

HÀ VĂN CHƯƠNG

CÁC CHỦ ĐỀ ÔN THI

MÔN

TOÁN

VÀO LỚP
10

NHỮNG CHỦ ĐỀ
THƯỜNG GẶP

CÁC CHỦ ĐỀ & NHỮNG ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ ✓

CÁC ĐỀ THI MẪU VÀO CÁC TRƯỜNG CHUYÊN
TRÊN TOÀN QUỐC ✓

CÁC ĐỀ LUYỆN TẬP ĐỂ ÔN THI
VÀO LỚP 10 CHUYÊN & THI HỌC SINH GIỎI ✓

MỚI

SACHHOC.COM

HÀ VĂN CHƯƠNG

CÁC CHỦ ĐỀ ÔN THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN

- ÔN THI VÀO LỚP 10 THPT
- ÔN THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG CHUYÊN
- BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HỒ CHÍ MINH

CHỦ ĐỀ 1.

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC NGUYÊN VÀ PHÂN THỨC HỮU TỈ

> A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

I. BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC NGUYÊN

1. Các hằng đẳng thức đáng nhớ

- $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
- $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA$
- $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$, với n nguyên dương.
- $x^{2n} - y^{2n} = (x + y)(x^{2n-1} - x^{2n-2}y + \dots + xy^{2n-2} - y^{2n-1})$, với n nguyên dương.
- $x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x - y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + \dots + xy^{2n-1} + y^{2n})$, với n nguyên dương.

2. Phân tích đa thức thành nhân tử

- Đặt nhân tử chung.
- Nhóm các hạng tử thành một nhóm thích hợp làm xuất hiện dạng đẳng thức hoặc xuất hiện nhân tử chung mới.
- Tách một hạng tử thành nhiều hạng tử, thêm và bớt cùng một hạng tử.
- Đổi biến để đưa đa thức bậc cao về đa thức bậc thấp hơn, khi đó dễ dàng nhận thấy cách phân tích thành nhân tử hơn.
- Sử dụng phương pháp hệ số bất định.

II. BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC HỮU TỈ

Ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ phức tạp thành một biểu thức đơn giản bằng cách áp dụng các quy tắc của các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức.



➤ B. BÀI TẬP

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

b) $B = 2(3x - 5y)^2 - 21x + 35y + 6$

c) $C = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$

d) $D = x^4y^4 + 2500$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - 3abc \\ &= (a+b+c) \left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \right] - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c) (a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) \\ &= (a+b+c) (a^2 + b^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

b) $B = 2(3x - 5y)^2 - 21x + 35y + 6 = 2(3x - 5y)^2 - 7(3x - 5y) + 6$

Đặt $t = 3x - 5y$

Thì $B = 2t^2 - 7t + 6 = (2t - 3)(t - 2)$

Hay $B = [2(3x - 5y) - 3][(3x - 5y) - 2] = (6x - 10y - 3)(3x - 5y - 2)$

c) $C = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$

Đặt $t = x^2 + 8x + 7$

Thì $C = t(t+8) + 15 = t^2 + 8t + 15 = (t+3)(t+5)$

Hay $C = (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) = (x^2 + 8x + 10)(x+2)(x+6)$

d) $D = x^4y^4 + 2500 = x^4y^4 + 100x^2y^2 + 2500 - 100x^2y^2$
 $= (x^2y^2 + 50)^2 - (10xy)^2 = (x^2y^2 - 10xy + 50)(x^2y^2 + 10xy + 50)$

Bài 2. Rút gọn phân thức:
$$P = \frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(11^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(12^4 + \frac{1}{4}\right)}$$

Hướng dẫn giải

Nhân mỗi thừa số của tử và mẫu số của phân thức với 2^4 , ta được:

$$\begin{aligned} P &= \frac{(2^4 + 4)(6^4 + 4)(10^4 + 4) \dots (22^4 + 4)}{(4^4 + 4)(8^4 + 4)(12^4 + 4) \dots (24^4 + 4)} \\ &= \frac{(1^2 + 1)(3^2 + 1)(5^2 + 1)(7^2 + 1)(9^2 + 1)(11^2 + 1) \dots (21^2 + 1)(23^2 + 1)}{(3^2 + 1)(5^2 + 1)(7^2 + 1)(9^2 + 1)(11^2 + 1)(13^2 + 1) \dots (23^2 + 1)(25^2 + 1)} \\ &= \frac{1^2 + 1}{25^2 + 1} = \frac{1}{313} \end{aligned}$$

Bài 3. Chứng minh rằng nếu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ thì

$$\frac{1}{x^{2003}} + \frac{1}{y^{2003}} + \frac{1}{z^{2003}} = \frac{1}{x^{2003} + y^{2003} + z^{2003}}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Rightarrow \frac{yz + xz + xy}{xyz} = \frac{1}{x+y+z}$

$\Leftrightarrow (yz + xz + xy)(x+y+z) = xyz$

$\Leftrightarrow xyz + x^2z + x^2y + y^2z + xyz + x^2y + y^2z + x^2z + xyz = xyz$

$\Leftrightarrow z(x+y)^2 + xy(x+y) + z^2(x+y) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(xz + yz + xy + z^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)[x(y+z) + z(y+z)] = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z) = 0$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Với $x+y=0$ thì $x = -y \Rightarrow x^{2003} = -y^{2003}$, ta có:

$$\frac{1}{x^{2003}} + \frac{1}{y^{2003}} + \frac{1}{z^{2003}} = \frac{1}{-y^{2003}} + \frac{1}{y^{2003}} + \frac{1}{z^{2003}} = \frac{1}{z^{2003}}$$

$$\text{và } \frac{1}{x^{2003} + y^{2003} + z^{2003}} = \frac{1}{-y^{2003} + y^{2003} + z^{2003}} = \frac{1}{z^{2003}}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x^{2003}} + \frac{1}{y^{2003}} + \frac{1}{z^{2003}} = \frac{1}{x^{2003} + y^{2003} + z^{2003}} \text{ (đpcm)}$$

Tương tự $x + z = 0$ hoặc $y + z = 0$, ta cũng có điều phải chứng minh.

Bài 4. Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left[\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right] = (a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2 + b(c+a)}{c+a} + \frac{c^2 + c(a+b)}{a+b} = a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c = a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 5. Cho biểu thức:

$$A = \left[\left(x^4 - x + \frac{x-3}{x^3+1} \right) \cdot \frac{(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)(x+1)}{x^9 + x^7 - 3x^2 - 3} + 1 - \frac{2(x+6)}{x^2+1} \right] \cdot \frac{4x^2 + 4x + 1}{(x+3)(4-x)}$$

a) Tìm điều kiện của x để A xác định.

b) Rút gọn A .

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$$x^9 + x^7 - 3x^2 - 3 = x^7(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^7 - 3)$$

Vậy điều kiện để A xác định là: $x \neq -1, x \neq 3, x \neq -3, x \neq 4$.

$$\text{b) } A = \left[\left(x^4 - x + \frac{x-3}{x^3+1} \right) \cdot \frac{(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)(x+1)}{x^9 + x^7 - 3x^2 - 3} + 1 - \frac{2(x+6)}{x^2+1} \right] \cdot \frac{4x^2 + 4x + 1}{(x+3)(4-x)}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{x^7 - 3}{x^3 + 1} \cdot \frac{(x-1)(x^3 + 1)}{(x^7 - 3)(x^2 + 1)} + 1 - \frac{2(x+6)}{x^2 + 1} \right] \cdot \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(4-x)} \\ &= \left[\frac{x-1}{x^2 + 1} - \frac{2(x+6)}{x^2 + 1} + 1 \right] \cdot \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(4-x)} \\ &= \frac{x-1-2x-12+x^2+1}{x^2+1} \cdot \frac{(2x+1)^2}{(x+3)(4-x)} \\ &= \frac{(x+3)(x-4)(2x+1)}{(x^2+1)(x+3)(4-x)} = \frac{-(2x+1)^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = -\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}$$

Bài 6. Cho $x > 5$ và $y = \frac{x^2 - 25}{x + \frac{10x+25}{x}}, z = \frac{x^2 - 25}{x + \frac{15x+25}{x-5}}$

$$\text{Rút gọn biểu thức: } A = 2 \left| \frac{y-x}{xy} \right| + \left| \frac{y+x}{xy} - \frac{2}{z} \right| + \frac{y+x}{xy} + \frac{2}{z}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 - 25}{x + \frac{10x+25}{x}} = \frac{x^2 - 25}{\frac{x^2 + 10x + 25}{x}} = \frac{x(x-5)(x+5)}{(x+5)^2} = \frac{x(x-5)}{x+5}$$

$$z = \frac{x^2 - 25}{x + \frac{15x+25}{x-5}} = \frac{(x-5)^2(x+5)}{x^2 + 10x + 25} = \frac{(x-5)^2(x+5)}{(x+5)^2} = \frac{(x-5)^2}{x+5}$$

$$\text{Do đó: } xy = \frac{x^2(x-5)}{x+5}; y-x = \frac{-10x}{x+5}; x+y = \frac{2x^2}{x+5}$$

Vì $x > 5$ nên

$$\begin{aligned} A &= 2 \left| \frac{y-x}{xy} \right| + \left| \frac{y+x}{xy} - \frac{2}{z} \right| + \frac{y+x}{xy} + \frac{2}{z} \\ &= \frac{20}{x(x-5)} + \frac{20}{(x-5)^2} + \frac{4x}{(x-5)^2} \\ &= \frac{20(x-5) + 20 + 4x^2}{x(x-5)^2} = \frac{4(x^2 + 10x - 25)}{x(x-5)^2} \end{aligned}$$

Bài 7. Cho $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ và $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng $\left(\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y}\right)\left(\frac{z}{x-y} + \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x}\right) = 9$

Hướng dẫn giải

Đặt $a = \frac{x-y}{z}, b = \frac{y-z}{x}, c = \frac{z-x}{y}$

Ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

Mặt khác: $\frac{b+c}{a} = \left(\frac{z}{x-y}\right)\left(\frac{y^2 - yz + xz - x^2}{xy}\right) = \frac{z}{x}(-x-y+z)$
 $= \frac{z}{x}(-x-y-z+2z) = \frac{2z^2}{xy}$ (vì $x+y+z=0$)

Tương tự: $\frac{a+c}{b} = \frac{2x^2}{yz}, \frac{a+b}{c} = \frac{2y^2}{xz}$

Vậy $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \frac{2(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz} = 3 + \frac{2 \cdot 3xyz}{xyz} = 9$

Hay $\left(\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y}\right)\left(\frac{z}{x-y} + \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x}\right) = 9$ (đpcm)

Bài 8. Phân tích đa thức thành nhân tử $P = x^4 + x^3 + 2(m-1)x^2 + mx + m^2$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán, ĐH Khoa học Huế, năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải

$P = m^2 + m(2x^2 + x) + x^4 + x^3 - 2x^2$

$= m^2 + 2m\left(x^2 + \frac{x}{2}\right) + \left(x^4 + 2x^2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{9x^2}{4}$

$= \left(m + x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = (m + x^2 + 2x)(m + x^2 - x)$

Vậy $P = (m + x^2 + 2x)(m + x^2 - x)$

Bài 9. Phân tích đa thức thành nhân tử $A = x^{10} + x^5 + 1$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán, Lê Hồng Phong, TP. HCM năm học 2002 - 2003)

Hướng dẫn giải

$A = x^{10} + x^5 + 1$

$= x^{10} + x^9 + x^8 - x^9 - x^8 - x^7 + x^7 + x^6 + x^5 - x^6 - x^5 - x^4 + x^5 + x^4 + x^3$
 $- x^3 + x^2 - x + x^2 + x + 1$

$= x^8(x^2 + x + 1) - x^7(x^2 + x + 1) + x^5(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) +$
 $+ x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1)$

Bài 10. Phân tích thành nhân tử $A = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán, Trần Đại Nghĩa, TP. HCM năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải

$A = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$

Đặt $a = x - y; b = y - z$. Suy ra: $z - x = -(a + b)$

Do đó: $A = a^5 + b^5 - (a+b)^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
 $= (a+b)(-5a^3 - 5a^2b^2 - 5ab^3) = -5(a+b)(a^3b + a^2b^2 + ab^3)$

Vậy $A = (x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 - xy - yz - zx)$

Bài 11. Cho a, b, c là ba số phân biệt khác 0, thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$.

Đơn giản biểu thức:

$P = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, DHSP Hà Nội năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

Đặt $A = \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}; B = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a}; C = \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$.

Thì $P = 3 + \frac{a}{b-c}A + \frac{b}{c-a}B + \frac{c}{a-b}C$

Mặt khác:

$$\frac{a}{b-c}A = \frac{a}{(b-c)bc}[(ab-ac)-(b^2-c^2)] = \frac{a(b-c)[a-(b+c)]}{(b-c)bc} = \frac{2a^3}{abc}$$

Tương tự, ta có: $\frac{b}{c-a}B = \frac{2b^3}{abc}$; $\frac{c}{a-b}C = \frac{2c^3}{abc}$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= 3 + \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc} = 3 + \frac{2[(-b-c)^3+b^3+c^3]}{abc} \\ &= 3 + \frac{2[-3bc(b+c)]}{abc} = 9 \end{aligned}$$

Bài 12. Cho biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}$$

1. Tìm điều kiện x, y để P xác định. Rút gọn P.
2. Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Năng Khiếu Trần Phú, Hải Phòng năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

1. Điều kiện: $x \neq -y$, $x \neq -1$, $y \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)} \\ &= \frac{x^2(1+x) - y^2(1-y) - x^2y^2(x+y)}{(x+y)(1+x)(1-y)} \\ &= \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3 - x^2y^2(x+y)}{(x+y)(1+x)(1-y)} \\ &= \frac{(x+y)(x-y+x^2-xy+y^2-x^2y^2)}{(x+y)(1+x)(1-y)} \\ &= \frac{(x+y)(1-y)[x^2(1+y)+x-y]}{(x+y)(1+x)(1-y)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x+y)(1-y)(1+x)(x+xy-y)}{(x+y)(1+x)(1-y)}$$

$$= x + xy - y$$

$$2. \text{ Khi } P = x + xy - y = 2 \Leftrightarrow x + xy - y - 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(y+1) = 1$$

Vì x, y nguyên nên ta tìm được (x ; y) nguyên thỏa mãn là: (2 ; 0) ; (0 ; -2).

Bài 13. Cho $x > 0$ thỏa $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính $x^5 + \frac{1}{x^5}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3} + x^3$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - \left(\frac{1}{x^3} + x^3\right)$$

Dễ dàng tính được các tổng sau:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 7 + 2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 18$$

Tương tự: $x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$

Vậy $x^5 + \frac{1}{x^5} = 3.47 - 18 = 123$

Bài 14. Rút gọn biểu thức: $R = \frac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} : \frac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2}$

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban CD, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

$$R = \frac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} \cdot \frac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2}$$

$$= \frac{3a^2 - 3ab + ab - b^2}{2a^2 - ab + 2ab - b^2} \cdot \frac{3a^2 - 3ab - ab + b^2}{3a^2 - ab + 3ab - b^2}$$

$$= \frac{(a-b)(3a+b)}{(2a-b)(a+b)} \cdot \frac{(a-b)(3a-b)}{(3a-b)(a+b)} = \frac{3a+b}{2a-b}$$

Bài 15. Cho biểu thức: $A = \frac{4a^2}{(a+1)(a+2)} + \frac{10a+2}{(a+1)(a+3)} + \frac{2a+20}{(a+2)(a+3)}$

1. Tìm điều kiện của a để biểu thức A có nghĩa.

2. Rút gọn biểu thức A.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

1. Để A có nghĩa thì: $a \neq -1, a \neq -2$ và $a \neq -3$.

$$2. A = \frac{4a^2}{(a+1)(a+2)} + \frac{10a+2}{(a+1)(a+3)} + \frac{2a+20}{(a+2)(a+3)}$$

$$= \frac{4a^2(a+3) + (10a+2)(a+2) + (2a+20)(a+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

$$= \frac{4a^3 + 12a^2 + 10a^2 + 22a + 4 + 2a^2 + 22a + 20}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

$$= \frac{4(a^3 + 6a^2 + 11a + 6)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{4(a+1)(a+2)(a+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = 4$$

Vậy $A = 4$.

Bài 16. Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa: $x = by + cz, y = ax + cz, z = ax + by$.

$x + y + z \neq 0$. Chứng minh: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán, Trần Đại Nghĩa, TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Cộng vế với vế của các đẳng thức ta được: $x + y + z = 2(ax + by + cz)$

Vì $x + y + z \neq 0$ nên $ax + by + cz \neq 0$

Cộng hai vế của các đẳng thức trên lần lượt cho ax, by, cz ta được:

$$(a+1)x = ax + by + cz; (b+1)y = ax + by + cz; (c+1)z = ax + by + cz$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{x}{ax + by + cz} + \frac{y}{ax + by + cz} + \frac{z}{ax + by + cz}$$

$$= \frac{x + y + z}{ax + by + cz} = 2$$

Bài 17. Cho $x > 0 > y$ và $x + y = 1$

a) Rút gọn $A = \frac{y-x}{xy} \cdot \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right)$

b) Chứng minh rằng $A < -4$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐHSPT, Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

$$a) A = \frac{y-x}{xy} \cdot \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right)$$

$$= \frac{y-x}{xy} \cdot \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x-y)^2(x+y)^2} + \frac{x^2}{(y-x)(y+x)} \right)$$

$$= \frac{y-x}{xy} \cdot \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x-y)^2} + \frac{x^2}{(y-x)} \right) \text{ (vì } x + y = 1)$$

$$= \frac{y-x}{xy} \cdot \left(\frac{y^2 - 2x^2y - x^2(x-y)}{(x-y)^2} \right)$$

$$= \frac{y-x}{xy} \cdot \left(\frac{y^2 - x^2(y+x)}{(x-y)^2} \right) = \frac{(y-x)^2}{xy}$$

b) Ta có: $A + 4 = \frac{(y+x)^2}{xy} = \frac{1}{xy} < 0 \Rightarrow A < -4$ (đpcm).

Bài 18. Chứng minh rằng nếu a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2007$ và

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2007}$$

thì một trong ba số đó phải có một số bằng 2007.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán, ĐH Khoa học Huế năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2007} \Rightarrow abc - 2007(ab + bc + ca) + 2007^3 - 2007^3 = 0$$

Mà $a + b + c = 2007$ nên

$$abc - 2007(ab + bc + ca) + 2007^2a + 2007^2b + 2007^2c - 2007^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2007)(b - 2007)(c - 2007) = 0$$

Vậy trong ba số a, b, c phải có một số bằng 2007.

Bài 19. Các số thực a, b, c, d thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $ac - a - c = b^2 - 2b$

ii) $bd - b - d = c^2 - 2c$

iii) $b \neq 1, c \neq 1$

Chứng minh đẳng thức: $ad + b + c = bc + a + d$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐHSPT, Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Từ các điều kiện, ta có:

$$\begin{cases} ac - a - c + 1 = b^2 - 2b + 1 \\ bd - b - d + 1 = c^2 - 2c + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(c-1) = (b-1)^2 & (1) \\ (b-1)(d-1) = (c-1)^2 & (2) \end{cases}$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2), ta được: $(a-1)(d-1) = (b-1)(c-1)$

Suy ra $ad + b + c = bc + a + d$

Bài 20. Các số x, y thỏa mãn các đẳng thức:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 4; x^8 + x^4y^4 + y^8 = 8$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $A = x^{12} + x^2y^2 + y^{12}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐHSPT, Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 4$ (1); $x^8 + x^4y^4 + y^8 = 8$ (2)

Từ (1), suy ra: $x^4 + y^4 = 4 - x^2y^2$

$$\Rightarrow (x^4 + y^4)^2 = 16 - 8x^2y^2 + x^4y^4$$

$$\Leftrightarrow x^8 + y^8 + 2x^4y^4 = 16 - 8x^2y^2 + x^4y^4 \quad (3)$$

Từ (2) và (3), suy ra: $8 + x^4y^4 = 16 - 8x^2y^2 + x^4y^4 \Leftrightarrow x^2y^2 = 1 \Rightarrow x^4y^4 = 1$

Thay vào (1), ta được: $x^4 + y^4 = 3$

Do đó: $A = x^{12} + x^2y^2 + y^{12} = (x^4 + y^4)(x^8 + y^8 - x^4y^4) + x^2y^2$

$$= (x^4 + y^4) \left[(x^4 + y^4)^2 - 3x^4y^4 \right] + x^2y^2 = 3(9 - 3) + 1 = 19$$

Vậy $A = 19$.



CHỦ ĐỀ 2.

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Các công thức biến đổi căn bậc hai

- $\sqrt{A^2} = |A|$
- $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0$)
- $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0; B \geq 0$)
- $\sqrt{A^2B} = |A| \sqrt{B}$ (với $B \geq 0$)
- $\begin{cases} A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} & (\text{với } A \geq 0; B \geq 0) \\ A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B} & (\text{với } A < 0; B \geq 0) \end{cases}$
- $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB}$ (với $AB \geq 0; B \neq 0$)
- $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$)
- $\frac{1}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}}{A - B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B$)

2. Các công thức biến đổi căn bậc ba

- $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$
- $\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$

$$\bullet \sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$$

3. Sử dụng hằng đẳng thức và các phương pháp phân tích thành nhân tử.

4. Nhân với các biểu thức liên hợp.

✽

➤ B. BÀI TẬP

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}$

c) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$

d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{2y}{x-y}$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 2\sqrt{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \frac{|\sqrt{3}-\sqrt{2}|}{3-2}$
 $= \frac{1}{-(\sqrt{3}-\sqrt{2})} (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = -1 \text{ (Vì } \sqrt{3}-\sqrt{2} > 0 \text{)}$

c) $\frac{(\sqrt{x}+1)(x^2-\sqrt{x})}{(\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{(x+1)[(\sqrt{x})^3-1]}{x+\sqrt{x}+1}$
 $= (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) = x-1$

d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{2y}{x-y} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$
 $- \frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} - \frac{2y}{x-y}$
 $= \frac{x+\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{xy}-y}{x-y} - \frac{2y}{x-y} = \frac{x+\sqrt{xy}-\sqrt{xy}+y-2y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2+1}+2}$

b) $\sqrt{a+\sqrt{a+\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}}}$ với $a \geq -\frac{1}{4}$

c) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{3}{\sqrt{a}}\right)} : \frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}}$ với $a, b \geq 0$

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2+1}+2} = \sqrt{(a^2+1)+2\sqrt{a^2+1}+1} = \sqrt{(1+\sqrt{a^2+1})^2}$
 $= |1+\sqrt{a^2+1}| = 1+\sqrt{a^2+1}$

b) $\sqrt{a+\sqrt{a+\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}}} = \sqrt{a+\sqrt{\left(a+\frac{1}{4}\right)+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}}$
 $= \sqrt{a+\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}\right)^2}} = \sqrt{a+\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}$

$$\begin{aligned}
c) & \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4b}{(a-b) : \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{3}{\sqrt{a}} \right)} : \frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}} \\
&= \frac{[(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4b](\sqrt{a} + 3\sqrt{b})}{(a-b) : \sqrt{ab}} : \frac{(\sqrt{a})^2 + 2.3\sqrt{b}.\sqrt{a} + (3\sqrt{b})^2}{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}} \\
&= \frac{[(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4b](\sqrt{a} + 3\sqrt{b})}{(a-b) : \sqrt{ab}} : \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 . \sqrt{ab}} \\
&= \frac{[(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4b]}{(\sqrt{a} - \sqrt{b}).ab.(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 2\sqrt{b})}{ab(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + 3\sqrt{b})} = \frac{1}{ab}
\end{aligned}$$

Bài 3. Tính giá trị biểu thức

$$A = \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}{\sqrt{xy} - 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 6} - \frac{6 - \sqrt{xy}}{\sqrt{xy} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 6} \quad \text{với } x = 2007 \text{ và } y = 2009$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}{\sqrt{xy} - 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} - 6} - \frac{6 - \sqrt{xy}}{\sqrt{xy} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 6} \\
&= \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{y} + 2)} - \frac{6 - \sqrt{xy}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{y} + 2)} \\
&= \frac{(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(\sqrt{x} + 3) - (6 - \sqrt{xy})(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{y} + 2)(\sqrt{x} + 3)} \\
&= \frac{2x + 6\sqrt{x} + 3\sqrt{xy} + 9\sqrt{y} - 6\sqrt{x} + 18 + x\sqrt{y} - 3\sqrt{xy}}{(x - 9)(\sqrt{y} + 2)} \\
&= \frac{2x + 9\sqrt{y} + x\sqrt{y}}{(x - 9)(\sqrt{y} + 2)} = \frac{(x + 9)(\sqrt{y} + 2)}{(x - 9)(\sqrt{y} + 2)} = \frac{x + 9}{x - 9}
\end{aligned}$$

$$\text{Với } x = 2007 \text{ và } y = 2009 \text{ thì } A = \frac{x + 9}{x - 9} = \frac{126}{125}$$

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{128}}}}$$

$$b) B = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

Hướng dẫn giải

$$a) A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{128}}}}$$

$$= \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}}$$

$$= \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{6 + 2 \cdot \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}$$

$$= \sqrt{6 + 2 \cdot (\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$$

$$b) B = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{3} = \sqrt{3}$$

Bài 5. a) Cho $a \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - \sqrt{a}}{a^2 + \sqrt{a} + 1} - \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a^2 - \sqrt{a} + 1} + a + 1 = (\sqrt{a} - 1)^2$

$$b) \text{ Chứng minh đẳng thức: } \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = 1$$

Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Ta có: } \frac{a^2 - \sqrt{a}}{a^2 + \sqrt{a} + 1} = \frac{\sqrt{a}(a\sqrt{a} - 1)}{a^2 + \sqrt{a} + 1} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) = a - \sqrt{a}$$

$$\frac{a^2 + \sqrt{a}}{a^2 - \sqrt{a} + 1} = \frac{\sqrt{a}(a\sqrt{a} + 1)}{a^2 - \sqrt{a} + 1} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) = a + \sqrt{a}$$

Do đó: $\frac{a^2 - \sqrt{a}}{a^2 + \sqrt{a} + 1} - \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a^2 - \sqrt{a} + 1} + a + 1 = a - 2\sqrt{a} + 1 = (\sqrt{a} - 1)^2$ (đpcm)

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2(3 + \sqrt{3})} + \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2(3 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = 1 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7}$; $v = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ và $x = u - v$

Vì $u^3 - v^3 = 14$ và $uv = \sqrt[3]{(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)} = \sqrt[3]{50 - 49} = 1$

Do đó: $x^3 = (u - v)^3 = (u^3 - v^3) - 3uv(u - v) = 14 - 3x$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (đpcm)

Bài 7. Tính giá trị của biểu thức:

$$S = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng:

$$\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(1+k)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(-k-1)^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}^*$$

Do đó: $S = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$
 $= 98 + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} \approx 98,49$

Bài 8 Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Tính giá trị của biểu thức:

$$S = a\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}} + b\sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} + c\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}}$$

Hướng dẫn giải

Vì $ab + bc + ca = 1$ nên:

$$a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$$

$$b^2 + 1 = b^2 + ab + bc + ca = (b+a)(b+c)$$

$$c^2 + 1 = c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b)$$

Suy ra: $a\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}} = a\sqrt{\frac{(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)}{(a+b)(a+c)}}$
 $= a\sqrt{(b+c)^2} = a(b+c)$

Tương tự, ta có: $b\sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} = b(c+a)$;
 $c\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}} = c(a+b)$

Vậy $S = a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 2(ab + bc + ca) = 2$

Bài 9. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+4\sqrt{x}+4}\right) \cdot x \frac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq -4)$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP.HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} \\ &= |2-\sqrt{3}| - (2+\sqrt{3}) \\ &= 2-\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) x \frac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 6 \end{aligned}$$

Bài 10. Cho biểu thức $P = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$

a) Xác định a, b để biểu thức có nghĩa và hãy rút gọn P.

b) Tìm giá trị của P khi $a = \sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}}$; $b = \sqrt{24}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Quảng Ngãi, năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $a, b > 0$; $a \neq b$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\ &= \sqrt{a}+\sqrt{b} : \frac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = a-b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } a &= \sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}} = \sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{6})^2} \\ &= 3-\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 3 = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = a-b = \sqrt{6} - \sqrt{24} = \sqrt{6} - 2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

Bài 11. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

1) Rút gọn P.

2) Tìm giá trị của P khi $x = 4$.

3) Tìm x để $P = \frac{13}{3}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Hà Nội, năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

1) Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Ta có: } P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}+1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{2) Khi } x = 4 \text{ thì } P = \frac{4+\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$$

$$\text{3) Ta có: } P = \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{13}{3} \Leftrightarrow 3x-10\sqrt{x}+3=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left\{ 3; \frac{1}{3} \right\} \Leftrightarrow x \in \left\{ 9; \frac{1}{9} \right\}.$$

Bài 12. Cho biểu thức: $P = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tính giá trị của P khi $x = 3+2\sqrt{2}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

1) Điều kiện: $x \geq 0$, $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

$$\text{2) Khi } x = 3+2\sqrt{2} \text{ thì } P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-1} = 1+\sqrt{2}$$

Bài 13. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{8+\sqrt{15}}{2}} - \sqrt{\frac{8-\sqrt{15}}{2}}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐH Vinh năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

$$A = \sqrt{\frac{16+2\sqrt{15}}{4}} - \sqrt{\frac{16-2\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{15}+1}{2} - \frac{\sqrt{15}-1}{2} = 1$$

Bài 14. Với mỗi số tự nhiên $k \geq 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Áp dụng để tính giá trị biểu thức sau:

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán ĐHSPTP.HCM năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{k} (\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Áp dụng công thức trên với $k = 1, 2, \dots, 99$

Với $k = 1$ thì
$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Với $k = 2$ thì
$$\frac{1}{3\sqrt{2} + 1\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Với $k = 99$ thì
$$\frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}$$

Bài 15. Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \left(2\sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \right) \left(1 - \frac{2}{a+1} \right)^2 \text{ với } a > 0, a \neq 1$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP. HCM năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

$$A = \left(2\sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

$$= \left(\sqrt{16 + 4\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

$$= \left(\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} \right) (\sqrt{10} - \sqrt{2}) = \sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{10} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 8$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \right) \left(1 - \frac{2}{a+1} \right)^2$$

$$= \left(\frac{a - 2\sqrt{a} + 1 + a + 2\sqrt{a} + 1}{a - 1} \right) \left(\frac{a - 1}{a + 1} \right)^2 = \frac{2(a + 1)}{a - 1} \cdot \left(\frac{a - 1}{a + 1} \right)^2 = \frac{2(a - 1)}{a + 1}$$

Bài 16. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $S = \frac{a}{(a - b)(a - c)} + \frac{b}{(b - c)(b - a)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)}$ (a, b, c khác nhau đôi một)

b) $P = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}} (x \geq 2)$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP. HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

a) $S = \frac{a}{(a - b)(a - c)} + \frac{b}{(b - c)(b - a)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)}$

$$= \frac{a(c - b) + b(a - c) + c(b - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)} = \frac{ac - ab + ba - bc + cb - ca}{(a - b)(b - c)(c - a)} = 0$$

Vậy $S = 0$.

b) $P = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$

$$= \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{(\sqrt{x - 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 1)^2} \right]}{\sqrt{2x + 2\sqrt{2x - 1}} - \sqrt{2x - 2\sqrt{2x - 1}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2} \left[\left| \sqrt{x-1} + 1 \right| + \left| \sqrt{x-1} - 1 \right| \right]}{\sqrt{(\sqrt{2x-1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1} - 1)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{2} \left[\left| \sqrt{x-1} + 1 \right| + \left| \sqrt{x-1} - 1 \right| \right]}{\left| \sqrt{2x-1} + 1 \right| - \left| \sqrt{2x-1} - 1 \right|} = \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 \right]}{\sqrt{2x-1} + 1 - (\sqrt{2x-1} - 1)} \\
&= \sqrt{2} \sqrt{x-1} \quad (\text{vì } x \geq 2 \text{ nên } \sqrt{x-1} \geq 2 \text{ và } \sqrt{2x-1} \geq 1)
\end{aligned}$$

Bài 17. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt[3]{3b-1} + b\sqrt{8b-3} + \sqrt[3]{3b-1} - b\sqrt{8b-3}$ với $b \geq \frac{3}{8}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

- Với $b = \frac{3}{8}$ thì $A = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{3}{8} - 1} + \frac{3}{8} \sqrt{8 \cdot \frac{3}{8} - 3} + \sqrt[3]{3 \cdot \frac{3}{8} - 1} - \frac{3}{8} \sqrt{8 \cdot \frac{3}{8} - 3}$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1$$

- Với $b > \frac{3}{8}$, thì $A = \sqrt[3]{3b-1} + b\sqrt{8b-3} + \sqrt[3]{3b-1} - b\sqrt{8b-3}$

$$\Leftrightarrow A^3 = 6b - 2 + 3\sqrt{(3b-1)^2 - b^2(8b-3)} = 6b - 2 + 3A(1-2b)$$

$$\Rightarrow A^3 - 3(1-2b)A - (6b-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A-1) \left[\left(A + \frac{1}{2} \right)^2 + 6 \left(b - \frac{3}{8} \right) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (A-1) = 0 \quad (\text{vì } \left(A + \frac{1}{2} \right)^2 + 6 \left(b - \frac{3}{8} \right) > 0)$$

$$\Leftrightarrow A = 1$$

Vậy $A = 1$.

Bài 18. 1. Tính: $P = \frac{y\sqrt{x} + \sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy} + 1}$ ($x > 0, y > 0$)

2. Tính $Q = \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

1. $P = \frac{y\sqrt{x} + \sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy} + 1} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy} + 1}$

$$= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{xy} + 1)}{\sqrt{xy} + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

2. $Q^2 = \left(\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} \right)^2$

$$= \sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1} + 2\sqrt{2-4(\sqrt{2}-1)}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6-4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2|2-\sqrt{2}| = 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} = 4 \quad (\text{vì } 2 > \sqrt{2})$$

Vậy $Q = 2$ (vì $Q > 0$).

Bài 19. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} \cdot (16 - \sqrt{x})}{x-4} + \frac{3+2\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐHSPTP.HCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{x} \cdot (16 - \sqrt{x})}{x-4} + \frac{3+2\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \\
&= \frac{\sqrt{x} \cdot (16 - \sqrt{x}) - (3+2\sqrt{x})(\sqrt{x}+2) - (2-3\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{16\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x} - 6 - 2x - 4\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 + 3x - 6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Bài 20. Cho biểu thức: $P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{\sqrt{ab}+a} \right) - \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$

với $a > 0, b > 0$ và $a \neq b$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm a và b sao cho $b = (a+1)^2$ và $P = -1$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐHSPT Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } P &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{\sqrt{ab}+a} \right) - \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2} \\ &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{2(a+b)}{a-b} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \\ &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \end{aligned}$$

- Nếu $a > b$ thì $P = 0$

- Nếu $a < b$ thì $P = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

2. Khi $b = (a+1)^2$ và $P = -1$, ta có $a < b$

$$\text{Do đó } P = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a} - \sqrt{(a+1)^2} = \sqrt{a} - a - 1$$

$$\Leftrightarrow -1 = \sqrt{a} - a - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}(1 - \sqrt{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

Suy ra $b = 4$

Bài 21. Cho biểu thức: $M = \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right)$

với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tính giá trị của M khi $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Hà Tây năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } x &= \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} \\ &= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}-1} = 3$$

Bài 22. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$

Chứng minh rằng P luôn nhận giá trị nguyên với mọi x, y thỏa mãn điều kiện: $x > 0, y > 0$ và $x \neq y$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Ngoại ngữ, ĐH Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(x-y)} \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} \\ &= \frac{2(x-y)}{x-y} = 2 \end{aligned}$$

Vậy P luôn nhận giá trị nguyên với mọi $x > 0, y > 0$ và $x \neq y$.

Bài 23. Rút gọn biểu thức sau:

$$P = \frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2005}}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin, ĐH Vinh năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2005}} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{5-1} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{9-5} + \dots + \frac{\sqrt{2005}-\sqrt{2001}}{2005-2001} \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1+\sqrt{9}-\sqrt{5}+\dots+\sqrt{2005}-\sqrt{2001}) = \frac{\sqrt{2005}-1}{4} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{2005}-1}{4}$

Bài 24. a) Chứng minh đẳng thức sau: $\sqrt{53+12\sqrt{10}} - \sqrt{47-6\sqrt{10}} = 3\sqrt{2}$

b) Cho $A = \sqrt{45+\sqrt{2009}}$ và $B = \sqrt{45-\sqrt{2009}}$.

Chứng minh rằng: $A+B = \sqrt{98}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐHSP TP.HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } &\sqrt{53+12\sqrt{10}} - \sqrt{47-6\sqrt{10}} \\ &= \sqrt{45+2.3\sqrt{5}.2\sqrt{2}+8} - \sqrt{45-2.3\sqrt{5}.2\sqrt{2}+8} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{5}+2\sqrt{2} - (3\sqrt{5}-2\sqrt{2}) \\ &= 3\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad (\text{vì } 3\sqrt{5} > \sqrt{2}) \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } (A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ &= 45 + \sqrt{2009} + 2\sqrt{45^2 - 2009} + 45 - \sqrt{2009} \\ &= 90 + 2\sqrt{2025 - 2009} = 90 + 2\sqrt{16} = 98 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bài 25. Ba số dương a, b, c thỏa mãn: $b \neq c$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{c}$ và $a + b =$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2. \text{ Chứng minh đẳng thức: } \frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội, năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Ta có: $a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2$

Suy ra: $c + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ac} - 2\sqrt{bc} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} &= \frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + c + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ac} - 2\sqrt{bc}}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + c + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ac} - 2\sqrt{bc}} \\ &= \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{c})}{2(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{c})} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{c})[2\sqrt{a} - 2\sqrt{c} + 2\sqrt{b}]}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})[2\sqrt{b} - 2\sqrt{c} + 2\sqrt{a}]} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bài 26. Cho $a > 2$. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{a^2 - 3a - (a-1)\sqrt{a^2 - 4} + 2}{a^2 + 3a - (a+1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}} = \frac{1-a}{1+a}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐHSP Hà Nội, năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{a^2 - 3a - (a-1)\sqrt{a^2 - 4} + 2}{a^2 + 3a - (a+1)\sqrt{a^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}} &= \frac{(a-1)(a-2) - (a-1)\sqrt{a^2 - 4}}{(a+1)(a+2) - (a+1)\sqrt{a^2 - 4}} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}} \\ &= \frac{(a-1)\sqrt{a-2} \cdot (\sqrt{a-2} - \sqrt{a+2})}{(a+1)\sqrt{a+2} \cdot (\sqrt{a+2} - \sqrt{a-2})} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{a-2}} \\ &= \frac{(a-1)}{(a+1)} \cdot \frac{1-a}{1+a} = \frac{1-a}{1+a} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

CHỦ ĐỀ 3.

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

I. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

- $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$
- $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$
- $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
- $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$
- $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$
- $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- $a > b > 0$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$ với $x > 0$
- $b > a > 0$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$ với $x > 0$
- $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}, \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}, a^n > b^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$
- $a > b > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}, \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}, a^{2n+1} > b^{2n+1}$ với $n \in \mathbb{N}$

II. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG GẶP

1. $A^2 \geq 0$ với mọi A , $|A| \geq 0$ với mọi A

2. Bất đẳng thức Cô-si

- Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm:

$$\text{Nếu } a \geq 0, b \geq 0 \text{ thì } a + b \geq 2\sqrt{ab} \text{ hoặc } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

- Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm:

$$\text{Nếu } a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0 \text{ thì } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ hoặc } \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

- Bất đẳng thức Cô-si cho n số không âm:

$$\text{Nếu } a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0 \text{ thì } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\text{hoặc } \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

3. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski

Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski cho hai bộ số $(a; b)$ và $(c; d)$:

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski cho ba bộ số $(a; b; c)$ và $(d; e; f)$:

$$(ad + be + cf)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

4. Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

III. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Dùng định nghĩa

Để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$, ta xét hiệu $A - B$, rồi chứng minh $A - B \geq 0$.

2. Phương pháp biến đổi tương đương

Dùng phép biến đổi tương đương để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức đã khẳng định là đúng.

3. Phương pháp vận dụng các tính chất cơ bản của bất đẳng thức và các bất đẳng thức thường gặp

Từ các tính chất cơ bản của bất đẳng thức và các bất đẳng thức thường gặp ta có thể suy ra được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ngoài các bất đẳng thức thường gặp ở trên còn có các bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a = b)$$

$$\text{Nếu } a, b > 0 \text{ thì } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a = b)$$

4. Phương pháp phản chứng

Để chứng minh $A < B$, ta giả sử $A \geq B$ rồi suy ra điều vô lí, từ đó suy ra điều giả sử là sai. Do đó điều cần chứng minh là đúng.

5. Phương pháp quy nạp

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$, ta làm như sau:

- Chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n = n_0$.
- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq n_0$, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.
- Khi đó bất đẳng thức đã cho đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

IV. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

- Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P, xác định trên tập D, ta cần tìm một số m sao cho $A \leq m$ ($m \in \mathbb{R}$) với mọi giá trị của biến thuộc D, rồi chứng tỏ $A = m$ tại một giá trị nào đó của biến thuộc D. Do đó A đạt giá trị lớn nhất bằng m.
- Để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P, xác định trên tập D, ta cần tìm một số m sao cho $A \geq m$ ($m \in \mathbb{R}$) với mọi giá trị của biến thuộc D, rồi chứng tỏ $A = m$ tại một giá trị nào đó của biến thuộc D. Do đó A đạt giá trị nhỏ nhất bằng m.



➤ B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Hướng dẫn giải

a) Xét hiệu $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{(a-b)c}{b(b+c)}$

Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $a - b < 0 \Rightarrow \frac{(a-b)c}{b(b+c)} < 0$

Vậy $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

b) Xét hiệu

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) &= \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca}{2} \\ &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

(Vì $(a-b)^2 \geq 0$; $(b-c)^2 \geq 0$; $(c-a)^2 \geq 0$)

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Bài 2. Cho hai số x, y thỏa điều kiện: $x + y = 2$.

Chứng minh rằng: $x^4 + y^4 \geq 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $(x^2 - y^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2 \Leftrightarrow 2(x^4 + y^4) \geq (x^2 + y^2)^2$ (1)

Và $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 = 4$ (vì $x + y = 2$)

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $x^4 + y^4 \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Bài 3. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$.

b) $x^2(1+y)^2 + y^2(1+z)^2 + z^2(1+x)^2 \geq 6xyz$.

Hướng dẫn giải

a) $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$

$\Leftrightarrow x + y + z + 2xy + 2yz + 2zx - 3xy - 3yz - 3xz \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0$ (đúng)

Vậy $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

b) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xyz$ (1)

$y^2(z^2 + x^2) \geq 2xyz$ (2)

$z^2 + x^2y^2 \geq 2xyz$ (3)

Cộng (1), (2) và (3), ta được: $x^2(1+y)^2 + y^2(1+z)^2 + z^2(1+x)^2 \geq 6xyz$

Bài 4. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ với $a, b, c > 0$

b) $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ với $x, y, z > 0$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Năng khiếu Hải Phòng, năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$
 $= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$

Mặt khác: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ (vì $a, b > 0$)

$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2$

Tương tự: $\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2, \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 2$

Do đó: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3+2+2+2=9$ (đpcm)

b) Từ bất đẳng thức câu a) ta thay $a = x+y; b = x+z; c = x+y$, ta được:

$2(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) \geq 9$

$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{x+z} + \frac{x+y+z}{x+y} \geq \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{x+z} + 1 + \frac{z}{x+y} + 1 \geq \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ (đpcm)

Bài 5. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} < 2$ với a, b, c là các số dương.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh hai bất đẳng thức sau:

$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} > 1$ (1) và $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} < 2$ (2)

Ta có: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{b+c+a}; \frac{c}{a+c} > \frac{c}{a+c+b}$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức (1) đúng.

Lại có:

$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} = \frac{(a+b)-b}{a+b} + \frac{(b+c)-c}{b+c} + \frac{(a+c)-a}{a+c}$

$= 3 - \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c}\right) < 2$

(vì $\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} < 2$, chứng minh tương tự bất đẳng thức (1))

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(a-b)^2(a^2 + ab + b^2)(a+b) = (a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geq 0$

Suy ra: $a^5 + b^5 \geq a^2b^2(a+b)$

Mặt khác $abc = 1$, nên ta được:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} = \frac{1}{ab(a+b)+1}$$

$$= \frac{abc}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{a+b+c} \quad (1)$$

Tương tự, ta được: $\frac{bc}{b^5+c^5+bc} \leq \frac{a}{a+b+c} \quad (2);$

$$\frac{ca}{b^5+a^5+ca} \leq \frac{b}{a+b+c} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3), suy ra: $\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 7. Cho $x, y, z > 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} > 2$$

Hướng dẫn giải

Vì $x, y, z > 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ nên $0 < x, y, z < 1$

Ta có: $\left(\sqrt{1-x^2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2+x^4-2\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}\right)x^2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1-x^2+x^4-2\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}\right)x^2} > 0 \quad (\text{vì } 0 < x < 1 \text{ nên } x^2 > x^4)$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}\right)x^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 2x \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} > 2x^3 \quad (1)$$

Tương tự, ta có: $\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} > 2y^3 \quad (2)$ và $\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} > 2z^3 \quad (3)$

Cộng (1), (2), (3) và kết hợp $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, suy ra:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} > 2 \quad (\text{đpcm})$$

Bài 8. Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$

Hướng dẫn giải

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac + bd \quad (2)$$

Nếu $ac + bd < 0$ thì (2) đúng.

Nếu $ac + bd \geq 0$ thì từ (2), ta có: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

Do đó (2) đúng nên (1) đúng.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Bài 9. Cho $a, b > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a + b \geq \frac{4ab}{1+ab}$

b) $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (1)$

$$1 + ab \geq 2\sqrt{ab} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(a+b)(1+ab) \geq 4ab$

Vì $1 + ab > 0$ nên $a + b \geq \frac{4ab}{1+ab}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{b}}\sqrt{b}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{a} \quad (3)$$

Tương tự, ta được: $\sqrt{\frac{b^2}{a}} + \sqrt{a} \geq 2\sqrt{b} \quad (4)$

Từ (3) và (4), suy ra: $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{b} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} + \sqrt{a} \geq 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Bài 10. Cho $x, y, z > 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ (1)

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y) \geq 4\sqrt{\frac{1}{xy}} \cdot \sqrt{xy} = 4$

Do đó: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ vì $x, y > 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \quad (3)$$

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra: $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x+y+z) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 9$

Do đó: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ vì $x, y, z > 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 11. Cho ba số không âm $x \neq y \neq z$ và $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{2(y+z)} + \sqrt{2(z+x)} < 6$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski cho hai bộ số

$$(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}) \text{ và } \sqrt{(x+y)}; \sqrt{(y+z)}; \sqrt{(z+x)}$$

Ta được:

$$\left[\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{2(y+z)} + \sqrt{2(z+x)}\right]^2 = (\sqrt{2}\sqrt{x+y} + \sqrt{2}\sqrt{y+z} + \sqrt{2}\sqrt{z+x})^2$$

$$\leq (2+2+2)(x+y+y+z+z+x) = 12(x+y+z) = 36$$

Vì $\sqrt{2}\sqrt{x+y} + \sqrt{2}\sqrt{y+z} + \sqrt{2}\sqrt{z+x} > 0$ nên

$$\sqrt{2}\sqrt{x+y} + \sqrt{2}\sqrt{y+z} + \sqrt{2}\sqrt{z+x} = 3\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=y+z=z+x \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$ (vô lí

vì $x \neq y \neq z$)

Vậy $\sqrt{2(x+y)} + \sqrt{2(y+z)} + \sqrt{2(z+x)} < 6$.

Bài 12. Cho $x, y, z > 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski, ta được:

$$(y+z+x+z+x+y)\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y+z)\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2$$

Vì $x+y+z > 0$ nên $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 13. Cho $n \in \mathbb{N}; n \geq 4$. Chứng minh rằng: $2^n > 2(n+1)$

Hướng dẫn giải

Với $n = 4$, bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k$ ($k \geq 4$): $2^k > 2(k+1)$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$, hay cần chứng minh $2^{k+1} > 2(k+1+1) \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2(k+2)$

Ta có: $2^k > 2(k+1)$

Mặt khác $2^k > 2$ (vì $k \geq 4$)

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được: $2 \cdot 2^k > 2(k+1) + 2$

$$\Leftrightarrow 2^{k+1} > 2(k+2)$$

Vậy $2^n > 2(n+1)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}; n \geq 4$.

Bài 14. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

a) $P = \frac{x}{(x+2004)^2}$ với $x > 0$

b) $Q = \frac{1}{x^3+y^3+1} + \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{z^3+x^3+1}$ với $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$

Hướng dẫn giải

a) Vì $x > 0$ nên $P = \frac{x}{(x+2004)^2} > 0$

Ta có: $\frac{1}{P} = \frac{(x+2004)^2}{x} = \frac{x^2 + 2x \cdot 2004 + 2004^2}{x}$
 $= \frac{4 \cdot 2004x + (x-2004)^2}{x}$
 $= 4 \cdot 2004 + \frac{(x-2004)^2}{x} \geq 4 \cdot 2004$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{P}$ là 4.2004, đạt được khi $x = 2004$

Suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4 \cdot 2004}$, đạt được khi $x = 2004$.

b) Ta có: $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$ và $xyz = 1$

Suy ra: $x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x+y+z) \Rightarrow \frac{1}{x^3+y^3+1} \leq \frac{1}{xy(x+y+z)}$ (1)

Tương tự, ta được: $\frac{1}{y^3+z^3+1} \leq \frac{1}{yz(x+y+z)}$ (2)

$\frac{1}{z^3+x^3+1} \leq \frac{1}{zx(x+y+z)}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta được:

$$Q = \frac{1}{x^3+y^3+1} + \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{z^3+x^3+1}$$

$$\leq \frac{1}{xy(x+y+z)} + \frac{1}{yz(x+y+z)} + \frac{1}{zx(x+y+z)}$$

$$= \frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)} = 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 1, đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài 15. Cho biểu thức $A = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Tìm cặp số $(x; y)$ để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có: $-A = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y = x^2 - (y+2)x + y^2 - 2y$

$$= \left[x^2 - x(y+2) + \left(\frac{y+2}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{y+2}{2} \right)^2 + y^2 - 2y$$

$$= \left(x - \frac{y+2}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 - 4 \geq -4$$

$$\Rightarrow A \leq 4$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 4, đạt được khi $x = y = 2$.

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được:

$$\sqrt{(a+b) \frac{2}{3}} + \sqrt{(b+c) \frac{2}{3}} + \sqrt{(c+a) \frac{2}{3}} \leq \frac{a+b+\frac{2}{3}}{2} + \frac{b+c+\frac{2}{3}}{2} + \frac{c+a+\frac{2}{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}) \leq a+b+c+1$$

Vì $a+b+c = 1$ nên $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a+b=b+c=c+a = \frac{2}{3} \Rightarrow a=b=c = \frac{1}{3}$

Bài 17. Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1. a^2 - b^2 + c^2 \geq (a - b + c)^2.$$

$$2. a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \geq (a - b + c - d)^2.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Năng khiếu, Hải Phòng năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải

$$1. a^2 - b^2 + c^2 \geq (a - b + c)^2 \Leftrightarrow b^2 - ab - bc + ca \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(c - b) \leq 0 \text{ đúng vì } a \geq b \geq c \geq d \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $b = c$.

2. Áp dụng bất đẳng thức trên và theo đề bài, ta có:

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \geq (a - b + c)^2 - d^2$$

$$= (a - b + c - d)(a - b + c + d) \geq (a - b + c - d)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b, d = 0$ hoặc $b = c, d = 0$.

Bài 18. Chứng minh rằng: $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = \left(x^8 - x^5 + \frac{1}{4}x^2\right) + \left(\frac{3}{4}x^2 - x + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x^4 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x^4 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0 \text{ với}$$

mọi $x \in \mathbb{R}$ (đpcm)

Bài 19. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$

Chứng minh rằng: $xy(x^2 + y^2) \leq 2$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán - Tin PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

Từ $x + y = 2$, ta có:

$$xy(x^2 + y^2) = xy(4 - 2xy) = 4xy - 2x^2y^2 = -2(xy - 1)^2 + 2 \leq 2$$

Bài 20. Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Chứng minh $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy} \geq 4$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Lê Hồng Phong TP. HCM năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } x > 0, y > 0 \text{ và } x + y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{(x + y)^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$ (bạn đọc tự chứng minh), ta được:

$$\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy} \geq \frac{4}{x^2 + xy + y^2 + xy} = \frac{4}{(x + y)^2} \geq 4 \text{ (đpcm)}$$

Bài 21. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$4(xy + yz + zx) \leq \sqrt{(x + y)(y + z)(z + x)}(\sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x})$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng với các số dương a, b, c , ta có:

$$(a + b)(a + c) = a^2 + a(b + c) + bc \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc = (a + \sqrt{bc})^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = c$.

Đặt A là vế phải của bất đẳng thức đã cho.

Áp dụng kết quả trên, ta được:

$$A = (x + y)\sqrt{(y + z)(z + x)} + (y + z)\sqrt{(z + x)(x + y)} + (z + x)\sqrt{(x + y)(y + z)}$$

$$\geq (x + y)(\sqrt{xy} + z) + (y + z)(\sqrt{yz} + x) + (z + x)(\sqrt{zx} + y)$$

$$= \sqrt{xy}(x + y) + \sqrt{yz}(y + z) + \sqrt{zx}(z + x) + 2(xy + yz + zx)$$

$$\geq \sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{xy} + \sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{yz} + \sqrt{zx} \cdot 2\sqrt{zx} + 2(xy + yz + zx) = 4(xy + yz + zx)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 22. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a + b = \frac{5}{4}$.

Chứng minh rằng $\frac{4}{a} + \frac{1}{4b} \geq 5$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Bắc Giang năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{4}{a} + \frac{1}{4b} = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b} + 4a + 4b - 5 = \left(\frac{4}{a} + 4a\right) + \left(\frac{1}{4b} + 4b\right) - 5$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được:

$$\frac{4}{a} + 4a \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \cdot 4a} = 8 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4b} + 4b \geq 2\sqrt{\frac{1}{4b} \cdot 4b} = 2 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\frac{4}{a} + \frac{1}{4b} \geq 8 + 2 - 5 = 5$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(a; b) = \left(1; \frac{1}{4}\right)$.

Bài 23. Cho a, b, c là các số dương

1) Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán, ĐH Khoa học Huế năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

1) Đặt $b + c = X$, $c + a = Y$, $a + b = Z$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{-X+Y+Z}{2X} + \frac{X-Y+Z}{2Y} + \frac{X+Y-Z}{2Z} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X} + \frac{X}{Z} + \frac{Z}{X} + \frac{Y}{Z} + \frac{Z}{Y} - 3 \right) \geq \frac{1}{2} (2+2+2-3) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $X = Y = Z$ hay $a = b = c = 1$.

2) Áp dụng bất đẳng thức ở phần 1) và bất đẳng thức Cô-si, ta được:

$$A = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq \frac{3}{2} + 2 + 2 + 2 = \frac{15}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $\frac{15}{2}$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Bài 24. a) Cho $a > c$, $b > c$, $c > 0$. Chứng minh: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

b) Cho $a > 0$, $b > 0$. Chứng minh: $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt{\sqrt{ab}}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong TP.HCM năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} &= \sqrt{\frac{c}{b} \left(\frac{a-c}{a} \right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left(\frac{b-c}{b} \right)} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab} \quad (\text{đpcm})$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} &\leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Rightarrow 2\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &\Rightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bài 25. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Thái Bình năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng: $4(2x^2 + xy + 2y^2) = 5(x+y)^2 + 3(x-y)^2 \geq 5(x+y)^2$

Vì $x, y > 0$, suy ra: $\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(x+y)$ (1)

Tương tự, ta có: $\sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(y+z)$ (2)

$\sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(z+x)$ (3)

Cộng (1), (2) và (3), ta được:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}(x+y+z)$$

Do $x + y + z = 1$, nên ta được:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 26. a) Chứng minh với mọi số thực x, y, z ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y+z+t)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Chứng minh với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có bất đẳng thức sau: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP. HCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

a) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y+z+t)$ (1)

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 \geq 4x(y+z+t)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4xz + 4z^2) + (x^2 - 4xt + 4t^2) + x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)^2 + (x-2z)^2 + (x-2t)^2 + x^2 \geq 0 \quad (2)$$

Bất đẳng thức (1) đúng với mọi x, y, z và t .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-2y = x-2z = x-2t = x = 0$

$$\Leftrightarrow x = y = z = t = 0$$

b) Đặt $X = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Ta có: $|X| = \left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| \geq 2$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 2 \geq 3X \Leftrightarrow (X-1)(X-2) \geq 0 \quad (3)$$

Nếu $X \geq 2$ thì $X-1 \geq 0$ và $X-2 \geq 0$ nên bất đẳng thức (3) đúng

Nếu $X \leq -2$ thì $X-1 < 0$ và $X-2 < 0$ nên bất đẳng thức (1) đúng

Vậy với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

Bài 27. Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện:

$$x + y + z + xy + yz + zx = 6$$

Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội năm học 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^2 + 1 \geq 2x$; $y^2 + 1 \geq 2y$; $z^2 + 1 \geq 2z$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 2(x + y + z + xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 2 \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2) \geq 3$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 28. a) Chứng minh $2(a^4 + b^4) \geq ab^3 + a^3b + 2a^2b^2$ với mọi a, b .

b) Chứng minh $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$ với $a > b > 0$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán Lê Hồng Phong, TP. HCM năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2(a^4 + b^4) \geq ab^3 + a^3b + 2a^2b^2$

$$\Leftrightarrow 4(a^4 + b^4) \geq 2ab^3 + 2a^3b + 2a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow (b^4 - 2ab^3 + a^2b^2) + (a^4 - 2a^3b + a^2b^2) + (3a^4 + 3b^4 - 6a^2b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - ab)^2 + (a^2 - ab)^2 + 3(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

Vậy $2(a^4 + b^4) \geq ab^3 + a^3b + 2a^2b^2$ đúng.

b) Với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$
 $\Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab - b^2) + 2\sqrt{(a^2 - b^2)(2ab - b^2)} > a^2$
 $\Leftrightarrow 2b(a - b) + 2\sqrt{(a^2 - b^2)(2ab - b^2)} > 0$ (đúng)
 Vậy $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$ đúng.

Bài 29. Cho x, y thỏa mãn $16x^2 - 9y^2 \geq 144$.

Chứng minh rằng $|2x - y + 1| \geq 2\sqrt{5} - 1$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán, Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bất đẳng thức: $(ax - by)^2 \geq (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow -2axby \geq a^2x^2 + b^2y^2 \Leftrightarrow (ax - by)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ax = by$

Áp dụng bất đẳng thức (1), ta được:

$$(2x - y)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4x - \frac{1}{3} \cdot 3y\right)^2 \geq \frac{5}{36}(16x^2 - 9y^2) \geq 20 \text{ (vì } 16x^2 - 9y^2 \geq 144)$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 2x - y + 1 \geq 2\sqrt{5} + 1 \\ 2x - y + 1 \leq -2\sqrt{5} + 1 \end{cases} \Rightarrow |2x - y + 1| \geq 2\sqrt{5} - 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 8x = 9y \\ 2x - y = -2\sqrt{5} \\ 16x^2 - 9y^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{8}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Bài 30. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + 2z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x^2 + 2y^2 - z^2$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

Ta có: $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ với mọi x, y .

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

$$\text{Do đó: } P = 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 2(x^2 + y^2) - z^2 \geq (x + y)^2 - z^2 \\ = (3 - 2z)^2 - 3 \geq -3$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $z = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -3 khi $x = y = -\frac{1}{2}$ và $z = 2$

Bài 31. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (x + y)(x + z)$ trong đó x, y, z là ba số dương thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện $(x + y + z)xyz = 1$
 (Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHSPT, Hà Nội năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

Ta có: $T = (x + y)(x + z) = x(x + y + z) + yz \geq 2\sqrt{x(x + y + z)yz} = 2$

$$T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + y + z) = 1 \\ yz = 1 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$$

$$\text{Chọn } y = z = 1 \text{ thì } T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 2) = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 2.

Bài 32. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x - 1)(y - 1)}$ trong

đó x, y là những số thực lớn hơn 1.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán - Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2004 - 2005)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương, ta được:

$$P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x - 1)(y - 1)} = \frac{x^2(x - 1) + y^2(y - 1)}{(x - 1)(y - 1)} = \frac{x^2}{y - 1} + \frac{y^2}{x - 1} \\ \geq \frac{2xy}{\sqrt{(x - 1)(y - 1)}} \geq 2 \cdot \frac{x}{\left(\frac{x - 1 + 1}{2}\right)} \cdot \frac{y}{\left(\frac{y - 1 + 1}{2}\right)} = 8$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 8, đạt được khi $x = y = 2$.

Bài 33. Giả sử x, y, z là các số nguyên dương và thỏa mãn điều kiện:

$$xy^2z^2 + x^2z + y = 3z^2$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{z^4}{1+z^4(x^4+y^4)}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện: $xy^2z^2 + x^2z + y = 3z^2$

$$\Rightarrow xy^2 + x^2 \frac{1}{z} + y \frac{1}{z^2} = 3 \quad (z \text{ là số dương})$$

Biểu thức P có dạng: $P = \frac{1}{\frac{1}{z^4} + x^4 + y^4}$

Đặt $t = \frac{1}{z}$. Ta có: $xy^2 + yt^2 + tx^2 = 3$ và $P = \frac{1}{x^4 + y^4 + t^4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho bốn số dương, ta có:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + y^4 + 1 \geq 4xy^2 \\ y^4 + t^4 + t^4 + 1 \geq 4yt^2 \\ t^4 + x^4 + x^4 + 1 \geq 4tx^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(x^4 + y^4 + t^4) + 3 \geq 4(xy^2 + yt^2 + tx^2) = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + t^4 \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^4 + y^4 + t^4} \leq \frac{1}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{3}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài 34. Giả sử x, y là những số không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

1) Chứng minh rằng $1 \leq x + y \leq \sqrt{2}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2y}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2$

$$\Rightarrow x + y \leq \sqrt{2} \quad (1)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Mặt khác $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1 + 2xy \geq 1$ (vì $x^2 + y^2 = 1$)

$$\Rightarrow x + y \geq 1 \quad (2)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $y = 0$

Từ (1) và (2), suy ra $1 \leq x + y \leq \sqrt{2}$ (đpcm)

2) $P = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2y}$

$$\Rightarrow P^2 = 2 + 2(x+y) + 2\sqrt{1+2(x+y)+4xy}$$

$$\text{Vì } x+y \leq \sqrt{2} \text{ và } 4xy \leq 2(x^2 + y^2) = 2$$

$$\Rightarrow P \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác, vì $x+y \geq 1$ và $4xy \geq 0$ nên $P^2 \geq 2+2+2\sqrt{1+2+0}$

$$\Rightarrow P \geq \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, đạt được khi $x = 0$ hoặc $y = 0$.

Bài 35. Cho $a, b, c > 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}-1} + \frac{b}{\sqrt{c}-1} + \frac{c}{\sqrt{a}-1} \geq 12$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Năng Khiếu Trần Phú, Hải Phòng năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{b}-1} + \frac{b}{\sqrt{c}-1} + \frac{c}{\sqrt{a}-1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}-1} \cdot \frac{b}{\sqrt{c}-1} \cdot \frac{c}{\sqrt{a}-1}}$$

Nhận xét rằng: với mọi $x > 1$, ta có: $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-1} \geq 4$

Áp dụng nhận xét trên, ta được: $3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}-1} \cdot \frac{b}{\sqrt{c}-1} \cdot \frac{c}{\sqrt{a}-1}} \geq 3\sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 4} = 12$

Suy ra: $\frac{a}{\sqrt{b}-1} + \frac{b}{\sqrt{c}-1} + \frac{c}{\sqrt{a}-1} \geq 12$ (đpcm)

Bài 36. Ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ thức: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 6$

Xét biểu thức $P = x + y^2 + z^3$

1) Chứng minh rằng $P \geq x + 2y + 3z - 3$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

1) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được:

$$P + 3 = x + (y^2 + 1) + (z^3 + 1 + 1) \geq x + 2y + 3z \Rightarrow P \geq x + 2y + 3z - 3 \text{ (đpcm)}$$

2) Áp dụng kết quả phần 1) và áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski, ta được:

$$6(P+3) \geq (x+2y+3z) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \right) \geq \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{2}{y}} + \sqrt{3z} \cdot \sqrt{\frac{3}{z}} \right)^2 = 36$$

$$\Rightarrow P \geq 3$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài 37. Với các số a, b, c là các số thực dương thỏa điều kiện $abc = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{(ab+a+1)^2} + \frac{b}{(bc+b+1)^2} + \frac{c}{(ca+c+1)^2} \geq \frac{1}{a+b+c}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{abc+ab+a} + \frac{abc}{a^2bc+abc+ab} \\ &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{ab+a+1} + \frac{1}{ab+a+1} = 1 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski với $a, b, c, x, y, z > 0$, ta được:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= \left(\sqrt{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{y}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \cdot \frac{z}{\sqrt{c}} \right)^2 \leq (a+b+c) \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \right) \\ \Rightarrow \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{a}{(ab+a+1)^2} + \frac{b}{(bc+b+1)^2} + \frac{c}{(ca+c+1)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{ab+a+1} \right)^2}{a} + \frac{\left(\frac{b}{bc+b+1} \right)^2}{b} + \frac{\left(\frac{c}{ca+c+1} \right)^2}{c} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \right)^2}{a+b+c} = \frac{1}{a+b+c} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 38. Cho hai số dương a, b . Chứng minh rằng: $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được:

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} = \frac{a+b}{2} \left(a+b+\frac{1}{2} \right) \geq \sqrt{ab} \left(a+b+\frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Xét hiệu: } \sqrt{ab} \left(a+b+\frac{1}{2} \right) - (a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) = \sqrt{ab} \left(a+b+\frac{1}{2} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \right)$$

$$= \sqrt{ab} \left[\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} \left(a + b + \frac{1}{2} \right) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+2)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ a = b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài 39. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $|x| < 1, |y| < 1$.

Chứng minh rằng: $|x| + |y| \geq \left| \frac{x+y}{1+xy} \right|$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán - Tin, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2004 - 2005)

Hướng dẫn giải

- Trường hợp 1: $xy \geq 0$

$$\text{Ta có: } |x| + |y| \geq \frac{|x| + |y|}{1+xy} \geq \left| \frac{x+y}{1+xy} \right|$$

- Trường hợp 2: $xy < 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x > 0, y < 0$

+ Nếu $x + y < 0 \Rightarrow |xy| < 1$ (do $|x| < 1, |y| < 1$)

$$\text{Bất đẳng thức: } |x| + |y| \geq \left| \frac{x+y}{1+xy} \right|$$

$$\Leftrightarrow x - y \geq \frac{-x - y}{1+xy}$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(1 + xy) \geq -x - y$$

$$\Leftrightarrow x + x^2y - y - xy^2 \geq -x - y$$

$$\Leftrightarrow x(2 + xy - y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x[(1 + xy) + (1 - y^2)] \geq 0 \text{ (đúng do } |y| < 1 \Rightarrow 1 - y^2 > 0, 1 + xy > 0)$$

$$\text{- Nếu } x + y > 0 \Rightarrow |x| + |y| \geq \left| \frac{x+y}{1+xy} \right|$$

$$\Leftrightarrow x - y \geq \frac{x+y}{1+xy}$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(1 + xy) \geq x + y$$

$$\Leftrightarrow x + x^2y - y - xy^2 \geq x + y$$

$$\Leftrightarrow y(x^2 + xy - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y[(x^2 - 1) + (xy + 1)] \geq 0 \text{ (đúng do } |x| < 1 \Rightarrow -(xy + 1) < 0, y < 0)$$

$$\text{Vậy nếu } |x| < 1, |y| < 1 \text{ thì } |x| + |y| \geq \left| \frac{x+y}{1+xy} \right|$$

Bài 40. Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa, TP.HCM năm học 2004 - 2005)

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow |t| = \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right|$$

$$\text{Bất đẳng thức Cô-si: } \left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2$$

$$\text{Suy ra: } |t| \geq 2 \Rightarrow t \leq -2 \text{ hay } t \geq 2$$

$$\text{Bất đẳng thức đã cho tương đương với: } t^2 + 2 \geq 3t$$

$$\Rightarrow (t - 1)(t - 2) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng.

Bài 41. a) Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Chứng minh $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy} \geq 4$

$$\text{b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } A = \frac{3}{2 + \sqrt{2x - x^2} + 7}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải

a) Nhận xét rằng với a, b là các số dương thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

$$\text{Từ đó ta có: } \frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{y^2+xy} \geq \frac{4}{(x^2+xy)(y^2+xy)} = \frac{4}{(x+y)^2} \quad (*)$$

$$\text{Vì } x > 0, y > 0 \text{ và } x+y \leq 1 \text{ nên } \frac{4}{(x+y)^2} \geq 4$$

$$\text{Từ } (*), \text{ suy ra: } \frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{y^2+xy} \geq 4 \text{ (đpcm)}$$

b) Điều kiện: $-x^2 + 2x + 7 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 1 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Ta có: } -x^2 + 2x + 7 = -(x-1)^2 + 8 \leq 8$$

$$\text{Do đó } A = \frac{3}{2 + \sqrt{2x - x^2 + 7}} \geq \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của A là } \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}, \text{ đạt được khi } x = 1.$$

Bài 42. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa điều kiện $b^2 + c^2 \leq a^2$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } P = \frac{1}{a^2}(b^2 + c^2) + a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với x, y > 0, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{a^2}(b^2 + c^2) + a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{4a^2}{b^2 + c^2} \\ &= \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{3a^2}{b^2 + c^2} \geq 2\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{b^2 + c^2}} + 3 = 5 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5, đạt được khi $b^2 + c^2 = a^2$ và $b = c$.

Bài 43. Cho a là số thay đổi thỏa mãn $-1 \leq a \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của b sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$2\sqrt{1-a^4} + (b-1)(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}) + b - 4 \leq 0$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu Văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}, 0 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Bất đẳng thức đã cho trở thành: } -t^2 + (b-1)t + b - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 + t + 2}{t-1} \leq b \Leftrightarrow A = t + 1 + \frac{2}{t+1} - 1 \geq b$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $A \geq 2\sqrt{2} - 1$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t \geq 2\sqrt{2} - 1$

Suy ra $A \geq b \forall t \in [0; \sqrt{2}]$ khi và chỉ khi $b \leq 2\sqrt{2} - 1$

Vậy giá trị lớn nhất của b là $2\sqrt{2} - 1$.

Bài 44. Giả sử a, b là các số nguyên dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{ab+1}{a+b} < \frac{3}{2}$.

$$\text{Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \frac{a^3b^3+1}{a^3+b^3}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Ta cần chứng minh rằng một trong 2 số a và b, phải có ít nhất một số nhỏ hơn hoặc bằng 2.

Thật vậy, giả sử ngược lại $a \geq 3$ và $b \geq 3$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $3 \leq a \leq b$.

$$\text{Ta có: } \frac{ab+1}{a+b} \geq \frac{3b+1}{a+b} \geq \frac{3b+1}{2b} > \frac{3b}{2b} = \frac{3}{2} \text{ (vô lí)}$$

Giả sử $a \leq 2 \Rightarrow a \in \{1; 2\}$

$$\text{- Với } a = 1, \text{ thì } P = \frac{b^3+1}{b^3+1} = 1$$

- Với $a = 2$, thì $P = \frac{8b^3 + 1}{b^3 + 8}$

Mà $\frac{ab+1}{a+b} = \frac{2b+1}{b+2} < \frac{3}{2} \Rightarrow b < 4$

Do đó $b \in \{1; 2; 3\}$

- Với $b = 1$, thì $P = \frac{9}{9} = 1$

- Với $b = 2$, thì $P = \frac{8 \cdot 8 + 1}{8 + 8} = \frac{65}{16}$

- Với $b = 3$, thì $P = \frac{8 \cdot 27 + 1}{27 + 8} = \frac{31}{5}$

Vậy $P_{\max} = \frac{31}{5}$ đạt được khi $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=2 \\ a=3 \end{cases}$



CHỦ ĐỀ 4. PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Phương trình bậc nhất: $ax + b = 0$

- Nếu $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
- Nếu $a = 0, b \neq 0$, phương trình vô nghiệm
- Nếu $a = 0, b = 0$, phương trình có vô số nghiệm

2. Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$)
- Nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$), phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$), phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$ (hoặc $x = -\frac{b'}{a}$).

- Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$), phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \text{)}$$

Định lý Vi-ét:

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

3. Một số phương trình quy về phương trình bậc hai

- $af^2(x) + bf(x) + c = 0$

Đặt $t = f(x)$ thì phương trình đã cho trở thành: $at^2 + bt + c = 0$

- $af^2(x) + b|f(x)| + c = 0$

Đặt $t = |f(x)|$ ($t \geq 0$) thì phương trình đã cho trở thành: $at^2 + bt + c = 0$

- $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0$

Đặt $t = \sqrt{f(x)}$ ($t \geq 0$) thì phương trình đã cho trở thành: $at^2 + bt + c = 0$

- $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$) thì phương trình đã cho trở thành: $at^2 + bt + c = 0$

- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$)

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Xét $x \neq 0$. Chia hai vế của phương trình cho x^2 và biến đổi, ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0, \text{ đặt } t = x + \frac{1}{x} \left(|t| \geq 2\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Sau đó biến đổi thành phương trình bậc hai theo ẩn t .

- $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) - e = 0$ với $a+c = b+d = m$

$$\Leftrightarrow [x^2 + (a+c)x + ac][x^2 + (b+d)x + bd] - e = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + mx + ac)(x^2 + mx + bd) - e = 0$$

Đặt $t = x^2 + mx$, biến đổi thành phương trình bậc hai theo ẩn t .

$$\bullet \frac{mx}{ax^2+px+c} + \frac{nx}{ax^2+qx+c} = k \quad (k \neq 0)$$

Với $k = 0$ thì $x \neq 0$. Chia tử và mẫu của vế trái cho x , ta được:

$$\frac{m}{\left(ax + \frac{c}{x}\right) + p} + \frac{n}{\left(ax + \frac{c}{x}\right) + q} = k \quad (k \neq 0)$$

Đặt $t = \left(ax + \frac{c}{x}\right)$, biến đổi thành phương trình bậc hai theo ẩn t .

$$\bullet (x+a)^4 + (x+b)^4 = c$$

Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$, biến đổi thành phương trình bậc hai theo ẩn t .

$$\bullet au^2(x) + bu(x)v(x) + cv^2(x) = 0$$

Đặt $t = \frac{u(x)}{v(x)} \quad (v(x) \neq 0)$, biến đổi thành phương trình bậc hai theo ẩn t .

4. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

- Nâng lên lũy thừa
- Đặt ẩn phụ
- Đưa về phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối
- Sử dụng bất đẳng thức

5. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Khử dấu giá trị tuyệt đối bằng cách:

- Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối: $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$
- Bình phương hai vế của phương trình.



➤ B. BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 11x + 38 = 0$

b) $x^2 + 5x - 3 = 0$

c) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0$

Hướng dẫn giải

a) $x^2 - 11x + 38 = 0$

Ta có: $\Delta = (-11)^2 - 4.38 = -31 < 0$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) $x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4.3 = 13 > 0$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$$

c) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x)^2 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 & (1) \\ x^2 - 5x - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) có hai nghiệm: $x = 3$; $x = 2$

(2) có hai nghiệm: $x = -1$; $x = 6$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x = 3$; $x = 2$; $x = -1$; $x = 6$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)(x+4)(x^2+5x+6) = 24$

b) $x^4 + 17x^2 + 18 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = \frac{27}{4}$

d) $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$

Hướng dẫn giải

a) $(x+1)(x+4)(x^2+5x+6) = 24$

$$\Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 24 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 5$, (*) trở thành: $(t-1)(t+1) - 24 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 5$$

- Với $t = 5$, thì $x^2 + 5x + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$

- Với $t = -5$, thì $x^2 + 5x + 5 = -5 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là: $x = 0$; $x = -5$.

b) $x^4 + 17x^2 + 18 = 0$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$)

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 17t + 18 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

c) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = \frac{27}{4}$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ ($|t| \geq 2$) $\Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t - \frac{35}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{7}{2} \end{cases}$

- Với $t = \frac{5}{2}$, thì $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

- Với $t = -\frac{7}{2}$, thì $x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{-7 - \sqrt{33}}{4} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm:

$x = 2$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{4}$; $x = \frac{-7 - \sqrt{33}}{4}$.

d) $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$

Điều kiện: $x \neq -3$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + 2.3 \frac{x^2}{x+3} = 7$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + 6 \frac{x^2}{x+3} - 7 = 0$

Đặt $t = \frac{x^2}{x+3}$ (1), phương trình trở thành: $t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -7 \end{cases}$

- Với $t = 1$, thì $\frac{x^2}{x+3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$

- Với $t = -7$, thì $\frac{x^2}{x+3} = -7 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 21 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$; $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$

b) $\sqrt{2x^2 - 4x + 1} = x - 1$

c) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = x - 1$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$

$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$

$\Leftrightarrow 2x+1 + x-3 + 2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 16$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 3(6-x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 4(2x^2 - 5x - 3) = 9(36 - 12x + x^2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x^2 - 88x + 336 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x = 4 \text{ hoặc } x = 84 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 84$.

$$b) \sqrt{2x^2 - 4x + 1} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 2$.

c) Điều kiện: $x \geq 1$

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1| = x - 1 \quad (*)$$

- Nếu $x \geq 2$, thì $\sqrt{x-1} \geq 1$, (*) trở thành: $\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = x - 1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = x - 1 \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = 5$$

- Nếu $1 \leq x < 2$, thì $\sqrt{x-1} < 1$, (*) trở thành: $\sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = x - 1$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 5$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33$

b) $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$

c) $8x^2 + \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

a) $2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33 \quad (*)$

Ta có: $2x^2 + 3x + 9 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{63}{16}\right] > 0$ với mọi x

Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 3x + 9} > 0$, thì $t^2 = 2x^2 + 3x + 9$

$$(*) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9 + 2\sqrt{2x^2 + 3x + 9} - 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-6)(t+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -7 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 6$, thì $2x^2 + 3x + 9 = 36 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{9}{2} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 3$; $x = -\frac{9}{2}$.

b) $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1 \quad (*)$

Đặt $u = \sqrt[3]{x+45}$; $v = \sqrt[3]{x-16}$, thì $u^3 - v^3 = x + 45 - x + 16 = 61$

(*) trở thành: $\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^3 = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u-v)(u^2 + uv + v^2) = 61 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u-v)[(u-v)^2 + 3uv] = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ 3uv = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ u(-v) = -20 \end{cases}$$

u và $-v$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 5X - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 5 \\ X = -4 \end{cases}$

Nếu $u = 5$, thì $5 = \sqrt[3]{x+45} \Leftrightarrow x + 45 = 125 \Leftrightarrow x = 80$

Nếu $u = -4$, thì $-4 = \sqrt[3]{x+45} \Leftrightarrow x + 45 = -64 \Leftrightarrow x = -109$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 80$; $x = -108$.

c) $8x^2 + \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$

Điều kiện: $x > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được:

$$8x^2 + \sqrt{\frac{1}{x}} = 8x^2 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} \geq \frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $8x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{4}$.

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $|2x-1|+|2x+1|=4$

b) $|x^2-3x+3|-|x-5|=13$

Hướng dẫn giải

a) $|2x-1|+|2x+1|=4$ (1)

- Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $|2x-1|=2x-1$; $|2x+1|=2x+1$.

(1) trở thành: $2x-1+2x+1=4 \Leftrightarrow 4x=4 \Leftrightarrow x=1$

- Nếu $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ thì $|2x-1|=1-2x$; $|2x+1|=2x+1$.

(1) trở thành: $1-2x+2x+1=4 \Leftrightarrow 2=4$ (vô nghiệm)

- Nếu $x \leq -\frac{1}{2}$ thì $|2x-1|=1-2x$; $|2x+1|=-2x-1$.

(1) trở thành: $1-2x-2x-1=4 \Leftrightarrow -4x=4 \Leftrightarrow x=-1$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=1$; $x=-1$.

b) $|x^2-3x+3|-|x-5|=13$ (2)

Ta có: $x^2-3x+3 = x^2 - 2\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

Do đó: $|x^2-3x+3| = x^2-3x+3$

- Nếu $x \geq 5$, thì $|x-5|=x-5$

(2) trở thành: $x^2-3x+3-(x-5)=13 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ (loại)} \\ x=5 \end{cases}$

- Nếu $x < 5$, thì $|x-5|=5-x$

(2) trở thành: $x^2-3x+3-(5-x)=13 \Leftrightarrow x^2-2x-15=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=5 \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=5$; $x=-3$.

Bài 6. Giải và biện luận phương trình sau:

$$\frac{mx+2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{mx^2+m+4}{x^2-1} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq \pm 1$

(1) $\Leftrightarrow (mx+2)(x+1) - (x-1) = mx^2+m+4$

$\Leftrightarrow mx^2+mx+2x+2x+1 = mx^2+m+4$

$\Leftrightarrow (m+1)x = m+1$ (2)

Nếu $m \neq -1$, thì $x = \frac{m+1}{m+1} = 1$

Nếu $m = -1$, thì $0.x = 0$, phương trình có nghiệm với mọi $x \neq \pm 1$.

Vậy nếu $m \neq -1$, thì phương trình (1) vô nghiệm, nếu $m = -1$ có nghiệm là mọi $x \neq \pm 1$.

Bài 7. Cho phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + (m+2) = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Chứng minh rằng khi $m = 1 - 2\sqrt{3}$ thì phương trình (1) có một nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ [- (m-1)]^2 - (m-1)(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -3 \end{cases}$

b) Khi $m = 1 - 2\sqrt{3}$, thì phương trình (1) trở thành:

$2\sqrt{3}x^2 + 4(1-\sqrt{3})x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$

$\Delta' = [2(1-\sqrt{3})]^2 - 2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3) = (\sqrt{3}-1)^2$

Phương trình (1) có hai nghiệm: $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

Vậy $x_2 = 3x_1$

Bài 8. Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

b) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 4m - 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2m)^2 - 2(4m - 3) \\ &= 4m^2 - 8m + 6 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện phương trình có hai nghiệm, ta nhận $m = 0$.

Bài 9. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$ (1)

Tìm m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn $P = 10x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị đó.

Hướng dẫn giải

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m - 10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m + 10 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } P = 10x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 8x_1 x_2$$

$$= 4(m+1)^2 + 8(2m+10) = 4(m+3)^2 + 48 \geq 48 \text{ với mọi } m$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 48, đạt được khi và chỉ khi $m = -3$.

Bài 10. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\text{b) } x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP.HCM năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy $a + b + c = 2 + 3 - 5 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$.

b) Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$) (1)

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 3t - 4 = 0$ (1)

Phương trình (2) có $a - b + c = 0$ nên có hai nghiệm $t = -1$ (loại) hoặc $t = -\frac{c}{a} = 4$.

Thay vào (1), ta được: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2; x = -2$.

Bài 11. Giải phương trình: $x^2 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 10 = 0$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Quảng Ngãi năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) (4), suy ra: $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow t \in \{4; -3\}$.

Từ (4), ta được: $x \in \left\{ 2 \pm \sqrt{3}; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Bài 12. Giải phương trình $\frac{x}{x^2 + x + 1} + \frac{2x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{18}{15}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq -1$

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x \neq 0$, phương trình đã cho có dạng: $\frac{1}{x + \frac{1}{x} + 1} + \frac{2}{x + \frac{1}{x} + 2} = \frac{18}{15}$ (1)

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ ($|t| \geq 2$), phương trình (1) trở thành: $\frac{1}{t+1} + \frac{2}{t+2} = \frac{18}{15}$ (2)

Giải phương trình (2), ta được: $t = 4$ và $t = -\frac{11}{8}$ (loại)

Với $t = 4$ thì $x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = 2 + \sqrt{3}; x = 2 - \sqrt{3}$

Bài 13. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn

$$\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq -1; x \neq -\frac{2}{3}$ (1)

Vì $x = 0$ không thỏa mãn (1), nên phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2}{3x-1+\frac{2}{x}} - \frac{7}{3x+5+\frac{2}{x}} = 1 \quad (2)$$

Đặt $t = 3x + \frac{2}{x} - 1$, phương trình (2) trở thành: $\frac{2}{t} - \frac{7}{t+6} = 1$

$\Rightarrow t = 1; t = -12$

- Với $t = 1$ thì $3x + \frac{2}{x} - 1 = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$ (vô nghiệm)

- Với $t = -12$ thì $3x + \frac{2}{x} - 1 = -12 \Rightarrow 3x^2 + 11x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-11 + \sqrt{97}}{6}; x = \frac{-11 - \sqrt{97}}{6}$

Bài 14. Giải phương trình $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq -5$

$$x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 + \frac{10x^2}{x+5} = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2 + \frac{10x^2}{x+5} - 11 = 0$$

Đặt $t = \frac{x^2}{x+5}$ (1), phương trình trở thành: $t^2 + 10t - 11 = 0$

$\Rightarrow t_1 = 1; t_2 = -11$

Thay các giá trị của t vào (1), ta được hai nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Bài 15. Giải các phương trình sau:

a) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 6$

b) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) = 3x^2$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán Trần Đại Nghĩa, TP.HCM năm học 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải

a) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 6$

$$\Leftrightarrow (36x^2 + 84x + 49)(3x^2 + 7x + 4) = 6$$

$$\Leftrightarrow [12(3x^2 + 7x + 4) + 1](3x^2 + 7x + 4) = 6$$

Đặt $t = 3x^2 + 7x + 4$ thì phương trình trở thành: $(12t+1)t = 6$

$$\Leftrightarrow 12t^2 + t - 6 = 0$$

Phương trình trên có hai nghiệm $t = -\frac{3}{4}; t = \frac{3}{2}$

Với $t = -\frac{3}{4} \Rightarrow 3x^2 + 7x + 4 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 12x^2 + 28x + 19 = 0$ (vô nghiệm)

Với $t = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x^2 + 7x + 4 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 9x^2 + 21x + 10 = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3}; x = -\frac{2}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\frac{5}{3}; x = -\frac{2}{3}$.

$$b) 4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 17x + 60)(x^2 + 16x + 60) = 3x^2$$

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được:

$$\Leftrightarrow 4\left(x + \frac{60}{x} + 17\right)\left(x + \frac{60}{x} + 16\right) = 3$$

Đặt $t = x + \frac{60}{x} + 16$ thì phương trình trở thành: $4(t+1)t = 3$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 4t - 3 = 0$$

Phương trình trên có hai nghiệm $t = -\frac{3}{2}; t = \frac{1}{2}$

$$\text{Với } t = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 + 35x + 120 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-35 - \sqrt{256}}{4}; x = \frac{-35 + \sqrt{256}}{4}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + 31x + 120 = 0$$

$$\Rightarrow x = -8; x = -\frac{15}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm:

$$x = \frac{-35 - \sqrt{256}}{4}; x = \frac{-35 + \sqrt{256}}{4}; x = -8; x = -\frac{15}{2}$$

Bài 16. Giải phương trình: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHS, Hà Nội năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$ thì phương trình trở thành: $t^2 + 2t - 24 = 0$

Phương trình trên có hai nghiệm $t = 4; t = -6$

$$\text{Với } t = 4 \Rightarrow x^2 + 5x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0; x = -5$$

Với $t = -6 \Rightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0; x = -5$.

Bài 17. Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{3x} + \sqrt{4x} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq 0$

$$\sqrt{x} + \sqrt{3x} + \sqrt{4x} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(3 + \sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Bài 18. Giải các phương trình: $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{5-x} = 1$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

$$\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{5-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow (2+x) + (5-x) + 3\sqrt[3]{2+x}\sqrt[3]{5-x}(\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{5-x}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 7 + 3\sqrt[3]{(2+x)(5-x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-x^2 + 3x + 10} = -2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x + 10 = -8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 6; x = 3 \text{ (thỏa)}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 6; x = 3$.

Bài 19. Giải phương trình: $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq -3; x \leq \frac{3}{2}.$$

$$x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$$

$$\Leftrightarrow 11 - x - 4\sqrt{x+3} - 2\sqrt{3-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3-4\sqrt{x+3}+4) + (3-2x-2\sqrt{3-2x}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)^2 + (\sqrt{3-2x}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}-2=0 \\ \sqrt{3-2x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa)}$$

Vậy phương trình trên có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Bài 20. Giải phương trình: $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } -2 \leq x \leq 2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \text{ (} t \geq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow t = -4 \text{ (loại); } t = 2$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = 2$$

$$\Rightarrow x = 2; x = -2$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2; x = -2$

Bài 21. Giải phương trình $\frac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \sqrt{3x+1} - 1$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán Lê Hồng Phong, TP.HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq -\frac{1}{3}$$

Phương trình đã cho được viết dưới dạng:

$$\frac{3x}{\sqrt{3x+10}} (\sqrt{3x+1} - 1) = (\sqrt{3x+1})^2 - 1^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{\sqrt{3x+1}+1}{\sqrt{3x+10}} = 1 \text{ (*)} \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + 1 = \sqrt{3x+10}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 4 \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $x = 0; x = 5$.

Bài 22. Giải phương trình: $20 - \sqrt{3-2x} = |2x-3|$

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban CD, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } x \leq \frac{2}{3}$$

$$20 - \sqrt{3-2x} = |2x-3|$$

$$\Leftrightarrow 20 - \sqrt{3-2x} = 3-2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-2x} = 17+2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17+2x \geq 0 \\ 3x-2 = (17+2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{17}{2} \\ 2x^2 + 35x + 143 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{13}{2} \text{ (thỏa)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{13}{2}$.

Bài 23. Giải phương trình: $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2 + 7x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$\text{Để thấy } x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$$

Nhân hai vế phương trình đã cho với $\sqrt{(x+5)(x+2)} > 0$, ta được:

$$1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+5} - 1)(\sqrt{x+2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \text{ (loại)} \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = -1$.

Bài 24. Giải các phương trình sau:

$$1) \quad x^2 + x - 2 = |x|$$

$$2) \quad \sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

$$1) \quad x^2 + x - 2 = |x| \quad (1)$$

- Nếu $x \geq 0$, thì phương trình (1) trở thành: $x^2 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2} \text{ (loại vì } x \geq 0)$$

- Nếu $x < 0$, thì phương trình (1) trở thành: $x^2 + 2x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2} \text{ (loại vì } x < 0), x = -1 - \sqrt{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \sqrt{2}; x = -1 - \sqrt{2}$.

$$2) \quad \sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{4x^2 + 5x + 1}, v = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} u^2 - 4v^2 = 9x - 3 \\ u - 2v = 9x - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2 - 4v^2 = u - 2v \Leftrightarrow (u - 2v)(u + 2v - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - 2v = 0 \\ u + 2v - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } u - 2v = 0 \Leftrightarrow u = 2v, \text{ thì } \sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 9x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{Với } u + 2v - 1 = 0 \Leftrightarrow u = 1 - 2v \text{ thì } \sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\text{Mặt khác } 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 1 - \sqrt{3} < 0$$

và $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} \geq 0$ nên vô lí.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$.

Bài 25. Giải phương trình:

$$a) \quad |x^2 + |2x + 1| - 1| = 2 - x^2$$

$$b) \quad \sqrt{2x + 4} - 2\sqrt{2 - x} = \frac{12x - 8}{\sqrt{9x^2 + 16}}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Ban (AB) Chuyên Trần Đại Nghĩa, TP.HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

$$a) \quad |x^2 + |2x + 1| - 1| = 2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 \geq 0 \\ x^2 + |2x + 1| - 1 = 2 - x^2 \\ x^2 + |2x + 1| - 1 = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 \geq 0 \\ x^2 + |2x + 1| - 1 = 2 - x^2 \\ x^2 + |2x + 1| - 1 = x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ |2x+1| = 3-2x^2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 2 \\ |2x+1| = -1 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x^2 \geq 0 \\ x^2 \leq 2 \\ \begin{cases} 2x+1 = 3-2x^2 \\ 2x+1 = 2x^2-3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq \frac{3}{2} \\ \begin{cases} 2x^2+2x-2=0 \\ 2x^2-2x-4=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = -1$; $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$.

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{12x}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) = \sqrt{9x^2+16} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow 4(2x+4) + 16(2-x) + 16\sqrt{8-2x^2} = 9x^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{8-2x^2} - 8x = 9x^2 - 32$$

$$\Leftrightarrow 8(2\sqrt{8-2x^2} - x) = 9x^2 - 32$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(32-9x^2)}{2\sqrt{8-2x^2} + x} = 9x^2 - 32$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 32 = 0 \\ 2\sqrt{8-2x^2} + x = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (loại)} \\ x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ 2\sqrt{8-2x^2} = -8-x \text{ (vô nghiệm vì } -2 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \frac{2}{3}$; $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Bài 26. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán, ĐHSPTP.HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt{2x^2+5x+12}$ ($u \geq 0$); $v = \sqrt{2x^2+3x+2}$ ($v \geq 0$)

Ta có: $u + v = x + 5$

$$\text{Mặt khác: } u^2 - v^2 = 2(u+v) \Leftrightarrow (u+v)(u-v-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=0 \\ u-v-2=0 \end{cases}$$

- Với $u + v = 0$, thì $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x+12} = \sqrt{2x^2+3x+2} = 0 \text{ (vì } u \geq 0; v \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x+12 = 2x^2+3x+2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Với $u + v - 2 = 0$, thì $\sqrt{2x^2+5x+12} - \sqrt{2x^2+3x+2} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x+12} = \sqrt{2x^2+3x+2} + 2 \text{ (vì } u \geq 0; v \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x+12 = 2x^2+3x+2 + 4 + 4\sqrt{2x^2+3x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+3x+2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{2} \geq 0 \\ 2x^2 + 3x + 2 = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 2x^2 + 3x + 2 = \frac{x^2 + 6x + 9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 7x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = -1$; $x = \frac{1}{7}$.

Bài 27. Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 2 = 0$ (1)

- a) Chứng minh rằng (1) không thể có 2 nghiệm đều âm.
b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1). Chứng minh rằng biểu thức $\frac{(x_1^2 - 2x_1 + 2)(x_2^2 - 2x_2 + 2)}{x_1^2 + x_2^2}$ không phụ thuộc vào giá trị m .

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán - Tin, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

- a) Giả sử (1) có hai nghiệm phân biệt đều âm.

$$\text{Khi đó, ta có: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8 \geq 0 \\ m < 0 \\ 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8 \geq 0 \\ m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = \emptyset$$

Vậy (1) không thể có 2 nghiệm đều âm.

b) Ta có:
$$\frac{(x_1^2 - 2x_1 + 2)(x_2^2 - 2x_2 + 2)}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$= \frac{x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_2 + 2x_1^2 - 2x_1 x_2^2 + 4x_1 x_2 - 4x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 4}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$= \frac{(x_1 x_2)^2 - 2x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2(x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) + 4}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}$$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = m$; $x_1 x_2 = 2m - 2$

Do đó:

$$\frac{(x_1^2 - 2x_1 + 2)(x_2^2 - 2x_2 + 2)}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{(2m - 2)^2 - 2(2m - 2)m + 2m^2 - 4m + 4}{m^2 - 4m + 4}$$

$$= \frac{2m^2 - 8m + 8}{(m - 2)^2} = \frac{2(m - 2)^2}{(m - 2)^2} = 2 \quad (m \neq 2)$$

Vậy biểu thức $\frac{(x_1^2 - 2x_1 + 2)(x_2^2 - 2x_2 + 2)}{x_1^2 + x_2^2}$ không phụ thuộc vào giá trị của m .

Bài 28. Giải phương trình: $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} + \sqrt{-2x^2 + 8x - 5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP.HCM năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 2} + \sqrt{-2x^2 + 8x - 5} = \sqrt{-(x - 2)^2 + 2} + \sqrt{-(x - 2)^2 + 3} \leq \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 29. Giải và biện luận theo tham số m phương trình sau:

$$\frac{x + 2006}{x + 2006} = \frac{x - 2006}{x - 2006 + m}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán, ĐHSP TP.HCM, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq -2006$; $x \neq 2006 - m$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x + 2006)(x - 2006 + m) = (x^2 - 2006^2)(x + 2006)$$

$$\Leftrightarrow 2mx = 0$$

Với $m = 0$ thì phương trình đã cho có vô số nghiệm khác ± 2006

Với $m \neq 0$ và $m \neq 2006$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$

Bài 30. Giải phương trình: $(2x + 7)\sqrt{2x + 7} = x^2 + 9x + 7$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG HÀ NỘI năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \geq -\frac{7}{2}$

$$(2x+7)\sqrt{2x+7} = x^2 + 9x + 7$$

$$\Leftrightarrow (2x+7) - (2x+7)\sqrt{2x+7} + x(x+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+7} - x)(\sqrt{2x+7} - x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+7} = x \\ \sqrt{2x+7} = x+7 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1 + 2\sqrt{2}$.

Bài 31. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP.HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

a) Vì $\Delta = 4m^2 + 4 > 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Từ $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$ (1)

Theo định lý Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = -1$

Thay vào (1), ta được: $4m^2 + 3 = 7 \Rightarrow m = \pm 1$

Bài 32. Tìm tất cả các số nguyên $m \geq 0$ sao cho phương trình:

$$x^2 - (m-1)x + m = 0 \text{ có các nghiệm đều dương}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán - Tin, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - (m-1)x + m = 0$

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = (m-1)^2 & (1) \\ x_1x_2 = m & (2) \end{cases}$

Vì $m \geq 0$ nên $x_1x_2 \geq 0$.

Mặt khác $x_1 + x_2 = (m-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 0$ và $x_2 \geq 0$

- Nếu $m = 0$ thì $x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$ hoặc $x_1 = 1, x_2 = 0$

- Nếu $m = 1$ thì $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ vô lý ($x_1x_2 = 1$)

- Nếu $m \geq 2$ thì ta có $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Mà $x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}$ nên $x_1 \geq 0$ và $x_2 \geq 1$

Do đó: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \geq 0$

Thay (1) và (2) vào bất phương trình trên, ta được: $m - (m-1)^2 + 1 \geq 0$

$m(3-m) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3$

Do m nguyên, $m \geq 2$ nên $m = 2$ hoặc $m = 3$

+ Với $m = 2$, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = 2 \end{cases}$ (vô nghiệm)

+ Với $m = 3$, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$

Hệ trên có hai nghiệm $(x_1; x_2)$ là $(1; 3)$ và $(3; 1)$.

Vậy với $m = 0, m = 3$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm đều dương.

Bài 33. Cho phương trình $\frac{x^2 + mx - 2m^2}{x + 2m} = (2m-1)x + 6$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban AB, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

a) Khi $m = -1$ thì phương trình (1) trở thành: $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = -3x + 6$ (2)

với $x \neq -2$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = (-3x + 6)(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = -3x^2 + 6x + 6x - 12$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 13x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (loại)} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

b) Điều kiện: $x \neq -2m$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2mx - mx - 2m^2}{x + 2m} = (2m - 1)x + 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x + 2m) - m(x + 2m)}{x + 2m} = (2m - 1)x + 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x + 2m)(x - m)}{x + 2m} = (2m - 1)x + 6 \\ &\Leftrightarrow 2(1 - m)x = m + 6 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ có nghiệm } &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{m + 6}{2(m - 1)} \neq -2m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 - 5m - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m - 2)(4m + 3) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \notin \left\{1; 2; -\frac{3}{4}\right\}$.

Bài 34. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $mx^2 - (m + 3)x + 2m + 1 = 0$

a) Tính tổng S và tích P của hai nghiệm theo m. Biết $S - P = 1$, tính m, x_1, x_2 .

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa S và P độc lập với nhau.

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban CD, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } S &= \frac{m + 3}{m}; P = \frac{2m + 1}{m} \\ \Rightarrow S - P &= \frac{-m + 2}{m} = 1 \Rightarrow m = 1 \end{aligned}$$

Với $m = 1$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Khi đó: $(x_1; x_2) \in \{(1; 3); (3; 1)\}$

$$\text{b) Ta có: } \frac{S - 1}{3} = \frac{1}{m} = P - 2 \Rightarrow S - 3P + 5 = 0$$

Bài 35. Cho phương trình bậc hai: $x^2 + px + q = 0$ (trong đó p, q là các tham số) (1)

1) Giải phương trình (1) với $p = 1, q = -2$.

2) Tìm p, q và các nghiệm của (1), biết rằng khi thêm 1 vào mỗi nghiệm của (1) thì chúng trở thành nghiệm của phương trình $x^2 - p^2x + pq = 0$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Vĩnh Phúc, năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

1) Với $p = 1, q = -2$ thì phương trình (1), có dạng $x^2 + x - 2 = 0$
 $\Rightarrow x = 1$ và $x = 2$

2) Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là $p^2 \geq 4q$ (2)

Gọi u, v là hai nghiệm của phương trình (1), ta có: $\begin{cases} u + v = -p \\ uv = q \end{cases} \quad (3)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u + v + 2 = p^2 \\ (u + 1)(v + 1) = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v + 2 = p^2 \\ u + v + uv + 1 = pq \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Từ (2) và (3), ta được: } \begin{cases} -p + 2 = p^2 \\ -p + q + 1 = pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = q \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} p = -2 \\ q = -1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (2), ta có:

- Với $p = 1, q \leq \frac{1}{4}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm: $-1 + \sqrt{1 - 4q};$

$$-1 - \sqrt{1 - 4q}$$

- Với $p = 2, q = -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm: $1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}$

Bài 36. Cho phương trình ẩn x: $x^4 - 2(2m + 1)x^2 + 4m^2 = 0$ (1)

1) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

2) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 17$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), thì (1) trở thành: $t^2 - 2(2m + 1)t + 4m^2 = 0$ (2)

1) Với $m = 2$, phương trình (2) trở thành: $t^2 - 10t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 2; t = 8$

- Với $t = 2$, thì $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

- Với $t = 8$, thì $x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Vậy với $m = 2$, phương trình (1) có bốn nghiệm: $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}$.

2) Để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (2)

$$\text{phải có hai nghiệm phân biệt } t_1, t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Giả sử $x_1^2 = x_2^2 = t_1$ và $x_3^2 = x_4^2 = t_2$, khi đó ta có:

$$17 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(t_1^2 + t_2^2) = 2[4(2m+1)^2 - 8m^2]$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 + 32m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{9}{4} \text{ (loại)} \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{1}{4}$.

Bài 37. Cho phương trình: $x^2 + (m^2 + 1)x + m = 2$ với m là tham số.

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , phương trình có hai nghiệm phân biệt.

2. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình, tìm tất cả các giá trị m sao cho $\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^2 + (m^2 + 1)x + m = 2$ (1)

1. Ta có: $\Delta = (m^2 + 1)^2 - 4m + 8 = 2(m - 1)^2 + m^4 + 7 > 0 \forall m$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

2. Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m^2 - 1 \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$

$$\text{Do đó: } \frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{x_1^2x_2^2 + 55}{x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - 4x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{x_1^2x_2^2 + 55}{x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m^2 + 1)^2 + m^2 + 1 - 4(m - 2)}{m - 2} = \frac{(m - 2)^2 + 55}{m - 2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 2(m^2 + 1)^2 + m^2 + 1 - 4(m - 2) - (m - 2)^2 - 55 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow m^4 + 2m^2 - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \text{ (loại)}; m = -2$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = -2$.



CHỦ ĐỀ 5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số bằng phương pháp thế

- Từ một phương trình của hệ, ta biểu diễn ẩn này (chẳng hạn x) theo ẩn kia.
- Thay giá trị của x vào phương trình còn lại, ta tìm được y .
- Thay giá trị y vào biểu thức của x ta tìm được giá trị của x .

2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số bằng phương pháp cộng đại số

- Nhân hai vế của phương trình với một số thích hợp (nếu cần) để cho các hệ số của một ẩn bằng nhau hoặc đối nhau.

- Sử dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới trong đó có một phương trình một ẩn.

- Giải hệ phương trình vừa thu được.

3. Hệ phương trình hai ẩn gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai

- Từ phương trình bậc nhất, ta biểu diễn y theo x rồi thế vào phương trình thứ hai.

- Giải phương trình thứ hai theo ẩn x .

- Thay giá trị x vừa tìm được vào biểu thức của y để tìm y .

4. Hệ phương trình gồm hai phương trình bậc hai hai ẩn, trong đó có một phương trình đưa được về phương trình tích

- Biến đổi phương trình có thể đưa về phương trình tích.

- Tách thành hai hệ về hệ ở phần 3) rồi giải.

5. Hệ phương trình đối xứng loại 1

Một hệ hai phương trình bậc hai ẩn x, y được gọi là đối xứng loại 1, nếu mỗi phương trình của hệ không đổi khi thay x bởi y và y bởi x .

- Đặt $u = x + y$; $v = xy$, ta được một hệ phương trình đối với u và v .

- Giải hệ phương trình đối với u và v .

- Suy ra x, y là nghiệm của phương trình (ẩn X): $X^2 - uX + v = 0$, từ đó tìm được nghiệm x, y của hệ.

6. Hệ phương trình đối xứng loại 2

Một hệ hai phương trình bậc hai, hai ẩn x, y được gọi là đối xứng loại 2, nếu thay thế đồng thời x bởi y và y bởi x thì phương trình thứ nhất biến thành phương trình thứ hai và ngược lại phương trình thứ hai biến thành phương trình thứ nhất.

- Giữ lại một phương trình, phương trình thứ hai có được bằng cách trừ theo từng vế hai phương trình đã cho để được phương trình tích.

- Giải hệ phương trình vừa được như ở phần 4.

Nếu một hệ phương trình đối xứng (loại 1 và loại 2) có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì cũng có nghiệm $(y_0; x_0)$.

7. Hệ phương trình có vế trái đẳng cấp đối với x, y và vế trái không chứa x, y

Một hệ hai phương trình hai ẩn x, y mà vế trái là các biểu thức đẳng cấp đối với x, y và vế phải không chứa x, y được gọi là hệ phương trình đẳng cấp đối với x, y .

- Tìm nghiệm thỏa $x = 0$ (hoặc $y = 0$).

- Với $x \neq 0$; $y \neq 0$, ta đặt $y = tx$ hoặc $x = ty$

- Khử y^2 (hay x^2) rồi tính y theo x (hoặc x theo y) và tiếp tục thay vào một trong hai phương trình còn lại, ta tìm được t , rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Chú ý: Ngoài các dạng hệ phương trình mẫu mực ở trên còn có các dạng khác, mà ta linh hoạt đặt ẩn phụ để đưa về dạng mẫu mực.



> B. BÀI TẬP

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x - 6y = 17 \\ 5x + y = 23 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 2 = 0 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{4}{x+2y} - \frac{1}{x-2y} = 1 \\ \frac{20}{x+2y} + \frac{3}{x-2y} = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$a) \begin{cases} x - 6y = 17 \\ 5x + y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 + 6y \\ 5(17 + 6y) + y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y + 17 \\ 31y = -62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(5; -2)$.

$$b) \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 2 = 0 \\ 5x - y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}(5x - 11) = 2 \\ y = 5x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = 57 \\ y = 5x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(3; 4)$.

$$c) \text{ Đặt } \frac{1}{x+2y} = u; \frac{1}{x-2y} = v, \text{ hệ phương trình đã cho trở thành:}$$

$$\begin{cases} 4u - v = 1 \\ 20u + 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4u - 1 \\ 20u + 3(4u - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4u - 1 \\ 20u + 12u - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4u - 1 \\ 32u = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{8} \\ v = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{x+2y} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{x-2y} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 8 \\ -x+2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $\left(3; \frac{5}{2}\right)$.

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 6(x+y) = 8 + 2x - 3y \\ 5(x-y) = 5 + 3x + 2y \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 25y = 15 \\ 15x + 6y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = 12 \\ 15x + 6y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{19} \\ y = \frac{12}{19} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $\left(-\frac{1}{19}; \frac{12}{19}\right)$.

$$\text{b) } \begin{cases} 6(x+y) = 8 + 2x - 3y \\ 5(x-y) = 5 + 3x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 9y = 8 \\ -8x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 10y = 16 \\ -8x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21y = 21 \\ 6(x+y) = 8 + 2x - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + 2xy - y^2 = 7 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + 2xy - y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + 2x(2x - 1) - (2x - 1)^2 = 7 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 2x - 4x^2 + 4x - 1 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=2 \end{cases}$$

Với $x = -4$, thì $y = 2(-4) - 1 = -9$.

Với $x = 2$, thì $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(-4; -9); (2; 3)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy - 2x - y + 2 = 0 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 15 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} xy - 2x - y + 2 = 0 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 15 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow x(y-2) - (y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-2) = 0$$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 15 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1=0 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 15 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} y-2=0 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 15 \end{cases} \quad (II) \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2 - 5y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \\ y=-2 \end{cases}$$

Hệ phương trình (I) có 2 nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 7); (1; -2)$.

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x^2 - 10x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ x = 11 \\ y = 2 \end{cases}$$

Hệ phương trình (II) có 2 nghiệm $(x; y)$ là: $(-1; 2); (11; 2)$

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 7); (1; -2); (-1; 2); (11; 2)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y) + xy = 7 \\ (x + y)^2 - xy = 13 \end{cases}$$

Đặt $u = x + y; v = xy$, hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 - v = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 - u \\ u^2 + u - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 - u \\ u = 4 \\ u = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 3 \\ u = -5 \\ v = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 12 \end{cases} & (II) \end{cases}$$

Từ (I), ta thấy x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 4X + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 3 \end{cases}$$

Hệ (I) có hai nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 3); (3; 1)$.

Từ (II), ta thấy x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 + 5X + 12 = 0$ (vô nghiệm)

Hệ (II) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 3); (3; 1)$.

Bài 6.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 152 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19(x + y) = 152 \\ (x + y)^2 - 3xy = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 64 - 3xy = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

Ta thấy x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 8X + 15 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 5 \\ X = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là: $(5; 3); (3; 5)$.

Bài 7.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2(x^2 - y^2) - 3(x - y) = y^2 - x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 & (1) \\ 3(x - y)(x + y - 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \text{ (vô nghiệm)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 1); (1; 2)$.

Bài 8.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases}$$

Hướng dẫn giảiĐể thấy với $x = 0, y = 0$ hệ đã cho đều vô nghiệmĐặt $x = ty$ ($t \neq 0$), hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} y^2(1-t+t^2) = 21 \\ y^2(1-2t) = -15 \end{cases}$$

Do $t = \frac{1}{2}$ hệ trên vô nghiệm, suy ra: $\frac{1-t+t^2}{1-2t} = \frac{7}{-5}$

$$\Leftrightarrow -5(1-t+t^2) = 7(1-2t)$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 19t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Với $t = 3$, thì từ phương trình $y^2(1-2t) = -15$ trở thành:
 $-5y^2 = -15 \Leftrightarrow y^2 = 3$ Phương trình trên có hai nghiệm $y_1 = \sqrt{3}$ và $y_2 = -\sqrt{3}$. Khi đó, ta có:

$$x_1 = 4\sqrt{3} \text{ và } x_2 = -4\sqrt{3}.$$

Với $t = \frac{4}{5}$, thì từ phương trình $y^2(1-2t) = -15$ trở thành:

$$-\frac{3}{5}y^2 = -15 \Leftrightarrow y^2 = 25$$

Phương trình trên có hai nghiệm $y_1 = 5$ và $y_2 = -5$. Khi đó, ta có:

$$x_1 = 4 \text{ và } x_2 = -4.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm $(x; y)$ là:

$$(\sqrt{3}; 3\sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -3\sqrt{3}); (4; 5); (-4; 5)$$

$$\text{Bài 9. Giải hệ phương trình } \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP.HCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 6y = -3 \\ 10x + 6y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 17 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(-11; 17)$.**Bài 10.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 3 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP.HCM năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giảiĐiều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$ Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$, hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} 3u - 4v = 2 \\ 4u + 5v = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

Với $u = 2$, thì $x = \frac{1}{2}$ Với $v = 1$, thì $y = 1$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

$$\text{Bài 11. Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán, ĐH Khoa học Huế năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (x+y)^2 - 2xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0); (0; 1)$.

Bài 12. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = m \end{cases}$$

- a) Giải hệ phương trình khi $m = 24$.
b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP.HCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

- a) Khi $m = 24$, hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = 24 \end{cases}$$

Đặt $u = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$

$v = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \geq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=11 \\ uv=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=8 \end{cases} \vee \begin{cases} u=8 \\ v=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 4 \\ (y+1)^2 = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} (x+1)^2 = 9 \\ (y+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 - 1 \\ y = \pm 3 - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 3 - 1 \\ y = \pm 2 - 1 \end{cases}$$

Vậy khi $m = 24$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là:

$(1; 2); (1; -4); (-3; 2); (-3; -4); (2; 1); (2; -3); (-4; 1);$ và $(-4; -3)$

- b) Đặt $u = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$

$v = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \geq 0$

Hệ phương trình đã cho trở thành:
$$\begin{cases} u+v=13 \\ (u-1)(v-1)=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=13 \\ uv-(u+v)+1=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=13 \\ uv=m+12 \end{cases}$$

Do đó u, v là nghiệm của phương trình $x^2 - 13x + m + 12 = 0$ (*)

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (*) có 2 nghiệm $x_1, x_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 121 - 4m \geq 0 \\ m + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{121}{4} \\ m \geq -12 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq \frac{121}{4}$$

Bài 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán Lê Hồng Phong, TP.HCM năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x - y) = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} & (2) \end{cases}$$

Giải hệ (1), ta được nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Xét hệ (2), từ phương trình cuối $x + y = -1 \Rightarrow y = -1 - x$

Thay vào phương trình đầu, ta được $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$ hệ (2) có hai nghiệm:

$(x; y) = (1; -2), (-2; 1)$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right); (1; -2); (-2; 1)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 8xy = 0 \\ \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Vì $(x^2 + 1)(y^2 + 1) > 0$ nên từ phương trình thứ nhất của hệ, suy ra $xy \neq 0$

$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)+8xy=0 \\ \frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}=-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)+8=0 \\ \frac{1}{x+\frac{1}{8}}+\frac{1}{y+\frac{1}{8}}=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Đặt $u = x + \frac{1}{x}$; $v = y + \frac{1}{y}$ (1)

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} uv = -8 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{4} \end{cases}$ (2)

Giải hệ (2), ta được: $(u; v) = (4; -2)$ và $(u; v) = (-2; 4)$

Thay các giá trị của u và v vào (1), ta được bốn nghiệm của hệ phương trình là: $(2 + \sqrt{3}; -1)$; $(2 - \sqrt{3}; -1)$; $(-1; 2 + \sqrt{3})$; $(-1; 2 - \sqrt{3})$

Bài 15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Ngoại ngữ, ĐH Hà Nội năm học 2004 - 2005)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)(2x-y+1)=0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + (2x+1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ 5x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là:

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right); \left(\frac{1}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right); (0; 1); \left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$$

Bài 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} = 3x\sqrt{2x-1} \\ y\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} = 3y\sqrt{2y-1} \end{cases}$

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban AB, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2007 - 2008)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$; $y \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} = 3x\sqrt{2x-1} \\ y\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} = 3y\sqrt{2y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) = 3x\sqrt{2x-1} \\ \sqrt{xy}(\sqrt{y} + 2\sqrt{x}) = 3y\sqrt{2y-1} \end{cases}$$

Nếu $x > y$ thì $3x\sqrt{2x-1} > 3y\sqrt{2y-1}$

$$\Rightarrow \sqrt{xy}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) > \sqrt{xy}(\sqrt{y} + 2\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2\sqrt{y} > \sqrt{y} + 2\sqrt{x}$$

Suy ra $x < y$ (vô lí).

Vậy không xảy ra $x > y$.

Làm tương tự cũng không xảy ra trường hợp $x < y$.

Do đó $x = y$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Bài 17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^4 + 13 = 6x^2y^2 + m \\ xy(x^2 + y^2) = m \end{cases}$

1) Giải hệ phương trình khi $m = -10$.

2) Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin Hà Nội Chu Văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

$$1) \begin{cases} (x+y)^4 + 13 = 6x^2y^2 + m \\ xy(x^2 + y^2) = m \end{cases}$$

Đặt $u = (x^2 + y^2)$, $v = xy$

Với $m = -10$, hệ đã cho có dạng $\begin{cases} u^2 + 6v^2 + 23 = 0 & (1) \\ uv - 2v^2 = -10 & (2) \end{cases}$

Từ (2), ta có: $u = \frac{2v^2 - 10}{v}$, thay vào (1) ta được: $2v^4 + 17v^2 - 100 = 0$ (3)

Từ (3), ta được $v = \pm 2$

Từ (2), ta thấy $v < 0$ nên chọn $v = -2$

Với $v = -2$ thì $u = 1 \Rightarrow x + y = 1$ hoặc $x + y = -1$

Giải các hệ $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$, ta được các nghiệm là:

$(-1; 2); (2; -1); (1; -2)$ và $(-2; 1)$

2) Nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ thì $(-x; -y)$ cũng là nghiệm.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y = 0$

Thay $x = y = 0$ vào hệ ta thấy không thỏa.

Vậy không có giá trị nào của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Đặt $u = x + y$; $v = xy$

Hệ đã cho có dạng $\begin{cases} u + v = 3 & (1) \\ u^2 - 2v = 2 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow v = 3 - u$ (3)

Thay (3) vào (2), ta được: $u^2 - 2(3 - u) = 2$

$\Leftrightarrow u^2 + 2u - 8 = 0$

$\Rightarrow u = 2$; $u = -4$

Với $u = 2 \Rightarrow v = 1$

Với $u = -4 \Rightarrow v = 7$

Hệ trên có nghiệm $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = -4 \\ v = 7 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$

Với $\begin{cases} u = -4 \\ v = 7 \end{cases} \Rightarrow$ Không tồn tại

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (1; 1)$

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y \end{cases}$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

$\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 & (1) \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 & (1) \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow 4x^4 + y^4 = (4x + y)(x^3 + y^3 - xy^2)$

$\Leftrightarrow xy(3y^2 - 4xy + x^2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3y^2 - 4xy + x^2 = 0 (*) \end{cases}$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$

Với $y = 0 \Rightarrow x = 1$

Giải (*):

Với $x \neq 0$, chia hai vế (*) cho x^2 , ta được: $3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0$

Đặt $t = \frac{y}{x}$, phương trình trở thành: $3t^2 - 4t + 1 = 0$

$$\Rightarrow t = 1; t = \frac{1}{3}$$

Với $t = 1 \Rightarrow \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow x = y$ thay vào (1), ta tìm được $x = y = 1$

Với $t = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3y$ thay vào (1), ta tìm được $x = \frac{3}{\sqrt[3]{25}}; y = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là

$$(x; y) = (1; 1); \left(\frac{3}{\sqrt[3]{25}}; \frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)$$

Bài 20. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{xy + 2} \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán - Tin, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{xy + 2} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), ta có: } x^2 + y^2 = x^2 y^2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), ta có: } x^2 - 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + (y^2 - 1) = xy + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 y^2 - (x^2 + y^2) + 1} - xy - 4 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4), suy ra: } x^2 y^2 - xy - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy - 2)(xy + 1) = 0$$

- Nếu $xy - 2 = 0 \Leftrightarrow xy = 2$

$$\text{Ta có: } (x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 y^2 = (x^2 y^2)^2 - 4x^2 y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

- Nếu $xy + 1 = 0$

$$\text{Ta có: } (x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 y^2 = -3 \text{ (vô lý)}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

Bài 21. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{1}{\sqrt{y}} = 2 \\ y + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán - Tin, ĐH Vinh năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0, y > 0$

Đặt $a = \sqrt{x} (a > 0), b = \sqrt{y} (b > 0)$

$$\text{Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} a^2 b + 1 = 2b \\ ab^2 + 1 = 2a \end{cases} \Rightarrow ab(a - b) = -2(a - b)$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0 \text{ (vì } a, b > 0)$$

$$\text{Thay vào hệ trên, ta được hệ } \begin{cases} a = b > 0 \\ a^3 - 2a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải ra ta được: } a = b = 1, a = b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Với $a = b = 1$ thì $x = y = 1$

$$\text{Với } a = b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ thì } x = y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Bài 22. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy(x + y) = 2 \\ x^3 + y^3 + x + y = 4 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2007 - 2008)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} xy(x+y)=2 & (1) \\ x^3+y^3+x+y=4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) + x + y = 4$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 + (x+y) - 10 = 0$$

$$\text{Đặt } u = x + y \Leftrightarrow u^3 + u - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u-2)(u^2+2u+5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u-2)=0 \Rightarrow u=2 \\ (u^2+2u+5)=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với (1), ta có hệ } \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ 4xy + x + 2y = 7 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 & (1) \\ 4xy + x + 2y = 7 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (1) + (2), ta được: } (x+2y)^2 + (x+2y) = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=-4 \end{cases}$$

Ta được hai hệ phương trình sau:

$$(I) \begin{cases} x+2y=3 \\ 4xy+x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} x+2y=-4 \\ 4xy+x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-4 \\ 4xy=1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Bài 24. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán – Tin Lam Sơn, Thanh Hóa năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$.

$$\text{Đặt } u = \sqrt{xy} \geq 0$$

Khi đó ta có,

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \left[(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} \right]^2 - 2xy = (16 - 2u)^2 - 2u^2$$

$$= 2u^2 - 64u + 256$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + 2\sqrt{xy} = \sqrt{2u^2 - 64u + 256} + u\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u^2 - 32u + 128} = 8 - u$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - u \geq 0 \\ u - 32u + 128 = 64 - 16u + u^2 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(4; 4)$.

Bài 25. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{9-y} = m \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{9-x} = m \end{cases}$$
 với m là tham số

1) Giải hệ phương trình khi $m = 2\sqrt{5}$.

2) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 9; -1 \leq y \leq 9$.

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{9-y} = m & (1) \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{9-x} = m & (2) \end{cases}$$

$$\sqrt{y+1} + \sqrt{9-x} = m \quad (2)$$

$$\text{Lấy (1) - (2), ta được: } \sqrt{x+1} + \sqrt{9-y} = \sqrt{y+1} + \sqrt{9-x}$$

- Nếu $x > y$, thì $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$ và $\sqrt{9-y} > \sqrt{9-x}$.

Do đó: $\sqrt{x+1} + \sqrt{9-y} > \sqrt{y+1} + \sqrt{9-x}$ (vô lí)

- Nếu $x < y$, tương tự ta có: $\sqrt{x+1} + \sqrt{9-y} < \sqrt{y+1} + \sqrt{9-x}$ (vô lí)

Vậy $x = y$, thay vào (1) ta được: $\sqrt{x+1} + \sqrt{9-x} = m$ (3)

1) Với $m = 2\sqrt{5}$, thì (3) trở thành: $\sqrt{x+1} + \sqrt{9-x} = 2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow x+1+9-x+2\sqrt{(x+1)(9-x)} = 20$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(9-x) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Vậy với $m = 2\sqrt{5}$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(4; 4)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Đặt $X = \frac{1}{x}, Y = \frac{1}{y}, Z = \frac{1}{z}$

Hệ phương trình đã cho trở thành:
$$\begin{cases} X+Y+Z=2 \\ 2XY-Z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=2-Z \\ XY=\frac{4+Z^2}{2} \end{cases}$$

Do đó X, Y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - (2-t)t + \frac{4+Z^2}{2} = 0$ (1)

(1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta = (2-Z)^2 - 2(4+Z^2) \geq 0 \Leftrightarrow (Z+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow Z = -2$$

Với $Z = -2$, ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} X+Y=4 \\ XY=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=2 \\ Y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ là: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Bài 27. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = y \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban AB, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 \\ 2x^2 - 2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = 2x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 & (1) \\ y^2 = 2x^2 - 24 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), ta được: $(x^2 + 2x^2 - 24)(x^2 - 2x^2 + 24) = 144$

$$\Leftrightarrow x^4 - 32x^2 + 256 = 16 \Leftrightarrow (x^2 - 16)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 20 \\ x^2 = 12 \end{cases}$$

Với $x^2 = 20 \Rightarrow y^2 = 16$

Với $x^2 = 12 \Rightarrow y^2 = 0$

Thử lại ta nhận các nghiệm sau:

$$(2\sqrt{5}; 4); (-2\sqrt{5}; 4); (2\sqrt{5}; -4); (-2\sqrt{5}; -4); (2\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; 0)$$

Bài 28. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 12 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 28 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán, Năng khiếu Hàn Thuyên, Bắc Ninh năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x, y \geq 0$.

Đặt $u = \sqrt{x} (u \geq 0); v = \sqrt{y} (v \geq 0)$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:
$$\begin{cases} uv(u+v) = 12 \\ u^3 + v^3 = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v)=12 \\ (u+v)^3-3uv(u+v)=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=27 \\ x=27 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 27); (27; 1)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải

- Với $x = 0$ thì $y = 0$, hệ có một nghiệm $(x; y)$ là: $(0; 0)$

- Với $x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 \\ y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \left(\frac{x^2}{x^3 + 2} \right)^2 - 2 \left(\frac{x^2}{x^3 + 2} \right) + 3x^2 = 0 \\ y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{x^3 + 2} - \frac{2}{x^3 + 2} + 3 = 0 \\ y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2(x^3 + 2) + 3(x^3 + 2)^3 = 0 \\ y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^6 + 11x^3 + 8 = 0 \\ y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^3 + 1) + (3x^3 + 8) = 0 \\ y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 0 \\ 3x^3 + 8 = 0 \\ y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt[3]{-\frac{8}{3}} \\ y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ x = -\sqrt[3]{\frac{8}{3}} \\ y = -\frac{6}{\sqrt[3]{9}} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(0; 0); (-1; 1)$

$$\left(-\sqrt[3]{\frac{8}{3}}; -\frac{6}{\sqrt[3]{9}} \right).$$

Bài 30. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3xy = 2(x + y) \\ 5yz = 6(y + z) \\ 4zx = 3(z + x) \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Nếu $xyz = 0$, thì từ hệ phương trình suy ra $x = y = z = 0$

Với $xyz \neq 0$, thì từ hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{6} \\ \frac{z+x}{zx} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \quad (1) \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} \quad (2) \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \quad (3) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3), ta được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6}$

$$\Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y; z)$ là: $(0; 0; 0); (1; 2; 3)$

Bài 31. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xz = x + 4 \\ 2y^2 = 7xz - 3x - 14 \\ x^2 + z^2 = 35 - y^2 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHSPT, Hà Nội năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} xz = x + 4 \quad (1) \\ 2y^2 = 7xz - 3x - 14 \quad (2) \\ x^2 + z^2 = 35 - y^2 \quad (3) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2), ta được: $y^2 = 2x + 7$ (4)

Thế (4) vào (3), ta được: $x^2 + z^2 = 35 - (2x - 7)$

Kết hợp với (1), suy ra: $x^2 + z^2 = 36 - 2xz$

$$\Rightarrow (x+z)^2 = 36 \Leftrightarrow x+z = \pm 6$$

- Trường hợp $x+z=6$, ta có: $z=6-x$ (5)

Thế (5) vào (1), ta được $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x=1; x=4$

Với $x=1$, thay vào (5) và (4), ta được: $z=5$ và $y=\pm 3$

Với $x=4$, ta được $z=2$ và $y=\pm\sqrt{15}$

- Trường hợp $x+z=-6$, ta có: $x(-6-x)=x+4$

$$\Leftrightarrow x^2 + 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Với $x = \frac{-7 - \sqrt{33}}{2}$ thay vào (4), ta thấy vô nghiệm

Với $x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{2}$ thay vào (1), ta được: $z = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}$, thay z và x vào (3), ta được $y = \pm\sqrt[4]{33}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 6 nghiệm $(x; y; z)$: $(1; 3; 5);$

$$(1; -3; 5); \left(\frac{-7 + \sqrt{33}}{2}; \sqrt[4]{33}; \frac{-5 - \sqrt{33}}{2} \right); \left(\frac{-7 + \sqrt{33}}{2}; -\sqrt[4]{33}; \frac{-5 - \sqrt{33}}{2} \right);$$

$$(4; \sqrt{15}; 2); (4; -\sqrt{15}; 2).$$

Bài 32. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{4z-1} \\ y+z=\sqrt{4x-1} \\ z+x=\sqrt{4y-1} \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHS, Hà Nội năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{4z-1} \\ y+z=\sqrt{4x-1} \\ z+x=\sqrt{4y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)=2(\sqrt{4z-1}) & (1) \\ 2(y+z)=2(\sqrt{4x-1}) & (2) \\ 2(z+x)=2(\sqrt{4y-1}) & (3) \end{cases}$$

Cộng (1), (2) và (3), ta được:

$$4x - 2\sqrt{4x-1} + 4y - 2\sqrt{4y-1} + 4z - 2\sqrt{4z-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x-1}-1)^2 + (\sqrt{4y-1}-1)^2 + (\sqrt{4z-1}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x-1}=1 \\ \sqrt{4y-1}=1 \\ \sqrt{4z-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 33. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x=y^2+z^2 \\ y=z^2+x^2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán - Tin, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x=y^2+z^2 & (1) \\ y=z^2+x^2 & (2) \\ z=x^2+y^2 & (3) \end{cases}$$

Ta có: $x=y^2+z^2 \geq 0$; $y=z^2+x^2 \geq 0$; $z=x^2+y^2 \geq 0$

Vì vai trò x, y, z trong hệ phương trình khi hoán vị vòng quanh không mất tính tổng quát, nên ta giả sử x là lớn nhất.

Ta có: $x \geq y \geq 0$; $x \geq z \geq 0$

Và $x \geq y$, kết hợp với (1) và (2), ta được: $y^2 \geq x^2$ nên $y \geq x$

Vậy $x=y$, kết hợp với (1) và (3), ta được: $z^2 \geq x^2$ nên $z \geq x$

Vậy $z=x$.

Do đó: $x=y=z$

$$\text{Từ (1), ta có: } x = x^2 + x^2 \Leftrightarrow x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y; z)$ là: $(0; 0; 0)$;
 $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 34. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^3 = 2y^2 + y + 1 \\ 4y^3 = 2z^2 + z + 1 \\ 4z^3 = 2x^2 + x + 1 \end{cases}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán - Tin, Hà Tây năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} 4x^3 = 2y^2 + y + 1 & (1) \\ 4y^3 = 2z^2 + z + 1 & (2) \\ 4z^3 = 2x^2 + x + 1 & (3) \end{cases}$$

Ta có $2y^2 + y + 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall y$ nên $4x^3 > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$

Tương tự, ta có $y > 0$ và $z > 0$

Giả sử $x \leq y \leq z$ (4)

Từ (1) và (3), suy ra: $4(x - z)(x^2 + xz + z^2) = (y - x)(2y + 2x + 1)$ (5)

Nhận xét rằng vế trái (5) ≤ 0 nên $(y - x)(2y + 2x + 1) \leq 0$

Mà $2y + 2x + 1 \leq 0 \Rightarrow y - x \leq 0 \Rightarrow y \leq x$ (6)

Từ (4) và (6), suy ra $x = y$

Tương tự, ta có: $y = z$

Do đó $x = y = z$

Thay vào (1), ta được: $4x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 4x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = y = z = 1$.



CHỦ ĐỀ 6.

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

- Bước 1: Chọn ẩn (một ẩn hoặc nhiều ẩn) và đặt điều kiện cho chúng.
- Bước 2: Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn vừa đặt và các đại lượng đã biết.
- Bước 3: Lập phương trình (hệ phương trình) dựa vào các mối quan hệ giữa các đại lượng.
- Bước 4: Giải phương trình (hệ phương trình) và kiểm tra điều kiện của ẩn.
- Bước 5: Kết luận

> B. BÀI TẬP

Bài 1. Một ô tô chuyển động đều với vận tốc đã định để đi hết quãng đường 120 km. Đi được nửa đường, xe nghỉ 3 phút, nếu để đến nơi đúng giờ xe phải chạy tăng tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính thời gian xe chạy.

Hướng dẫn giải

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định của ô tô ($x > 0$)

Ta có phương trình: $\frac{120}{x} = \frac{60}{x} + \frac{60}{x+2} + \frac{1}{20}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 48$; $x = -50$ (loại)

Thời gian xe chạy là: $\frac{120}{48} - \frac{1}{20} = 2$ giờ 27 phút

Bài 2. Một hình chữ nhật có chu vi là 24m. Nếu tăng chiều rộng thêm 2m và giảm chiều dài đi 2m thì diện tích hình chữ nhật đó không thay đổi. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

Hướng dẫn giải

Gọi x (m) là chiều rộng của hình chữ nhật ($0 < x < 12$).

Theo đề bài, ta có phương trình: $x(12 - x) = (x + 2)(10 - x)$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 5$

Vậy hình chữ nhật có chiều rộng là 5m và chiều dài là 7m.

Bài 3. Một xe ô tô chạy từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 96km. 32 phút sau, một người đi xe đạp từ thành phố B hướng về thành phố A. Người đi xe đạp đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB thì gặp ô tô. Biết vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe đạp là 10km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn giải

Gọi x (km/h) là vận tốc xe đạp ($x > 0$)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{64}{x+10} - \frac{32}{x} = \frac{8}{15}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 50x + 600 = 0$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 30$; $x = 20$

Vậy vận tốc của xe đạp là 30km/h và vận tốc ô tô là 40km/h hoặc vận tốc của xe đạp là 20km/h và vận tốc của ô tô là 30km/h.

Bài 4. Một tổ công nhân được giao sản xuất 4000 sản phẩm với năng suất định trước. Trong 10 ngày đầu, tổ sản xuất đúng tiến độ định trước. Thời gian sau, mỗi ngày tổ sản xuất tăng thêm 50 sản phẩm, do đó đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn hai ngày. Tính năng suất định trước của tổ công nhân.

Hướng dẫn giải

Gọi x (sản phẩm/ ngày) là năng suất định trước ($x > 0$)

Số sản phẩm trong 10 ngày đầu là $10x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm còn lại là: $4000 - 10x$ (sản phẩm)

Thời gian làm số sản phẩm còn lại là: $\frac{4000 - 10x}{x + 50}$ (ngày)

Thời gian làm theo kế hoạch là: $\frac{4000}{x}$ (ngày)

Vì tổ công nhân đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn hai ngày, nên ta có phương trình:

$$\frac{4000}{x} = \frac{4000 - 10x}{x + 50} + 10 + 2 \Leftrightarrow x^2 + 300x - 100000 = 0$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 200$; $x = -500$ (loại)

Vậy năng suất định trước của tổ công nhân là 200 sản phẩm/ ngày.

Bài 5. Người ta đặt một vòi nước chảy vào một bể nước và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra, mở vòi chảy vào thì sau 1,5 giờ đầy bể. Biết vòi chảy vào mạnh gấp 2 lần vòi chảy ra.

- Tính thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.
- Nếu chiều cao bể là 2m thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Gọi x (giờ) là thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mức nước ngang chỗ đặt vòi ($x > 0$).

Trong 1 giờ vòi chảy vào được: $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ bể

Trong 1 giờ vòi chảy ra được: $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ bể

Nếu mở cả hai vòi, lượng nước chảy vào bể trong 1 giờ được:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ bể}$$

Trong x giờ đầu lượng nước chảy vào bể là: $\frac{2}{3}x$

Trong 2 giờ 42 phút - x giờ còn lại, lượng nước chảy vào bể là:

$$\frac{1}{3}(2,7 - x) \text{ bể}$$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2,7 - x) = 1$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 0,3$

Vậy thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mức nước ngang chỗ đặt vòi là 0,3 giờ

b) Nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 1,5 giờ thì mực nước cao hơn 2m.

Vậy nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 0,3 giờ thì mực nước cao

$$\text{hơn là: } \frac{2,0,3}{1,5} = 0,4 \text{ m}$$

Vậy khoảng cách từ chỗ đặt vòi đến đáy bể là 0,4m.

Bài 6. Để chuyển hết số hàng trong một kho, người ta có thể dùng xe tải chở 12 chuyến hoặc sử dụng ba gác chở 15 chuyến. Nhưng do bận chuyển hàng cho nơi khác nữa nên xe tải chỉ chở một chuyến rồi đi nơi khác, không chở nữa. Người ta phải dùng ba gác chuyển hết số hàng còn lại. Người ta đếm được tổng số chuyến của xe tải và ba gác đã chuyển là 14 chuyến. Hỏi xe tải và ba gác đã chuyển mấy chuyến?

Hướng dẫn giải

Gọi x (chuyến) là số chuyến mà xe tải đã chở hàng (x là số nguyên dương)
 y (chuyến) là số chuyến mà ba gác đã chở hàng (y là số nguyên dương)

Tổng số chuyến của xe tải và ba gác chở là: $x + y = 14$

Biết rằng 12 chuyến xe tải chở hết số hàng, nên mỗi chuyến xe tải chở được: $\frac{1}{12}$ số hàng

Do đó x chuyến xe tải chở được $\frac{x}{12}$ số hàng trong kho.

Và y chuyến xe ba gác chở được $\frac{y}{15}$ số hàng trong kho.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 14 \\ \frac{x}{12} + \frac{y}{15} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 4$; $y = 10$

Vậy xe tải đã chở 4 chuyến và xe ba gác chở 10 chuyến.

Bài 7. Hai tổ công nhân A và B theo kế hoạch phải may xong 110 chiếc áo dài. Do thi đua tăng năng suất tổ A vượt mức 14%, tổ B vượt mức 10% nên đã may được 123 chiếc áo dài. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ phải may bao nhiêu chiếc áo dài.

Hướng dẫn giải

Gọi x (chiếc) là số chiếc áo dài mà tổ A may được (x là số nguyên dương)
 y (chiếc) là số chiếc áo dài mà tổ B may được (y là số nguyên dương)

Trong thực tế, tổ A may được: $x + \frac{14}{100}x$ (chiếc)

Trong thực tế, tổ B may được: $y + \frac{10}{100}y$ (chiếc)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 110 \\ x + \frac{14}{100}x + y + \frac{10}{100}y = 123 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 50$; $y = 60$.

Vậy theo kế hoạch tổ A may được 50 chiếc áo dài, tổ B may được 60 chiếc áo dài.

Bài 8. Một người đi ô tô dự định đi từ thành phố A đến thành phố B trong một thời gian nhất định. Người đó tính rằng nếu đi với vận tốc 45km/h thì tới thành phố B sẽ chậm mất nửa giờ, nhưng đi với vận tốc 60km/h thì sẽ tới thành phố B sớm hơn 45 phút. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi.

Hướng dẫn giải

Gọi x (km) là độ dài quãng đường AB ($x > 0$)

y (giờ) là thời gian dự định đi ($y > 0$)

Thời gian đi với vận tốc 45km/h là: $\frac{x}{45}$ giờ

Thời gian đi với vận tốc 60km/h là: $\frac{x}{60}$ giờ

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x}{45} = y + \frac{1}{2} \\ \frac{x}{60} = y - \frac{3}{4} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 225$; $y = 4,5$.

Vậy quãng đường AB là 225km và thời gian dự định đi là 4,5 giờ.

Bài 9. Hai bờ sông A và B cách nhau 40km. Một canô xuôi từ A đến B rồi quay ngay về A với vận tốc riêng không đổi hết tất cả 2 giờ 15 phút. Khi canô khởi hành từ A thì cùng lúc đó, một khúc gỗ cũng trôi tự do từ A theo dòng nước và gặp canô trên đường trở về tại một điểm cách A là 8km. Tính vận tốc riêng của canô và dòng nước.

Hướng dẫn giải

Gọi x (km/h) là vận tốc riêng của canô.

y (km/h) là vận tốc riêng của dòng nước ($x > y > 0$).

Vận tốc canô khi xuôi dòng là $x + y$ (km/h)

Vận tốc canô khi ngược dòng là $x - y$ (km/h)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{40}{x+y} + \frac{40}{x-y} = \frac{9}{4}$ (1)

Thời gian canô xuôi dòng 40km và ngược dòng 32km là: $\frac{40}{x+y} + \frac{32}{x-y}$ (giờ)

Thời gian khúc gỗ trôi là: $\frac{8}{y}$ giờ

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{40}{x+y} + \frac{32}{x-y} = \frac{8}{y} \Leftrightarrow x = 9y$ (vì $y > 0$) (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{40}{x+y} + \frac{40}{x-y} = \frac{9}{4} \\ x = 9y \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 36$; $y = 4$.

Vậy vận tốc riêng của canô là 36km/h; vận tốc riêng của dòng nước là 4km/h.

Bài 10. Có hai hộp đựng bi, nếu lấy từ hộp thứ nhất một số bi bằng số bi có trong hộp thứ hai rồi bỏ vào hộp thứ hai, rồi lại lấy từ hộp thứ hai một số bi bằng số bi còn lại trong hộp thứ nhất và bỏ vào hộp thứ nhất, cuối cùng lấy từ hộp thứ nhất một số bi bằng số bi còn lại trong hộp thứ hai và bỏ vào hộp thứ hai. Khi đó số bi trong mỗi hộp đều 16 viên. Hỏi lúc đầu mỗi hộp có bao nhiêu viên bi?

Hướng dẫn giải

Gọi x (viên) là số viên bi của hộp thứ nhất lúc đầu ($x > 0$).

y (viên) là số viên bi của hộp thứ hai lúc đầu ($y > 0$).

Sau lần thứ nhất, hộp thứ nhất có $(x - y)$ (viên) và hộp thứ hai có $2y$ (viên)

Sau lần thứ hai, hộp thứ nhất có $2(x - y)$ (viên) và hộp thứ hai có $2y - (x - y)$ (viên)

Sau lần thứ ba, hộp thứ nhất có $2(x - y) - [2y - (x - y)]$ (viên) và hộp thứ hai có $4y - 2(x - y)$ (viên)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x - y) - 2[2y - (x - y)] = 16 \\ 4y - 2(x - y) = 16 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 22$; $y = 10$.

Vậy lúc đầu hộp thứ nhất có 22 viên bi và hộp thứ hai có 10 viên bi.

Bài 11. Một xe lửa đi từ Huế ra Hà Nội. Sau đó 1 giờ 40 phút, một xe lửa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga cách Hà Nội 300km. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường sắt Huế – Hà Nội là 645km.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP. Huế năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe lửa thứ nhất đi từ Huế đến Hà Nội ($x > 0$)

$x + 5$ (km/h) là vận tốc của xe lửa thứ hai đi từ Hà Nội vào Huế

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{300}{x+5} + \frac{5}{3} = \frac{345}{x}$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 45$

Vậy vận tốc xe lửa thứ nhất là 45 km/h và vận tốc xe lửa thứ hai là 50km/h.

Bài 12. Cho mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360m². Nếu tăng chiều rộng 2m và giảm chiều dài 6m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chu vi mảnh đất lúc ban đầu.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP. HCM năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Gọi chiều rộng mảnh đất lúc đầu là: x (m) ($x > 0$)

Chiều dài mảnh đất lúc đầu là: $\frac{360}{x}$ (m)

Chiều rộng mảnh đất sau khi tăng thêm 2m là: $x + 2$ (m)

Chiều dài mảnh đất sau khi giảm 6m là: $\frac{360}{x} - 6$ (m)

Theo đề bài, ta có phương trình: $(x + 2) \left(\frac{360}{x} - 6 \right) = 360$

Giải phương trình trên, ta được $x = 10$, $x = -12$ (loại)

Vậy chiều rộng của mảnh đất lúc đầu là 10 (m); chiều dài của mảnh đất lúc đầu là $\frac{360}{10} = 36$ (m); chu vi mảnh đất lúc đầu là $(36 + 10) \cdot 2 = 92$ m

Bài 13. Một ô tô đi quãng đường dài 80km trong thời gian đã định. Ba phần tư quãng đường đầu ô tô chạy với vận tốc nhanh hơn dự định là 10km/h, quãng đường còn lại ô tô chạy chậm hơn dự định 10km/h. Biết rằng ô tô đi hết quãng đường AB.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Quảng Ngãi năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h) ($x > 15$).

Ta có phương trình:
$$\frac{60}{x+10} + \frac{20}{x-15} = \frac{80}{x}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 40$

Vậy thời gian ô tô đi hết quãng đường là 2 giờ.

Bài 14. Một canô xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B dài 80 km, sau đó lại ngược dòng đến địa điểm C cách bến B 72km, thời gian cả nó xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 15 phút. Tính vận tốc riêng của canô, biết vận tốc của dòng nước là 4km/h.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc canô là x (km/h), $x > 4$

Theo đề bài, ta có phương trình:
$$\frac{72}{x-4} - \frac{80}{x+4} = \frac{1}{4}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 36$; $x = -68$ (loại)

Vậy vận tốc riêng của canô là 36km/h.

Bài 15. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Hà Nội năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h), $x > 0$.

Theo đề bài, ta có phương trình:
$$\frac{24}{x} = \frac{24}{x+4} + \frac{1}{2}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 12$; $x = -16$ (loại)

Vậy vận tốc của xe đạp là 36km/h.

Bài 16. Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 60km. Một xuồng máy đi xuôi dòng từ bến A đến bến B, nghỉ 30 phút tại bến B rồi quay trở lại ngược dòng 25km để đến bến C. Thời gian kể từ lúc đi đến lúc quay trở lại đến bến C hết tất cả là 8 giờ. Tính vận tốc xuồng máy khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc nước chảy là 1km/h.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP.Huế năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Gọi x (km/h) là vận tốc của xuồng khi nước yên lặng ($x > 1$)

Thời gian xuồng máy đi từ A đến B:
$$\frac{60}{x+1} \text{ h}$$

Thời gian xuồng ngược dòng từ B về C:
$$\frac{25}{x-1} \text{ h}$$

Theo đề bài, ta có phương trình:
$$\frac{60}{x+1} + \frac{25}{x-1} + \frac{1}{2} = 8$$

Giải phương trình trên, ta được: $x_1 = 11$; $x_2 = \frac{1}{3}$

Vì $x > 1$ nên chọn $x = 11$.

Vậy vận tốc của xuồng khi nước đứng yên là 11km/h.

Bài 17. Một đội công nhân cần quét vôi với hai mặt tường bao của một khu trường hình chữ nhật, với chiều cao của tường là 2m và chiều rộng ngắn hơn chiều dài là 100m. Giá công quét vôi là 1000đồng/m². Biết cổng trường có chiều rộng 5m không cần quét vôi. Hãy tìm các kích thước của khu trường, biết tiền công mà nhà trường cần trả là 5580000 đồng.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Hòa Bình năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi chiều rộng khu trường hình chữ nhật là x (m), $x > 0$.

Theo đề, ta có phương trình:
$$2.2(x + x + 100 - 5).1000 = 5580000$$

$$\Leftrightarrow x = 650 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy khu trường hình chữ nhật có chiều rộng là 650 (m), chiều dài là 750 (m), diện tích là $650.750 = 487\,500 \text{ (m}^2\text{)}$.

Bài 18. Một công ty may giao cho tổ A may 16800 sản phẩm, tổ B may 16500 sản phẩm và bắt đầu thực hiện công việc cùng một lúc. Nếu sau 6 ngày, tổ A được hỗ trợ thêm 10 công nhân may thì họ hoàn thành công việc cùng lúc với tổ B. Nếu tổ A hỗ trợ thêm 10 công nhân may ngay từ đầu thì họ sẽ hoàn thành công việc sớm hơn tổ B một ngày. Hãy xác định số công nhân ban đầu của mỗi tổ. Biết rằng mỗi công nhân mỗi ngày may được 20 sản phẩm.

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban AB, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Gọi x là số công nhân ban đầu của tổ A ($x \in \mathbb{N}^*$); y là số công nhân ban đầu của tổ B ($y \in \mathbb{N}^*$).

Mỗi ngày tổ A may được số sản phẩm là: $20x$ (sản phẩm)

Mỗi ngày tổ B may được số sản phẩm là: $20y$ (sản phẩm)

Sau 6 ngày số sản phẩm tổ A may được là: $20x \cdot 6 = 120x$ (sản phẩm)

Số công nhân của tổ A sau khi tăng thêm 10 người là: $x + 10$ (người)

Lúc này số sản phẩm mỗi ngày tổ A may được là: $20(x + 10)$ (sản phẩm)

Sản phẩm mà tổ A phải may (sau khi đã may được 6 ngày) là:

$$16800 - 120x \text{ (sản phẩm)}$$

Thời gian để may số sản phẩm trên là: $\frac{16800 - 120x}{20(x + 10)}$ (ngày)

Thời gian tổ B may là: $\frac{16500}{20y}$ (ngày)

Theo đề, ta có phương trình: $6 + \frac{16800 - 120x}{20(x + 10)} = \frac{16500}{20y}$ (1)

Thời gian tổ A may, nếu được tăng thêm người ngay từ đầu là:

$$\frac{16800}{20(x + 10)} \text{ (ngày)}$$

Theo đề, ta có phương trình: $\frac{16800}{20(x + 10)} + 1 = \frac{16500}{20y}$ (2)

Giải hệ (1) và (2), ta được: $x = 50, y = 55$ (thỏa điều kiện)

Vậy số công nhân ban đầu của tổ A là 50 người, tổ B là 55 người.

Bài 19. Hai thành phố A và B cách nhau 48 km/h, gió thổi từ A đến B với vận tốc không đổi 6km/giờ. Lúc 8 giờ, một người đi mô tô từ A đến B, nghỉ ngơi 80 phút rồi trở lại A, anh về đến A lúc 10 giờ 50 phút. Vận tốc của mô tô được cộng thêm hoặc trừ bớt vận tốc của gió, tùy theo mô tô chạy xuôi chiều hoặc ngược chiều gió. Hãy tính tốc độ riêng của mô tô (tốc độ mô tô khi tốc độ gió bằng 0).

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban CD, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Gọi tốc độ riêng của mô tô là x (km/h) ($x > 6$)

Vận tốc của mô tô đi từ A đến B là: $x + 6$ (km/giờ)

Vận tốc của mô tô đi từ B về A là $x - 6$ (km/giờ)

Thời gian người đó đi từ A đến B, từ B về A và nghỉ ngơi tổng cộng là:

$$10 \text{ giờ } 50 \text{ phút} - (8 \text{ giờ } + 30 \text{ phút}) = 2 \text{ giờ } 20 \text{ phút} = \frac{7}{3} \text{ giờ}$$

Thời gian người đó đi từ A đến B là: $\frac{48}{x + 6}$ (giờ)

Thời gian người đó đi từ B về A là: $\frac{48}{x - 6}$ (giờ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{48}{x + 6} + \frac{48}{x - 6} = \frac{7}{3}$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 42$

Vậy tốc độ riêng của mô tô là 42 (km/giờ).

Bài 20. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi số chi tiết máy tổ I sản xuất được trong tháng thứ nhất là x .

Số chi tiết máy tổ II làm được trong tháng thứ nhất là $900 - x$ ($x \in \mathbb{N}, 0 < x < 900$).

Ta có phương trình: $1,15x + 1,1(900 - x) = 1010$

Giải phương trình trên, ta được $x = 400$

Vậy tháng thứ nhất tổ I sản xuất được 400 chi tiết máy và tổ II sản xuất được 500 chi tiết máy.

Bài 21. Một sinh viên kể: “ Khi đang đi trên cây cầu sắt (sử dụng cho tàu hỏa) dài 120m thì tôi thấy một chiếc tàu hỏa đang lao đến. Tôi chạy ngược chiều tàu hỏa với vận tốc 18km/giờ. Khi tôi chạy đến cầu bên này thì 2 giây sau tàu hỏa mới đến nên tôi đã kịp tránh sáng bên kia. Khi hoàn hồn lại, tôi tính được rằng nếu tôi chạy cùng chiều với tàu hỏa thì ngay khi đến đầu cầu bên kia tôi sẽ bị tàu hỏa đụng. May thật !”. Biết tàu hỏa chạy với vận tốc 72km/giờ, hỏi khi bắt đầu chạy, anh sinh viên đang ở cách đầu cầu bên này bao nhiêu mét?

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban CD, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi khoảng cách cần tìm là x (km) ($0 < x < 12$).

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{x}{18} + \frac{2}{3600} + \frac{0,12}{72} = \frac{0,12 - x}{18}$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 0,04$

Bài 22. Một tổ sản xuất theo kế hoạch phải làm được 720 sản phẩm. Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì so với giảm năng suất 20 sản phẩm mỗi ngày thì thời gian hoàn thành ngắn hơn 4 ngày. Tính năng suất dự định.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Tiền Giang, năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi x (sản phẩm / ngày) là năng suất dự định ($x > 20$)

Thời gian hoàn thành công việc khi tăng năng suất lên 10 sản phẩm là: $\frac{720}{x+10}$ ngày

Thời gian hoàn thành công việc khi giảm năng suất đi 20 sản phẩm là: $\frac{720}{x-20}$ ngày

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{720}{x-20} - \frac{720}{x+10} = 4$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 80$.

Vậy năng suất dự định của tổ sản xuất là 80 sản phẩm / ngày.

Bài 23. Một nhóm học sinh cần chia đều một lượng kẹo thành các phần quà. Nếu mỗi phần quà giảm 6 viên kẹo thì các em sẽ có thêm 5 phần quà nữa, còn nếu mỗi phần quà giảm 10 viên kẹo thì các em sẽ có thêm 10 phần quà nữa. Hỏi nhóm học sinh trên có bao nhiêu viên kẹo?

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban AB, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi số viên kẹo ở mỗi phần quà là x ; số phần quà là y ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-6)(y+5) = xy \\ (x-10)(y+10) = xy \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:
$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}$$

Vậy tổng số viên kẹo là $xy = 600$ viên.

Bài 24. Cùng một thời điểm, một chiếc ô tô X_A xuất phát từ thành phố A về hướng thành phố B và một chiếc xe khác X_B xuất phát từ thành phố B hướng về thành phố A. Chúng chuyển động với vận tốc riêng không đổi và gặp nhau lần đầu tại một điểm cách A là 20km. Cả hai chiếc xe, sau khi đến B và A tương ứng, lập tức quay trở lại và chúng gặp nhau lần thứ hai tại một điểm C. Biết thời gian xe X_B đi từ C đến B là 10 phút và thời gian giữa hai lần gặp nhau là 1 giờ, hãy tính vận tốc của từng chiếc ô tô.

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban AB, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Gọi M là chỗ gặp nhau lần đầu, vận tốc ô tô đi từ A là x (km/h), vận tốc của ô tô đi từ B là y (km/h)

Thời gian xe X_A đi từ A đến M là $\frac{20}{x}$ (h)

Thời gian này cũng là thời gian xe X_B đi từ B đến M. Ta có:

Khoảng cách BM là: $\frac{20}{x} \cdot y = \frac{20y}{x}$ (km)

$$\text{Quãng đường AB là: } 20 + \frac{20y}{x} \text{ (km)}$$

$$\text{Khoảng cách CB là: } \frac{10}{60} \cdot y = \frac{10y}{60} = \frac{y}{6} \text{ (km)}$$

$$\text{Tổng khoảng cách MB và BC là: } \frac{20y}{x} + \frac{y}{6} \text{ (km)}$$

$$\text{Theo đề bài thì: } \frac{20y}{x} + \frac{y}{6} = x \quad (1)$$

$$\text{Tổng khoảng cách MA và AC là: } 20 + 20 + \frac{20y}{x} - \frac{y}{6} = 40 + \frac{20y}{x} - \frac{y}{6} \text{ (km)}$$

$$\text{Theo đề bài thì: } 40 + \frac{20y}{x} - \frac{y}{6} = y \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{20y}{x} + \frac{y}{6} = x \\ 40 + \frac{20y}{x} - \frac{y}{6} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \left(\frac{20}{x} + \frac{1}{6} \right) = x \\ y \left(\frac{20}{x} - \frac{1}{6} \right) = -40 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $x = 40$, $y = 60$.

Vậy vận tốc của ô tô X_A là 40km/h; vận tốc ô tô X_B là 60km/h.

Bài 25. Trong năm học 2005 – 2006, trường chuyên Nguyễn Bình Khiêm tuyển 80 học sinh vào hai lớp 10 Toán và 10 Tin. Biết rằng, nếu chuyển 10 học sinh của lớp 10 Toán sang lớp 10 Tin thì số học sinh của hai lớp bằng nhau. Tính số học sinh ban đầu của mỗi lớp.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Gọi số học sinh ban đầu của lớp 10 Toán và 10 Tin tương ứng là x và y ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x - 10 = y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 80 \\ x - y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 80 \\ 2x = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy số học sinh ban đầu của lớp 10 Toán là 50 học sinh, số học sinh ban đầu của lớp 10 Tin là 30 học sinh.

Bài 26. Đội bóng bàn của trường A thi đấu với đội bóng bàn của trường B, mỗi đấu thủ của trường này thi đấu với mọi đấu thủ của trường kia 1 trận. Biết rằng tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số các cầu thủ của cả hai đội và số cầu thủ của trường B là số lẻ. Tìm số cầu thủ của mỗi đội.
(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Gọi x và y lần lượt là số các cầu thủ của trường A và trường B (với x và y là các số nguyên dương và y lẻ).

$$\text{Tổng số trận đấu là: } xy = 4(x + y) \Leftrightarrow xy - 4x - 4y + 16 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 16$$

Vậy $(x - 4)$ và $(y - 4)$ là ước số của 16.

Vì x, y nguyên dương và y lẻ nên $x - 4 = 16$ và $y - 4 = 1$.

Suy ra $x = 20$ và $y = 5$

Vậy số cầu thủ của trường A là 20, của trường B là 5.

Bài 27. Hai người đi xe đạp khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A và B trên cùng một đường thẳng. Người này đi tới điểm xuất phát của người kia rồi trở về điểm xuất phát của mình. Lần gặp nhau thứ nhất cách A 8km và lần gặp nhau thứ hai cách B 5 km. Tính quãng đường AB, biết vận tốc của hai người không đổi trong suốt thời gian đi và về.
(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Gọi độ dài quãng đường AB là x (km) ($x > 8$).

Lần đầu hai xe gặp nhau cách A 8 km, khi ấy thời gian hai xe chạy như nhau nên tỉ số quãng đường bằng tỉ số vận tốc.

$$\text{Do đó tỉ số vận tốc của xe đi từ B và xe đi từ A là } \frac{x - 8}{8}$$

Lần gặp sau quãng đường xe đi từ A đi được là: $x - 8 + 5 = x - 3$ (km)

Lần gặp sau quãng đường xe đi từ B đi được là: $x - 8 + 5 = x - 3$ (km)

Khi gặp nhau lần sau thời gian hai xe chạy như nhau nên ta có tỉ số vận tốc của xe đi từ B là: $\frac{x + 3}{x - 3}$

Vậy ta có phương trình: $\frac{x-8}{8} = \frac{x+3}{x-3}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 8x + 24 \Leftrightarrow x(x-19) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (\text{loại}) \\ x=19 \end{cases}$$

Vậy quãng đường AB dài 19km.

Bài 28. Hai bác nông dân đem trứng ra chợ bán với tổng số trứng của hai người là 100 quả. Số trứng của hai người không bằng nhau, nhưng hai người bán được một số tiền bằng nhau. Một người nói với người kia: “Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của anh thì tôi bán được 90000 đồng”. Người kia nói: “Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của chị thì tôi chỉ bán được 40000 đồng thôi”. Hỏi mỗi người có bao nhiêu trứng và giá bán mỗi quả trứng của mỗi người là bao nhiêu?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Tin, Quốc Học Huế năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi x là số trứng của người thứ nhất ($0 < x < 100$, $x \in \mathbb{N}^*$ và $x \neq 50$)

Số trứng của người thứ hai là: $100 - x$

Gọi a (đồng) và b (đồng) lần lượt là giá bán mỗi quả trứng của người thứ nhất và của người thứ hai.

Theo đề bài, ta có: $(100 - x)a = 90000 \Rightarrow a = \frac{90000}{100 - x}$

và $xb = 40000 \Rightarrow b = \frac{40000}{x}$

Vì số tiền bán trứng bằng nhau, nên:

$$xa = (100 - x)b \Leftrightarrow \frac{90000x}{100 - x} = \frac{40000(100 - x)}{x} \Leftrightarrow x^2 + 160x - 800 = 0$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 40$

Vậy người thứ nhất có 40 quả trứng và người thứ hai có 60 quả trứng.

Giá bán mỗi quả trứng của người thứ nhất là 1500 đồng và của người thứ hai là 1000 đồng.



CHỦ ĐỀ 7. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Hàm số bậc nhất: $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Hàm số đồng biến nếu $a > 0$, nghịch biến nếu $a < 0$.
- Đường thẳng có phương trình $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có tung độ gốc là b , hoành độ gốc là $-\frac{b}{a}$.
- Hai đường thẳng song song có hệ số góc bằng nhau.
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau có tích hai hệ số góc bằng -1 .
- Giao của hai đường thẳng $y = a_1x + b_1$ và $y = a_2x + b_2$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \\ y = a_1x + b_1 \end{cases}$

2. Hàm số bậc hai: $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

- Đồ thị là parabol có đỉnh là $(0; 0)$.
- Đồ thị có bề lõm quay lên trên nếu $a > 0$, bề lõm quay xuống dưới nếu $a < 0$.
- Đường thẳng $y = kx + b$ tiếp xúc với $y = ax^2$ ($a \neq 0$) nếu phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2 - kx - b = 0$ có nghiệm kép.
- Giao của hai đồ thị $y = kx + b$ và $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2 - kx - b = 0$,
- Hàm số $y = ax^2$ nếu $a > 0$: hàm số đồng biến $\forall x > 0$, nghịch biến $\forall x < 0$.
- Hàm số $y = ax^2$ nếu $a < 0$: hàm số đồng biến $\forall x < 0$, nghịch biến $\forall x > 0$.

3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chu vi, diện tích đa giác

Khoảng cách giữa hai điểm: Từ hai điểm kẻ các đường thẳng vuông góc xuống hai trục tọa độ để tạo ra các tam giác vuông, sau đó dùng định lí Pitago.

Chu vi đa giác bằng tổng các độ dài của các cạnh đa giác.

Diện tích đa giác: ta đưa về các hình thường gặp (tam giác, hình chữ nhật, hình vuông, hình thang,...) để áp dụng công thức.

4. Tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ

- Tìm tọa độ điểm cần tìm là $M(x; y)$.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa x , y và m .
- Khử m , ta tìm được hệ thức liên hệ giữa x và y , hệ thức này chính là phương trình đường thẳng chứa tập hợp điểm.
- Giới hạn tập hợp điểm.

5. Điểm cố định của họ đường thẳng

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ đường thẳng (D_m) , $y = f(x; m)$ đi qua.

Vì $M \in (D_m) \Rightarrow y_0 = f(x_0; m) \Leftrightarrow f(x_0; m) - y_0 = 0$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0; m) = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được điểm M .

B. BÀI TẬP

Bài 1. a) Với những giá trị nào của m thì hàm số: $y = (4m + 3)x - 5$ đồng biến?

b) Với những giá trị nào của m thì hàm số: $y = (m^2 - 2m - 3)x - 5$ nghịch biến?

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $y = (4m + 3)x - 5$ đồng biến

$$\Leftrightarrow 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow 4m > -3 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{4}.$$

b) Hàm số $y = (m^2 - 2m - 3)x - 5$ nghịch biến

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow (m - 3)(m + 1) < 0$$

$$\begin{cases} m - 3 > 0 \\ m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

$$\begin{cases} m - 3 < 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Vậy với $-1 < m < 3$ thì hàm số $y = (m^2 - 2m - 3)x - 5$ nghịch biến.

Bài 2. Cho đường thẳng: $y = 4x$ (d)

- Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d) và có tung độ gốc bằng 10.
- Viết phương trình đường thẳng (d_2) vuông góc với đường thẳng (d) và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng -8.
- Viết phương trình đường thẳng (d_3) song song với đường thẳng (d) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B và diện tích tam giác AOB bằng 8.

Hướng dẫn giải

a) (d_1) song song với (d), nên có phương trình là: $y = 4x + b$

(d_1) có tung độ gốc bằng 10, nên $b = 10$

Vậy phương trình đường thẳng (d_1) là: $y = 4x + 10$.

b) (d_2) vuông góc với (d), nên $k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$

(d_2) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -8, nên $b = -2$.

Vậy phương trình đường thẳng (d_2) là: $y = -\frac{1}{4}x - 2$

c) (d_3) song song với (d), nên có phương trình là: $y = 4x + b$

(d_3) cắt trục hoành tại A, ta có: $y_A = 0 \Rightarrow x_A = -\frac{b}{4}$. Do đó: $A\left(-\frac{b}{4}; 0\right)$.

(d_3) cắt trục tung tại B, ta có: $x_B = 0 \Rightarrow y_B = b$. Do đó $B(0; b)$

Tam giác AOB vuông ở O nên: $S_{AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left| -\frac{b}{4} \right| |b| = \frac{b^2}{8} = 8$

$$\Rightarrow b = \pm 8$$

Vậy có hai đường thẳng $(d_3): y = 4x + 8$ và $(d_3)': y = 4x - 8$.

Bài 3. Cho đường thẳng: $y = (m + 3)x + n$ ($m \neq 3$) (d).

Tìm m , n để (d):

a) Đi qua hai điểm $A(1; -3)$ và $B(-2; 3)$.

b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\sqrt{3} - 1$, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $3 + \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng: $y = (m + 3)x + n$ đi qua hai điểm $A(1; -3)$ và $B(-2; 3)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (m+3) \cdot 1 + n = -3 \\ (m+3)(-2) + n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n = -6 \\ -2m-n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ n = -1 \end{cases}$$

Vậy với $m = -5$ và $n = -1$ thì (d) đi qua hai điểm A và B.

b) (d) đi qua $(0; \sqrt{3} - 1)$ khi và chỉ khi: $n = \sqrt{3} - 1$

(d) đi qua $(3 + \sqrt{3}; 0)$ khi và chỉ khi: $(m + 3)(3 + \sqrt{3}) + n = 0$

$$\Leftrightarrow (m + 3)(\sqrt{3} + 3) + \sqrt{3} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} - 3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})} - 3 = \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(1 - 3)} - 3$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} - 3 = \frac{-2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{3}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{-2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{3} \text{ và } n = \sqrt{3} - 1.$$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét ba đường thẳng có phương trình là:

$$(d_1): x - y + 5k = 0$$

$$(d_2): (2k - 3)x + k(y - 1) = 0$$

$$(d_3): (k + 1)x - y + 1 = 0$$

Tìm các giá trị của k để ba đường thẳng trên đồng quy.

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng (d_2) và (d_3) luôn đi qua $(0; 1)$ nên ba đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi điểm này thuộc (d_1) : $0 - 1 + 5k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$.

Bài 5. Cho (P): $y = ax^2$ và điểm $A(2; -1)$.

a) Biết (P) đi qua A, xác định a.

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua B $(0; 1)$ có hệ số góc k.

c) Xác định k để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) Vì (P) đi qua $A(2; -1)$, nên ta có: $-1 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$

b) Phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc k là: $y = kx + b$

(d) đi qua B $(0; 1)$, ta có: $1 = 0 \cdot x + b \Rightarrow b = 1$

Vậy (d) có phương trình là: $y = kx + 1$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$-\frac{1}{4}x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4kx + 4 = 0 \quad (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt:

$$\Delta' = (-2k)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow k^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k < -1 \end{cases}$$

Bài 6. Cho (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Xác định m để tam giác OAB có diện tích bằng 3.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \quad (*)$$

(*) có $\Delta = m^2 + 4 > 0 \Rightarrow (*)$ có hai nghiệm trái dấu với mọi m

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với $x_A < 0 < x_B$

b) Gọi I là giao điểm của (d) và trục Oy.

Vì $x_A < 0 < x_B$ nên I thuộc đoạn AB

$$S_{AOB} = S_{OAI} + S_{OIB} = \frac{|x_A| \cdot |OI| + |x_B| \cdot |OI|}{2} = \frac{|x_A| + |x_B|}{2} \cdot |OI| = \frac{x_B - x_A}{2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{m^2 + 4}}{1}$$

$$\text{Theo đề, ta có: } S_{AOB} = 3 \Rightarrow \sqrt{m^2 + 4} = 3 \Leftrightarrow m^2 = 5 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$$

Bài 7. Tìm m để (P): $y = x^2 + 2mx - m + 2$ tiếp xúc với đường thẳng (d): $y = x + m$.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2 + 2mx - m + 2 = x + m$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2m - 1)x - 2m + 2 = 0 (*)$$

(P) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi (*) có nghiệm kép:

$$\Delta = 4m^2 + 4m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2} \\ m = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Bài 8. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $y = (m - 2)x + 3m + 1$, ($m \neq 2$)

a) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng

$$y = x - 5.$$

b) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm M (1 ; -2).

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = x - 5$

$$\Leftrightarrow m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 3$$

b) Đường thẳng (d) đi qua M (1 ; -2)

$$\Leftrightarrow -2 = m - 2 + 3m + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

Bài 9. a) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x + 1$ và $y = -\frac{x^2}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị ấy bằng phép tính.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP.HCM năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

a) Phương trình (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên có phương trình: $y = 3x + b$

(d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4, suy ra $b = 4$.

Vậy (d): $y = 3x + 4$

b) Đồ thị:

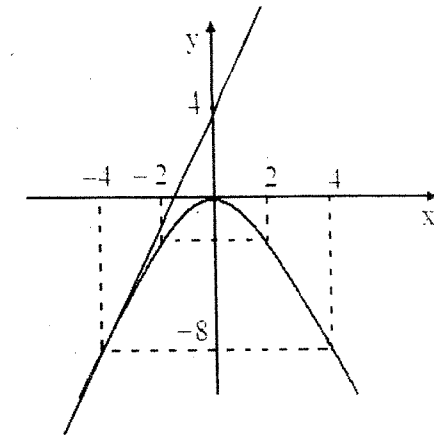
Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$-\frac{x^2}{2} = 3x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -2 \\ x = -4 \Rightarrow y = -8 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là: (-2 ; -2) ; (-4 ; -8).



Bài 10. Cho hàm số $y = (2m - 3)x + n - 4$ (d) ($m \neq \frac{3}{2}$)

1. Tìm giá trị của m và n để đường thẳng (d):

a) Đi qua hai điểm A(1 ; 2) ; B(3 ; 4).

b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = 3\sqrt{2} - 1$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1 + \sqrt{2}$.

2. Cho $n = 0$, tìm m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d') có phương trình: $x - y + 2 = 0$ tại điểm M(x ; y) sao cho biểu thức $P = y^2 - 2x^2$ đạt giá trị lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, THÁI BÌNH năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

1. a) (d) đi qua A(1 ; 2) và B(3 ; 4) khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2m - 3 + n - 4 = 2 \\ 3(2m - 3) + n - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = 9 \\ 6m + n = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 5 \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ và $n = 5$ thì (d) đi qua hai điểm A và B.

b) (d) đi qua $(0 ; 3\sqrt{2} - 1)$ khi và chỉ khi: $n - 4 = 3\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow n = 3 + 3\sqrt{2}$

(d) đi qua $(1 + \sqrt{2} ; 0)$ khi và chỉ khi: $(2m - 3)(1 + \sqrt{2}) + n - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \sqrt{2})m - 3 - 3\sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{2} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}-2$$

Vậy $m = 2\sqrt{2}-2$ và $n = 3+3\sqrt{2}$.

2. Với $n = 0$, ta có (d): $y = (2m-3)x-4$

Tọa độ của điểm M thỏa hệ: $\begin{cases} y = (2m-3)x-4 \\ x-y+2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{3}{m-2}; \frac{2m-1}{m-2} \right) (m \neq 2)$$

$$\text{Ta có: } P = y^2 - 2x^2 = \left(\frac{2m-1}{m-2} \right)^2 - 2 \left(\frac{3}{m-2} \right)^2 = \frac{4m^2 - 4m - 17}{m^2 - 4m + 4}$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4m + 4)P = 4m^2 - 4m - 17$$

$$\Leftrightarrow (P-4)m^2 - 4(P-1) + 4P - 17 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Với } P = 4 \Rightarrow m = \frac{11}{4}$$

Với $P \neq 4$, (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 72 - 9P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq 8$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 8, đạt được khi $m = \frac{7}{2}$.

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 điểm $A(-5; -1)$, $B(-1; 4)$, $C(3; 2)$.

1. Vẽ tam giác ABC.

2. Viết phương trình đường thẳng BC.

3. Không dùng đồ thị, hãy xác định tọa độ điểm D với D là giao điểm của đường thẳng qua A song song với BC và đường thẳng qua B song song với Oy.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Hà Nam năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

1. Hình vẽ.

2. Phương trình đường thẳng BC có dạng: $y = ax + b$

Điểm B thuộc đường thẳng BC nên: $4 = -a + b$

Điểm C thuộc đường thẳng BC nên: $2 = 3a + b$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 4 = -a + b \\ 2 = 3a + b \end{cases}$$

Vậy phương trình đường

$$\text{thẳng BC là: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

3. Phương trình đường thẳng song song với

$$\text{BC là: } y = -\frac{1}{2}x + b$$

Phương trình đường thẳng

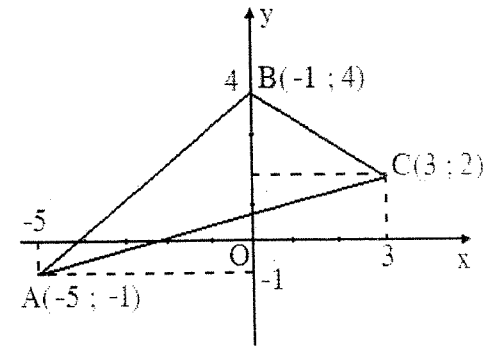
đi qua A song song với

$$\text{BC là: } y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

Đường thẳng đi qua B song song với trục Oy có phương trình là $x = -1$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy $D(-1; -3)$ là điểm cần tìm.



Bài 12. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = (2m+1)x + 3$ nghịch biến và đồ thị nó đi qua điểm $(1; 2)$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = (2m+1)x + 3$ nghịch biến và đồ thị nó đi qua điểm $(1; 2)$

$$\text{khi và chỉ khi: } \begin{cases} 2m+1 < 0 \\ 2 = (2m+1) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

Bài 13. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d): $y = \frac{3}{2}x + 2m$ cắt parabol

$$(P): y = -\frac{3}{4}x^2 \text{ tại hai điểm phân biệt?}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP.HCM năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: } \frac{3}{2}x + 2m = -\frac{3}{4}x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 8m = 0 (*)$$

Điều kiện để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{8}$$

Bài 14. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2.

a) Viết phương trình đường thẳng AB.

b) Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ điểm M thuộc cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

a) Do A, B thuộc đồ thị hàm số $y = x^2$ nên $A(-1; 1)$, $B(2; 4)$.

Phương trình đường thẳng AB có dạng:
 $y = ax + b (*)$

Thay tọa độ của A và B vào (*), ta có hệ:

$$\begin{cases} 1 = -a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = x + 2$.

b) Gọi m là hoành độ của điểm M.

Ta có: $M(m; m^2)$ ($m \in [-1; 2]$)

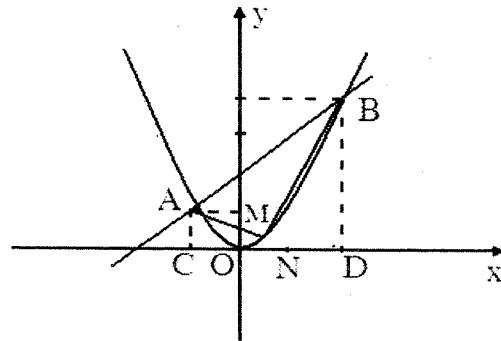
Gọi C, D và N lần lượt là hình chiếu của A, B và M trên trục Ox.

Ta có: $NC = m + 1$; $NC = 2 - m$; $CD = 3$

Do đó: $S_{AMB} = S_{ABCD} - (S_{AMNC} + S_{BDNM})$

$$= 3 \cdot \frac{1+4}{2} - \left[\frac{(m^2+1)(m+1)}{2} + \frac{(4+m^2)(2-m)}{2} \right] = \frac{-3m^2+3m+6}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} \left(m - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{27}{8} \leq \frac{27}{8}$$



Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$ hay $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Vậy diện tích tam giác MAB lớn nhất là $\frac{27}{8}$ khi $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Bài 15. Tọa độ giao điểm A và B của đồ thị hai hàm số $y = 2x + 3$ và $y = x^2$. Gọi D, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục hoành. Tính diện tích tứ giác ABCD.
(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Hà Nội năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy $A(-1; 1)$ và $B(3; 9)$

Vì D, C là hình chiếu của A, B nên
 $D(-1; 0)$ và $C(3; 0)$

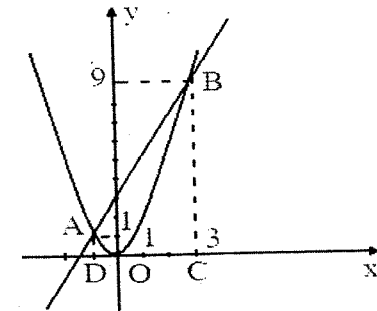
Tứ giác ABCD là hình thang vuông có độ dài hai cạnh đáy là:

$$AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = 9$$

$$\text{Và độ dài đường cao: } CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = 4$$

$$\text{Vậy diện tích tứ giác ABCD là: } S_{ABCD} = \frac{(1+9)4}{2} = 20 \text{ (đvdt)}$$



Bài 16. Cho (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$ và điểm $M(0; 2)$.

Gọi (D) là đường thẳng đi qua điểm M và có hệ số góc là k.

a) Tìm k sao cho (D) và (P) tiếp xúc với nhau.

b) Tìm k sao cho (D) cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt thỏa mãn $AB = 12$ và hoành độ của A và B là các số dương.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐHSP, TP.HCM năm học 2008 - 2009)

Hướng dẫn giải

a) Vì (D) có hệ số góc k, nên có phương trình là: $y = kx + b$

(D) đi qua điểm M(0; 2) $\Leftrightarrow 2 = k \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 2$

Vậy (D) có phương trình là: $y = kx + 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P):

$$-\frac{1}{2}x^2 = kx + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2kx + 4 = 0 (*)$$

(D) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi (*) có nghiệm kép:

$$\Delta' = k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2$$

b) (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A(x_1 ; y_1); B(x_2 ; y_2).

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của (*).

Theo đề bài, ta có: $x_1 > 0$; $x_2 > 0$; $x_1 \neq x_2$

(*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 4 > 0 \\ -2k > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 2 \\ k < -2 \\ k < 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k < -2$$

Vì $A \in D$ nên $y_1 = kx_1 + 2$

Vì $B \in D$ nên $y_2 = kx_2 + 2$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2k \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } AB &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (kx_1 - kx_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 (1 + k^2)} = \sqrt{[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] (1 + k^2)} \\ &= \sqrt{[(-2k)^2 - 16] (1 + k^2)} = 2\sqrt{(k^2 - 4)(1 + k^2)} \end{aligned}$$

Theo đề bài, ta có: $AB = 12$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(k^2 - 4)(1 + k^2)} = 12 \Leftrightarrow (k^2 - 4)(1 + k^2) = 36$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 8)(k^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2\sqrt{2} \text{ (loại)} \\ k = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k^4 - 3k^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow k^2(k^2 - 8) + 5(k^2 - 8) = 0$$

$$\text{Vậy } k = -2\sqrt{2}.$$

Bài 17. Trên mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$2kx + (k - 1)y = 2 \quad (k \text{ là tham số})$$

1. Với giá trị nào của k thì đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = x\sqrt{3}$? Khi đó hãy tính góc tạo bởi (d) với tia Ox.

2. Tìm k để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2004 - 2005)

Hướng dẫn giải

1. Với $k = 1$ thì phương trình đường thẳng (d) là: $x = 1$, (d) không song song với đường thẳng $y = x\sqrt{3}$.

Với $k \neq 1$ thì phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = \frac{-2k}{k-1}x + \frac{2}{k-1}$ (*)

Điều kiện cần và đủ để (d) song song với đường thẳng $y = x\sqrt{3}$ là:

$$\frac{-2k}{k-1} = \sqrt{3} \Rightarrow k = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$$

Khi đó góc nhọn α tạo bởi (d) với tia Ox có $\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

2. Với $k = 1$. Khoảng cách từ O đến (d) là 1.

Với $k = 0$. Phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = -2$

Khoảng cách từ O đến (d) là 2.

Với $k \neq 0$ và $k \neq 1$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d) với Ox, Oy

$$\text{Thay } y = 0 \text{ vào (*)}: x_A = \frac{1}{k} \Rightarrow OA = \left| \frac{1}{k} \right|$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào (*)}: y_B = \frac{2}{k-1} \Rightarrow OB = \left| \frac{2}{k-1} \right|$$

Rõ ràng (d) không đi qua gốc tọa độ với mọi $k \neq 0$ và $k \neq 1$.

Trong tam giác vuông AOB, ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

$$\Rightarrow OH = \frac{2}{\sqrt{5k^2 - 2k + 1}}$$

Ta có: $5k^2 - 2k + 1 = 5\left(k - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5} \forall k$

Do đó $OH = \frac{2}{\sqrt{4}} = \sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $k = \frac{1}{5}$

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) lớn nhất là $\sqrt{5}$ khi $k = \frac{1}{5}$.

Bài 18. Cho hai hàm số $y = mx + m^2 + \frac{9}{4}$ và $y = (4m^2 + 1)x^2$.

Tìm giá trị m để đồ thị hai hàm số trên cùng đi qua điểm $(-1; 2)$. Với giá trị m tìm được, xác định tọa độ giao điểm thứ hai của hai đồ thị đó.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số $y = mx + m^2 + \frac{9}{4}$ đi qua điểm $(-1; 2)$

$$\Leftrightarrow 2 = -m + m^2 + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Đồ thị hàm số $y = (4m^2 + 1)x^2$ đi qua điểm $(-1; 2)$

$$\Leftrightarrow 2 = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

Với $m = \frac{1}{2}$ thì hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là nghiệm

$$\text{của phương trình } \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \left(4 \cdot \frac{1}{4} + 1\right)x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Suy ra giao điểm thứ hai của hai đồ thị trên là $\left(\frac{5}{4}; \frac{25}{8}\right)$.

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = -\frac{x^2}{2}$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $I(0; -2)$ và có hệ số góc k.

a) Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B khi k thay đổi.

b) Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và B lên trục hoành. Chứng minh tam giác IHK vuông tại I.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Ngoại ngữ, ĐH Hà Nội năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = kx + b$

(d) đi qua $I(0; -2)$ nên: $b = -2$

(d): $y = kx - 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$-\frac{x^2}{2} = kx - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2kx - 4 = 0 \quad (1)$$

(1) có $\Delta' = k^2 + 4 > 0 \forall k$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B .

Hay (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Ta có: $HK^2 = (x_A - x_B)^2 = (x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B = 4k^2 + 16$

$$HI^2 + KI^2 = (x_A + 4)^2 + (x_B + 4)^2 = 4k^2 + 16$$

Theo định lý Pitago thì tam giác IHK vuông tại I.

Bài 20. Cho Parabol (P) $y = x^2$ và đường thẳng d đi qua $A(1; 2)$ có hệ số góc k.

a) Chứng minh rằng với mọi k đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Với $k = 2$ chứng minh rằng (d) cắt (P) tại hai điểm nhận A làm trung điểm.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, Hà Tây năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

a) (d) đi qua $A(1; 2)$ và có hệ số góc k nên có phương trình: $y = kx + 2 - k$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = kx + 2 - k \Leftrightarrow x^2 - kx - 2 + k = 0 \quad (1)$$

(1) có $\Delta = k^2 - 4(k - 2) = (k + 2)^2 + 4 > \forall k$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_C, x_D .

b) Theo định lí Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 \cdot x_2 = k - 2 \end{cases}$$

Khi $k = 2$, thì $x_1 + x_2 = 2$ hay $x_C + x_D = 2x_A$

$$\text{Và } y_C + y_D = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = k^2 - 2(k - 2) = 4 = 2y_A$$

Vậy A là trung điểm của CD.



CHỦ ĐỀ 8.

TÍNH CHIA HẾT – ĐỒNG DƯ THỨC

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Phép chia hết

Cho a, b là hai số nguyên ($b \neq 0$). Ta nói a chia hết cho b và kí hiệu là $a:b$, nếu tồn tại một số nguyên q sao cho $a = b \cdot q$.

Khi a chia hết cho b , ta nói b là ước của a hay b chia hết cho a và kí hiệu b/a . Ngoài ra ta có thể nói a là bội của b .

Tính chất:

- Nếu $a:b$ và $b:c$ thì $a:c$
- Nếu $a:m$ và $b:m$, thì $(a + b):m$
- Nếu $a:m$ và $b:n$ thì $ab:mn$

2. Phép chia có dư

Cho a, b là hai số nguyên ($b \neq 0$). Nếu a không chia hết cho b thì luôn có các cặp số nguyên $(q; r)$ với $(0 < r < |b|)$ sao cho $a = bq + r$, r được gọi là số dư.

3. Đồng dư thức

Cho a, b là các số nguyên và m là số nguyên dương. Ta nói, a đồng dư với b theo môđun m và kí hiệu là $a \equiv b \pmod{m}$ nếu a và b có cùng số dư khi chia cho m .

Tính chất:

- $a \equiv a \pmod{m}, \forall a$
- $a \equiv b \pmod{m}$ thì $b \equiv a \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m}$ thì $a \equiv c \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a + c \equiv b + c \pmod{m}, \forall c \in \mathbb{Z}$
- $a \equiv b \pmod{m}$ thì $ac \equiv bc \pmod{m}$
- $ac \equiv bc \pmod{m}$ và $(c, m) = 1$ thì $a \equiv b \pmod{m}$
- $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a^k \equiv b^k \pmod{m}, \forall k \geq 1$
- $(a + b)^m \equiv b^m \pmod{a} (a > 0)$

> B. BÀI TẬP

- Bài 1.** a) Chứng minh rằng số có dạng $9^n + 1$ không chia hết cho 4 với mọi số tự nhiên n .
b) Chứng minh rằng $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $9^n + 1 = (3^2)^n + 1 = (3^n)^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4.

b) Ta có: $2n^3 + 3n^2 + n = 2n^3 - 2n + 3n^2 + 3n = 2n(n^2 - 1) + 3n(n+1) = 2n(n-1)(n+1) + 3n(n+1) = 2(n^3 - n) + 3n(n+1) = 2n(n-1)(n+1) + 3n(n+1)$

Vì mỗi số hạng đều chia hết cho 6 nên $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

- Bài 2.** a) Chứng minh rằng $n^5 - 5n^3 + 4n$ chia hết cho 120 với mọi số nguyên n .
b) Chứng minh rằng $n^4 + 4n^3 - 4n^2 - 16$ chia hết cho 48 với mọi số n chẵn.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n+1)(n-1)(n+2)(n-2)n$.

Đa thức trên là tích của 5 số nguyên liên tiếp. Trong 5 số nguyên liên tiếp, ít nhất hai bội của 2 (trong đó có một bội của 4), một bội của 3, một bội của 5.

Vậy tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

b) Ta có: $n^4 + 4n^3 - 4n^2 - 16 = n^2(n^2 - 4) - (n^2 - 4) = (n^2 - 4)(n^2 - 1) = (n-2)(n+2)(n-1)(n+1)$

Đặt $n = 2k+1$ (với k nguyên), ta được:
 $(2k-2) \cdot 2k(2k+2) \Leftrightarrow 8(k-1)k(k+1)$

Do tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6 nên $n^4 + 4n^3 - 4n^2 - 16$ chia hết cho 48

- Bài 3.** Chứng minh rằng $3^{2010} + 5^{2010}$ chia hết cho 13.

Hướng dẫn giải

Ta có: $3^{2010} + 5^{2010} = (3^3)^{670} + (5^2)^{1005} = (27^{670} - 1) + (25^{1005} + 1)$ chia hết cho 13

- Bài 4.** Chứng minh rằng $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2)$ chia hết cho 91 với mọi số nguyên n .

Hướng dẫn giải

Ta có: $91 = 7 \cdot 13$

Do $(7; 13) = 1$ nên ta chỉ cần chứng minh A chia hết cho 7 và A chia hết cho 13.

$$-A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n)$$

Do $(25^n - 18^n):25 - 18 = 7$ và $(12^n - 5^n):12 - 5 = 7$ nên $A:7$

$$-A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n)$$

Do $(25^n - 12^n):25 - 12 = 13$ và $(18^n - 5^n):18 - 5 = 13$ nên $A:13$

Vậy $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2)$ chia hết cho 91 với mọi số nguyên n .

- Bài 5.** Chứng minh rằng $T_n = 1^5 + 2^5 + \dots + n^5$ chia hết cho tổng của n số tự nhiên đầu tiên $S_n = 1 + 2 + \dots + n$, với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2S_n = n(n+1)$

Vì $a^n + b^n:(a+b)$ với $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$ và n lẻ, nên ta có:

$$2T_n = (1^5 + n^5) + [2^5 + (n-1)^5] + \dots + [(n^5 + 1):(n+1)] \quad (1)$$

$$2T_n = [1^5 + (n-1)^5] + [2^5 + (n-2)^5] + \dots + [(n-1)^5 + 1] + 2n^5:n \quad (2)$$

Mặt khác, ta có: $(n; n+1)$

Do đó từ (1) và (2), suy ra: $2T_n:(n+1) = 2S_n \Rightarrow T_n:S_n$

- Bài 6.** Chứng minh rằng $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121, với n là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n^2 + 3n + 5:121$.

Khi đó suy ra $n^2 + 3n + 5:11 \Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 20:11$

$$\text{Do đó } 4n^2 + 12n + 9 : 11 \Rightarrow (2n+3)^2 : 11 \Rightarrow 2n+3 : 11$$

Vì $4(n^2 + 3n + 5) = (2n+3)^2 + 11$ không chia hết cho 121 (vô lí)

Vậy $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121.

Bài 7. Chứng minh rằng $1^{2002} + 2^{2002} + \dots + 2002^{2002} : 11$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } a^{11} \equiv a \pmod{11} \Rightarrow a^{2002} \equiv a \pmod{11}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } 1^{2002} + 2^{2002} + \dots + 2002^{2002} &\equiv 1 + 2 + \dots + 2002 \\ &\equiv 1001 \cdot 2003 \equiv 0 \pmod{11} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 8. Chứng minh rằng $1924^{2003^{2004^n}} + 1920$ chia hết cho 124, $n \in \mathbb{N}^*$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 124 = 4 \cdot 31$$

$$\text{Đặt } P = 1924^{2003^{2004^n}} + 1920$$

$$\text{Vì } 1924 \equiv 2 \pmod{31} \text{ nên } P \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2 \pmod{31} \quad (1)$$

Do $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$ nên ta cần tìm số dư của 2003^{2004^n} khi chia cho 5.

$$\text{Thật vậy, ta có: } 2004^n : 4 \Rightarrow 2004^n = 4k \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 2003^{2004^n} = 2003^{4k}$$

$$\text{Vì } 2003 \equiv 3 \pmod{5} \text{ nên } 2003^{4k} \equiv 3^{4k} \equiv 81^k \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\text{Vậy } 2003^{2004^n} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\text{Suy ra: } 2003^{2004^n} = 5m + 1 \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Do đó: } 2^{2003^{2004^n}} = 2^{5m+1} = 2 \cdot (2^5)^m \equiv 2 \pmod{31}$$

Kết hợp với (1), suy ra $P \equiv 0 \pmod{31}$.

Dễ dàng chứng minh được P chia hết cho 4.

Vậy $1924^{2003^{2004^n}} + 1920$ chia hết cho 124.

Bài 9. Chứng minh rằng, số tự nhiên

$$A = 1.2.3 \dots 2003.2004 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} \right) \text{ chia hết cho 2005.}$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán - Tin Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2004 - 2005)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(1 + \frac{1}{2004} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2003} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} \right) \\ &= 2005 \left(\frac{1}{2004} + \frac{1}{2 \cdot 2003} + \dots + \frac{1}{1002 \cdot 1003} \right) = 2005K \end{aligned}$$

Vì $A = K \cdot B$ (với $B = 1.2.3 \dots 2004$) mà KB là số nguyên nên A chia hết cho 2005.

Bài 10. Với a, b là các số nguyên dương sao cho a + 1 và b + 2007 chia hết cho 6. Chứng minh rằng: $4^a + a + b$ chia hết cho 6.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2007 - 2008)

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 4^a + a + b = (4^a + 2) + (a + 1) + (b + 2007) - 2010$$

$$4^a + 2 = (4^a - 1) + 3 = (4 - 1) + (4^{a-1} + \dots + 4 + 1) + 3 : 3$$

Mặt khác: $4^a + 2$ là số chẵn, suy ra $4^a + 2 : 6$

$4^a + a + b$ là tổng của các số hạng đều chia hết cho 6 (đpcm).

Bài 11. Cho $p \geq 5$ là số nguyên tố sao cho $2p + 1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng p + 1 chia hết cho 6 và $2p^2 + 1$ không phải là số nguyên tố.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán - Tin, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

Vì $p \geq 5$, p là số nguyên tố nên p lẻ và không chia hết cho 3

$$- p \text{ lẻ} \Rightarrow p + 1 \text{ chẵn} \Rightarrow (p + 1) : 2$$

- p không chia hết cho 3 nên p chia hết cho 3 dư 1 hoặc 2.

Nếu p chia hết cho 3 dư 1 thì $(2p+1) : 3$, mà $2p + 1 > 3$ nên $2p + 1$ không phải là số nguyên tố (trái với đề bài). Do đó p chia hết cho 3 dư 2, nghĩa là $(p+1) : 3$.

$$\text{Suy ra } (p+1) : 6$$

$$\text{Đặt } p + 1 = 6a \quad (a \in \mathbb{Z}), \text{ ta có: } 2p^2 + 1 = 2(6a - 1)^2 + 1 = 72a^2 - 24a + 3$$

Ta thấy rằng $(2p^2+1):3$ và $2p^2+1>3$ nên $2p^2+1$ không phải là số nguyên tố (đpcm).

Bài 12. Cho $P=(a+b)(b+c)(c+a)-abc$ với a, b, c là các số nguyên nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin Hà Nội Chu Văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Đặt $X = a + b + c$

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$$

$$\Leftrightarrow P = (X-a)(X-b)(X-c) - abc$$

$$\Leftrightarrow P = X^3 - (a+b+c)X + (ab+bc+ca)X - 2abc \quad (1)$$

Vì X chia hết cho 4 nên trong ba số a, b, c có ít nhất 1 số chẵn, suy ra $2abc$ chia hết cho 4 và X^3, X^2, X chia hết cho 4. Do đó P chia hết cho 4.

Bài 13. Với mỗi số tự nhiên n , ta đặt $a_n = 3n^2 + 6n + 13$

1) Chứng minh rằng: Nếu hai số a_i, a_k không chia hết cho 5 và chia cho 5 có số dư khác nhau thì $(a_i + a_k)$ chia hết cho 5.

2) Tìm số tự nhiên n lẻ để a_n là số chính phương.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu Văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

$$1) \text{ Ta có: } a_n = 3n^2 + 6n + 13 = 3(n+1)^2 + 10$$

Và $3(n^2+1)$ có tận cùng là 0, 2, 3, 5, 7 hoặc 8. Do đó a_n chia 5 dư 0, 2 hoặc 3.

Suy ra với a_i, a_k không chia hết cho 5 có số dư khác nhau thì $a_i + a_k : 5$.

2) Với n lẻ thì $a_n = 3(n^2+1)+10$ chia 4 dư 2. Mặt khác, vì a_n là số chính phương nên a_n chia 4 dư 0 hoặc 1.

Vậy không tồn tại n để a_n là số chính phương.

Bài 14. Tìm số tự nhiên bé nhất biết rằng khi chia số đó cho 2005 thì được dư là 23 còn khi chia số đó cho 2007 thì được dư là 32.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐHS, TP.HCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là n .

Theo đề bài, ta có n chia cho 2005 được dư là 23, n chia hết cho 2007 dư là 32.

$$\text{Đặt } n = 2005x + 23; n = 2007y + 32 \quad (x \in \mathbb{N}; y \in \mathbb{N})$$

$$\text{Ta có: } 2005x + 23 = 2007y + 32 \Leftrightarrow 2005x = 2007y + 9$$

$$\text{Do đó: } 2y + 9 : 2005$$

Vì n nhỏ nhất nên ta chọn y nhỏ nhất.

$$\text{Vậy } 2y + 9 = 2005 \Leftrightarrow 2y = 1996 \Leftrightarrow y = 998$$

$$\text{Khi đó: } n = 2007 \cdot 998 + 32 = 2003018$$

Bài 15. Tìm số dư trong phép chia $A = 3^8 + 3^6 + 3^{2004}$ cho 91

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán - Tin, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728 \text{ chia hết cho 91}$$

$$\text{Do đó: } A = 3^8 + 3^6 + 3^{2004} = (3^8 - 3^2) + (3^6 - 1) + (3^{2004} - 1) + 3^2 + 1 + 1$$

$$= 3^2(3^6 - 1) + (3^6 - 1) + ((3^6)^{334} - 1) + 11$$

$$\text{Vậy } A = 3^8 + 3^6 + 3^{2004} \text{ chia cho 91 dư 11.}$$

Bài 16. Cho a, b, c là các số nguyên, chứng minh rằng $(a^3 + b^3 + c^3)$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $(a + b + c)$ chia hết cho 3.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Hà Tây năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) &= (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) \\ &= (a-1)a(a+1) + (b-1)b(b+1) + (c-1)c(c+1) \end{aligned}$$

$$\text{Do } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ nên } (a-1)a(a+1):3, (b-1)b(b+1):3, (c-1)c(c+1):3$$

$$\text{Suy ra: } (a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c):3 \text{ nên}$$

$$\text{Nếu } (a^3 + b^3 + c^3):3 \text{ thì } (a + b + c):3$$

$$\text{Và ngược lại } (a + b + c):3 \text{ thì } (a^3 + b^3 + c^3):3$$

$$\text{Vậy } (a^3 + b^3 + c^3):3 \text{ khi và chỉ khi } (a + b + c):3.$$

Bài 17. Chứng minh rằng $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐH Vinh năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Đặt $n = 3k + r$ ($k \in \mathbb{Z}, r \in \{0, 1, 2\}$)

Ta có: $r = 0$ thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 3k + 2$ chia 3 dư 2

$r = 1$ thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 9k + 4$ chia 3 dư 1

$r = 2$ thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 15k + 8$ chia 3 dư 2.

Bài 18. Tìm số nhỏ nhất trong các số nguyên dương là bội của 2007 và có bốn chữ số cuối cùng là 2008.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $10000A + 2008$ (với $A \in \mathbb{N}$).

Ta có: $(10000A + 2008):2007 \Leftrightarrow 1972A + 1:2007$

$\Leftrightarrow 1972A + 1 = 2007k, k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow A = \frac{2007k - 1}{1972} = k + \frac{35k - 1}{1972}$

Vì $A \in \mathbb{N}$ nên $35k - 1 = 1972m$, với $m \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 1972m + 1:35 \Rightarrow 12m + 1:35$

$\Rightarrow m = 32$ là số nhỏ nhất thỏa mãn. Suy ra $A = 1835$

Vì số cần tìm là nhỏ nhất khi A nhỏ nhất, nên m là nhỏ nhất.

Vậy số nhỏ nhất cần tìm là 18352008.

Bài 19. Với n là số nguyên dương, đặt $S_n = \sum_{k=1}^n k!(k^2 + 3k + 1)$, trong đó

$k! = 1.2...k$ và $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Tìm số dư khi chia S_{400} cho 2005.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải

Ta có: $S_{400} = \sum_{k=1}^{400} k!(k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{400} k![(k+1)(k+2) - 1]$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{400} [(k+2)! - k!] = (3! + 4! + ... + 402!) - (1! + 2! + ... + 400!) \\ &= (401! + 402!) - (1! + 2!) = (401!.403!) - 2005 + 2002 \end{aligned}$$

Vì $2005 = 5.401$ nên $401!:2005$

Vậy số dư của phép chia S_{400} cho 2005 là 2002.

Bài 20. Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn phương trình: $x^2 + y^2 = z^2$.

a) Chứng minh rằng trong hai số x, y có ít nhất một số chia hết cho 3.

b) Chứng minh rằng tích xy chia hết cho 12.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán - Tin, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng:

- Với $a \in \mathbb{Z}$ thì $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$ hoặc $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$

- $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$ hoặc $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$

a) Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho 3 thì x^2, y^2 cho số dư là 1, suy ra $z^2 = x^2 + y^2$ chia cho 3 có số dư z (vô lí).

Vậy trong hai số x, y có ít nhất một số chia hết cho 3.

b) Ta xét các trường hợp sau:

- x, y cùng lẻ: ta có $x^2 \equiv 1 \pmod{4}, y^2 \equiv 1 \pmod{4}$, suy ra $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$ (vô lí)

- x, y cùng chẵn: thì $xy \equiv 1 \pmod{4}$, mà theo a) thì $xy \equiv 0 \pmod{3}$, suy ra $xy \equiv 0 \pmod{12}$

- x, y khác tính chẵn lẻ: không mất tính tổng quát, ta giả sử x chẵn, y lẻ, do đó z lẻ.

Đặt $y = 2p + 1, z = 2q + 1$ ($p, q \in \mathbb{Z}$).

Ta có: $x^2 = z^2 - y^2 = (2q+1)^2 - (2p+1)^2 = [4q(q+1) - 4p(p+1)]:8$

Do đó: x chia hết cho 4. Theo a) thì xy chia hết cho 3 nên xy cũng chia hết cho 12.

Bài 21. 1. Chứng minh rằng số $n = 18^{6^{2004}}$ có tính chất là tồn tại hai số nguyên dương p và q thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < p < q < n \\ (p + (p+1) + (p+2) + \dots + q) : n \end{cases}$$

2. Số $n = 16^{6^{2004}}$ có tính chất nói trên hay không?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHSPT, Hà Nội năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = p + (p+1) + (p+2) + \dots + q = \frac{(p+q)(q-p+1)}{2}$

Ta cần tìm số nguyên dương p, q sao cho: $\begin{cases} 0 < p < q < n \\ S : n \end{cases} \quad (2)$

Với $n = 16^{6^{2004}}$, từ (2) ta có: $(q+1-p)(p+q) : 2 \cdot 2^{6^{2004}} \cdot 9^{6^{2004}}$

Vì $q+1-p < p+q$ và $(q+1-p), (p+q)$ khác tính chẵn, lẻ, đồng thời $2^{6^{2004}} < 9^{6^{2004}}$, nên ta chọn p, q sao cho:

$$\begin{cases} q+1-p = 2 \cdot 2^{6^{2004}} \\ p+q = 9^{6^{2004}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{9^{6^{2004}} - 2 \cdot 2^{6^{2004}} + 1}{2} \\ q = \frac{9^{6^{2004}} + 2 \cdot 2^{6^{2004}} - 1}{2} \end{cases}$$

Hay là p, q thỏa mãn (1) và (2).

2. Giả sử có p, q nguyên dương thỏa mãn (1), (2) với $n = 16^{6^{2004}}$.

Từ (2), suy ra: $(q+1-p)(p+q) : 2 \cdot 16^{6^{2004}}$

Vì hai số $(q+1-p), (p+q)$ khác tính chẵn, lẻ, nên chỉ xảy ra một trong các trường hợp sau:

- Nếu $(q+1-p), (p+q)$ chẵn:

Từ (2) có $(p+q) : 2n \Rightarrow q-p+1 \geq 2n \Rightarrow q+p \geq 2n$

$\Rightarrow p \geq n$ hoặc $q \geq n$ (trái với (1))

- Nếu $(q+1-p), (p+q)$ lẻ:

Từ (2) có $(p-q+1) : 2n \Rightarrow q-p+1 \geq 2n \Rightarrow q+p \geq 2n$

$\Rightarrow p \geq n$ hoặc $q \geq n$ (trái với (1))

Vậy số $n = 16^{6^{2004}}$ không có tính chất đã nêu.

Bài 22. Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số thỏa mãn đồng thời hai tính chất:

(i) Khi chia số đó cho 100 ta được số dư là 6.

(ii) Khi chia số đó cho 51 ta được số dư là 17.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG HÀ NỘI năm học 2006 – 2007)2

Hướng dẫn giải

Gọi a là số tự nhiên cần tìm ($a \in \mathbb{N}$ và $1000 \leq a \leq 9999$)

Từ điều kiện đề bài, suy ra: $a = 100m + 6 = 51k + 17$ ($m, k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 102m - 2(m-3) = 17(3k+1)$

Suy ra: $2(m-3) : 17$

Mà $(2 : 17) = 1$ nên $(m-3) : 17$

Đặt $m-3 = 17n$ ($n \in \mathbb{N}$), ta có: $m = 17n + 3$

Do đó $a = 1700n + 306 = 51(33n + 6) + 17n$

Mà $a : 51$ dư 17 nên $17n : 51$ dư 17

Vì $1000 \leq a \leq 9999$ nên $694 \leq 1700n \leq 9693 \Rightarrow 0 \leq n \leq 5$

Suy ra: $n = 1$ hoặc $n = 4$

- Với $n = 1$, thì $a = 2006$

- Với $n = 4$, thì $a = 7106$



CHỦ ĐỀ 9.

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

- Đưa về phương trình tích: phân tích về trái ra các thừa số, đồng thời phân tích về phải ra các thừa số tương ứng.
- Sử dụng tính chia hết, tính chất đồng dư: để tìm ra điểm đặc biệt của các biến số cũng như các biểu thức chứa trong phương trình, từ đó đưa phương trình về dạng đơn giản hơn hoặc đã biết cách giải.
- Sử dụng bất đẳng thức: để biết được miền giá trị của các biến, nếu giá trị của các biến ít thì ta có thể thử trực tiếp.

➤ B. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x + xy + y = 9$

Hướng dẫn giải

$$x + xy + y = 9 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 10 \quad (*)$$

Từ (*), suy ra $(x+1)$ là ước số của 10 hay $x+1 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$

Do đó nghiệm của phương trình là:

$$(1; 4); (4; 1); (-3; -6); (-6; -3); (0; 9); (9; 0); (-2; -11); (-11; -2)$$

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$

Hướng dẫn giải

$$x^2 - 4xy + 5y^2 = 169 \Leftrightarrow (x-2y)^2 + y^2 = 169$$

Vì $169 = 0^2 + 13^2 = 5^2 + 12^2$ nên xảy ra 4 trường hợp sau:

$$\text{- Trường hợp 1: } \begin{cases} (x-2y)^2 = 0 \\ y^2 = 13^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ y = \pm 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 26 \\ y = \pm 13 \end{cases}$$

$$\text{- Trường hợp 2: } \begin{cases} (x-2y)^2 = 13^2 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = \pm 13 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 13 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{- Trường hợp 3: } \begin{cases} (x-2y)^2 = 5^2 \\ y^2 = 12^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = \pm 5 \\ y = \pm 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 29 \\ y = \pm 12 \end{cases}$$

$$\text{- Trường hợp 3: } \begin{cases} (x-2y)^2 = 12^2 \\ y^2 = 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = \pm 12 \\ y = \pm 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 22 \\ y = \pm 5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 8 nghiệm nguyên $(x; y)$ là:

$$(26; 13); (-26; -13); (13; 0); (-13; 0); (29; 12); (-29; -12); (22; 5); (-22; -5).$$

Bài 3. Chứng minh rằng phương trình: $4x^2 + 4x = 8y^3 - 2z^2 + 4$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải

$$4x^2 + 4x = 8y^3 - 2z^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 8y^3 - 2z^2 + 5$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 = 8y^3 - 2z^2 + 5 \quad (1)$$

Dễ thấy vế trái của (1) là một số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1

Vế phải của (1) có: $8y^3:8$

$2z^2$ chia hết cho 8 nếu z chẵn, chia hết cho 8 dư 2 nếu z lẻ.

Vậy vế phải của (1) chia hết cho 8 dư 5 hoặc dư 7. Do đó phương trình (1) không có nghiệm nguyên nên phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $5x + 7y = 112$

Hướng dẫn giải

$$5x + 7y = 112 \Rightarrow x = 22 - y + \frac{2(1-y)}{5} \quad (1)$$

Để x là số nguyên thì $2(1-y):5$, mà $(2; 5) = 1$ nên $1-y:5$.

Do đó y tận cùng bởi 1 hoặc 6 (2)

Vì x, y là số nguyên dương nên $5x > 0$, suy ra $0 < 7y < 112 \Leftrightarrow 0 < y < 16$ (3)

Từ (2) và (3), suy ra: $y = 1, y = 6$, hoặc $y = 16$.

Thay giá trị y vào (1), ta được: $x = 21, x = 14$ hoặc $x = 7$

Vậy phương trình có 3 nghiệm nguyên dương $(x; y)$ là: $(21; 1); (14; 6); (7; 11)$.

Bài 5. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Do vai trò của x và y trong phương trình đã cho là như nhau, nên giả sử $x \geq y$.

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \Rightarrow y > 2 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } x \geq y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{y} \Leftrightarrow y \leq 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $2 < y \leq 4$

Vậy $y = 3$ hoặc $y = 4$

Thay giá trị y vào phương trình đã cho, ta được: $x = 6$ hoặc $x = 4$

Vậy phương trình có 2 nghiệm nguyên dương $(x; y)$ là: $(6; 3); (4; 4)$.

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} = 3$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x, y, z \neq 0$.

Ta có: $y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 = 3xyz \Rightarrow xyz > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 \geq 3\sqrt{x^4y^4z^4}$

$3xyz \geq 3\sqrt{x^4y^4z^4} \Rightarrow xyz \leq 1$

Suy ra phương trình có các nghiệm nguyên $(x; y; z)$: $(1; 1; 1)$; $(1; -1; -1)$; $(-1; 1; -1)$; $(-1; -1; 1)$.

Bài 7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2 + 17y^2 + 34xy + 51(x + y) = 1740$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + 17(y^2 + 2xy + 3(x + y)) = 1740$

Nhận xét rằng với x nguyên, x có thể có dạng sau:

$x = 17k \pm r$ với $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và $k \in \mathbb{Z}$

Suy ra:

$x^2 \in \{17k, 17k+1, 17k+4, 17k+9, 17k+16, 17k+2, 17k+15, 17k+13\}$

Nhận thấy rằng vế phải là 1740 khi chia cho 17 có số dư là 6. Trong khi đó vế trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 8. Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 < ab + 3b + 2c$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin, ĐH Vinh năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c nguyên nên $a^2 - ab + b^2 - 3b + 3 + c^2 - 2c + 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c - 1)^2 \leq 0$$

Suy ra: $a = \frac{b}{2}, \frac{b}{2} = 1, c = 1$

Hay $a = 1, b = 2, c = 1$

Bài 9. Tìm nghiệm nguyên dương x, y, z, t của phương trình

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Các số nguyên dương x, y, z, t đều lớn hơn 1 vì nếu một trong các số đó không lớn hơn 1 thì $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} > 1$

Mặt khác, các số x, y, z, t đều nhỏ hơn 3 vì nếu một trong các số đó không nhỏ hơn 3 thì: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$

Vậy $x = y = z = t = 2$.

Bài 10. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2 + y^2 = 17 + 2xy$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

$$5x^2 + y^2 = 17 + 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 + 4x^2 = 17$$

$$x^2 \leq \frac{17}{4} \Rightarrow x^2 \in \{0, 1, 4\}$$

$$\bullet x^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 17$$

$$\bullet x^2 = 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 13 \text{ (loại)}$$

$$\bullet x^2 = 4 \Rightarrow (x - y)^2 = 1$$

$$\text{Với } x = 2, \text{ ta có: } (2 - y)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -2, \text{ ta có: } (-2 - y)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(2; 1); (2; 3); (-2; -1); (-2; -3)$.

Bài 11. Tìm nghiệm nguyên x, y của phương trình: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP.HCM năm học 2007 - 2008)

Hướng dẫn giải

$$x^2 - xy = 6x - 5y - 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 5)} \quad (\text{vì } x = 5 \text{ không phải là nghiệm của (1)})$$

$$\Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{3}{x - 5}$$

Vì x, y nguyên nên $x - 5 \in \{-1; 1; 3; -3\}$ hay $x \in \{4; 6; 8; 2\}$

- Khi $x = -2$ thì $y = 0$ (thỏa)

- Khi $x = 4$ thì $y = 0$ (thỏa)

- Khi $x = 6$ thì $y = 8$ (thỏa)

- Khi $x = 8$ thì $y = 8$ (thỏa)

Vậy các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình đã cho là: $(2; 0); (4; 0); (6; 8)$ và $(8; 8)$

Bài 12. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(x - 1) - x(x - 1) - y(x - 1) + 1 = 0 \quad (1)$$

Nhận xét rằng $x = 1$ không phải là nghiệm của (1), chia hai vế của (1)

$$\text{cho } x - 1, \text{ ta được: } 2y^2 - x - y + \frac{1}{x - 1} = 0 \quad (2)$$

Phương trình có nghiệm x, y nguyên, suy ra $\frac{1}{x - 1}$ nguyên nên ta có:

$$x - 1 \in \{1; -1\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 2, x = 0, \text{ từ (2) ta có: } 2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{loại vì } y \text{ nguyên})$$

Vậy các số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức đã cho là: $(2; 1)$ và $(0; 1)$.

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0 \quad (1)$

1) Tìm nghiệm $(x; y)$ của phương trình (1) thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình (1).

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2007 - 2008)

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 10 - y^2$ thay vào phương trình (1), ta được:

$$2y^2 + (5 - x)y + (x - 7) = 0 \quad (2)$$

Giải phương trình (2) theo ẩn y , ta được: $y = 1; y = \frac{x - 7}{2}$

- Với $y = 1 \Rightarrow x^2 = 10 - y^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

- Với $y = \frac{x - 7}{2} \Rightarrow 5x^2 - 14x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{9}{5}$

$$\Rightarrow y = -3, y = \frac{-13}{5}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $(x; y)$ là:

$$(3; 1); (-3; 1); (1; -3); \left(\frac{9}{5}; \frac{-13}{5}\right)$$

$$2) (1) \Leftrightarrow (x + 3y + 1)(x - y - 3) = -7$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên xảy ra các trường hợp sau:

$$\text{- Trường hợp 1: } \begin{cases} x + 3y + 1 = 1 \\ x - y - 3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{- Trường hợp 2: } \begin{cases} x + 3y + 1 = -1 \\ x - y - 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{- Trường hợp 3: } \begin{cases} x + 3y + 1 = 7 \\ x - y - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

- Trường hợp 4: $\begin{cases} x + 3y + 1 = -7 \\ x - y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Vậy các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình đã cho là:
 $(-3; 1); (7; -3); (3; 1); (1; -3)$



CHỦ ĐỀ 10.

NGUYÊN TẮC DIRICHLET

A. KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

- Nguyên tắc Dirichlet được phát biểu như sau:

Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái lồng (n là số nguyên dương) thì chắc chắn có một cái lồng chứa ít nhất hai thỏ.

Tổng quát: Nếu nhốt m con thỏ vào n cái lồng, với $m = nk + p$ ($0 < p < n$) thì ít nhất sẽ có một cái lồng nhốt ít nhất $k + 1$ con thỏ.

- Một số áp dụng:

- Trong $n + 1$ số tự nhiên, bao giờ cũng chọn được ra hai số mà hiệu của chúng chia hết cho n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- Cho $kn + 1$ đường thẳng và k điểm sao cho mỗi điểm đều thuộc ít nhất một trong các đường thẳng đó. Khi đó có ít nhất $n + 1$ đường thẳng đồng quy.
- Cho $kn + 1$ số thực thuộc một tập hợp gồm k phần tử. Khi đó có ít nhất $n + 1$ số bằng nhau.
- Nếu trong một hình diện tích 1, đặt một số hình có tổng diện tích lớn hơn 1 thì có ít nhất hai trong số các đó hình đó có phần chung.

➤ B. BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 6 và chia hết cho 2003.

Hướng dẫn giải

Xét 2004 số dạng: 6, 66, 666, ..., 666...6

Theo nguyên tắc Dirichlet thì tồn tại hai số có cùng số dư chia khi chia cho 2003. Giả sử hai số đó là: $P = \underbrace{66\dots6}_n$ và $Q = \underbrace{66\dots6}_k$ với $n > k$

Ta có: $P - Q = \underbrace{66\dots6}_{n-k} \cdot 10^k$ chia hết cho 2003

Mặt khác, ta có: $(2003 \cdot 10^k) = 1$ nên $P - Q = \underbrace{66\dots6}_{n-k}$ chia hết cho 2003

Bài 2. Bên trong một hình vuông có cạnh bằng 20 (đvd) và có 81 điểm. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 4 chứa ít nhất 6 điểm trong các điểm đã cho.

Hướng dẫn giải

Ta chia hình vuông ra thành 16 hình vuông nhỏ bằng nhau có cạnh bằng 5 (đvd). Khi đó đường chéo của mỗi hình vuông là $5\sqrt{2}$.

Vì $81 = 16 \cdot 5 + 1$, nên theo nguyên tắc Dirichlet thì có ít nhất một hình vuông nhỏ chứa $5 + 1 = 6$ điểm trở lên có bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông là $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Đường tròn này nằm trên đường tròn có bán kính bằng 4.

Vậy tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 4 chứa ít nhất 6 điểm trong các điểm đã cho.

Bài 3. Trong một cuộc hội thảo khoa học có 100 người tham dự. Giả sử mỗi người đều quen biết ít nhất 67 người. Chứng minh rằng có thể tìm được một nhóm 4 người mà bất kì 2 người trong nhóm đều quen biết nhau.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy nếu có hai người 1 và người 2 quen nhau, thì số người quen chung của người 1 và người 2 ít nhất là $34 (= 67 + 67 - 100)$ người.

Gọi X là tập hợp các người quen chung của người 1 và người 2. Trong đó X phải có ít nhất cặp người 3 và người 4 quen nhau (vì nếu trong X không có hai người nào quen nhau, thì mỗi người trong X chỉ quen nhiều nhất là $100 - 34 = 66 < 67$ người, vô lí).

Vậy có ít nhất một nhóm trong 4 người (1, 2, 3, 4) mà bất kì hai người trong nhóm đó đều quen biết nhau.

Bài 4. Trên mặt phẳng cho 25 điểm sao cho từ 3 điểm bất kỳ trong số chúng tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 13 điểm.

Hướng dẫn giải

Xét điểm A trong hình tròn (C_1) có tâm A và bán kính bằng 1.

Nếu tất cả 24 điểm còn lại đều nằm trong (C_1) thì ta có điều phải chứng minh.

Xét trường hợp điểm B nằm ngoài đường tròn (C_1) .

Ta có $AB > 1$ xét hình tròn (C_2) tâm B và bán kính bằng 1.

Giả sử C là một điểm bất kỳ khác A và B. Ta cần chứng minh C thuộc một trong hai hình tròn (C_1) hoặc (C_2) .

Thật vậy, giả sử điều ngược lại điểm C không thuộc (C_1) và (C_2) . Do đó $AC > 1$ và

$BC > 1$, mà $AB > 1$ suy ra có ba điểm A, B, C trong đó không có bất kỳ 2 điểm nào có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1 (vô lí). Do đó C thuộc vào (C_1) hoặc C thuộc vào (C_2) . Vậy có cả 25 điểm thuộc vào (C_1) và (C_2) .

Theo nguyên lí Dirichlet thì phải có ít nhất một hình tròn chứa không ít hơn 13 điểm.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD và 2005 đường thẳng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện:

- Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.
- Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích là 0,5. Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng đó có ít nhất 502 đường đồng quy.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

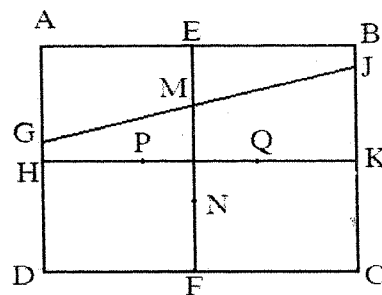
Đặt $AB = AD = a$.

Gọi EF và HK là hai trục đối xứng của hình vuông ABCD ($EF \parallel AD$,

$HK \parallel AB$)

Giả sử một đoạn thẳng cắt các đoạn AD, BC, EF lần lượt tại G, J, M sao cho

$$S_{CDGJ} = 2S_{ABJM}.$$



Ta có: $DG = CJ = 2(AG + BJ)$

Hay $(a - AG) + (a - BJ) = 2AG + 2BJ$

Suy ra: $AG = BJ = \frac{2a}{3}$ hay $EM = \frac{a}{3}$

Do đó M là điểm cố định. Lấy N trên EF, các điểm cố định P, Q trên HK sao cho

$$EM = MN = NF = HP = PQ = QK = \frac{a}{3}.$$

Tương tự như trên, ta thấy các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài là phải đi qua một trong bốn điểm cố định M, N, P, Q.

Theo nguyên lí Dirichlet từ 2005 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài có ít nhất $502 = \left\lceil \frac{2005}{4} \right\rceil + 1$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm trên, tức là 502 đường thẳng đó đồng quy.

Bài 6. Cho một lưới vuông kích thước 5×5 . Người ta điền vào mỗi ô của lưới một trong các số $-1; 0; 1$. Xét tổng của các số được tính theo từng cột, theo từng hàng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Rõ ràng có tất cả tổng (5 cột, 5 hàng, 2 đường chéo).

Do chọn điền vào ô các số $-1; 0; 1$ nên giá trị mỗi tổng S là số nguyên thỏa mãn $-5 \leq S \leq 5$.

Vậy S có thể nhận 11 giá trị.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài 7. Chứng minh rằng luôn tồn tại một số có dạng $20022002 \dots 2002$, mà số chia hết cho 2003.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin, ĐHV Vinh năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải

Ta xét 2004 số dạng: $a_n = 20022002 \dots 2002$, gồm n số 2002 viết liên tiếp bên nhau, với $1 \leq n \leq 2004$.

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số a_k, a_l mà hiệu $a_k - a_l$ chia hết cho 2003, với $1 \leq l \leq k \leq 2004$.

Ta có: $a_k - a_l = 10^{4l} \cdot a_{k-l}$

Mà 10^{4l} và 2003 là số nguyên tố cùng nhau nên a_{k-l} chia hết cho 2003 (đpcm).

Bài 8. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm ra được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin, ĐHSP, Hà Nội năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Giả sử 700 số nguyên dương thỏa mãn đề bài là $a_1 < a_2 < \dots < a_{700}$

Xét các tập hợp sau: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{700}\}$; $B = \{a_1 + 6, a_2 + 6, \dots, a_{700} + 6\}$ và $C = \{a_1 + 9, a_2 + 9, \dots, a_{700} + 9\}$.

Ta có hợp của ba tập hợp A, B, C gồm 2100 phần tử, mỗi phần tử không vượt quá $2006 + 9 = 2015$. Theo nguyên tắc Dirichlet thì có hai phần tử bằng nhau.

Vì A, B, C là tập hợp các phần tử đôi một khác nhau nên có các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: hoặc có hai phần tử của A và B bằng nhau, do đó tồn tại x, y để $x - y = 6$.
- Trường hợp 2: hoặc có hai phần tử của B và C bằng nhau, do đó tồn tại x, y để $x - y = 3$.
- Trường hợp 3: hoặc có hai phần tử của A và C bằng nhau, do đó tồn tại x, y để $x - y = 9$.

Bài 9. Chứng minh rằng trong 2007 số khác nhau tùy ý lấy từ tập hợp

$A = \{1, 2, 3, \dots, 2006^{2007}\}$, có ít nhất hai số x, y thỏa mãn

$$0 < \left| \sqrt[2007]{x} - \sqrt[2007]{y} \right| < 1.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin Hà Nội Chu Văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Xét $A = \{1, 2, 3, \dots, 2006^{2007}\}$. Với mọi $x \in A$ thì $1 \leq \sqrt[2007]{x} \leq 2006$

Xét 2006 tập hợp $[1; 2]; [2; 3]; [3; 4]; \dots; [2005; 2006]; \{2006\}$ mà có tới 2007 số thuộc 2006 tập trên, theo nguyên lí Dirichlet, thì tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một tập hợp. Gọi hai số đó là x, y , khi đó ta có: $0 < \left| \sqrt[2007]{x} - \sqrt[2007]{y} \right| < 1$ (đpcm)

Bài 10. Cho 33 điểm nằm trong hình vuông có độ dài cạnh bằng 4, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ và tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không ba điểm trong các điểm đã cho sao cho chúng đều thuộc phần chung của ba hình tròn có tâm cũng chính là ba điểm đó? Vì sao?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán Phan Bội Châu, Nghệ An năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông đơn vị có các cạnh song song với các cạnh hình vuông đã cho và có độ dài bằng 1.

Vì $33 > 16 \cdot 2$ nên theo nguyên lí Dirichlet, thì tồn tại ít nhất 3 điểm nằm trong hoặc trên cạnh của một hình vuông đơn vị.

Giả sử đó là ba điểm A, B, C ở trong hoặc nằm trên cạnh của hình vuông đơn vị $MNPQ$.

Khi đó ta có $MN = \sqrt{2}$ và với mọi điểm E thuộc hình vuông $MNPQ$ thì $\sqrt{2} = MP \geq AE$. Do đó hình tròn tâm A , bán kính $\sqrt{2}$ phủ toàn bộ hình vuông $MNPQ$.

Tương tự, các hình tròn tâm B , bán kính $\sqrt{2}$ và đường tròn tâm C , bán kính $\sqrt{2}$ phủ toàn bộ hình vuông $MNPQ$.

Vậy ba hình tròn có tâm A, B, C và có cùng bán kính $\sqrt{2}$ đều chứa hình vuông $MNPQ$ nên ba điểm A, B, C nằm trong phần chung của ba hình tròn trên.

✱



CHỦ ĐỀ 11. NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

Nguyên tắc cực hạn là nguyên tắc sử dụng phần tử lớn nhất hay nhỏ nhất của một tập hợp của các số thực để giải toán.

Một số áp dụng:

- Nếu có n số có tổng bằng S , thì luôn tồn tại một số lớn hơn hoặc bằng $\frac{S}{n}$ và một số nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{S}{n}$.
- Có n đoạn thẳng trên mặt phẳng, khi đó luôn tồn tại một đoạn có độ dài lớn nhất và một đoạn có độ dài nhỏ nhất.

> B. BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng 4 hình tròn đường kính là 4 cạnh của một tứ giác thì phủ kín miền tứ giác ABCD.

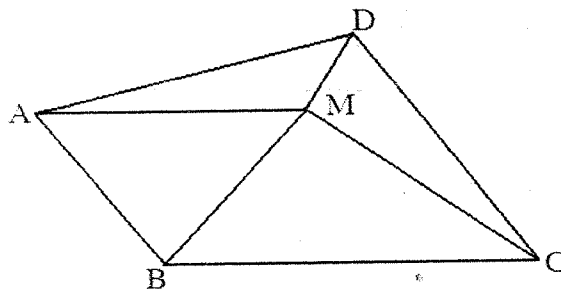
Hướng dẫn giải

Gọi M là một điểm bất kì bên trong tứ giác ABCD.

Ta có: $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 360^\circ$ Vì góc lớn nhất trong 4 góc trên không nhỏ hơn 90° nên không mất tính tổng quát, giả sử góc $\widehat{BMC}$ lớn nhất.

Hay $\widehat{BMC} \leq 90^\circ$

Suy ra M nằm trong đường tròn đường kính BC.



Bài 2. Trong một đội bóng đá mới thành lập có ít nhất hai cầu thủ quen nhau. Biết rằng nếu hai cầu thủ có cùng một số lượng người quen thì không có người quen chung. Chứng minh rằng trong đội bóng có cầu thủ chỉ quen đúng một người.

Hướng dẫn giải

Vì số người quen trong đội bóng là hữu hạn nên có thể tìm được một cầu thủ A có số người quen nhiều nhất.

Giả sử A quen $B_1, B_2, \dots, B_k$ và B_i quen n_i người.

Theo đề, thì hai cầu thủ có cùng số lượng người quen thì không có người quen chung nên $n_1, n_2, \dots, n_k$ đôi một khác nhau.

Các số $n_1, n_2, \dots, n_k$ đôi một khác nhau và chỉ nhận giá trị trong khoảng từ 1 đến k nên tồn tại $n_i = 1$. Do đó trong đội bóng có cầu thủ chỉ quen đúng một người.

Bài 3. Cho đường tròn (O) có bán kính bằng 1. Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_8$ là 8 điểm bất kì nằm trong hình tròn (kể cả trên biên). Chứng minh rằng trong các điểm đã cho luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng luôn tồn tại 7 điểm không trùng tâm, có thể giả sử 7 điểm đó là $A_1, A_2, \dots, A_7$.

Nối điểm O với các điểm trên, ta thấy luôn tồn tại hai điểm A_i, A_j sao cho

$$\widehat{A_iOA_j} \leq \frac{360^\circ}{7} < 60^\circ \quad (1 \leq i, j \leq 7, i \neq j)$$

Xét tam giác A_iOA_j có $\widehat{A_iOA_j} < 60^\circ \Rightarrow A_iA_j$ nhỏ hơn giá trị lớn nhất của A_iO và A_jO nên $A_iA_j < 1$.

Bài 4. Trên mặt phẳng kẻ 1992 đường thẳng sao cho không có ba đường nào đồng quy. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho gọi là "tam giác xanh" bởi nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt.

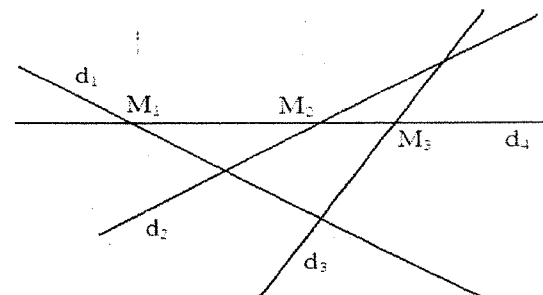
a) Chứng minh rằng số tam giác xanh không ít hơn 664.

b) Chứng minh rằng số tam giác xanh không ít hơn 1328.

Hướng dẫn giải

a) Lấy đường thẳng d bất kì.

Xét các giao điểm của các đường thẳng khác d . Tồn tại một giao điểm có khoảng cách đến d nhỏ nhất, đó chính là đỉnh của một tam giác xanh.



Do đó ứng với mỗi đường thẳng ta có một tam giác xanh và ứng với 1992 đường thẳng ta có 1992 tam giác xanh. Mỗi tam giác xanh trong số đó được tính nhiều nhất 3 lần.

Suy ra có ít nhất $\frac{1992}{2} = 664$ tam giác xanh khác nhau.

b) Từ câu a), ta có nếu về hai phía của d đều có các giao điểm của các đường thẳng khác thì ứng với d có ít nhất hai tam giác xanh về hai phía. Ta cần chứng minh có nhiều nhất hai đường thẳng mà tất cả các giao điểm của các đường thẳng khác nằm về cùng một phía so với đường thẳng đó.

Thật vậy, giả sử có d_1, d_2, d_3 đường thẳng như thế. Gọi M_1, M_2, M_3 là giao điểm của d_4 với d_1, d_2 và d_3 . Giả sử M_2 nằm ở giữa M_1 và M_3 , khi đó M_1 và M_3 nằm ở hai phía d_2 (vô lí)

Suy ra ứng với 1992 đường thẳng d thì có ít nhất $1990 \cdot 2 + 2 = 3892$ tam giác xanh. Mỗi tam giác xanh được tính nhiều nhất 3 lần.

Vậy có ít nhất $\frac{3892}{2} = 1328$ tam giác xanh khác nhau.

Bài 5. Lấy 4 điểm ở miền trong một tứ giác để cùng 4 đỉnh ta được 8 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác là 1, chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 8 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{10}$.

Tổng quát hóa bài toán cho n giác lồi và n điểm ở miền trong của đa giác đó.
(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2003 – 2004)

Hướng dẫn giải

Nối các điểm tạo thành các tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh, phủ kín tứ giác. Tổng các góc trong của tam giác bằng tổng trong của tứ giác cộng với 4 lần 360° nên bằng $360^\circ + 4 \cdot 360^\circ = 10 \cdot 180^\circ$.

Vậy có 10 tam giác mà tổng diện tích bằng 1 nên tồn tại tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{10}$.

Tổng quát:

Ở miền trong đa giác lồi n – cạnh ($n \geq 3$) có diện tích bằng 1 lấy n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2n đỉnh đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{3n-2}$.

CHỦ ĐỀ 12.

CÁC BÀI TOÁN RỜI RẠC – TỔ HỢP – SUY LUẬN LOGIC

> BÀI TẬP

Bài 1. Có 10 người dự họp. Mỗi người quen ít nhất là 5 người khác. Chứng tỏ rằng, nếu cần sắp xếp 4 người vào một bàn tròn 4 chỗ ngồi thì có thể sắp xếp sao cho người nào cũng ngồi giữa hai người quen của mình.

Hướng dẫn giải

Nếu cả 10 người đều quen nhau thì sắp xếp như thế nào cũng phù hợp với yêu cầu bài toán.

Giả sử có hai người A và B không quen nhau. Trong số 8 người còn lại, A quen ít nhất là 5 người và B quen ít nhất là 5 người, do đó A và B phải quen chung với 2 người, chẳng hạn là C và D.

Khi đó ta có cách sắp xếp như sau:

- A và B ngồi đối diện nhau.

- C và D ngồi đối diện nhau.

Bài 2. Hai người chơi cờ, mỗi ván người thắng được 2 điểm, người thua được 0 điểm và nếu hòa thì mỗi người được 1 điểm. Hỏi sau một số ván có thể xảy ra trường hợp một người được 10 điểm và một người được 15 điểm được không?

Hướng dẫn giải

Gọi $S(n)$ là tổng số điểm mà cả hai đạt được sau n ván.

Vì mỗi ván tổng số điểm của hai người luôn bằng 2 nên $S(n)$ là một số chẵn với mọi n.

Do đó không thể xảy ra trường hợp một người được 10 điểm và người còn lại được 15 điểm.

Bài 3. Có 6 đội bóng thi đấu với nhau (mỗi đội phải thi đấu 1 trận với 5 đội khác). Chứng minh rằng bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau rồi hoặc chưa đấu với nhau trận nào?

Hướng dẫn giải

Giả sử 6 đội là A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 và A_6 .

Xét đội A_1 , theo nguyên tắc Dirichlet thì A_1 phải đấu hoặc không đấu với ít nhất 3 đội khác. Không mất tính tổng quát, giả sử A_1 đấu với A_1 , A_3 và A_4 .

Nếu A_2, A_3, A_4 từng cặp chưa đấu với nhau thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu A_2, A_3, A_4 có hai đội đấu với nhau, giả sử A_2 và A_3 thì 3 đội A_1, A_2, A_3 từng cặp đã đấu với nhau.

Vậy bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau rồi hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Bài 4. Trên mặt phẳng cho 6 điểm sao cho với ba điểm bất kì trong chúng là đỉnh của một tam giác không cân. Xét tất cả các tam giác có ba đỉnh là 3 điểm trong 6 điểm này. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh mà nó là cạnh bé nhất của một tam giác đồng thời lại là cạnh lớn nhất của một tam giác khác trong số các tam giác đang xét.

Hướng dẫn giải

Giả sử 6 điểm trên mặt phẳng là: $A_1, A_2, \dots, A_6$.

Với mỗi tam giác $A_i A_j A_k$ ta tô màu đỏ cạnh nhỏ nhất của tam giác.

Ta cần chứng minh tồn tại một tam giác có cả 3 cạnh đều là màu đỏ. Khi đó cạnh lớn nhất của tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trong năm đoạn $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_1 A_5$ nếu có 3 đoạn màu đỏ. Chẳng hạn $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4$. Khi đó kết hợp với tam giác $A_1 A_3 A_4$ có cạnh màu đỏ, chẳng hạn $A_2 A_3$, ta được tam giác $A_1 A_2 A_3$ có 3 cạnh màu đỏ.

Nếu trong năm đoạn thẳng trên không có tới 3 đoạn màu đỏ suy ra có 3 đoạn chưa được tô màu, chẳng hạn $A_1 A_2, A_2 A_2, A_1 A_4$.

Khi đó tam giác $A_2 A_3 A_4$ có cả 3 cạnh màu đỏ.

Bài 5. Trong một giải cờ vua có 8 kỳ thủ tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt, thắng được 1 điểm, hòa được $\frac{1}{2}$ điểm, thua được 0 điểm. Biết rằng sau khi tất cả các trận đấu kết thúc thì cả 8 kỳ thủ nhận được số điểm khác nhau và kỳ thủ có số điểm thứ hai bằng tổng số điểm của 4 kỳ thủ xếp cuối cùng. Hỏi ván đấu giữa kỳ thủ xếp thứ tư và kỳ thủ xếp thứ năm đã kết thúc và kết quả như thế nào?

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Ban AB, ĐHQG TPHCM năm học 2001 – 2002)

Hướng dẫn giải

Sau khi giải đấu kết thúc, số ván cờ đã thi đấu giữa 4 kỳ thủ xếp cuối cùng là $\frac{4.3}{1.2} = 6$

Sau mỗi ván tổng số điểm của hai kỳ thủ nhận được là 1. Gọi S là tổng số điểm của 4 kỳ thủ cuối cùng là S , ta có S không ít hơn 6. Nếu $S \geq 6,5$ thì số điểm của kỳ thủ xếp thứ hai là $S \geq 6,5$.

Do 8 kỳ thủ được các số điểm khác nhau nên kỳ thủ xếp thứ nhất có số điểm không ít hơn $S + 0,5 \geq 7$.

Do kỳ thủ xếp thứ nhất đấu 7 trận nên điều này xảy ra khi $S + 0,5 = 7$ hay $S = 6,5$ và kỳ thủ xếp thứ nhất thắng cả 7 ván. Suy ra kỳ thủ xếp thứ hai thắng không quá 6 ván và có 6 điểm (vô lí vì $6 < S$).

Vậy $S = 6$. Khi đó các kỳ thủ xếp từ năm đến tám chỉ dành được điểm khi thi đấu với nhau, ngoài ra thua tất cả các kỳ thủ khác. Do vậy kỳ thủ xếp thứ tư đã thắng kỳ thủ xếp thứ năm trong trận đối đầu trực tiếp.

Bài 6. Trong một giải bóng đá có N đội tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai đội đều gặp nhau đúng một lần). Sau mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không được điểm nào, còn nếu trận đấu có kết quả hòa thì mỗi đội cùng được một điểm. Các đội xếp hạng dựa theo tổng điểm. Trong trường hợp một số đội có tổng điểm bằng nhau thì các đội này được xếp hạng theo các chỉ số phụ. Kết thúc giải người ta nhận thấy rằng không có trận đấu nào kết thúc với tỉ số hòa; các đội xếp thứ nhất, nhì, ba có tổng điểm lần lượt là 15, 12, 12 và tất cả các đội xếp tiếp theo có tổng điểm đôi một khác nhau.

a) Chứng minh rằng $N \geq 7$.

b) Tìm N và tổng điểm của mỗi đội tham gia giải.

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Chuyên Toán – Tin, ĐHQG TP.HCM năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải

a) Đội xếp thứ nhất được 15 điểm nên đấu ít nhất với 5 đội khác.

Do đó $N \geq 5 + 1 \Leftrightarrow N \geq 6$

Nếu $N = 6$ thì đội thứ nhất đạt 15 điểm nên đội này thắng 5 đội còn lại, đội xếp thứ nhì đạt 12 điểm nên thắng 4 đội trừ đội thứ nhất. Đội xếp thứ ba thua đội xếp thứ nhất và nhì nên số điểm tối đa là $3.3 = 9$ (vô lí).

Vậy $N \geq 7$ (đpcm).

b) Các đội còn lại có số điểm không lớn hơn 12.

Vì không có trận nào nên số điểm còn lại là bội của 3.

Số điểm còn lại có thể là: 0, 3, 6, 9, 12.

Do đó $N \leq 5 + 3$, vì $N \geq 7$ nên $N = 7$; $N = 8$.

- Nếu $N = 8$: có 8 đội thi đấu nên số trận đấu là: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ trận

Tổng số điểm của 8 đội đạt được là 28.3, là số chẵn.

Còn $0 + 3 + 6 + 12 + 15$ là số lẻ (vô lí)

Vậy $N \neq 8$.

- Nếu $N = 7$: có 7 đội thi đấu nên số trận đấu là: $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ trận

Tổng số điểm của 8 đội đạt được là $21 \cdot 3 = 63$ điểm.

Tổng số điểm các đội còn lại là $63 - (12 + 12 + 15) = 24 = 0 + 3 + 9 + 12$

Chỉ có duy nhất cách biểu diễn 24 thành tổng 4 số là bội của 3 và khác nhau như trên.

Tổng số điểm của mỗi đội còn lại đạt được là 2; 3; 9; 12.

Bài 7. Cho mười số nguyên dương 1, 2, ..., 10. Sắp xếp mười số đó một cách tùy ý thành một hàng. Cộng mười số thứ tự của nó trong hàng, ta được mười tổng. Chứng minh rằng mười tổng đó tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Giả sử mười số đã cho viết thành một hàng là: $a_1, a_2, \dots, a_{10}$.

Xét mười tổng: $a_1 + 1, a_2 + 2, \dots, a_{10} + 10$.

Khi đó: $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \dots + (a_{10} + 10)$

Giả sử 10 tổng trên không có hai tổng nào có tận cùng giống nhau. Lúc đó, tổng tất cả các chữ số tận cùng của chúng là: $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$.

Suy ra chữ số tận cùng của tổng $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \dots + (a_{10} + 10)$ là 5

Mặt khác $S = (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) + (1 + 2 + \dots + 10) = 110$ có tận cùng bằng 0.

Vậy điều giả sử trên là sai, do đó mười tổng đó tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.

Bài 8. Trong một giải bóng đá có k đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt (2 đội bất kỳ thi đấu với nhau đúng một trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm. Kết thúc giải, người ta nhận thấy rằng số trận thắng – thua gấp đôi số trận hòa và tổng số điểm các đội là 176. Hãy tìm k .

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Chuyên Toán – Tin, ĐHQG TPHCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Ta có sau mỗi trận đấu tổng số điểm hai đội có được là 3 nếu là trận thắng – thua và là 2 nếu là trận hòa.

Vì số trận thắng – thua gấp đôi số trận hòa nên tổng số điểm trận thắng – thua gấp 3 lần tổng số điểm trận hòa.

Do đó, ta có tổng số điểm trận hòa là: $\frac{176}{3+1} = 44$ trận

Số trận hòa là: $\frac{44}{2} = 22$ trận

Tổng số trận đã đấu là: $22 + 44 = 66$ trận

Mỗi đội đấu với $(k - 1)$ trận, đội còn lại có $(k - 1)$ trận

Vì mỗi đội có $k(k - 1)$ trận, mỗi trận đấu được tính hai lần nên số trận đấu có $\frac{k(k-1)}{2}$ trận.

Ta có: $\frac{k(k-1)}{2} = 66 \Rightarrow k = 12$

Bài 9. Xét 81 chữ số, trong đó có 9 chữ số 1; 9 chữ số 2; ...; 9 chữ số 9. Hỏi có thể xếp được hay không tất cả các chữ số này thành một dãy sao cho với mọi $k = 1, 2, \dots, 9$ trong mỗi khoảng giữa hai chữ số k liên tiếp ở trên dãy có đúng k chữ số.

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Chuyên Toán – Tin, ĐHQG TPHCM năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Giả sử xếp được số đã cho thành dãy theo đúng yêu cầu bài toán.

Vì có 9 chữ số 9 nên khoảng cách giữa hai chữ số 9 liên tiếp là 8.

Từ yêu cầu bài toán, ta có số chữ số ở giữa hai chữ số 9 đầu tiên và cuối cùng (kể từ trái sang phải là) $9 \cdot 8 = 72$

Vì có 81 chữ số nên các chữ số đã cho đều nằm giữa hai chữ số 9 này.

Ở mỗi khoảng giữa hai chữ số 9 liên tiếp có nhiều nhất là một chữ số 8 vì nếu có từ hai chữ số 8 trở lên thì giả sử trên sai. Do đó trên đây này có nhiều nhất là 8 chữ số (vô lí). Vậy điều giả sử trên là sai.

Vậy không thể xếp được các chữ số đã cho thành một dãy, sao cho với mọi $k = 1, 2, \dots, 9$ mà trong mỗi khoảng giữa hai chữ số k liên tiếp ở trên, dãy có đúng k chữ số.

Bài 10. Có bao nhiêu phân số tối giản $\frac{m}{n}$ lớn hơn 1 (m, n là số nguyên dương) thỏa mãn $m.n = 13860$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Ta có: $13860 = 2.2.3.3.5.7.11$

Vì $m.n = 13860$ nên m phải là ước số của 13860, tức là tích số của một số nhân tử trong 7 nhân tử trên, còn n là tích số của các nhân tử còn lại.

Nếu m có chứa nhân tử 2 (hoặc 3) thì nó phải chứa 2^2 (hoặc 3^2) vì ngược lại thì $\frac{m}{n}$ không tối giản.

Do đó, nếu ta kí hiệu: $a_1 = 2^2, a_2 = 3^2, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11$ thì m là tích của một số nhân tử trong các số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 còn n là tích các nhân tử còn lại. Ta có các trường hợp sau:

- Có 6 phần tử là số 1, (mẫu số là 13860)
- Có 5 phần tử có tử số là một trong 5 số $a_1, a_2, \dots, a_5$ (mẫu số là tích của bốn nhân tử còn lại).
- Có 10 phân số có tử số là tích của hai nhân tử trong năm số $a_1, a_2, \dots, a_5$ (mẫu số là tích của ba nhân tử còn lại).
- Có 10 phân số có tử số là tích của ba nhân tử trong năm số $a_1, a_2, \dots, a_5$ (mẫu số là tích của hai nhân tử còn lại).
- Có 5 phân số có tử số là tích của ba nhân tử trong năm số $a_1, a_2, \dots, a_5$ (mẫu số là tích của ba nhân tử còn lại).
- Có 1 phân số có tử số là tích của cả năm số trên (mẫu số là 1)

Vậy có phân số tối giản $\frac{m}{n}$ thỏa mãn $m.n = 13860$ là:

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

Các phân số trên được chia thành từng cặp nghịch đảo của nhau và khác 1 nên phân số lớn hơn 1 là $1 + \frac{32}{2} = 16$.

Bài 11. Kết thúc giai đoạn 1 của một giải bóng đá EURO (nghĩa là sau khi mỗi đội đều đã đá với mỗi đội khác cùng bảng một trận), người ta có nhận xét về kết quả bảng Y (có 4 đội tham gia) như sau:

- Tổng số điểm của cả 4 đội trong bảng Y là 16 (sau mỗi trận, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm, đội thua không được điểm nào).
- Đội nhất bảng là đội duy nhất được 6 điểm.

Hỏi kết quả trận đấu (thắng, hòa, thua) giữa đội nhì bảng và đội cuối bảng? Biết rằng ngôi thứ hai của đội có số điểm bằng nhau được quyết định theo hiệu số bàn thắng trừ số bàn thua. Nếu hiệu số này cũng bằng nhau thì theo số bàn thắng và nếu vẫn không xong thì bốc thăm.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán, Hà Tây năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Gọi đội nhất bảng là A, 3 đội còn lại là nhóm hai.

Đội A đấu 3 trận với 3 đội nhóm hai. Số điểm mà đội A thu được trong một trận là một trong các số 0 ; 1 ; 3. Tổng số điểm của ba trận đấu là do đội A được 6 điểm. Do đó chỉ có thể là $3 + 3 + 0 = 6$. Vậy đội A thắng 2 trận và thua 1 trận.

Gọi B là đội thắng đội A.

Tổng số điểm mà các đội nhóm hai là: $16 - 6 = 10$. Đội B được 3 điểm từ trận thắng đội A. Do đó, trong các trận đấu với nhau, tổng số điểm nhóm hai là 7 điểm.

Do số điểm trong mỗi trận đấu chỉ là một trong hai số là 3 hoặc 2. Mặt khác 3 đội nhóm hai đấu với nhau trận nên số điểm của 3 trận là ba số tự nhiên x, y, z với

$x + y + z = 7$. Do đó chỉ có thể có 2 trận hòa, 1 trận thắng.

Đội B không thể thắng, vì nếu thắng đội B sẽ có số điểm lớn hơn hoặc bằng 6 (vô lí vì số điểm của đội B nhỏ hơn 6). Do đó đội A là đội duy nhất được 6 điểm và số điểm của đội B nhỏ hơn hoặc bằng số điểm của đội A.

Vậy xảy ra hai trường hợp sau:

- *Trường hợp 1:* Đội B hòa hai trận với 2 đội nhóm hai. Khi đó đội B có 5 điểm và hai đội còn lại có số điểm lớn hơn hoặc bằng 1. Mà tổng số điểm của hai đội đó là 5 nên không đội nào có số điểm lớn hơn 4, do đó đội B nhì bảng. Vậy trận đấu giữa đội nhì bảng và đội xếp cuối bảng có kết quả hòa.

- *Trường hợp 2:* Đội B hòa một trận và thua một trận, do đó đội B được 4 điểm. Gọi C là đội thắng đội B. Khi đó hai trận còn lại có kết quả hòa, do đó đội C được 4 điểm. Đội còn lại được $16 - 6 - 4 - 4 = 2$ điểm. Vậy nếu đội C hoặc đội B xếp nhì bảng và đội xếp cuối bảng vẫn có kết quả hòa.

Bài 12. Trên mặt phẳng cho 6 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm là các số khác nhau. Ta nối mỗi cặp điểm bởi một đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong các đoạn thẳng thu được có một đoạn thẳng là cạnh bé nhất của một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác cũng có 3 đỉnh là 3 trong số 6 điểm đã cho.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2000 – 2001)

Hướng dẫn giải

Trong số 6 điểm A, B, C, D, E, F. Nối mỗi điểm với 5 điểm còn lại ta được 5 đoạn thẳng. Tô màu các cạnh của tam giác bằng hai màu xanh và đỏ trong đó cạnh bé nhất là màu đỏ, hai màu còn lại là màu xanh. Như vậy bất kì tam giác nào cũng phải có một cạnh màu đỏ (*).

Xét A là một điểm bất kì trong số 6 điểm. Có 5 đoạn thẳng chung đầu mút A mà chỉ có hai màu nên ít nhất có ba đoạn thẳng cùng màu. Có hai trường hợp sau:

- *Trường hợp 1:* Có 3 đoạn thẳng màu đỏ, chẳng hạn AB, AC, AE màu đỏ. Nếu cả ba đoạn BC, BE, CE đều là màu xanh thì tam giác BCE có 3 cạnh đều màu xanh, trái với (*). Do đó ít nhất 1 trong 3 cạnh BC, BE, CE phải có màu đỏ. Vậy phải có ít nhất một tam giác có ba cạnh màu đỏ.

- *Trường hợp 2:* Có 3 đoạn thẳng màu xanh, chẳng hạn AB, AC, AE màu xanh có một cạnh màu đỏ mà AB, AC màu xanh nên BC màu đỏ. Tương tự BE, CE có màu đỏ. Vậy tam giác BCE có 3 cạnh cùng màu đỏ.

Tóm lại luôn tồn tại một tam giác có 3 cạnh màu đỏ.

Bài 13. Cho 2001 đồng tiền, mỗi đồng tiền được sơn một mặt bằng màu đỏ và mặt kia bằng màu xanh. Xếp 2001 đồng tiền đó theo một đường tròn sao cho tất cả các đồng tiền đều có mặt xanh ngửa lên phía trên. Cho phép mỗi lần đổi mặt đồng thời 5 đồng tiền liên tiếp cạnh nhau. Hỏi với cách làm như thế, sau một số hữu hạn lần ta có thể làm cho tất cả các đồng tiền đều có mặt đỏ ngửa lên phía trên được hay không? Tại sao?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2001 – 2002)

Hướng dẫn giải

Ta lần lượt đánh số thứ tự các đồng tiền bởi các số: 1, 2, ..., 2001

- Lần 1: Lật tất cả các đồng tiền có kí hiệu từ 1 đến 2000, bớt lại đồng tiền có kí hiệu 2001.
- Lần 2: Lật tất cả các đồng tiền có kí hiệu 2001, 1, 2, ..., 1999, bớt lại đồng tiền có kí hiệu 2000.
- Lần 3: Lật tất cả các đồng tiền có kí hiệu 2000, 2001, 1, 2, ..., 1998, bớt lại đồng tiền có kí hiệu 1999.
- Lần 4: Lật tất cả các đồng tiền có kí hiệu 1998, 2000, 2001, 1, 2, ..., 1997, bớt lại đồng tiền có kí hiệu 1998.
- Lần 5: Lật tất cả các đồng tiền có kí hiệu 1998, 1999, 1, 2, ..., 1996, bớt lại đồng tiền có kí hiệu 1997.

Sau 5 lần lật như thế, ta có bảng đổi màu của các đồng tiền như sau:

Lần lật	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	1	2	3	4	Các đồng tiền khác
Lần 1	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Lần 2	X	X	X	X	X	X	Đ	Đ	X	X	X	X	X
Lần 3	Đ	Đ	Đ	Đ	X	X	X	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Lần 4	X	X	X	X	Đ	Đ	Đ	Đ	X	X	X	X	X
Lần 5	Đ	Đ	Đ	X	X	X	X	X	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ

Như vậy mỗi lần lật đúng 2000 đồng tiền liền nhau bằng 400 lần lật 5 đồng tiền cạnh nhau. Sau 5 lần lật trên, còn lại 5 đồng tiền liền tiếp cạnh nhau có màu xanh, đã mất 2000 lần lật.

Trong lần thứ 2001 chỉ lật xong 5 đồng tiền màu xanh liền tiếp cạnh nhau thì tất cả các đồng tiền có mặt đỏ ngửa lên phía trên.

Bài 14. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất bắt đầu từ chữ số 1 sao cho nếu chuyển 1 xuống vị trí cuối cùng thì số đã cho tăng lên ba lần.
(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán, Tiền Giang năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm là $A = 1a_1a_2...a_n$

Đặt $B = \overline{a_1a_2...a_n}$

Ta có: $A = 1\overline{B}$

Theo đề bài, ta có: $1\overline{B} = 3.1\overline{B}$

$$\text{Suy ra: } 10B + 1 = 3(10^n + B) \Rightarrow B = \frac{3 \cdot 10^n - 1}{7}$$

Thử với $n = 5$, ta được $B = 42857$

Khi đó số bé nhất cần tìm là: $A = 142857$

Bài 15. Trong một giải bóng đá có 10 đội bóng thi đấu vòng tròn một lượt. Trong mỗi trận, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không có điểm. Các đội có cùng số điểm sẽ được xếp hạng theo các chỉ số phụ nào đó.

a) Gọi A là một đội bóng tham dự giải, hỏi đội bóng A có thể đạt những điểm số nào.

b) Giả sử đội bóng A xếp thứ nhì khi kết thúc giải. Tìm số điểm tối đa và số điểm tối thiểu mà đội bóng A có thể đạt được.

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Ban AB, ĐHQG. TPHCM năm học 2000 – 2001)

Hướng dẫn giải

a) Theo đề bài thì số điểm của đội bóng A là một số tự nhiên.

Vì đội A đấu 9 trận:

- Nếu A thắng x trận và thua $9 - x$ trận với $x = 0, 1, 2, \dots, 9$ thì số điểm A có thể đạt được là 0, 3, 6, 9, ..., 24, 27.

- Nếu A thắng y trận, hòa 1 trận và thua $8 - y$ trận với $y = 1, 2, 3, \dots, 8$ nên số điểm A có thể đạt được là 1, 4, 7, ..., 22, 25.

- Nếu A thắng z trận, hòa 2 trận và thua $7 - z$ trận với $z = 0, 1, 2, \dots, 7$ thì số điểm A có thể đạt được là 2, 5, 8, ..., 20, 23.

b) Vì A xếp thứ nhì nên A không thể thắng cả 9 trận.

Vậy số điểm A tối đa là 25 điểm (thắng tất cả các đội còn lại và hòa đội xếp thứ nhất).

Số điểm của A không nhỏ hơn số điểm của 8 đội còn lại.

Đội A và 8 đội còn lại thi đấu cả thấy $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ trận. Số điểm ít nhất của

9 đội này đạt được là $2 \cdot 36 = 72$ điểm

Số điểm ít nhất mà đội A đạt được là $\frac{72}{9} = 8$ điểm

Điều này xảy ra khi đội xếp nhất bằng thắng cả 9 đội còn lại đều hòa nhau.

Vậy số điểm tối đa mà đội A đạt được là 25 điểm và số điểm tối thiểu mà đội A đạt được là 8 điểm.

Bài 16. Trên mặt bàn có 2005 đồng xu kích thước bằng nhau, mỗi đồng xu có hai mặt: một mặt màu xanh, một mặt màu đỏ, tất cả các đồng xu đều ngửa mặt xanh lên trên. Thực hiện trò chơi sau đây: mỗi lượt chơi phải đổi mặt bốn đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2006 lượt chơi có thể nhận được tất cả 2005 đồng xu trên mặt bàn đều ngửa mặt đỏ lên trên hay không? Giải thích tại sao?
(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Lần thứ nhất có 4 đồng xu màu xanh thành đỏ. Do đó sau lần thứ nhất có 2001 đồng xu màu xanh và 4 đồng xu màu đỏ ngửa mặt lên trên.

Giả sử trong lần lật thứ hai có x_1 đồng xu màu xanh thành màu đỏ, do đó sẽ có $(4 - x_1)$ đồng xu màu đỏ thành xanh ($0 \leq x_1 \leq 4$).

Số đồng xu có màu xanh ngửa lên phía trên là:

$$(2000 - x_1) + (4 - x_1) = 2005 - 2x_1$$

Cứ như thế sau bao nhiêu lần đi nữa thì số đồng xu có mặt màu xanh ngửa lên phía trên luôn là số lẻ.

Vậy sau 2006 lần chơi không thể nhận được 2005 đồng xu có mặt màu đỏ ngửa lên phía trên.

Bài 17. Một lớp học có N học sinh (N nguyên dương, không có hai học sinh nào có cùng chiều cao) đã được sắp xếp thành một hàng dọc ngẫu nhiên. Để sắp xếp lại hàng, mỗi lần thầy giáo chỉ có thể đổi chỗ cho hai bạn bất kì đứng sát nhau. Không giới hạn số lần đổi chỗ, hỏi thầy giáo có thể sắp xếp tập thể lớp thành một hàng dọc lần lượt từ người thấp đến người cao nhất hay không? Giải thích?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Tin, Hà Tây năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Gọi X_1 là bạn học sinh cao nhất lớp và X_1 ở vị trí thứ k ($0 \leq k \leq n$)

- Nếu $k = 1$ thì giữ nguyên vị trí của X_1 .

- Nếu $k > 1$ thì đổi chỗ X_1 cho bạn học sinh ở vị trí $k - 1$, lại đổi chỗ tiếp cho bạn thứ $k - 2, \dots$, cho đến khi X_1 ở vị trí thứ 1, hết $k - 1$ lần đổi chỗ.

Cứ như thế đối với bạn học sinh cao thứ hai, thứ ba, $\dots$, thứ n của lớp ta được cách sắp xếp theo yêu cầu của bài toán.

Câu 18. Cho A là tập hợp gồm 6 phần tử bất kì của tập hợp $\{0; 1; 2; \dots; 14\}$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp con B_1 và B_2 của tập hợp A (B_1, B_2 khác nhau và khác rỗng) sao cho tổng tất cả các phần tử của tập hợp B_1 bằng tổng tất cả các phần tử của tập hợp B_2 .

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu Văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Xét các tập con không quá 2 phần tử của A .

Giả sử các tổng của các phần tử của mỗi tập con đó đều khác nhau. Do đó các phần tử của A đều khác 0.

Giả sử 6 phần tử là $a_1 < a_2 < \dots < a_6$. Khi đó $a_1 \geq 1; a_2 \neq a_1$ nên $a_2 \geq 2; a_3 \neq a_1; a_3 \neq a_2$ và $a_3 \neq a_1 + a_2$ nên $a_3 \geq 4$.

Tương tự như trên, ta có: $a_4 \geq 7, a_5 \geq 14, a_6 \geq 22$.

Vô lí vì $a_i \in \{0; 1; 2; \dots; 14\}$.

Vậy trong các phần tử đang xét, có ít nhất hai tập hợp có tổng các phần tử bằng nhau.

Bài 19. Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Ban AB, ĐHQG TPHCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Giả sử 8 số nguyên dương tùy ý đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_8$ với $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_8 \leq 20$

Nhận xét rằng với 3 số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $b + c > a$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Do đó nếu trong các số $a_1, a_2, \dots, a_8$ không chọn được 3 số là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì:

$$a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 1 + 1 = 2$$

$$a_5 \geq a_6 + a_7 \geq 2 + 1 = 3$$

$$a_4 \geq a_5 + a_6 \geq 3 + 2 = 5$$

$$a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 5 + 3 = 8$$

$$a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 8 + 5 = 13$$

$$a_1 \geq a_2 + a_3 \geq 13 + 8 = 21$$

Điều trên trái với giả thiết.

Vậy điều giả sử trên là sai. Do đó trong 8 số nguyên trên đã cho luôn chọn được ba số x, y, z là 3 cạnh của một tam giác.



CHỦ ĐỀ 13.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG – ĐỊNH LÝ PITAGO

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho tam giác vuông ABC như hình vẽ. Ta có các hệ thức sau:

- $b^2 = ab'$
- $c^2 = ac'$
- $h^2 = b'c'$
- $ha = bc$
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Định lý Pitago: $a^2 = b^2 + c^2$

2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn

- $\sin \alpha = \frac{b}{a}$
- $\cos \alpha = \frac{c}{a}$
- $\tan \alpha = \frac{b}{c}$
- $\cot \alpha = \frac{c}{b}$

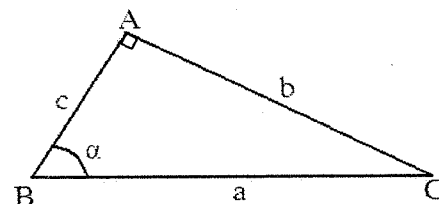
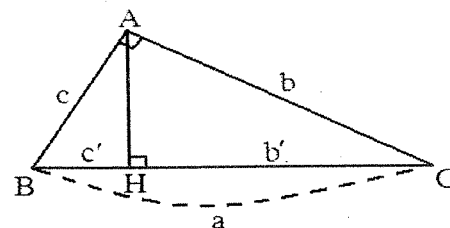
Tính chất:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$



$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$$

Một số tỉ số lượng giác thường gặp:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

➤ B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác vuông APN vuông tại A, có đường cao AD. Trên nửa mặt phẳng bờ AD không chứa P vẽ hình vuông ABCD. Cạnh AN cắt BC tại M. Chứng minh rằng:

- a) $BM = PD$.
- b) $\triangle APM$ cân tại A.
- c) $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{PAD} = \widehat{BAM}$ (cùng phụ với $\widehat{DAM}$)

$$\widehat{ADP} = \widehat{ABM} = 90^\circ$$

$$AD = BC$$

Do đó: $\triangle APD = \triangle AMB$

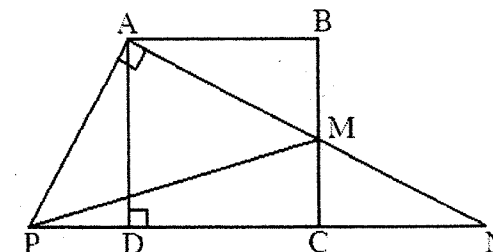
Suy ra: $BM = PD$ (đpcm)

b) Từ $\triangle APD = \triangle AMB$, ta có:

$$AP = AM$$

Vậy $\triangle APM$ cân tại A.

c) Vì tam giác APN vuông tại A, với đường cao AD, ta có:



$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2}$$

Vì $AP = AM$ nên $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ (đpcm)

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh rằng $AH = 3HD$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $\triangle HCD \sim \triangle ABM$ (g - g)

Mà $AH = 2AM$ nên $HC = 2HD$.

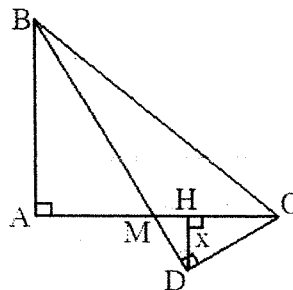
Đặt $HD = x$, khi đó $HC = 2x$

Ta có: $DH^2 = HM \cdot HC$ hay $x^2 = HM \cdot 2x$

Suy ra: $HM = 0,5x$; $MC = 2,5x$; $AM = 2,5x$;

$AH = 3x$

Vậy $AH = 3HD$



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác trong góc A là AD với $DA = 1$ và $DB = 3$. Hỏi đường cao AA' chia cạnh BC theo tỉ số là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

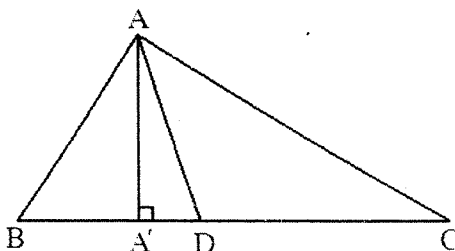
Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$ (tính

chất đường phân giác trong tam giác)

Áp dụng hệ thức lượng vào trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AB^2 = AB' \cdot BC; AC^2 = AC' \cdot BC$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB' \cdot BC}{AC' \cdot BC} = \frac{AB'}{AC'} \Rightarrow \frac{AB'}{AC'} = \frac{1}{9}$$



Bài 4. Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, vẽ tia Ax vuông góc với AB, vẽ tia By vuông góc với AB. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB và C là một điểm thuộc tia Ax. Vẽ tia Cz sao cho $\widehat{OCz} = \widehat{OCA}$, tia Cz cắt By tại D ($AC < BD$). Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E.

a) Kẻ OH vuông góc với CD. Chứng minh $OC^2 \cdot HD = OD^2 \cdot HC$.

b) Kẻ KH vuông góc với AB. Chứng minh $\frac{HA^2}{HB^2} = \frac{KA}{KB} = \frac{EA}{EB}$.

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy $\triangle AOC = \triangle HOC$

Do đó: $OA = OH$ và

$$\widehat{AOC} = \widehat{COH}$$

Suy ra OC là phân giác của $\angle AOH$ (1)

Tương tự, ta có: OD là phân giác của $\angle BOH$ (2) và $\angle AOH$ là góc kề bù với $\angle BOH$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $OC \perp OD$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông OCD, ta có:

$$\frac{OC^2}{OD^2} = \frac{CH \cdot CD}{DH \cdot CD} = \frac{CH}{DH}$$

$$\Rightarrow OC^2 \cdot DH = OD^2 \cdot HC \text{ (đpcm)}$$

b) Ta có: $OA = OH$ nên $\triangle OAH$ là tam giác cân

Suy ra $OC \perp AH$ tại P (vì OC là phân giác của $\angle AOC$) $\Rightarrow \angle OPH = 90^\circ$

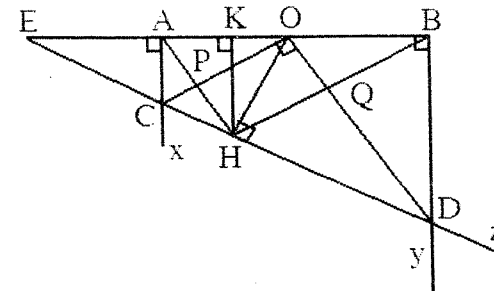
Tứ giác OPHQ có $\angle OPQ = \angle OPH = \angle OQH = 90^\circ$ nên OPQH là hình chữ nhật $\Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông HAB, ta có:

$$\frac{HA^2}{HB^2} = \frac{AK \cdot AB}{KB \cdot AB} = \frac{AK}{KB} \text{ (4)}$$

$$\text{Vì } CA \parallel KH \parallel DB \text{ nên } \frac{KA}{KB} = \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{BD} = \frac{EA}{EB} \text{ (5)}$$

$$\text{Từ (4) và (5), suy ra: } \frac{HA^2}{HB^2} = \frac{KA}{KB} = \frac{EA}{EB} \text{ (đpcm)}$$



Bài 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường cao $AH = \frac{12a}{5}$; $BC = 5a$.

Hãy tính hai cạnh góc vuông theo a.

Hướng dẫn giải

Đặt $AB = x$; $AC = y$

Áp dụng hệ thức lượng vào trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC$$

$$\text{Hay } xy = \frac{12a}{5} \cdot 5a = 12a^2 \quad (1)$$

Áp dụng định lí Pitago vào trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\text{Hay } 25a^2 = x^2 + y^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 25a^2 + 24a^2 = 49a^2 \\ (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 25a^2 - 24a^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 7a \\ x-y = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4a \\ y = 3a \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 3a \\ y = 4a \end{cases}$$

Vậy hai cạnh góc vuông của tam giác vuông ABC có độ dài là 4a và 3a.

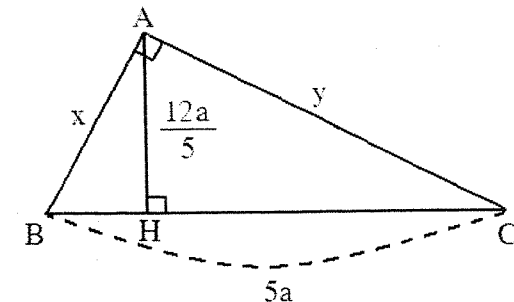
Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, AH là đường cao.

Cho $BH = 2\text{cm}$, $HC = 6\text{cm}$.

a) Tính AB, AC.

b) Tính $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$ và $\cot B$.

c) Tính $\hat{B}$ và $\hat{C}$.



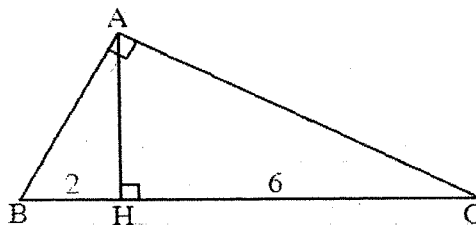
Hướng dẫn giải

a) Ta có: $BC = BH + HC = 2 + 6 = 8\text{cm}$

Áp dụng hệ thức lượng vào trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AB^2 = BH \cdot BC = 2 \cdot 8 = 16\text{cm} \\ \Rightarrow AB = 4\text{cm}$$

$$AC^2 = HC \cdot BC = 6 \cdot 8 = 48\text{cm} \\ \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}\text{cm}$$



b) Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}; \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

c) Ta có: $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$

$$\text{Mặt khác: } \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Bài 7. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

b) $\sin 28^\circ - \cos 62^\circ + \cot 45^\circ$

c) $\tan 38^\circ \cdot \tan 52^\circ \cdot \tan 60^\circ$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ \\ &= (\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \sin 28^\circ - \cos 62^\circ + \cot 45^\circ = \cos(90^\circ - 28^\circ) - \cos 62^\circ + \cot 45^\circ \\ &= \cos 62^\circ - \cos 62^\circ + \cot 45^\circ = \cot 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \tan 38^\circ \cdot \tan 52^\circ \cdot \tan 60^\circ = \tan 38^\circ \cdot \cot(90^\circ - 52^\circ) \cdot \tan 60^\circ \\ &= \tan 38^\circ \cdot \cot 38^\circ \cdot \tan 60^\circ = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Bài 8. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

b) $\sin^{2009} \alpha + \cos \alpha \leq \frac{5}{4}$ với α là góc nhọn.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \Leftrightarrow (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ (đúng)

Vậy $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (đpcm)

b) Ta có: $0 < \sin\alpha < 1$

Do đó: $\sin^{2009}\alpha + \cos\alpha < \sin^2\alpha + \cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha + \cos\alpha$

$= -\left(\cos^2\alpha - \cos\alpha + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4} = -\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$ (đpcm)

Bài 9. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Gọi AH, BI, CK là các đường cao của tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{S_{HIK}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S_{HIK} = S_{ABC} - S_{AKI} - S_{BKH} - S_{CHI}$

Suy ra: $\frac{S_{HIK}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{AKI}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BKH}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CHI}}{S_{ABC}}$

Tam giác AKI và tam giác ABC có góc A chung nên:

$\frac{S_{AKI}}{S_{ABC}} = \frac{AK \cdot AI}{AB \cdot AC} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AI}{AC}$

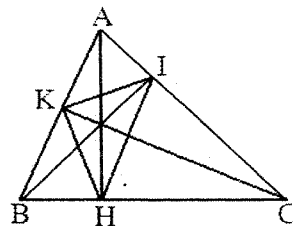
Trong hai tam giác vuông AKC và AIB, ta có:

$\cos A = \frac{AK}{AC}$ và $\cos A = \frac{AI}{AB}$

Suy ra: $\frac{S_{AKI}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$

Tương tự, ta được: $\frac{S_{BKH}}{S_{ABC}} = \cos^2 B$; $\frac{S_{CHI}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$

Vậy $\frac{S_{HIK}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$ (đpcm).



Bài 10. Cho tam giác vuông ABC vuông ở A có $AB < AC$ và trung tuyến AM, $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh rằng: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin\beta$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu Văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2004 - 2005)

Hướng dẫn giải

Kẻ $AH \perp BC$

Do $AB < AC$ nên H thuộc đoạn BC

Ta có:

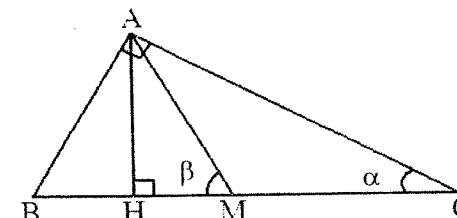
$AH = AM \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} BC \cdot \sin\beta$ (1)

Mặt khác:

$AH = AC \cdot \sin\alpha = BC \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\sin\beta = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Vậy $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1 + \sin\beta$ (đpcm)



Bài 11. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. D là một điểm trên đoạn BC. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AD = d$, $DB = m$, $DC = n$.

1. Chứng minh: $da^2 = b^2m + cn^2 - amn$.

2. Cho biết AD là phân giác trong góc A. Chứng minh $AD^2 < AB \cdot AC$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM năm học 2001 - 2002)

Hướng dẫn giải

1. Kẻ $AH \perp BC$

- Xét trường hợp D nằm trên đoạn HC

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông AHB, ta được:

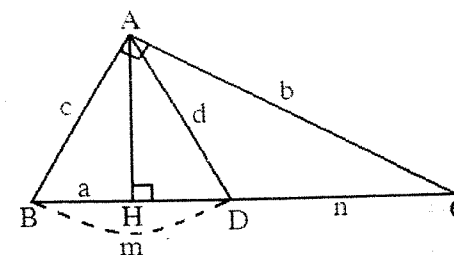
$AH^2 + BH^2 = AB^2$

$\Rightarrow AH^2 = c^2 - BH^2$ (1)

Tương tự trong tam giác vuông AHD, ta có:

$AH^2 = d^2 - DH^2$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $c^2 - BH^2 = d^2 - DH^2$



$$\Rightarrow d^2 = c^2 + DH^2 - BH^2$$

$$\Rightarrow d^2 = c^2 + BD(DH - BH)$$

$$\Rightarrow d^2 n = c^2 n + mn(DH - BH)$$

Chứng minh tương tự, ta có: $d^2 m = b^2 m + mn(-DH - CH)$

$$\text{Do đó: } d^2 m + d^2 n = b^2 m + c^2 n + mn(-DH - CH + DH - BH)$$

$$\Rightarrow d^2(m + n) = b^2 m + c^2 n + mn(-CH - BH)$$

$$\Rightarrow d^2 a = b^2 m + c^2 n - amn$$

- Xét trường hợp D nằm trên đoạn thẳng HB:

Chứng minh tương tự, ta có: $d^2 a = b^2 m + c^2 n - amn$

2. Vì $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$, do đó kẻ DE sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

Ta có: $AE < AC$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ADE$ có:

$$\widehat{BAD} = \widehat{DAE} \text{ (vì AD là phân giác)} \text{ và } \widehat{ABD} = \widehat{ADE}$$

Do đó: $\triangle ABD \sim \triangle ADE$

$$\text{Suy ra: } \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AE$$

Vậy $AD^2 < AB \cdot AC$

Bài 12. Giả sử H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Trên đoạn HB và HC lấy hai điểm M, N sao cho các góc AMC và ANB đều vuông. Chứng minh rằng $AN = AM$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán - Tin ĐH Vinh, năm học 2002 - 2003)

Hướng dẫn giải

Vì tam giác ANB vuông tại N, với đường cao NF, ta có:

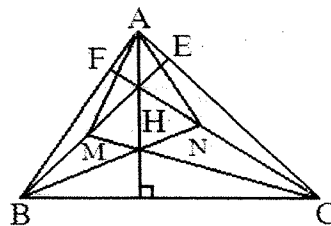
$$AN^2 = AF \cdot AB \quad (1)$$

Vì tam giác AMC vuông tại M, với đường cao ME, ta có: $AM^2 = AE \cdot AC \quad (2)$

Dễ thấy $\triangle AEB \sim \triangle AFC$ (g - g) nên

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $AM = AN$ (đpcm)



Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A có AD là đường phân giác của góc A.

Cho biết $AB = c$, $AC = b$ và $AD = d$. Chứng minh: $\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

Kẻ $DE \perp AC$ (với E thuộc đoạn AC).

Tam giác AED vuông cân tại E nên $AD = AE \cdot \sqrt{2} \quad (1)$

$$\text{Ta có: } \frac{EC}{AC} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{AC - AE}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AE \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right) = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } \frac{\sqrt{2}}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \text{ hay } \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

✪✪✪

CHỦ ĐỀ 14.

ĐỊNH LÍ TA - LÉT VÀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Định lí Ta - lét trong tam giác

- Định lí thuận: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
- Định lí đảo: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.
- Hệ quả: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

2. Tam giác đồng dạng

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ nếu:

$$\widehat{A} = \widehat{A'}; \widehat{B} = \widehat{B'}; \widehat{C} = \widehat{C'}; \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k \text{ (k là tỉ số đồng dạng)}$$

Dấu hiệu nhận biết hai tam giác đồng dạng:

Cho hai tam giác ABC và A'B'C' :

- Nếu $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$ thì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (c - c - c)

- Nếu $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'}$; $\hat{A} = \hat{A}'$ thì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (c - g - c)

- Nếu $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$ thì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (g - g)

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại sẽ tạo thành một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho.

Nếu hai tam giác đồng dạng với nhau thì:

- Tỷ số đường phân giác, tỷ số hai đường cao, tỷ số hai đường trung tuyến, tỷ số hai bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp, tỷ số hai chu vi tương ứng của hai tam giác bằng tỷ số đồng dạng.

- Tỷ số hai diện tích bằng bình phương tỷ số đồng dạng.

► B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H vuông góc với MH cắt cạnh AB tại P, cắt cạnh AC tại Q. Chứng minh:

a) $\Delta AHB \sim \Delta CMH$ và $\Delta QHA \sim \Delta HMB$.

b) $HP = HQ$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $PH \perp MH$; $AP \perp HC$

Suy ra $\widehat{APH} = \widehat{CHM}$ (1) (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Tương tự, ta có: $\widehat{PAH} = \widehat{HCM}$ (2)

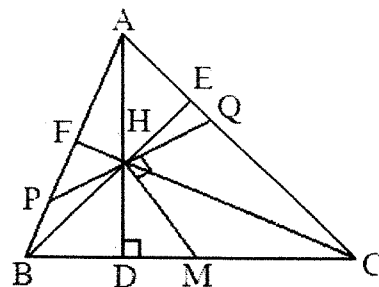
Từ (1) và (2), suy ra: $\Delta AHP \sim \Delta CMH$

(g - g) (3)

Tương tự, ta có: $\Delta QHA \sim \Delta HMB$ (g - g)

b) Từ (3), ta có: $\frac{HP}{HM} = \frac{AH}{CM}$ hay $\frac{HP}{AH} = \frac{MH}{CM}$ (5)

Từ (4), ta có: $\frac{QH}{HM} = \frac{HA}{MB}$ hay $\frac{QH}{HA} = \frac{MH}{MB}$ (6)



Vì $CM = CB$ nên từ (5) và (6), suy ra: $\frac{HP}{HM} = \frac{HQ}{HA} \Rightarrow HP = HQ$ (đpcm)

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB và một điểm nằm giữa AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB, kẻ tia Ax, By lần lượt vuông góc với AB tại C, D sao cho $AC \cdot BD = AP \cdot PB$.

a) Chứng minh rằng $\Delta CAP \sim \Delta PBD$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{CPD} = 90^\circ$.

c) Gọi M là hình chiếu của P trên CD. Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$AC \cdot BD = AP \cdot PB \Rightarrow \frac{AC}{AP} = \frac{BP}{BD}$$

Suy ra $\Delta CAP \sim \Delta PBD$

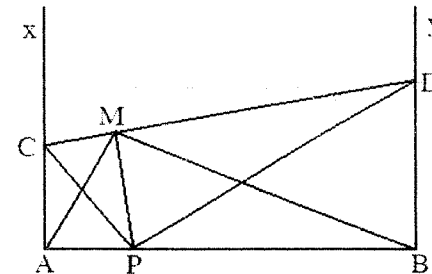
b) Theo câu a), suy ra: $\widehat{CPA} = \widehat{PDB}$

Mặt khác, ta có: $\widehat{PDB} + \widehat{DPB} = 90^\circ$

Suy ra:

$$\widehat{CPA} + \widehat{DPB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CPD} = 90^\circ$$

c) Ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{AMP} + \widehat{BMP} = \widehat{ACP} + \widehat{BDP} = \widehat{BPD} + \widehat{APC} = 90^\circ$



Bài 3. Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC, CA lấy tương ứng các điểm M, N, P sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{CP}{PA} = k$.

a) Chứng minh rằng: $\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{k}{(k+1)^2}$.

b) Cho diện tích tam giác ABC bằng S. Hãy tính diện tích S' của tam giác MNP theo k và S.

Hướng dẫn giải

a) Kẻ $BB_1 \perp AC$; $MM_1 \perp AC$

$$\text{Suy ra } MM_1 \parallel BB_1 \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MM_1}{BB_1}$$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AP \cdot MM_1}{\frac{1}{2} AC \cdot BB_1} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AC}{AB}$$

$$\text{Mà } \frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AM+AB} = \frac{AM \cdot MB}{(AM+MB) \cdot MB} = \frac{k}{k+1}$$

$$\text{Và } \frac{AP}{AC} = \frac{AP}{AP+PC} = \frac{\frac{AP}{AP}}{\frac{AP+PC}{AP}} = \frac{1}{k+1}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{k}{(k+1)^2}$$

Bài 4. Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm trên cạnh BC. Qua A kẻ tia Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD tại K. Qua E kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AI tại G. Chứng minh:

- AE = AF và tứ giác EGKF là hình thoi.
- $\triangle AKF \sim \triangle CAF$ và $AF^2 = FK \cdot FC$.
- Khi E thay đổi trên BC, chứng minh $EK = BE + DK$ và chu vi tam giác EKC không đổi.

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy $\triangle ABE = \triangle ADF$ (g - c - g)

Suy ra: AE = AF

Tam giác AEF vuông cân tại A nên $AI \perp EF$

Lại có $\triangle IEG = \triangle IFK$ (g - c - g)

Suy ra: IG = IK

Tứ giác EGFK có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, và đồng thời vuông góc với nhau nên là hình thoi (đpcm).

b) Ta có: $\widehat{KAF} = \widehat{ACF} = 45^\circ$

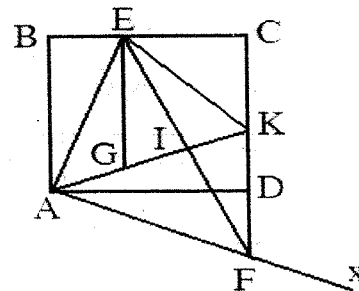
Nên $\triangle AKF \sim \triangle CAF$ (g - g)

$$\text{Suy ra: } \frac{AF}{CF} = \frac{KF}{AF} \Rightarrow AF^2 = KF \cdot CF$$

c) Vì tứ giác EGFK là hình thoi nên $KE = KF = KD + DF = KD + BE$

Nên chu vi của tam giác EKC là:

$$KC + CE + EK = KC + CE + KD + BE = 2BC = \text{const}$$



Bài 5. Cho hình thang ABCD có đáy lớn là CD và E là trung điểm của CD. Gọi M là giao điểm của AE và BD, N là giao điểm của BE và AC. Chứng minh rằng $MN \parallel AB$. Cho $AB = a$, $CD = b$. Hãy tính MN.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } AB \parallel DE \text{ nên } \frac{ME}{MA} = \frac{ED}{AB}$$

$$\text{Mà } ED = EC \text{ nên } \frac{ME}{MA} = \frac{EC}{AB} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } AB \parallel EC \text{ nên } \frac{NE}{NB} = \frac{EC}{AB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

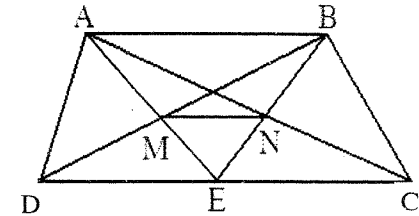
$$\frac{ME}{MA} = \frac{NE}{NB} \Rightarrow MN \parallel AB$$

$$\text{Lại có } MN \parallel EC \text{ nên } \frac{MC}{EC} = \frac{AN}{AC} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Và } AB \parallel EC \text{ nên } \frac{AN}{NC} = \frac{AB}{EC} &\Rightarrow \frac{AN}{AN+NC} = \frac{AB}{AB+EC} \\ &\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{a}{a+\frac{b}{2}} = \frac{2a}{2a+b} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (3) và (4), suy ra: } \frac{MC}{EC} = \frac{2a}{2a+b}$$

$$\text{Mà } EC = \frac{b}{2} \text{ nên } MN = \frac{ab}{2a+b}$$



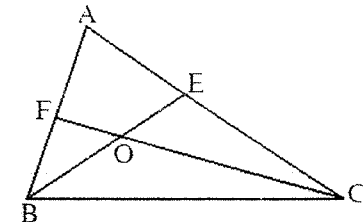
Bài 6. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BE, CF cắt nhau tại O và $\frac{BO}{BE} \cdot \frac{CO}{CF} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Hướng dẫn giải

Đặt $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$

Áp dụng tính chất của đường phân giác ta có:

$$CE = \frac{ab}{a+c}; \quad OE = \frac{a+c}{b}; \quad BE = \frac{a+c}{a+b+c}$$



$$\frac{CO}{CF} = \frac{a+b}{a+b+c}$$

$$\text{Mà } \frac{BO}{BE} \cdot \frac{CO}{CF} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(a+c)(a+b)}{(a+b+c)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Bài 7. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c, đường phân giác AD.

a) Tính độ dài BC, DC.

b) Tia phân giác của góc B cắt AD tại I. Tính tỉ số $\frac{AI}{ID}$.

c) Cho $BC = \frac{AB+AC}{2}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng IG // BC.

Hướng dẫn giải

a) Vì AD là đường phân giác của tam giác

$$ABC \text{ nên } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

Suy ra:

$$\frac{BD}{BD+DC} = \frac{c}{c+b} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{c}{c+b} \Rightarrow BD = \frac{ac}{c+b}$$

$$\text{Do đó } DC = a - \frac{ac}{c+b} = \frac{ab}{c+b}$$

b) Vì BI là đường phân giác của tam giác ABD nên

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{c}{\frac{ac}{c+b}} = \frac{c+b}{a}$$

c) Theo câu b), ta có: $\frac{AI}{ID} = \frac{c+b}{a}$

$$\text{Nếu } a = \frac{b+c}{2} \text{ thì } \frac{AI}{ID} = 2$$

$$\text{Lại có } \frac{AG}{ID} = 2 \text{ (M là trung điểm của BC)} \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AG}{GM} \Rightarrow IG \parallel BC$$

Bài 8. Giả sử D là một điểm trong tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^\circ$ và $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Chứng minh rằng $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Về phía ngoài của tam giác ABC dựng tam giác BCE vuông cân tại C.

Ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^\circ = \widehat{ACE}$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{CE}$$

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle ACF$ (c - g - c)

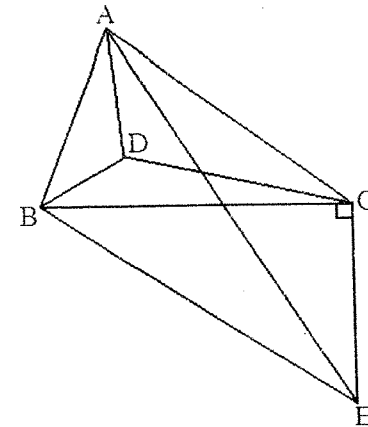
Suy ra: $\triangle ABE \sim \triangle ADC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AD \cdot BE$$

Tam giác vuông cân ABE có $BE = \sqrt{2}BC$

$$\text{Do đó } AB \cdot DC = \sqrt{2}AD \cdot BC = \sqrt{2}AC \cdot BD$$

$$\text{Vậy } \frac{AB \cdot DC}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$$



Bài 9. Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm G thuộc cạnh BC, điểm H thuộc cạnh CD sao cho $\widehat{GOH} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

a) $\triangle HOD \sim \triangle OGB$.

b) $MG \parallel AH$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{HOD} + \widehat{BOG} = 135^\circ$;

$$\widehat{OGB} + \widehat{BOG} = 135^\circ$$

Suy ra: $\widehat{HOD} = \widehat{OGB}$

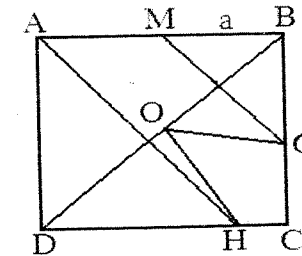
Do đó $\triangle HOD \sim \triangle OGB$ (g - g)

b) Theo câu a), suy ra $\frac{HD}{OB} = \frac{DO}{BG}$

Đặt $BM = a$, ta có: $AD = 2a$; $OB = OD = a\sqrt{2}$

$$\text{Suy ra: } HD \cdot BG = OB \cdot OD = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a \cdot a = AD \cdot BM$$

$$\Rightarrow \frac{HD}{AD} = \frac{BM}{BG}$$



Tam giác AHD đồng dạng với tam giác GMB (c - g - c)

Suy ra: $\widehat{AHD} = \widehat{GMB} \Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{GMB} \Rightarrow MG \parallel AH$ (đpcm)

Bài 10. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy các điểm I và K sao cho $AI = IK = KB$, trên cạnh BC lấy các điểm E và D sao cho $BD = DE = EC$, trên cạnh AC lấy các điểm F và G sao cho $AF = FG = GC$. Gọi M là giao điểm của AD và BF, N là giao điểm của BG và CK, P là giao điểm của AE và CI.

a) Chứng minh rằng các cạnh của tam giác MNP song song với các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác MNP theo diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{AK}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow KG \parallel BC$ và

$$KG = \frac{2}{3}BC$$

$$\text{Do đó } NK = \frac{2}{3}NC \Rightarrow CN = \frac{2}{3}CK$$

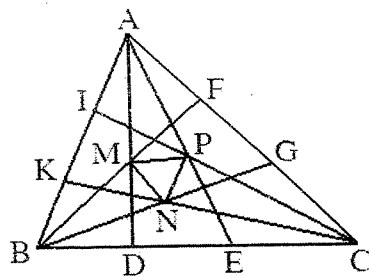
Tương tự, ta có: $NP \parallel IK$ và $NB = \frac{3}{5}IK$

Tương tự như trên, ta có: $MP \parallel BC$, $MN \parallel AC$

Vậy các cạnh của tam giác MNP song song với các cạnh của tam giác ABC.

$$\text{b) Ta có: } NP = \frac{3}{5}IK = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}AB = \frac{1}{5}AB$$

$$\text{Do đó: } S_{MNP} = \frac{1}{25}S_{ABC}$$



Bài 11. Cho một điểm M ở trong góc xOy. Một đường thẳng d đi qua M cắt hai cạnh của góc ở A và B. Chứng minh rằng tổng $\frac{1}{S_{OMA}} + \frac{1}{S_{OMB}}$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Hướng dẫn giải

Kẻ $MI \parallel Oy$

$$\text{Ta có: } \frac{AB}{MB} = \frac{AO}{IO} \text{ (định lý Ta-let)}$$

Áp dụng nhận xét về tỉ số diện tích của hai tam giác có chung đường cao,

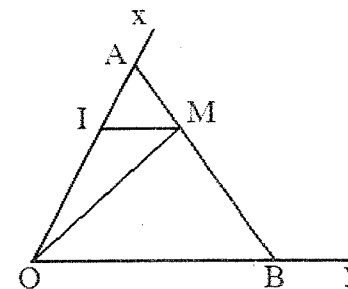
$$\text{ta có: } \frac{S_{OAB}}{S_{OMB}} = \frac{S_{OMA}}{S_{OMI}}$$

$$\text{Vì } S_{OMI} \text{ không đổi} \Rightarrow \frac{S_{OMA} \cdot S_{OMB}}{S_{OAB}} \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{OMA} \cdot S_{OMB}} \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{OMA} + S_{OMB}}{S_{OMA} \cdot S_{OMB}} \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_{OMA}} + \frac{1}{S_{OMB}} \text{ không đổi}$$



CHỦ ĐỀ 15.

TỨ GIÁC - ĐA GIÁC

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Hình thang

- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song với nhau.
- Hai góc kề của một cạnh bên hình thang thì bù nhau.
- Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau. Trong hình thang cân, hai cạnh bên thì bằng nhau.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.
- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh bên của hình thang.
- Diện tích của hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) là: $S = \frac{AB + CD}{2} \cdot h$ (với h là độ dài đường cao).

2. Hình bình hành

Hình bình hành là tứ giác có hai cặp cạnh đối song song với nhau.

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có hai cặp cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cặp cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

Diện tích hình bình hành bằng đáy nhân với chiều cao.

3. Hình chữ nhật

- Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất như hình bình hành và hình thang.

Dấu hiệu nhận biết:

- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

Diện tích hình chữ nhật bằng chiều dài nhân với chiều rộng.

4. Hình thoi

- Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
- Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau và là các đường phân giác của các góc hình thoi.
- Hình thoi có tất cả các góc của hình bình hành.

Dấu hiệu nhận biết:

- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.

Diện tích hình thoi bằng tích hai đường chéo hoặc đáy nhân với chiều cao.

5. Hình vuông

- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.
- Hình vuông có tất cả các tính chất như hình chữ nhật và hình thoi.

Dấu hiệu nhận biết:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có đường chéo là phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

Diện tích hình vuông bằng cạnh nhân với cạnh.

6. Đa giác

- Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.
- Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

- Số đo mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\frac{(n-2)180^\circ}{2}$.

- Số đường chéo của đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)180^\circ}{n}$.

➤ BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), có phân giác BD và CE . Gọi I là trung điểm của BC , J là trung điểm của ED và O là giao điểm của BD và CE . Chứng minh:

- Tứ giác $BEDC$ là hình thang cân.
- $BE = ED = DC$.
- Bốn điểm A, I, J, O thẳng hàng.

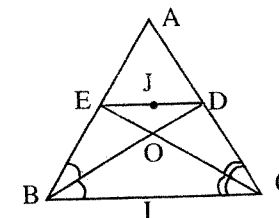
Hướng dẫn giải

- Vì BD và CE là phân giác của góc B và C nên $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ và $\widehat{ACE} = \widehat{ECB}$.

Tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$. Do đó $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$.

Mặt khác: $AB = AC$ (tam giác ABC cân tại A)

Suy ra $\triangle ABD = \triangle ACE$ (g - c - g)



Do đó $AE = AD$ nên tam giác ADE cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (1)

Tam giác ABC cân ở A nên $\widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ABC} \Rightarrow ED \parallel BC$

Do đó tứ giác $BEDC$ là hình thang.

Mặt khác, ta có: $\widehat{B} = \widehat{C}$

Vậy tứ giác $BEDC$ là hình thang cân.

b) Do $ED \parallel BC$ nên $\widehat{DBC} = \widehat{EDB}$

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$, suy ra $\widehat{DBC} = \widehat{ABD}$

Tam giác BED cân tại E nên $BE = ED$

Mà $BE = DC$ (hai cạnh bên của hình thang cân $BEDC$) nên $BE = ED = DC$

c) Vì I là trung điểm của BC nên AI là trung tuyến của tam giác cân ABC , do đó AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ (1)

Tương tự, ta có AJ là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ (2)

Ta có: $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} \Rightarrow \triangle OBC$ cân tại O nên $OB = OC$

$\triangle AOB = \triangle AOC$ (c - g - c) nên $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra AI, AJ, AO trùng nhau.

Vậy bốn điểm A, I, O, J thẳng hàng.

Bài 2. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{A} = 60^\circ$. Trên các cạnh AD và CD , lấy các điểm M và N sao cho $AM + CN = AD$.

a) Chứng minh rằng tam giác BMN đều.

b) Gọi P là điểm xứng của N qua BC . Chứng minh MP song song với CD .

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $AM + CN = AD = AM + MD$

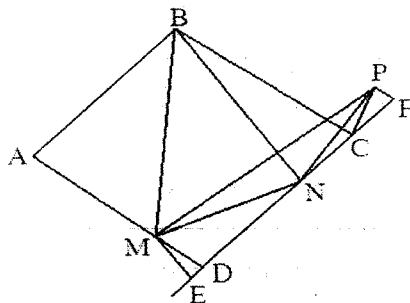
Suy ra $CN = MD$ và $AM = DN$

Tam giác ABD cân tại A và có góc $\widehat{A} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

Do đó, ta có: $BD = AB = BC$ và $\widehat{ADB} = 60^\circ$

Mặt khác: $BD = BC$;

$\widehat{BDM} = \widehat{BCN} = 60^\circ$; $DM = CN$



Suy ra $\triangle BMD = \triangle BCN \Rightarrow BM = BN$ (1)

Lại có: $\widehat{DBN} + \widehat{NBC} = 60^\circ$ và $\widehat{MBD} = \widehat{NBC}$

Suy ra: $\widehat{MBN} = 60^\circ$ (1)

Từ (1) và (2), suy ra tam giác BMN đều.

b) Kẻ $MB \perp CD$ và $PF \perp CD$.

Vì tam giác NPC cân nên $MD = NC = CP$ (3)

Mặt khác: $\widehat{MDE} = 180^\circ - \widehat{ADF} = 60^\circ$ và $\widehat{PCF} = 180^\circ - \widehat{NCP} = 60^\circ$

Do đó $\widehat{MDE} = \widehat{BCF} = 60^\circ$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra $\triangle MED = \triangle PCF \Rightarrow ME = PF$

Mặt khác $ME \parallel PF$ nên tứ giác $MPEF$ là hình bình hành.

Do đó $MP \parallel CD$ (đpcm)

Bài 3. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD} = 40^\circ$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên cạnh AB . Trên tia đối của tia BC , tia đối của tia DC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $HM \parallel AN$. Tính số đo của góc MON .

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Quốc Học Huế năm học 2002 - 2003)

Hướng dẫn giải

Ta có $\triangle MBH \sim \triangle ADN$

$$\Rightarrow \frac{MB}{AD} = \frac{BH}{DN}$$

$$\Rightarrow MB \cdot DN = BH \cdot AD \quad (1)$$

$$\triangle OHB \sim \triangle AOD$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{DO} = \frac{OB}{AD}$$

$$\Rightarrow DO \cdot ON = BH \cdot AD \quad (2)$$

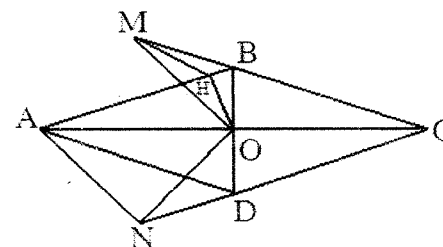
$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } MB \cdot DN = DO \cdot OB \Rightarrow \frac{MB}{OB} = \frac{DO}{DN}$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{MBO} = 180^\circ - \widehat{CBD} = \widehat{ODN}$$

$$\text{Nên } \triangle MBO \sim \triangle ODN \Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{NOD}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \widehat{MON} &= 180^\circ - (\widehat{MOB} + \widehat{NOD}) = 180^\circ - (\widehat{MOB} + \widehat{OMB}) \\ &= 180^\circ - \widehat{OBC} = 110^\circ \end{aligned}$$

Vậy số đo của góc MON là 110° .



Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại B. Các đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với AB cắt tia BF tại F.

- 1) Chứng minh rằng $AF \parallel CH$.
- 2) Tứ giác AHCF là hình gì?

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Bắc Giang năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

- 1) Ta có: $AF \perp AB$ và $CH \perp AB$

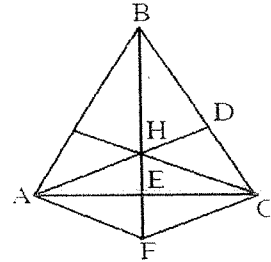
Suy ra: $AF \parallel CH$.

- 2) Do $AF \parallel CH$ nên $\widehat{EAF} = \widehat{ECH}$

Tam giác ABC cân tại B có $BE \perp AC$ nên $AE = EC$.

Do đó $\triangle AEF = \triangle CEH$ (g - c - g) nên $AF = CH$.

Suy ra tứ giác AHCF là hình bình hành, và có hai đường chéo vuông góc nhau nên nó là hình thoi.



Bài 5. Cho hình thoi ABCD. Trên tia đối của BA lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N, trên tia đối của tia DC lấy điểm P và trên tia đối của tia AD lấy điểm Q sao cho $BM = CN = DP = AQ$.

- a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.
- b) Chứng minh rằng hình bình hành MNPQ và hình thoi ABCD có chung tâm đối xứng.
- c) Nếu ABCD là hình vuông thì tứ giác MNPQ là hình gì? Vì sao?

Hướng dẫn giải

- a) Dễ thấy $\triangle BMN = \triangle DPQ$ (c - g - c)

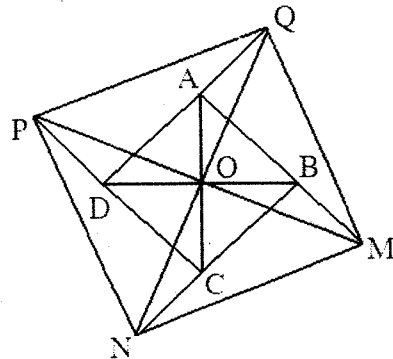
Suy ra: $MN = PQ$

$\triangle AMQ = \triangle CPN$ (c - g - c)

Suy ra: $QM = NP$

Do đó tứ giác MNPQ là hình bình hành.

- b) Tứ giác ABCD là hình thoi nên AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.



Tứ giác AQCN là hình bình hành nên hai đường chéo AC và NQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Tứ giác MNPQ là hình bình hành nên hai đường chéo MP và NQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Từ các nhận xét trên, suy ra O là giao điểm của hai đường chéo của hình thoi ABCD và O cũng là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành MNPQ. Do đó O là tâm đối xứng chung của hai hình này.

- c) Nếu tứ giác ABCD là hình vuông thì $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$.

Suy ra: $\widehat{PDQ} = \widehat{QAM} = 90^\circ$

Khi đó $\triangle PDQ = \triangle QAM$ (c - g - c)

Suy ra: $QP = QM$

Hình bình hành MNPQ có $PQ = QM$ nên là hình thoi.

Bài 6. Cho hình vuông EFGH. Một góc vuông xEy quay quanh E, có cạnh Ex cắt các đường thẳng FG và GH tại M và N, cạnh Ey cắt hai đường thẳng trên lần lượt tại P và Q.

- a) Chứng minh rằng các tam giác EMQ và ENP là các tam giác vuông cân.
- b) Đường thẳng QM cắt NP ở R. Gọi I và K lần lượt trung điểm của BN và QN. Tứ giác EKRI là hình gì? Vì sao?
- c) Chứng minh bốn điểm F, H, K, I thẳng hàng và đường thẳng HK cố định khi xEy quay quanh E.

Hướng dẫn giải

- 1) Ta có $\triangle EFM = \triangle EHQ$

Suy ra: $EM = EQ$ và $\widehat{FEM} = \widehat{HEQ}$

Do đó: $\widehat{MEQ} = 90^\circ$

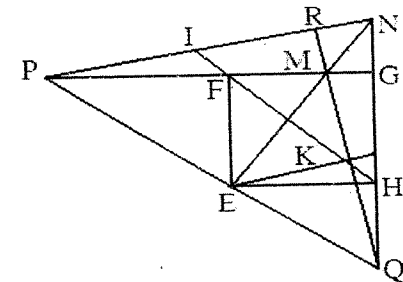
Vậy tam giác EMQ vuông cân tại E.

Tương tự như trên, ta có tam giác ENP vuông cân tại E.

- b) Trong các tam giác cân EMQ và ENP, có EK và EI là các đường trung tuyến nên

$EK \perp MQ, EI \perp NP$.

Suy ra $\widehat{I} = \widehat{K} = 90^\circ$



Mặt khác M là trực tâm của tam giác NPQ nên $QR \perp NP \Rightarrow \hat{R} = 90^\circ$

Tứ giác EIRK có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

c) Ta có: $IG = IE$; $KG = KE$ (tính chất đường trung tuyến của cạnh huyền trong tam giác vuông)

Do đó IK là đường trung trực của EG.

Mặt khác FH là đường trung trực của

Vậy bốn điểm I, F, K, H thẳng hàng và IK cố định.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD và điểm P nằm trong tam giác ABC.

- Giả sử $\widehat{BPC} = 135^\circ$. Chứng minh rằng $2PB^2 + PC^2 = PA^2$.
- Các đường thẳng AP và CP cắt cạnh BC và BA tương ứng tại các điểm M, N. Gọi Q là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn MN. Chứng minh rằng khi P thay đổi trong tam giác ABC, đường thẳng PQ luôn đi qua D.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

- Lấy điểm P' khác phía với điểm P đối với đường thẳng AB sao cho tam giác BPP' vuông cân tại B.

Ta có: $\triangle BPP' = \triangle BP'A$ (c - g - c)

Suy ra $\widehat{BP'C} = 135^\circ$

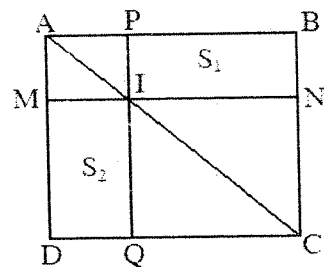
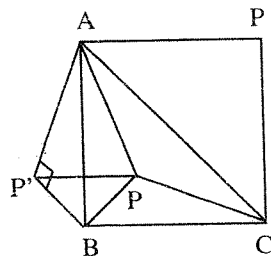
Vì $\widehat{BP'P} = 45^\circ$ nên $\widehat{PP'A} = 90^\circ$

Áp dụng định lý Pitago, ta được:

$$PA^2 = AP'^2 + PP'^2 = PC^2 + 2PB^2 \text{ (đpcm)}$$

- Nhận xét rằng: Giả sử I là một điểm nằm trong hình chữ nhật ABCD. Qua I vẽ các đường thẳng MN, PQ tương ứng song song với AB, AD. Gọi diện tích hình chữ nhật IQDM là S_2 . Khi đó $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi I thuộc đường chéo AC. Thật vậy, giả sử I thuộc đường chéo AC. Vì đường chéo của hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành hai phần có diện tích bằng nhau nên các hình ABCD, APIM, INCQ ta có: $S_1 = S_2$.

Ngược lại, giả sử $S_1 = S_2$. Suy ra $IN \cdot IP = IM \cdot IQ$



$$\Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{IQ}{IP} = \frac{NC}{MA} \Rightarrow \triangle MAI \sim \triangle NIC$$

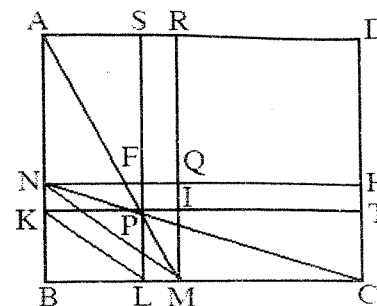
Do M, I, N thẳng hàng nên A, I, C thẳng hàng.

Trở về bài toán, ta dễ thấy tứ giác NBMQ là hình chữ nhật. Qua P và Q vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông. Do P thuộc đường chéo AM của hình chữ nhật ABMR nên $S_{BLPK} = S_{PIRS}$. P thuộc đường chéo CN của hình chữ nhật NBCH nên $S_{BLPK} = S_{PTHF}$.

Do đó $S_{BLPK} = S_{PTHF}$ nên $S_{PQRT} = S_{QITH}$

Theo chứng minh trên thì Q thuộc đường chéo PD của hình chữ nhật SPTD.

Vậy PQ đi qua điểm D.



Bài 8. Cho góc xAy vuông và hai điểm B, C lần lượt trên các tia Ax, Ay. Hình vuông MNPQ có các đỉnh M thuộc cạnh AB, đỉnh N thuộc cạnh AC và các đỉnh P, Q thuộc cạnh BC.

- Tính cạnh hình vuông MNPQ theo cạnh $BC = a$ và đường cao $AH = h$ của tam giác ABC.
- Cho B và C thay đổi lần lượt trên các tia Ax, Ay sao cho tích $AB \cdot AC = k^2$ (k không đổi). Tính giá trị lớn nhất của hình vuông MNPQ.

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Chuyên Toán - Tin, ĐHQG TP.HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

- Đặt x là độ dài của cạnh hình vuông.

Vì $MN \parallel BC$, suy ra $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$ (1)

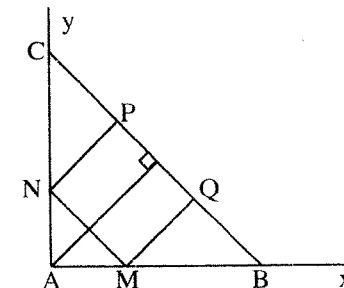
Mặt khác $AH \perp BC$ và $MQ \perp BC$

$$\Rightarrow AH \parallel MQ \Rightarrow \frac{MQ}{AH} = \frac{MB}{AB} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$\frac{MN}{BC} + \frac{MQ}{AH} = \frac{AM}{AB} + \frac{MB}{AB}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x}{a} + \frac{x}{h} = 1 \Rightarrow x = \frac{ah}{a+h}$$



$$b) \text{ Ta có } S_{MNPQ} = x^2 = \left(\frac{ah}{a+h} \right)^2 = \frac{a^2 h^2}{(a+h)^2} = \frac{k^4}{(a+h)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{aligned} (a+h)^2 &= a^2 + h^2 + 2ah = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + h^2 + 2k^2 = 3 \frac{(AB^2 + AC^2)}{4} + \left(\frac{a^2}{4} + h^2 \right) + 2k^2 \\ &\geq \frac{3 \cdot 2 \cdot AB \cdot AC}{4} + 2 \sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot h^2} + 2k^2 = \frac{9k^2}{2} + k^2 + 2k^2 = \frac{9k^2}{2} \\ \Rightarrow S_{MNPQ} &\leq \frac{2}{9} k^2 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AB = AC$ và $\frac{a}{2} = h$

Hay $AB = AC = |k|$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình vuông MNPQ là $\frac{2k^2}{9}$.

Bài 9. Trong tứ giác lồi có độ dài ba cạnh bằng nhau và bằng a (a là số dương cho trước), hãy tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Giả sử tứ giác lồi ABCD có: $AB = BC = CD = a$

Kẻ BH vuông góc với AC, đặt $BH = x$

($0 < x < a$).

Khi đó, ta có: $AH = HC = \sqrt{a^2 - x^2}$

Do đó: $S_{\triangle ABC} = BH \cdot AH = x \sqrt{a^2 - x^2}$

$$S_{\triangle ACD} \leq \frac{AC \cdot CD}{2} = a \sqrt{a^2 - x^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{ACD} = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = (a+x) \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(a+x)^2 (a^2 - x^2)} \\ &= \sqrt{(a+x)^3 (a-x)} = \sqrt{\frac{1}{3} (a+x)^3 (3a-3x)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} (a+x)(a+x)(a+x)(3a-3x)} \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{a+x+a+x+a+x+3a-3x}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{3a}{2} \right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+x = 3a-3x \\ \widehat{ACD} = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ \widehat{ACD} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABH} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$$

Do $\widehat{BCA} = 30^\circ$ và $\widehat{ACD} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{BCD} = 120^\circ$

Vậy S_{ABCD} lớn nhất bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$, đạt được khi $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 120^\circ$.

Bài 10. Cho tứ giác lồi ABCD có AB vuông góc với CD và $AB = 2$, $BC = 13$, $CD = 8$, $DA = 5$.

a) Đường thẳng BA cắt đường thẳng BC tại E. Hãy tính AE.

b) Tính diện tích tứ giác ABCD.

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Ban AB, ĐHQG TPHCM năm học 2001 – 2002)

Hướng dẫn giải

a) Ta có AB và CD vuông góc với nhau tại E.

Đặt $AE = x$ và $ED = y$ ($x, y > 0$)

Áp dụng định lý Pitago, ta có:

$$\begin{cases} AE^2 + ED^2 = AD^2 \\ EB^2 + EC^2 = BC^2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x+2)^2 + (y+8)^2 = 13^2 = 169 \end{cases}$$

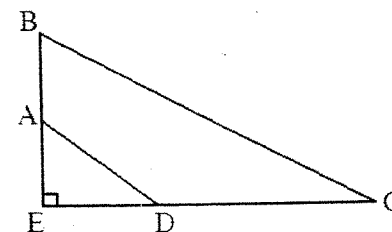
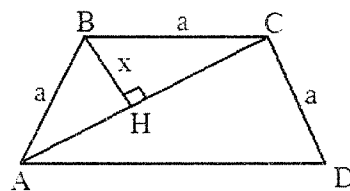
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 4x + 16y + 68 = 169 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 4y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $AE = 3$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle EBC} - S_{\triangle EAD} = \frac{1}{2} (EB \cdot EC - EA \cdot ED) \\ &= \frac{1}{2} [(3+2)(4+8) - 3 \cdot 4] = 24 \end{aligned}$$



Bài 11. Cho hình vuông ABCD tâm O. Một đường thẳng d di động qua điểm O. Chứng minh rằng tổng bình phương các khoảng cách từ các đỉnh hình vuông đến đường thẳng d bằng một hằng số.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, Phú Yên năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Từ các đỉnh hình vuông, ta kẻ các đoạn AA', BB', CC', DD' vuông góc với d.

Đặt

$$T = AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + DD'^2$$

$$\text{Ta có: } \triangle OAA' = \triangle ODD'$$

$$\text{Suy ra: } AA' = CC'$$

$$\text{Tương tự, ta có: } BB' = DD'$$

$$\text{Suy ra: } T = 2(AA'^2 + BB'^2) \quad (1)$$

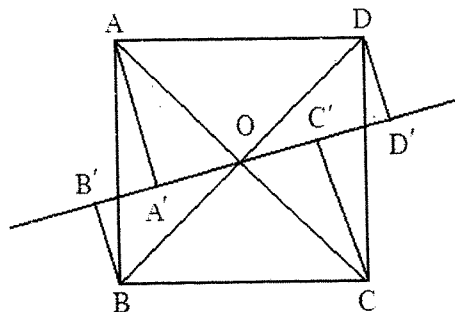
Mặt khác, ta có:

$\widehat{A'AO} = \widehat{B'BO}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc) và $AO = BO$ nên $\triangle OAA' = \triangle OBB'$

$$\text{Suy ra } BB' = A'O \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) và áp dụng định lý Pitago vào trong tam giác vuông OAA', ta được:

$$T = 2(AA'^2 + A'O^2) = 2AO^2 = 2 \frac{AC^2}{4} = \frac{AC^2}{2} = AB^2 = \text{const (đpcm)}$$



Bài 12. Cho ngũ giác lồi ABCDE. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm CB, AE, BA, ED. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để MN // CD là đường thẳng MN đi qua trung điểm của PQ.

Hướng dẫn giải

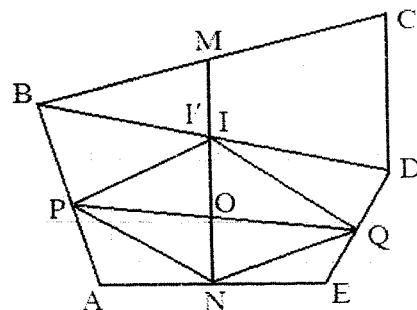
+ Điều kiện cần:

Nếu MN song song với CD thì MN đi qua trung điểm của PQ.

Gọi I là giao điểm của MN và CD, ta có I là trung điểm của BD.

Trong tam giác ABD và ADE ta có:

$$PI \parallel NQ \text{ và } PI = NQ.$$



Suy ra tứ giác NPIQ là hình bình hành nên NI đi qua trung điểm của PQ, hay MN đi qua trung điểm của PQ.

+ Điều kiện đủ:

Nếu MN đi qua trung điểm của PQ thì MN // CD

Gọi O là giao điểm của MN và PQ, ta có: OP = OQ.

Gọi I' là trung điểm của BD. Tứ giác PI'QN là hình bình hành, do đó N, O, I' thẳng hàng.

Vậy I' trùng với I. Khi đó trong tam giác ABC, ta có IM // CD, hay MN // CD.

Bài 13. Cho đa giác đều có n cạnh và m cạnh, có tỉ số giữa hai góc trong của chúng bằng $\frac{5}{7}$. Tìm số cạnh của hai đa giác trên.

Hướng dẫn giải

Số đo mỗi góc của đa giác đều n cạnh là $\frac{(n-2)180^\circ}{2}$

Số đo mỗi góc của đa giác đều m cạnh là $\frac{(m-2)180^\circ}{2}$

$$\text{Theo đề bài, ta có: } \frac{\frac{(n-2)180^\circ}{2}}{\frac{(m-2)180^\circ}{2}} = \frac{5}{7} \quad (n, m \geq 3; n, m \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 7(n-2)m = 5(m-2)n$$

$$\Leftrightarrow m(n-7) + 5(n-7) = -35$$

$$\Leftrightarrow (7-n)(m+5) = 35$$

Vì $m \geq 3 \Rightarrow m+5 \geq 8$. Do đó 35 chỉ phân tích thành 1.35, tức là $7-n = 1$ và $m+5 = 35$

Vậy $n = 6$ và $m = 30$.

Bài 14. Một đa giác lồi 34 đỉnh, có diện tích $S = 100$. Lấy 34 điểm bất kỳ ở trong đa giác sao cho 34 điểm này và 34 đỉnh của đa giác không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất một tam giác với ba đỉnh là ba trong số các điểm đã cho có diện tích không nhỏ hơn 1.

Hướng dẫn giải

Chia đa giác thành các tam giác không có điểm chung. Các tam giác này có ít nhất một đỉnh là 1 trong 34 điểm ở trong đa giác. Tổng tất cả các góc trong của tất cả các tam giác đó đúng bằng tổng các góc trong của đa giác cộng với 34.360° .

Khi đó, ta có: $(34 - 2).180^\circ + 34.360^\circ = 100.180^\circ$

Do đó số tam giác đúng bằng 100. Mặt khác, tổng diện tích 100 tam giác này là 100. Vậy tồn tại một tam giác có diện tích không nhỏ hơn 1.



CHỦ ĐỀ 16.

ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Sự xác định của đường tròn – tính chất đối xứng của đường tròn

a) Tập hợp các điểm cách đều điểm O cố định bằng khoảng R không đổi ($R > 0$) là đường tròn tâm O bán kính R.

b) Qua ba điểm không thẳng hàng, ta xác định được một đường tròn.

- Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tâm là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC.

- Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của nó.

- Đường kính của đường tròn là trục đối xứng của nó.

2. Đường kính và dây của đường tròn

Đường kính là dây lớn nhất trong các dây của đường tròn.

Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.

Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm. Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau. Dây nào gần tâm hơn thì lớn hơn.

3. Tiếp tuyến của đường tròn

- Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

- Nếu khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

- Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

- Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

• Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

• Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

• Tia kẻ từ tâm đi qua hai điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

4. Đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp và bàng tiếp tam giác

- Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác. Tâm của đường tròn này là giao điểm của các đường phân giác của các góc trong tam giác.

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác. Tâm của đường tròn này là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh tam giác.

- Đường tròn bàng tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại. Tâm của đường tròn này là giao điểm của hai đường phân giác góc ngoài tại hai đỉnh của tam giác.

5. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R \geq r$, d là khoảng cách giữa hai tâm.

- Hai đường tròn cắt nhau khi và chỉ khi $R - r < d < R + r$

- Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau khi và chỉ khi $d = R + r$.

- Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau khi và chỉ khi $d = R - r > 0$.

- Hai đường tròn đựng nhau khi và chỉ khi $|R - r| < d$

6. Diện tích và chu vi đường tròn

Diện tích đường tròn: $S = \pi R^2$

Chu vi đường tròn: $P = 2\pi R$

7. Góc với đường tròn

- Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

- Số đo của cung lớn bằng 360° trừ đi số đo của cung nhỏ.
- Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Các góc nội tiếp (hoặc góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) cùng chắn một cung hoặc hai cung bằng nhau thì bằng nhau. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông. Góc nội tiếp (có số đo nhỏ hơn 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa số đo hai cung bị chắn. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.
- Tứ giác nội tiếp là một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn.
- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° . Ngược lại, nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác nội tiếp.

► BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ đường cao BE và CF. Chứng minh:

- Bốn điểm B, F, E, C cùng nằm trên một đường tròn.
- $EF < BC$.

Hướng dẫn giải

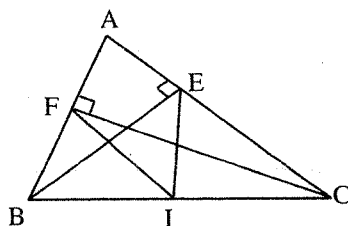
- Gọi I là trung điểm của BC, thì FI và EI là hai trung tuyến của các tam giác vuông BFC và CEB ứng với cạnh huyền.

Ta có: $IB = IF = IE = IC$.

Các điểm B, F, E, C cách đều I một đoạn không đổi nên chúng nằm trên cùng một đường tròn đường kính IB.

- Đường tròn đi qua bốn điểm B, F, E, C có đường kính BC nên FE là một dây.

Suy ra: $EF < BC$.



Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O'). Gọi AB và CD là các tiếp tuyến chung ngoài trong đó A, C thuộc đường tròn (O) và B, D thuộc vào đường tròn (O'). Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) và (O') tại E và F. Chứng minh rằng:

- Bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
- $AE = AF$.

Hướng dẫn giải

- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OO' và AB.

Hình thang $ABO'O$ có MN là đường trung bình nên $MN \perp AB$

Suy ra: $MA = MB$

Tương tự, ta có: $MC = MD$

Mặt khác $MA = MC$ nên

$MA = MB = MC = MD$.

Suy ra bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên cùng một đường tròn có tâm M.

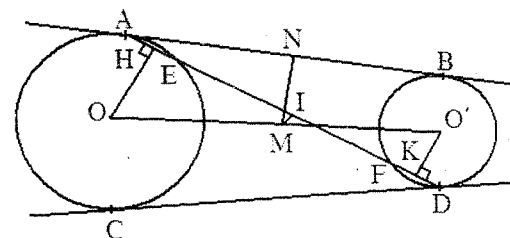
- Kẻ OH, O'K, MI cùng vuông góc với AD

Với đường tròn tâm M, ta có: $IA = IB$; $IH = IK$

Suy ra: $HA = KD$

Mặt khác: $HA = HE$; $KD = KF$

Do đó: $AE = DF$



Bài 3. Từ một điểm M trên đường kính AB của đường tròn tâm O, kẻ hai dây CD và EF tạo với đường kính AB hai góc bằng nhau. Gọi I, H theo thứ tự là giao điểm của AB với DE, CF.

- Chứng minh rằng I là trung điểm của DE; H là trung điểm của CF và $CD = EF$.
- Chứng minh $DE \parallel CF$.

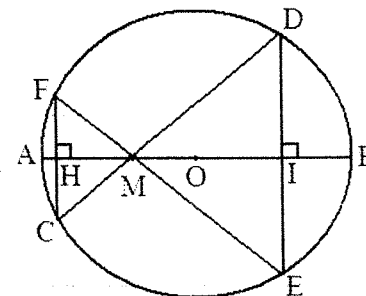
Hướng dẫn giải

- Ta có MB là tia phân giác của $\widehat{DME}$ nên MD và ME đối xứng nhau qua AB.

Kết hợp với tính chất đối xứng của đường tròn, ta có hai điểm D và E đối xứng nhau qua AB. Suy ra $DE \perp AB$; $ID = IE$

Tương tự, ta có: $FC \perp AB$; $HF = HC$

Tam giác MDE cân nên $MD = ME$ (1)



Tam giác MFC cân nên $MF = MC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $CD = FE$

b) Ta có: $DE \perp AB$; $FC \perp AB$

Suy ra: $DE \parallel CF$

Bài 4. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O; R)$ và $(O'; R)$ và hai dây AB và CD bằng nhau theo thứ tự thuộc hai đường tròn ấy sao cho B và C nằm giữa A và D và $AB < 2R$.

a) Chứng minh rằng $AD \parallel OO'$.

b) Chứng minh rằng $AC = OO' = BD$.

c) Gọi I là trung điểm của AD , chứng tỏ rằng điểm I nằm trên một đường tròn cố định khi các dây AB, CD thay đổi vị trí sao cho AB, CD luôn bằng nhau và B, C luôn luôn nằm giữa A và D .

Hướng dẫn giải

a) Kẻ $OH \perp AD$; $O'K \perp AD$

Ta có $HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = KD$ và $OH \parallel O'K$

Suy ra $OH^2 = OA^2 - HA^2 = O'D^2 - HD^2 = O'K^2$

Vì AB không đi qua O nên H không trùng với O , do đó $OH > 0$.

Suy ra tứ giác $OHO'K$ là hình chữ nhật.

Do đó $HK \parallel OO'$ hay $AD \parallel OO'$

b) Ta có: $HK = OO'$ ($OHO'K$ là hình chữ nhật)

Do đó nếu H nằm giữa A và C , ta có $AC = AH + HC = CK + HC = HK = OO'$

Nếu H nằm ngoài A, C thì C nằm giữa A, H (vì B, C nằm giữa A, D nên C không thể nằm ngoài A, D và cũng không thể xảy ra A nằm giữa C, H).

Khi đó, ta có: $AC = AH - HC = CK - HC = HK = OO'$

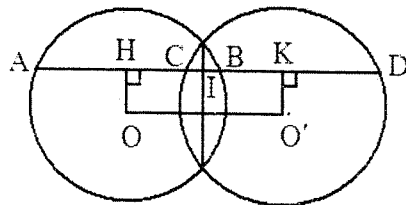
Tương tự, ta có: $BD = OO'$

c) Ta có $IH = IA - AH = ID - KD = IK$

Gọi M là trung điểm của OO' , ta có $IM \parallel OH$

Hay IM là đường trung trực của OO' (cố định)

Vậy I nằm trên đường trung trực cố định của OO' .



Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính BC . Một điểm H thuộc BC . Kẻ Hx vuông góc với BC . Gọi A là giao điểm của Hx với nửa đường tròn. Trong cùng một nửa mặt phẳng với Hx , bờ là đường thẳng BC , kẻ các tiếp tuyến Bx, Cy với nửa đường tròn; CA cắt Bx tại E ; BA cắt Cy tại D và AH cắt ED tại L .

a) Chứng minh $AH = AL$.

b) Chứng minh $S_{ABC} = S_{AED}$.

c) Gọi P là trung điểm của BE và Q là trung điểm của CD . Chứng minh PQ là tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại điểm A .

Hướng dẫn giải

a) Vì Bx là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính BC nên $Bx \perp BC$

Tương tự, ta có: $Cy \perp BC$

Mặt khác, ta có: $Hx \perp BC$

Suy ra $Bx \parallel Hx \parallel Cy$

Trong tam giác DEB có $AL \parallel BE$ nên $\frac{AL}{BE} = \frac{DA}{DB}$ (1)

Tương tự, ta có: $\frac{AH}{BE} = \frac{CA}{CB}$ (2) và $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AL = AH$ (đpcm)

b) Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

$$\text{và } S_{AED} = \frac{1}{2} AE \cdot AD$$

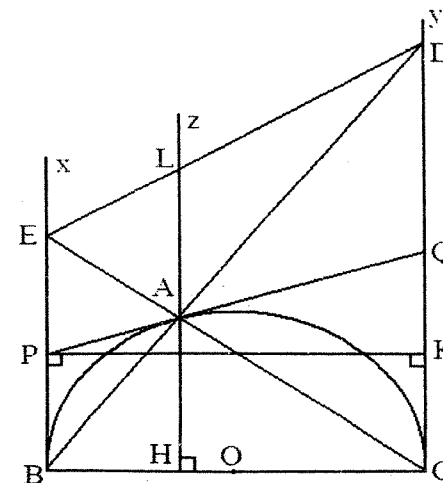
$$\text{Mà } BE \parallel CD \text{ nên } \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD}$$

$$\Rightarrow AE \cdot AD = AB \cdot AC$$

$$\text{Suy ra } S_{ABC} = S_{AED}$$

$$\text{c) Ta có: } \frac{BP}{BE} = 1; \frac{DQ}{QC} = 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{BP}{PE} = \frac{DQ}{QC}$$



Do $BE \parallel CD$ nên $\frac{BP}{PE} = \frac{DQ}{QC}$

Suy ra ba đường thẳng BD , CE và PQ đồng quy, hay PQ đi qua điểm A

Tam giác AEB vuông tại A và P là trung điểm của PE nên $PA = PB$

PB là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính AB , suy ra PA là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính AB .

Bài 6. Cho nửa đường tròn đường kính BC . A là một điểm trên nửa đường tròn đó sao cho $AB < AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B , vẽ hình vuông $ACDE$. Đường chéo AD cắt nửa đường tròn tại một điểm thứ hai là M . Tia BM cắt DE tại F . Chứng minh rằng:

- Tam giác MBC vuông cân.
- Tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.
- CF là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{MAC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{CM} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{CM} = \widehat{BM} \Rightarrow CM = BM$

Mặt khác $\widehat{BMC} = 90^\circ$

Do đó tam giác MBC vuông cân

b) Tứ giác $FDCM$ có $\widehat{FDC} + \widehat{FMC} = 180^\circ$ nên nội tiếp được đường tròn

Suy ra:

$$\widehat{FMC} = \widehat{MDC} = 45^\circ$$

Do đó: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 45^\circ$

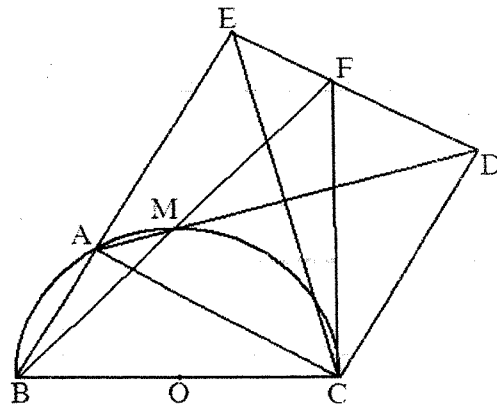
Suy ra tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có: $\widehat{BEF} + \widehat{BCF} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{BCF} = 90^\circ$

Do đó $CF \perp BC$

Vậy CF là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .



Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AHB và AHC . Chứng minh $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Hướng dẫn giải

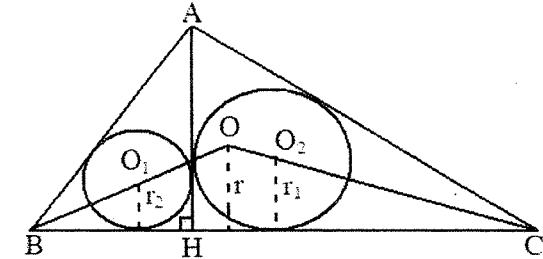
Dễ thấy $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (g - g)

Suy ra: $\frac{BC}{BA} = \frac{r}{r_1}$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{BA} = \frac{r}{BC} \quad (1)$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{r_2}{AC} = \frac{r}{BC} \quad (2)$$



Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{r_1}{BA} = \frac{r_2}{AC} = \frac{r}{BC}$

Do đó $\frac{r_1^2}{BA^2} = \frac{r_2^2}{AC^2} = \frac{r^2}{BC^2}$

Suy ra $\frac{r_1^2 + r_2^2}{BA^2 + AC^2} = \frac{r^2}{BC^2} \Rightarrow \frac{r_1^2 + r_2^2}{BC^2} = \frac{r^2}{BC^2}$ (vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$)

Vậy $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC và một điểm M nằm giữa B và C . Qua M dựng đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại B và dựng đường tròn (O') tiếp xúc với AC tại C . Gọi N là giao điểm thứ hai của chúng.

- Chứng minh rằng tứ giác $ABNC$ nội tiếp được.
- Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên BC .
- Giả sử đường thẳng MN cắt các tia AB, AC lần lượt tại các điểm Q, R . Qua R kẻ đường thẳng tiếp xúc với (O) cắt tia AB tại S . Qua Q kẻ đường thẳng tiếp xúc với (O') cắt tia AC tại T . Chứng minh rằng tứ giác $QSRT$ ngoại tiếp được.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{MNB} = \widehat{ABC}$; $\widehat{MNC} = \widehat{ACB}$

Suy ra: $\widehat{BNC} = \widehat{MNB} + \widehat{MNC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC}$

Do đó: $\widehat{BNC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

Vậy tứ giác ABNC nội tiếp được

b) Kẻ đường tròn (O_1) ngoại tiếp tam giác ABC.

Tia MN cắt (O_1) tại điểm thứ hai là P, ta có:

$$\widehat{ACB} = \widehat{MNC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{MC}$$

Suy ra: $\text{sđ} \widehat{MC} = 2\widehat{MNC}$

$$= 2\widehat{ABC} = \text{sđ} \widehat{AB} = \text{const}$$

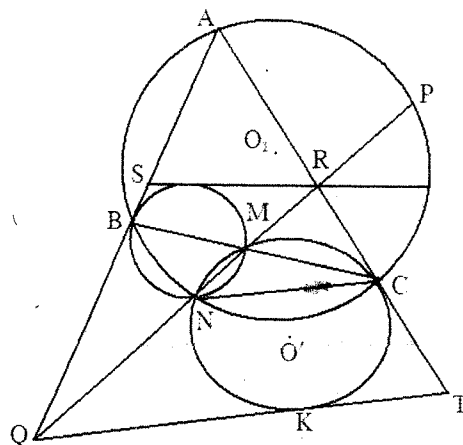
Ngoài ra, P nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa N nên P cố định.

c) Gọi I, K theo thứ tự là tiếp điểm của RS với (O) và QT với (O') .

$$\text{Ta có: } RI = \sqrt{RM \cdot RN} = RC; OK = \sqrt{QN \cdot QM} = QB$$

$$\text{Suy ra: } RS + QT = SI + IR + QK + KT = SB + RC + QB + CT = SQ + RT$$

Vậy tứ giác QSRT ngoại tiếp được.



Bài 9. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt đường tròn (O') tại C và D (C nằm giữa B và D). Các tia CA, DA cắt đường tròn (O) tại E và F.

a) Chứng minh rằng $EF \parallel CD$.

b) Gọi M là điểm chính giữa cung CD (M và A khác phía đối với CD). Tính số đo góc $\widehat{BAM}$.

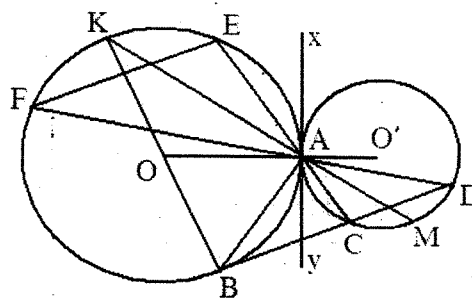
Hướng dẫn giải

a) Qua A kẻ tiếp tuyến chung xy của hai đường tròn.

Ta có: $\widehat{EFA} = \widehat{xAE}$ (vì cùng chắn cung $\widehat{AE}$); $\widehat{ADC} = \widehat{yAC}$ (vì cùng chắn cung $\widehat{AC}$)

Vì $\widehat{xAE} = \widehat{yAC}$ nên $\widehat{EFA} = \widehat{ADC}$

Suy ra $EF \parallel CD$



b) Kẻ đường kính BK của đường tròn (O) .

Ta có: $BK \perp BD$

Mặt khác $EF \parallel CD$

Suy ra $BK \perp EF$

Vì BK là đường kính vuông góc với dây EF nên $\widehat{KE} = \widehat{KF}$

Suy ra AK là tia phân giác của góc $\widehat{EAF}$

Ngoài ra: $\widehat{CM} = \widehat{MD} \Rightarrow AM$ là tia phân giác của góc $\widehat{CAD}$

Lại có $\widehat{EAF}$ và $\widehat{CAD}$ đối đỉnh với nhau nên K, A, M thẳng hàng.

Do $\widehat{BAK} = 90^\circ$ nên $\widehat{BAM} = 90^\circ$.

Bài 10. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) , ở đây A, B là các tiếp điểm và C nằm giữa M, D.

a) Chứng minh $MA^2 = MC \cdot MD$.

b) Gọi I là trung điểm của CD. Chứng minh rằng 5 điểm M, A, O, I, B nằm trên một đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là đường phân giác của $\widehat{CHD}$.

d) Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) . Chứng minh A, B, K thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP. HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

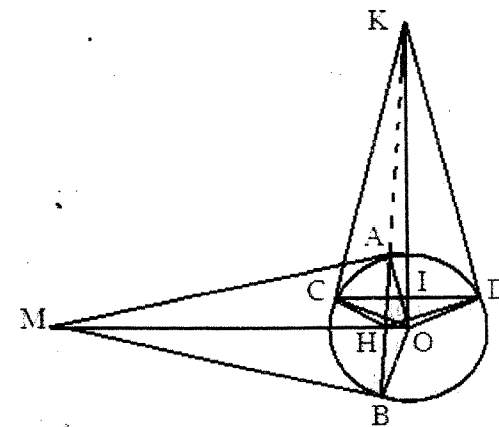
a) Vì MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$

$$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDA \text{ (g - g)}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$$

$$\Rightarrow MA^2 = MC \cdot MD$$

b) Vì $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MIO} = 90^\circ$ nên năm điểm M, A, O, I, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO.



c) Vì $\triangle MAO$ vuông tại A và $AH \perp MO$ nên $MA^2 = MH.MO$

Theo câu a) thì $MA^2 = MC.MD$

$$\Rightarrow \frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO} \Rightarrow \triangle MHC \sim \triangle MDO \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$$

Vậy tứ giác CHOD là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Suy ra: $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$ (do $\triangle OCD$ cân tại O) và $\widehat{ODC} = \widehat{MHC}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{OHD} = \widehat{MHC}$

$$\text{Do đó: } 90^\circ - \widehat{OHD} = 90^\circ - \widehat{MHC} \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AHC}$$

Vậy AB là đường phân giác của góc CHD.

d) Vì $\widehat{KCO} = \widehat{KDO} = 90^\circ$ nên tứ giác CHOD nội tiếp đường tròn đường kính KO.

Suy ra $\widehat{KHO} = 90^\circ$, hay $KH \perp MO$.

Mà $AB \perp MO$ tại H nên K, A, B thẳng hàng.

Bài 11. Cho tứ giác ABCD có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính AD, tâm O. Hai đường chéo BD và AC cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

- Các tứ giác ABEH, DCEH nội tiếp được.
- E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH.
- Năm điểm B, C, I, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP.Huế năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

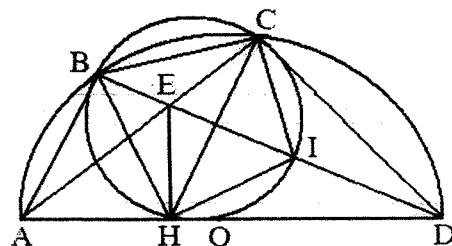
a) Tứ giác ABEH có: $\widehat{B} = 90^\circ$ và $\widehat{H} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác ABEH nội tiếp được.

Tương tự, tứ giác DCEH có $\widehat{C} = \widehat{H} = 90^\circ$ nên nội tiếp được.

b) Ta có: $\widehat{EBH} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn cung EH)

Trong đường tròn (O), ta có: $\widehat{EAH} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD)



Suy ra $\widehat{EBH} = \widehat{EBC}$

Do đó BE là tia phân giác của góc HBC

Tương tự, ta có $\widehat{ECH} = \widehat{BDA} = \widehat{BCE}$

Do đó CE là tia phân giác của góc BCH

Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH

Suy ra EH là tia phân giác của góc BHC

c) Ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ECD, nên $\widehat{BIC} = 2\widehat{EDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC).

Mà $\widehat{EDC} = \widehat{EHC}$

Suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BHC}$

Trong đường tròn (O), ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC} = \widehat{BHC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BC).

Suy ra H, O, I ở trên cung chứa góc BHC dựng trên đoạn BC, hay năm điểm B, C, H, O, I cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 12. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R). Từ A kẻ đường thẳng d không đi qua tâm O, cắt đường tròn (O, R) tại B và C (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến với (O, R) tại C và B cắt nhau tại D. Từ D kẻ DH vuông góc với AO (H nằm trên AO) cắt cung nhỏ BC tại M. Gọi E là giao điểm của DO và BC.

- Chứng minh DHOC là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $OH.OA = OE.OD$.
- Chứng minh AM là tiếp tuyến của (O, R).

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Hà Nam năm học 2005 – 2006)

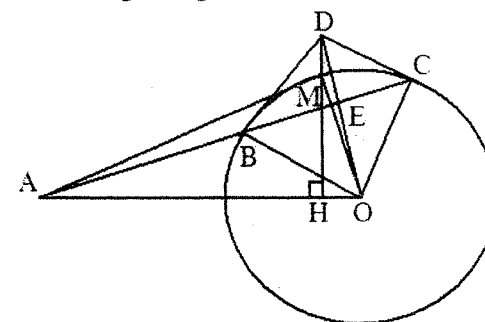
Hướng dẫn giải

1. Vì DC là tiếp tuyến của đường tròn (O, R) nên $\widehat{DCO} = 90^\circ$.

Mặt khác

$$AO \perp DH \Rightarrow \widehat{DHO} = 90^\circ$$

Vậy tứ giác DHOC nội tiếp đường tròn đường kính DO.



2. Vì DB, DC là tiếp tuyến của đường tròn (O, R) nên DB = DC.

Phân giác DE trong tam giác DBC cũng là đường cao nên $DE \perp BC$

Hai tam giác vuông HDO và EAO có chung góc nhọn $\widehat{DOA}$ nên $\Delta HDO \sim \Delta EAO$

$$\text{Suy ra } \frac{HO}{EO} = \frac{OD}{OA} \Rightarrow OH.OA = OE.OD \quad (1)$$

3. Trong tam giác vuông COD có $CE \perp DO$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $OE.OD = OC^2 = R^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $OH.OA = OC^2$

Vì $OC = OM$ nên $OH.OA = OM^2$

Tam giác vuông AMO có $MH \perp OA$ và $OH.OA = OM^2$ nên $OM \perp AM$.

Vậy AM là tiếp tuyến của đường tròn (O, R).

Bài 13. Cho tứ giác nội tiếp ABCD có $\widehat{A} < 90^\circ$; AC vuông góc với BD tại M; P là trung điểm của CD; H là trực tâm ΔABD .

a) Hãy xác định tỉ số $\frac{PM}{DH}$.

b) Gọi N và K lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và D của tam giác ABD; Q là giao điểm của hai đường thẳng KM và BC. Chứng minh rằng

$$MN = MQ.$$

c) Chứng minh rằng tứ giác BQNK nội tiếp.

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban AB, PTNK, ĐHQG TP. HCM năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{MDH} = \widehat{BAC} = \widehat{MDC}$

Do đó $\Delta DHM \sim \Delta MDC$ cân tại D.

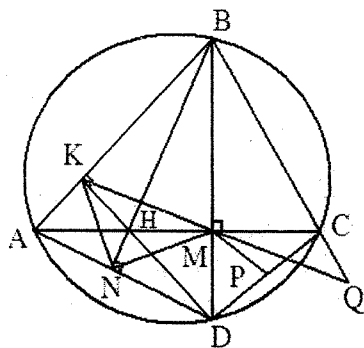
$$\text{Suy ra: } \frac{MP}{DH} = \frac{MP}{DC} = \frac{1}{2}$$

b) Ta có:

$$\widehat{DMQ} = \widehat{DAB} = \widehat{DMN} \Rightarrow \widehat{QMB} = \widehat{NMB}$$

Mà $\widehat{MBQ} = \widehat{MAN} = \widehat{MBN}$ nên $\Delta MBQ = \Delta MBN$ (g - c - g)

Do đó $MN = MQ$



c) Vì Q đối xứng với N qua BD nên tứ giác BQNK nội tiếp đường tròn đường kính BD.

Bài 14. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$ với $R_1 > R_2$, cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho số đo các góc O_1AO_2 lớn hơn 90° . Tiếp tuyến của đường tròn $(O_1; R_1)$ tại A cắt đường tròn $(O_2; R_2)$ tại C khác A. Tiếp tuyến của đường tròn $(O_2; R_2)$ tại A cắt đường tròn $(O_1; R_1)$ tại D khác A. Gọi M là giao điểm của AB và CD.

1) Chứng minh rằng $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{AD}$.

2) Gọi H, N lần lượt là trung điểm của AD, CD. Chứng minh rằng tam giác AHN đồng dạng với tam giác ABC.

3) Tính tỉ số $\frac{MC}{MD}$ theo R_1 và R_2 .

4) Từ C kẻ tiếp tuyến CE với đường tròn $(O_1; R_1)$ (tiếp điểm E khác A). Đường thẳng CO_1 cắt đường tròn $(O_1; R_1)$ tại F (O_1 nằm giữa C và F). Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng EF và J là trung điểm AI. Tia FJ cắt đường tròn $(O_1; R_1)$ tại K. Chứng minh rằng đường thẳng CO_1 là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{BCA}$
(cùng chắn cung AB của $(O_2; R_2)$)

$\widehat{ADB} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn cung AB của $(O_1; R_1)$)

Do đó: $\Delta BAD \sim \Delta BCA$

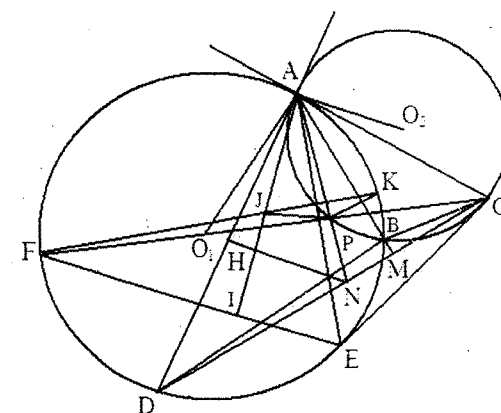
$$\Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{AD}$$

(đpcm) (1)

Và $\widehat{DBA} = \widehat{ABC} \quad (2)$

2) Ta có: $NH \parallel AC$

Do đó: $\widehat{NHA} = \widehat{CAx} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{NHA} = \widehat{ABC}$



Từ (1), ta có: $\frac{NH}{HA} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BA}$

Vậy $\triangle AHN \sim \triangle ABC$

3) Ta có: $\triangle AO_1D \sim \triangle AO_2C$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA} = \frac{R_2}{R_1} \quad (3)$$

Từ (2), ta có: $\widehat{DBA} = \widehat{CBM}$ hay BM là phân giác của $\angle DBC$ nên $\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{BD}$

Kết hợp với (3), suy ra $\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BA}{BD} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$

4) Gọi P là giao điểm của AE và CO_1 thì $\widehat{APC} = 90^\circ$ và $PA = PE$

Ta có: $PJ \parallel EF$ nên $\widehat{KJP} = \widehat{KFE}$

Mà $\widehat{KFE} = \widehat{KAE} \Rightarrow \widehat{KJP} = \widehat{KAP}$

Do đó tứ giác AJPK nội tiếp nên $\widehat{CPK} = \widehat{KAE} = \widehat{KEC}$

Vậy tứ giác PKCE nội tiếp, từ đó $\widehat{PCK} = \widehat{AEK} = \widehat{CAK}$ hay số đo góc PCK bằng nửa số đo cung CK của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC. Vậy FC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm D trên cạnh AC (sao cho $AC > 2DC$) làm tâm vẽ đường tròn tiếp xúc với BC tại E. Từ B kẻ tiếp tuyến thứ hai BF, cắt AD tại I và cắt AE tại K. Trung tuyến AM của tam giác ABC cắt BF tại N.

1) Chứng minh rằng A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $\frac{IF}{IK} = \frac{BF}{BK}$.

3) Cho $\widehat{AEC} = 130^\circ$, tính $\widehat{ANB}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{BFD} = \widehat{BED} = 90^\circ$

Do đó năm điểm A, B, D, E, F cùng nằm trên đường tròn đường kính BD.

2) Ta có: $DE = DF$ nên $\widehat{FAD} = \widehat{EAD}$

Suy ra AI là phân giác trong của tam giác FAK do đó $\frac{IF}{IK} = \frac{AF}{AK} \quad (1)$

Vì $AB \perp AI$ nên AB là phân giác ngoài của tam giác FAK $\Rightarrow \frac{AF}{AK} = \frac{BF}{BK} \quad (2)$

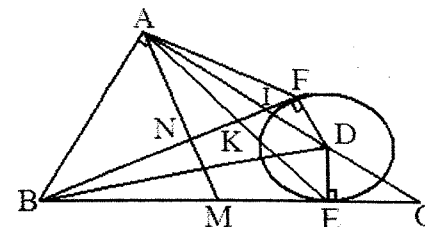
Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{IF}{IK} = \frac{BF}{BK}$

3) Ta có: $\widehat{AFB} = \widehat{AEB}$

$$= 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

Mặt khác $\widehat{AFB} = \widehat{ABD} = \widehat{ACB} + \widehat{DBC} = \widehat{MAC} + \widehat{DAF} = \widehat{NAF}$

Do đó: $\widehat{ANB} = \widehat{ABF} + \widehat{NAF} = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$



Bài 16. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua B cắt (O) và (O') theo thứ tự tại C và D.

a) Chứng tỏ góc CAD có số đo không đổi.

b) Tiếp tuyến của (O) tại C và (O') tại D cắt nhau tại E. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Có hai trường hợp xảy ra sau đây:

- Trường hợp 1: B nằm trên đoạn CD

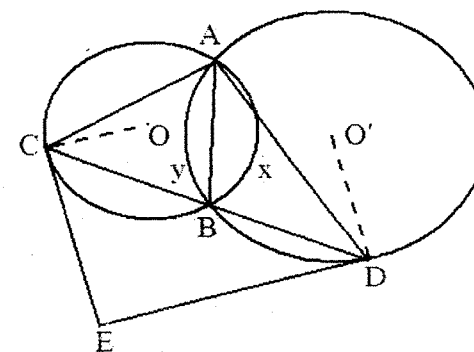
a) Trong tam giác ACD, ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{CAD} &= 180^\circ - (\widehat{ACB} + \widehat{ADB}) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{AxB} + \text{sđ } \widehat{AyB}) \end{aligned}$$

Vậy góc CAD có số đo không đổi.

b) Ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{BAC}$;

$$\widehat{EDC} = \widehat{BAD}$$



$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \widehat{CED} + \widehat{CAD} &= \widehat{CED} + \widehat{BAC} + \widehat{BAD} \\ &= \widehat{CED} + \widehat{ECD} + \widehat{EDC} = 180^\circ \end{aligned}$$

Do đó A, C, D, E nằm trên cùng một đường tròn.

- Trường hợp 2: B nằm ngoài đoạn CD

a) Trong tam giác ACD, ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{CAD} &= \widehat{BDA} - \widehat{BCA} \\ &= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AxB} + \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AyB} \end{aligned}$$

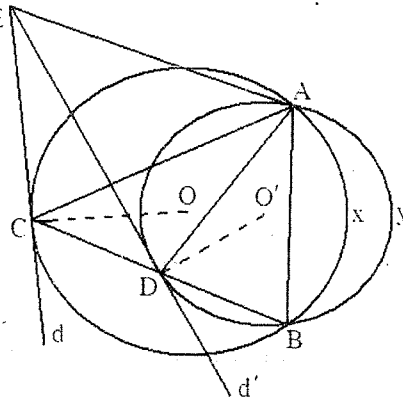
Vậy góc CAD có số đo không đổi.

b) Ta có:

$$\widehat{CAD} + \widehat{BAD} = \widehat{BAC} = \widehat{BCd} = \widehat{CED}$$

Suy ra: $\widehat{CAD} + \widehat{CED} = 180^\circ$.

Do đó A, C, D, E nằm trên cùng một đường tròn.



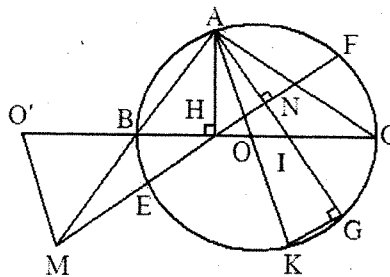
Bài 17. Cho điểm A di chuyển trên đường tròn tâm O đường kính BC = 2R (A không trùng với B và C). Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm của AM. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC và I là trung điểm của HC.

- 1) Chứng minh rằng M chuyển động trên một đường tròn cố định.
- 2) Chứng minh rằng $\triangle AHM \sim \triangle CIA$.
- 3) Chứng minh rằng MH vuông góc với AI.
- 4) MH cắt đường tròn (O) tại E và F, AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G. Chứng minh rằng tổng các bình phương các cạnh của tứ giác AEGF không đổi.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

- 1) Lấy O' đối xứng với O qua B, thì O' cố định. Kết hợp với đề cho B là trung điểm của MA nên $O'M = OA = R$. Do đó M chuyển động trên đường tròn $(O'; R)$ cố định.



2) Ta có tam giác ABC vuông ở A nên:

$$\widehat{MAH} = \widehat{ACI} \quad (1)$$

$$\text{Và } \frac{AC}{HC} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow \frac{AC}{CI} = \frac{AM}{AH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\triangle AHM \sim \triangle CIA$ (c - g - c)

3) Gọi N là giao điểm của HM với AI.

Ta có: $\triangle AHM \sim \triangle CIA$ (phần 2))

$$\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{CAI} \Rightarrow \widehat{AMN} + \widehat{NAM} = \widehat{CAI} + \widehat{NAM} = 90^\circ$$

Vậy $MH \perp AI$

4) Kẻ đường kính AK, ta có: $\widehat{AGK} = 90^\circ$. Kết hợp với phần 3), suy ra: $KG \parallel EF$.

Tứ giác EKGK là hình thang nội tiếp đường tròn (O) nên nó là hình thang cân.

$$\text{Do đó: } GF = EK \Rightarrow AE^2 + GF^2 = AE^2 + EK^2 = AK^2 = 4R^2$$

$$\text{Tương tự, ta được: } EG^2 + FA^2 = 4R^2$$

Vậy $AE^2 + GF^2 + EG^2 + FA^2 = 8R^2$ không đổi.

Bài 18. Cho đường tròn tâm O và hai điểm A, B cố định thuộc đường tròn đó (AB không phải là đường kính). Gọi M là trung điểm của cung nhỏ $\widehat{AB}$. Trên đoạn AB lấy hai điểm C, D phân biệt và không nằm trên đường tròn. Các đường thẳng MC, MD cắt đường tròn đã cho tương ứng tại E, F khác M.

1. Chứng minh rằng bốn điểm C, D, E, F nằm trên một đường tròn.
2. Gọi O_1, O_2 tương ứng là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE và BDF. Chứng minh rằng khi C, D thay đổi trên đoạn AB các đường thẳng AO_1 và BO_2 luôn cắt nhau tại một điểm cố định.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

1. Xét tứ giác CEFD có:

- $\widehat{CEF}$ chắn cung $\widehat{MBF}$ (1)

- $\widehat{CED}$ có đỉnh D nằm trên đường tròn nên:

$$\widehat{BDF} = \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{AM} + \widehat{BF})$$

$$= \frac{1}{2} \text{sd}(\widehat{MB} + \widehat{MF}) = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{MBF} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{CEF} = \widehat{BDF}$

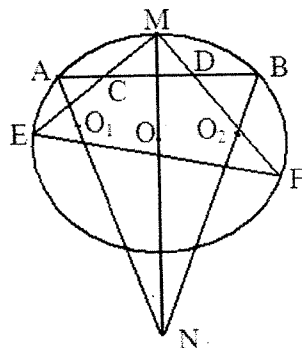
Do đó: $\widehat{CEF} + \widehat{CDF} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác CEFD nội tiếp

Vậy bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

2. Vì $\widehat{MAB} = \widehat{AEM}$ (chắn hai cung bằng nhau) nên ta có MA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE, suy ra $MA \perp AO_1$. Do đó nếu kéo dài AO_1 cắt đường tròn (O) tại N thì MN là đường kính của đường tròn (O). Do đó M cố định, suy ra N cố định.

Tương tự MB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF nên BO_2 phải đi qua N.

Vậy khi C, D thay đổi trên đoạn AB các đường thẳng AO_1 và BO_2 luôn cắt nhau tại một điểm cố định.



Bài 19. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) ($AB < AC$). Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại N. Vẽ dây AM song song với BC. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại P.

a) Cho biết $\frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{1}{16}$, tính độ dài đoạn BC.

b) Chứng minh $\frac{BP}{AC} = \frac{CP}{AB}$.

c) Chứng minh BC, ON và AP đồng quy.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP.HCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $NB = NC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OB = OC = R$

Do đó ON là trung trực của BC.

Gọi K là giao điểm của ON và BC, ta có:

$$BK = KC$$

Tam giác OBN vuông tại B và có BK là đường cao nên:

$$\frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NB^2} = \frac{1}{BK^2} \quad (1)$$

$$\text{Mà theo đề bài, ta có: } \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{1}{16} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$BK^2 = 16 \Rightarrow BK = 4 \Rightarrow BC = 2BK = 8$$

b) Ta có: $\triangle NPB \sim \triangle NBM$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{PB}{MB} = \frac{NB}{NM} \quad (1)$$

$$\triangle NCP \sim \triangle NMC \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{PC}{MC} = \frac{NC}{NM} \quad (2)$$

$$\text{Và } NB = NC \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3), suy ra: } \frac{PB}{MB} = \frac{PC}{MC} \quad (4)$$

Mặt khác $AM \parallel BC$ nên tứ giác AMCB là hình thang cân.

$$\text{Do đó } MC = AB \text{ và } MB = AC \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5), suy ra: } \frac{PB}{AC} = \frac{PC}{AB} \text{ (đpcm)}$$

c) Gọi Q là giao điểm của AP và BC.

Ta cần chứng minh $BC = QC$.

$$\text{Ta có: } \triangle BQP \sim \triangle AQC \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{BQ}{AQ} = \frac{PB}{AC} \quad (6)$$

$$\triangle CQP \sim \triangle AQB \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{CQ}{AQ} = \frac{PC}{AB} \quad (7)$$

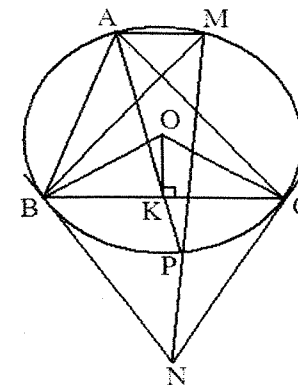
$$\text{Từ (6), (7) và kết hợp với kết quả phần a), ta được: } \frac{BQ}{AQ} = \frac{CQ}{AQ} \Rightarrow BQ = CQ$$

Do đó Q là trung điểm của BC nên Q trùng với K.

Vậy BC, ON và AP đồng quy tại K.

Bài 20. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau tại O, về một phía Δ_1 vẽ hai đường tròn: (O_1) tiếp xúc với Δ_1 và Δ_2 tương ứng tại A, B; đường tròn (O_2) tiếp xúc với Δ_1 và Δ_2 tương ứng tại C, D, (O_1) nằm về hai phía của Δ_2 và $OB < OD$.

1. Chứng minh rằng B là trực tâm của tam giác DAC.



2. Đường thẳng AD cắt (O_2) tại E khác D; đường thẳng BC cắt (O_1) tại F khác B. Chứng minh rằng tứ giác ACEF là hình thang cân.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

1. Kéo dài AB cắt CD tại H.

Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$ do đó B là trực tâm của tam giác DAC.

2. Ta có: $\widehat{AFC} = \widehat{AEC} = 45^\circ$ hay E, F cùng nhìn AC dưới một góc 45° .

Suy ra tứ giác ACEF nội tiếp.

Gọi T là giao điểm của CB và AE.

Mặt khác vì B là trực tâm của tam giác DAC nên $\widehat{FTA} = 90^\circ$

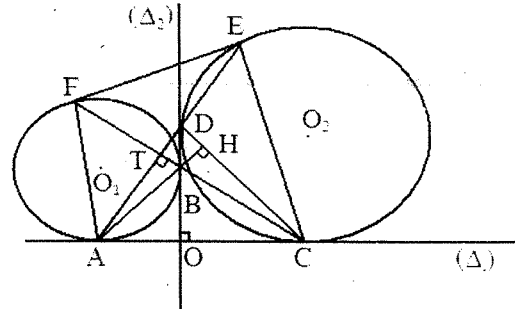
Do $\widehat{TFA} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{TAF} = 45^\circ$

Từ $\widehat{TAF} = \widehat{AEF} = 45^\circ$

$\Rightarrow AF \parallel CE$

Từ tứ giác ACEF có $AF \parallel CE$ nên là hình thang cân.



Bài 21. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), có đường cao AH. Gọi D, E, lần lượt là trung điểm của AB, AC.

a) Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH và ECH.

b) Gọi F là giao điểm thứ nhì của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DBH và ECH.

Chứng minh HF đi qua trung điểm của DE.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm F.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, TP.HCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{BHD}$

Tam giác vuông ABH có HD là trung tuyến nên $DH = DB$.

$\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{DBH} \Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{DBH}$

Do đó DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác BDH tại D.

Tương tự, ta được DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác ECH tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH và ECH.

b) Ta có: $\widehat{IDE} = \widehat{IHD}$ và $\widehat{IFD} = \widehat{IDH}$ (vì cùng bằng $\widehat{DBF}$)

$\Rightarrow \triangle IDF \sim \triangle IHD \Rightarrow \frac{ID}{IH} = \frac{IF}{ID}$

$\Rightarrow ID^2 = IF \cdot IH$ (1)

Tương tự, ta có: $IE^2 = IF \cdot IH$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $ID = IE$

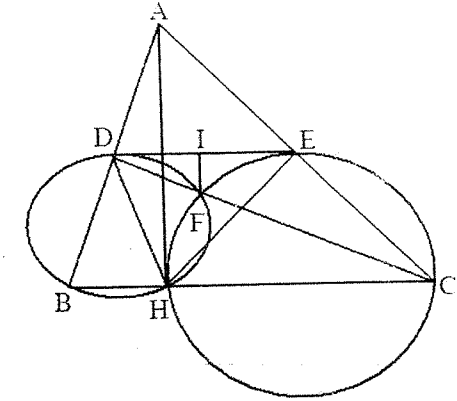
Hay HF đi qua trung điểm I của DE.

c) Vì tứ giác BDFH và CEFH nội tiếp nên $\widehat{DFH} + \widehat{DBH} = 180^\circ$ và $\widehat{EFH} + \widehat{ECH} = 180^\circ$

Mặt khác: $\widehat{BAC} + \widehat{DBH} + \widehat{ECH} = 180^\circ$ và $\widehat{DFH} + \widehat{EFH} + \widehat{DFE} = 360^\circ$

Suy ra: $\widehat{BAC} + \widehat{DEF} = 180^\circ$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua F.



Bài 22. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$, số đo góc C bằng 45° . Đường tròn đường kính AB cắt cạnh AC và BC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh MN vuông góc với OC.

b) Chứng minh $MN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban AB THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

a) Dựng tiếp tuyến Cx với đường tròn (O) song song với AB, khi đó $\widehat{BAC} = \widehat{BCx}$ (cùng chắn cung $\widehat{BmC}$).

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{MNC}$

(cùng bù với góc $\widehat{MNB}$)

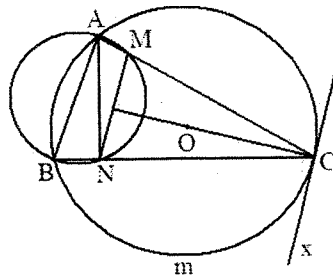
Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{BCx} \Rightarrow MN \parallel Cx$

Mặt khác $Cx \perp OC$ nên $MN \perp OC$

b) Dễ thấy $\triangle CMN \sim \triangle CBA$, suy ra

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (vì } \triangle CAN \text{ cân tại A)}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$



Bài 23. Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn, $AB < AD$. Tia phân giác của góc $\widehat{BAD}$ cắt BC tại N. Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCN.

a) Chứng minh $DN = BC$ và $CK \perp MN$.

b) Chứng minh rằng BKCD là một tứ giác nội tiếp.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\widehat{BAN} = \widehat{DNA}$

Mặt khác $\widehat{BAN} = \widehat{DAN}$

Suy ra $\widehat{DAN} = \widehat{DNA}$

$\Rightarrow \triangle DAN$ cân tại D

$\Rightarrow DN = AD = BC$

Dễ thấy $\triangle MAN$ cân tại C nên

$CM = CN$

Lại có $KM = KN$

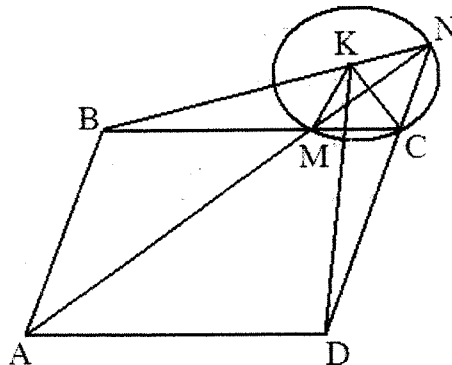
$\Rightarrow CK \perp MN$

b) Xét tam giác KBC và tam giác KDN, ta có: $BC = KN$; $KC = KN$;

$\widehat{KCB} = \widehat{KDN}$ (cùng bằng $\widehat{KMC}$)

Suy ra $\triangle KBC = \triangle KDN \Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{KDC}$

Vậy tứ giác BKCD là tứ giác nội tiếp (đpcm).



Bài 24. Cho hai đường tròn (O) , (O') nằm ngoài nhau có tâm tương ứng là O và O' . Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại A và (O') tại B . Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn cắt AB tại I , tiếp xúc với (O) tại C và (O') tại D . Biết rằng C nằm giữa I và D .

1. Hai đường thẳng OC , $O'B$ cắt nhau tại M . Chứng minh rằng $OM > O'M$.

2. Kí hiệu (S) là đường tròn đi qua A, B, C và (S') là đường tròn đi qua A, D, B . Đường thẳng CD cắt (S) tại E khác C và (S') tại F khác D . Chứng minh rằng AF vuông góc với BE .

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

1. Ta có: $OM \parallel O'D$ (vì OM và $O'O$ cùng vuông góc với CD)

Suy ra: $\widehat{MOO'} = \widehat{OO'D} < \widehat{IO'D} = \widehat{IO'M} < \widehat{OO'M}$

Vậy $OM > O'M$

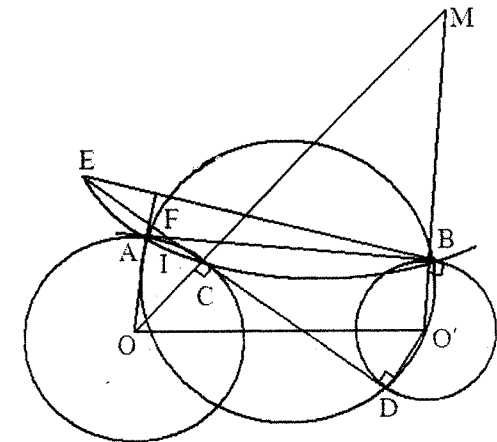
2. Ta có tứ giác ACBE nội tiếp và $IA = IC$, nên $IB = IE$.

Mặt khác $IB = ID$ do đó tam giác BED vuông tại B nên $BD \perp BE$ (1)

Tứ giác ADBF nội tiếp và $IB = ID$, nên $IA = IF$.

Suy ra $AF \parallel BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AF \perp BE$



Bài 25. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ có $R_1 > R_2$, tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn $(O_1; R_1)$ tại M và cắt đường tròn $(O_2; R_2)$ tại N (các điểm M, N khác A).

a) Xác định vị trí của đường thẳng d để độ dài đoạn thẳng MN lớn nhất.

b) Tìm tập hợp các trung điểm I của các đoạn thẳng MN khi đường thẳng d quay quanh điểm A .

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐH Vinh năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

a) Kéo dài O_1O_2 cắt đường tròn (O_1) và (O_2) tại hai điểm M_0, N_0 .

Ta có: $\widehat{ANN_0} = \widehat{AMM_0} = 90^\circ$

Suy ra $MN \leq M_0N_0$

$\Rightarrow MN \leq 2(R_1 + R_2)$

Vậy độ dài lớn nhất của đoạn thẳng MN lớn nhất là $2(R_1 + R_2)$ đạt được khi đường thẳng d đi qua O_1 và O_2 .

b) Gọi I_0 là trung điểm của M_0N_0 .

Do $R_1 > R_2 \Rightarrow AM_0 > AN_0$ nên I_0 nằm trong đoạn AM_0 .

Vì $\triangle AMM_0 \sim \triangle ANN_0$ nên $AM > AN$.

Suy ra I nằm trong đoạn AM .

Do đó: $\frac{AI}{AM} = \frac{IN - AN}{AM} = \frac{IM - AN}{AM} = \frac{AM - AI - AN}{AM} = 1 - \frac{AI}{AM} - \frac{AN}{AM}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{AI}{AM}\right) = 1 - \frac{AN}{AM} \quad (1)$

Tương tự, ta có: $2\left(\frac{AI_0}{AM_0}\right) = 1 - \frac{AN_0}{AM_0} \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{AI}{AM} = \frac{AI_0}{AM_0}$

Do đó $II_0 \parallel MM_0 \Rightarrow \widehat{AII_0} = 90^\circ$

Vậy tập hợp điểm I là đường tròn đường kính AI_0 .

Đảo lại: Do M, N khác A nên I khác A .

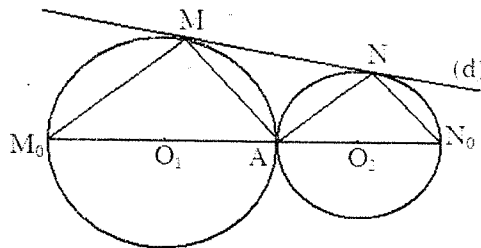
Lấy điểm I' trên đường kính AI_0 từ điểm A , đường thẳng AI' cắt đường tròn (O_1) và (O_2) tại M', N' .

Khi đó, ta có: $II_0 \perp M'N' \Rightarrow II_0 \parallel M_0M' \parallel N_0N'$

Suy ra: $\frac{AI'}{AM'} = \frac{AI_0}{AM_0}; \frac{AI'}{AN'} = \frac{AI_0}{AN_0}$

Do đó I' là trung điểm của $M'N'$.

Vậy tập hợp điểm I là đường tròn đường kính AI_0 trừ điểm A .



Bài 26. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AC = b$, $AB = c$ (với $b > c$). Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M . Gọi I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống các đường thẳng AB và AC . Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống các đường thẳng AB và AC .

1. Chứng minh các tứ giác $AIEJ$ và $CMJE$ nội tiếp.

2. Chứng minh I, J, M thẳng hàng và IJ vuông góc với HK .

3. Tính độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c .

4. Tính $IH + JK$ theo b, c .

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐH Vinh năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

1. Ta có: $\widehat{AIE} = \widehat{AJE} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $AIEJ$ nội tiếp đường tròn đường kính AE .

Mặt khác $\widehat{AIE} = \widehat{AJE} = 90^\circ$

Vậy tứ giác $CMJE$ nội tiếp đường tròn đường kính CE .

2. Ta có: $\widehat{IEM} = \widehat{AEC}$ (vì cùng bù với $\widehat{ABC}$)

Suy ra: $\widehat{AEI} = \widehat{CEM}$

Mặt khác $\widehat{AEI} = \widehat{AJI}$ (vì cùng chắn $\widehat{AI}$)

và $\widehat{CEM} = \widehat{CJM}$ (vì cùng chắn $\widehat{CM}$)

Suy ra $\widehat{CJM} = \widehat{AJI}$

Mà I, M nằm về hai phía của đường thẳng AC nên I, J, M thẳng hàng.

Tương tự, ta có H, K, M thẳng hàng.

Vì tứ giác $CFMK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CFK} = \widehat{CMK}$

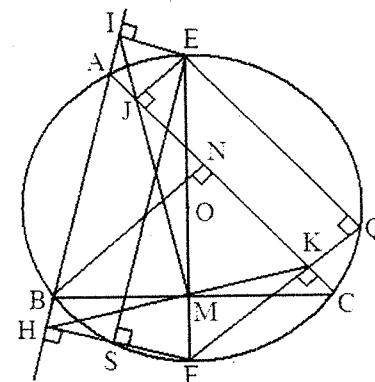
Vì tứ giác $CMJE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{JME} = \widehat{JCE}$

Ngoài ra $\widehat{ECF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CFK} = \widehat{JCE}$ (vì cùng bằng $90^\circ - \widehat{ACF}$)

Do đó $\widehat{CMK} = \widehat{JME} \Rightarrow \widehat{JMK} = \widehat{EMC} = 90^\circ$

Vậy $IJ \perp HK$.

3. Kẻ $BN \perp AC$



$$\text{Vì } \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABN} = 30^\circ \Rightarrow AN = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$$

$$\text{Suy ra: } BN^2 = AB^2 - AN^2 = \frac{3c^2}{4}$$

$$\text{Ta có: } BC^2 = BN^2 + CN^2 = \frac{3c^2}{4} + \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$$

Trong tam giác đều BCE, ta có:

$$R = CE = \frac{2}{3}EM = \frac{2BC \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}\sqrt{3(b^2 + c^2 - bc)}$$

4. Gọi S là giao điểm của FH với đường tròn (O).

Ta có tứ giác SHIE là hình chữ nhật nên HS = ES.

Mặt khác AB // ES nên $\widehat{AE} = \widehat{BS}$, mà $\widehat{BE} = \widehat{CE}$, do đó $\widehat{EBS} = \widehat{AEC}$

$$\Rightarrow ES = AC = b \Rightarrow IH = b$$

Gọi Q là giao điểm của FK với đường tròn (O), ta có tứ giác EJKQ là hình chữ nhật nên JK = EQ.

Mặt khác EQ // AC nên $\widehat{AE} = \widehat{CQ}$ mà $\widehat{BE} = \widehat{CE}$, do đó $\widehat{EQ} = \widehat{AB}$

$$\Rightarrow EQ = AB = c \Rightarrow JK = b$$

$$\text{Vậy } IH + JK = b + c.$$

Bài 27. Cho M là điểm bất kỳ trên nửa đường tròn tâm O, đường kính

AB = 2R (M không trùng với A, B). Vẽ các tiếp tuyến Ax, By, Mz của nửa đường tròn đó. Đường thẳng Mz cắt Ax, By lần lượt tại N và P. Đường thẳng BM cắt Ax tại D. Chứng minh:

a) Tứ giác AOMN nội tiếp trong một đường tròn.

b) Tam giác NPO là tam giác vuông.

c) Các điểm N và P lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AD và BC.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{OAN} = \widehat{OMN} = 90^\circ$

Do đó tứ giác AOMN nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Ta có: $\widehat{MNO} = \widehat{MAO}$;

$$\widehat{MPO} = \widehat{MBO}$$

Mà $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^\circ$ nên

$$\widehat{ONM} + \widehat{MPO} = 90^\circ$$

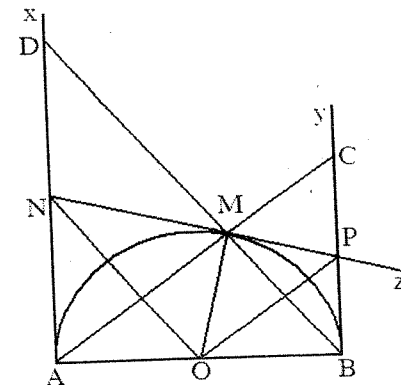
Do đó tam giác NOP vuông tại O.

c) Dễ thấy $ON \perp AM$; $BD \perp AM$

Do đó $ON \parallel BD$

Vì O là trung điểm của AB nên N là trung điểm của AD.

Tương tự, ta có P là trung điểm của BC.



Bài 28. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O có trực tâm H. Phân giác trong của góc A cắt đường tròn (O) tại M. Kẻ đường cao AK của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng OM đi qua trung điểm N của BC.

b) Các góc $\widehat{KAM}$ và $\widehat{MAO}$ bằng nhau.

c) $AH = 2NO$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$

Suy ra $\widehat{BM} = \widehat{CM}$ do đó OM vuông góc với BC tại N là trung điểm của BC.

b) Ta có: $AK \parallel OM$ (vì cùng vuông góc với BC)

Suy ra $\widehat{KAM} = \widehat{AMO}$

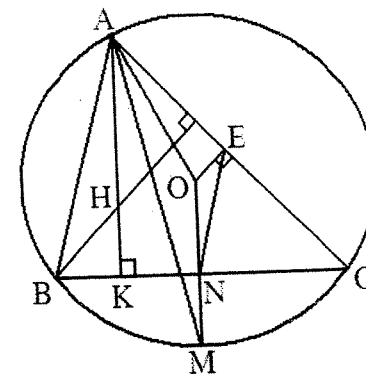
Mặt khác $\widehat{AMO} = \widehat{MAO}$

Suy ra: $\widehat{KAM} = \widehat{MAO}$

c) Gọi E là trung điểm của AC.

Khi đó EN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $EN \parallel AB$ và

$$EN = \frac{AB}{2}$$



Mặt khác $AH \parallel ON$ (vì cùng vuông góc với BC) và $BH \parallel OE$ (vì cùng vuông góc với AC).

Do đó $\triangle AHB \sim \triangle NOE$ (g - g)

$$\text{Suy ra: } \frac{NO}{AH} = \frac{NE}{AB} = \frac{1}{2}$$

Vậy $AH = 2NO$.

Bài 29. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn O , bán kính R , kẻ hai tiếp tuyến PA, PB . Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường kính BC .

a) Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm E của AH .

b) Giả sử $PO = d$. Tính AH theo R và d .

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $AH \parallel PB$ (vì cùng vuông góc với BC)

$$\Rightarrow \frac{EH}{PB} = \frac{CH}{CB} \quad (1)$$

Mặt khác $PO \parallel AC$ (vì cùng vuông góc với AB) nên $\widehat{POB} = \widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác vuông ACH đồng dạng với tam giác vuông POB , ta có:

$$\frac{AH}{PB} = \frac{CH}{OB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), kết hợp với $CB = 2OB$
 $\Rightarrow EH = 2OH \Rightarrow EA = EH$

Vậy E là trung điểm của AH .

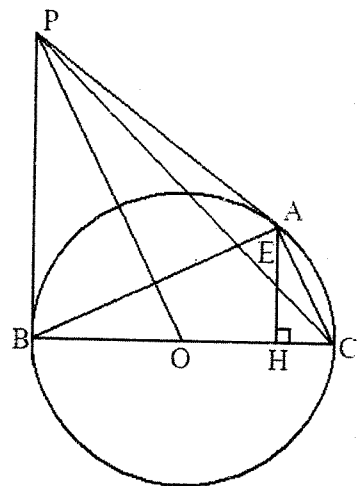
b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BAC , ta có:

$$AH = BH \cdot CH = (2R - CH) \cdot CH$$

$$\text{Kết hợp với (1) và } AH = 2EH, \text{ ta được: } AH^2 = \left(2R - \frac{AH \cdot CB}{2PB}\right) \cdot \frac{AH \cdot CB}{2PB}$$

$$\Leftrightarrow 4PB^2 \cdot AH^2 = (4R \cdot PB - AH \cdot 2R) \cdot AH \cdot 2R$$

$$\Leftrightarrow PB^2 \cdot AH = R^2 (2PB - AH)$$



$$\Leftrightarrow AH(PB^2 + R^2) = 2R^2 \cdot PB$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{2R^2 \cdot PB}{PB^2 + R^2} = \frac{2R^2}{d^2} \sqrt{d^2 - R^2}$$

Bài 30. Cho đường tròn tâm O , bán kính R và AB là đường kính cố định của đường tròn (O) . Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B . MN là đường kính thay đổi của đường tròn (O) sao cho MN không vuông góc với AB và $M \neq A; M \neq B$. Các đường thẳng AM và AN cắt đường thẳng d tương ứng tại C và D . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD , H là giao điểm của AI và MN . Khi MN thay đổi, chứng minh rằng:

a) Tích $AM \cdot AC$ không đổi.

b) Bốn điểm C, M, N, D cùng thuộc một đường tròn.

c) Điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

d) Tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác HIB luôn thuộc một đường thẳng cố định.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Ngoại ngữ, ĐH Hà Nội năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên $MB \perp AC$

Trong tam giác vuông ABC , ta có: $MA \cdot AC = 4R^2 = \text{const}$

b) Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$

$\widehat{ACD} = \widehat{OAN}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

Mà $\widehat{OAN} = \widehat{ONA}$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{MNA}$

Do $\widehat{MNA} + \widehat{MND} = 180^\circ$ nên

$$\widehat{ACD} + \widehat{MND} = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác $MNCD$ nội tiếp được.

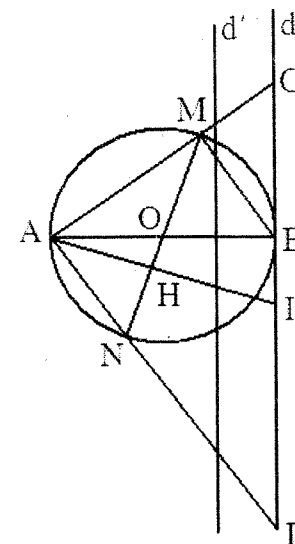
c) AI là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ACD nên ta có:

$$IA = ID = IC$$

Suy ra tam giác AID cân tại I

Do đó $\widehat{IAD} = \widehat{ADC}$

$$\text{Mà } \widehat{IAD} + \widehat{ACD} = 90^\circ; \widehat{ACD} = \widehat{ONA}$$



Nên $\widehat{IAD} + \widehat{ONA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHN} = 90^\circ$ hay $AH \perp ON$

Suy ra H thuộc đường tròn đường kính OA cố định.

d) Ta có: $\widehat{OHI} + \widehat{OBI} = 180^\circ$

Do đó bốn điểm O, H, B, I cùng thuộc đường tròn đường kính OI.

Suy ra tâm J đường tròn ngoại tiếp tam giác HBI thuộc đường trung trực d' của đoạn OB cố định.

Bài 31. Cho góc xOy vuông và hai điểm A, B trên cạnh Ox (A nằm giữa O và B), điểm M bất kì trên cạnh Oy. Đường tròn (T) đường kính AB cắt tia MA, MB lần lượt tại điểm thứ hai là C, E. Tia OE cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai là F.

1. Chứng minh 4 điểm O, A, E, M nằm trên một đường tròn, xác định tâm của đường tròn đó.
2. Tứ giác OCFM là hình gì? Tại sao?
3. Chứng minh hệ thức $OE \cdot OF + BE \cdot BM = OB^2$.
4. Xác định vị trí của điểm M để tứ giác OCFM là hình bình hành. Tìm mối quan hệ giữa OA và AB để tứ giác là hình thoi.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu Văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

1. Ta có: $\widehat{AMO} = \widehat{AEM} = 90^\circ$

Do đó tứ giác OAEM nội tiếp đường tròn đường kính AM.

2. Tứ giác OAEM nội tiếp nên $\widehat{OMA} = \widehat{OEA}$

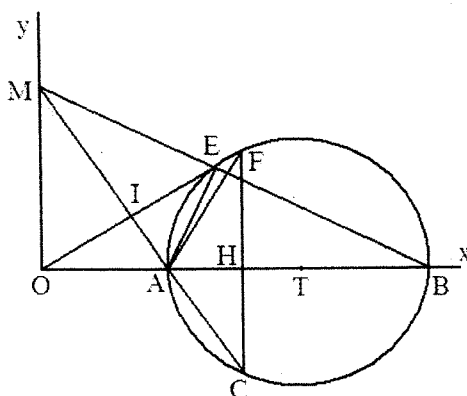
Bốn điểm A, E, F, C cùng nằm trên một đường tròn (T) nên $\widehat{OEA} = \widehat{ACF}$

Do đó $\widehat{OMA} = \widehat{ACF} \Rightarrow FC \parallel OM$

Vậy OCFM là hình thang.

3. Ta có: $\Delta OFA \sim \Delta OBE$ (c - g - c)

Suy ra: $\frac{OF}{OB} = \frac{OA}{OE} \Rightarrow OE \cdot OF = OA \cdot OB$ (1)



$\Delta OBM \sim \Delta EBA$ (g - g - g)

Suy ra: $\frac{OB}{EB} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow BE \cdot BM = BA \cdot BO$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $OE \cdot OF + BE \cdot BM = OB^2$

4. Gọi I là giao điểm của CM với OE là I và H là giao điểm của CF với OB.

Hình thang OCFM là hình bình hành nên I là trung điểm của OF do đó A là trọng tâm của tam giác OCF. Khi đó, ta có: $OA = 2OH$

Cách dựng:

- Dựng điểm H trên tia OA sao cho $OA = 2AH$
- Qua H dựng đường thẳng vuông góc với BC cắt đường tròn (T) tại F và C.
- Nối CA cắt Ox tại M, khi đó M là điểm cần dựng.

Khi tứ giác OCFM là hình bình hành, muốn nó thành hình thoi thì $CI \perp OF$

Suy ra tam giác OCF đều và A là tâm của nó nên $\widehat{CAT} = 60^\circ$

Do đó $OA = AC = AT = \frac{AB}{2}$

Bài 32. Cho đường tròn (O) tâm O, bán kính R và đường tròn (O') tâm O', bán kính R', tiếp xúc ngoài tại A ($R > R'$). Vẽ các đường kính AOB của đường tròn (O) và AO'C của đường tròn (O'). Dây DE của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC.

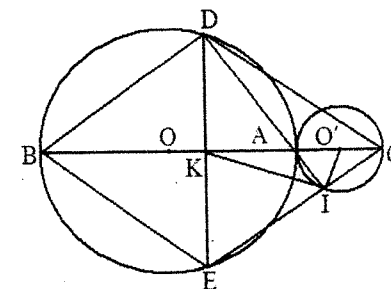
- 1) Chứng minh tứ giác BDCE là hình thoi.
- 2) Gọi I là giao điểm của EC với đường tròn (O'). Chứng minh ba điểm D, A, I thẳng hàng.
- 3) Chứng minh KI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

1) Vì $OK \perp DE$ nên K là trung điểm của DE.

Tứ giác BDCE có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình thoi.



2) Ta có: $\widehat{BDA} = 90^\circ$

Mặt khác $BD \parallel EC$, nên $AD \perp EC$

Vì $\widehat{AIC} = 90^\circ$ nên $AI \perp EC$.

Vậy D, A, I thẳng hàng.

3) Vì IK là trung tuyến tam giác IDE vuông tại I nên

$$IK = KD \Rightarrow \widehat{IKD} = \widehat{KDI}$$

Do $OA' = O'I = R$ nên $\widehat{O'IA} = \widehat{O'AI} = \widehat{DAK}$

Do đó $\widehat{KIO'} = \widehat{KID} + \widehat{O'IA} = \widehat{KDI} + \widehat{DAK} = 90^\circ$

Vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Bài 33. Cho hai điểm A và B cố định trên đường tròn (O). C là điểm chính giữa cung AB. M là điểm chuyển động trên dây AB. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng:

1) $AC^2 = CM \cdot CD$.

2) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM thuộc một đường thẳng cố định.

3) Gọi R_1 và R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM và BDM. Chứng minh $R_1 + R_2$ là hằng số.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $\triangle ACM \sim \triangle DCA$ (g - g)

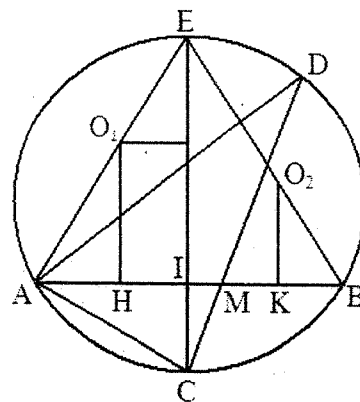
$$\text{nên } \frac{AC}{DC} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow AC^2 = DC \cdot CM$$

2) Kẻ đường kính CE.

Vì $\widehat{CAM} = \widehat{CDA}$ nên AC là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM.

Do $AC \perp AE$ nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM phải nằm trên đường thẳng cố định AE.

3) Tương tự tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM thuộc đường thẳng BE.



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADM và BDM.

Kẻ $O_1H \perp AB, O_2K \perp AB$. Khi đó H và K lần lượt là trung điểm của AM và MB.

Suy ra: $R_1 = O_1A$ và $R_2 = O_2B$.

$$\text{Kẻ } O_1N \perp CE, \text{ ta có: } O_1N = HI = AI - AH = \frac{1}{2}(AB - AM) = \frac{1}{2}BM = KB$$

$$\text{Vậy } \triangle EON_1 = \triangle O_2KB \Rightarrow R_2 = O_2B = O_1E$$

$$\text{Do đó } R_1 + R_2 = AE = \text{const}$$

Bài 34. Cho đường tròn (C) tâm O, đường kính AB. M là một điểm nằm trong đoạn OA; CD là dây vuông góc với đường kính AB tại điểm E. Đường thẳng DM cắt (C) tại N (khác điểm D). Đường tròn (C_1) tâm O_1 , bán kính r tiếp xúc trong với (C) tại điểm J thuộc cung nhỏ CN và tiếp xúc với các đoạn thẳng CM và MN tại các điểm I và K tương ứng. Biết

$$AM = a, ME = b, EB = c.$$

1. Chứng minh rằng tam giác O_1KM đồng dạng với tam giác MEC.

2. Tính độ dài các đoạn OO_1, KM và O_1M theo a, b, c và r.

$$3. \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHS Hà Nội năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

1. $\triangle MCD$ cân tại M, suy ra

$$\widehat{MCD} = \widehat{MDC} = \frac{1}{2} \widehat{KMC}$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{O_1MK} = \frac{1}{2} \widehat{KMC}$$

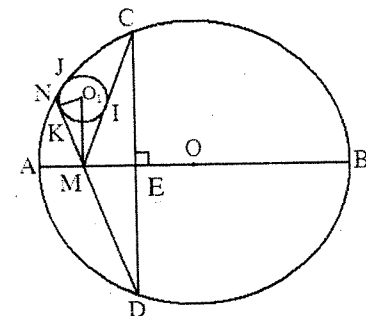
Do đó $\triangle O_1KM \sim \triangle MEC$ (đpcm)

2. Ta có

$$OA = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow OO_1 = \frac{a+b+c}{2} - r$$

Vì $\triangle O_1KM \sim \triangle MEC$ và CE là đường cao của tam giác vuông cân CAB nên

$$\frac{MK}{O_1K} = \frac{CE}{ME} \Rightarrow KM = \frac{O_1K \cdot CE}{ME} = \frac{r \sqrt{EA \cdot EB}}{b} \Rightarrow KM = \frac{r \sqrt{(a+b)c}}{b}$$



Ta có: $O_1M^2 = O_1K^2 + KM^2 = r^2 + \frac{r^2(a+b)c}{b^2} \Rightarrow O_1M = \frac{r}{b} \sqrt{b^2 + ac + bc}$

3. Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông O_1MO , ta có:
 $OO_1^2 = OM^2 + O_1M^2$

$$\left(\frac{a+b+c}{2} - r\right)^2 = \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)^2 + r^2 + \frac{r^2(a+b)}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)cr^2 + b^2(a+b+c)r - (a+b)ab^2 = 0$$

Xem biểu thức trên là PT bậc hai với ẩn r , ta có:

$$\Delta = b^4(a+b+c) + 4b^2ac(a+b)(a+c) = b^2[b(a+b+c) + 2ac]^2$$

$$\Rightarrow r = \frac{-b^2(a+b+c) + b[b(a+b+c) + 2ac]}{2c(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Bài 35. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B. Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (E thuộc $(O; R)$ và F thuộc $(O'; R')$). Đường thẳng AB cắt EF tại K. Gọi I là điểm đối xứng của A qua K (A nằm giữa B và I)

1) Có nhận xét gì về tứ giác AEIF?

2) Gọi M là trung điểm của OO' . Cho biết $MA = MO'$. Hãy tính độ dài EF theo R và R' .

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐH Vinh năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

1) Vì $\Delta KEA \sim \Delta KBE$ (g - g) nên $\frac{KE}{KB} = \frac{KA}{KE}$

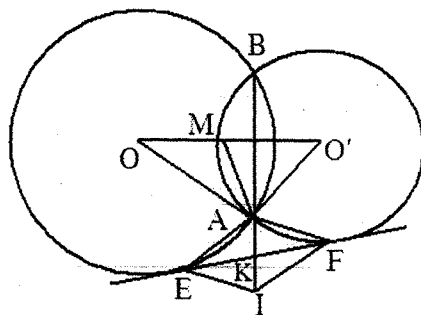
$$\Rightarrow KE^2 = KA \cdot KB \quad (1)$$

Tương tự, ta có: $KF^2 = KA \cdot KB \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $KE = KF$

Mặt khác $KA = KI$ nên tứ giác AEIF là hình bình hành.

2) Vì $MA = MO = MO'$ nên tam giác OAO' vuông tại A.



Áp dụng định lí Pitago, ta có: $OO'^2 = R^2 + R'^2 \quad (3)$

Mặt khác: $OO'^2 = EF^2 + (OE - EF)^2 = EF^2 + (R - R')^2 \quad (4)$

Từ (3) và (4), suy ra: $EF = \sqrt{2RR'}$

Bài 36. Cho tam giác ABC cân tại A với $AB > BC$. Điểm D di động trên cạnh AB, không trùng với A và B. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C và D cắt nhau tại K.

1) Chứng minh rằng tứ giác ADCK nội tiếp.

2) Tứ giác ABCK là hình gì? Tại sao?

3) Xác định vị trí điểm D sao cho tứ giác ABCK là hình bình hành.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

1) Dễ thấy tam giác ABC cân tại A và tam giác KDC cân tại K nên ta có:

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 2\widehat{ABC};$$

$$\widehat{DCK} = 180^\circ - 2\widehat{KDC} \text{ do } \widehat{KDC} = \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DKC}$$

Vậy tứ giác ADCK nội tiếp.

2) Tứ giác ADCK nội tiếp nên ta có:

$$\widehat{CAK} = \widehat{CDK} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$

Suy ra: $AK \parallel BC$

Do đó tứ giác ABCK là hình thang.

3. Hình thang ABCK trở thành hình bình hành khi $AB \parallel CK$, khi đó

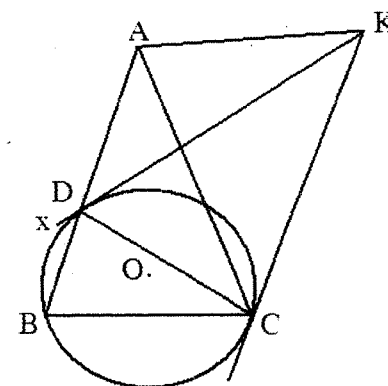
$$\widehat{BAC} = \widehat{ACK} \quad (*)$$

Theo trên, ta có:

$$\widehat{KCD} = \widehat{KDC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ACK}$$

Từ (*) ta thấy $\widehat{BCD} = \widehat{BAC}$ từ đó suy ra cách dựng điểm D.



Bài 37. Gọi AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC (D thuộc đoạn BC). Trên đoạn AD lấy hai điểm M, N sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$. BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm thứ hai F.

- 1) Chứng minh BCEF là tứ giác nội tiếp.
- 2) Áp dụng câu 1) chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.
- 3) Chứng minh rằng $\widehat{BCF} = \widehat{ACM}$. Từ đó suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán ĐHSPT HCM năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

- 1) Ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BAN}$, $\widehat{BEC} = \widehat{CAN}$

$$\text{Mà } \widehat{BAN} = \widehat{CAN} \Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{BEC}$$

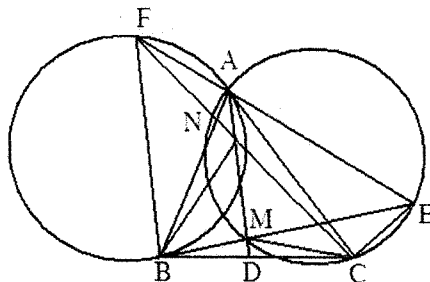
Do đó tứ giác BCEF nội tiếp.

- 2) Do tứ giác BCEF nội tiếp nên $\widehat{CFE} = \widehat{CBE}$ mà $\widehat{CBE} = \widehat{ABN} = \widehat{NFA}$
 $\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{NFA}$

Do đó hai tia FA và FE trùng nhau, hay ba điểm A, E, F thẳng hàng.

- 3) Ta có: $\widehat{BCF} = \widehat{BEF}$

$$\text{Do } \widehat{ACM} = \widehat{BEF} \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{ACM} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BCF} \Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{BCM}$$



Bài 38. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ A xuống cạnh BC. Đường phân giác của góc BAH cắt BH tại M. Đường phân giác của góc CAH cắt CH tại điểm N.

- 1) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
- 2) Kí hiệu d_1 và d_2 lần lượt là các đường thẳng vuông góc với BC tại điểm M và N. Chứng minh rằng d_1 và d_2 tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

- 1) Ta có: $\widehat{CMA} + \widehat{MAH} = 90^\circ$; $\widehat{CAM} + \widehat{BAM} = 90^\circ$

Vì $\widehat{MAH} = \widehat{BAM}$ nên $\widehat{CMA} = \widehat{CAM}$

Suy ra tam giác CAM cân tại C

Tương tự như trên, ta có tam giác BAN cân tại B.

Giả sử phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ cắt nhau tại I.

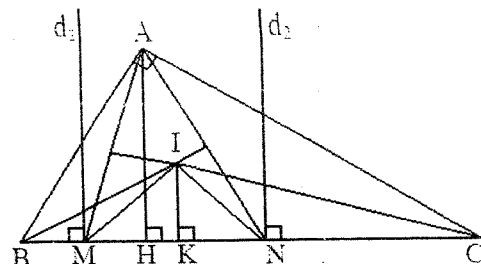
Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Do tam giác CAM và tam giác BAN đều cân nên suy ra các đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ chính là trung trực của AN và AM. Do đó I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

- 2) Ta có: $\widehat{MAN} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{MIN} = 90^\circ$

Do đó tam giác MIN vuông cân. Suy ra $IK = KM = KN$ (do IK là đường cao của tam giác vuông cân MIN).

Suy ra đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với d_1 và d_2 .



Bài 39. Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên cạnh AB lấy điểm M tùy ý ($M \neq A, M \neq B$). Kí hiệu O, O_1 , O_2 lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMC, BMC.

1. Chứng minh 4 điểm C, O_1 , M, O_2 cùng nằm trên đường tròn (T).
2. Chứng minh điểm O cũng nằm trên đường tròn (T).
3. Xác định vị trí của M để đường tròn (T) có bán kính nhỏ nhất.

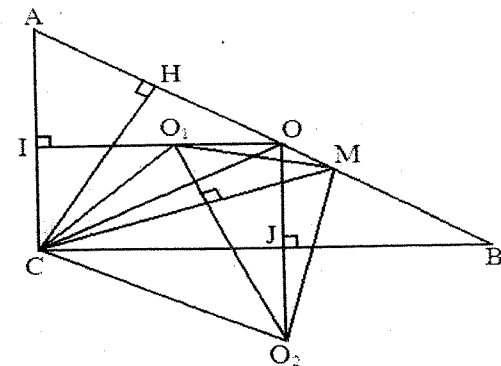
(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

1. Ta có: $\widehat{MAC} = \frac{1}{2} \widehat{MO_1C}$;

$$\widehat{MBC} = \frac{1}{2} \widehat{MO_2C}$$

(tính chất về góc nội tiếp và góc ở tâm của một đường tròn cùng chắn một cung)



$$\text{Mà } \widehat{MAC} + \widehat{MBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MO_1C} + \widehat{MO_2C} = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác CO_1MO_2 là tứ giác nội tiếp hay 4 điểm O, O_1, O_2, M cùng nằm trên một đường tròn.

$$2. \text{ Để thấy: } \widehat{CO_1O_2} = \frac{1}{2}\widehat{MO_1C} = \widehat{CAB}; \widehat{CO_2O_1} = \frac{1}{2}\widehat{MO_2C} = \widehat{ABC}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{CO_1O_2} + \widehat{CO_2O_1} = \widehat{CAB} + \widehat{CBA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1CO_2} = 90^\circ$$

Gọi I và J lần lượt là giao điểm của OO_1 và OO_2 với AC và AB , ta có:
 $\widehat{I} = \widehat{J} = 90^\circ$

Tứ giác $CIOJ$ là hình chữ nhật. Suy ra $\widehat{O_1OO_2} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{O_1CO_2} + \widehat{O_1OO_2} = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác CO_1OO_2 là tứ giác nội tiếp. Do đó điểm O cũng nằm trên đường tròn (T) .

3. Đường tròn (T) có đường kính $O_1O_2 = 2r$ luôn đi qua hai điểm cố định C và O .

$$\text{Suy ra } O_1O_2 = 2r \geq CO.$$

Đấu "=" xảy ra khi và chỉ khi OC là đường kính của đường tròn (T) . Khi đó $\widehat{COM} = 90^\circ \Rightarrow CM \perp AB$, hay H là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống AB .

Bài 40. Cho tam giác ABC . Một đường tròn (T) đi qua điểm A và B cắt các cạnh CA, CB tại các điểm L và N tương ứng ($L \neq A, L \neq C, N \neq B, N \neq C$). Gọi M là trung điểm của cung LN của đường tròn (T) và M nằm trong tam giác ABC . Đường thẳng AM cắt các đường thẳng BL và BN tại các điểm D và F tương ứng, đường thẳng BM cắt các đường thẳng AN và AL tại các điểm D và F tương ứng. Gọi P là giao điểm của AN và BL .

1. Chứng minh $DE \parallel GF$.

2. Nếu tứ giác $DEFG$ là hình bình hành, hãy chứng minh:

a) DF vuông góc với EG .

b) Hai tam giác ALP và ANC đồng dạng với nhau.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin, ĐHSPT Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

$$1. \text{ Ta có: } \widehat{ML} = \widehat{MN}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{CAF} = \widehat{FAN} = \widehat{CBG} = \widehat{GBL}$$

Do đó tứ giác $ABEF$ là tứ giác nội tiếp.

$$\text{Suy ra } \widehat{FGB} = \widehat{FAB} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \widehat{GED} = \widehat{FAB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } \widehat{FGB} = \widehat{GED}$$

Do đó $GF \parallel DE$

2. a) Tứ giác $DEFG$ là hình bình hành nên M là trung điểm của EG .

Tam giác AGE có AM vừa là đường phân giác vừa là đường trung tuyến nên tam giác AGE cân tại A và AM vuông góc với GE .

Suy ra DF vuông góc với EG .

$$\text{b) Ta có: } AM \perp EG \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{ALB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{PNC} = 90^\circ$$

$$\text{Vậy } \triangle ALP \sim \triangle ANC$$

Bài 41. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Giả sử các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại P nằm khác phía với A đối với BC . Trên cung BC không chứa A ta lấy điểm K (K khác B và C). Đường thẳng PK cắt đường tròn (O) lần thứ hai tại Q khác A .

1. Chứng minh các đường phân giác của các góc $\widehat{KBQ}$ và $\widehat{KCQ}$ đi qua cùng một điểm trên đường thẳng PQ .

2. Giả sử đường thẳng AK đi qua trung điểm M của cạnh BC . Chứng minh rằng $AQ \parallel BC$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

1. Gọi I là giao điểm của phân giác của góc $\widehat{KPQ}$ với PQ .

Nối IC , ta chứng minh IC là phân giác của góc $\widehat{KCQ}$

Ta có: $\widehat{BIP} = \widehat{IBQ} + \widehat{IQB}$

Mà $\widehat{IBQ} = \widehat{IBK}$ và $\widehat{IQB} = \widehat{KBP}$

Suy ra $\widehat{BIP} = \widehat{IBP}$

Do đó tam giác PBI cân tại P.

Do $PB = PC$ nên tam giác PCI cân tại P

Ta có: $\widehat{PCI} = \widehat{PQC} + \widehat{QCI}$; $\widehat{PCI} = \widehat{KCI} + \widehat{KCP}$

Do tam giác PCI cân tại P nên $\widehat{PIC} = \widehat{PCI}$

Suy ra $\widehat{PQC} + \widehat{QCI} = \widehat{KCI} + \widehat{KCP}$

Vì $\widehat{PQC} = \widehat{KCP}$ nên $\widehat{QCI} = \widehat{KCI}$

Do đó CI là phân giác của góc $\widehat{KQC}$

Vậy các đường phân giác của các góc $\widehat{KBQ}$ và $\widehat{KCQ}$ đi qua cùng một điểm trên đường thẳng PQ.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $PC^2 = PM \cdot PO$; $PC^2 = PK \cdot PO$

Suy ra: $PM \cdot PO = PK \cdot PO$

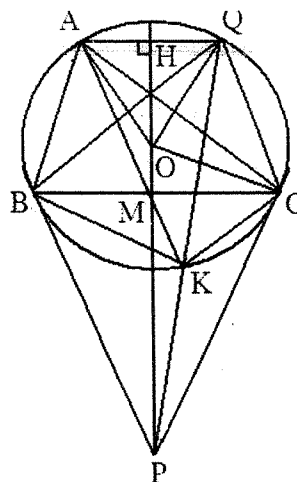
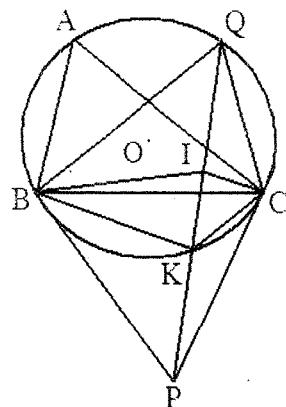
Do đó tứ giác KMOQ nội tiếp

Suy ra: $\widehat{AKQ} = \widehat{QOH}$

Do $\widehat{AKQ} = \frac{1}{2} \widehat{QOA} \Rightarrow \widehat{QOH} = \widehat{AOH}$

Suy ra OH là đường phân giác của tam giác cân OAQ.

Do đó $OH \perp AQ \Rightarrow AQ \parallel BC$ (vì cùng vuông góc với PH)



CHỦ ĐỀ 17. CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Sử dụng mối quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc

- Trong tam giác vuông có cạnh góc vuông AH, cạnh huyền AB thì $AB \geq AH$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi B trùng với H.

- Trong các đoạn thẳng nối từ một điểm đến một đường thẳng, đoạn thẳng vuông góc với đường thẳng đó thì có độ dài nhỏ nhất.

- Trong các đoạn thẳng nối hai điểm nằm trên hai đường thẳng song song, đoạn thẳng vuông góc với hai đường thẳng song song có độ dài nhỏ nhất.

2. Sử dụng các bất đẳng thức trong tam giác

Trong tam giác ABC, ta luôn có: $|AB - AC| < BC < AB + AC$

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow AC \leq AB$

3. Sử dụng quy tắc điểm

Với ba điểm bất kì A, B, C, ta luôn có: $AB \leq AC + BC$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi C là một điểm thuộc đoạn thẳng AB.

4. Sử dụng bất đẳng thức trong đường tròn

- Đường kính là dây cung lớn nhất trong đường tròn.

- Trong đường tròn (O), AB và CD là hai cung. OH và OK lần lượt là các khoảng cách từ O đến AB, CD.

Khi đó, ta có: $OH \geq OK$ khi và chỉ khi $AB \leq CD$

$\widehat{AB} \leq \widehat{CD}$ khi và chỉ khi $\widehat{AOB} \leq \widehat{COD}$

5. Sử dụng các bất đẳng thức đại số

- $x^2 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

- Nếu $x > 0, y > 0$ thì $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

- Nếu $x \geq 0, y \geq 0$ với $x + y = \text{const}$ thì xy đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

- Nếu $x \geq 0, y \geq 0$ với $x.y = \text{const}$ thì xy đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$x = y.$$

- Bất đẳng thức Cô-si: Nếu $a \geq 0, b \geq 0$ thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ hoặc

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

> B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hai điểm A, B nằm trong nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng d. Tìm trên d điểm C sao cho tổng $AC + BC$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

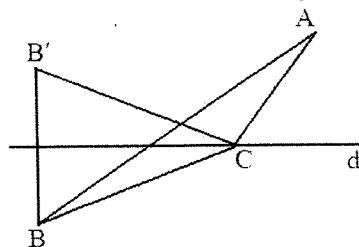
Gọi B' là điểm đối xứng của B qua đường thẳng d.

Ta có $\triangle BCB'$ cân tại C

Suy ra: $CB' = CB$

Do đó: $CA + CB = CA + CB' \geq AB'$

Vậy $CA + CB$ nhỏ nhất khi A, C, B' thẳng hàng, hay C là giao điểm của AB' và đường thẳng d.



Bài 2. Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O ; R). Một đường thẳng d đi qua A. Gọi B và C là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (O). Xác định vị trí của đường thẳng d để $AB + AC$ nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

Vẽ đường thẳng qua A tiếp xúc với đường tròn tại D, ta có D cố định.

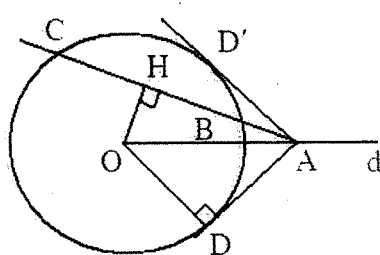
- Trường hợp 1: Nếu d trùng với AD hoặc AD'

Khi đó các điểm B, C, D trùng nhau, suy ra: $AB + AC = 2AD = 2AD'$

- Trường hợp 2: Nếu d không trùng với AD hoặc AD'

Ta vẽ $OH \perp d$ với H thuộc vào đường thẳng d

Khi đó H là trung điểm của BC và $OH < R$



Suy ra: $AB + AC = AH - HB + AH + HC = 2AH$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông OAH và tam giác vuông OAD, ta được: $OA^2 = AH^2 + OH^2$ và $OD^2 + AD^2 = OA^2$

Suy ra: $OH^2 + AH^2 = OD^2 + AD^2$

Mà $OH < R \Rightarrow AH > AD \Rightarrow AB + AC > 2AD$

Vậy $AB + AC$ nhỏ nhất khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn.

Bài 3. Cho đường tròn (O ; R) và đường thẳng xy cố định ngoài đường tròn. Từ điểm M tùy ý trên xy, vẽ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Kẻ OH vuông góc với xy. Dây AB cắt OH tại I.

a) Chứng minh rằng: $IO = \frac{R^2}{OH}$.

b) Xác định vị trí của điểm M trên xy để cho AB có độ dài nhỏ nhất.

c) Xác định vị trí của điểm M trên xy và N trên đường tròn (O) sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a) Gọi K là giao điểm của AB với OM, ta có:

$\triangle HOM \sim \triangle KOI$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{OM}{OI} \Rightarrow OI.OH = OK.OM$$

Mặt khác: $OK.OM = OA^2 = R^2$

Suy ra: $OH.OI = R^2$

$$\text{Hay } IO = \frac{R^2}{OH} < R$$

b) AB nhỏ nhất khi và chỉ khi OK lớn nhất

Mà $OK \leq OI$

OK lớn nhất khi và chỉ khi K trùng với I, hay $AB \perp OI$, hay M trùng với H.

Vậy AB nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng với H.

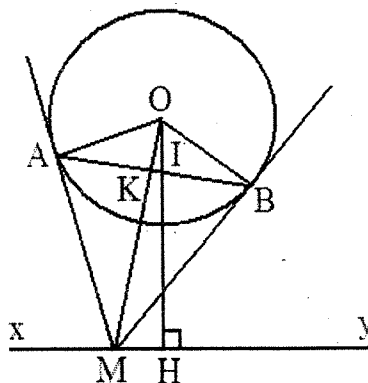
c) Gọi C là giao điểm của H với đường tròn (O).

Ta có: $MN \geq NO \geq OM \geq OH$

$$\Rightarrow MN \geq OH - ON = OH - HC$$

$$\Rightarrow MN \geq HC$$

Vậy MN nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng với H và N trùng với C.



Tương tự, ta có: $S_{\Delta HBE} \leq S_{\Delta HEG}$; $S_{\Delta GCN} \leq S_{\Delta GNF}$

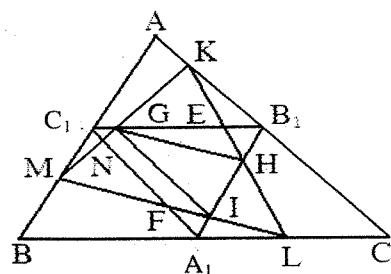
Do đó: $S_{\Delta FAI} + S_{\Delta HBE} + S_{\Delta GCN} \leq S_{\Delta FHI} + S_{\Delta GNF} \leq S$

$$\Rightarrow S_{\Delta A_1B_1C_1} - S \leq S \Rightarrow S \geq \frac{1}{2} S_{\Delta A_1B_1C_1}$$

$$\text{Mà } S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow S \geq \frac{1}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi (L trùng với A_1 ; K trùng với A) hoặc (K trùng với B_1 ; M trùng với B) hoặc (M trùng với C_1 hoặc L trùng với C)

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích phần chung của hai tam giác KLM và $A_1B_1C_1$ là $\frac{1}{8}$.



Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By của nửa đường tròn (Ax, By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là điểm tùy ý thuộc nửa đường tròn (khác A và B). Tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn cắt Ax tại D và cắt By tại E.

- Chứng minh rằng: ΔDOE là tam giác vuông.
- Chứng minh rằng: $AD \cdot BE = R^2$.
- Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho diện tích của tứ giác ADEB nhỏ nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, TP Huế năm học 2007 – 2008)

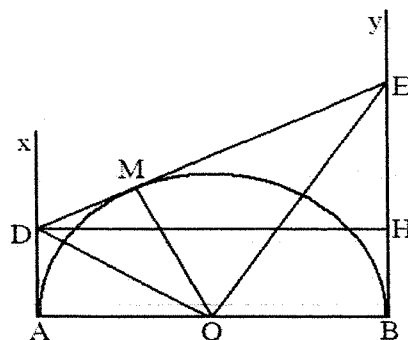
Hướng dẫn giải

a) Ta có DA và DM là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D, nên OD là tia phân giác $\widehat{AOM}$.

Tương tự, ta có OE là phân giác của $\widehat{OMB}$.

Mà $\widehat{AOM}$ và $\widehat{OMB}$ là hai góc kề bù nhau nên $\widehat{DOE} = 90^\circ$

Vậy ΔDOE vuông tại O.



b) Ta có $OM \perp DE$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông ODE, ta được:

$$DM \cdot EM = OM^2 = R^2 \quad (1)$$

Mặt khác: $DM = DA$ và $EM = EB$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $AD \cdot BE = R^2$

c) Tứ giác ADEB là hình thang vuông nên diện tích của nó là:

$$S_{\Delta DEB} = \frac{1}{2} AB(DA + EB) = \frac{1}{2} 2R(DM + EM) = R \cdot DE$$

Diện tích tứ giác ADEB nhỏ nhất khi DE nhỏ nhất.

Mà DE là đường xiên hay đường vuông góc kẻ từ D đến By, nên DE nhỏ nhất khi $DE = DH$. Khi đó $DE \parallel AB$ nên M là điểm chính giữa cung AB.

Bài 9. Cho C là một điểm nằm trên đoạn thẳng AB ($C \neq A$, $C \neq B$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm I khác A, tia vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt tia IK tại P.

1) Chứng minh:

- Tứ giác CPKB nội tiếp được đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.
- $AI \cdot BK = AC \cdot BC$.
- ΔAPB vuông.

2) Cho A, B, I cố định. Tìm vị trí điểm C để diện tích tứ giác ABKI đạt giá trị lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Quảng Ngãi năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

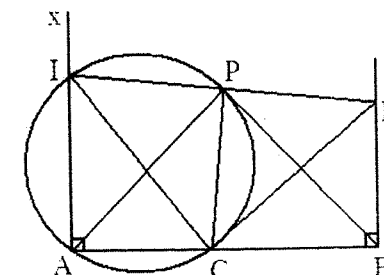
1) a) Vì $\widehat{CPK} = \widehat{CBK} = 90^\circ$ nên tứ giác CPKB nội tiếp đường tròn đường kính CK. Tâm đường tròn này là trung điểm của CK.

b) Vì $\widehat{ICK} = 90^\circ$ nên $\widehat{ICA} + \widehat{KCB} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{ICA} = \widehat{CKB}$

Do đó: $\Delta ICA \sim \Delta CKB$ (g - g)

$$\text{Suy ra: } \frac{IA}{CA} = \frac{CB}{KB} \Rightarrow AI \cdot KB = CA \cdot CB$$



c) Vì $\widehat{CAP} = \widehat{CPI}$; $\widehat{CBP} = \widehat{CKP}$ nên $\widehat{APB} = \widehat{ICK} = 90^\circ$.

Vậy $\triangle APB$ vuông.

2) Ta có: $2S_{\triangle ABKI} = AB(AI + BK)$

Vì AB, AI không đổi nên $S_{\triangle ABKI}$ lớn nhất $\Leftrightarrow BK$ lớn nhất $\Leftrightarrow CA.CB$ lớn nhất (vì $AI.BK = CA.CB$ theo câu 1b) $\Rightarrow CA = CB$ (vì $CA + CB = AB$: không đổi).

Vậy $S_{\triangle ABKI}$ lớn nhất khi C là trung điểm AB.

Bài 10. Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K khác A.

1) Chứng minh rằng $\triangle KAF \sim \triangle KEA$.

2) Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE. Chứng minh rằng đường tròn (I; IE) tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

3) Gọi M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I; IE). Chứng minh rằng $MN \parallel AB$.

4) Gọi P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\triangle KPQ$ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O).

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT HÀ NỘI năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

1) Vì $KB = KA$ nên $\widehat{KAF} = \widehat{KEA}$ suy ra $\triangle KAF \sim \triangle KEA$ (g - g) (đpcm)

2) Vì E, I, O thẳng hàng nên (I; IE) tiếp xúc trong với (O) tại E.

Gọi Ox là tia đối của tia OE.

Ta có: $\widehat{OIF} = 2\widehat{OEF} = \widehat{xOK}$

Suy ra: $IF \parallel OK$

Mà $OK \perp AB$ nên $IF \perp AB$.

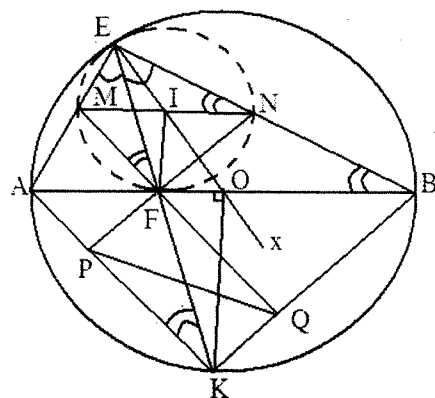
Vậy (I; IE) tiếp xúc với AB tại F (đpcm).

3) Ta có: $\widehat{INE} = \widehat{IEN} = \widehat{OBE}$

Suy ra: $MN \parallel AB$ (đpcm)

4) Ta có: $\widehat{EFM} = \widehat{ENM} = \widehat{EBA} = \widehat{EKA}$

Suy ra: $MF \parallel AK$



Tương tự $NF \parallel BK$

Mà $\widehat{AKB} = 90^\circ$ nên PKQF là hình chữ nhật

Suy ra $KQ = PF = PA$

Do đó: $KP + KQ + PQ = KP + PA + KF = AK + KF$

$$= R\sqrt{2} + KF \geq R\sqrt{2} + KO = R(\sqrt{2} + 1)$$

Vậy chu vi $\triangle PKQ$ nhỏ nhất là $R(\sqrt{2} + 1)$, đạt được khi và chỉ khi F trùng với O, hay E là điểm giữa của cung AB.

Bài 11. Cho đường tròn (O; R) và một điểm P cố định khác O ($OP < R$). Hai dây AB và CD thay đổi sao cho AB vuông góc với CD tại P. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, AD. Các đường thẳng EP, FP cắt BD, BC lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, B, P cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $BD = 2EO$.

3) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích tứ giác ACBD.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $\widehat{EAP} = \widehat{EPA} = \widehat{MPB}$

Mặt khác: $\widehat{DCA} = \widehat{DBA}$ nên $\widehat{PMB} = 90^\circ$.

Tương tự, ta có: $\widehat{PNB} = 90^\circ$

Vậy bốn điểm M, N, B, P cùng nằm trên đường kính BP (đpcm).

2) Vì $OE \perp EA$ và $OF \perp FA$ nên tứ giác OFAE nội tiếp.

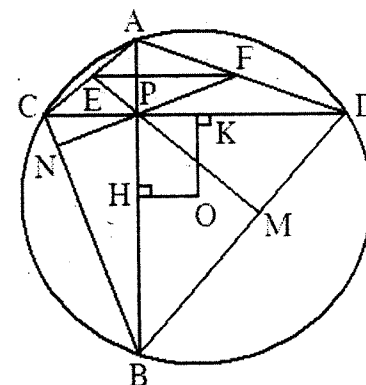
Suy ra:

$$\begin{aligned} \widehat{OFE} &= \widehat{OAE} = 90^\circ - \widehat{AOE} \\ &= 90^\circ - \widehat{PBC} = \widehat{BCD} \quad (1) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có: $\widehat{OEF} = \widehat{BDC}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\triangle OEF \sim \triangle BDC \quad (g - g)$$



Suy ra: $\frac{EO}{BD} = \frac{EF}{CD} = \frac{1}{2}$ (vì EF là đường trung bình của tam giác ACD)

$$\Rightarrow BD = 2EO$$

3) Gọi K và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên CD và AB.

Ta có: $AB^2 = 4BH^2 = 4R^2 - 4HO^2$ và $CD^2 = 4DK^2 = 4R^2 - 4KO^2$

$$\text{Do đó: } S_{ACBD} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$$

$$= 2\sqrt{R^4 - R^2 \cdot PO^2 + HO^2 \cdot KO^2} \quad (\text{vì } OH^2 + OK^2 = OP^2) \quad (2)$$

Từ đó, giá trị nhỏ nhất của S_{ACBD} là $2\sqrt{R^2 - PO^2}$, đạt được khi và chỉ khi H trùng với O hoặc K trùng với O $\Leftrightarrow AB$ hoặc CD là đường kính của đường tròn (O; R).

$$\text{Mặt khác, ta có: } HO \cdot KO \leq \frac{HO^2 + KO^2}{2} = \frac{PO^2}{2}$$

$$\text{Kết hợp với (2), ta được } S_{ACBD} \leq 2R^2 - PO^2$$

Vậy giá trị lớn nhất của S_{ACBD} là $2R^2 - PO^2$, đạt được khi và chỉ khi $HO = KO$ hay tứ giác PHOK là hình vuông.

Bài 12. Đường tròn tâm O có dây cung AB cố định và I là trung điểm chính giữa cung lớn AB. Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB, dựng tia Ax vuông góc với đường thẳng MI tại H và cắt BM tại C.

- a) Chứng minh các tam giác AIB và ACM là tam giác cân.
- b) Khi điểm M di động trên cung lớn AB. Chứng minh rằng điểm C di chuyển trên một cung tròn cố định.
- c) Xác định vị trí điểm M để chu vi tam giác AMC đạt giá trị lớn nhất.

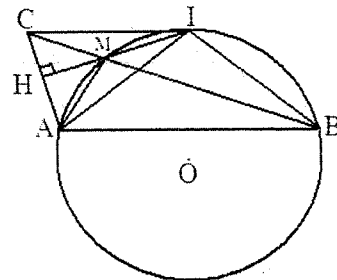
(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

a) Vì I là điểm chính giữa cung lớn AB nên $IA = IB$ hay tam giác ABC cân tại I.

- Trường hợp M thuộc cung IA (không chứa B), ta có: $\widehat{CMH} = \widehat{IMB}$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } \widehat{AMH} &= \frac{1}{2} (\widehat{sđAM} + \widehat{sđMI}) = \frac{1}{2} \widehat{sđIA} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{sđIB} = \widehat{IMB} \quad (2) \end{aligned}$$



Từ (1) và (2), suy ra tam giác AMC cân tại M.

- Trường hợp M thuộc cung IB (không chứa A). Chứng minh tương tự, ta có tam giác AMC cân tại M.

b) Theo câu a), ta có: $IA = IC$, mà I không đổi nên C nằm trên đường tròn tâm I bán kính IA.

Khi M trùng với A thì C trùng với A, còn khi M trùng với B và C trùng với C_1 (với C_1 là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính IA với đường thẳng qua A vuông góc với IB). Do đó khi M chuyển động trên cung lớn $\widehat{AB}$ thì điểm C chuyển động trên cung $\widehat{AC_1}$ (đpcm).

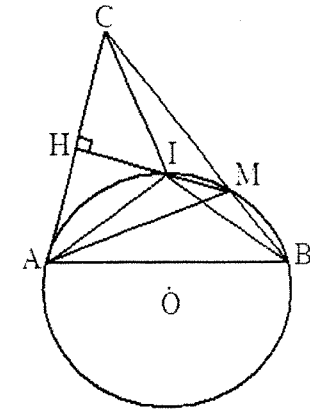
c) Giả sử C_0 là giao điểm của AI với đường tròn tâm I bán kính IA, M_0 là điểm đối xứng của A qua O.

Nhận xét rằng khi tia Ax trùng với tia AI thì M trùng với M_0 , lúc đó B, M_0 , C_0 thẳng hàng.

Ta có: $AM \leq AM_0, AC \leq AC_0$ (mối liên hệ giữa dây cung và đường kính)

Chu vi $(\triangle ABC) \leq$ chu vi $(\triangle AM_0C_0)$

Vậy giá trị lớn nhất của chu vi $(\triangle AMC) \leq$ chu vi $(\triangle AM_0C_0)$, đạt được khi M là điểm xuyên tâm đối của A đối với đường tròn (O).



Bài 13. Cho đường tròn (O; R) và dây BC cố định sao cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, số đo của cung BC bằng 120° . A là một điểm chuyển động trên cung lớn BC. Kẻ BE vuông góc với AC (E thuộc AC), CF vuông góc với AB (F thuộc AB). Các đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M; N (M không trùng với B, N không trùng với C), BE giao với CF tại H.

a) Chứng minh rằng MN song song với EF và AO vuông góc với EF.

b) Gọi S_1 là diện tích của tam giác AEF, S_2 là diện tích của tứ giác BFEC.

$$\text{Tính tỉ số } \frac{S_1}{S_2}.$$

c) Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC để diện tích tam giác AEH lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin, HÀ TÂY năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

a) Do tứ giác BCEF là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CBE} = \widehat{CFE}$.

Mà $\widehat{MNC} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn cung $\widehat{MC}$)

Suy ra: $\widehat{MNC} = \widehat{EFC}$

Do đó $MN \parallel EF$

b) Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{AEF}$ (cùng bù với $\widehat{ECF}$) và $\widehat{A}$ chung

Suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g - g)

Do đó tỉ số $k = \frac{AE}{AB} = \cos A = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{BCEF}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Hay } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$$

c) Do AO cắt đường tròn (O) tại A' nên $\widehat{ABA'} = 90^\circ$, $\Rightarrow BA' \perp AB$

Mặt khác $CH \perp AB \Rightarrow A'B \parallel CH$

Tương tự, ta có: $A'C \parallel BH$

Do đó tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành.

Gọi I là trung điểm của BC. Do đó I là trung điểm của $A'H$.

Suy ra OI là đường trung bình của tam giác $A'AH$.

Do đó $AH = 2OI$

Gọi J là trung điểm của AH. Kẻ $ED \perp AH$, suy ra $ED \leq EJ$

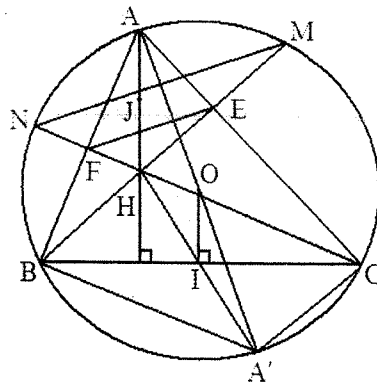
Mà $EJ = \frac{1}{2}AH = \text{const}$ nên S_{AEH} lớn nhất khi và chỉ khi ED lớn nhất.

Khi đó D trùng với J, hay tam giác AEH cân tại E.

Suy ra $\widehat{ACB} = 45^\circ$

Vậy vị trí của A trên cung BC tạo thành góc $\widehat{ACB} = 45^\circ$ thì diện tích tam giác AEH lớn nhất.

Bài 14. Cho tam giác ABC, lấy ba điểm D, E, F theo thứ tự trên các cạnh BC, CA, AB sao cho AEDF là tứ giác nội tiếp. Trên tia AD lấy điểm P (D nằm giữa A và P) sao cho $DA \cdot DP = DB \cdot DC$.



1. Chứng minh rằng tứ giác ABPC nội tiếp và hai tam giác DEF, PCB đồng dạng với nhau.

2. Gọi S và S' lần lượt là diện tích hai tam giác ABC và DEF.

$$\text{Chứng minh } \frac{S}{S'} \leq \left(\frac{EF}{2AD} \right)^2$$

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán - Tin Hà Nội Chu Văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

1. Ta có: $DA \cdot DP = DB \cdot DC \Rightarrow \frac{DP}{DB} = \frac{DC}{DA}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{BDP} = \widehat{ADC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BDP \sim \triangle ADC$

$$\Rightarrow \widehat{DPB} = \widehat{DCA}$$

Do đó tứ giác ABPC nội tiếp

Vì các tứ giác AEDF và ABPC nội tiếp nên $\widehat{DEF} = \widehat{DAF} = \widehat{BCP}$ và $\widehat{DFE} = \widehat{DAE} = \widehat{CBP}$

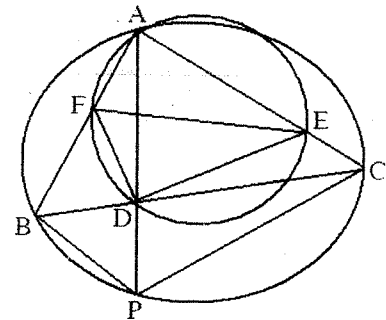
Suy ra $\triangle DEF \sim \triangle PBC$

2. Vì $\triangle DEF \sim \triangle PBC$ nên $S' = \left(\frac{EF^2}{BC^2} \right) \cdot S_{\triangle PBC}$ (1)

Mặt khác $S_{\triangle PBC} = \frac{DP}{DA} \cdot S$, thay vào (1) ta được: $S' = \left(\frac{EF^2}{BC^2} \right) \cdot \frac{DP}{DA} \cdot S_{\triangle PBC}$ (2)

$$\text{Ta lại có } \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{(BD+DC)^2} \leq \frac{1}{4BD \cdot DC} = \frac{1}{4DA \cdot DP} \quad (3)$$

Từ (2) và (3), suy ra: $S' \leq \frac{EF^2}{4DA \cdot DP} \cdot \frac{DP}{DA} \cdot S = \left(\frac{EF}{2DA} \right)^2 \cdot S$ (đpcm)



Bài 15. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O ; R). Điểm M di động trên cung nhỏ BC. Từ M kẻ đường thẳng MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC (H thuộc đường thẳng AB, K thuộc đường thẳng AC).

a) Chứng minh hai tam giác MBC và MHK đồng dạng với nhau.

b) Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 Ban AB THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

a) Vì 4 điểm A, H, M, K cùng nằm trên một đường tròn đường kính AM nên ta có: $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = \widehat{MHK}$

và $\widehat{MCB} = \widehat{MAB} = \widehat{MKH}$

$\Rightarrow \Delta MBC \sim \Delta MHK$

b) Từ câu a), suy ra $\frac{BC}{HK} = \frac{MB}{MH}$

Mà $MB \geq MH \Rightarrow \frac{BC}{HK} \geq 1 \Leftrightarrow HK \leq BC$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi H trùng với B, khi đó $\widehat{ABM} = 90^\circ$ và AM là đường kính của đường tròn (O). Do đó khi M là điểm đối xứng của A qua O thì độ dài HK lớn nhất.

Bài 16. Cho tam giác nhọn ABC. Điểm D di động trên cạnh BC. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACD tương ứng.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AO_1O_2 luôn đi qua một điểm cố định khác A.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AO_1O_2 . Hãy xác định vị trí điểm D trên BC sao cho IO nhỏ nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Chuyên Toán – Tin, ĐHQG TP.HCM năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

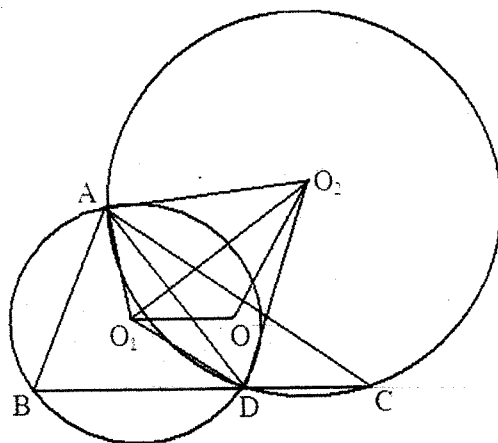
a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra O cố định.

Nhận xét rằng O_1O_2 là đường trung trực của AD nên $O_1O_2 \perp AD$.

Suy ra O_1O_2 đi qua trung điểm của cung $\widehat{AD}$ của đường tròn (O_1) .

Ta có: $\widehat{AO_1O_2} = \widehat{ABD}$ và

$\widehat{AO_1O_2} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \widehat{ABC}$



Suy ra $\widehat{AO_1O_2} = \widehat{AOO_2} \Rightarrow$ tứ giác AO_1OO_2 nội tiếp đường tròn ngoại tiếp tam giác AO_1O_2 luôn đi qua điểm O cố định khác A.

b) Trong đường tròn tâm I, ta có: $2IO \geq OA \Leftrightarrow IO \geq \frac{1}{2}OA = \text{const}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi OA là đường kính của đường tròn tâm I, khi đó $\widehat{OO_1A} = \widehat{OO_2A} = 90^\circ$, hay AB, BC lần lượt là đường kính của đường tròn O_1 và O_2 , khi đó D là chân đường vuông góc kẻ từ A lên BC.

Vậy khi D là hình chiếu của A lên BC thì độ dài IO nhỏ nhất.

Bài 17. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, kẻ hai tia tiếp tuyến Ax và By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D.

1. Chứng minh:

a) $CD = AC + BD$.

b) $AC \cdot BD = R^2$.

2. Xác định vị trí của điểm M để tứ giác ABCD có diện tích nhỏ nhất.

3. Cho biết $R = 2\text{cm}$, diện tích tứ giác ABCD bằng 32cm^2 . Tính diện tích tam giác ABM.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT, Thái Bình năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

1. a) Ta có: $CD = CM + DM$; $CM = CA$; $DM = DB$

Suy ra $CD = AC + BD$

b) Ta có: $\widehat{COD} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Và $OM \perp CD$

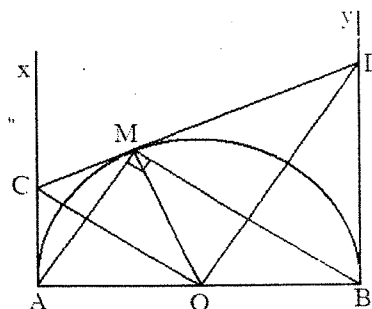
Suy ra $AC \cdot BD = CM \cdot DM = OM^2 = R^2$

2. Dễ thấy ABCD là hình thang vuông nên: $2S_{ABCD} = AB(AC + BD) = 2R \cdot CD$

Suy ra $S_{ABCD} = R \cdot CD \geq R \cdot AB = 2R^2$

Vậy tứ giác ABCD có diện tích nhỏ nhất là $2R^2$, đạt được khi và chỉ khi $AB = CD$.

3. Theo câu trên, ta có: $CD = \frac{32}{2} = 16\text{m}$



$$\text{Suy ra } 2S_{ABCD} = OM \cdot CD = 2 \cdot 16 = 32m^2$$

$$\Rightarrow S_{ACDO} = 16m^2$$

$$\text{Để thấy } \triangle ABM \sim \triangle CDO \text{ nên } \frac{S_{ACDO}}{S_{ABM}} = \frac{AB^2}{CD^2}$$

$$\Rightarrow S_{ABM} = 16 \cdot \frac{AB^2}{CD^2} = 16 \cdot \frac{4^2}{16^2} = 1m^2$$

Bài 18. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, kẻ đường cao BE, CF.

1. Cho biết số đo góc BAC bằng 60° , tính độ dài EF theo BC = a.

2. Trên nửa đường tròn đường kính BC không chứa E, F lấy một điểm M bất kì. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CE, EB. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $S = \frac{BC}{MH} + \frac{CE}{MI} + \frac{EB}{MK}$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

1. Gọi O là trung điểm của BC.

Do $\hat{A} = 60^\circ$ nên $\widehat{ACF} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{EOF} = 2\widehat{ACF} = 60^\circ$$

Suy ra tam giác EOF đều

$$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}a$$

2. Lấy điểm P trên cạnh BC sao cho $\widehat{BMP} = \widehat{EMC}$

Vì $\triangle CMF \sim \triangle PMB$ (g – g)

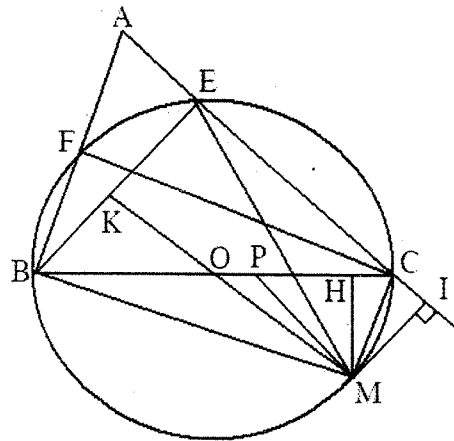
$$\text{nên } \frac{BP}{MH} = \frac{EC}{MI}$$

$\triangle MEB \sim \triangle MCB$ (g – g) nên

$$\frac{EB}{MK} = \frac{CB}{MH}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{BP + PC}{MH} = \frac{EC}{MI} + \frac{EB}{MK} \Rightarrow \frac{BC}{MH} = \frac{EC}{MI} + \frac{EB}{MK} \Rightarrow S = \frac{2BC}{MH}$$

Vậy khi M là điểm chính giữa cung BC thì MH đạt cực đại, lúc đó S cực tiểu và giá trị nhỏ nhất của S là 4.



Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng hình chữ nhật MNPQ sao cho M, N là các điểm trên cạnh BC, còn P, Q lần lượt là các điểm trên cạnh AC, AB. Gọi R_1, R_2 và R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác BQM, CPN và AQP. Chứng minh rằng:

1) Tam giác AQP đồng dạng với tam giác MBQ và tam giác MBQ đồng dạng với tam giác NPC;

2) Diện tích tứ giác MNPQ lớn nhất khi và chỉ khi $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $\widehat{APQ} = \widehat{MBQ}$; $\widehat{APQ} = \widehat{NPC}$ (đồng vị)

Do đó: $\triangle APQ \sim \triangle MBQ$; $\triangle APQ \sim \triangle NPC$

Suy ra: $\triangle MBQ \sim \triangle NPC$

2) Kẻ $AH \perp BC$ và đặt $MQ = x$; $PQ = y$; $AH = h$; $AB = a$; $BC = b$; $AC = c$.

Ta có: $S_{MNPQ} = xy$

$$\text{Mặt khác: } AH \parallel QM \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{BQ}{BA} \quad (1)$$

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{AQ}{AB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } xy = \frac{ah}{c^2} \cdot AQ \cdot BQ \leq \frac{ah}{c^2} \cdot \frac{(AQ + BQ)^2}{4} = \frac{ah}{4} = \frac{S_{ABC}}{2}$$

Do đó giá trị lớn nhất của

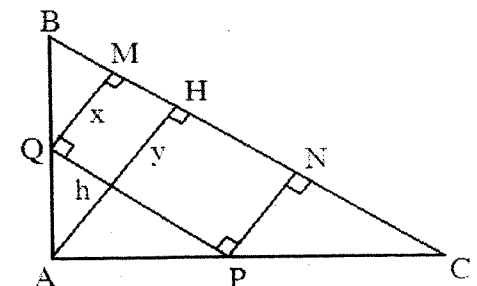
S_{MNPQ} bằng $\frac{1}{2}S_{ABC}$, đạt được

khi và chỉ khi Q là trung điểm của AB. Kết hợp với phần 1), ta có:

$\triangle MPQ \sim \triangle QPA$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_3} = \frac{BQ}{QP} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad (3)$$

$$\triangle CNP \sim \triangle QPA \Rightarrow \frac{R_2}{R_3} = \frac{PC}{PQ} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad (4)$$



Từ (3) và (4), suy ra: $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$

Ngược lại, nếu $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$ thì từ (3) và (4), ta có:

$$1 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_3^2} = \frac{BQ^2 + PC^2}{PQ^2} \quad (5)$$

(5) chỉ xảy ra khi Q là trung điểm của AB.

Bài 20. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi C là điểm tùy ý trên nửa đường tròn, D là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Tia phân giác góc ACD cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là E, cắt tia phân giác góc ABC tại H.

a) Chứng minh AE // BH.

b) Tia phân giác góc CAB cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là F, cắt CE tại I. Tính diện tích tam giác FID trong trường hợp tam giác đó là tam giác đều.

c) Trên đoạn BH lấy điểm K sao cho HK = HD, gọi J là giao điểm của AF và BH. Xác định vị trí của C để tổng khoảng cách từ các điểm I, J, K đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Toán – Tin Hà Nội Chu văn An và Hà Nội Amsterdam năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\widehat{ACD} = \widehat{CBA}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Mặt khác CE là phân giác của $\widehat{ACD}$ và BH là phân giác của $\widehat{CBA}$, nên $\widehat{CAE} = \widehat{CBH}$

$$\text{Mà } \widehat{CAE} + \widehat{ECB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBH} + \widehat{ECB} = 90^\circ \Rightarrow BH \perp CE \quad (1)$$

$$\text{Vì } \widehat{AEC} = 90^\circ \text{ nên } AE \perp CE \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra AE // BH

$$\text{b) Vì AF là tia phân giác của } \widehat{CAD} \text{ nên } \widehat{FC} = \widehat{FD} \Rightarrow FC = FD \quad (3)$$

$$\text{Và } \widehat{CIF} = \widehat{CAF} + \widehat{ACE} = \frac{1}{2}(\widehat{CAB} + \widehat{ACD}) = 45^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{AFC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle CFI \text{ vuông cân tại F} \Rightarrow FI = FC \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra FI = FD

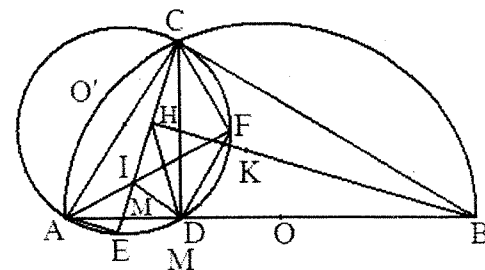
$$\text{Do đó } \Rightarrow \triangle FID \text{ là tam giác đều} \Rightarrow \widehat{AFD} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CAF} = 15^\circ$$

$$\text{Khi đó } DF = FC = AC \cdot \sin 15^\circ = (AB \cdot \cos 30^\circ) \cdot \sin 15^\circ = R\sqrt{3} \sin 15^\circ$$

$$\text{Vậy } S_{FID} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \sin^2 15^\circ = R^2 \frac{6\sqrt{3}-9}{16}$$

c) Gọi M là giao điểm của CE với AB. Tam giác BMC cân tại B (có BH vừa là đường phân giác vừa là đường cao), nên H là trung điểm của CM. Do đó DK là trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông CDM, suy ra HD = HC. Mà HK =



HD nên HC = HK. Do đó tam giác CHK vuông cân tại H nên $\widehat{HCK} = 45^\circ$, mà $\widehat{ACB} = 90^\circ$ và $\widehat{ACE} = \widehat{ECD}$ nên CK là phân giác $\widehat{DBC}$. Suy ra K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác vuông CDB.

Để thấy I và J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ADC, ABC.

$$\text{Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC là: } \frac{AB + CB - AC}{2}$$

Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ I, J, K đến AB

$$\text{Ta có: } d_1 + d_2 + d_3 = \frac{AD + CD - AC}{2} + \frac{AC + CB - AB}{2} + \frac{CD + DB - BC}{2} = CD$$

Vì $CD \leq CO = R$ (với R là trung điểm của AB)

Vậy $d_1 + d_2 + d_3$ lớn nhất khi và chỉ khi C là điểm chính giữa của cung $\widehat{AB}$.

Bài 21. Cho đường tròn (O ; R) và hai điểm B, C cố định trên (O ; R) thỏa mãn $\widehat{BOC} = 120^\circ$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ khi M di động trên cung nhỏ BC của đường tròn (O ; R) mà $M \neq B$ và $M \neq C$.
(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi A là điểm chính giữa cung lớn BC, khi đó $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Trên cạnh AM lấy điểm I sao cho IM = IB.

Vì $\widehat{BIM} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ nên $\triangle BMI$ là tam giác đều.

Ta có: $\widehat{MBC} = \widehat{IBA}$ (vì cùng bằng $60^\circ - \widehat{CBI}$)

Mặt khác: $BM = BI$ và $\widehat{BMC} = \widehat{BIA} = 120^\circ$

Do đó: $\triangle ABI = \triangle CBM$ (g - c - g)

Suy ra $MB + MC = MA$

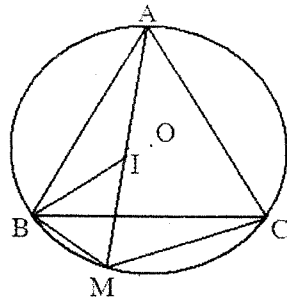
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được:

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{2}{\sqrt{MB \cdot MC}} \geq \frac{4}{MB + MC} = \frac{4}{MA} \geq \frac{4}{2R} = \frac{2}{R}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Vậy $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{2}{R}$

khi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.



Bài 22. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Điểm M di động trên cung nhỏ BC, M khác B và C. Dây cung AM cắt dây cung BC tại D.

1. Chứng minh rằng: $AM = BM + CM$.
2. Chứng minh rằng tích $AD \cdot AM$ là một hằng số.
3. Xác định vị trí điểm M sao cho độ dài đoạn DM lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này theo R.
4. Tia CM cắt tia AB tại K. Chứng minh rằng BK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKM.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, DHSP. TPHCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

1. Lấy điểm E trên đoạn MA sao cho $ME = BM$

Ta có $\triangle MBE$ là tam giác đều, suy ra $MB = EB$

Mặt khác:

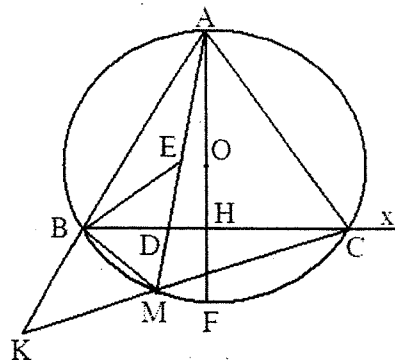
$$\widehat{MBC} + \widehat{CBE} = \widehat{CBE} + \widehat{EBA} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{EBA}; AB = AC$$

Do đó: $\triangle BAE = \triangle BCM$ (c - g - c)

Suy ra: $AE = MC$

Vậy $AM = MB + MC$



2. Ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{ABD}$ và $\widehat{BAM}$ chung

Suy ra: $\triangle AMB \sim \triangle ABD$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AM \cdot AD = AB^2 \text{ không đổi}$$

3. Kẻ đường kính AF của đường tròn (O) cắt BC tại H.

Ta có: $AH \perp BC$

Vì AM là dây cung của đường tròn (O) nên $AM \leq AF$ (1)

Mặt khác: $AH \perp BC \Rightarrow AH \leq AD$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $MD \leq HF$

Suy ra MD lớn nhất bằng HF khi và chỉ khi M trùng với F, khi đó ta có:

$$DM = HF = \frac{R}{2}$$

$$4. \text{ Ta có: } \widehat{BKM} = \frac{sđ\widehat{AC} - sđ\widehat{BM}}{2} = \frac{sđ\widehat{BC} - sđ\widehat{BM}}{2} = \widehat{MAC} = \widehat{MBC}$$

Suy ra góc tạo bởi tia BC với dây cung BM của đường tròn đi qua 3 điểm K, B, M bằng số đo của góc chắn cung $\widehat{BM}$ của đường tròn đó.

Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKM.

Bài 23. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm M bất kì thuộc đường tròn (M khác A và B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AB. Đường tròn đường kính HM cắt các dây cung MA và MB lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{PHQ} = 90^\circ$ và $MA \cdot MB = MQ \cdot MB$.

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH, BH. Tứ giác EPQF là hình gì?

c) Xác định vị trí của điểm M để tứ giác EPQF có diện tích lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, Hà Tĩnh năm học 2007 – 2008)

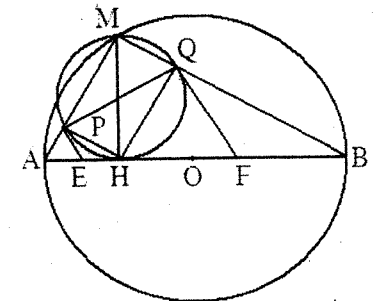
Hướng dẫn giải

a) Ta có tứ giác MPHQ có $\widehat{M} = \widehat{P} = \widehat{Q} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{PHQ} = 90^\circ$

Để thấy $\triangle MPQ \sim \triangle MBA$ (g - g)

Suy ra: $MP \cdot MA = MQ \cdot MB$



b) Dễ thấy EBQF là hình thang vuông.

c) Ta có:

$$\begin{aligned} S_{EPQF} &= \frac{1}{2} PQ(PE + QF) \\ &= \frac{1}{2} MH \left(\frac{1}{2} AH + \frac{1}{2} BH \right) \\ &= \frac{1}{4} MH \cdot AB \end{aligned}$$

Vì AB không đổi nên diện tích tứ giác EPQF lớn nhất khi MH lớn nhất, hay M là điểm chính giữa cung AB.

Bài 24. Biết rằng một tứ giác lồi có tổng hai cạnh đối và một đường chéo không lớn hơn $2\sqrt{2S}$ (S là diện tích tứ giác). Tính độ dài đường chéo còn lại theo S.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Giả sử tứ giác lồi ABCD thỏa mãn $AD + BC + BD \leq 2\sqrt{2S}$.

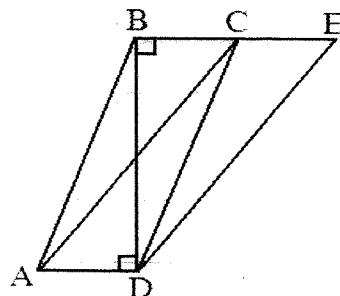
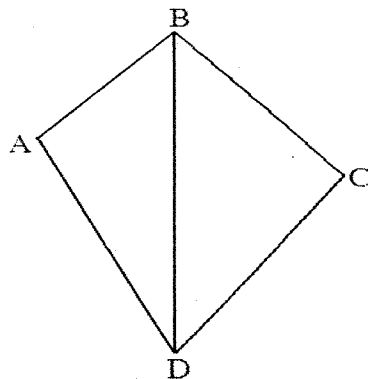
$$\text{Ta có } 2S \leq BD(AD + BC) \leq \left(\frac{AD + BC + BD}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow AD + BC + BD \geq 2\sqrt{2S}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $AD \perp BD$, $BC \perp BD$ và $AD + BC = BD$

Dựng hình bình hành CADE, ta có tam giác BDE vuông cân tại B.

$$\text{Suy ra: } AC = DE = BD\sqrt{2} = 2\sqrt{S}$$



Bài 25. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn. P là một điểm di động trên cung BC không chứa A. Hạ AM, AN lần lượt vuông góc với PB và PC.

1) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

2) Xác định vị trí của điểm P trên cung BC sao cho biểu thức $AM \cdot PB + AN \cdot PC$ đạt giá trị lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Chuyên Toán – Tin, ĐHQG TP.HCM năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

1) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$).

Ta có: $\widehat{MBA} = \widehat{BHA} = 90^\circ$

Do đó tứ giác AMBH nội tiếp, suy ra $\widehat{AHM} = \widehat{ABM}$

Mặt khác tứ giác ABPC nội tiếp nên $\widehat{ABM} = \widehat{ACP}$

Suy ra: $\widehat{AHM} = \widehat{ACP}$ (1)

Lại có $\widehat{AHC} = \widehat{ANC} = 90^\circ$ nên tứ giác AHNC nội tiếp

Suy ra: $\widehat{ACP} + \widehat{AHN} = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{AHM} + \widehat{AHN} = 180^\circ$

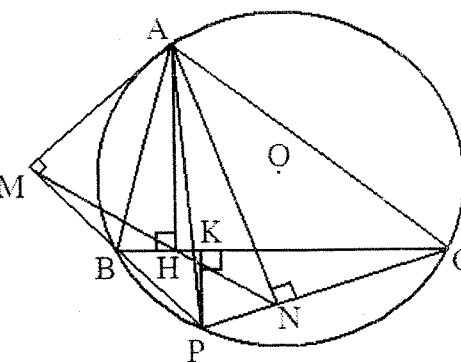
Do đó 3 điểm M, H, N thẳng hàng.

Vậy MN luôn đi qua điểm cố định H.

2) Kẻ $PK \perp BC$ tại K

$$\text{Ta có: } AM \cdot PB + AN \cdot PC = 2(S_{\triangle ABP} + S_{\triangle ACP}) = 2\left(S_{\triangle ABC} + \frac{PK \cdot BC}{2}\right)$$

Vì tam giác ABC cố định nên $AM \cdot PB + AN \cdot PC$ lớn nhất khi và chỉ khi PK lớn nhất, hay P là điểm chính giữa cung BC không chứa A.



Bài 26. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và D là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Trên tia AD lấy điểm E sao cho $AE = DC$.

1. Chứng minh: $\triangle ABE = \triangle CBD$.

2. Xác định vị trí D sao cho tổng $DA + DB + DC$ lớn nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

1. Ta có $AE = CD$; $AB = CB$; $\widehat{BAE} = \widehat{BCD}$ (cùng chắn cung BD)

Suy ra: $\triangle ABE = \triangle CBD$ (c - g - c) (đpcm)

2. Vì $\triangle ABE = \triangle CBD$ nên $BE = BD$

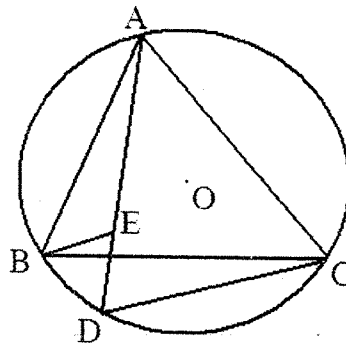
Mà $\widehat{BDE} = \widehat{BDA} = 60^\circ$, suy ra tam giác BDE đều.

Do đó $BD = BE$.

Ta có: $DA = DE + AE = DC + BD$

Suy ra: $DA + DB + DC = 2DA \leq 4R$ (với R là bán kính đường tròn (O))

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi D là điểm chính giữa cung BC.



Bài 27. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a ($a > 0$) và một điểm M chuyển động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng nếu M thuộc cung nhỏ BC thì: $MA + MB = MC$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB + MC$.

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Chuyên Toán - Tin, ĐH Vinh năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải

a) Trên đoạn MC lấy điểm I sao cho $MI = MB$

Vì $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ nên tam giác BMI đều

Suy ra: $\widehat{BMI} = 60^\circ$ và $BI = BM$ (1)

Vì $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\widehat{MBA} = \widehat{IBC}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$\triangle AMB = \triangle CIB$ (c - g - c)

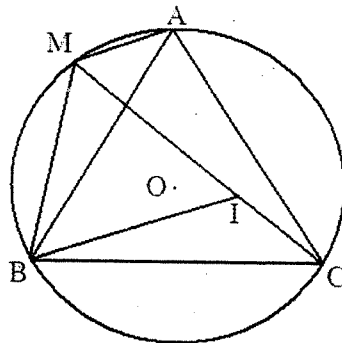
Suy ra: $MA = MC$

Vậy $MA + MB = MI + IC = MC$

b) Giả sử M thuộc cung nhỏ AB.

Theo câu a), ta có: $MA + MB + MC = 2MC$

Do $MC \leq 2R$ nên $MA + MB + MC = 4R$



Mà $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ

khi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB, BC hoặc CA.

Khi M thuộc cung nhỏ AB thì $\widehat{MAC} \geq 60^\circ = \widehat{AMC}$, do đó $MC \geq AC = a$

Vậy $MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $2a$ khi và chỉ khi M trùng với một trong các đỉnh A, B hoặc C.



CHỦ ĐỀ 18.

QUỸ TÍCH (TẬP HỢP ĐIỂM)

A. KIẾN THỨC VÀ KĨ NĂNG CẦN NẮM VỮNG

1. Định nghĩa

Một hình **H** được gọi là tập hợp của những điểm M thỏa mãn tính chất T khi nó chứa và chỉ chứa những điểm có tính chất T.

2. Phương pháp giải

Để tìm quỹ tích (tập hợp điểm) của các điểm M thỏa mãn tính chất T là một hình **H** nào đó, ta trình bày:

- Phân thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình **H**.

- Phân đảo: Mọi điểm thuộc hình **H** đều có tính chất T.

- Kết luận: Quỹ tích (tập hợp điểm) các điểm M có tính chất T là hình **H**

3. Các quỹ tích (tập hợp điểm) cơ bản thường gặp:

- Quỹ tích các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

- Quỹ tích các điểm cách đều hai cạnh của một góc cố định là tia phân giác của góc đó.

- Quỹ tích các điểm cách đều một đường thẳng cố định một khoảng bằng a không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng a .

- Quỹ tích các điểm ở trên một đường thẳng d đi qua điểm cố định A và hợp với một đường thẳng d' cố định một góc không đổi là đường thẳng d .

- Quỹ tích các điểm cách đều một điểm O cố định một khoảng R là đường tròn (O ; R)
- Quỹ tích các điểm nhìn đoạn AB cố định dưới một góc α không đổi là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB (hai cung này đối xứng với nhau qua AB)

Khi $\alpha = 90^\circ$ thì:

Quỹ tích các điểm nhìn hai điểm A, B dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.



➤ B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm A cố định không trùng với O. Một đường kính BC quay quanh O. Vẽ đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại D.

- Chứng minh rằng D là một điểm cố định.
- Tìm quỹ tích của điểm I.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $OA \cdot OD = OB \cdot OC = R^2$

Suy ra: $OD = \frac{R^2}{OA} = \text{const}$

Điểm D thuộc tia đối của tia OA cố định nên D là điểm cố định.

b) *Phần thuận:*

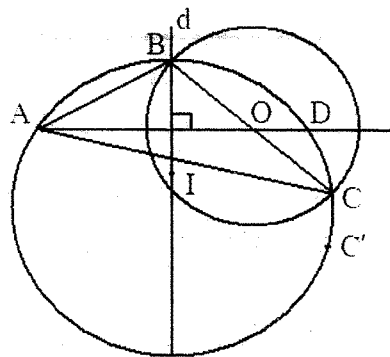
Điểm I cách đều hai đầu đoạn thẳng AD cố định nên I nằm trên đường trung trực d của AD.

Phần đảo:

Lấy điểm I bất kì trên đường trung trực của AD. Vẽ đường tròn (I ; IA) cắt đường tròn (O) tại các điểm B và C. Ta cần chứng minh BC là đường kính của đường tròn (O).

Thật vậy, ta có D thuộc đường tròn (I ; IA).

Gọi C' là giao điểm thứ hai của BD với đường tròn (O ; IA)



Ta có: $OB \cdot OC' = OA \cdot OD = OA \cdot \frac{R^2}{OA} = R^2$

$$\Rightarrow OC' = \frac{R^2}{OB} = R$$

Vậy C' thuộc vào đường tròn (O), do đó C' trùng với C, suy ra BC là đường kính của đường tròn (O).

Kết luận:

Quỹ tích của điểm I là đường trung trực của AD.

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB. Lấy điểm M bất kì trên đoạn AB và cùng phía với AB. Dựng hai hình vuông AMCD và MBEG. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình vuông AMCD và MBEG. Tìm quỹ tích trung điểm I của OO' khi M di động trên AB.

Hướng dẫn giải

Phần thuận:

Kẻ $OF \perp AB$; $IH \perp AB$; $O'K \perp AB$

Dễ thấy IH là đường trung bình của hình thang vuông OO'KF nên

$$IH = \frac{1}{2}(OF + O'K)$$

Mặt khác, ta có: $OF = \frac{1}{2}AM$ và $O'K = \frac{1}{2}MB$

$$\text{Suy ra: } IH = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}MB\right) = \frac{1}{4}AB$$

Khoảng cách từ I đến AB không đổi nên I chạy trên đường thẳng song song và cách AB một khoảng $\frac{1}{4}AB$.

Giới hạn: Khi M trùng với A thì O trùng với A. Hình vuông MBEG là hình vuông cạnh AB, tâm O' là giao điểm của AE và BG. Trung điểm I của OO' là trung điểm I₀ của O'A (khi đó O' trùng với đỉnh S của tam giác vuông cân SAB). Do đó I chuyển động trên đường trung bình I₀I'₀ của tam giác SAB.

Phần đảo:

Lấy I' trên I₀I'₀ (I₀I'₀ là đường trung bình của tam giác vuông cân SAB).

Kẻ SI' cắt AB tại M' . Vẽ các hình vuông $AM'C'D'$ và $BM'G'E'$ cùng phía đối với đường thẳng AB . Gọi O_1 và O'_1 lần lượt là tâm của hai hình vuông này. Ta cần chứng minh I' là trung điểm của OO'_1 .

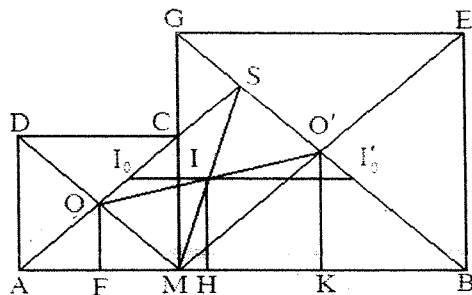
Thật vậy, vì $\widehat{SAB} = \widehat{SBA} = 45^\circ$ nên O_1 và O'_1 nằm trên SA, SB .

Ta có: $M'O_1 \perp AS$; $M'O'_1 \perp BS$.

Khi đó $M'O_1SO'_1$ là hình chữ nhật nên $S'M$ và OO'_1 cắt nhau tại I' là trung điểm của mỗi đường. Do đó I' là trung điểm của OO'_1 .

Kết luận:

Quỹ tích trung điểm I của OO' là đường trung bình $I_0I'_0$ của tam giác vuông cân SAB .



Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường phân giác của góc A cắt đường tròn (O) tại D . Một đường tròn (L) thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm A và D , cắt hai đường thẳng AB và AC ở giao điểm thứ hai là M và N (có thể trùng với A).

a) Chứng minh rằng $BM = CN$.

b) Tìm tập hợp trung điểm K của MN .

c) Xác định vị trí của đường tròn (L) sao cho đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $BC = BD$;

$MD = ND$; $\widehat{BDM} = \widehat{CDN} = \widehat{BAC}$

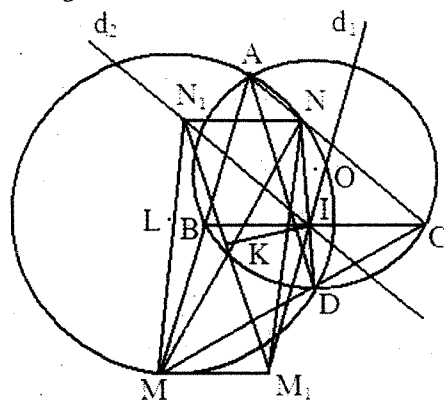
Suy ra $\triangle BMD = \triangle CND$

Do đó $BM = CN$

b) Gọi I là trung điểm của BC .

Vì BC cố định nên I cố định.

Qua I kẻ các đường thẳng $d_1 \parallel AB$ và $d_2 \parallel AC$, thì d_1 và d_2 cố định.



Phần thuận:

Trên d_1 lấy M_1 sao cho $IBMM_1$ là hình bình hành

Suy ra $MM_1 \parallel BI$ và $MM_1 = BI$

Trên d_2 lấy N_1 sao cho $ICNN_1$ là hình bình hành

Suy ra $NN_1 \parallel MM_1$ và $MM_1 = NN_1$

Do đó tứ giác MM_1NN_1 là hình bình hành

Suy ra MN và M_1N_1 cắt nhau tại trung điểm K của mỗi đường.

Ta có $\triangle M_1IN_1$ cân tại I nên $KM_1 = KN_1$

Do đó IK là phân giác của góc $\widehat{M_1IN_1}$ nên $IK \perp AD$

Suy ra K thuộc đường thẳng qua I và vuông góc với AD cố định (d) .

Phần đảo:

Lấy K thuộc d . Đường thẳng vuông góc với d cắt d_1 ở M_1 và cắt d_2 ở N_1 .

Suy $IM_1 = IN_1$ và K là trung điểm của M_1N_1 .

Từ M_1 kẻ đường thẳng song song với BC và cắt AB tại M .

Từ N_1 kẻ đường thẳng song song với BC và cắt AC tại N .

Vì $MM_1 \parallel BC$, $NN_1 \parallel BC$ nên $MM_1 \parallel NN_1$

Suy ra $MM_1 \parallel BC$ và $CI = NN_1$

Do đó $MM_1 = NN_1$

Suy ra tứ giác MM_1NN_1 là hình bình hành

Do đó MN và M_1N_1 cắt nhau tại trung điểm K của hai đường.

Kết luận:

Quỹ tích của K là đường thẳng đi qua trung điểm I của BC và vuông góc với AD .

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB cố định. Điểm C di chuyển trên nửa đường tròn ấy. Trên tia CA lấy điểm E sao cho $CE = CB$. Tìm quỹ tích các điểm E .

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, Phú Yên năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

a) **Phần thuận:**

Gọi I là điểm chính giữa cung AB .

- Xét điểm C thuộc cung BI .

Tam giác CEB có $\widehat{C} = 90^\circ$ và $CE = CB$ nên tam giác CEB vuông cân.

Suy ra: $\widehat{CEB} = 45^\circ$ và $\widehat{AEB} = 135^\circ$

Điểm E nhìn AB dưới một góc 135° nên E chuyển động trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn AB (cung này cùng phía với I đối với AB).

- Xét điểm C' thuộc cung AI.

Tam giác $C'E'B$ là tam giác vuông cân nên $\widehat{C'E'B} = 45^\circ$

Điểm E nhìn AB dưới một góc 45° , nên E chuyển động trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB.

Khi C' trùng với I thì E' trùng với A. Khi C' tiến đến A thì E' tiến đến K ($AK \perp AB$ và $AK = AB$).

Điểm E' chuyển động trên cung AK của cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB (khác phía với I đối với AB).

b) *Phần đảo:*

- Lấy điểm E bất kỳ thuộc cung chứa góc 135° dựng trên AB, AE cắt nửa đường tròn (O) tại C.

Ta có $\widehat{AEB} = 135^\circ$, tam giác vuông CEB có $\widehat{CEB} = 45^\circ$ nên $CE = CB$

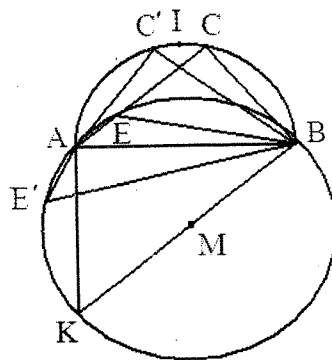
Lấy điểm E' bất kỳ thuộc cung AK, $E'A$ cắt nửa đường tròn (O) tại C' .

Ta có $\widehat{AE'B} = 45^\circ$, tam giác vuông $C'E'B$ có $\widehat{C'E'B} = 45^\circ$ nên $C'E' = C'B$

c) *Kết luận:*

Quỹ tích điểm E là cung chứa góc 135° dựng trên AB (cùng phía với I đối với AB) và cung AK chứa góc 45° dựng trên AB (khác phía với I đối với AB).

Hai cung trên hợp thành nửa đường tròn đường kính BK (vì $\widehat{BAK} = 90^\circ$).



Bài 5. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tia phân giác của góc ACB cắt đường tròn (O) tại điểm D khác điểm C, lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho $DI = DB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác điểm B.

a) Chứng minh tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định, từ đó hãy xác định vị trí của A để độ dài đoạn AI là lớn nhất.

c) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Tìm tập hợp các điểm M khi A di động trên cung lớn AB của đường tròn (O).

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Ngoại ngữ, ĐH Hà Nội năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\text{sđ} \widehat{DBK} = \frac{1}{2} \text{sđ} (\widehat{DA} + \widehat{AK})$; $\text{sđ} \widehat{DIB} = \frac{1}{2} \text{sđ} (\widehat{BD} + \widehat{KC})$

Mà $\text{sđ} \widehat{BD} = \text{sđ} \widehat{DA}$ và tam giác DBI cân tại D, suy ra $\text{sđ} \widehat{AK} = \text{sđ} \widehat{KC}$

Do đó $AK = CK$

Vậy tam giác KAC cân tại K (đpcm).

b) Theo câu a), ta có I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, nên đường thẳng AI luôn đi qua trung điểm J của cung BC.

Mà $\widehat{JIC} = \widehat{JCI}$ nên tam giác JIC cân tại J.

Do đó $IJ = JC$ (không đổi), suy ra AI lớn nhất khi và chỉ khi AJ lớn nhất, AJ lớn nhất khi AJ là đường kính của đường tròn (O), hay A là điểm chính giữa cung AB.

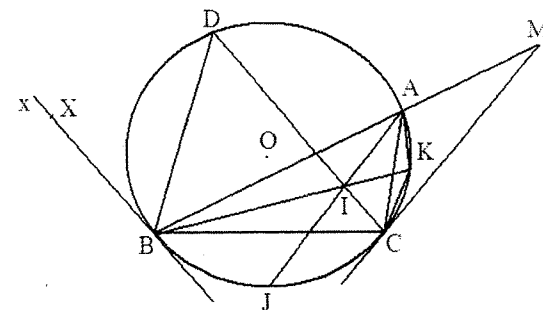
c) *Phần thuận:*

Ta có tam giác AMC cân tại A, suy ra $\widehat{BMC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$

Giả sử số đo của góc $\widehat{BAC}$ là 2α (không đổi) thì A di động trên cung lớn BC, điểm M thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn BC về phía điểm O.

Phần đảo:

Tiếp tuyến Bx với đường tròn (O) cắt cung chứa góc α dựng trên đoạn BC tại X. Lấy điểm M bất kỳ trên cung CX là một phần của cung chứa góc α dựng trên đoạn BC ($M \neq X, M \neq C$). Nối MB cắt đường tròn (O) tại A thì A thuộc cung lớn BC. Khi đó, ta có: $\widehat{BAC} = 2\alpha, \widehat{AMC} = \alpha$ nên tam giác ACM cân tại A. Suy ra $AC = AM$.



Kết luận:

Quỹ tích của điểm M là cung CX, là một phần của cung chứa góc α , dựng trên đoạn BC về phía điểm O, không kể hai điểm X và C.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC và một điểm P nằm trong tam giác. Hạ PA_1 , PB_1 , PC_1 vuông góc với BC, CA, AB tương ứng. Tìm tập hợp các điểm P sao cho tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác cân

(Trích đề thi vào lớp 10 PTNK Chuyên Toán – Tin, ĐHQG TP.HCM năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

Giả sử tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại A_1 , khi đó $A_1C_1 = A_1B_1$ (1)

Tứ giác BC_1PA_1 là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BP.

Mặt khác, ta có $\widehat{C_1BA_1} = 60^\circ$ nên A_1C_1 là cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn đường kính BP.

$$\text{Suy ra: } A_1C_1 = BP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } A_1B_1 = CP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $BP = CP$

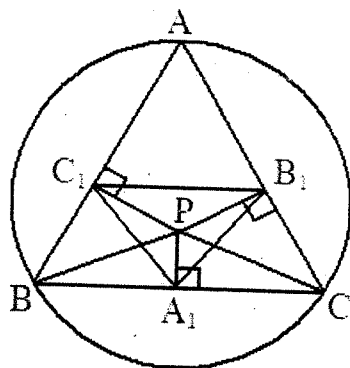
Vì BC cố định nên P nằm trên đường cao AA' thì $PB = PC$.

Kẻ PA_1 vuông góc với BC, PB_1 vuông góc với AC, PC_1 vuông góc với AB.

$$\text{Theo trên, ta có: } A_1C_1 = BP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ và } A_1B_1 = CP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra: $A_1B_1 = A_1C_1$ nên tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại A_1 .

Vậy tập hợp điểm P sao cho tam giác $A_1B_1C_1$ cân là ba đường cao của tam giác ABC.



Bài 7. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ có $R_1 > R_2$, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn $(O_1; R_1)$ tại M và cắt đường tròn $(O_2; R_2)$ tại N (các điểm M, N khác A).

a) Xác định vị trí của đường thẳng d để độ dài đoạn thẳng MN lớn nhất.

b) Tìm tập hợp các trung điểm I của các đoạn thẳng MN khi đường thẳng d quay quanh điểm A.

(Trích đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên, ĐH Vinh năm học 2005 – 2006)

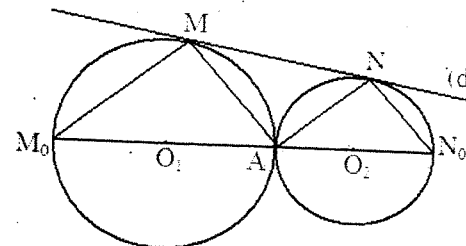
Hướng dẫn giải

a) Kéo dài O_1O_2 cắt đường tròn (O_1) và (O_2) tại hai điểm M_0, N_0 .

$$\text{Ta có: } \widehat{ANN_0} = \widehat{AMM_0} = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra } MN \leq M_0N_0 \Rightarrow MN \leq 2(R_1 + R_2)$$

Vậy độ dài lớn nhất của đoạn thẳng MN lớn nhất là $2(R_1 + R_2)$ đạt được khi đường thẳng d đi qua O_1 và O_2 .



b) **Phần thuận:**

Gọi I_0 là trung điểm của M_0N_0 .

$$\text{Do } R_1 > R_2 \Rightarrow AM_0 > AN_0$$

nên I_0 nằm trong đoạn AM_0 .

Vì $\triangle AMM_0 \sim \triangle ANN_0$ nên $AM > AN$.

Suy ra I nằm trong đoạn AM .

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \frac{AI}{AM} &= \frac{IN - AN}{AM} = \frac{IM}{AM} - \frac{AN}{AM} = \frac{AM - AI}{AM} - \frac{AN}{AM} = 1 - \frac{AI}{AM} - \frac{AN}{AM} \\ \Rightarrow 2\left(\frac{AI}{AM}\right) &= 1 - \frac{AN}{AM} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự, ta có: } 2\left(\frac{AI_0}{AM_0}\right) = 1 - \frac{AN_0}{AM_0} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } \frac{AI}{AM} = \frac{AI_0}{AM_0}$$

$$\text{Do đó } II_0 \parallel MM_0 \Rightarrow \widehat{AII_0} = 90^\circ$$

Vậy tập hợp điểm I là đường tròn đường kính AI_0 .

Phần đảo:

Do M, N khác A nên I khác A.

Lấy điểm I' trên đường kính AI_0 từ điểm A, đường thẳng AI' cắt đường tròn (O_1) và (O_2) tại M', N' .

$$\text{Khi đó, ta có: } II_0 \perp M'N' \Rightarrow II_0 \parallel M_0M' \parallel N_0N'$$

$$\text{Suy ra: } \frac{AI'}{AM'} = \frac{AI_0}{AM_0}; \frac{AI'}{AN'} = \frac{AI_0}{AN_0}$$

Do đó I' là trung điểm của $M'N'$.

Kết luận: Tập hợp điểm I là đường tròn đường kính AI_0 trừ điểm A.

MỤC LỤC

Lời nói đầu..... 3

PHẦN I: ĐẠI SỐ

Chủ đề 1. Biến đổi các biểu thức nguyên và phân thức hữu tỉ5

Chủ đề 2. Biến đổi các biểu thức chứa căn thức.....17

Chủ đề 3. Bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của một biểu thức đại số.....34

Chủ đề 4. Phương trình62

Chủ đề 5. Hệ phương trình.....91

Chủ đề 6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình.....117

Chủ đề 7. Hàm số và đồ thị.....133

PHẦN II: SỐ HỌC

Chủ đề 8. Tính chia hết – đồng dư thức.....149

Chủ đề 9. Phương trình nghiệm nguyên.....159

Chủ đề 10. Nguyên lí Dirichlet.....166

Chủ đề 11. Nguyên tắc cực hạn.....172

Chủ đề 12. Các bài toán rời rạc – Tổ hợp – Suy luận logic.....175

PHẦN III: HÌNH HỌC

Chủ đề 13. Hệ thức lượng trong tam giác vuông – Định lí Pitago.....188

Chủ đề 14. Định lí Ta – let và tam giác đồng dạng.....197

Chủ đề 15. Tứ giác – đa giác.....205

Chủ đề 16. Đường tròn.....218

Chủ đề 17. Cực trị hình học.....259

Chủ đề 18. Quỹ tích (tập hợp điểm).....283

