

TÔ THỊ NGÀ (chủ biên)

NÂNG CAO KỸ NĂNG GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

100%
DẠNG BÀI

- ▶ HÀM SỐ
- ▶ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

TÔ THỊ NGÀ

NÂNG CAO KỸ NĂNG GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM 100% DẠNG BÀI

▶ HÀM SỐ

▶ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

- ◆ Bí quyết ôn nhanh, nhớ lâu qua lời giải chi tiết
- ◆ Đột phá tư duy làm bài, đầy đủ dạng bài tập.
- ◆ Dành cho học sinh luyện thi THPT Quốc gia

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

THAY LỜI NÓI ĐẦU



TRẮC NGHIỆM TOÁN - MỘT LỐI TƯ DUY MỚI

Thân gửi lời yêu thương đến toàn thể các em học sinh, các bậc phụ huynh cùng các thầy cô giáo!

Như mọi người đã biết, nền giáo dục của đất nước chúng ta đang thay đổi từng ngày để kịp thích nghi với xu hướng giáo dục tiến bộ trên thế giới. Lần đầu tiên giáo dục Việt Nam, môn Toán được thi dưới hình thức trắc nghiệm.

Thực tế cho thấy, tại nhiều quốc gia có nền giáo dục phát triển trên thế giới, hình thức này đã được áp dụng từ lâu. Chẳng hạn trong bài thi SAT và ACT của Mỹ có khoảng 50 câu hỏi trắc nghiệm, và việc thi Toán trắc nghiệm ở quốc gia này hàng năm vẫn thu hút được hàng triệu lượt thí sinh tham gia ứng tuyển vào khoảng 1800 trường Đại học tại Hoa Kỳ.

Tuy nhiên ở Việt Nam, phải đến năm 2017 hình thức này mới được cập nhật và áp dụng lần đầu tiên cho kỳ thi THPT Quốc gia. Do đây là năm đầu tiên áp dụng hình thức thi này nên rất nhiều em học sinh chưa kịp thích nghi, rơi vào trạng thái hoang mang; còn các thầy cô cũng gặp nhiều khó khăn khi phải xoay xở cách dạy học, cách ra đề mới. Hơn thế, tài liệu về trắc nghiệm Toán trên thị trường còn khan hiếm, gần như không thể đáp ứng được nhu cầu khổng lồ trên.

Chính vì thế Megabook cùng đội ngũ tác giả đã dày công nghiên cứu cho ra đời Bộ sách này. Đây là Bộ sách về trắc nghiệm Toán đầu tiên ở Việt Nam với 100% dạng bài trắc nghiệm. Mọi hệ thống lý thuyết cũng như các dạng bài tập được biên soạn lại và chọn lọc kỹ càng đảm bảo giúp các em học sinh có thể hình dung rõ ràng về dạng đề mới và luyện tập để một cách thành thạo nhất.

Đây có thể không phải là cuốn sách hay nhất, nhưng chắc chắn là cuốn sách phù hợp nhất cho những ai muốn dạy tốt và học tốt trắc nghiệm Toán, những ai muốn đỗ kỳ thi THPT Quốc gia với điểm Toán vượt trội, và hơn hết là với những ai muốn hiểu thật rõ, hiểu thật sâu bản chất môn Toán để học thật, thi thật và sống thật.

Thân ái gửi tặng các em học sinh, các bậc phụ huynh cùng các thầy cô Bộ sách tâm huyết này!

ĐỘI NGŨ TÁC GIẢ.

**Dành cho những ai muốn thành công
và hạnh phúc trước tuổi 35 !**

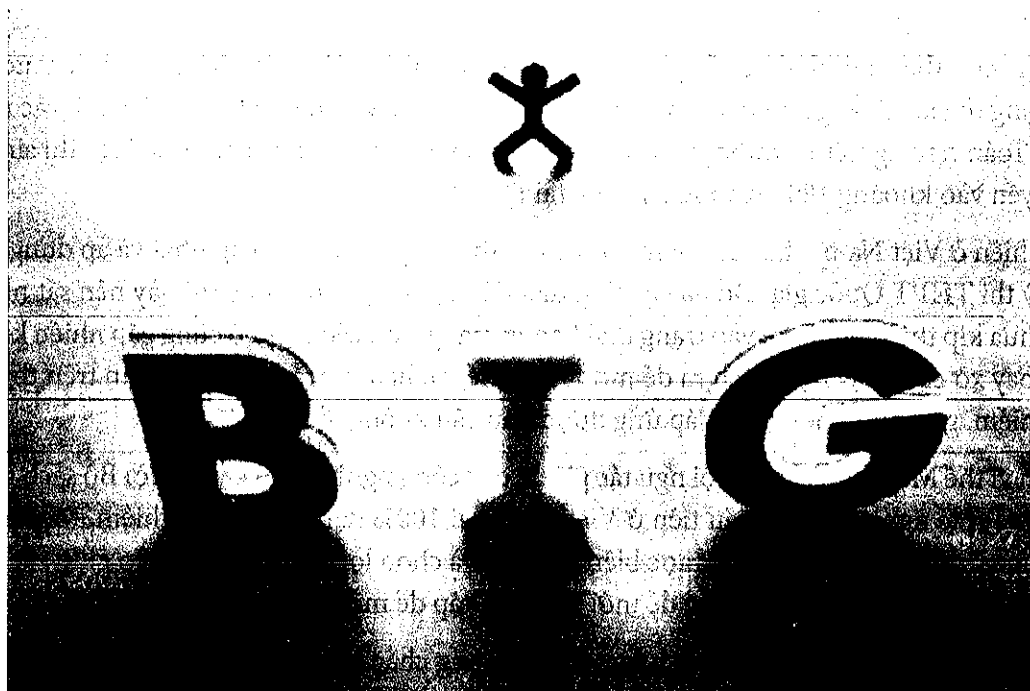
MỤC TIÊU LÀ KIM CHỈ NAM DẪN ĐƯỜNG CHÚNG TA ĐI

Khởi đầu cho mỗi chặng đường cần có động lực để bước đi, để có động lực bước đi thì mục tiêu chính là ngòi nổ để thúc đẩy sự chinh phục đầy thú vị.

Các em thân mến, các em đã tự hỏi xem mình đã có “ngòi nổ” nào cho năm học mới chưa? Cho việc học Toán cũng như chinh phục cuốn sách trắc nghiệm Toán này chưa? Và xa hơn là chặng đường cho cuộc sống 5 năm tới nữa chưa?

Cho dù có hoặc chưa có trong tâm trí một mục tiêu thì chỉ cần các em viết ra, viết ra những mục tiêu của bản thân thì nó sẽ trở nên rõ ràng hơn rất nhiều. Bởi vì, “Sự rõ ràng tạo nên sức mạnh!” Các em chỉ đến được ĐÍCH một khi các em biết mình đang muốn đi đến đâu, trở thành ai, đạt được điều gì sau 1 năm, 2 năm, 5 năm nữa?

Vậy nên hãy dành 30 phút để hình dung, tưởng tượng về cái ĐÍCH đó rồi viết ra em nhé.





KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Nhắc lại định nghĩa

A) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 \in K$, ta có $f(x_1) < f(x_2)$.

Ví dụ ▶ Hàm số $y = 2016x + 2017$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, vì: Giả sử $x_1 < x_2$, ta có:

$$y(x_1) - y(x_2) = 2016(x_1 - x_2) < 0 \Rightarrow y(x_1) < y(x_2).$$

B) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 \in K$, ta có $f(x_1) > f(x_2)$.

Ví dụ ▶ Hàm số $y = -2016x + 2017$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, vì: Giả sử $x_1 < x_2$, ta có:

$$y(x_1) - y(x_2) = 2016(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow y(x_1) > y(x_2).$$

2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Định lí: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

Chú ý: Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x thuộc K thì $f(x)$ không đổi trên K .

Ví dụ ▶ Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 + 1$.



Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Vậy hàm số $y = x^4 + 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$, đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lưu ý: Nếu hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K thì đạo hàm của nó không nhất thiết dương (âm) trên đó. Ví dụ: Hàm số $y = x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nhưng đạo hàm của nó bằng 0 tại $x = 0$.

- Điều kiện cần và đủ để $y = f(x)$ đồng biến trên K là: $f'(x) \geq 0 \forall x \in K$ đồng thời $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm trên K .

Ví dụ ▶ Hàm số $y = 2016x^2 - 2016$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, vì: $y' = 4032x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ và $y' = 0$ tại $x = 0$.

- Điều kiện cần và đủ để $y = f(x)$ nghịch biến trên K là: $f'(x) \leq 0 \forall x \in K$ đồng thời $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm trên K .

Ví dụ ▶ Hàm số $y = 2016x^2 - 2016$ nghịch biến trên $(-\infty; 0]$, vì: $y' = 4032x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ và $y' = 0$ tại $x = 0$.

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì
$$\begin{cases} \min_{[a;b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a;b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì
$$\begin{cases} \min_{[a;b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a;b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG CỦA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀO VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN

1. Phương pháp giải

- BƯỚC 1: Tìm tập xác định.
- BƯỚC 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- BƯỚC 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- BƯỚC 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ ▶ Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{3}{4}$.



Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - x - 6$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\frac{97}{12}$	$-\frac{51}{4}$	$+\infty$	

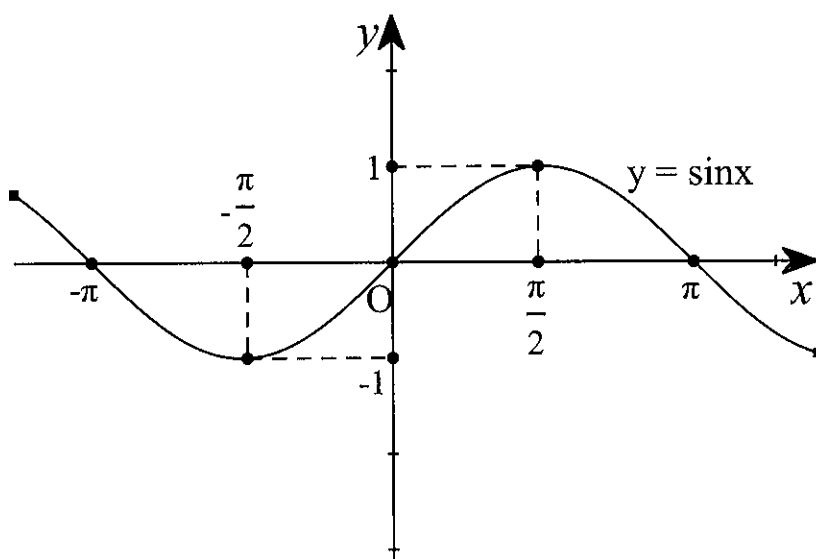
Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-2; 3)$.

2. Bài tập



Bài tập 1 Hình 1 là đồ thị của hàm số $y = \sin x$ xét trên đoạn $[-\pi; \pi]$. Dưới đây có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG?

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.



Hình 1

- (A) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 (B) Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi; 0)$.
 (C) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

(D) Hàm số $y = \sin x$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $x = -\frac{\pi}{2}$ và đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $x = \frac{\pi}{2}$.



Giải:

Ta thấy trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ hàm số xác định và đồ thị hàm số có chiều đi xuống nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số xác định và đồ thị hàm số có chiều đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ Khẳng định (A) đúng, (B) và (C) sai.

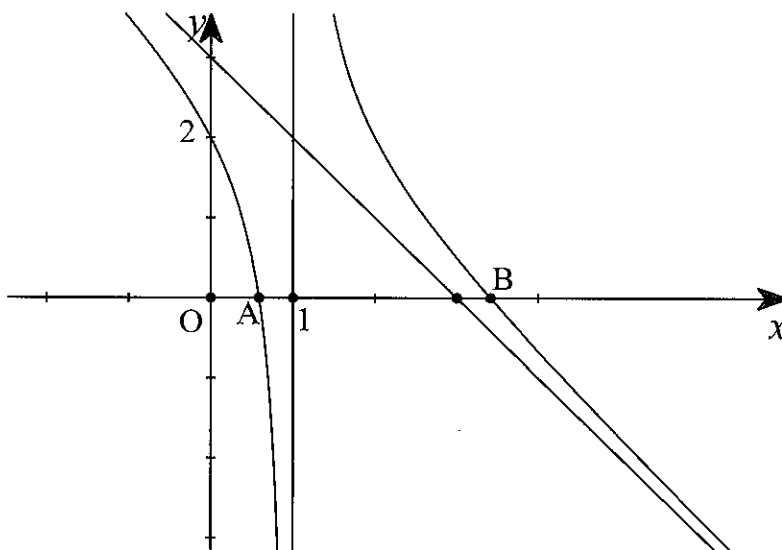
Quan sát đồ thị thấy (D) đúng.

Vậy có tất cả 2 khẳng định đúng là (A) và (D).

$\Rightarrow$ Chọn (B).

Nhận xét: Hàm số đồng biến và xác định trên K thì đồ thị hàm số có chiều đi lên từ trái sang phải trên K; hàm số nghịch biến và xác định trên K thì đồ thị có chiều đi xuống từ trái sang phải trên K.

Bài tập 2 Cho đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ như sau:



(A) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ chỉ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.



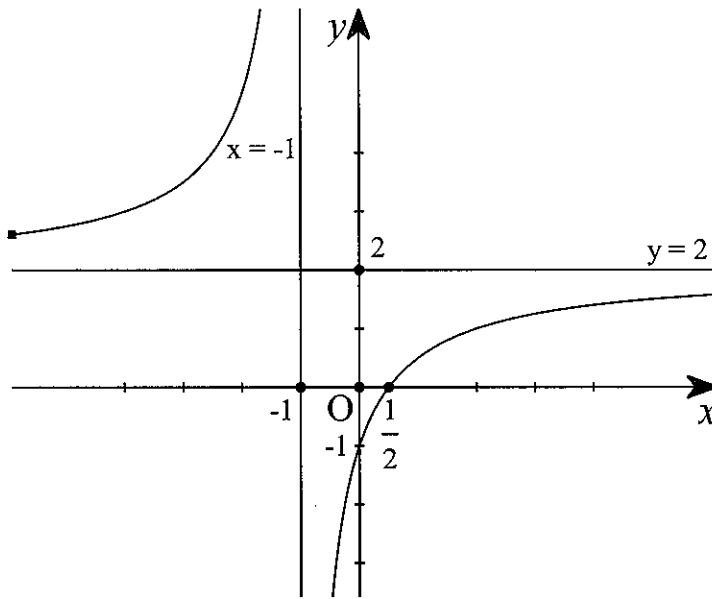
Giải:

(A), (B) và (C) sai, (D) đúng.

$\Rightarrow$ Chọn (D).



Bài tập 3 Cho đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ có hình vẽ dưới đây:



- (A) Hàm số $y = f(x)$ chỉ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
- (B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- (C) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- (D) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.



Giải:

Các khẳng định (A), (B) và (D) sai; (C) đúng

$\Rightarrow$ Chọn (C).

Bài tập 4 Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG?

- (A) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
- (B) Hàm số $y = f(x)$ chỉ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
- (C) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- (D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.



Giải:

Các khẳng định (A), (B) và (C) sai; (D) đúng

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 5 Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên K . Phát biểu nào dưới đây là SAI về tính đơn điệu của $f(x)$ và dấu của đạo hàm $f'(x)$?

- (A) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- (B) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .
- (C) Nếu $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên K thì $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in K$ và bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trên K .
- (D) Nếu $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên K thì $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) trên K .



Giải:

Các khẳng định (A), (B) đúng (theo Định lý về tính đơn điệu của hàm số và dấu của đạo hàm).

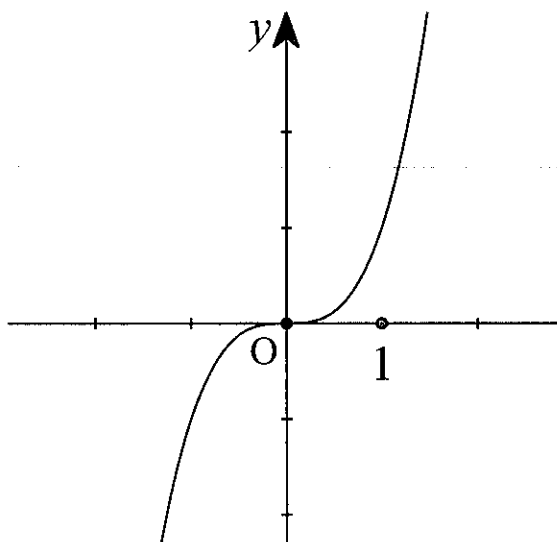
Khẳng định (C) đúng.

Xét khẳng định (D):

Xét hàm số $y = x^3$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Nhìn vào đồ thị của hàm số $y = x^3$ (hình bên) ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Vậy khẳng định (D) là SAI.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 6 Hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ đồng biến trên:

- (A) $\mathbb{R}$; (B) $(-\infty; 1)$; (C) $(-1; +\infty)$; (D) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.



Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{5}{(x+1)^2} > 0 \forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\Rightarrow$ Chọn (D).

Nhận xét:

- Vì $y' > 0 \forall x \in D$ nên hàm số luôn đồng biến trên D và ta không cần lập bảng biến thiên để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trong trường hợp này. Khi xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số thì ta xét trên tập xác định của hàm số. Do đó dễ dàng loại trừ phương án (A).

- Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ và $ad-bc \neq 0$) có $y' = \frac{ac-bd}{(cx+d)^2}$

nên hàm số sẽ đơn điệu trên $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \Rightarrow$ dễ dàng loại trừ (B) và (C).

Bài tập 7 Hàm số $y = \frac{2x-1}{x+3}$

- (A) Đồng biến trên $\mathbb{R}$;
(B) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$;
(C) Đồng biến trên từng khoảng xác định;
(D) Nghịch biến trên từng khoảng xác định.



Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Ta có: $y' = \frac{7}{(x+3)^2} > 0 \forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D

$\Rightarrow$ Chọn (C).

Bài tập 8 Hàm số $y = \frac{2x^2-8x+11}{x^2-4x+5}$

- (A) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
(B) Đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$.
(C) Đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
(D) Nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.



Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{-2x+4}{(x^2-4x+5)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	3	$+\infty$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

$\Rightarrow$ Chọn (B).

Lưu ý: Có thể sử dụng máy tính Casio kiểm tra tính đồng biến và nghịch biến.

Bước 1: Nhập hàm số gán $x = X$ (Nhấn SHIFT- Dấu tích phân)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2X^2 - 8X + 11}{X^2 - 4X + 5} \right) \Big|_{x=X}$$

Bước 2: Thay các giá trị trong khoảng cần chọn vào (Ấn CALC nhập $X = 3$)

CALC 3 = ta được kết quả $-\frac{1}{2}$ ($y'(3) < 0$ hàm số nghịch biến)

CALC 1 = ta được kết quả $\frac{1}{2}$ ($y'(1) > 0$ hàm số đồng biến)

$\Rightarrow$ Chọn (B).

Bài tập 9 Hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

(A) Nghịch biến trên khoảng $(-3; -1)$.

(B) Đồng biến trên tập $S = (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

(C) Nghịch biến trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.

(D) Đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-3; -1)$.



Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$.

y' không xác định tại $x = -2$.



Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$				
y'		+	0	-	-	0	+		
y	$-\infty$		-3		$+\infty$		1		$+\infty$

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$,
nghịch biến trên các khoảng $(-3; -2)$ và $(-2; -1)$.

$\Rightarrow$ Chọn (C).

Bài tập 10 Hàm số $y = \sin 2x - 2x + 2016$

- (A) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- (B) Đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- (C) Nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (D) Đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2\cos 2x - 2 = 2(\cos 2x - 1) = -4\sin^2 x \leq 0 \forall x \in D \Rightarrow$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Chọn A.



B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 11 Hàm số $y = x - \ln x$

- (A) Đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- (B) Đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- (C) Đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
- (D) Đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.



Giải:

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

Với $x \in (0; +\infty)$, ta có: $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

$y' < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 1)$.

$\Rightarrow$ Chọn (D).

Lưu ý:

1. Hàm số $y = x - \ln x$ xác định khi $x > 0$, do đó ta xét tính đơn điệu của hàm số trên $(0; +\infty)$ và dễ dàng loại trừ phương án (A).

2. Các bạn có thể dùng CASIO nhập $\frac{d}{dx}(X - \ln(X)) \Big|_{x=X}$ CALC

CALC với $x = 0,5$, ta có $y'(0,5) < 0$

CALC với $x = 3$, ta có $y'(3) = \frac{2}{3} > 0$. Do vậy loại đáp án B và C.

Bài tập 12 Hàm số $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$

(A) Đồng biến trên khoảng $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

(B) Đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

(C) Đồng biến trên các khoảng $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

(D) Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.



Giải:

Điều kiện xác định: $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Với $2 < x < 3$, ta có: $y' = \frac{-2x+5}{-x^2+5x-6}$, $-x^2 + 5x - 6 > 0$, vì vậy ta có:

$y' > 0 \Leftrightarrow 2 < x < \frac{5}{2}$; $y' < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 3$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

$\Rightarrow$ Chọn A.

Lưu ý: Điều kiện tồn tại của hàm $y = f(x) = \ln g(x)$ là $g(x) > 0$. Do đó ta phải xét tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ trên tập các giá trị của x thỏa mãn $g(x) > 0$ và dễ dàng loại trừ phương án (D).

Bài tập 13 Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^3 - 2x^2 + 1$;

(B) $y = x^4 - 2x^2 + 1$;

(C) $y = -x^3 + x^2 - 4x + 1$;

(D) $y = -x^4 + 6x^2 - 1$.



Giải:

+ Xét hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x$.

$y' \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\left[0; \frac{4}{3}\right]$.

+ Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$.

$y' \leq 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$.

+ Xét hàm số $y = -x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 2x - 4 < 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ Xét hàm số $y = -x^4 + 6x^2 - 1$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 12x \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{3} \\ 0 \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 10 Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \frac{3x-1}{x+2}$;

(B) $y = 3x - \sin 3x - 7$;

(C) $y = x^3 - 3x^2$;

(D) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.



Giải:

+ Hàm số $y = \frac{3x-1}{x+2}$ có TXĐ là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ nên không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Xét hàm số $y = 3x - \sin 3x - 7$.

Ta có: $y' = 3 - 3\cos 3x \geq 3 - 3.1 = 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

+ Xét hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

Ta có: $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 15 Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x^3}$. Khẳng định nào sau đây là SAI?

- (A) Hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{2}{3}\right)$.
 (B) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. (C) Hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{2}{3}\right)$.
 (D) Cả A và B đều đúng.



Giải:

TXĐ: $D = (-\infty; 1]$.

Ta có: $y' = \frac{x(2-3x)}{2\sqrt{x^2 - x^3}}$.

Lập bảng biến thiên:

x		0		$\frac{2}{3}$		1
y'	-		+	0	-	
y				CT		

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \Rightarrow$ Chọn (C).



C. Tăng tốc

Bài tập 16 Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K. Mệnh đề nào sau đây là SAI?

- (A) Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến trên K.
 (B) Hàm số $y = -f(x) + 1$ nghịch biến trên K.
 (C) Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên K.
 (D) Hàm số $y = f(x) - 1$ đồng biến trên K.



Giải:

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K nên $y' = f'(x) \geq 0 \forall x \in K$ và $f'(x)$ chỉ bằng 0 tại hữu hạn điểm trên K.

+ Xét khẳng định A:

Ta có: $y' = -f'(x) \leq 0 \forall x \in K$ và $f'(x)$ chỉ bằng 0 tại hữu hạn điểm trên K $\Rightarrow$ Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến trên K $\Rightarrow$ A đúng.

+ Xét khẳng định B:



Ta có: $y' = -f'(x) \leq 0 \forall x \in K$ và $f'(x)$ chỉ bằng 0 tại hữu hạn điểm trên $K \Rightarrow$ Hàm số $y = -f(x) + 1$ nghịch biến trên $K \Rightarrow B$ đúng.

+ Xét khẳng định C:

C sai, ta lấy phản ví dụ: $y = f(x) = -\frac{1}{x}$ có $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có: $f(x+1) = -\frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \forall x \neq -1 \Rightarrow y = f(x+1)$

nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow$ khẳng định C sai.

+ Xét khẳng định D:

Ta có: $y' = f'(x) \geq 0 \forall x \in K$ và $f'(x)$ chỉ bằng 0 tại hữu hạn điểm trên K

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x) - 1$ đồng biến trên $K \Rightarrow D$ đúng.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số vào việc chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình. Chúng ta sẽ thấy rõ điều này hơn trong các bài tập dưới đây.

Bài tập 17: Số nghiệm của phương trình: $3^x + 4^x = 5^x$ là:

- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.



Giải:

Ta có: $3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ (1)

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

Ta có: $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \left(\frac{4}{5}\right) < 0 \forall x \Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(2) = 1 \Rightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Do đó phương trình ban đầu có 1 nghiệm duy nhất.

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Chú ý: Để nhẩm nghiệm của phương trình $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

ta nhập phương trình $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ vào máy tính và thực hiện thao tác **SHIFT SLOVE**

Tiếp tục thực hiện thao tác **=**. Khi đó máy tính sẽ tự động nhẩm nghiệm của phương trình đã cho quanh giá trị 4 ta được kết quả bằng 2 và 2 chính là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. (Ở đây các em có thể thay số 4 bằng một số khác, khi đó máy tính sẽ nhẩm nghiệm quanh giá trị các em đã nhập)

Đáp án: Khẳng định đúng là:

(A) $\sin x > x \quad \forall x > 0.$

(B) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \forall x > 0.$

(C) $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \leq 2^{x+1} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

(D) $\sin x \leq \frac{2x}{\pi} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$



Giải:

+ Đặt $f(x) = \sin x - x, x > 0.$

Ta có: $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến $\forall x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow \sin x - x < 0 \Rightarrow \sin x < x \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow$ Khẳng định (A) là SAI.

+ Xét hàm số $f(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x; f''(x) = x - \sin x; f'''(x) = 1 - \cos x$$

Ta có: $f'''(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty) \Rightarrow f''(x) \geq f''(0) = 0$ nên $f'(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Do đó $f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \geq 0$ và $f(x) > f(0) = 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow \frac{x^3}{6} - x + \sin x > 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad \forall x > 0$ (1)

Chú ý rằng từ $f''(x) > f''(0) = 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow \sin x < x$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Khẳng định B là ĐÚNG.

+ Ta có: $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\tan x}} = 2^{\frac{\sin x + \tan x}{2} + 1}$.

Ta sẽ chứng minh:

$$2^{\frac{\sin x + \tan x}{2} + 1} > 2^{x+1} \Leftrightarrow \sin x + \tan x > 2x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sin x + \tan x - 2x > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq 2\sqrt{\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$$\Rightarrow 2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{x+1} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Khẳng định C là SAI.

$$+ \text{Ta có: } \sin x > \frac{2x}{\pi} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

$$\text{Xét } g(x) = x \cos x - \sin x.$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên } \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến trên } \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

$$\Rightarrow \sin x > \frac{2x}{\pi} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$\Rightarrow$ Khẳng định D là SAI.

$\Rightarrow$ Chọn (B).

Nhận xét:

Có thể chọn thử các giá trị của X bằng máy tính CASIO để lựa chọn đáp án đúng

Chú ý Ở khẳng định A ta nhập $\sin x - x$ CALC 1 = được kết quả âm (vậy đáp án A sai, chú ý chuyển sang chế độ radian trước khi CALC, tương tự bằng cách trên ta có thể loại đáp án C và D bằng cách CALC một số giá trị của x).

Bài 10 Tập nghiệm của bất phương trình: $\sqrt{x+6} + \sqrt[3]{5x-7} + \sqrt[4]{7x-5} + \sqrt[5]{13x-7} < 9$ là:

$$(A) S = (3; +\infty); \quad (B) S = \left[\frac{5}{7}; +\infty\right);$$

$$(C) S = \left[\frac{5}{7}; 3\right); \quad (D) S = \left(\frac{5}{7}; +\infty\right).$$



Giải:

$$\text{Điều kiện: } x \geq \frac{5}{7}.$$

$$\text{Xét } f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt[3]{5x-7} + \sqrt[4]{7x-5} + \sqrt[5]{13x-7}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-7)^2}} + \frac{7}{4\sqrt[4]{(7x-5)^3}} + \frac{13}{5\sqrt[5]{(13x-7)^4}} > 0 \quad \forall x > \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{5}{7}; +\infty\right).$$