm^2 .

125. Gọi hình vuông ở góc đường hào là ABCD (h. 154) có $AD = DC = 3$. Lấy AM, AN trên AB, AD sao cho $AM = AN = 2$. Gọi H là giao điểm của MN và AC. Ta sẽ chứng minh rằng $HC = MN < 3$.



Hình 154

Thật vậy, $MN^2 = AM^2 + AN^2 = 2^2 + 2^2 = 8 < 3^2$ nên $MN < 3$.

Vẽ $HK \perp CD$. Lấy E đối xứng với A qua D. Ta có $HK \parallel AD$, $HN \parallel CE$ nên

$$\frac{HK}{AD} = \frac{HC}{AC} = \frac{NE}{AE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ do đó } HK = 2. \text{ Suy ra}$$

$$HC^2 = HK^2 + KC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 < 3^2. \text{ Vậy } HC < 3.$$

Như vậy nếu đặt hai tấm ván vào vị trí MN và HC thì bắc được cầu đi vào đảo.

126. Dựa vào định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn.

127. a) $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$; $\sin^2 45^\circ = \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$.

b) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$; $\operatorname{tg}^2 30^\circ = \frac{1}{3}$.

$$c) \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \sin^2 60^\circ = \frac{3}{4}; \operatorname{tg}^2 60^\circ = 3.$$

128. a) $\sin B < 1$, $\cos B < 1$ vì cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền.

b) Nếu $AC = AB$ thì $\operatorname{tg} B = 1$ (khi đó $\widehat{B} = 45^\circ$).

Nếu $AC > AB$ thì $\operatorname{tg} B > 1$ (khi đó $\widehat{B} > 45^\circ$).

Nếu $AC < AB$ thì $\operatorname{tg} B < 1$ (khi đó $\widehat{B} < 45^\circ$).

$$129. \sin B = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{3}{5}, \cot B = \frac{4}{3}.$$

$$130. a) \sin B = \frac{7}{25}, \operatorname{tg} B = \frac{7}{24}, \cot B = \frac{24}{7}.$$

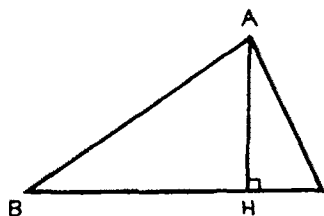
$$b) \operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = 3k, AC = 4k \Rightarrow BC = 5k.$$

$$\text{Do đó } \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}, \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}, \cot C = \frac{4}{3}.$$

$$c) \text{ Chia cả số bị chia và số chia cho } \cos B \text{ được } \frac{\operatorname{tg} B + 1}{\operatorname{tg} B - 1}.$$

Đáp số: 3.

131. Vẽ đường cao AH (h. 155).



Hình 155

$$\begin{aligned} \frac{\sin B}{\sin C} &= \frac{AH}{AB} : \frac{AH}{AC} = \\ &= \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

132. (h. 156)

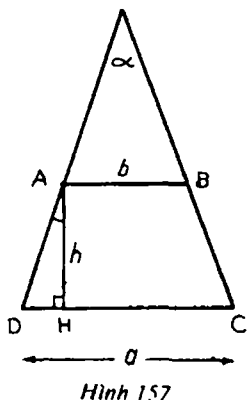
Vẽ đường cao AH.

$$\sin BAH = \frac{1}{6} \approx 0,1666$$

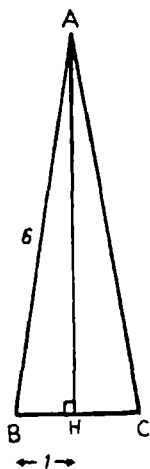
$$\Rightarrow \widehat{BAH} \approx 9^{\circ}35', \widehat{BAC} \approx 19^{\circ}10'.$$

133. Góc ở đỉnh bằng $48^{\circ}12'$, góc ở đáy bằng $65^{\circ}54'$.

134. (h. 157)



Hình 156



$$\text{Ta có } DH = \text{htg } \frac{\alpha}{2}, DH = \frac{a-b}{2}.$$

$$\text{Do đó } \text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{a-b}{2h} = \frac{12}{100} = 0,12.$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 6^{\circ}51' \Rightarrow \alpha \approx 13^{\circ}42'.$$

135. (h. 158)

Vẽ đường cao AH thì H nằm giữa M và C. Ta có: $HB - HC = (HM + MB) - (MC - HM) = 2HM$.

Đặt $AH = h$, $\widehat{AMH} = \alpha$, ta có:

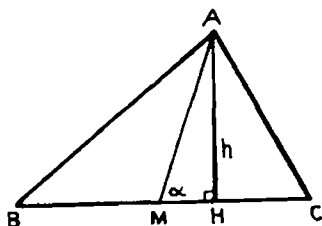
$$h \cotg B - h \cotg C = 2h \cotg \alpha$$

$$\Rightarrow \cotg \alpha = \frac{\cotg B - \cotg C}{2}.$$

$$\text{Thay số: } \cotg \alpha = \frac{\cotg 40^{\circ} - \cotg 60^{\circ}}{2}$$

$$\approx \frac{1,1918 - 0,5774}{2} \approx 0,3072 \Rightarrow \alpha \approx 72^{\circ}55'.$$

$$136. h = 200 \sin 13^{\circ} \approx 200 \cdot 0,2250 \approx 45 \text{ (m)}.$$



Hình 158

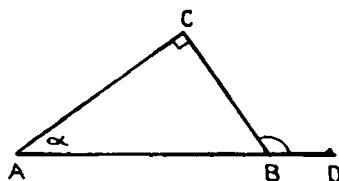
137. (h. 159)

$$BC = AB \sin \alpha.$$

a) Với $\alpha = 50^\circ$ thì

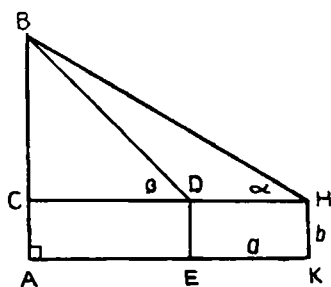
$$BC \approx 1000.0,7660 \approx 766 \text{ (m)}.$$

b) Với $\alpha = 30^\circ$ thì $BC \approx 1000.0,5$
 $\approx 500 \text{ (m)}.$



Hình 159

138. (h. 160)



Hình 160

Ta có $HC = BC \cot \alpha$, $DC = BC \cot \beta$

$$\Rightarrow HC - HD = BC(\cot \alpha - \cot \beta)$$

$$\Rightarrow a = BC(\cot \alpha - \cot \beta)$$

$$\Rightarrow BC = \frac{a}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

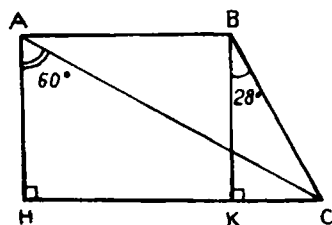
$$\Rightarrow AB = b + \frac{a}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

Áp dụng tính bằng số:

$$\begin{aligned} AB &= 1,5 + \frac{3}{\cot 50^\circ - \cot 65^\circ} \approx 1,5 + \frac{3}{0,8391 - 0,4663} \\ &\approx 1,5 + \frac{3}{0,3728} \approx 1,5 + 8,0 \approx 9,5 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

139. Giải tương tự như bài 138. Đáp số: 2400 m.

140. (h. 161)



Hình 161

$$HK = AB = 150.20 = 3000 \text{ (m)}.$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{HK}{\tan 60^\circ - \tan 28^\circ} \approx \frac{3000}{1,7320 - 0,5317} \\ &\approx 2500 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

141. Đáp số: 4,8 thước.

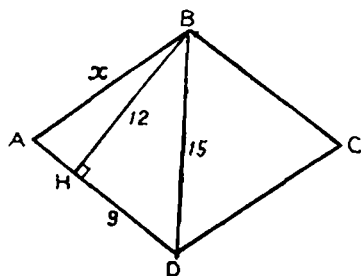
142. (h. 162)

ABCD là hình thoi có $BD = 15$ cm, đường cao $BH = 12$ cm. Ta tính được $HD = 9$ cm.

Gọi x là cạnh hình thoi. Giải phương trình:

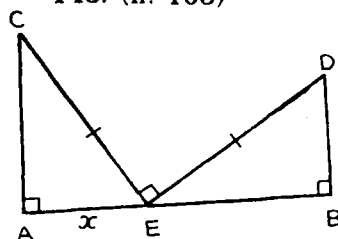
$$x^2 - (x - 9)^2 = 12^2, \text{ được } x = 12,5.$$

Diện tích hình thoi bằng 150 cm^2 .



Hình 162

143. (h. 163)



Hình 163

Do $CE = DE$ nên $CE^2 = DE^2$. Giải phương trình:

$$30^2 + x^2 = (50 - x)^2 + 20^2, \text{ được } x = 20.$$

Đáp số: 20 thước.

144. Gọi độ dài cạnh huyền là a , độ dài các cạnh góc vuông là b và c (cm).

$$\text{Ta có:} \quad a + b + c = 60 \quad (1)$$

$$12a = bc \quad (2)$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $(b + c)^2 = a^2 + 2bc$. Thay $b + c$ bằng $60 - a$ nhờ (1), thay bc bằng $12a$ nhờ (2), ta được:

$$(60 - a)^2 = a^2 + 24a.$$

Giải phương trình trên, ta được $a = 25$.

$$\text{Ta có } b^2 + c^2 = a^2 = 625,$$

$$2bc = 24a = 600 \text{ nên}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc = 625 - 600 = 25$$

$$(b - c)^2 = 25$$

$$b - c = 5 \quad (\text{giả sử } b > c)$$

Biết $b + c = 60 - a = 35$, $b - c = 5$, tìm được $b = 20$, $c = 15$.

Các cạnh của tam giác vuông bằng 25 cm, 20 cm, 15 cm.

145. (h. 164)

$\triangle ABC$ có $AB = AC = 18$ cm, $BC = 12$ cm, các đường cao BD , CE .

Đặt $AD = x$, $CD = y$, ta có

$$x + y = 18 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 18^2 - x^2 = 12^2 - y^2$$

$$x^2 - y^2 = 18^2 - 12^2$$

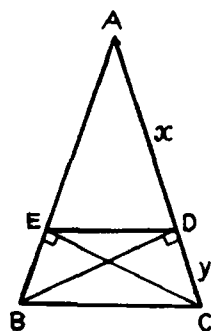
$$(x + y)(x - y) = 180$$

$$x - y = 10 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), tìm được $x = 14$, $y = 4$.

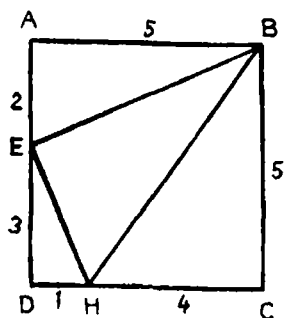
Chú ý rằng $DE \parallel BC$ (dễ chứng minh) nên $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{DE}{12} = \frac{14}{18} \Rightarrow DE = \frac{28}{3} \text{ (cm).}$$



Hình 164

146. (h. 165)



Hình 165

$$\text{Ta có: } BE^2 = 5^2 + 2^2 = 29,$$

$$EH^2 = 3^2 + 1^2 = 10,$$

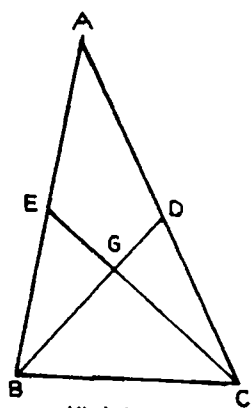
$$BH^2 = 5^2 + 4^2 = 41.$$

Như vậy $BH^2 \neq BE^2 + EH^2$ nên $\widehat{BEH} \neq 90^\circ$. Hiển nhiên $\widehat{EBH} < 90^\circ$, $\widehat{EHB} < 90^\circ$.

Vậy BEH không là tam giác vuông.

147. (h. 166)

$\triangle ABC$ có $BC = 10$ cm, các trung tuyến: $BD = 9$ cm, $CE = 12$ cm. Gọi G là giao điểm của BD và CE .



Hình 166

$\triangle BGC$ vuông, diện tích của nó bằng 24 cm^2 .

Diện tích $\triangle ABC$ bằng 72 cm^2 .

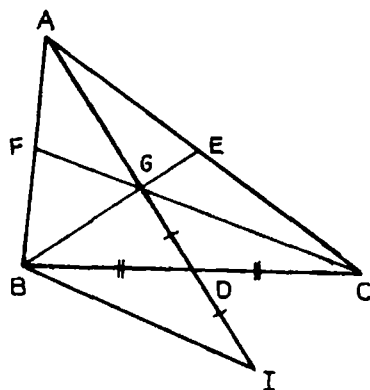
148. (h. 167)

$\triangle ABC$ có các trung tuyến AD , BE , CF thứ tự dài 12 cm , 9 cm , 15 cm .

Vẽ I đối xứng với G qua D (G là trọng tâm của $\triangle ABC$). Chứng minh rằng $\triangle BGI$ vuông.

$$S_{BGI} = 24 \text{ cm}^2,$$

$$S_{ABC} = 72 \text{ cm}^2.$$



Hình 167

149. Qua một đỉnh của hình thang, kẻ đường thẳng song song với một đường chéo, chú ý đến tam giác vuông tạo thành.

Đáp số: $43,2 \text{ cm}^2$.

150. Đáp số: 84 cm^2 .

151. Chú ý rằng: $41 = 5^2 + 4^2$,

$$45 = 3^2 + 6^2,$$

$$164 = 8^2 + 10^2.$$

Đáp số 9.

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. ĐỊNH LÝ TALET VÀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG	Trang
§1. Đoạn thẳng tỉ lệ	3
§2. Định lý Talet trong tam giác	6
§3. Định lý Talet đảo	12
§4. Tính chất đường phân giác của tam giác	13
§5. Khái niệm về hai tam giác đồng dạng	17
§6. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác	18
§7. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông	22
§8. Tỉ số các đường cao, tỉ số các diện tích của hai tam giác đồng dạng	26
§9. Ứng dụng thực tế của tam giác đồng dạng	29
<i>Về phương pháp giải toán</i>	
Vẽ đường thẳng song song để tạo thành các cặp đoạn thẳng tỉ lệ	30
Sơ lược về phép vị tự	32
<i>Bài đọc thêm</i>	
Định lý Mênêlai và định lý Xêva	38
Talet — vài nét về cuộc đời và sự nghiệp	40
CHƯƠNG II. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG	
§10. Hệ thức lượng trong tam giác vuông. Định lý Pitago	42
§11. Tỉ số lượng giác của góc nhọn	48
§12. Bảng lượng giác	50
§13. Hệ thức giữa cạnh và góc của tam giác vuông	51
§14. Ứng dụng thực tế của tỉ số lượng giác của góc nhọn	52
<i>Về phương pháp giải toán</i>	
Lập phương trình đại số để giải các bài toán hình học	53
Dùng định lý đảo Pitago để chứng minh góc vuông	55
Hệ thống một số cách chứng minh các quan hệ hình học	56
<i>Bài đọc thêm</i>	
Tính diện tích tam giác theo ba cạnh của nó	57
Pitago và định lý Pitago	60
LỜI GIẢI HOẶC CHỈ DẪN	66

5 - 513

----- 921 - 125 - 5 - 97

KHKT - 97

Chịu trách nhiệm xuất bản : Pgs. Pts. **TÔ ĐĂNG HẢI**

Biên tập : **NGUYỄN NĂNG QUỐC, NGUYỄN THỊ KHOÁI**

Sửa chế bản: **NGUYỄN THỊ KHOÁI**

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 TRẦN HƯNG ĐẠO HÀ NỘI

In 2000 bản khổ 14,5 x 20,5 cm tại Xí nghiệp in Công Đoàn.

191- Tây Sơn - Đống Đa - Hà Nội

Giấy phép xuất bản số 921 - 125 - 5 cấp ngày 3/4/1997

In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 1997

www.facebook/otoanhoc2911

Giá : 7200 đ