

ĐỖ THANH SƠN

TUYỂN CHỌN

# MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC

9



ĐH  
QG  
Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỖ THANH SƠN

# TUYỂN CHỌN MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC 9

(Tài liệu dùng cho học sinh ôn thi vào các khối chuyên  
và lớp 10 phổ thông trung học)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



## **NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại: (04) 9718312; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

E-mail: [nxb@vnu.edu.vn](mailto:nxb@vnu.edu.vn)

---

### *Chịu trách nhiệm xuất bản:*

*Giám đốc:* PHÙNG QUỐC BẢO

*Tổng biên tập:* PHẠM THÀNH HÙNG

*Biên tập:* THANH TÙNG

*Sửa bài:* THU HƯƠNG

*Trình bày bìa:* NGỌC ANH

---

### **TUYỂN CHỌN MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC 9**

---

Mã số: 1L-131 ĐH2006

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội

Số xuất bản: 564 - 2006/CXB/21 - 94/ĐHQGHN, ngày 21/07/2006

Quyết định xuất bản số: 306 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006.

## MỤC LỤC

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Lời nói đầu</b>                                                                                           | 8  |
| <b>Chương 1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG - TỶ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN</b>                      | 9  |
| <b>1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông</b>                                                                 | 9  |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                                                     | 9  |
| B. Bài tập                                                                                                   | 9  |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                                          | 11 |
| <b>2. Các tỷ số lượng giác của một góc nhọn</b>                                                              | 12 |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                                                     | 12 |
| B. Bài tập                                                                                                   | 13 |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                                          | 15 |
| <b>Chương 2. ĐƯỜNG TRÒN - VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ MỘT ĐƯỜNG TRÒN - VỊ TRÍ HAI ĐƯỜNG TRÒN</b> | 19 |
| <b>1. Đường tròn</b>                                                                                         | 19 |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                                                     | 19 |
| B. Bài tập                                                                                                   | 20 |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                                          | 21 |
| <b>2. Tính bán kính đường tròn</b>                                                                           | 24 |
| A. Phương pháp                                                                                               | 24 |
| B. Bài tập                                                                                                   | 24 |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                                          | 25 |
| <b>3. Tập hợp điểm là một đường tròn</b>                                                                     | 26 |
| A. Phương pháp                                                                                               | 26 |
| B. Bài tập                                                                                                   | 26 |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                                          | 27 |



|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. Cực trị về độ dài của một đoạn thẳng mà một trong hai đầu mút của nó thuộc đường tròn</b> | <b>27</b> |
| A. Phương pháp                                                                                  | 28        |
| B. Bài tập                                                                                      | 28        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                             | 28        |
| <b>5. Vị trí tương đối của một đường thẳng và một đường tròn</b>                                | <b>30</b> |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                                        | 30        |
| B. Bài tập                                                                                      | 30        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                             | 32        |
| <b>6. Một số bài toán liên quan đến tiếp tuyến của đường tròn</b>                               | <b>34</b> |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                                        | 34        |
| B. Bài tập                                                                                      | 34        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                             | 36        |
| <b>7. Dựng đường tròn</b>                                                                       | <b>38</b> |
| A. Một số quỹ tích cơ bản được dùng để tìm tâm đường tròn                                       | 38        |
| B. Phương pháp                                                                                  | 38        |
| C. Bài tập                                                                                      | 39        |
| D. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                             | 39        |
| <b>8. Dựng tiếp tuyến và cát tuyến của đường tròn</b>                                           | <b>41</b> |
| A. Bài tập                                                                                      | 41        |
| B. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                             | 41        |
| <b>9. Đường tròn nội tiếp tam giác, tứ giác</b>                                                 | <b>42</b> |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                                        | 42        |
| B. Bài tập                                                                                      | 43        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                             | 45        |
| <b>10. Đường tròn bàng tiếp tam giác</b>                                                        | <b>46</b> |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                                        | 46        |
| B. Bài tập                                                                                      | 46        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                             | 47        |
| <b>11. Vị trí tương đối của hai đường tròn</b>                                                  | <b>47</b> |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                                        | 47        |
| B. Bài tập                                                                                      | 49        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                                             | 51        |

|                                                                                 |               |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>12. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn</b>                                  | <b>52</b>     |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                        | 52            |
| B. Bài tập                                                                      | 52            |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                             | 54            |
| <b>13. Dựng đường tròn</b>                                                      | <b>55</b>     |
| A. Bài tập                                                                      | 55            |
| B. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                             | 56            |
| <br><b>Chương 3. GÓC NỘI TIẾP - GÓC CÓ ĐỈNH NẪM TRONG HOẶC NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN</b> | <br><b>58</b> |
| <b>1. Góc ở tâm</b>                                                             | <b>58</b>     |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                        | 58            |
| B. Bài tập                                                                      | 59            |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                             | 59            |
| <b>2. Góc nội tiếp</b>                                                          | <b>60</b>     |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                        | 60            |
| B. Bài tập                                                                      | 60            |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                             | 63            |
| <b>3. Góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cung</b>                        | <b>64</b>     |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                        | 64            |
| B. Bài tập                                                                      | 65            |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                             | 67            |
| <b>4. Góc có đỉnh nằm trong hoặc ngoài đường tròn</b>                           | <b>68</b>     |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                        | 68            |
| B. Bài tập                                                                      | 68            |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                             | 69            |
| <b>5. Cung chứa góc</b>                                                         | <b>70</b>     |
| A. Các kiến thức cần nhớ                                                        | 70            |
| B. Một số dạng toán mà cách giải có sử dụng cung chứa góc                       | 71            |
| 1. Chứng minh tập hợp điểm nằm trên cùng một đường tròn                         | 71            |
| 2. Chứng minh một số tính chất hình học                                         | 72            |
| 3. Dựng hình                                                                    | 73            |
| 4. Tập hợp điểm là một cung tròn                                                | 74            |

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Chương 4. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC</b>                                        | <b>80</b> |
| <b>1. Diện tích tam giác và một vài hệ quả</b>                            | <b>80</b> |
| A. Công thức tính diện tích tam giác                                      | 80        |
| B. Bài tập                                                                | 80        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                       | 81        |
| <b>Hệ quả 1</b>                                                           | <b>81</b> |
| A. Mệnh đề                                                                | 81        |
| B. Bài tập                                                                | 82        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                       | 83        |
| <b>Hệ quả 2</b>                                                           | <b>84</b> |
| A. Mệnh đề                                                                | 84        |
| B. Bài tập                                                                | 84        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                       | 85        |
| <b>Hệ quả 3</b>                                                           | <b>87</b> |
| A. Mệnh đề                                                                | 87        |
| B. Bài tập                                                                | 87        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                       | 87        |
| <b>2. Diện tích hình chữ nhật và hình vuông</b>                           | <b>88</b> |
| A. Công thức tính diện tích hình chữ nhật và hình vuông                   | 88        |
| B. Bài tập                                                                | 88        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                       | 89        |
| <b>3. Diện tích hình thang</b>                                            | <b>89</b> |
| A. Công thức tính diện tích hình thang                                    | 89        |
| B. Bài tập                                                                | 90        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                       | 90        |
| <b>4. Diện tích hình thoi</b>                                             | <b>90</b> |
| A. Công thức tính diện tích hình thoi                                     | 90        |
| B. Bài tập                                                                | 91        |
| C. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số                                       | 91        |
| <b>5. Dùng các kết quả diện tích đa giác để giải một số bài toán khác</b> | <b>91</b> |
| A. Phương pháp                                                            | 91        |
| B. Bài tập                                                                | 92        |
| <b>Chương 5. CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG MẪU MỤC</b>                      | <b>93</b> |
| <b>1. Nguyên lý Diricle</b>                                               | <b>93</b> |
| A. Phương pháp                                                            | 94        |
| B. Ví dụ                                                                  | 94        |



|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| C. Bài tập                                      | 95  |
| D. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số             | 96  |
| <b>2. Nguyên lý cực hạn</b>                     | 98  |
| A. Phương pháp                                  | 99  |
| B. Ví dụ                                        | 99  |
| C. Bài tập                                      | 100 |
| D. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số             | 101 |
| <b>3. Hình học tổ hợp</b>                       | 102 |
| A. Phương pháp                                  | 103 |
| B. Ví dụ                                        | 103 |
| C. Bài tập                                      | 104 |
| D. Hướng dẫn giải bài tập và đáp số             | 105 |
| <b>Phụ lục</b>                                  | 106 |
| Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 1993     | 106 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 1996            | 108 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 1997            | 109 |
| Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 1997     | 111 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 1998            | 112 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 1999            | 114 |
| Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 1999     | 115 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 2000            | 116 |
| Đề thi vào các khối chuyên Toán - Tin, năm 2000 | 117 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 2001            | 118 |
| Đề thi vào các khối chuyên Toán - Tin, năm 2001 | 120 |
| Đề thi vào các khối chuyên Toán - Tin, năm 2002 | 122 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 2002            | 123 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 2003            | 125 |
| Đề thi vào các khối chuyên Toán - Tin, năm 2003 | 126 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 2004            | 127 |
| Đề thi vào các khối chuyên Toán - Tin, năm 2004 | 128 |
| Đề thi vào các khối chuyên, năm 2005            | 130 |
| Đề thi vào các khối chuyên Toán - Tin, năm 2005 | 132 |

## LỜI NÓI ĐẦU

Để góp phần nâng cao chất lượng học tập môn toán nói chung và phần hình học nói riêng, cũng như nhu cầu luyện thi và tự học môn hình của học sinh để thi vào các trường phổ thông trung học hoặc các trường chuyên của các tỉnh, thành phố, trung ương. Chúng tôi cho xuất bản cuốn sách “Tuyển chọn một số dạng toán hình học 9”. Nội dung cuốn sách bám sát các nội dung cơ bản của môn học. Ngoài ra có một số vấn đề nâng cao dành cho những học sinh giỏi. Mỗi vấn đề được bắt đầu bằng việc nhắc lại một số kiến thức cần cho việc giải toán. Tiếp theo là giới thiệu phương pháp giải, hệ thống các bài tập và sau cùng là hướng dẫn giải hoặc đáp số các bài tập đó. Cuối sách chúng tôi có thêm phần phụ lục giới thiệu các đề thi vào các khối chuyên của trường đại học KHTN thuộc ĐHQG Hà Nội.

Tuy nhiên, nội dung và hình thức trình bày của tài liệu có thể chưa tốt. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp và sự cảm thông của các bậc phụ huynh, các bạn đồng nghiệp, các em học sinh để lần xuất bản tiếp theo chất lượng của tài liệu tốt hơn. Những góp ý có thể gửi theo địa chỉ: Khối chuyên Toán - Tin, Khoa Toán - Cơ - Tin học, ĐHKHTN - ĐHQG - Hà Nội, hoặc theo số điện thoại (04) 6408014.

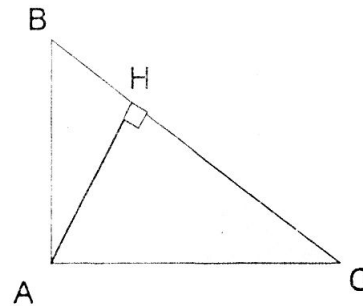
# Chương I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG - TỶ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

## Hệ thức lượng trong một tam giác vuông

### A. Các kiến thức cần nhớ

Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  và  $H$  là chân đường cao tam giác trên  $BC$ . Ta có một số kết quả cần nhớ sau đây.

- a)  $BH \cdot CH = AH^2$ ;
- b)  $BH \cdot BC = AB^2$ ;
- c)  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ;
- d)  $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ ;
- e)  $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$



H. 1

### B. Bài tập

1. Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , biết độ dài đường cao  $AH = 3a$  và độ dài trung tuyến  $AM = 5a$ . Tính độ dài các cạnh tam giác.
2. Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC = 4a, BC = 6a$ . Gọi  $H$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  $K$  là chân đường vuông góc hạ từ  $H$  xuống  $AB$ . Tính độ dài  $AH, KH$ .
3. Các đường chéo của một hình thoi bằng  $10cm, 6cm$ . Tính cạnh hình thoi và khoảng cách từ giao điểm các đường chéo hình thoi đến một cạnh của nó.
4. Hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $AB = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Trên cạnh  $CD$  ta lấy điểm  $N$  sao cho khoảng cách từ đó đến đường thẳng  $AM$  bằng độ dài đoạn thẳng  $DN$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AM, CN, MN$ .
5. Cho  $\triangle ABC$  vuông tại đỉnh  $B$  có  $AB = 3a, BC = 4a$ . Ta dựng  $\triangle ACD$  vuông cân tại  $D$  sao cho  $D$  khác phía với  $B$  đối với đường thẳng  $AC$ . Tính độ dài  $AD, BD$ .
6. Một hình chữ nhật  $ABCD$  có các cạnh  $AB = a, BC = a\sqrt{3}$ . Một đường thẳng đi qua  $B$  vuông góc với  $AC$  cắt  $AC$  tại  $H$  và  $AD$  tại  $K$ . Tính độ dài  $CH, AK, CK$ .

7. Cho hình thang  $ABCD(AB//CD)$  có  $AC \perp BD$  và  $AC = 3a, BD = 4a$ . Tính đường cao hình thang.

8. Bên trong hình vuông  $ABCD$  ta lấy điểm  $M$  sao cho  $MA = MB = AB$ . Tính độ dài cạnh hình vuông, biết rằng khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $AB$  bằng  $a$ .

9. Gọi  $H$  là giao điểm các đường chéo hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $AB = 1$ ,  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Đường trung trực của đoạn  $MH$  cắt đường trung trực của đoạn  $CH$  tại  $O$ . Tính độ dài  $OH$ .

10. Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh  $AB = a$ . Ta lấy điểm  $D$  sao cho  $DB \perp BA, DC \perp CA$ . Tính độ dài  $AD$ .

11. Chứng minh rằng nếu tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo vuông góc với nhau, thì  $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ .

12. Tứ giác  $ABCD$  có các góc tại đỉnh  $B, D$  vuông và  $AB = AD$ . Trên cạnh  $BC$  ta lấy điểm  $M$  và trên cạnh  $CD$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AM \perp BN$ . Gọi  $H$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AM, BN$  và  $K$  là giao điểm của  $AN, DM$ . Chứng minh rằng  $AH \cdot AM = AK \cdot AN$ .

13. Cho  $\angle xOy = 90^\circ$  và số  $a > 0$ . Ta xét hai điểm  $A, B$  lần lượt nằm trên  $Ox, Oy$  thoả mãn điều kiện  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = a$ . Chứng minh rằng khoảng cách từ  $O$  đến đường thẳng  $AB$  không phụ thuộc vào vị trí của các điểm  $A, B$ .

14. Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$ . Gọi  $H$  là chân đường cao tam giác trên  $AB$ ,  $D$  là giao điểm của tia phân giác  $\angle ACB$  với cạnh  $AB$ . Chứng minh rằng:

a)  $\frac{AH}{BH} = \frac{AC^2}{BC^2}$

b)  $\frac{AH}{BH} = \frac{AD^2}{BD^2}$ .

15. Cho tam giác  $ABC$ , biết rằng tồn tại trên cạnh  $BC$  một điểm  $H$  thoả mãn điều kiện  $AH \perp BC$  và  $BH \cdot BC = AB^2$ . Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .

16.  $Ax, By$  là hai tia cùng vuông góc với đường thẳng  $AB$  và nằm cùng một phía với đường thẳng đó. Gọi  $O$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Trên các tia  $Ax, By$  ta lấy các điểm tương ứng  $C, D$  sao cho  $CD = AC + BD$ . Gọi  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $O$  xuống đường thẳng  $CD$ . Chứng minh rằng  $OH = \frac{AB}{2}$ .

17. Cho  $\Delta ABC$ . Giả sử  $H$  là chân đường cao tam giác nằm trên cạnh  $BC$ .  $P, Q$  lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ  $H$  xuống  $AB, AC$  tương ứng. Chứng minh rằng  $\frac{1}{PH^2} + \frac{1}{QH^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HC^2}$ .

18. Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ . Chứng minh rằng:

a)  $\sqrt{2}BC \geq AB + AC$ .

b)  $\sqrt{\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}} \geq \frac{2}{BC}$ .

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1)  $(\sqrt{10}a, 3\sqrt{10}a, 10a)$ ,

2)  $AH = \sqrt{7}, HK = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ ,

3)  $4, \frac{15}{4}$ , 4)  $AM = a\frac{\sqrt{5}}{2}$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $AM, CD$ , khi đó  $AN$  là phân giác của  $\angle DAE$ . Dùng tính chất đường phân giác của tam giác ta có  $\frac{AE}{AD} = \frac{NE}{ND} = \sqrt{5}$  và  $NE + ND = 2a \Rightarrow NC = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{2}$ ,  
 $MN = \frac{a\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}}{2}$ .

5)  $AD = \frac{5a}{\sqrt{2}}$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AC$ ,  $H$  là chân đường cao tam giác kẻ từ  $B$ . Kéo dài  $BH$  về phía  $H$  một đoạn  $HK = ED$ , khi đó  $DK \perp BK$ . Sử dụng định lý Pitago ta có  $BD^2 = BK^2 + HE^2$  trong đó  $BK = \frac{49a}{10}, HE = \frac{7a}{10}$   
 $\Rightarrow BD = \frac{7a}{\sqrt{2}}$ .

6)  $CH = \frac{3a}{2}, AK = \frac{a}{\sqrt{3}}, CK = a\sqrt{\frac{3}{7}}$ ,

7)  $\frac{12}{5}$ ,

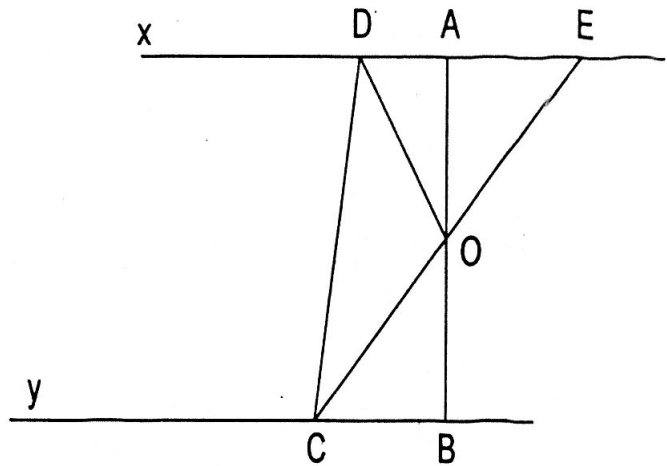
8)  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ ,



9) Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $MH, CH, E$  là giao của  $OI, BH$ . Ta có  $\triangle OEK$  vuông cân  $\Rightarrow EK = \frac{1}{2} \Rightarrow OK = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Trong  $\triangle OKH$  vuông ta có  $OH^2 = OK^2 + KH^2 \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{5}{8}}$ .

10)  $AD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ .

12. Trên đoạn  $AN$  ta lấy điểm  $K'$  thoả mãn điều kiện  $DK' \perp AN$  tại  $K'$ . Khi đó ta có  $AD^2 = AK'AN$ . Vì  $AB = AD \Rightarrow AK'AN = AH.AM$ . Vì vậy  $\triangle AK'M \sim \triangle AHN \Rightarrow \widehat{AK'M} = \widehat{AHN} = 90^\circ \Rightarrow 3$  điểm  $M, K', D$  thẳng hàng.



H. 2

14a). Ta có

$$BC^2 = AB.BH, AC^2 = AB.AH \Rightarrow \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BH}{AH}.$$

14b). Theo tính chất của đường phân giác ta có:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD^2}{AD^2}.$$

Sử dụng kết quả phần a ta suy ra điều cần chứng minh.

15). Từ  $BH.BC = AB^2 \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$ . Các  $\triangle ABH, \triangle CBA$  đồng dạng, do đó  $\angle BHA = \angle CAB$ .

16. Gọi  $E$  là giao điểm của  $By$  và  $OC$ . Hiển nhiên  $\triangle AOC = \triangle BOE \Rightarrow AC = BE \Rightarrow CD = ED$ . Vì  $\triangle CED$  cân tại đỉnh  $D$ , nên  $OH = OB = \frac{AB}{2}$ .

## Các tỷ số lượng giác của một góc nhọn

### A. Các kiến thức cần nhớ

Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$  có  $\angle BAC = \alpha$ .

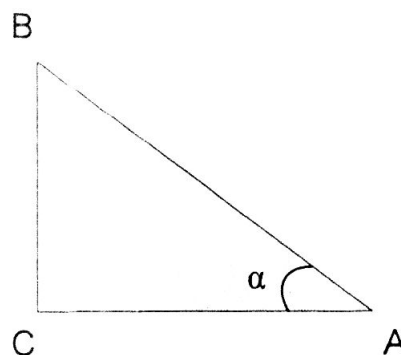
1)  $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}, \cos \alpha = \frac{AC}{AB},$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC}, \cot \alpha = \frac{AC}{BC}$$

$$2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$3) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$



### B. Bài tập

H. 3

1) Cho  $\alpha = 30^\circ$ . Tính giá trị các biểu thức  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ .

2) Cho  $\alpha = 45^\circ$ . Tính giá trị các biểu thức  $\sin \alpha + \cos \alpha, \tan \alpha + \cot \alpha$ .

3) Cho  $\alpha = 60^\circ$ . Tính giá trị các biểu thức  $2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha, \tan \alpha - 3 \cot \alpha$ .

4) Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$  có  $CA = 3a, CB = 4a$ . Chứng minh rằng  $\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$  và  $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

5) Cho  $\triangle ABC$  có  $\angle B = 30^\circ, \angle C = 45^\circ, BC = a$ . Tính độ dài đường cao tam giác kẻ từ  $A$  và các cạnh còn lại.

6) Cho  $\triangle ABC$  có  $\angle B = 60^\circ, \angle C = 45^\circ, AB + BC + CA = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$ . Tính độ dài các cạnh tam giác.

7) Cho  $\triangle ABC$  có  $\angle B = 60^\circ, \angle C = 45^\circ, BK = \sqrt{2}$ , ( $BK$  là đường cao tam giác). Tính độ dài các cạnh tam giác.

8) Một hình thoi có góc nhọn bằng  $30^\circ$  và độ dài một đường chéo bằng  $2a$ . Tính độ dài cạnh hình thoi.

9) Cho hình thang  $ABCD$  có  $\angle A = \angle D = 90^\circ, \angle C = 60^\circ, AD = a, \frac{CD}{AB} = 3$ .

Tính độ dài các cạnh còn lại của hình thang.

10) Cho hình thang cân  $ABCD (AB \parallel CD)$  có  $AB = a, CD = 3a, \angle C = 30^\circ$ . Tính độ dài các cạnh bên hình thang.

11) Cho  $\angle xOy = 90^\circ$ . Từ  $O$  ta dựng các tia  $Oz, Ot$  chia góc vuông thành 3 phần bằng nhau. ( $Oz$  nằm giữa hai tia  $Ox, Ot$ ). Trên  $Ox$  ta lấy điểm  $A$  thoả mãn điều kiện  $OA = 2\sqrt{3}$ . Gọi  $B$  là chân đường vuông góc hạ

từ  $A$  xuống  $Oz$ ,  $C$  là chân đường vuông góc hạ từ  $B$  xuống  $Ot$  và  $D$  là chân đường vuông góc hạ từ  $C$  xuống  $Oy$ . Tính độ dài  $OD, AD$ .

12) Bên trong  $\angle xOy = 120^\circ$  ta lấy điểm  $M$  sao cho  $OM \perp Oy$ ,  $OM = a$ . Trên tia  $Ox$  ta lấy điểm  $N$  sao cho  $MN \perp Ox$ , trên đường thẳng  $Oy$  lấy điểm  $H$  sao cho  $NH \perp Oy$ . Tính độ dài  $MH$ .

13) Dựng góc  $\alpha$  trong các trường hợp sau đây:

a)  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ .

b)  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ .

c)  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ .

d)  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

e)  $\cot \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

14) Tính số đo  $\angle A$  của tam giác  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$  trong các trường hợp sau đây:

a)  $\sin A = \cos A$ .

b)  $\tan A = \cot A$ .

c)  $\sin A = \sqrt{3} \cos A$ .

d)  $3 \tan A = \cot A$ .

e)  $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$ .

f)  $\tan A + \cot A = 2$ .

15) Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$ . Tính giá trị của:

a)  $\sin A$ , biết  $\sin A = 2 \cos A$ .

b)  $\tan A$ , biết  $\tan A = \cos A$ .

c)  $\cos A$ , biết  $2 \cot A = \sin A$ .

16) Cho  $\angle xOy = 90^\circ$  và điểm  $M$  nằm trong góc đó thoả mãn điều kiện  $\angle MOx = 30^\circ, OM = a$ . Một đường thẳng đi qua  $M$  cắt  $Ox, Oy$  tương ứng

tại  $A, B$ . Chứng minh rằng  $\frac{\sqrt{3}}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2}{a}$ .

17) Cho góc nhọn  $\angle xOy$ . Trên hai cạnh góc ta lấy các điểm  $A, B$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $OB$  và  $K$  là hình chiếu của  $B$  trên  $OA$ . Chứng minh rằng nếu  $\frac{OK}{OA} \cdot \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2}$ , thì  $\angle xOy = 45^\circ$ .

18) Cho góc nhọn  $\angle xOy$ . Trên hai cạnh góc ta lấy các điểm  $A, B$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $OB$  và  $K$  là hình chiếu của  $B$  trên  $OA$ . Chứng minh rằng nếu  $\frac{OK}{OA} \cdot \frac{OH}{OB} = \frac{1}{4}$ , thì  $\angle xOy = 60^\circ$ .

19) Cho góc nhọn  $\angle xOy$ . Trên hai cạnh góc ta lấy các điểm  $A, B$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $OB$  và  $K$  là hình chiếu của  $B$  trên  $OA$ , biết rằng  $\frac{OK}{OA} \cdot \frac{OH}{OB} = \frac{3}{4}$ . Tìm số đo  $\angle xOy$ .

20) Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$  có  $CA = 3, CB = 1$ . Trên cạnh  $AC$  ta lấy điểm  $D$  sao cho  $AD = 1$ . Đặt  $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle BDC$

a) Tính giá trị của  $\tan \alpha, \tan \beta$ .

b) Dựng đoạn  $AE = 2$  và  $AE \perp AC$  ( $E, B$  cùng phía với  $AC$ ). Hãy sử dụng  $\triangle BDE$  để tính  $\tan(\alpha + \beta)$ .

### **C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

1) Dựng  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$  có:

$$\angle BAC = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BC \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Theo định lý Pitago:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 3BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{3}BC \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

2) Dựng  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$  có:

$$\angle BAC = 45^\circ \Rightarrow AC = BC, AB = \sqrt{2}AC \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2};$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 2$$

3)  $\sqrt{3} + 2; 0$ .

4) Kẻ phân giác  $AM$  của  $\angle BAC$ . Theo tính chất của đường phân giác trong tam giác, ta có

$$\frac{MC}{BC} = \frac{AC}{AB + AC} = \frac{3}{8} \Rightarrow MC = \frac{3a}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{MC}{AC} = \frac{1}{8},$$

$$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

5) Gọi  $H$  là chân đường cao kẻ từ đỉnh  $A$ . Vì hai góc kề với cạnh  $BC$  nhọn, nên  $H$  nằm trên cạnh  $BC$ , nghĩa là  $BC = BH + HC$ . Xét các tam giác vuông  $\triangle ABH$ ,  $\triangle ACH \Rightarrow BH = AH \cdot \tan 30^\circ$ ,

$$CH = AH \Rightarrow BC = a = AH(1 + \sqrt{3}) \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{3} + 1};$$

$$AC = AH\sqrt{2}, AB = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = 2AH.$$

6) Hạ  $AH \perp BC$ . Vì các góc kề với  $BC$  nhọn, nên  $H$  nằm trên cạnh  $BC \Rightarrow BC = BH + HC$ . Ta xét các tam giác vuông  $\triangle ABH, \triangle ACH$ . Ta có:

$$BH = AH \cdot \cot 60^\circ = \frac{AH}{\sqrt{3}}, CH = AH \Rightarrow BC = AH\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right), AC = AH \cdot \sqrt{2},$$

$$AB = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = \frac{2AH}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB + BC + CA = AH(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$$

$$\Rightarrow AH = 1 \Rightarrow AC = \sqrt{2},$$

$$AB = \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

$$7) BC = 2, AB = 2(\sqrt{3} - 1), AC = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}.$$

8)  $\frac{a}{\cos 15^\circ}$ , nếu đường chéo đó xuất phát từ đỉnh của góc  $30^\circ$ ;  $\frac{a}{\sin 15^\circ}$ , nếu đường chéo xuất phát từ đỉnh góc khác  $30^\circ$ .

$$9) AB = BC = \frac{a}{2\sqrt{3}}, CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$10) AD = BC = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

$$11) OD = \frac{9}{4}, AD = \frac{\sqrt{273}}{4}.$$

$$12) MH = \frac{a\sqrt{19}}{4}.$$

$$13a) \text{ Dựng tam giác vuông } \triangle ABC \text{ có } \angle ACB = 90^\circ, AC = 2, AB = 3.$$

13b) Dựng tam giác vuông  $\triangle ABC$  vuông tại đỉnh  $C$  có  $AC = 3, CB = 4$ .

13c) Dựng hình vuông  $CMBN$  có cạnh  $CM = 1$ . Dựng tia  $Cx \perp AB$  và trên  $Cx$  ta lấy điểm  $A$  sao cho  $CA = 1 \Rightarrow \angle BAC$  là góc phải dựng.

13d) Dựng hình vuông  $CMBN$  có cạnh  $CM = 1$ . Trên tia  $Cx \perp CB$  ta lấy điểm  $A$  thỏa mãn điều kiện  $AC = 1 \Rightarrow \angle ABC$  là góc cần dựng.

13e) Dựng tam giác đều  $\triangle AMN$ . Lấy trung điểm  $C$  của cạnh  $MN$ . Lấy điểm  $B$  đối xứng với điểm  $C$  qua  $M \Rightarrow \angle BAC$  là góc phải dựng.

$$14a) \text{ Ta có } \sin A = \frac{BC}{AB}, \cos A = \frac{AC}{AB} \Rightarrow BC = AC \Rightarrow \angle A = 45^\circ ;$$

$$14b) \tan A = \frac{BC}{AC}, \cot A = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC = AC \Rightarrow \angle A = 45^\circ ;$$

$$14c) \frac{BC}{BA} = \sqrt{3} \frac{AC}{AB} \Rightarrow BC = \sqrt{3}AC \Rightarrow BC^2 = 3AC^2 .$$

$$\Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2 = 4AC^2$$

$$AB = 2AC \Rightarrow \angle B = 30^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ .$$

$$14d) 3 \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow 3BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4BC^2$$

$$\Rightarrow AB = 2BC \Rightarrow \angle A = 30^\circ .$$

$$14e) \frac{AC + BC}{AB} = \sqrt{2} \Rightarrow AC + BC = \sqrt{2}AB .$$

Mặt khác ta có

$$(AC + BC)^2 \leq 2(AC^2 + BC^2) = 2AB^2$$

$$\Rightarrow AC + BC \leq AB\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi  $AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$  vuông cân

$$\Rightarrow \angle A = 45^\circ ;$$

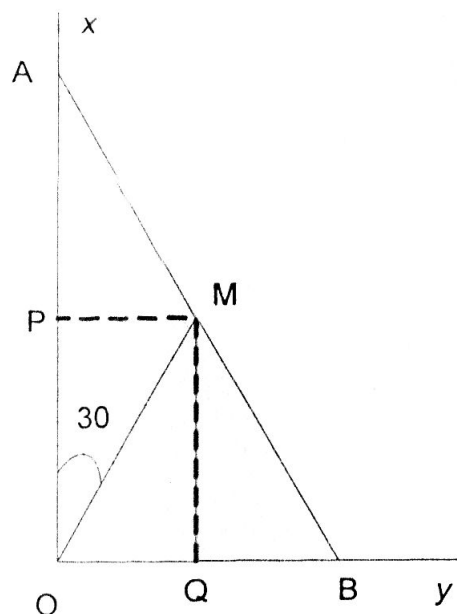
$$14f) \frac{BC}{AC} + \frac{AC}{BC} = 2$$

$$\Rightarrow (BC - AC)^2 = 0$$

$$\Rightarrow BC = AC \Rightarrow \angle A = 45^\circ$$

$$15a) \sin^2 A = 4(1 - \sin^2 A)$$

$$\Rightarrow 5\sin^2 A = 4 \Rightarrow \sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$$





$$15b) \tan A = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

$$15c) \cos A = \sqrt{2} - 1.$$

16) Kẻ:

$$MP \perp OA, MQ \perp OB \Rightarrow MP = \frac{a}{2}, MQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vì:

$$MP \parallel OB \Rightarrow \frac{MP}{OB} = \frac{MA}{AB},$$

$$MQ \parallel OA \Rightarrow \frac{MQ}{OA} = \frac{MB}{AB} \Rightarrow \frac{MP}{OB} + \frac{MQ}{OA} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2}{a}$$

17) Đặt

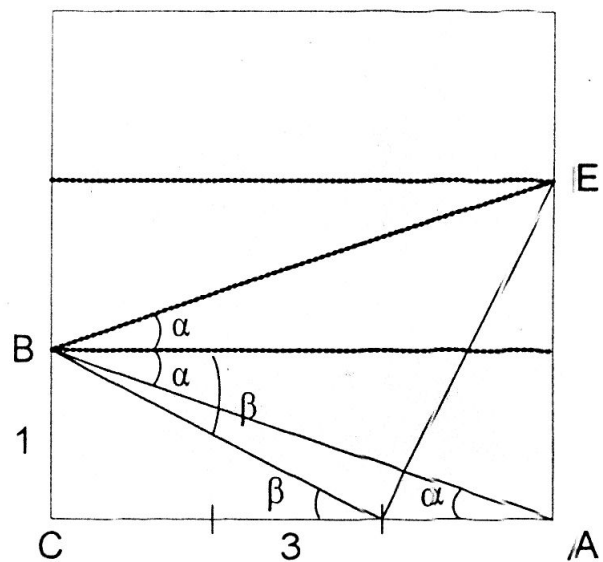
$$\angle xOy = \alpha \Rightarrow OH = OA \sin \alpha,$$

$$OK = OB \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{OK}{OA} \cdot \frac{OH}{OB} = \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$



H. 5

$$19) \angle xOy = 60^\circ.$$

$$20) \tan \alpha = \frac{1}{3}; \tan \beta = \frac{1}{2}. \text{ Gọi } F \text{ là trung điểm của } AE, \text{ khi đó:}$$

$$BF \parallel AC \Rightarrow \angle EBF = \alpha,$$

$$\angle DBF = \beta$$

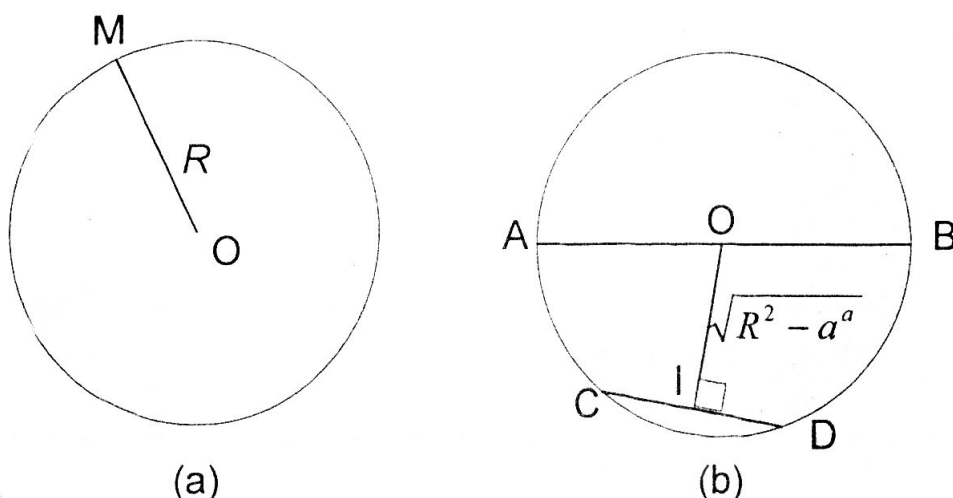
$$\Rightarrow \alpha + \beta = \angle DBE = 45^\circ$$

## Chương 2. ĐƯỜNG TRÒN - VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN - VỊ TRÍ HAI ĐƯỜNG TRÒN

### Đường tròn

#### A. Các kiến thức cần nhớ về đường tròn

1) Cho trước điểm  $O$  và số  $R > 0$ . Tập hợp điểm  $M$  thoả mãn điều kiện  $OM = R$  được gọi là đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $R$  và được ký hiệu  $(O; R)$ . Điểm  $O$  là tâm của đường tròn, số  $R$  là bán kính đường tròn. Mỗi đoạn thẳng nối điểm  $O$  với một điểm  $M$  thuộc đường tròn được gọi là đoạn bán kính.



H. 6

Cần phân biệt hai khái niệm đoạn bán kính và bán kính của đường tròn. Bán kính đường tròn là một số dương, còn đoạn bán kính là một hình. Nếu  $A$  là điểm thuộc đường tròn  $(O; R)$ , thì ta thường nói đường tròn đó đi qua  $A$ . Tâm  $O$  là tâm đối xứng của đường tròn.

2) Đoạn thẳng nối hai điểm thuộc đường tròn là dây cung của đường tròn. Đường trung trực của dây cung đi qua tâm đường tròn. Nếu một dây cung của đường tròn có độ dài  $2a$ , thì khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng chứa dây đó bằng  $\sqrt{R^2 - a^2}$ .

3) Dây cung chứa tâm đường tròn được gọi là đường kính của đường tròn. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn là trục đối xứng của đường tròn. Nếu  $AB$  là một đường kính của đường tròn và  $M$  là điểm bất kỳ thuộc

đường tròn, thì  $\angle AMB = 90^\circ$ . Ngược lại nếu điểm  $M$  thoả mãn điều kiện  $\angle AMB = 90^\circ$ , thì  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ .

4) Tồn tại duy nhất một đường tròn đi qua 3 điểm cho trước không thẳng hàng. Tâm đường tròn là giao điểm các đường trung trực của hai đoạn thẳng nối các điểm đó.

### **B. Bài toán**

Cho một tập hợp điểm thoả mãn một điều kiện  $X$ . Chứng minh rằng tập hợp đó nằm trên cùng một đường tròn.

#### **Phương pháp 1**

- a) Hãy chọn ra từ tập hợp điểm đã cho 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.
- b) Tìm tâm  $O$  đường tròn đi qua  $\{A, B, C\}$ .
- c) Chứng minh rằng các điểm còn lại của tập hợp cũng nằm trên đường tròn đó.

### **C. Bài tập**

1) Cho hình vuông  $ABCD$ . Về phía ngoài hình vuông ta dựng các tam giác đều  $ABM, BCN, CDP, DAQ$ .

- a) Chứng minh rằng các điểm  $M, N, P, Q$  nằm trên cùng một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng trọng tâm của 4 tam giác đều nằm trên cùng một đường tròn
- c) Chứng minh rằng 8 trung điểm của 8 đoạn thẳng  $MA, MB, NB, NC, PC, PD, QD, QA$  nằm trên cùng một đường tròn.

2) Cho hình thoi  $ABCD$ .

- a) Chứng minh rằng các trung điểm của 4 cạnh hình thoi nằm trên cùng một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng chân các đường vuông góc hạ từ giao điểm các đường chéo xuống các cạnh của nó nằm trên cùng một đường tròn.

3) Cho tam giác đều  $ABC$ . Về phía ngoài tam giác ta dựng các hình vuông  $ABMN, BCKH, ACPQ$ . Chứng minh rằng tập hợp các điểm  $M, N, K, H, P, Q$  nằm trên cùng một đường tròn.

4) Giả sử  $BC$  là cạnh dài nhất của  $\triangle ABC$ . Trên cạnh  $BC$  ta lấy các điểm  $M, N$  thoả mãn điều kiện  $BM = BA, CN = CA$ . Trên các cạnh  $AB, AC$  ta lấy các điểm tương ứng  $Q, P$  thoả mãn điều kiện

$CP = CM, BQ = BN$ . Chứng minh rằng tập hợp các điểm  $A, P, M, N, Q$  nằm trên cùng một đường tròn.

5) Cho hai  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  bằng nhau và cùng nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Chứng minh rằng chân các đường vuông góc hạ từ  $O$  xuống các đường thẳng chứa các cạnh của hai tam giác nằm trên cùng một đường tròn.

6) Cho hình thang cân  $ABCD$ . Chứng minh rằng các đỉnh hình thang nằm trên cùng một đường tròn.

7) Cho hai hình vuông  $ABCD; A'B'C'D'$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Chứng minh rằng chân các đường vuông góc hạ từ  $O$  xuống các cạnh của hai hình vuông nằm trên cùng một đường tròn.

8) Cho hình thoi  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AB, BC$  ta lấy các điểm tương ứng  $M, N$  sao cho  $MN \parallel AC$ . Gọi  $P$  là hình chiếu của  $N$  trên đường thẳng  $CD$  và  $Q$  là hình chiếu của  $M$  trên đường thẳng  $AD$ . Chứng minh rằng 4 điểm  $M, N, P, Q$  nằm trên cùng một đường tròn.

#### **D. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

1a) Gọi  $O$  là giao điểm các đường chéo hình vuông, ta thấy  $\angle OBM = \angle OBN = 45^\circ + 60^\circ \Rightarrow \triangle OBM = \triangle OBN (c.g.c)$ . Do đó  $OM = ON$ .

1b) Theo chứng minh ở phần trên ta thấy rằng  $OM$  đi qua trọng tâm  $I$  của  $\triangle ABM$ . Tương tự  $ON$  đi qua trọng tâm  $K$  của  $\triangle BCN$ . Rõ ràng  $BI = BK, \angle OBI = \angle OBK = 45^\circ + 30^\circ \Rightarrow \triangle OBI = \triangle OBK (c.g.c)$ .

1c) Gọi  $A_1, A_2, B_1, B_2$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $MA, MB, NB, NC$ . Ta thấy  $\triangle OAA_1 = \triangle OBB_1 (c.g.c)$  và  $\triangle OBB_1 = \triangle OBB_2 (c.g.c)$ , do đó  $OA_1 = OB_1 = OB_2$ .

2a) Trung điểm 4 cạnh hình thoi là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Giao điểm các đường chéo của hình chữ nhật là tâm đường tròn đi qua 4 đỉnh của nó.

2b) Ký hiệu  $2a, 2b$  là độ dài các đường chéo của hình thoi. Khoảng cách từ chân đường vuông góc  $H$  hạ từ điểm  $O$  (là giao điểm hai đường chéo hình thoi) đến  $O$  bằng  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ .

3) Gọi  $O$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ , khi đó  $OC$  là đường trung trực của cạnh  $AB$ . Vì  $ABMN$  là hình vuông, nên  $OC$  cũng là đường trung trực của  $MN \Rightarrow OM = ON$ .

Ta thấy  $\angle OAN = \angle OAQ = 30^\circ + 90^\circ \Rightarrow \triangle OAN = \triangle OAQ \Rightarrow ON = OQ$ .

4) Gọi  $O$  là giao điểm các đường trung trực của các đoạn thẳng  $QN, PM$ . Vì các  $\triangle BNQ, \triangle BAM$  cân tại cùng đỉnh  $B$ , do đó  $OB$  là đường trung trực của  $AM$ . Do đó  $OQ = ON, OA = OM$ . Tương tự ta có  $OP = OM, OA = ON$ . Từ các kết quả trên ta suy ra  $O$  cách đều các điểm  $\{A, P, M, N, Q\}$

6) Giả sử  $AB$  và  $CD$  là hai đáy hình thang. Gọi  $d$  là đường trung trực của  $AB$  và  $CD$  ( $d$  tồn tại). Dựng đường trung trực của cạnh  $AD$ . Đường trung trực đó cắt  $d$  tại  $O$  là tâm đường tròn.

8) Các điểm  $\{M, N, P, Q\}$  là đỉnh của một hình thang cân hoặc một hình chữ nhật.

### **Phương pháp 2**

a) Hãy chỉ ra một đoạn thẳng  $MN$  và một điểm  $A$  thuộc tập hợp điểm đã cho có tính chất  $\angle MAN = 90^\circ$ .

b) Hãy chứng tỏ rằng mọi điểm  $B$  của tập hợp cũng thoả mãn  $\angle MBN = 90^\circ$ .

### **E. Bài tập**

1) Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $M, N$  là chân các đường cao hạ từ  $B, C$  xuống các đường thẳng  $AB, AC$ .

a) Chứng minh rằng 4 điểm  $B, C, M, N$  nằm trên cùng một đường tròn.

b) Dựng hình vuông  $BCPQ$  nằm khác phía với đỉnh  $A$  đối với đường thẳng  $BC$ . Gọi  $H$  là giao điểm các đường chéo hình vuông. Chứng minh rằng tập hợp điểm  $M, N, B, H, C$  nằm trên cùng một đường tròn.

2) Cho hình vuông  $ABCD$  có 4 đỉnh nằm trên đường tròn tâm  $O$ . Trên cung nhỏ  $AB$  ta lấy điểm  $M$ . Dây cung  $MC$  cắt đoạn thẳng  $BD$  tại điểm  $N$ . Chứng minh rằng tập hợp điểm  $A, M, N, O$  cùng nằm trên một đường tròn.

3) Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  ta lấy lần lượt các điểm  $M, N, P, Q$  sao cho  $MN \parallel PQ \parallel AC$  và  $\angle AMQ = 30^\circ$ . Gọi  $A'$  là điểm đối xứng của  $A$  qua đường thẳng  $MQ$ ,  $C'$  là điểm đối xứng của  $C$  qua đường thẳng  $NP$ ,  $F$  là giao điểm của đường thẳng  $QA'$  với đoạn thẳng  $NP$ ,  $E$  là giao điểm của đường thẳng  $PC'$  với đoạn thẳng  $MQ$ . Chứng minh rằng các điểm  $E, F, P, D, Q$  nằm trên cùng một đường tròn.

4) Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên đường chéo  $BD$  ta lấy điểm  $M$ . Gọi  $K, H$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên các đường thẳng  $BC, CD$ .  $P$  là

giao điểm của hai đường thẳng  $AK, BH$  và  $Q$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AH, DK$ . Chứng minh rằng tập hợp điểm  $K, H, Q, P$  nằm trên cùng một đường tròn.

5)  $AC, BD$  là hai đường kính vuông góc của đường tròn tâm  $O$ . Trên cung nhỏ  $AB$  ta lấy điểm  $M$ . Đường thẳng  $AM$  cắt đường thẳng  $BD$  tại điểm  $P$ . Đường thẳng vuông góc với  $BD$  tại  $P$  cắt đường thẳng  $DM$  tại  $Q$ . Chứng minh rằng tập hợp điểm  $M, B, P, Q$  cùng nằm trên một đường tròn.

6) Cho đường tròn tâm  $O$  và điểm  $M$  nằm trong đường tròn và không trùng với tâm  $O$ . Gọi  $AB, CD, EF$  là các dây cung của đường tròn cùng đi qua  $M$ . Các trung điểm của các dây cung đó là  $P, Q, K$ . Chứng minh rằng tập hợp điểm  $M, P, Q, K$  cùng nằm trên một đường tròn.

7) Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo vuông góc với nhau. Chứng minh rằng trung điểm của 4 cạnh tứ giác cùng nằm trên một đường tròn.

8) Gọi  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng chân 3 đường cao, trung điểm của các đoạn thẳng  $AH, BH, CH$  và trung điểm của 3 cạnh tam giác nằm trên cùng một đường tròn (đường tròn Ole).

9) Cho  $\triangle ABC$ . Ta dựng các hình vuông  $ABPQ$  và  $ACMN$  nằm phía ngoài tam giác. Gọi  $K, H$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $BC, NQ$ . Đường thẳng  $AH$  cắt  $BC$  tại  $E$ . Đường thẳng  $AK$  cắt  $NQ$  tại  $F$ . Chứng minh rằng 4 điểm  $E, K, H, F$  nằm trên cùng một đường tròn.

10) Cho hình vuông  $MNPQ$  và tam giác đều  $ABC$  có các đỉnh  $A$  nằm trên cạnh  $MN$ ,  $B$  nằm trên cạnh  $NP$  và  $C$  nằm trên cạnh  $MQ$ . Gọi  $H$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng  $A, N, B, H$  nằm trên cùng một đường tròn.

### **C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

1) Các  $\triangle MBC, \triangle NBC$  vuông tại  $M$  và  $N$ . Do đó  $M, N, B, C$  nằm trên đường tròn đường kính  $BC$ .

2) Các  $\triangle AMN, \triangle AON$  vuông tại  $O$  và  $M$ . Do đó  $\{A, O, M, N\}$  nằm trên đường tròn đường kính  $AN$ .

3) Ta chứng minh được  $MA' \parallel NP$ . Vì  $A'$  đối xứng với  $A$  qua đường thẳng  $MQ$ , nên  $\angle MA'Q = \angle MAQ \Rightarrow MA' \perp QA' \Rightarrow QA' \perp NP$  tại  $F$ . Tương tự  $PC' \perp MQ$  tại  $E$ . Các  $\triangle EPQ, \triangle FPQ, \triangle DPQ$  vuông có chung cạnh huyền  $PQ$ .

6) Các  $\triangle OMP, \triangle OMQ, \triangle OMK$  vuông tại các đỉnh  $P, Q, K$ .

7) Gọi  $A', B', C'$  là chân 3 đường cao  $M, N, E$  là trung điểm của  $BC, CA, AB, I, J$  là trung điểm của  $AH, BH$ . Ta có:

$$MN \parallel AB, IN \parallel CC', ME \parallel AC, EI \parallel BB', IJ \parallel AB, MJ \parallel CC' \\ \Rightarrow IN \perp IM, IE \perp ME, MJ \perp IJ \Rightarrow \{M, N, I, E, A', J\}.$$

nằm trên cùng một đường tròn đường kính  $MI$ . Các điểm còn lại được lập luận tương tự.

9) Gọi  $G$  là điểm đối xứng với  $A$  qua

$$K \Rightarrow CG = AB = AQ \Rightarrow \Delta AQN = \Delta ACG \Rightarrow \angle CAG = \angle ANQ.$$

Vì:

$$\angle CAN = 90^\circ \Rightarrow \angle CAG + \angle NAF = 90^\circ \\ \Rightarrow \angle NAF + \angle ANF = 90^\circ \Rightarrow KF \perp HF$$

Tương tự ta có  $HE \perp KE$ .

## Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác, tứ giác

Tam giác (tứ giác) có tất cả các đỉnh nằm trên cùng một đường tròn được gọi là tam giác (tứ giác) nội tiếp đường tròn hoặc đường tròn ngoại tiếp tam giác (tứ giác).

### A. Phương pháp

- Dựng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (tứ giác).
- Chọn ra một tam giác mà một cạnh có độ dài bằng bán kính đường tròn.
- Sử dụng tam giác đồng dạng hoặc định lý Pitago hoặc các tỷ số lượng giác của góc nhọn trong một tam giác vuông để tính cạnh đó.

### B. Bài tập

- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam giác đều có cạnh bằng  $a$ .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam giác cân mà cạnh đáy bằng  $6a$  và một cạnh bên bằng  $5a$ .
- Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $AB = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $AB$  và  $H$  là giao điểm hai đường chéo hình vuông. Tính bán kính đường tròn đi qua  $M, H, C$ .
- Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3a, AC = 4a$ . Phân giác của  $\angle BAC$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$ . Gọi  $P, Q$  là chân đường vuông góc hạ từ  $D$



xuống các đường thẳng  $AB, AC$ . Tính bán kính đường tròn đi qua  $\{A, P, D, Q\}$ .

5) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp hình thang cân, biết hai đáy hình thang bằng  $a, 3a$  và đường cao hình thang bằng  $2a$ .

6) Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có các cạnh  $AB = 3a, AD = 4a$ . Đường thẳng đi qua  $A$  vuông góc với  $BD$  cắt  $BD$  tại  $H$  và  $BC$  tại  $K$ . Tính bán kính đường tròn đi qua 4 điểm  $\{C, D, H, K\}$ .

7) Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có các cạnh  $AB = 3a, AC = 4a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $\triangle ABM, \triangle ACM$ .

8) Một hình thang cân  $ABCD$  có hai đáy  $AB = a, CD = 3a, \angle BCD = 45^\circ$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác đã cho.

9) Cho đường thẳng  $d$  và hai điểm  $A, B$ . Tính bán kính đường tròn đi qua  $A, B$  có tâm trên  $d$  trong các trường hợp sau đây:

a)  $AB = 2a, AB \parallel d$  và khoảng cách từ đường thẳng  $AB$  đến đường thẳng  $d$  bằng  $h$ .

b)  $AB = 2a, \angle(AB, d) = 45^\circ$  và khoảng cách từ giao điểm của  $AB$  với  $d$  đến  $A$  bằng  $b$  trong đó  $A$  nằm trên đoạn thẳng nối  $B$  với giao điểm đó.

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1)  $\frac{a}{\sqrt{3}}$ .

2) Gọi  $H$  là trung điểm cạnh  $BC \Rightarrow AH$  là đường trung trực của cạnh  $BC$ . Dựng đường trung trực của cạnh  $AB$ . Giao điểm  $O$  của nó với  $AH$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $AB$ . Hai tam giác  $\triangle ABH, \triangle AOK$  đồng dạng, nên ta có  $\frac{AO}{AB} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow AO = \frac{AB^2}{2AH} = \frac{25a}{8}$ .

3) Gọi  $E, F$  tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng  $MH, HC$ .  $O$  là giao điểm các đường trung trực của hai đoạn thẳng  $MH, HC \Rightarrow O$  là tâm đường tròn đi qua 3 điểm  $\{M, H, C\}$ . Bán kính cần tính là độ dài đoạn  $OH$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $OE, BH$ . Trong  $\triangle OHE$  vuông tại  $E$  ta có  $OH^2 = OE^2 + EH^2$ ,  $HE = \frac{MH}{2} = \frac{a}{4}, KE = \frac{a}{4}$ .  $\triangle OKF$  vuông cân tại

$$K \Rightarrow OK = KF = \frac{a}{2} \Rightarrow OH = \sqrt{OE^2 + EH^2} = a\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

4) Đường thẳng  $AD$  chia  $\triangle ABC$  thành hai  $\triangle ABD, \triangle ACD$  có diện tích tương ứng bằng  $\frac{18a^2}{7}, \frac{24a^2}{7} \Rightarrow DP = DQ = \frac{12a}{7} \Rightarrow AD = \frac{12a\sqrt{2}}{7}, R = \frac{AD}{2}$ .

$$5) R = a\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

6)  $DK$  là đường kính của đường tròn. Để tính  $DK$  ta tiến hành tính  $AH, AK$ . Từ  $\triangle ABK \Rightarrow AB^2 = AH \cdot AK$ . Từ  $\triangle ABD$  ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{12}{5},$$

$$AK = \frac{15a}{4} \Rightarrow DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} \Rightarrow R = \frac{1}{2}DK = \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

7) Gọi  $N$  là trung điểm của  $AB$ . Đường vuông góc tại  $A$  với  $AM$  cắt  $MN$  tại  $K \Rightarrow KM$  là đường kính của đường tròn đi qua  $\{A, B, M\}$ . Ta có

$$NK \cdot NM = \frac{AN^2}{2} \Rightarrow NK = \frac{9a}{8} \Rightarrow MK = \frac{25a}{16} \Rightarrow R = \frac{25a}{32}. \text{ Tương tự ta có}$$

$$R' = \frac{25a}{12}$$

8) Xem lại cách giải bài tập 5.

$$9) \sqrt{h^2 + a^2}, \sqrt{(a+b)^2 + a^2}.$$

## Tập hợp điểm là một đường tròn hoặc một cung tròn

### Bài toán

Cho điểm  $M$  thoả mãn điều kiện  $X$ . Tìm tập hợp  $M$ .

### A. Phương pháp

a) Từ  $X$  ta chỉ ra một điểm  $O$  cố định và số  $R > 0$  không đổi sao cho mọi điểm  $M$  thuộc tập hợp cách  $O$  một khoảng  $R$ .

b) Từ  $X$  ta chỉ ra một đoạn  $AB$  sao cho mọi điểm  $M$  thoả mãn điều kiện  $\angle AMB = 90^\circ$ .

c) Khi đó tập hợp  $M$  thuộc đường tròn xác định. Xét phạm vi biến đổi của điểm  $M$  từ  $X$  để tìm giới hạn. Cuối cùng phải chứng minh rằng với  $M$  bất kỳ thuộc phần đường tròn đã được giới hạn, điểm  $M$  thoả mãn điều kiện  $X$ .

### B. Bài tập

1) Cho đường tròn  $(O; 5a)$ . Tìm tập hợp trung điểm các dây cung  $AB = 8a$  của đường tròn đã cho.

2) Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $M$  cố định trong đường tròn. Xét dây cung  $AB$  bất kỳ đi qua  $M$ . Tìm tập hợp trung điểm của dây cung  $AB$ , khi nó quay quanh điểm  $M$ .

3) Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $M$  cố định ngoài đường tròn. Xét dây cung  $AB$  bất kỳ đi qua  $M$ . Tìm tập hợp trung điểm của dây cung  $AB$ , khi nó quay quanh điểm  $M$ .

4) Cho  $\angle xOy = 90^\circ$  và điểm  $A$  cố định trên tia  $Ox$ . Ta xét tia  $Oz$  nằm trong góc đã cho. Gọi  $B$  là hình chiếu của  $A$  trên  $Oz$ . Tìm tập hợp  $B$ , khi  $Oz$  quay quanh  $O$  từ vị trí  $Ox$  đến trùng với  $Oy$ .

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Gọi  $M$  là trung điểm của dây  $AB \Rightarrow OM = 3a$ . Chứng tỏ  $M$  thuộc đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $R = 3a$ . Cả đường tròn là tập  $M$  cần tìm. Thật vậy với điểm  $M$  bất kỳ thuộc đường tròn  $(O, 3a)$ . Ta dựng đường thẳng  $d \perp OM$  tại  $M$  và trên đó chọn các điểm  $A, B$  phân biệt thoả mãn điều kiện  $MA = MB = 4a \Rightarrow OA = OB = 5a$ . Chứng tỏ  $A, B$  thuộc đường tròn  $(O, 5a)$ . Vậy thì luôn tìm được dây  $AB$  của đường tròn nhận  $M$  là trung điểm.

2) Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ , ta có  $OI \perp AB$ . Vì đoạn thẳng  $OM$  cố định và  $\angle OIM = 90^\circ$ , nên  $I$  thuộc đường tròn đường kính  $OM$ . Cả đường tròn là tập cần tìm. Thật vậy lấy  $I \neq M$  bất kỳ trên đường tròn đó và nối  $I$  với  $M$ . Chọn các điểm  $A, B$  trên đường thẳng  $IM$  thoả mãn điều kiện  $IA = IB = \sqrt{R^2 - OI^2}$ , khi đó  $OA = OB = R$ . Đoạn thẳng  $AB$  là dây cung thoả mãn điều kiện bài toán.

3) Xem cách giải bài 3.

4) Tập hợp các điểm  $B$  là nửa đường tròn đường kính  $OA$  nằm trong  $\angle xOy$ . Lấy điểm  $B$  bất kỳ trên nửa đường tròn đó, khi đó tia  $OB$  nằm trong  $\angle(xOy)$ , vì  $\angle(xOB) < 90^\circ = \angle(xOy)$ . Nếu lấy  $B$  là  $O$ , thì  $OB$  chính là  $Oy$ . Đương nhiên  $AB \perp OB$ .

### Cực trị về độ dài của một đoạn thẳng mà một trong hai đầu mút của nó thuộc đường tròn

#### Bài toán

Cho đường tròn  $(O)$ . Xét đoạn thẳng  $AB$  có một đầu mút thuộc đường tròn đó và thoả mãn điều kiện  $X$ . Tìm độ dài nhỏ nhất hoặc lớn nhất của đoạn  $AB$ .

## A. Phương pháp

a) Từ điều kiện  $X$  hãy chỉ ra một hằng số  $k > 0$  sao cho  $AB$  có độ dài không lớn hơn  $k$  hoặc không nhỏ hơn  $k$ . Muốn chỉ ra số  $k$  như vậy ta có thể sử dụng một trong các kết quả sau

Nếu  $A, B, C$  là 3 điểm bất kỳ, thì  $AB + BC \geq AC$ . Dấu bằng khi và chỉ khi  $A, B, C$  thẳng hàng và  $B$  nằm giữa  $A, C$ .

Nếu  $AB \perp BC$ , thì  $AC \geq AB$ . Dấu bằng xảy ra khi  $B, C$  trùng nhau.

b) Chỉ ra dấu bằng trong bất đẳng thức. Khi đó  $k$  là giá trị cực trị của độ dài đoạn  $AB$ .

## B. Bài tập

1) Cho đường tròn  $(O, R)$  và điểm  $M \neq O$  cố định nằm trong đường tròn. Với mỗi điểm  $N$  thuộc đường tròn  $O$  ta xác định một độ dài  $MN$ . Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của đoạn thẳng  $MN$ .

2) Cho đường tròn  $(O, R)$  và điểm  $M$  cố định nằm ngoài đường tròn. Với mỗi điểm  $N$  thuộc đường tròn  $O$  ta xác định một độ dài  $MN$ . Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của đoạn thẳng  $MN$ .

3) Cho đường tròn  $(O, R)$  và dây cung  $AB = a < 2R$  cố định của đường tròn. Với mỗi điểm  $M$  thuộc đường tròn  $O$  ta kẻ  $MH \perp AB$ . Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của đoạn thẳng  $MH$ .

4) Cho  $\angle xOy = 90^\circ$  cố định và điểm  $A$  cố định nằm trong góc đó thoả mãn điều kiện  $OA = 1$ . Trên hai cạnh của góc đã cho ta lấy hai điểm  $B, C$  sao cho đường tròn  $(S)$  đi qua 4 điểm  $O, A, B, C$ . Tìm bán kính nhỏ nhất của  $(S)$ .

5) Cho  $\angle xOy$  và điểm  $A$  cố định nằm trong góc đó. Trên các cạnh của góc đã cho ta lấy các điểm  $B, C$  sao cho  $O, A, B, C$  nằm trên cùng một đường tròn. Tìm vị trí các điểm  $B, C$  để bán kính đường tròn bé nhất.

6) Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $AB = 2$ . Với mỗi điểm  $M$  trên cạnh  $CD$  ta xác định đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABM$ . Tìm vị trí của  $M$  để bán kính đường tròn đó nhỏ nhất.

## C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Gọi  $A, B$  là các giao điểm của  $(O, R)$  với đường thẳng  $OM$  và coi  $MA < MB$ . Với điểm  $N$  bất kỳ thuộc đường tròn đã cho ta có  $MN \geq ON - OM = OA - OM = MA \Rightarrow \min MN = MA$ , khi  $N$  trùng với  $A$ .

Ta lại có  $MN \leq OM + ON = OM + OB = MB \Rightarrow \max MN = MB$ , khi  $N$  trùng với  $B$ .

2) Xem lại cách giải bài tập 1).

3) Ký hiệu  $P$  là trung điểm của dây  $AB$  và  $Q$  là giao điểm của tia  $PO$  với đường tròn đã cho.

Ta có:

$$MH \leq MP \leq MO + OP = OQ + OP = PQ \\ \Rightarrow \max MH = PQ, \text{ khi } M \text{ trùng với } Q.$$

4) Rõ ràng độ dài đoạn thẳng  $BC$  bằng đường kính của đường tròn, còn  $OA = 1$  là một dây cung của đường tròn đó. Ta có  $1 = OA \leq BC \Rightarrow R = \frac{1}{2}$  khi  $OB = OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

5) Ta thấy rằng  $OA$  có thể là dây cung hoặc là đường kính của đường tròn. Vì vậy bán kính  $R$  của đường tròn bất kỳ đi qua  $O, A$  không nhỏ hơn  $\frac{OA}{2}$ . Bán kính nhỏ nhất khi  $OA$  là đường kính của đường tròn, do đó  $AB \perp Ox, AC \perp Oy$ .

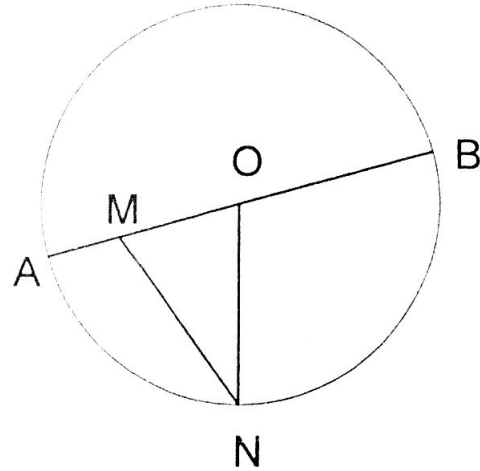
6) Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, CD$ . Vì  $IJ$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ , nên tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABM$  nằm trên đường thẳng  $IJ$ . Rõ ràng các góc  $A, B$  của  $\triangle MAB$  nhọn. Vì:

$$MI \geq IJ = AB$$

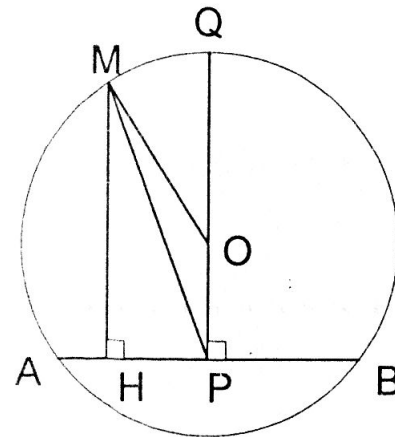
$$\Rightarrow MI > \frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow \angle AMB < 90^\circ$$

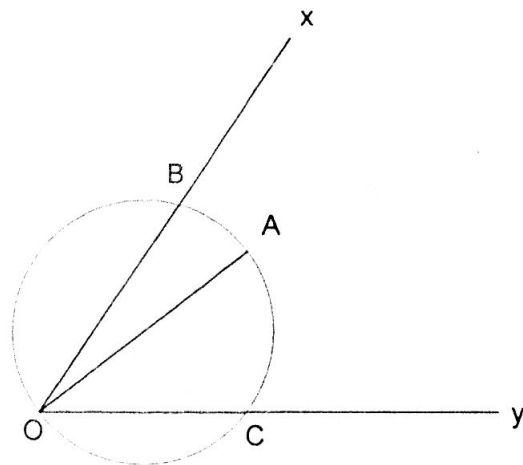
Ta biết rằng tam giác có 3 góc nhọn, thì tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp nó nằm trong tam giác đó. Vì vậy  $O$  nằm trên đoạn thẳng  $IJ$ . Ta thấy rằng bán kính đường tròn bằng  $OA$ , nên



H. 7



H. 8



H. 9

$OA$  nhỏ nhất khi  $OI$  nhỏ nhất. Trong  $\triangle OAI$  vuông tại  $I$  ta có  $OA^2 = OI^2 + 1$ , trong  $\triangle OMJ$  vuông tại  $J$  ta có  $OM^2 = (2 - OI)^2 + MJ^2$   
 $\Rightarrow OI^2 + 1 = (2 - OI)^2 + MJ^2 \Rightarrow 4.OI = 3 + MJ^2 \geq 3 \Rightarrow OI \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \min OI = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  
 khi  $M$  trùng với  $J$ .

## Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

### A. Các kiến thức cần nhớ

Cho đường tròn  $(O, R)$  và đường thẳng  $d$ . Ký hiệu  $h$  là khoảng cách từ tâm  $O$  đến  $d$ . Ta có các kết quả sau đây:

- $h > R$ , khi đó đường thẳng và đường tròn không có điểm chung.
- $h = R$ , khi đó đường thẳng và đường tròn có một điểm chung duy nhất. Trường hợp này ta nói  $d$  tiếp xúc với đường tròn hoặc đường tròn tiếp xúc với  $d$  hoặc  $d$  là tiếp tuyến của đường tròn. Điểm chung duy nhất được gọi là tiếp điểm. Đoạn thẳng nối tâm đường tròn và tiếp điểm vuông góc với  $d$ .
- $h < R$ , khi đó đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung phân biệt.

### B. Bài tập

1) Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 3, BC = 4$ . Xét vị trí tương đối của đường tròn và đường thẳng trong các trường hợp sau đây a)  $(A, 3)$  và  $CD$ ; b)  $(I, 2)$  và  $AD$ , trong đó  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .

2) Cho hình thang  $ABCD (AB \parallel CD)$  có  $AB = 1, CD = 3, AD \perp BC$ ,  $\angle ADC = 60^\circ$ . Xét vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn trong các trường hợp sau đây a)  $(I, \frac{1}{2})$  và  $CD$ , với  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ ;

b)  $(J, \frac{3}{2})$  và  $AB$ , với  $J$  là trung điểm của cạnh  $CD$ ; c) Đường tròn tâm  $A$  có bán kính  $AD$  và đường thẳng  $BC$ .

3) Cho đường thẳng  $d$  và hai điểm  $A, B$  nằm khác phía với  $d$ . Chứng minh rằng đường tròn  $(O, R)$  đi qua hai điểm đã cho luôn cắt  $d$ .

4) Cho  $\angle xOy$ . Trên tia phân giác của góc ta lấy điểm  $I \neq O$  và xét đường tròn tâm  $I$ .

a) Chứng minh rằng nếu đường tròn tâm  $I$  có điểm chung với đường thẳng  $Ox$ , thì nó cũng có điểm chung với đường thẳng  $Oy$ .

b) Giả sử đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với  $Ox$  tại  $A$ . Chứng minh rằng đường tròn đó tiếp xúc với  $Oy$  tại  $B$  và không có điểm chung với đường trung bình của  $\triangle OAB$  có phương song song với đường thẳng  $AB$ .

5) Cho hình thang cân  $ABCD (AB \parallel CD)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh đáy  $AB, CD$ . Gọi  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$  và xét đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $R = \frac{MN}{2}$ . Chứng minh rằng đường tròn đó tiếp xúc với hai đáy hình thang và nếu nó có điểm chung với cạnh  $AD$ , thì nó cũng có điểm chung với cạnh  $BC$ .

6) Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm các đường chéo của hình bình hành. Ta xét đường tròn tâm  $O$ .

a) Chứng minh rằng nếu đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc với đường thẳng  $AB$ , thì nó cũng tiếp xúc với đường thẳng  $CD$ .

b) Chứng minh rằng nếu đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc đồng thời với các đường thẳng  $AB, BC$ , thì  $O$  tiếp xúc với 4 cạnh của hình bình hành (nghĩa là các tiếp điểm của đường tròn  $O$  với các đường thẳng chứa các cạnh hình bình hành nằm trên chính các cạnh đó).

7) Cho đường thẳng  $d$  cố định. Ta xét tất cả các đường tròn  $(O, R)$  cắt  $d$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho độ dài  $AB$  là một số không đổi. Chứng minh rằng tập hợp tâm  $O$  là một trong hai đường thẳng  $d' \parallel d$  và cách  $d$  một khoảng không đổi.

8) Cho đường thẳng  $d$  cố định. Ta xét tất cả các đường tròn  $(O, R)$  tiếp xúc với  $d$ . Chứng minh rằng tập hợp tâm  $O$  là một trong hai đường thẳng  $d' \parallel d$  và cách  $d$  một khoảng không đổi.

9) Cho hai đường thẳng  $d_1, d_2$  cố định và chúng song song với nhau. Ta xét tất cả các đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc đồng thời với hai đường thẳng đã cho. Chứng minh rằng tập hợp tâm  $O$  là một đường thẳng  $d' \parallel d$  và cách đều hai đường thẳng đó.

10) Cho hai đường thẳng  $d_1, d_2$  cố định và chúng song song với nhau. Ta xét tất cả các đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc với đường thẳng  $d_1$  và cắt đường thẳng  $d_2$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho độ dài đoạn thẳng  $AB$  không đổi. Chứng minh rằng tập hợp tâm  $O$  là một đường thẳng  $d' \parallel d$ .

11) Cho hai đường thẳng  $d_1, d_2$  cố định cắt nhau. Ta xét tất cả các đường tròn tâm  $O$  cắt đồng thời hai đường thẳng đã cho thành hai dây cung có độ dài bằng nhau. Chứng minh rằng tập hợp tâm  $O$  là một trong hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng đó.



12) Cho đường tròn  $(O, R)$ . Một đường thẳng  $d$  thay đổi luôn cắt đường tròn đã cho tại hai điểm  $A, B$  sao cho độ dài  $AB$  không đổi. Chứng minh rằng  $d$  luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định hoặc đi qua một điểm cố định.

13) Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  nằm trong nó. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua  $M$  cắt đường tròn.

14) Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  nằm trên đường tròn đó. Chứng minh rằng nếu đường thẳng  $d$  có điểm chung duy nhất  $M$  với đường tròn, thì  $d$  là tiếp tuyến của đường tròn.

15) Chứng minh rằng nếu  $M$  là một điểm nằm ngoài đường tròn  $(O, R)$ , thì có đúng hai đường thẳng đi qua  $M$  và tiếp xúc với đường tròn đó.

16) Chứng minh rằng nếu  $M$  là điểm nằm trong đường tròn  $(O, R)$ , thì không thể dựng được bất kỳ đường thẳng nào đi qua  $M$  và tiếp xúc với đường tròn đó.

### **C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

1a) Đường thẳng và đường tròn không có điểm chung. b) Đường thẳng và đường tròn không có điểm chung.

2a) Đường thẳng và đường tròn không có điểm chung. b) Đường thẳng cắt đường tròn. c) Đường thẳng cắt đường tròn.

3) Gọi  $M$  là giao điểm của  $AB$  và  $d$ ;  $h$  là khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng  $AB$ . Hiển nhiên  $h \leq OM < R$ .

4a) Vì tâm đường tròn nằm trên tia phân giác của góc, do đó tia phân giác của góc là trục đối xứng chung của đường tròn và hai cạnh góc. Nếu  $A$  là điểm chung của đường tròn và đường thẳng  $Ox$ ,  $A'$  đối xứng với  $A$  qua tia phân giác, thì  $A'$  vừa thuộc đường tròn vừa thuộc đường thẳng  $Oy$ .

4b) Khoảng cách từ tâm  $I$  đến hai cạnh của góc bằng nhau, nên đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với  $Ox$ , thì nó cũng tiếp xúc với  $Oy$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $OA, OB$ ,  $H, K$  lần lượt là giao điểm của  $OI$  với các đường thẳng  $PQ, AB$ . Ta có

$$OK = \frac{OA^2}{OI} \Rightarrow HK = \frac{OA^2}{2OI}, IK = \frac{R^2}{OI} \Rightarrow IH = IK + KH = \frac{OA^2 + 2R^2}{2OI}.$$

Ta xét bất đẳng thức

$$\begin{aligned} IH > R &\Leftrightarrow OA^2 + 2R^2 > 2ROI \Leftrightarrow OA^4 + 4OA^2R^2 + 4R^4 > 4R^2OI^2 \\ &\Leftrightarrow OA^4 + 4OA^2R^2 + 4R^4 > 4R^2(OA^2 + R^2). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này luôn đúng. Vì vậy  $IH > R$ .

5)  $MN$  vừa là trục đối xứng của đường tròn vừa là trục đối xứng của hai đường thẳng  $AD, BC$ .

6a) Vì  $O$  vừa là tâm đối xứng của đường tròn vừa là tâm đối xứng của hai đường thẳng  $AB, CD$ .

6b) Đường tròn  $(O)$  mà tiếp xúc đồng thời với các đường thẳng  $AB, BC$ , thì nó tiếp xúc với các đường thẳng  $CD, DA$ . Khi đó các đường chéo của hình bình hành là các phân giác của các góc hình bình hành. Vì vậy  $ABCD$  là một hình thoi. Tiếp điểm của đường tròn trên đường thẳng  $AB$  là chân đường cao của  $\triangle OAB$  vuông tại  $O$ . Vì thế nó phải nằm trên đoạn thẳng  $AB$ .

7) Ta đặt  $AB = 2a \Rightarrow h = \sqrt{R^2 - a^2}$  là một số không đổi, trong đó  $h$  là khoảng cách từ tâm  $O$  đến  $d$ . Có hai đường thẳng  $d' // d$  đối xứng với nhau qua  $d$ .

8) Lập luận như bài 7).

9) Chú ý rằng tâm đường tròn luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là tiếp tuyến của đường tròn. Bởi vậy tập hợp tâm  $O$  là một đường thẳng nằm trong dải mặt phẳng được giới hạn bởi hai đường thẳng đã cho.

10) Vì đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $d_1$  và cắt  $d_2$ , nên tâm  $O$  nằm trong nửa mặt phẳng chứa  $d_2$  có bờ là  $d_1$ . Ký hiệu  $h, a$  lần lượt là khoảng cách từ  $O$  đến  $d_2$  và  $d_1$  đến  $d_2$ . Nếu  $O$  nằm trong dải mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng đã cho, thì bán kính  $R = a - h$  là số không đổi. Tập hợp  $O$  là một đường thẳng  $d // d_1$  nằm trong dải mặt phẳng đó. Nếu  $O$  nằm ngoài dải mặt phẳng, thì tập hợp  $O$  là đường thẳng  $d // d_1$  nằm cùng phía với  $d_2$  đối với  $d_1$ .

12) Nếu  $AB$  là đường kính của đường tròn, thì  $d$  đi qua tâm đường tròn. Nếu  $AB$  bé hơn đường kính của đường tròn, thì  $d$  tiếp xúc với đường tròn tâm  $O, r$ , trong đó  $r = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}$ .

13) Khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng không lớn hơn khoảng cách từ đó đến  $M$ . Vì vậy khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bé hơn bán kính của đường tròn đó.

14) Kẻ  $OH \perp d$  và gọi  $M'$  đối xứng với  $M$  qua  $H$ , khi đó  $OM = OM' = R \Rightarrow M'$  thuộc đường tròn. Vì  $M$  là điểm duy nhất, nên  $M'$  trùng với  $M$  kéo theo các điểm  $M, H, M'$  trùng nhau.

15) Ta dựng đường thẳng đi qua  $M$  và tiếp xúc với đường tròn như sau:

a) Dựng đường kính  $PQ \perp OM$ .

b) Dựng đường thẳng  $MP$ .

c) Lấy điểm  $N$  trên đường thẳng  $OM$  sao cho  $PN \perp PM$ , khi đó  $N$  khác phía với  $M$  đối với tâm  $O$ .

d) Lấy điểm  $H$  trên tia  $OM$  thoả mãn điều kiện  $OH = ON$ .

e) Dựng đường thẳng  $\Delta \perp OM$  tại  $H$ . Gọi  $A$  là giao điểm của  $\Delta$  với đường tròn.

f) Dựng đường thẳng  $AM$ . Đó là tiếp tuyến cần dựng. Thật vậy ta có  $OM.ON = OM.OH = OP^2 = OA^2 \Rightarrow \triangle OMA$  vuông tại  $A$ . Từ

$OM.OH = R^2 \Rightarrow OH = \frac{R^2}{OM} < R \Rightarrow \Delta$  cắt đường tròn tại hai điểm  $A, B$  phân biệt. Vì vậy có hai tiếp tuyến đi qua  $M$ .

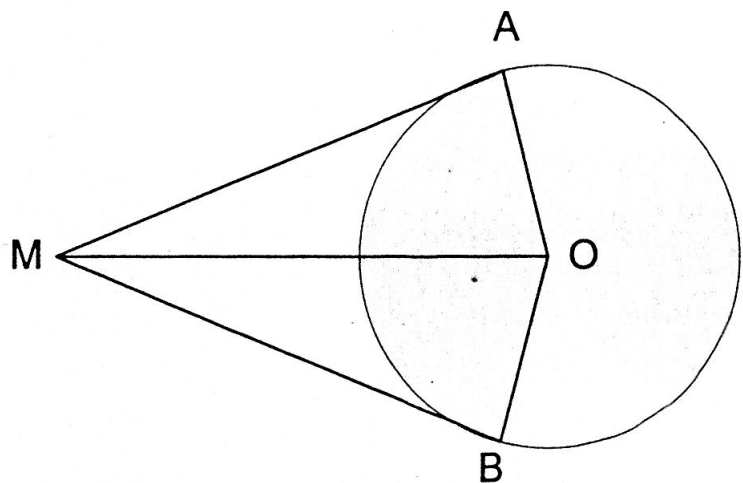
16) Theo bài toán 15) ta suy ra  $OH > R$ .

## Một số bài toán liên quan đến tiếp tuyến của đường tròn

### A. Các kiến thức cần nhớ

Cho đường tròn  $(O)$  và hai tiếp tuyến của đường tròn tại  $A, B$  cắt nhau tại  $M$ , khi đó ta có một số kết quả sau:

- $MA = MB$ ;
- Tia  $MO$  là phân giác của  $\angle AMB$  và  $\angle AOB$ ;
- $AB \perp OM$ ;
- Mọi điểm thuộc đường tròn nằm trong  $\angle AMB$ .



H. 10

### B. Bài tập

1) Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên các cạnh  $BC, CD$  ta lấy các điểm tương ứng  $M, N$  sao cho đường thẳng  $MN$  tiếp xúc với đường tròn tâm  $A$ , bán kính bằng  $AB$ . Chứng minh rằng  $CM + CN + MN = 2AB$  và  $\angle MAN = 45^\circ$ .

2) Tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Giả sử các tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại các đỉnh  $A, B, C, D$  cắt nhau tại các điểm  $M, N, P, Q$ .

a) Chứng minh rằng tổng độ dài hai cạnh đối diện của tứ giác  $MNPQ$  bằng nhau.

b) Ký hiệu  $I$  là giao điểm của  $AB$  với  $MO$ ,  $K$  là giao điểm của  $BC$  với  $VO$ ,  $H$  là giao điểm của  $CD$  với  $PO$ ,  $L$  là giao điểm của  $AD$  với  $QO$ . Chứng minh rằng tứ giác  $IKHL$  là một hình bình hành.

3) Cho đường tròn tâm  $O$  và hai điểm  $B, C$  nằm trên đường tròn. Các tiếp tuyến tại  $B, C$  của đường tròn cắt nhau tại  $A$ . Xét các điểm  $M, N$  tương ứng trên các đoạn  $AB, AC$  sao cho đường thẳng  $MN$  tiếp xúc với đường tròn đó. Chứng minh rằng chu vi  $\triangle AMN$  không đổi, khi các điểm  $M, N$  thay đổi.

4) Cho  $\angle xOy$  và đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với các tia  $Ox, Oy$  tương ứng tại các điểm  $A, B$ . Một đường thẳng qua  $B$  và song song với  $Ox$  cắt đường tròn  $(I)$  lần thứ hai tại  $C$ .

a) Chứng minh rằng  $AB = AC$ .

b) Đường thẳng  $OC$  cắt dây cung  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh rằng  $OE > AE$

c) Gọi  $F$  là điểm đối xứng của  $O$  qua  $A$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $CF$  tiếp xúc với đường tròn  $(I)$ .

5) Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn.  $BE, CF$  là các đường cao của tam giác.  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $ME, MF$  tiếp xúc với đường tròn đi qua 3 điểm  $\{A, E, F\}$ .

6) Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC, \angle BAC = \alpha$ . Gọi  $O$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Dựng đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc với các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $P, Q$ . Ta xét các điểm  $M, N$  tương ứng trên các đoạn thẳng  $AP, AQ$  sao cho đường thẳng  $MN$  tiếp xúc với đường tròn tâm  $O$ .

a) Chứng minh rằng  $\angle MON$  có số đo không đổi, khi  $M, N$  thay đổi.

b) Chứng minh rằng  $BM \cdot CN = OB^2$ .

c) Gọi  $A'$  là điểm đối xứng của  $A$  qua đường thẳng  $BC$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $A'B, A'C$  tiếp xúc với đường tròn tâm  $O$  tương ứng tại các điểm  $P', Q'$ . Ta xét các điểm  $M', N'$  tương ứng trên các đoạn thẳng  $A'P', A'Q'$  sao cho  $M'N'$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng  $MM' \parallel NN'$ .

7) Cho hình thang  $ABCD (AB \parallel CD)$ . Chứng minh rằng nếu đường tròn đường kính  $AD$  tiếp xúc với đường thẳng  $BC$ , thì đường tròn đường kính  $BC$  tiếp xúc với đường thẳng  $AD$ .

8) Một tứ giác lồi  $ABCD$  có tính chất là đường tròn đường kính  $AD$  tiếp xúc với đường thẳng  $BC$  và đường tròn đường kính  $BC$  tiếp xúc với đường thẳng  $AD$ . Chứng minh rằng  $ABCD$  là một hình thang.

9) Cho hình thang  $ABCD$ , biết rằng tồn tại một đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc với 4 cạnh hình thang.

a) Chứng minh rằng  $AB + CD = AD + BC$ .

b) Trên đường thẳng  $CD$  ta lấy điểm  $E$  sao cho  $BE \parallel AC$ . Chứng minh rằng một trong hai góc kề với cạnh  $DE$  của  $\triangle BDE$  có số đo không lớn hơn  $45^\circ$ .

10) Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC$ .  $(O)$  là một đường tròn tiếp xúc với hai cạnh tam giác tại các đỉnh  $B, C$ . Gọi  $P, Q, H$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC, BC$ . Trên đường thẳng  $PQ$  ta lấy điểm  $M$ . Trên đường tròn  $(O)$  lấy điểm  $N$  sao cho đường thẳng  $MN$  tiếp xúc với đường tròn. Chứng minh rằng  $MH = MN$ .

11) Cho đoạn thẳng  $AB$  và hai tia  $Ax, By$  cùng vuông góc với đường thẳng  $AB$ , nằm cùng phía với đường thẳng đó. Ta xét các điểm  $C, D$  lần lượt nằm trên các tia  $By, Ax$ .

a) Chứng minh rằng nếu các điểm  $C, D$  thay đổi thoả mãn điều kiện  $AD + BC = CD$ , thì đường thẳng  $CD$  tiếp xúc với một đường tròn cố định.

b) Gọi  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Chứng minh rằng nếu các điểm  $C, D$  thay đổi thoả mãn điều kiện  $\angle COD = 90^\circ$ , thì đường thẳng  $CD$  tiếp xúc với một đường tròn cố định.

12) Cho hình vuông  $ABCD$ . Ta xét các điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên các cạnh  $BC, CD$  thoả mãn điều kiện  $CM + CN + MN = 2AB$ . Chứng minh rằng khi các điểm  $M, N$  thay đổi, thì đường thẳng  $MN$  tiếp xúc với một đường tròn cố định.

### **C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

1) Vì  $MN$  tiếp xúc với đường tròn tại  $H$ ,  $BC$  tiếp xúc với đường tròn tại  $B \Rightarrow \angle AMN < 90^\circ$ . Tương tự  $\angle ANH < 90^\circ \Rightarrow \triangle AMN$  có hai góc kề với  $MN$  nhọn. Vì vậy  $H$  nằm trên đoạn thẳng  $MN$ . Ta có  $MH = MB, NH = ND, \angle HAM = \angle BAM, \angle HAN = \angle DAN$ . Từ các kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh.

3) Hãy chứng minh rằng chu vi  $\triangle AMN$  bằng  $2AB$ .

4a) Ta có  $IA \perp OA, OA \parallel BC \Rightarrow IA \perp BC \Rightarrow IA$  là trung trực của  $BC \Rightarrow AB = AC$ .

4b) Ta có  $\angle BCE = \angle AOE, \angle CBE = \angle EAO$ .

Vì  $\angle BCE < \angle CBE \Rightarrow \angle EAO > \angle EOA$ .

4c) Vì  $O, F$  và  $B, C$  đối xứng với nhau qua  $IA \Rightarrow OB = FC \Rightarrow \triangle IOB = \triangle ICF (c.c.c) \Rightarrow IC \perp FC$ .

5) Gọi  $H$  là giao điểm của  $BE, CF$ , khi đó  $H$  thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AH$ , khi đó  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$ . Trong  $\triangle AIF$  vuông tại  $F$  ta có  $\angle IFH = \angle IHF, \angle IHH + \angle HCB = 90^\circ$ ,  
 $\angle HCB = \angle MFC \Rightarrow \angle IFH + \angle MFC = 90^\circ \Rightarrow IF \perp MF$ .

$$6a) \angle MON = \frac{\angle POQ}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

6b)  $\triangle OBM, \triangle ONC$  đồng dạng.

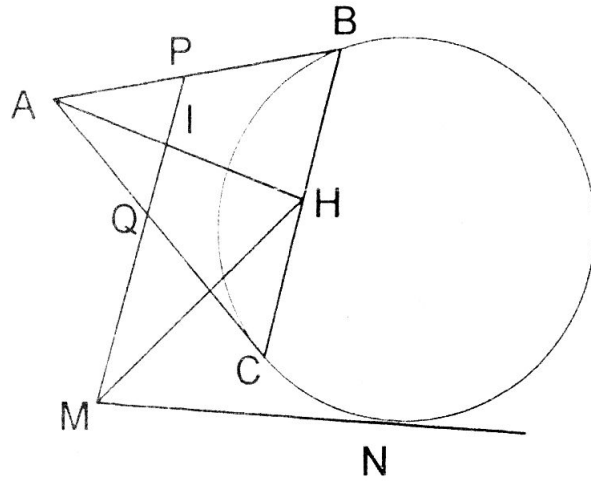
6c) Vì  $BC$  là trục đối xứng của đường tròn và  $AB$  có điểm chung duy nhất với đường tròn, thì  $A'B$  cũng có điểm chung duy nhất với đường tròn, nghĩa là  $A'B$  là tiếp tuyến đường tròn. Theo kết quả của 6b) ta suy ra  $BM'.CN' = OB^2 \Rightarrow \triangle BMM', \triangle C NN'$  đồng dạng, do đó  $\angle BMM' = \angle CN'N$ . Vì

$$BM' // CN' \Rightarrow MM' // NN'.$$

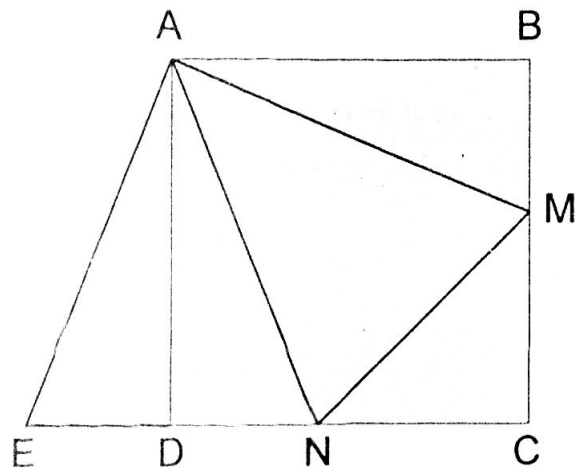
7) Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ , Các điểm đó là tâm đường tròn đường kính  $AD, BC$ . Vì

$$IJ // AB \Rightarrow S_{\triangle AIJ} = S_{\triangle BIJ}.$$

Kẻ  $IH \perp BC, JK \perp AD$ , ta có  $IH.BJ = JK.AI$ . Theo giả thiết đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với  $BC \Rightarrow IH = IA$ . Từ các kết quả trên ta suy ra  $BJ = JK$



H. 11



H.12

8) Vẫn sử dụng các ký hiệu của bài tập 7) từ giả thiết của bài toán ta suy ra  $\Rightarrow S_{\triangle AIJ} = S_{\triangle BIJ} \Rightarrow AB // IJ$ .

9) Kẻ  $BH \perp CD$ ,  $BH$  bằng đường kính của đường tròn  $(O)$ . Mặt khác ta có  $AD + BC = AB + CD = DE, AD + BC \geq 2BH \Rightarrow DE \geq 2BH$ . Trong hai đoạn thẳng  $HD, HE$  tồn tại một đoạn chẳng hạn  $HE \geq BH \Rightarrow \angle BEH \leq \angle HBE \Rightarrow \angle BEH \leq 45^\circ$ .



10) Gọi  $I$  là giao điểm của  $PQ, AH$ . Ta có:

$$\begin{aligned}MH^2 &= MI^2 + IH^2 = MO^2 - OI^2 + IH^2 = MO^2 - (OI^2 - IH^2) \\&= MO^2 - (OI + IH)(OI - IH) = MO^2 - OA \cdot OH \\&= MO^2 - OB^2 = MO^2 - ON^2 = MN^2.\end{aligned}$$

11a) Gọi  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Kéo dài  $DO$  cắt đường thẳng  $By$  tại  $E$ . Hãy chứng minh  $\triangle CDE$  cân tại đỉnh  $C$ .

12) Trên tia đối của tia  $DC$  ta lấy điểm  $E$  sao cho  $DE = BM$ . Hãy chứng minh rằng  $\triangle AMN = \triangle AEN$ . Vì vậy ta có khoảng cách từ  $A$  đến  $MN$  bằng  $AD$  không đổi.

## Dựng đường tròn

Dựng đường tròn là chỉ ra tâm và bán kính của đường tròn. Để tìm tâm đường tròn ta sử dụng các quỹ tích sau đây:

### A. Một số quỹ tích cơ bản được dùng để tìm tâm đường tròn

a) Tập hợp điểm  $M$  cách một đường thẳng  $d$  cho trước một khoảng bằng  $h$  cho trước là một trong hai đường thẳng song song với nó.

b) Tập hợp điểm  $M$  cách điểm  $O$  cho trước một khoảng bằng  $a$  cho trước là đường tròn  $(O, a)$ .

c) Tập hợp điểm  $M$  cách đều hai cạnh của một góc cho trước là đường phân giác của góc đó.

d) Tập hợp điểm  $M$  có hình chiếu cố định trên một đường thẳng  $d$  cho trước là một đường thẳng vuông góc với  $d$  tại điểm đó.

e) Tập hợp điểm  $M$  cách đều hai điểm  $A, B$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .

### B. Phương pháp

Giải bài toán dựng đường tròn được tiến hành 4 bước:

a) Phân tích. Nội dung phần này là ta phải chỉ ra được tâm đường tròn cần dựng thuộc vào những quỹ tích cơ bản nào. Khi trình bày phần phân tích ta luôn coi đường tròn thoả mãn điều kiện bài toán đang xét là tồn tại, vì vậy thành ngữ "Giả sử đường tròn thoả mãn điều kiện bài toán đã dựng được" được sử dụng một cách thường xuyên.

b) Dựng hình. Nội dung phần này là trình bày lại trình tự các bước dựng cơ bản mà ta đã thu được trong phần phân tích.

c) Chứng minh. Nội dung phần này là kiểm tra lại kết quả dựng có đúng với yêu cầu bài toán đặt ra hay không.



d) Biện luận. Nội dung phần này là tìm hiểu bài toán đang xét có bao nhiêu lời giải, khi nào bài toán không giải được.

### C. Bài tập

1) Cho đường thẳng  $d$ , điểm  $A$  thuộc  $d$  và số  $R > 0$ . Dựng đường tròn  $(O, R)$  tiếp xúc với  $d$  tại  $A$ .

2) Cho đường thẳng  $d$ , điểm  $A$  không thuộc  $d$  và số  $R > 0$ . Dựng đường tròn  $(O, R)$  tiếp xúc với  $d$  và đi qua  $A$ .

3) Cho hai đường thẳng  $d_1, d_2$  song song với nhau.  $A, B$  là hai điểm cho trước nằm trên  $d_1$ . Dựng đường tròn đi qua hai điểm đã cho và tiếp xúc với  $d_2$ .

4) Cho  $\angle xOy$  và điểm  $A$  thuộc tia  $Ox$ . Dựng đường tròn tiếp xúc với  $Ox$  tại  $A$  và tiếp xúc với tia  $Oy$ .

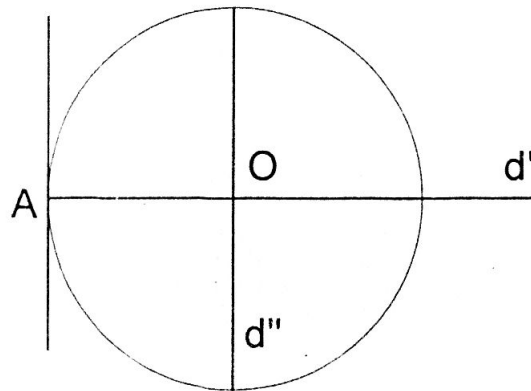
5) Cho  $\angle xOy$  và điểm  $A$  thuộc tia phân giác của góc đó. Dựng đường tròn đi qua  $A$  và tiếp xúc với hai cạnh của góc.

6) Cho  $\angle xOy$  và số  $R > 0$ . Dựng đường tròn có tâm thuộc tia  $Ox$ , bán kính  $R$  và tiếp xúc với  $Oy$ .

7) Cho  $\angle xOy$  và số  $R > 0$ .

Dựng đường tròn có bán kính  $R$  và tiếp xúc với hai cạnh của góc đã cho.

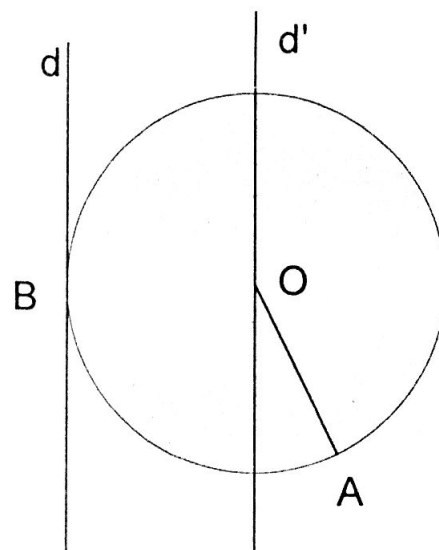
8) Cho  $\angle xOy$  và điểm  $A$  nằm trong góc. Dựng đường tròn đi qua  $A$  và tiếp xúc với hai cạnh của góc.



H. 13

### D. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Giả sử đường tròn  $(O)$  đã dựng được, khi đó tâm  $O$  nằm trên đường thẳng  $d' \perp d$  tại  $A$ . Mặt khác  $O$  cách  $d$  một khoảng  $R$ . Vì vậy  $O$  thuộc đường thẳng  $d'' \parallel d$  và cách  $d$  một khoảng  $R$ . Tâm  $O$  là giao điểm của hai đường thẳng  $d', d''$ .

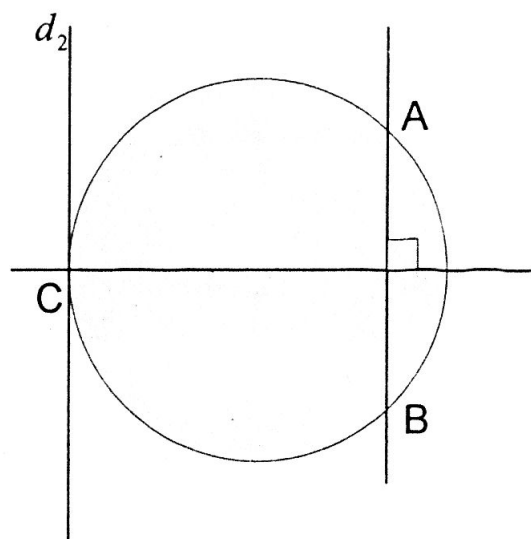


H. 14

2) Giả sử đường tròn  $(O)$  đã dựng được, khi đó tâm  $O$  nằm trên đường tròn  $(A; R)$ . Mặt khác  $(O)$  tiếp xúc với  $d$ , nên  $O$  nằm trên đường thẳng  $d' // d$  cách  $d$  một khoảng  $R$  và cùng phía với  $A$ . Tâm  $O$  là giao điểm của  $d'$  và đường tròn  $(A; R)$ .

3) Giả sử đường tròn  $(O)$  đã dựng được tiếp xúc với  $d_2$  tại  $C$ , khi đó  $OC$  là đường trung trực của đoạn  $AB$ . Vì vậy  $C$  là giao điểm của  $d_2$  với đường trung trực của  $AB$ . Mặt khác  $O$  nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng  $AC$ .

4) Giả sử đường tròn  $(O)$  đã dựng được, khi đó tâm  $O$  nằm trên đường thẳng  $d \perp Ox$  tại  $A$ . Mặt khác nó tiếp xúc với hai cạnh của góc, nên tâm  $O$  nằm trên tia phân giác  $Oz$  của  $\angle xOy$ . Tâm  $O$  là giao điểm của  $d$  và  $Oz$ .

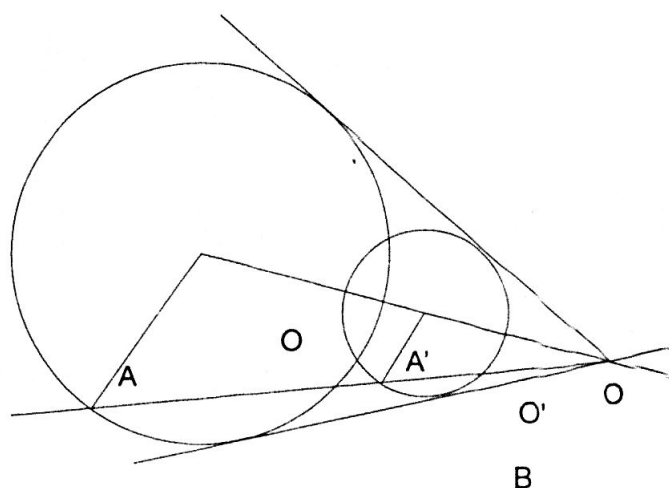


H. 15

5) Giả sử đường tròn  $(O)$  đã dựng được, khi đó tâm  $O$  nằm trên tia phân giác của  $\angle xOy$ . Mặt khác  $O$  nằm trên đường thẳng  $d // Ox$ , nằm cùng phía với  $Oy$  đối với  $Ox$  và cách  $Ox$  một khoảng  $R$ .

8) Hãy xét hai trường hợp  $A$  nằm trên tia phân giác của góc và  $A$  không nằm trên tia đó.

Ta xét  $A$  không thuộc tia phân giác  $Oz$ . Hãy vẽ đường tròn tâm  $O'$  tiếp xúc với hai cạnh của góc, khi đó tia  $OA$  cắt nó tại hai điểm mà trong đó có một điểm  $B$  thoả mãn điều kiện  $O'B \parallel OA$ . Như vậy  $O$  là giao điểm của  $Oz$  với đường thẳng qua  $A$  và song song với đường thẳng  $O'B$ .



H. 16

Trường hợp còn lại học sinh tự giải.

## Dựng tiếp tuyến và cát tuyến của đường tròn

### A. Bài tập

1) Cho đường tròn  $(O)$ , đường thẳng  $d$  và góc nhọn  $\alpha$ . Dựng đường thẳng  $d'$  tiếp xúc với đường tròn đã cho và hợp với  $d$  một góc bằng  $\alpha$ .

2) Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  thuộc đường tròn và số dương  $h$ . Dựng đường thẳng  $d$  tiếp xúc với đường tròn đã cho và cách  $M$  một khoảng  $h$ .

3) Cho đường tròn  $(O)$  và một đường thẳng  $d$ . Dựng đường thẳng  $d'$  tiếp xúc với đường tròn đã cho và  $d' \parallel d$  (hoặc  $d' \perp d$ ).

4) Cho đường tròn  $(O)$ , đường thẳng  $d$  và một độ dài  $a$ . Dựng đường thẳng  $d' \parallel d$  ( $d' \perp d$ ) và cắt đường tròn đã cho tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB = 2a$ .

5) Cho đường tròn  $(O, R)$  và đường thẳng  $d$ . Dựng đường thẳng  $d'$  tiếp xúc với đường tròn đã cho, hợp với  $d$  một góc bằng  $60^\circ$  và cắt đường tròn đó tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB = R\sqrt{3}$ .

6) Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  nằm trong đường tròn. Dựng đường thẳng  $d$  đi qua  $M$  và cắt đường tròn đã cho tại hai điểm  $A, B$  thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

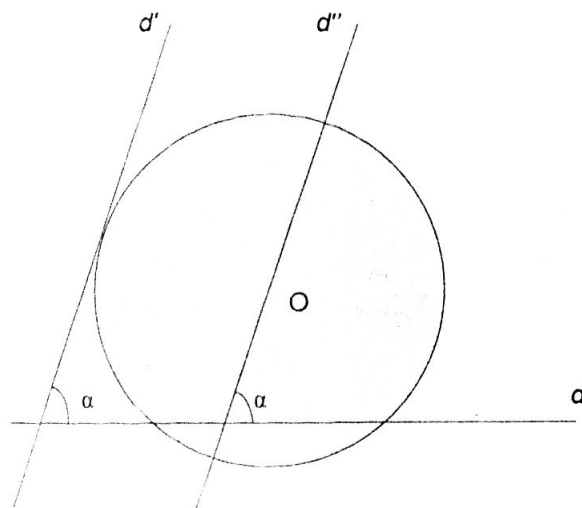
a)  $MA = MB$ .

b)  $MA = 3MB$ .

### B. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Giả sử  $d'$  là đường thẳng đã dựng. Kẻ qua tâm  $O$  đường thẳng  $d'' \parallel d'$ , khi đó  $d''$  hợp với  $d$  một góc nhọn  $\alpha$  và cách  $d'$  một khoảng  $R$  (là bán kính đường tròn  $(O)$ )

2) Giả sử  $d$  tiếp xúc với đường tròn tại  $A$ . Kẻ  $MH \perp d \Rightarrow MH \parallel OA$ . Ký hiệu  $R$  là bán kính đường tròn và giả sử rằng  $h > R$ . Hạ  $OK \perp MH$ , khi đó  $MK = h - R$ . Đường tròn tâm  $M$  có bán kính  $r = h - R$  tiếp xúc với  $OK$  tại  $K$ . Ta có



H. 17

cách dựng sau: Dựng đường tròn  $(M; h - R)$ . Dựng tiếp tuyến  $OK$  của đường tròn đó. Dựng đường thẳng  $d // OK$  cách  $OK$  một khoảng  $R$  và nằm khác phía với  $M$  đối với  $OK$ .

3) Nếu  $d' // d$  và tiếp xúc với đường tròn tại  $A$ , thì đường thẳng  $OA \perp d$ . Tiếp điểm  $A$  được xác định.

4) Nếu  $d'$  cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm  $A, B$  sao cho  $AB = 2a$ , thì khoảng cách từ tâm đường tròn  $(O)$  đến  $AB$  là  $\sqrt{R^2 - a^2}$ . Đường thẳng  $d'$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; \sqrt{R^2 - a^2})$  có phương song song với  $d$ .

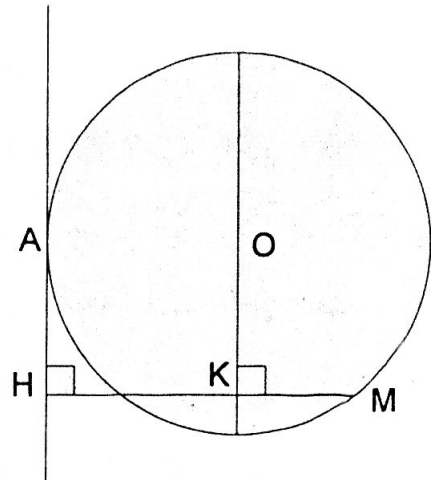
5) Giả sử  $d'$  thoả mãn điều kiện bài toán. Kẻ  $d'' // d'$  và đi qua tâm đường tròn, khi đó  $d''$  xác định. Khoảng cách từ tâm  $O$  đến  $d'$  bằng  $\frac{R}{2}$ , nên  $d'$  tiếp xúc với đường tròn  $(O; \frac{R}{2})$ .

6a)  $d \perp OM$ .

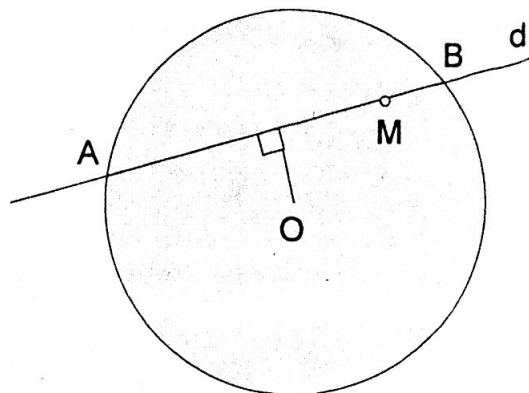
6b) Đặt  $OM = a$ . Gọi  $H$  là trung điểm của dây  $AB$ . Từ giả thiết ta suy ra

$$MH = MB \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{4a^2 - R^2}{3}}.$$

Đường thẳng  $AB$  tiếp xúc với đường tròn  $(O; \sqrt{\frac{4a^2 - R^2}{3}})$ .



H. 18



H. 19

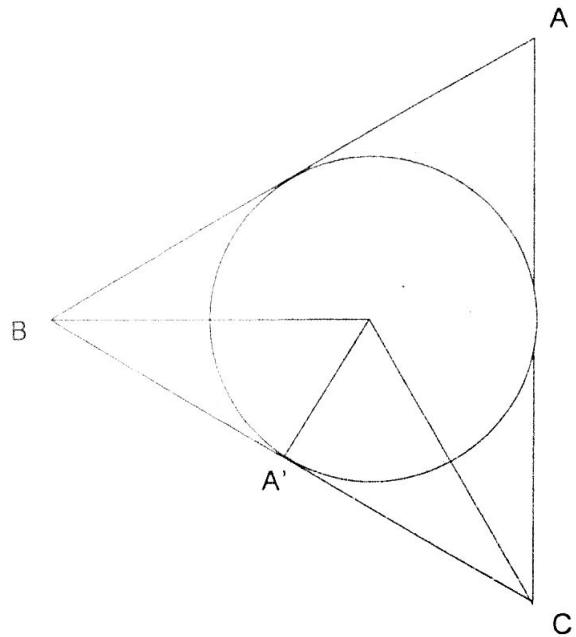
## Đường tròn nội tiếp tam giác, tứ giác

### A. Các kiến thức cần nhớ

Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $I$  là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác đó,  $r$  là khoảng cách từ  $I$  đến đường thẳng  $AB$ . Đường tròn  $(I, r)$  được gọi là đường tròn nội tiếp của  $\triangle ABC$  hay tam giác ngoại tiếp đường

tròn. Các góc kề với các cạnh  $BC, CA, AB$  của các tam giác  $IBC, ICA, IAB$  nhọn, nên chân đường vuông góc hạ từ  $I$  xuống các đường thẳng  $BC, CA, AB$  nằm trên các cạnh tương ứng. Nghĩa là các tiếp điểm của  $(I, r)$  với các đường thẳng  $BC, CA, AB$  nằm ngay trên các cạnh tam giác.

Đường tròn có tâm nằm trong tứ giác và tiếp xúc với 4 cạnh tứ giác đó được gọi là đường tròn nội tiếp tứ giác hoặc tứ giác ngoại tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác ngoại tiếp).



H. 20

### B. Bài tập

1) Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  tương ứng tại các điểm  $A', B', C'$ . Ta đặt  $a = BC, b = AC, c = AB, 2p = a + b + c$ . Chứng minh rằng  $AB' = AC' = p - a, BA' = BC' = p - b, CA' = CB' = p - c$ .

2) Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  tương ứng tại các điểm  $A', B', C'$ . Chứng minh rằng nếu  $AC > AB$ , thì  $CC' > BB'$ .

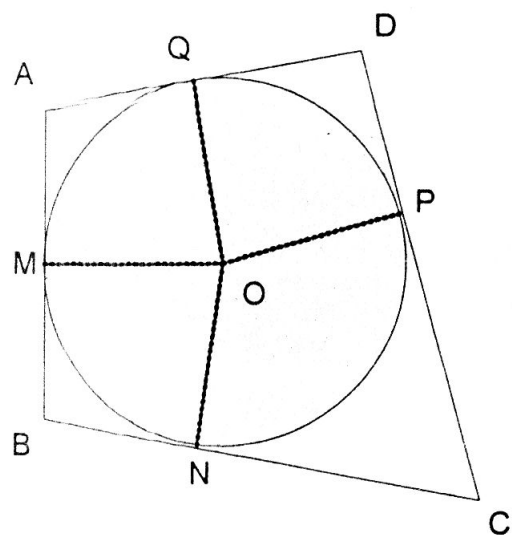
3) Đường tròn tâm  $I$  nội tiếp  $\triangle ABC$  không cân tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  tương ứng tại các điểm  $A', B', C'$ . Ký hiệu  $A_1$  là điểm đối xứng với  $A'$  qua đường thẳng  $AI$ ,  $B_1$  là điểm đối xứng với  $B'$  qua đường thẳng  $BI$ . Chứng minh rằng  $A_1B_1 \parallel AB$ .

4) Ký hiệu  $S$  là diện tích  $\triangle ABC$ .

a) Chứng minh rằng  $S = p.r$ .

b) Ký hiệu  $h_a, h_b, h_c$  là các đường cao tam giác kẻ từ các đỉnh  $A, B, C$  tương ứng. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$



H. 21

5) Đường trung tuyến  $AM$  của  $\triangle ABC$  chia nó thành hai tam giác  $\triangle ABM, \triangle ACM$ . Chứng minh rằng nếu bán kính các đường tròn nội tiếp của hai tam giác đó bằng nhau, thì  $AB = AC$ .

6) Giả sử đường cao  $AH$  của  $\triangle ABC$  chia nó thành hai tam giác  $\triangle ABH, \triangle ACH$ . Chứng minh rằng nếu bán kính các đường tròn nội tiếp của hai tam giác đó bằng nhau, thì  $AB = AC$ .

7) Đường phân giác  $AD$  của  $\triangle ABC$  chia nó thành hai tam giác  $\triangle ABD, \triangle ACD$ . Chứng minh rằng nếu bán kính các đường tròn nội tiếp của hai tam giác đó bằng nhau, thì  $AB = AC$ .

8) Chứng minh rằng nếu  $\triangle ABC$  vuông tại đỉnh  $A$ , thì  $r = p - a$ . Đảo lại nếu  $\triangle ABC$  thoả mãn điều kiện  $r = p - a$ , thì tam giác đó vuông tại đỉnh  $A$ .

9) Chứng minh rằng nếu  $\triangle ABC$  đồng dạng với  $\triangle A'B'C'$ , thì  $\sqrt{\frac{S}{S'}} = \frac{r}{r'}$ , trong đó  $S, r$  là diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp của  $\triangle ABC$ .  $S', r'$  là diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp của  $\triangle A'B'C'$ .

10) Đường cao  $AH$  của  $\triangle ABC$  vuông tại đỉnh  $A$  chia nó thành hai tam giác  $\triangle ABH, \triangle ACH$ . Ký hiệu  $r_1, r_2, r$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABH, \triangle ACH, \triangle ABC$ . Chứng minh rằng  $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ .

11) Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  tương ứng tại các điểm  $A', B', C'$ . Ký hiệu  $x, y$  lần lượt là khoảng cách từ  $C', B'$  đến đường thẳng  $BC$ . Chứng minh rằng  $S = \frac{xAB + yAC}{2}$ ,  $S$  là diện tích của  $\triangle ABC$ .

12) Đường tròn  $(O, r)$  nội tiếp trong tứ giác  $ABCD$  tiếp xúc với  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt tại các điểm  $A', B', C', D'$ .

a) Chứng minh rằng  $AB + CD = AD + BC$ .

b) Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là giao điểm của  $OB$  với  $A'B'$ ,  $OC$  với  $B'C'$ ,  $OD$  với  $C'D'$ ,  $OA$  với  $D'A'$ . Chứng minh rằng tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành.

13) Chứng minh rằng nếu hình bình hành có đường tròn nội tiếp, thì nó là hình thoi.

14) Hình thang  $ABCD (AB \parallel CD)$  ngoại tiếp đường tròn  $(I, r)$ . Chứng minh rằng  $AD + BC \geq 4.r$ .

15) Hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) ngoại tiếp đường tròn  $(I, r)$  có hai đáy  $AB, CD$  tiếp xúc với đường tròn đó tương ứng tại  $P, Q$ . Chứng minh rằng  $PA \cdot QD = PB \cdot QC$ .

16) Tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(I, r)$  thoả mãn điều kiện  $\angle AID = 90^\circ$ . Chứng minh rằng  $AB \parallel CD$ .

17) Chứng minh rằng nếu một tứ giác có đường tròn nội tiếp, thì các đoạn thẳng nối các cặp tiếp điểm thuộc các cặp cạnh đối diện cắt nhau trên đường chéo tứ giác.

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

2) Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp. Lấy điểm  $D$  đối xứng với  $B$  qua đường thẳng  $AI$ , khi đó  $D$  nằm trên cạnh  $AC$  và  $BB' = DC'$ . Vì  $\triangle ABD$  cân tại  $A$ , nên  $\angle ADB < 90^\circ \Rightarrow \angle ADC' < 90^\circ \Rightarrow \angle CDC' > 90^\circ \Rightarrow CC' > DC'$ .

3) Các điểm  $A_1, B_1$  thuộc đường tròn tâm  $I$ . Vì các điểm  $B', C'$  và  $A', A_1$  đối xứng qua  $AI \Rightarrow A'B' = C'A_1$ . Tương tự ta có  $A'B' = C'B_1$ .

5) Sử dụng kết quả của bài 4a).

6) Gọi  $I, K$  là tâm các đường tròn nội tiếp hai tam giác, khi đó  $IK \parallel BC \Rightarrow IK \perp AH$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AH, IK$ . Chính  $M$  là tiếp điểm của  $AH$  với hai đường tròn tâm  $I$  và  $K$ . Vì  $MI = MK \Rightarrow \triangle AIK$  cân tại  $I$ . Từ đó suy ra  $AH$  là phân giác của  $\angle BAC$ .

9) Ta biết rằng nếu hai tam giác đồng dạng, thì tỷ số diện tích của hai tam giác đó bằng bình phương tỷ số đồng dạng. Ta có  $\sqrt{\frac{S}{S'}} = \frac{p}{p'}$ . Mặt khác

$$\frac{S}{S'} = \frac{p \cdot r}{p' \cdot r'}.$$

10) Dùng kết quả bài tập 9).

11) Rõ ràng khoảng cách từ  $A'$  đến  $AB, AC$  cũng bằng  $x, y$   
 $\Rightarrow S = \frac{1}{2}(AB \cdot x + AC \cdot y)$ .

14) Sử dụng kết quả bài tập 12).

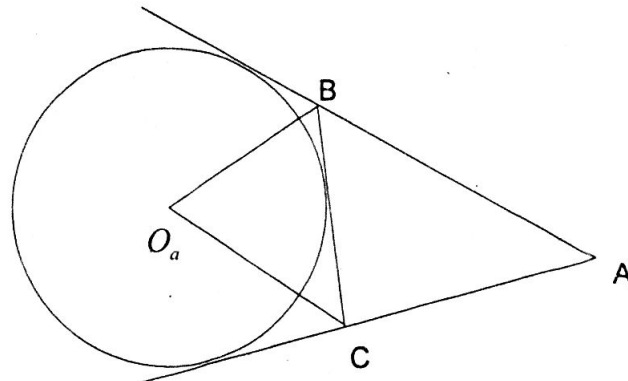
16) Gọi  $M$  là tiếp điểm thuộc  $AB$  và  $N$  là tiếp điểm thuộc  $CD$ . Khi đó  $\angle AIM + \angle DIN = 90^\circ \Rightarrow \angle MIN = 180^\circ$ .



## Đường tròn bàng tiếp tam giác

### A. Các kiến thức cần nhớ

Cho  $\triangle ABC$ . Ta biết rằng hai đường phân giác ngoài tại các đỉnh  $B, C$  và phân giác trong tại đỉnh  $A$  của tam giác đó cắt nhau tại điểm  $O_a$ . Ta ký hiệu  $r_a$  là khoảng cách từ  $O_a$  đến một trong 3 đường thẳng chứa cạnh tam giác. Ta gọi đường tròn  $(O_a, r_a)$  là đường tròn bàng tiếp của  $\triangle ABC$  thuộc  $\angle BAC$ . Vì  $\triangle O_a BC$  có hai góc kề với cạnh  $BC$  cùng nhọn, nên chân đường vuông góc hạ từ  $O_a$  xuống đường thẳng  $BC$  nằm trên cạnh  $BC$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ , khi đó  $IB \perp O_a B \Rightarrow \angle ABO_a > 90^\circ$ . Vì vậy chân đường vuông góc hạ từ  $O_a$  xuống đường thẳng  $AB$  nằm trên tia đối của tia  $BA$ . Tương tự chân đường vuông góc hạ từ  $O_a$  xuống đường thẳng  $AC$  nằm trên tia đối của tia  $CA$ . Ta biết rằng chân các đường vuông góc đó là tiếp điểm của đường tròn  $(O_a, r_a)$  với các đường thẳng chứa các cạnh tam giác. Tóm lại đường tròn bàng tiếp của tam giác tiếp xúc với một cạnh tam giác và phần kéo dài của hai cạnh còn lại.



H. 22

Một tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp.

### B. Bài tập

1) Chứng minh rằng tâm của 3 đường tròn bàng tiếp  $\triangle ABC$  là đỉnh của một tam giác mà chân 3 đường cao là các điểm  $A, B, C$ .

2) Đường tròn bàng tiếp của  $\triangle ABC$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $A'$ . Chứng minh rằng  $BA' = p - c, CA' = p - b$ , trong đó  $p$  là nửa chu vi tam giác,  $c = AB$  và  $b = AC$ .

3) Đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của  $\triangle ABC$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tương ứng tại các điểm  $P, Q$ . Chứng minh rằng  $P$  đối xứng với  $Q$  qua trung điểm của cạnh  $BC$ .

4) Đường tròn  $(I, r)$  nội tiếp và đường tròn  $(O_a, r_a)$  bàng tiếp của  $\Delta ABC$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tương ứng tại các điểm  $M$  và  $P$ . Đoạn thẳng  $AP$  cắt đường tròn  $(I, r)$  tại điểm  $N$ .

a) Chứng minh rằng đoạn thẳng  $MN$  là đường kính của đường tròn  $(I, r)$ .

b) Gọi  $Q$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Đường thẳng  $IQ$  cắt đường cao  $AH$  tại  $K$ . Chứng minh rằng  $AK = r$ .

5) Chứng minh rằng  $r_a = p \tan \frac{A}{2}$ .

6) Tam giác  $ABC$  có  $BC > AC$ . Chứng minh rằng  $r_a > r_b$ .

7) Cho  $\Delta ABC$  vuông tại đỉnh  $C$ . Ta ký hiệu  $r_a, r_b$  lần lượt là bán kính các đường tròn bàng tiếp  $\Delta ABC$  thuộc các góc  $\angle BAC, \angle ABC$ . Chứng minh rằng  $r_a + r_b = AB$ .

8) Hãy chỉ ra một tam giác mà bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bán kính của một đường tròn bàng tiếp.

### **C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

3) Hãy tính các độ dài  $BP, CQ$  qua 3 cạnh tam giác.

4a) Gọi  $N'$  là giao điểm của  $AP$  và  $IM$ . Vì  $I$  nằm trên  $AO_a$ , nên ta có  $\frac{IN'}{O_aP} = \frac{r}{r_a} \Rightarrow IN' = r$ . Điểm  $N'$  thuộc đường tròn nội tiếp. 4b)  $Q$  cũng là trung điểm của đoạn thẳng  $MP \Rightarrow QK \parallel AP$ . Tứ giác  $ANIK$  là một hình bình hành.

6) Sử dụng kết quả bài 5).

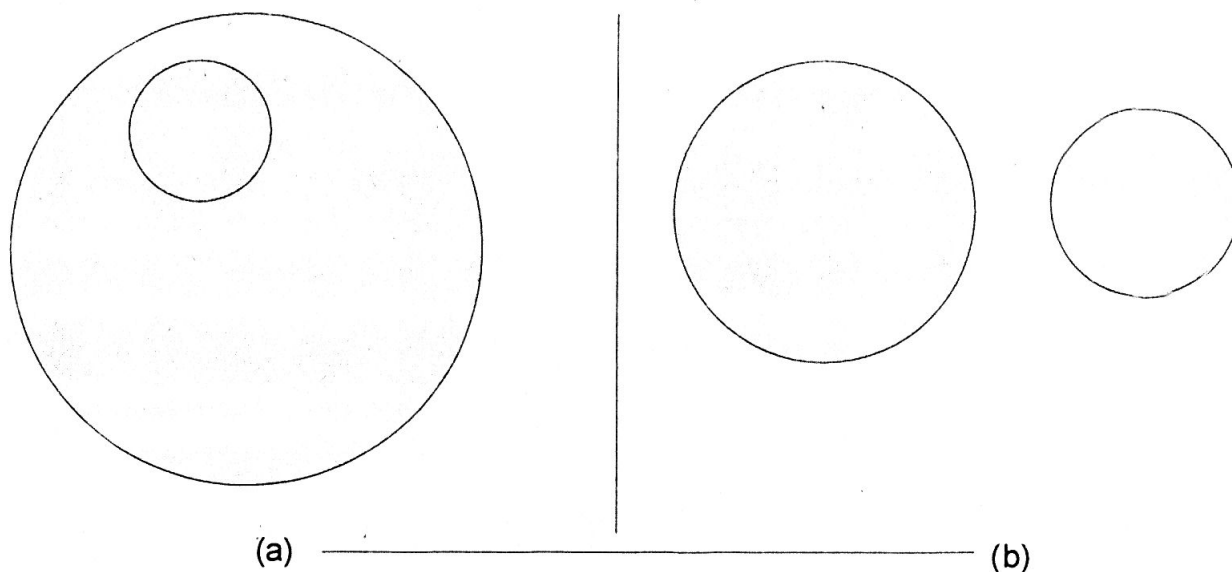
7) Sử dụng bài 2).

## **Vị trí tương đối của hai đường tròn**

### **A. Các kiến thức cần nhớ**

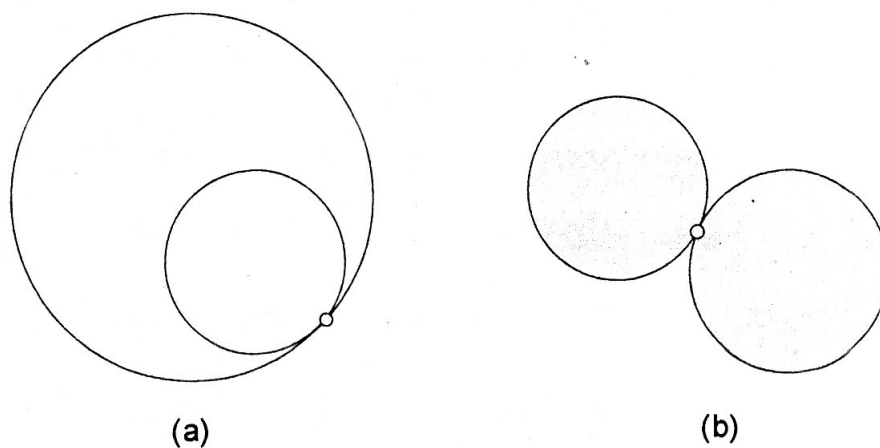
Cho hai đường tròn  $(O, R); (O', R')$ . Ta nói hai đường tròn đó nằm ngoài nhau, nếu mọi điểm thuộc đường tròn thứ nhất nằm ngoài đường tròn thứ hai và mọi điểm thuộc đường tròn thứ hai nằm ngoài đường tròn thứ nhất.

Ta nói đường tròn thứ nhất đựng đường tròn thứ hai, nếu mọi điểm của đường tròn thứ hai nằm trong đường tròn thứ nhất.



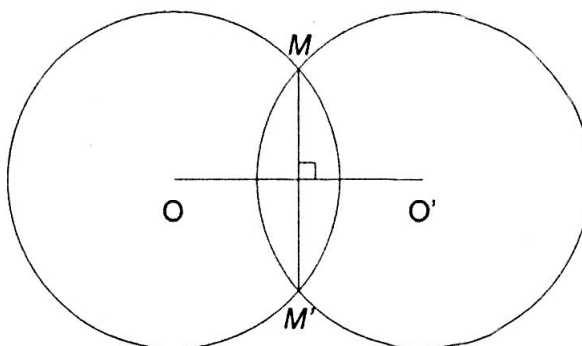
H. 23

Ta nói hai đường tròn tiếp xúc với nhau tại điểm  $M$ , nếu hai đường tròn đó có điểm chung duy nhất là  $M$ . Điểm chung  $M$  của hai đường tròn là tiếp điểm. Nếu một trong hai đường tròn đựng đường tròn còn lại (trừ  $M$ ), thì hai đường tròn tiếp xúc trong. Nếu hai đường tròn nằm ngoài nhau (trừ  $M$ ), thì chúng tiếp xúc ngoài với nhau. Đường thẳng  $OO'$  đi qua  $M$ .



H. 24

Nếu hai đường tròn có hai điểm chung  $M, M'$  phân biệt, thì ta nói hai đường tròn cắt nhau. Đoạn thẳng  $MM'$  là dây cung chung của chúng. Đường thẳng  $OO' \perp MM'$ .



H. 25

Điều kiện để hai đường tròn nằm ngoài nhau là  $OO' > R + R'$ ; Đụng nhau là  $OO' = R + R'$ ; Tiếp xúc ngoài với nhau  $OO' = R + R'$ ; Tiếp xúc trong với nhau  $OO' = R - R'$ ,  $R > R'$ . Cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $R - R' < OO' < R + R'$ ,  $R > R'$ .

### B. Bài tập

1) Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn  $(O, R)$  và  $(O', R')$  trong các trường hợp sau đây:

a)  $OO' = 12, R = 7, R' = 5$ ;

b)  $OO' = 4\sqrt{3}, R = 2, R' = 2\sqrt{3}$ ;

c)  $OO' = \frac{8}{3}, R = \frac{4}{3}, R' = \frac{25}{9}$ ;

d)  $OO' = \frac{5}{\sqrt{2}}, R = \sqrt{7}, R' = \sqrt{6}$ .

2) Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 3, BC = 4, AC = 5$ . Ta dựng các đường tròn tâm  $A, B, C$  đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Tính bán kính các đường tròn đó.

3) Hai đường tròn  $(O, 4)$  và  $(O', 3)$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$  thoả mãn điều kiện  $AB = \frac{24}{5}$ . Tính khoảng cách tâm của hai đường tròn đó.

4) Cho đường tròn  $(O, R)$  và hai điểm  $A, B$  thoả mãn điều kiện  $OA < R < OB$ . Chứng minh rằng mọi đường tròn đi qua hai điểm  $A, B$  cắt đường tròn đã cho.

5) Cho hai đường tròn  $(O, R)$  và  $(O', R')$  với  $R > R'$ . Một đường tròn thứ ba cắt đường tròn  $(O, R)$  tại hai điểm  $A, B$  và cắt đường tròn  $(O', R')$  tại hai điểm  $C, D$ . Chứng minh rằng  $AB \parallel CD$  và giao điểm của các đường thẳng  $AC, BD$  (nếu có) nằm trên đường thẳng nối tâm  $O$  với tâm của đường tròn thứ ba.

6) Cho hai đường tròn  $(O, R)$  và  $(O', R')$ ,  $(R > R')$  tiếp xúc trong với nhau tại  $A$ . Ta kẻ dây cung  $BC$  của đường tròn  $(O, R)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O', R')$  tại điểm  $M$ . Tia  $AM$  cắt  $(O, R)$  tại điểm  $N$ . Chứng minh rằng  $ON \perp BC$ .

Hãy giải bài toán trong trường hợp hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

7) Cho hai đường tròn  $(O, R)$  và  $(O', R')$  tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$  và  $d$  là một đường thẳng tiếp xúc với  $(O, R)$  tại  $B$ . Đường thẳng  $AB$  cắt lần thứ hai đường tròn  $(O', R')$  tại  $C$ . Chứng minh rằng  $O'C \perp d$ .

8) Cho 3 đường tròn tâm  $A, B, C$  có bán kính bằng nhau và cùng đi qua một điểm  $I$  đôi một cắt nhau tại các điểm  $M, NP$ . Chứng minh rằng  $\Delta ABC = \Delta MNP$ .

9) Cho 3 đường tròn  $(A; a), (B; b), (C; c)$  có tâm thẳng hàng ( $B$  nằm giữa hai điểm  $\{A, C\}$ ) và thỏa mãn điều kiện  $AB > a + b, BC > b + c$ . Chứng minh rằng nếu tồn tại một đường tròn  $O$  tiếp xúc ngoài đồng thời với cả 3 đường tròn đó, thì hoặc  $a > b$  hoặc  $c > b$ .

10) Hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$ .

a) Một đường thẳng đi qua  $A$  cắt lần thứ hai hai đường tròn tại các điểm  $P, Q$  nằm khác phía nhau đối với đường thẳng  $AB$ . Chứng minh rằng  $PQ \leq 2OO'$ .

b) Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với đường thẳng  $AB$  cắt lần thứ hai hai đường tròn tại các điểm  $M, N$ . Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng  $PQ$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .

c) Các kết luận của các câu trên còn đúng không trong trường hợp  $P, Q$  cùng phía với đường thẳng  $AB$ ?

11) Chứng minh rằng nếu hai đường tròn nằm trong hai nửa mặt phẳng khác nhau được xác định bởi một đường thẳng  $d$  và không có điểm chung với  $d$ , thì hai đường tròn đó nằm ngoài nhau.

12) Cho hai đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  nằm ngoài nhau. Từ tâm  $O$  của đường tròn thứ nhất ta kẻ nửa đường thẳng tiếp xúc với đường tròn thứ hai. Gọi  $A$  là giao điểm của nửa đường thẳng đó với đường tròn  $(O; R)$ . Từ tâm  $O'$  của đường tròn thứ hai ta kẻ nửa đường thẳng tiếp xúc với đường tròn thứ nhất. Gọi  $B$  là giao điểm của nửa đường thẳng đó với đường tròn  $(O'; R')$ . Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm  $A, B$  đến đường thẳng  $OO'$  bằng nhau.

13) Cho hai đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$ . Trên đường thẳng  $AB$  ta lấy điểm  $M$  sao cho từ đó ta kẻ tới đường tròn  $(O; R)$  một tiếp tuyến  $MT$  ( $T$  là tiếp điểm). Chứng minh rằng đường tròn tâm  $M$  có bán kính bằng độ dài  $MT$  không có điểm chung với đường thẳng  $OO'$ . Kết luận của bài toán thế nào khi hai đường tròn đó tiếp xúc ngoài với nhau tại  $H$  và điểm  $M$  nằm trên tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại  $H$ ?

14) Cho hai đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  có tâm khác nhau. Một đường tròn thứ ba cắt đường tròn  $(O; R)$  tại hai điểm  $A, B$  và cắt  $(O'; R')$  tại hai điểm  $C, D$ . Chứng minh rằng nếu  $AB \parallel CD$ , thì tâm của cả 3 đường tròn thẳng hàng.

15) Gọi  $(I, r)$  là đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ ,  $J$  là điểm đối xứng với  $I$  qua trung điểm cạnh  $BC$ ,  $(O_a, r_a)$  là đường tròn bàng tiếp của tam giác thuộc  $\angle BAC$ . Chứng minh rằng đường tròn  $(J, r)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_a, r_a)$ .

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

2) 1, 2, 3.

3)  $5, \frac{7}{5}$ .

4) Ký hiệu  $S$  là đường tròn đi qua  $A, B$  và giả sử  $S$  không cắt đường tròn  $(O; R)$ , khi đó hoặc  $S$  không có điểm chung với  $(O; R)$  hoặc có một điểm chung duy nhất là  $M$  khác các điểm  $A, B$ . Nếu  $S$  không có điểm chung với  $(O; R)$ , thì hoặc  $S$  bị chứa trong đường tròn đó, kéo theo  $B$  nằm trong  $(O; R)$  Điều đó không thể xảy ra vì  $OB > R$  hoặc  $S$  nằm ngoài  $(O; R)$ , kéo theo  $A$  nằm ngoài đường tròn đó. Điều đó không thể xảy ra vì  $OA < R$  hoặc  $S$  chứa trong nó đường tròn  $(O; R)$ , kéo theo  $A$  nằm ngoài  $(O; R)$ . Trường hợp  $S$  có điểm chung duy nhất với  $(O; R)$  lập luận tương tự.

5) Gọi  $I$  là tâm đường tròn thứ 3, khi đó  $AB \perp OI$  và  $CD \perp OI$ . Tứ giác  $ABCD$  hoặc là một hình chữ nhật hoặc là một hình thang cân. Vì vậy  $OI$  là trục đối xứng của tứ giác đó.

8) Gọi  $K$  là giao điểm của  $IM$  và  $AB$ ,  $H$  là giao điểm của  $IN$  và  $BC$ . Trong  $\triangle IMN$  đoạn thẳng  $KH$  là đường trung bình. Trong  $\triangle ABC$  đoạn thẳng  $KH$  là đường trung bình. Vì vậy  $MN = AC$ .

9) Chú ý rằng hoặc  $OB < OA$  hoặc  $OB < OC$ . Nếu  $OB < OA \Rightarrow b + R < a + R \Rightarrow b < a$ ,  $R$  là bán kính đường tròn  $(O)$ .

10a) Gọi  $K, H$  lần lượt là trung điểm của các dây  $AP, AQ$ , ta có  $OH \perp AP, O'K \perp AQ \Rightarrow KH$  là hình chiếu của đoạn thẳng  $OO'$  trên đường thẳng  $PQ \Rightarrow OO' \geq KH, KH = \frac{PQ}{2}$  10b) Ta có  $AM, AN$  là đường kính của hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ , do đó  $MP \perp PQ, NQ \perp PQ \Rightarrow MP \parallel NQ$ . Dùng định lý Ta lét cho 3 đường thẳng song song với hai cát tuyến là  $MN, PQ$ . 10c) vẫn đúng.

12) Ta ký hiệu  $M$  là tiếp điểm của nửa đường thẳng kẻ từ điểm  $O$  và  $N$  là tiếp điểm của nửa đường thẳng kẻ từ điểm  $O'$ . Kẻ  $AH \perp OO', BK \perp OO'$ . Từ sự đồng dạng của hai tam giác  $\triangle OAH$  và

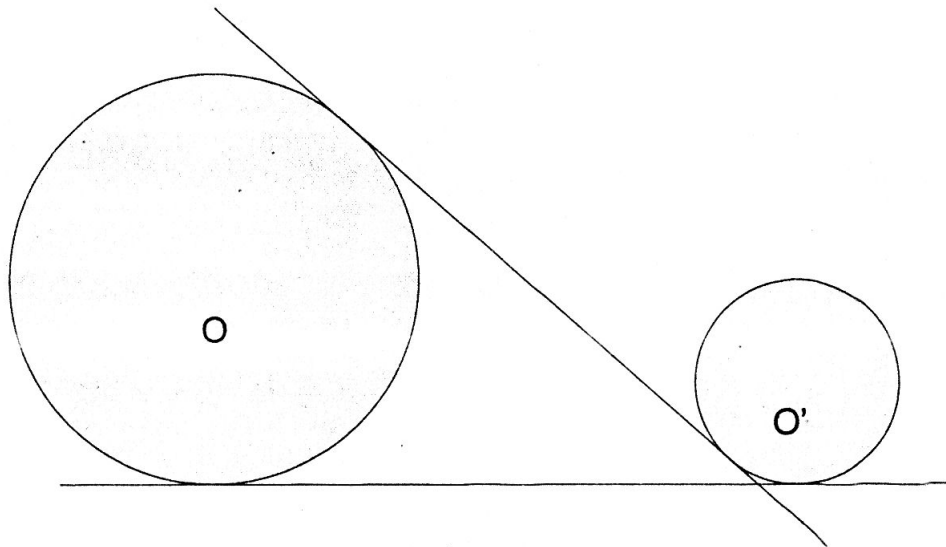
$\Delta OO'M \Rightarrow \frac{AH}{O'M} = \frac{OA}{OO'} \Rightarrow AH = \frac{OA.O'M}{OO'}$ . Từ sự đồng dạng của  $\Delta O'BK$  và  $\Delta O'ON \Rightarrow BK = \frac{O'B.ON}{OO'}$ .

13) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AB$  và  $OO'$ , khi đó  $OH < R$ . Ta có  $MH = \sqrt{MO^2 - OH^2}$ ,  $MT = \sqrt{MO^2 - R^2} \Rightarrow MT < MH$ . Đường tròn tâm  $M$  có bán kính bằng  $MT$  tiếp xúc với đường thẳng  $OO'$ .

## Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

### A. Các kiến thức cần nhớ

Cho hai đường tròn có tâm không trùng nhau. Đường thẳng  $d$  tiếp xúc đồng thời với hai đường tròn đó được gọi là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Nếu cả hai đường tròn nằm về một phía với  $d$ , thì ta nói  $d$  là tiếp tuyến chung ngoài của chúng. Nếu hai đường tròn nằm về hai phía khác nhau đối với tiếp tuyến  $d$ , thì ta nói  $d$  là tiếp tuyến chung trong của chúng.



H. 26

### B. Bài tập

1) Cho hai đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  nằm ngoài nhau. Một đường thẳng  $d$  tiếp xúc ngoài với hai đường tròn tại các điểm  $A, B$ . Một đường thẳng  $d'$  khác  $d$  tiếp xúc ngoài với hai đường tròn tại các điểm  $C, D$ .

a) Chứng minh rằng hoặc các đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song hoặc chúng cắt nhau trên đường thẳng  $OO'$ .

b) Chứng minh rằng  $AB = CD$ .



2) Cho hai đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  nằm ngoài nhau. Một đường thẳng  $d$  tiếp xúc trong với hai đường tròn tại các điểm  $A, B$ . Một đường thẳng  $d'$  khác  $d$  tiếp xúc trong với hai đường tròn tại các điểm  $C, D$ .

a) Chứng minh rằng  $AB = CD$ .

b) Chứng minh rằng các đường thẳng  $AB, CD$  cắt nhau trên đường thẳng  $OO'$ .

3) Cho hai đường tròn  $(O), (O')$  có tâm tương ứng là các điểm  $O, O'$  nằm ngoài nhau. Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tiếp xúc với  $(O)$  tại  $A$  và  $(O')$  tại  $B$ . Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn cắt đường thẳng  $AB$  tại  $I$ , tiếp xúc với  $(O)$  tại  $C$  và  $(O')$  tại  $D$ , biết rằng  $C$  nằm giữa hai điểm  $I, D$ .

a) Hai đường thẳng  $OC, O'B$  cắt nhau tại  $M$ . Chứng minh rằng  $OM > O'M$ .

b) Ký hiệu  $S$  là đường tròn đi qua 3 điểm  $\{A, C, B\}$  và  $S'$  là đường tròn đi qua 3 điểm  $\{A, D, B\}$ . Đường thẳng  $CD$  cắt  $S$  tại  $E$  khác  $C$  và cắt  $S'$  tại  $F$  khác  $D$ . Chứng minh rằng  $AF \perp BE$ .

4) Cho 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng theo đúng thứ tự đó. Ta dựng các hình vuông  $ABMN, BCPQ$  nằm về một phía với đường thẳng  $AB$ . Gọi  $S$  và  $S'$  lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp hình vuông  $ABMN$  và  $BCPQ$ .

a) Chứng minh rằng nếu đường thẳng  $MP$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $S$  và  $S'$ , thì đường thẳng  $PQ$  đi qua tâm hình vuông  $ABMN$ .

b) Chứng minh rằng nếu tiếp tuyến chung của  $S$  và  $S'$  song song với  $AB$ , thì  $B$  là trung điểm của  $AC$ .

5) Cho hai đường tròn  $(O; R), (O'; R')$ , trong đó  $(O'; R')$  đi qua tâm của đường tròn  $(O; R)$ . Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $(O; R)$  tại  $A$  và  $(O'; R')$  tại  $A'$ . Một đường thẳng khác tiếp xúc với  $(O; R)$  tại  $B$  và  $(O'; R')$  tại  $B'$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $A'B'$  tiếp xúc với đường tròn  $(O; R)$ .

6) Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Ta xét 4 đường tròn  $(A; a), (B; b), (C; c), (D; d)$  thoả mãn đồng thời các điều kiện:  $AC > a + c, BD > b + d, a + c = b + d$ . Gọi  $x, x'$  là cặp tiếp tuyến chung

ngoài của hai đường tròn  $(A;a), (C;c)$ ;  $y, y'$  là cặp tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn  $(B;b), (D;d)$ . Các cặp tiếp tuyến đó cắt nhau tại các điểm  $M, N, P, Q$ . Chứng minh rằng giao điểm các đường chéo của hình chữ nhật  $ABCD$  là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác  $MNPQ$ .

7) Cho  $\triangle ABC$ .

a) Chứng minh rằng tồn tại 3 đường tròn có tâm là các đỉnh tam giác và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau.

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung trong của từng cặp đường tròn cắt nhau tại một điểm.

8) Cho hai đường tròn  $(O;2), (O';1)$  tiếp xúc ngoài với nhau. Ta ký hiệu  $AB$  là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tiếp xúc với  $(O;2)$  tại  $A$  và  $(O';1)$  tại  $B$ . Một tiếp tuyến chung ngoài thứ hai  $CD$  của hai đường tròn tiếp xúc với  $(O;2)$  tại  $D$  và  $(O';1)$  tại  $C$ . Tính diện tích tứ giác  $ABCD$ .

9) Cho hai đường tròn  $(O), (O')$  nằm ngoài nhau. Hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tạo với nhau một góc  $60^\circ$  và hai tiếp tuyến chung trong vuông góc với nhau. Tính tỷ số bán kính hai đường tròn đó.

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1a) Nếu  $R = R' \Rightarrow AB \parallel CD$ . Giả sử  $R > R'$ . Gọi  $M, M'$  là giao điểm của đường thẳng  $AB, CD$  với đường thẳng  $OO'$ . Hãy chứng minh rằng  $M, M'$  trùng nhau.

1b) Các  $\triangle MAD, \triangle MBC$  cân tại  $M$ .

3a) Kẻ  $OH \perp O'M, O'K \perp OM$ , khi đó  $OH = AB, O'K = CD$ . Vì  $AB > CD \Rightarrow OH > O'K$ . Trong  $\triangle MOO'$  ta có  $OH.O'M = O'K.OM$ .

4a) Rõ ràng  $AM$  là đường kính của  $S$  và  $BP$  là đường kính của  $S'$ , do đó tứ giác  $BSMP$  là hình chữ nhật ( $S$  là tâm hình vuông  $ABMN$ ) và ta có  $SM = BP \Rightarrow \frac{AB\sqrt{2}}{2} = BC\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2BC \Rightarrow BM = 2BQ$ ; 4b) Từ điều

kiện bài toán ta suy ra  $\frac{AB(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{BC(\sqrt{2}-1)}{2}$ .

5) Gọi  $C$  là giao điểm của tia  $OO'$  với đường tròn  $(O;R)$ . Vì  $OA \parallel O'B \Rightarrow \angle AOB = \angle OBO'$ .  $\triangle O'OB$  cân tại  $O' \Rightarrow \angle O'OB = \angle OBO'$ . Từ

các kết quả trên suy ra  $\angle AOB = \angle O'OB \Rightarrow \triangle OAB = \triangle OCB \Rightarrow OC \perp BC$ .  
Tương tự  $OC \perp B'C$ .

$$8) \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

9) ký hiệu  $R, R'$  lần lượt là bán kính của  $(O), (O')$  và coi  $R \geq R' \Rightarrow \frac{R}{R'} = (\sqrt{2} + 1)^2$ .

## Dựng đường tròn

### A. Bài tập

1) Cho đường tròn  $(O; R)$ , điểm  $A$  và số  $R' > 0$ . Dựng đường tròn có bán kính  $R'$  đi qua  $A$  và tiếp xúc với đường tròn đã cho.

2) Cho đường tròn  $(O; R)$ , đường thẳng  $d$  và điểm  $A$  thuộc  $d$ . Dựng đường tròn tiếp xúc với  $d$  tại  $A$  và tiếp xúc với đường tròn đã cho.

3) Cho đường tròn  $(O; R)$ , đường thẳng  $d$  không có điểm chung với đường tròn đã cho và số  $a > 0$ . Dựng đường tròn có bán kính bằng  $a$  tiếp xúc đồng thời với đường tròn và đường thẳng đã cho.

4) Cho hai đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  nằm ngoài nhau và số  $a > 0$ . Dựng đường tròn có bán kính  $a$  tiếp xúc đồng thời với cả hai đường tròn đã cho.

5) Cho đường tròn  $(O; R)$ , điểm  $A$  thuộc đường tròn và đường thẳng  $d$ . Dựng đường tròn tiếp xúc đồng thời với  $d$  và đường tròn đã cho tại  $A$ .

6) Cho đường tròn  $(O; R)$ , đường thẳng  $d$  và các số  $a > b > 0, (b < R)$ . Dựng đường tròn có bán kính  $a$  và cắt đường tròn đã cho tại hai điểm  $A, B$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $AB = 2b, AB \parallel d$ .

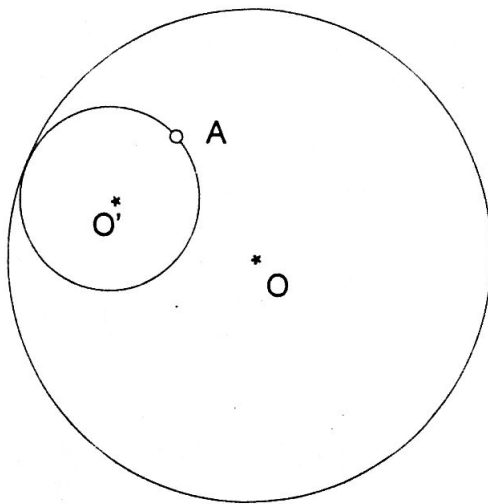
7) Cho đường tròn  $(O; R)$ , đường thẳng  $d$  và các số  $a > b > 0, (b < R)$ . Dựng đường tròn có bán kính  $a$  và cắt đường tròn đã cho tại hai điểm  $A, B$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $AB = 2b, AB \perp d$ .

8) Cho hai đường tròn  $(O; R), (O'; r)$  nằm ngoài nhau và số  $a > 0$ . Hãy dựng đường tròn sao cho nó cắt  $(O; R)$  tại hai điểm  $A, B$  và  $(O'; r)$  tại hai điểm  $C, D$  thỏa mãn điều kiện  $AB = CD = 2a, AB \parallel CD$ .

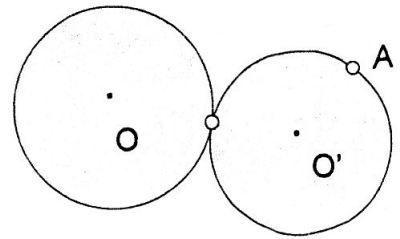
## B. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Trường hợp  $A$  nằm ngoài đường tròn đã cho.

Nếu  $O'$  là tâm đường tròn cần dựng tiếp xúc ngoài với đường tròn đã cho, thì  $O'$  là giao điểm của hai đường tròn  $(A; R')$  và  $(O; R + R')$ . Nếu nó tiếp xúc trong với đường tròn đã cho, thì  $O'$  là giao điểm của hai đường tròn  $(A; R')$  và  $(O; R - R')$ ,  $(R > R')$ .



(b)



(a)

### H. 27

Trường hợp  $A$  nằm trong đường tròn. Tâm  $O'$  là giao điểm của hai đường tròn  $(A; R')$ ,  $(O; R - R')$ . Bài toán chỉ dựng được khi  $R' < R$ . Trường hợp  $A$  nằm trên đường tròn. Tâm  $O'$  nằm trên đường thẳng  $OA$  và cách  $A$  một khoảng  $R'$ .

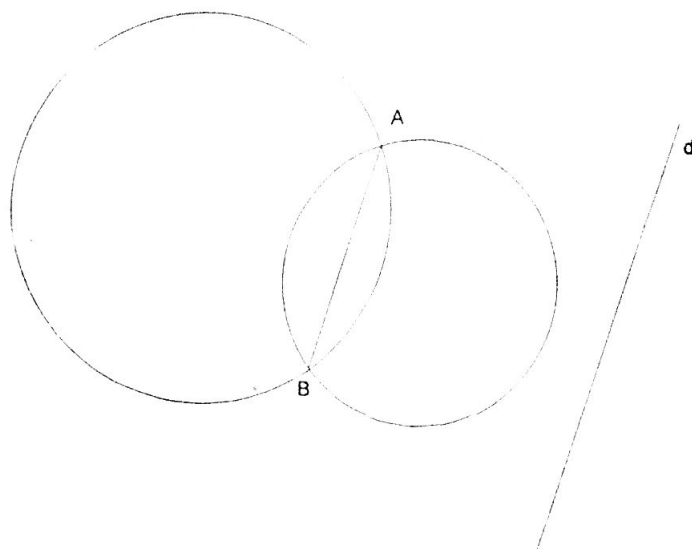
2) Kẻ  $OH \perp d$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $OH$  với  $(O; R)$ . Đường thẳng  $AM$  cắt đường tròn  $(O; R)$  tại  $B$  khác  $M$ . Kẻ  $Ax \perp d$  và đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ . Giao điểm hai đường thẳng đó là tâm đường tròn cần dựng.

3) Kẻ đường thẳng  $d' \parallel d$  nằm cùng phía với đường tròn  $(O; R)$  và cách  $d$  một khoảng  $a$ . Dựng đường tròn  $(O; R + a)$  hoặc  $(O; a - R)$ . Giao điểm của đường tròn đó với  $d'$  là tâm đường tròn cần dựng.

4) Gọi  $I$  là tâm đường tròn cần dựng. Trường hợp đường tròn  $(I; a)$  tiếp xúc ngoài đồng thời với hai đường tròn đã cho. Trong trường hợp này  $I$  là giao điểm của hai đường tròn  $(O; R+a)$  và  $(O'; R'+a)$ . Trường hợp đường tròn  $(I; a)$  tiếp xúc trong đồng thời với hai đường tròn đã cho. Trong trường hợp này  $I$  là giao điểm của hai đường tròn  $(O; a-R)$  và  $(O'; a-R')$ . Bài toán có nghiệm khi  $a > R$  và  $a > R'$ . Trường hợp  $(I; a)$  tiếp xúc ngoài với  $(O; R)$  và tiếp xúc trong với  $(O'; R')$ . Khi đó  $I$  là giao điểm của hai đường tròn  $(O; R+a)$  và  $(O'; a-R')$ .

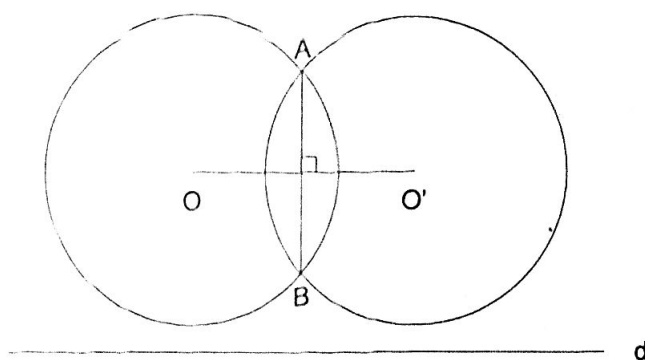
5) Kẻ  $OH \perp d$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $OH$  với  $(O; R)$ . Gọi  $B$  là giao điểm của  $AM$  với  $d$ . Dựng  $Bx \perp d$ . Giao điểm của  $AM$  và  $Bx$  là tâm đường tròn cần dựng.

6) Kẻ  $OH \perp d$ . Tâm đường tròn cần dựng nằm trên đường thẳng  $OH$  và cách điểm  $O$  một khoảng  $\sqrt{R^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}$  hoặc  $|\sqrt{R^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}|$ .



H. 28

7) Kẻ  $Ox \parallel d$ . Tâm đường tròn cần dựng nằm trên đường thẳng  $Ox$  và cách điểm  $O$  một khoảng  $\sqrt{R^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}$  hoặc  $|\sqrt{R^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}|$ .

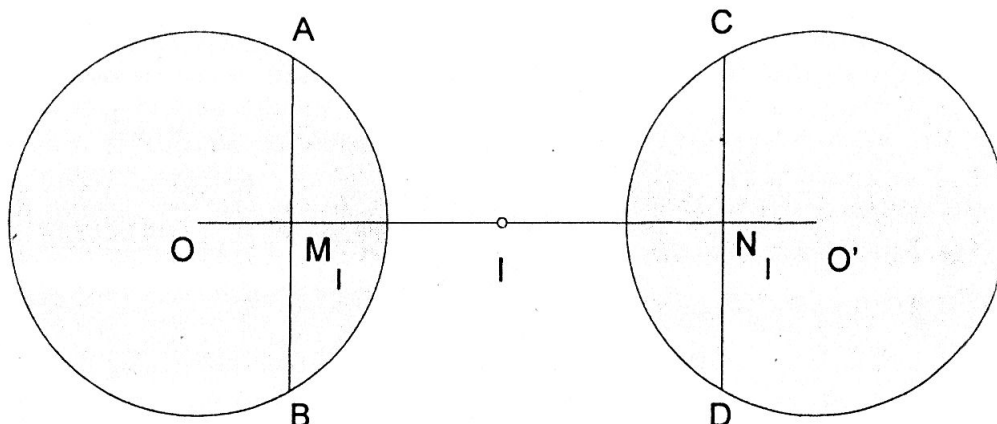


H. 29

8) Trên đường thẳng  $OO'$  ta lấy điểm các điểm  $M_1, M_2$  sao cho

$OM_1 = OM_2 = \sqrt{R^2 a^2}$ . Cũng trên đường thẳng đó ta lấy các điểm  $N_1, N_2$

sao cho  $O'N_1 = O'N_2 = \sqrt{r^2 - a^2}$ . Trung điểm của một trong các đoạn thẳng  $M_1N_1, M_1N_2, M_2N_1, M_2N_2$  là tâm đường tròn cần dựng. Chẳng hạn, ta đặt  $M_1N_1 = 2b$ , đường tròn tâm  $I$  là trung điểm của đoạn  $M_1N_1$  và bán kính  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$  là đường tròn cần dựng.



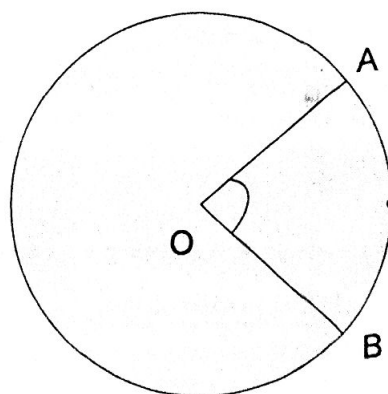
H. 30

### Chương 3. GÓC NỘI TIẾP - GÓC CÓ ĐỈNH NẪM TRONG HOẶC NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

#### Góc ở tâm

##### A. Các kiến thức cần nhớ

Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai điểm  $A, B$  nằm trên đường tròn sao cho đoạn thẳng  $AB$  không là đường kính của đường tròn. Ta nói  $\angle AOB$  là góc ở tâm đường tròn. Cung  $AB$  nằm trong góc được gọi là cung bị chắn bởi góc. Đoạn thẳng  $AB$  được gọi là dây trương cung  $AB$ . Số đo của cung  $AB$  là số đo của  $\angle AOB$ . Số đo của cả đường tròn bằng  $360^\circ$



H. 31

Nếu  $AB$  là đường kính của đường tròn, thì cung  $AB$  là nửa đường tròn và số đo của cung bằng  $180^\circ$ .

Cho hai cung  $AB$  và  $CD$  trên cùng một đường tròn  $(O; R)$  bị chắn bởi các góc  $AOB, COD$ .

Nếu hai cung đó có số đo bằng nhau, thì ta nói hai cung bằng nhau. Nếu số đo của cung  $AB$  lớn hơn số đo cung  $CD$ , thì ta nói cung  $AB$  lớn hơn

cung  $CD$ . Nếu hai cung  $AB$  và  $CD$  bằng nhau, thì  $AB = CD$ . Nếu cung  $AB$  lớn hơn cung  $CD$ , thì  $AB > CD$ .

Các kết quả trên vẫn đúng nếu các cung  $AB$  và  $CD$  nằm trên hai đường tròn bằng nhau.

### **B. Bài tập**

1) Hai cung  $AB$  và  $CD$  nằm trên cùng một đường tròn có số đo tương ứng bằng  $45^\circ, 60^\circ$ . Tính tỷ số độ dài các dây tương các cung đó  $\frac{AB}{CD}$ .

2) Cho đường tròn  $(O; R)$  và các dây cung  $AB = R, CD = R\sqrt{2}, PQ = R\sqrt{3}$ . Tính số đo các cung tương bởi các dây đó.

3) Cho đường tròn  $(O)$  và một đa giác  $M$  nội tiếp chứa tâm đường tròn. Ký hiệu  $\alpha$  là góc ở tâm ứng với cạnh lớn nhất của  $M$ ,  $\beta$  là góc ở tâm ứng với cạnh nhỏ nhất của  $M$  và  $n$  là số cạnh của  $M$ . Chứng minh rằng  $\frac{360^\circ}{\alpha} \leq n \leq \frac{360^\circ}{\beta}$ .

4) Hai đa giác  $M_1, M_2$  cùng nội tiếp đường tròn  $(O)$  và cùng chứa tâm đường tròn đó. Giả sử cạnh lớn nhất của  $M_1$  bé hơn cạnh nhỏ nhất của  $M_2$ . Chứng minh rằng số cạnh của  $M_1$  lớn hơn số cạnh của  $M_2$ .

5) Cho 3 đường tròn tâm  $O_1, O_2, O_3$  có bán kính bằng nhau và cùng đi qua một điểm  $M$ . Ký hiệu  $A, B, C$  lần lượt là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn  $\{(O_1), (O_2)\}; \{(O_2), (O_3)\}; \{(O_3), (O_1)\}$ . Ta ký hiệu  $x$  là số đo cung  $AM$  thuộc đường tròn  $(O_1)$  nằm trong đường tròn  $(O_2)$ ,  $y$  là số đo cung  $BM$  thuộc đường tròn  $(O_2)$  nằm trong đường tròn  $(O_3)$ ,  $z$  là số đo cung  $CM$  thuộc đường tròn  $(O_3)$  nằm trong đường tròn  $(O_1)$ . Tính tổng  $x + y + z$ .

6) Cho hai đường tròn  $(O; 2r), (O; r)$ . Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $(O; r)$  cắt đường tròn  $(O; 2r)$  tại hai điểm  $A, B$ . Tính số đo cung  $AB$  bị chắn bởi  $\angle AOB$ .

### **C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

1)  $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ .

2)  $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ .



3) Ký hiệu  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  là số đo các góc có đỉnh ở tâm đường tròn tương ứng các dây cung là các cạnh của  $M$ . Ta có:

$$n.\alpha \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 360^\circ \Rightarrow n \geq \frac{360^\circ}{\alpha},$$

$$n.\beta \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 360^\circ \Rightarrow n \leq \frac{360^\circ}{\beta}.$$

4) Sử dụng lại bài tập 3).

5)  $180^\circ$ .

6)  $120^\circ$ .

## Góc nội tiếp

### A. Các kiến thức cần nhớ

Cho đường tròn  $(O; R)$  và các điểm phân biệt  $A, B, C$  nằm trên đường tròn đó. Ta gọi  $\angle BAC$  là góc nội tiếp. Cung  $BC$  nằm trong góc đó được gọi là cung bị chắn bởi góc hoặc góc  $\angle BAC$  chắn cung  $BC$ .

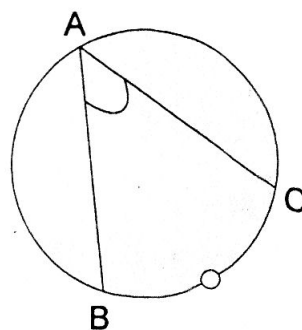
Số đo của  $\angle BAC$  bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Trong cùng một đường tròn các góc nội tiếp cùng chắn một cung có số đo bằng nhau.

Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Cho đoạn thẳng  $AB$  và một góc  $\alpha$ . Nếu điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\angle AMB = \alpha$ , thì ta nói  $M$  nhìn đoạn  $AB$  dưới một góc bằng  $\alpha$ . Tập hợp điểm  $M$  nằm cùng một phía với đường thẳng  $AB$  và nhìn  $AB$  dưới cùng một góc bằng  $\alpha$  thuộc một đường tròn đi qua  $A, B$ .

Một tứ giác lồi nội tiếp đường tròn có tổng hai góc đối diện bằng  $180^\circ$ . Đảo lại nếu một tứ giác lồi có tổng hai góc đối diện bằng  $180^\circ$ , thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.



H. 32

### B. Bài tập

1) Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường phân giác của  $\angle BAC$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $D$  khác  $A$ .

a) Chứng minh rằng  $DB = DC$ .

b) Gọi  $E$  là giao điểm của  $BC$  và  $AD$ . Chứng minh rằng  $AD.AE = AB.AC$

c) Trên đường tròn  $(O)$  ta lấy điểm  $F$  sao cho  $DF \parallel AB$ . Chứng minh rằng  $AD = BF$ ,  $AC = DF$ .

d) Chứng minh rằng  $AD > \frac{AB+AC}{2}$ .

2) Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  không thuộc đường tròn đó. Một đường thẳng đi qua  $M$  cắt đường tròn tại hai điểm  $A, B$ . Một đường thẳng khác đi qua  $M$  cắt đường tròn tại hai điểm  $C, D$ . Chứng minh rằng  $MA.MB = MC.MD$ .

3) Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Ký hiệu  $AH, AD, AE$  lần lượt là đường cao, đường phân giác của tam giác và đường kính của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng  $AD$  là phân giác của  $\angle HAE$ .

4) Các đường phân giác trong của  $\Delta ABC$  cắt đường tròn ngoại tiếp nó tại các điểm  $A', B', C'$  khác  $(A, B, C)$ . Chứng minh rằng giao điểm các đường phân giác là trực tâm của  $\Delta A'B'C'$ .

5) Hình vuông  $ABCD$  nội tiếp đường tròn. Trên cung nhỏ  $AB$  ta lấy điểm  $M$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là giao điểm của các đường thẳng  $MC, MD$  với  $AB, AC$ .

a) Chứng minh rằng 4 điểm  $\{A, M, P, Q\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

b) Chứng minh rằng 4 điểm  $\{BPQC\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

6) Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ . Các đường thẳng  $BI, CI$  cắt các cạnh đối diện tại các điểm  $M, N$ .

a) Chứng minh rằng nếu  $\angle BAC = 60^\circ$ , thì  $IM = IN$ .

b) Chứng minh rằng nếu 4 điểm  $\{A, M, I, N\}$  nằm trên cùng một đường tròn, thì  $\angle BAC = 60^\circ$ .

7) Gọi  $H$  là trực tâm  $\Delta ABC$ ,  $K$  là điểm đối xứng với  $H$  qua đường thẳng  $BC$ . Chứng minh rằng  $K$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

8)  $AC, BD$  là hai dây cung vuông góc của một đường tròn. Gọi  $H$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $BD$ . Chứng minh rằng  $BH \perp CD$ .

9)  $ABCDEF$  là một lục giác nội tiếp.

a) Chứng minh rằng  $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$ .

b) Chứng minh rằng nếu  $AB \parallel DE$  và  $BC \parallel EF$ , thì  $CD \parallel FA$ .

10) Cho  $\Delta ABC$ . Trên các cạnh  $AB, AC$  và về phía ngoài tam giác ta dựng các nửa đường tròn đường kính là các cạnh đó. Gọi  $P$  là điểm nằm

trên nửa đường tròn đường kính  $AB$  và  $H$  là hình chiếu của  $P$  trên đường kính  $AB$ . Gọi  $Q$  là điểm nằm trên nửa đường tròn đường kính  $AC$  và  $K$  là hình chiếu của  $Q$  trên đường kính  $AC$ . Chứng minh rằng nếu  $AP = AQ$ , thì 4 điểm  $\{B, C, K, H\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

11) Giả sử  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ điểm  $M$  nằm trong  $\triangle ABC$  xuống các cạnh  $BC, CA, AB$  thoả mãn điều kiện  $\angle AMB - \angle C = \angle AMC - \angle B$ . Chứng minh rằng  $A_1B_1 = A_1C_1$ .

12) Giả sử  $BC$  là cạnh ngắn nhất của  $\triangle ABC$ . Trên cạnh  $AB$  ta lấy điểm  $M$  sao cho  $\angle BCM = \angle A$ . Trên cạnh  $AC$  ta lấy điểm  $N$  sao cho  $\angle CBN = \angle A$ . Các đường thẳng  $CM, BN$  cắt nhau tại  $D$ .

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp  $\triangle DMN$  đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AMN$ .

b) Chứng minh rằng đường trung trực của cạnh  $BC$  đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AMN$ .

13) Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có các cạnh  $AB = \sqrt{3}, AD = 1$ . Trên các cạnh  $BC, CD$  ta lấy lần lượt các điểm  $M, N$  sao cho  $\angle MAN = 60^\circ$ . Các đoạn thẳng  $AM, AN$  cắt đường chéo  $BD$  tương ứng tại các điểm  $P, Q$ .

a) Gọi  $H$  là giao điểm của  $NP$  và  $MQ$ . Chứng minh rằng  $AH \perp MN$ .

b) Chứng minh rằng tập hợp điểm  $\{P, Q, N, C, M\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

14) Cho đoạn thẳng  $PQ$  và hai tia  $Px, Qy$  vuông góc với  $PQ$  và nằm về cùng một phía với đường thẳng  $PQ$ . Ta xét một  $\triangle ABC$  cân tại đỉnh  $A$  có các đỉnh  $A$  nằm trên đoạn thẳng  $PQ$ ,  $B, C$  nằm tương ứng trên các tia  $Px, Qy$ . Chứng minh rằng khi các đỉnh tam giác thay đổi sao cho  $\angle BAC$  có số đo không đổi, thì trung điểm của cạnh  $BC$  là điểm cố định.

15)  $AC, BD$  là hai đường kính vuông góc của một đường tròn. Trên cung nhỏ  $AB$  ta lấy điểm  $M$ . Gọi  $N$  là giao điểm của đường thẳng  $AM$  và đường thẳng  $BD$ . Đường thẳng vuông góc với  $BD$  tại  $N$  cắt đường thẳng  $DM$  tại  $P$ . Chứng minh rằng tập hợp điểm  $\{P, M, B, N\}$  nằm trên cùng một đường tròn và đường tròn đó tiếp xúc với một đường thẳng cố định khi  $M$  thay đổi trên cung nhỏ  $AB$ .

16) Cho  $\angle xOy = 60^\circ$ . Trên tia  $Ox$  ta lấy hai điểm  $A, B$  ( $B$  nằm trên đoạn thẳng  $OA$ ). Trên tia  $Oy$  ta lấy hai điểm  $C, D$  ( $C$  nằm trên đoạn thẳng  $OD$ ) sao cho  $AB = BC = CD$ .

a) Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng  $AC, BD$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OBC$ .

b) Chứng minh rằng giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $\triangle OAC, \triangle OBD$  nằm trên đường thẳng  $AD$ .

17) Cho đường tròn  $(O)$  và đường thẳng  $d$  không có điểm chung với đường tròn. Trên đường tròn  $(O)$  ta lấy điểm  $A$  cố định, trên đường thẳng  $d$  lấy điểm  $B$  cố định. Với điểm  $C$  bất kỳ thuộc  $d$  và khác  $B$  ta vẽ đường tròn  $(O')$  đi qua  $\{A, B, C\}$ . Đường tròn đó cắt lần thứ hai đường tròn  $(O)$  tại  $D$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $CD$  đi qua một điểm cố định, khi  $C$  thay đổi trên  $d$ .

18) Cho 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng theo đúng thứ tự đó. Ta dựng các hình vuông  $ABMN, BCPQ$  nằm về một phía với đường thẳng  $AB$ . Gọi  $S, S'$  lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp hình vuông  $ABMN$  và  $BCPQ$ .  $E$  là giao điểm của  $S$  và  $S'$  khác  $B$ .

a) Chứng minh rằng đường thẳng  $MC$  đi qua  $E$ .

b) Chứng minh rằng đường thẳng  $AE$  đi qua  $Q$ .

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1d) Xét hình thang  $ABDF$  ta có

$$AD + BF > AB + DF = AB + AC \Rightarrow 2AD > AB + AC$$

3) Hãy xét hai trường hợp: Đường cao  $AH$  và đường kính  $AE$  cùng nằm trong  $\angle BAC$ . Đường cao  $AH$  và đường kính  $AE$  cùng nằm ngoài  $\angle BAC$ .

4) Gọi  $H$  là giao các phân giác. Ta có:

$$\angle HA'B' = \angle CA'B', \angle HB'A' = \angle CB'A'$$

$$\Rightarrow \triangle HA'B' = \triangle CA'B' \Rightarrow A'C = A'H \Rightarrow \triangle A'CH$$

cân tại đỉnh  $A'$  mà  $A'B'$  lại là phân giác nên  $A'B' \perp CH \Rightarrow A'B' \perp C'H$ .

5a) Ta có  $\angle PAQ = \angle PMQ = 45^\circ$  5b). Theo câu trên ta suy ra  $PQ \perp AC$ . Tứ giác  $BCQP$  có hai góc đối diện bằng nhau và bằng  $90^\circ$ .

6a) Từ giả thiết ta suy ra  $\angle MIN = \angle BIC = 120^\circ \Rightarrow$  tứ giác  $AMIN$  nội tiếp. Vì  $AI$  là phân giác của  $\angle MAN \Rightarrow IM = IN$  6b) nếu  $AMIN$  nội tiếp, thì  $\angle BIC + \angle BAC = 180^\circ$ . Mặt khác:

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC \Rightarrow \frac{3}{2} \angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ$$

10) Ta có  $AP^2 = AH \cdot AB, AQ^2 = AK \cdot AC \Rightarrow \triangle APQ$  và  $\triangle ACB$  đồng dạng, do đó  $\angle APQ = \angle ACB$ .

11) Cần chứng minh:

$$\angle A_1 B_1 C_1 = \angle A_1 C_1 B_1$$

$$\Leftrightarrow \angle MAC + \angle MBC = \angle MAB + \angle MCB$$

$$\Leftrightarrow \angle MAC + \angle B - \angle MBA = \angle MAB + \angle C - \angle MCA$$

$$\Leftrightarrow \angle 180^\circ - \angle AMB + \angle C$$

12) Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AMN \Rightarrow \angle MON = 2\angle A$ . Trong  $\triangle DBC$  ta có  $\angle BDC = 180^\circ - 2\angle A \Rightarrow \angle MDN = 180^\circ - 2\angle A$ . Tứ giác lồi  $OMDN$  có tổng hai góc tại các đỉnh  $O, D$  bằng  $180^\circ$ . Đường trung trực của cạnh  $BC$  là đường phân giác của  $\angle BDC$ . Đường thẳng  $OD$  là phân giác của  $\angle MDN$ . Ta biết rằng các tia phân giác của hai góc đối đỉnh nằm trên cùng một đường thẳng.

13) Từ giả thiết ta suy ra  $\angle QBM = 60^\circ, \angle PDN = 60^\circ$ . Từ các tứ giác nội tiếp  $ABMQ, ADNP$  ta suy ra  $NP, MQ$  là các đường cao của  $\triangle AMN$ .

14) Gọi  $H$  là trung điểm của cạnh  $BC$ , khi đó  $AH \perp BC$ . Ta đặt  $\alpha = \angle BAC$ , các tứ giác  $APBH, AQCH$  nội tiếp ta suy ra  $\angle APH = \angle AQH = \alpha$ .

15) Tứ giác  $PMBN$  có hai góc tại các đỉnh  $M, N$  vuông. Đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $PMBN$  là  $PB \perp AB$  tại  $B$ .

16a)  $\triangle ABC$  cân tại  $B \Rightarrow \angle OBC = 2\angle BCA$ . Tương tự

$$\angle OCB = 2\angle CBD \Rightarrow \angle PCB + \angle PBC = 60^\circ \Rightarrow \angle BPC = 120^\circ$$

17) Gọi  $E$  là giao điểm thứ hai của  $CD$  với đường tròn  $(O)$ . Ta có  $\angle EDA = \angle CBA$ , mà  $\angle CBA$  có số đo không đổi. Vì vậy cung  $AE$  thuộc đường tròn  $(O)$  có số đo không đổi.

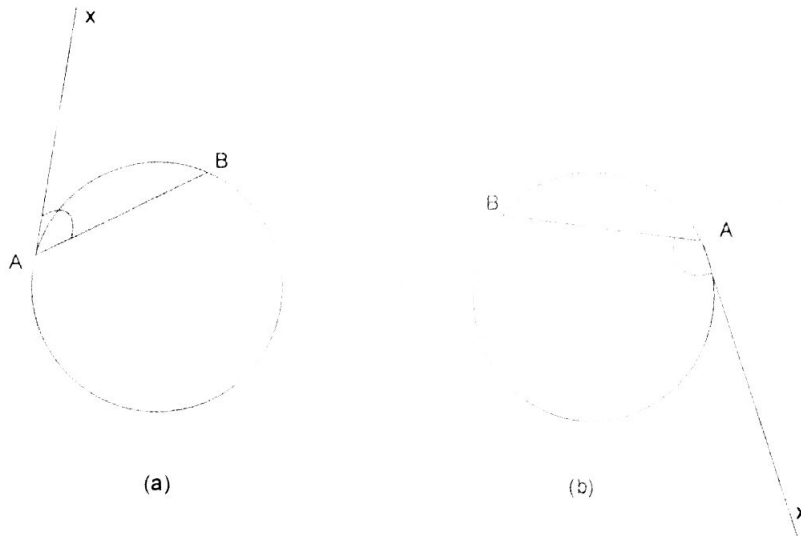
18a) Ta có  $\angle MEB = 135^\circ, \angle BEC = 45^\circ \Rightarrow \angle MEC = 180^\circ$ .

18b) Ta có  $\angle BEQ = 45^\circ, \angle BEA = 45^\circ$ . Các tia  $EQ, EA$  nằm cùng phía với đường thẳng  $BE$ .

## Góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cung

### A. Các kiến thức cần nhớ

1) Cho đường tròn  $(O; R)$  và đường thẳng  $d$  tiếp xúc với đường tròn tại  $A$ . Ta xét nửa đường thẳng  $Ax$  trên  $d$ . Giả sử  $B$  là điểm trên đường tròn khác  $A$ . Ta gọi  $\angle BAx$  là góc tạo bởi dây cung  $AB$  và tia tiếp tuyến  $Ax$ . Cung  $AB$  nằm trong  $\angle BAx$  được gọi là cung bị chắn hoặc góc chắn cung.



H. 33.

2) Số đo của  $\angle BAx$  bằng nửa số đo của cung mà nó chắn.

3) Giả sử  $AB$  là một dây cung của đường tròn chia đường tròn thành hai cung mà một trong hai cung đó có số đo  $\alpha$  và  $Ax$  là tia hợp với  $AB$  một góc có số đo bằng  $\alpha$ , khi đó  $Ax$  là tiếp tuyến đường tròn tại  $A$ .

### B. Bài tập

1) Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn. Từ  $M$  ta kẻ tới đường tròn đó cát tuyến  $MAB$  và tiếp tuyến  $MT$  ( $T$  là tiếp điểm). Chứng minh rằng  $MT^2 = MA \cdot MB$ .

2) Trên hai cạnh của  $\angle xMy$  ta lấy các điểm  $T$  thuộc cạnh  $Mx$  và  $A, B$  thuộc cạnh  $My$  thoả mãn điều kiện  $MT^2 = MA \cdot MB$ . Chứng minh rằng đường tròn đi qua 3 điểm  $\{A, B, T\}$  tiếp xúc với đường thẳng  $MT$ .

3) Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai tiếp tuyến của đường tròn tại các điểm  $A, B$  cắt nhau tại  $M$ . Trên đường tròn ta lấy điểm  $C$  sao cho  $AC \parallel MB$ . Đường thẳng  $MC$  cắt đường tròn lần thứ hai tại  $D$ .

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADM$  tiếp xúc với đường thẳng  $MB$

b) Chứng minh rằng đường thẳng  $AD$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $MB$ .

4) Hai đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại hai điểm  $P, Q$ . Một đường thẳng đi qua  $Q$  cắt lần thứ hai đường tròn  $(O)$  tại  $A$  và đường tròn  $(O')$  tại  $B$ . Các đường thẳng tiếp xúc tại  $A$  và  $B$  của hai đường tròn cắt nhau tại  $C$ .

a) Chứng minh rằng tập hợp điểm  $\{A, B, C, P\}$  nằm trên cùng một đường tròn.



b) Gọi  $M$  là giao điểm của  $AB$  và  $CP$ . Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle APM$  tại  $M$  song song với đường thẳng  $BC$ .

5) Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AC > BD$ . Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABCD$  cắt đường chéo  $AC$  tại  $M$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $BD$  là tiếp tuyến chung của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $\triangle ABM, \triangle ADM$ .

6) Hai đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$ . Tiếp tuyến tại  $A$  của hai đường tròn cắt chúng lần thứ hai tại các điểm  $C, D$ .

a) Chứng minh rằng  $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC}{BD}$ .

b) Giả sử  $C, B, D$  không thẳng hàng. Gọi  $S$  là đường tròn đi qua 3 điểm  $\{C, B, D\}$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AB$  đi qua trung điểm của cung  $CD$  thuộc  $S$  không chứa  $B$ .

7) Hai đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$ . Tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc với  $(O)$  tại  $C$  và với  $(O')$  tại  $D$  (khoảng cách từ  $B$  đến  $CD$  nhỏ hơn khoảng cách từ  $A$  đến đường thẳng đó). Gọi  $S$  là đường tròn đi qua 3 điểm  $\{C, B, D\}$  và  $E$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $AB$  với  $S$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $ACED$  là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng  $\angle OAO' = 2\angle CBD$ .

8) Cho  $\triangle ABC$  cân tại đỉnh  $A$  và đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với hai cạnh  $AB, AC$  tại các điểm  $B, C$ . Trên đường tròn  $(O)$  và bên trong tam giác ta lấy điểm  $M$ .

a) Gọi  $P, Q, H$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $MH^2 = MP \cdot MQ$ .

b) Tiếp tuyến tại  $M$  của đường tròn cắt  $AB, AC$  tương ứng tại các điểm  $K, L$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle AKL$ . Chứng minh rằng  $\triangle IKL$  đồng dạng với  $\triangle MBC$ .

9) Cho hình thang  $ABCD (AB \parallel CD)$ . Giả sử đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD$  cắt đường chéo  $AC$  tại  $M$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $BD$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CDM$ .

10) Cho đường tròn  $(O)$  và hai tiếp tuyến tại các điểm  $B, C$  của đường tròn cắt nhau tại  $A$ . Vẽ đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với đường thẳng  $BC$  tại  $C$  và đi qua  $A$ . Gọi  $M$  là giao điểm thứ hai của  $(O)$  và  $(O')$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $BM$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ .



11) Cho  $\triangle ABC$  và điểm  $M$  nằm trong tam giác thỏa mãn điều kiện  $\angle BMC = 90^\circ + \angle A$ . Gọi  $(O), (O')$  lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $\triangle ABM, \triangle ACM$ .

a) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại  $M$  của  $(O)$  đi qua tâm của  $(O')$ .

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến của hai đường tròn tại  $A$  vuông góc với nhau.

12) Tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $AB = BD$ . Tiếp tuyến của đường tròn tại  $A$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $M$ . Các đường thẳng  $AB, CD$  cắt nhau tại  $N$ . Chứng minh rằng  $MN \parallel AD$ .

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

2) Từ điều kiện bài toán ta suy ra  $\triangle MAT$  đồng dạng với  $\triangle MTB \Rightarrow \angle MTA = \angle ABT \Rightarrow \angle MTA$  có số đo bằng số đo của cung  $AT$  không chứa điểm  $B$ . Vì vậy đường thẳng  $MT$  có điểm chung  $T$  duy nhất với đường tròn đi qua  $\{A, B, T\}$ .

3a) Ta có  $\angle MAD = \angle ACD = \angle DMB$ . Theo kết quả bài tập 2) ta suy ra  $MB$  tiếp xúc tại  $M$  với đường tròn đi qua  $\{M, A, D\}$ .

3b) Gọi  $E$  là giao điểm của các đường thẳng  $MB, AD$ . Ta có  $ME^2 = MA \cdot MD, MB^2 = MA \cdot MD$ .

6a)  $\triangle ABC$  đồng dạng với :

$$\triangle ABD \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AB}{BD} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{BD};$$

6b) Gọi  $E$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $AB$  với đường tròn  $S$ . Hãy chứng minh rằng  $\angle CBE = \angle DBE$ .

8b) Ta thấy rằng  $\angle AKM$  là góc ngoài của  $\triangle BKM \Rightarrow \angle IKM = \angle KBM = \angle BCM$ .

10) Gọi  $N$  là giao điểm của  $AC$  và  $BM$ . Từ giả thiết ta suy ra  $NC^2 = NM \cdot NB$ . Ta có  $\angle NAM = \angle MCB = \angle ABN \Rightarrow \triangle NAM$  đồng dạng với  $\triangle NBA \Rightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{NM}{NA} \Rightarrow NA^2 = NM \cdot NB$ .

11) Hãy kẻ các tia  $Mx, My$  nằm trong  $\angle BMC$  và tiếp xúc với hai đường tròn tại  $M$ . Ta có:

$\angle BAM = \angle BMx, \angle CAM = \angle CMy \Rightarrow \angle A = \angle BMx + \angle CMy \Rightarrow \angle xMy = 90^\circ$ .  
Điều đó chứng tỏ rằng  $Mx$  đi qua tâm của đường tròn  $(O')$ .

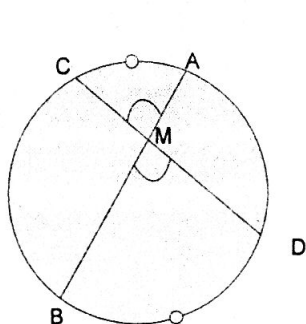
12) Ta có  $\angle MAN = \angle BAD = \angle MCN \Rightarrow \{A, C, M, N\}$  nằm trên cùng một đường tròn, do đó  $\angle MNA = \angle MCA = \angle MAB \Rightarrow \angle NAD = \angle MNA$ .

## Góc có đỉnh nằm trong hoặc ngoài đường tròn

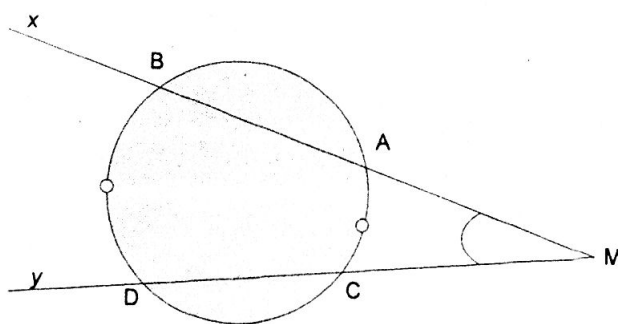
### A. Các kiến thức cần nhớ

1) Cho đường tròn  $(O)$  và hai dây cung  $AB, CD$  cắt nhau tại  $M$ . Ta gọi  $\angle AMC$  là góc có đỉnh nằm trong đường tròn. Các cung  $AC, BD$  nằm trong  $\angle AMC$  và  $\angle BMD$  đối đỉnh với nó được gọi là các cung bị chắn bởi góc  $\angle AMC$ . Số đo của  $\angle AMC$  bằng nửa tổng số đo các cung mà nó chắn.

2) Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  nằm ngoài nó. Hai tia  $Mx, My$  có điểm chung với đường tròn  $(O)$  tương ứng tại các điểm  $A, B, C, D$  ( $A, B$  có thể trùng nhau hoặc  $C, D$  có thể trùng nhau), trong đó  $A$  thuộc đoạn thẳng  $MB$  và  $C$  thuộc đoạn thẳng  $MD$ . Ta gọi  $\angle AMC$  là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn. Các cung tròn  $AC, BD$  nằm trong góc đó được gọi là các cung bị chắn bởi góc hoặc góc chắn các cung. Số đo của  $\angle AMC$  bằng trị số tuyệt đối của nửa hiệu số đo hai cung.



(a)



(b)

H. 34

### B. Bài tập

1) Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $M$  là giao điểm các đường chéo hình thang. Giả sử  $N$  là giao điểm các tiếp tuyến của đường tròn tại  $A, D$ . Chứng minh rằng tập hợp điểm  $\{A, O, M, D, N\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

2) Cho đường tròn  $(O)$  và hai điểm  $A, B$  cố định thuộc  $(O)$ . Ta xét hai dây cung  $AC, BD$  của đường tròn cắt nhau tại  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\angle AMB = \alpha$  ( $\alpha$  là một góc cho trước). Chứng minh rằng khi các dây cung đó thay đổi, thì độ dài  $CD$  không đổi.

Hãy giải bài toán tương tự trong trường hợp các dây cung  $AC, BD$  kéo dài cắt nhau tại  $M$ .

3) Cho đường tròn  $(O; R)$  và tứ giác  $ABCD$  nội tiếp có  $AB = R, CD = R\sqrt{3}$ . Tính góc tạo bởi hai đường chéo  $AC, BD$  và góc tạo bởi hai đường thẳng  $AD, BC$ .

4) Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn và điểm  $I$  nằm trong tam giác. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường thẳng  $AI, BI, CI$  với đường tròn ngoại tiếp. Dây cung  $B'C'$  cắt các cạnh  $AB, AC$  tương ứng tại các điểm  $M, N$ . Dây cung  $C'A'$  cắt các cạnh  $BA, BC$  tương ứng tại  $E, F$ . Dây cung  $A'B'$  cắt các cạnh  $CB, CA$  tương ứng tại các điểm  $P, Q$ . Chứng minh rằng nếu  $AM = AN, BE = BF, CP = CQ$  xảy ra đồng thời, thì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

5) Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn. Giả sử tiếp tuyến tại  $A$  của đường tròn cắt đường thẳng  $BC$  tại điểm  $M$ . Đường phân giác của  $\angle BAC$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Chứng minh rằng  $MA = MD$ .

6) Tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn thỏa mãn điều kiện là các đường phân giác của  $\angle BAD, \angle BCD$  cắt nhau trên đường chéo  $BD$  và các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác tại  $A, C$  cắt nhau tại  $M$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $BD$  đi qua  $M$ .

7) Đường tròn tâm  $I$  nội tiếp tứ giác  $ABCD$  tiếp xúc với các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  tương ứng tại các điểm  $M, N, P, Q$ . Các đoạn thẳng  $IA, IB, IC, ID$  cắt các cung của đường tròn  $(I)$  tương ứng tại các điểm  $A', B', C', D'$ . Chứng minh rằng  $A'C' \perp B'D'$ .

8) Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $A'$  là giao điểm thứ hai của hai đường tròn  $(B; BA)$  và  $(C; CA)$ . Trên cung  $\widehat{AA'}$  của đường tròn  $(B; BA)$  và về phía trong đường tròn  $(C; CA)$  ta lấy điểm  $M$ . Tia  $AM$  cắt đường tròn  $(C; CA)$  tại  $P$ . Tia  $A'M$  cắt đường tròn đó tại  $Q$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $PQ$  đi qua  $C$ .

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1)  $\angle AMD$  chắn hai cung  $AD, BC$  có số đo bằng nhau, do đó  $\angle AMD = \text{sđ } \widehat{AD} = \angle AOD$ . Tứ giác  $AODN$  nội tiếp.

2) Theo điều kiện bài toán  $\angle AMB$  có đỉnh nằm trong đường tròn và có số đo không đổi, nên tổng số đo hai cung  $\widehat{AB}$  và  $\widehat{CD}$  không đổi. Vì số đo cung  $\widehat{AB}$  không đổi, nên số đo cung  $\widehat{CD}$  không đổi, nghĩa là độ dài của dây  $CD$  không đổi.

3)  $AC \perp AB$ ;  $\angle(AD, BC) = 30^\circ$ .

4) Từ  $AM = AN \Rightarrow \angle NMN = \angle ANM \Rightarrow \text{sđ}(\widehat{AB'} + \widehat{BC'}) = \text{sđ}(\widehat{AB'} + \widehat{CB'})$ .  
Tương tự ta có  $\text{sđ}(\widehat{BA'} + \widehat{AC'}) = \text{sđ}(\widehat{BC'} + \widehat{CA'})$ ,  $\text{sđ}(\widehat{BA'} + \widehat{CB'}) = \text{sđ}(\widehat{AB'} + \widehat{CA'})$ . Từ các đẳng thức đó ta suy ra điều cần chứng minh.

5) Gọi  $E$  là giao điểm của tia  $AD$  với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Ta có  $\angle MDA = \frac{1}{2} \text{sđ}(\widehat{AB} + \widehat{CE})$ ,  $\angle MAD = \frac{1}{2} \text{sđ}(\widehat{AB} + \widehat{BE})$ .

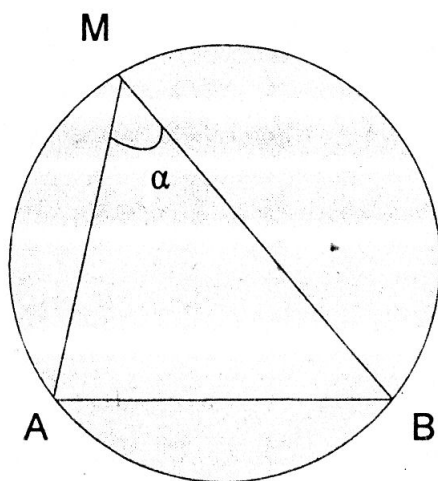
6) Sử dụng lại kết quả bài 5).

## Cung chứa góc

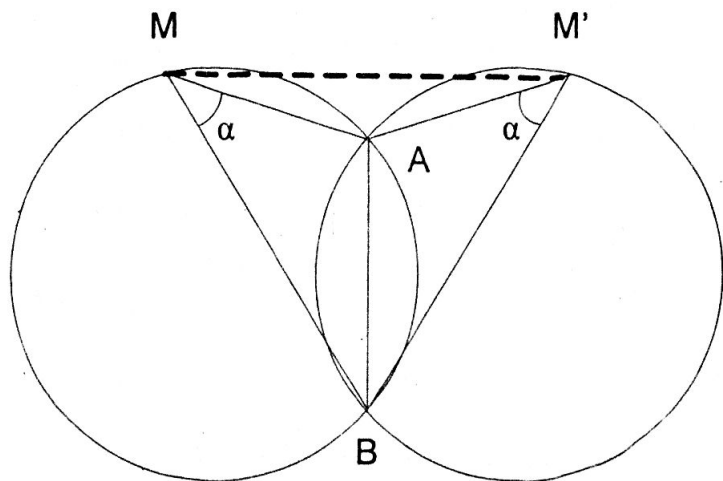
### A. Các kiến thức cần nhớ

1) Cho đoạn thẳng  $AB$  và góc  $\alpha \neq 0$ . Ta nói điểm  $M$  nhìn đoạn thẳng  $AB$  dưới một góc  $\alpha$ , nếu  $\angle AMB = \alpha$ . Trường hợp  $M$  trùng với  $A$  hoặc  $B$ , thì  $\angle BAx = \alpha$  hoặc  $\angle ABy = \alpha$ .

2) Cho đoạn thẳng  $AB$  và góc  $\alpha \neq 0$ . Tập hợp điểm  $M$  nằm cùng phía với đường thẳng  $AB$  và nhìn đoạn  $AB$  dưới một góc bằng  $\alpha$  là một cung tròn nối hai điểm  $A, B$  kể cả hai đầu mút của cung. Ta gọi cung tròn đó là cung chứa góc  $\alpha$ .



H. 35



H. 36

3) Tập hợp điểm  $M$  nhìn đoạn  $AB$  dưới một góc bằng  $\alpha$  là một trong hai cung tròn nối hai điểm  $A, B$  kể cả hai đầu mút của cung. Hai cung đó đối xứng với nhau qua đường thẳng  $AB$ .

## **B. Một số dạng toán mà cách giải có sử dụng cung chứa góc**

### **1. Chứng minh tập hợp điểm nằm trên cùng một đường tròn**

#### **A. Bài tập**

1) Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có  $AB = BC = CD$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo tứ giác.  $I$  là giao điểm các đường phân giác của hai góc  $\angle BAD, \angle CDA$ . Chứng minh rằng tập hợp điểm  $\{A, O, I, D\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

2) Cho tam giác  $\triangle ABC$  có  $\angle BAC = 60^\circ$  và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác và các đỉnh  $B, C$  nằm trên cùng một đường tròn.

3) Cho tam giác  $\triangle ABC$  có  $\angle BAC = 60^\circ$  và trực tâm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm tam giác và các đỉnh  $B, C$  nằm trên cùng một đường tròn.

4) Cho  $\triangle ABC$ . Giả sử các điểm  $A', B', C'$  lần lượt nằm trên các cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho các đường thẳng  $AA', BB', CC'$  cắt nhau tại  $H$  và các tứ giác  $BCB'C', ACA'C'$  nội tiếp. Chứng minh rằng tứ giác  $ABA'B'$  nội tiếp và  $H$  là trực tâm  $\triangle ABC$ .

5) Cho hình bình hành  $ABCD$ . Giả sử đường phân giác của  $\angle BAD$  cắt cạnh  $CD$  tại điểm  $M$  và phần kéo dài của cạnh  $BC$  tại điểm  $N$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn đi qua 3 điểm  $\{C, M, N\}$ .

a) Chứng minh rằng tập hợp các điểm  $\{C, B, D, O\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

b) Gọi  $I$  là giao điểm các đường chéo của hình bình hành,  $E$  là điểm đối xứng với  $C$  qua đường thẳng  $OI$ . Chứng minh rằng tập hợp điểm  $\{C, D, E, O\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

c) Cho đường thẳng  $d$  và hai điểm  $A, B$  nằm về một phía với  $d$ . Giả sử đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$  cắt  $d$  tại điểm  $N$ . Trên  $d$  ta lấy điểm  $M$  sao cho  $MA + MB$  có giá trị nhỏ nhất. Chứng minh rằng tập hợp điểm  $\{A, B, M, N\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

7) Cho hai đường tròn  $(O; R), (O'; R') (R < R')$  nằm ngoài nhau. Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tiếp xúc với  $(O)$  tại  $A$  và  $(O')$  tại  $B$ . Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tiếp xúc với  $(O)$  tại  $C$  và

( $O'$ ) tại  $D$ , biết rằng  $AB \perp CD$ . Đường thẳng  $BC$  cắt ( $O$ ) lần thứ hai tại điểm  $P$ . Đường thẳng  $AD$  cắt ( $O'$ ) lần thứ hai tại  $Q$ . Chứng minh rằng tập hợp điểm  $\{A, B, P, Q\}$  nằm trên cùng một đường tròn.

### B. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Đặt  $\alpha = \angle CBD$ ,  $\beta = \angle BCA \Rightarrow \angle AOD = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ . Ta có:

$$\begin{aligned}\angle A + \angle D &= 360^\circ - (\angle B + \angle C) = 360^\circ - (180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha) = 2(\alpha + \beta) \\ \Rightarrow \angle IAD + \angle IDA &= \alpha + \beta \Rightarrow \angle AID = 180^\circ - (\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Từ các kết quả trên ta suy ra  $\angle AID = \angle AOD$ .

2) Gọi  $O, I$  là tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tương ứng, thì ta có  $\angle BOC = 2\angle A = 120^\circ$ ,  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ . Các kết quả trên chứng tỏ  $O, I$  nằm trên cùng một cung chứa góc ứng với dây  $BC$ .

4) Ta có:  $\angle BB'C = \angle BC'C$ ,  $\angle AA'C = \angle AC'C$

$$\Rightarrow \angle AC'H = \angle AB'H, \angle BC'H = \angle BA'H$$

Mặt khác ta lại có  $\angle C'BB' = \angle C'CB' = \angle C'A'A \Rightarrow BC'HA'$  nội tiếp.

$$\text{Vì vậy } \angle BC'H + \angle BA'H = 180^\circ \Rightarrow \angle BC'H = \angle BA'H = 90^\circ.$$

5a) Hãy chứng minh rằng  $\triangle OMD = \triangle OCB \Rightarrow \angle ODC = \angle OBC$ .

5b) Từ câu trên ta có  $OB = OD \Rightarrow OI \perp BD \Rightarrow$  đường thẳng  $OI$  đi qua tâm đường tròn  $\{B, C, O, D\}$ . Đường thẳng  $OI$  là trục đối xứng của đường tròn, do đó  $E$  cũng thuộc đường tròn đó.

6) Gọi  $B'$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $d$ . Giao điểm của  $d$  với đường thẳng  $AB'$  là điểm  $M$ . Ta có  $\angle NBM = \angle NB'M$  (do tính đối xứng),  $\angle NAM = \angle NB'M$  ( $\triangle NAB'$  cân tại  $N$ ). Từ đó ta suy ra  $\angle NAM = \angle NBM$  và các điểm  $A, B$  nằm trên cùng một cung chứa góc dựng trên dây  $MN$ .

7) Hãy chứng minh rằng  $\angle APB = \angle AQB = 45^\circ$ .

## 2. Chứng minh một số tính chất hình học

### A. Bài tập

1) Cho  $\triangle ABC$  và điểm  $I$  nằm trong tam giác thoả mãn điều kiện  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$  và  $\angle AIC = 90^\circ + \frac{B}{2}$ . Chứng minh rằng  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .



2) Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều  $\Delta ABC$  ta lấy điểm  $K$  (không trùng với các đỉnh tam giác). Ta dựng đường thẳng  $Kx \parallel BC$  và ký hiệu  $M$  là giao điểm của  $Kx$  với đường thẳng  $AC$ . Ta dựng đường thẳng  $Ky \parallel AC$  và ký hiệu  $N$  là giao điểm của  $Ky$  với đường thẳng  $AB$ . Ta dựng đường thẳng  $Kz \parallel AB$  và ký hiệu  $E$  là giao điểm của  $Kz$  với đường thẳng  $BC$ . Chứng minh rằng các điểm  $\{M, N, E\}$  thẳng hàng.

3) Giả sử các điểm  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt thuộc các cạnh  $BC, CA, AB$  của  $\Delta ABC$  thoả mãn điều kiện  $\angle AA_1C = \angle BB_1A = \angle CC_1B$ . Các đoạn thẳng  $BB_1$  và  $CC_1$  cắt nhau tại  $A_2$ ,  $AA_1$  và  $CC_1$  cắt nhau tại  $B_2$ ,  $BB_1$  và  $AA_1$  cắt nhau tại  $C_2$ .

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $\Delta A_2BC, \Delta B_2AC, \Delta C_2AB$  cùng đi qua trực tâm  $H$  của  $\Delta ABC$ .

b) Chứng minh rằng  $H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta A_2B_2C_2$ .

4) Cho đường tròn  $(O)$  và dây cung  $AB$  cố định khác đường kính. Với mỗi điểm  $C$  trên cung lớn  $AB$  ta xét các đường tròn  $(O_1)$  đi qua  $A$  và tiếp xúc với đường thẳng  $BC$  tại  $C$ . Đường tròn  $(O_2)$  đi qua  $B$  và tiếp xúc với đường thẳng  $AC$  tại  $C$ . Gọi  $M$  là giao điểm thứ hai của hai đường tròn đó.

a) Chứng minh rằng khi  $C$  thay đổi trên cung đó, thì  $M$  chạy trên một đường tròn cố định.

b) Chứng minh rằng đường thẳng  $CM$  đi qua một điểm cố định.

5) Tính số đo  $\angle BAC$  của  $\Delta ABC$ , biết rằng trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp nằm trên cùng một cung chứa góc dựng trên dây  $BC$ .

6) Tính số đo  $\angle BAC$  của  $\Delta ABC$ , biết rằng tâm các đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác nằm trên cùng một cung chứa góc dựng trên dây  $BC$ .

### B. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Gọi  $I'$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ , ta có  $\angle BI'C = 90^\circ + \frac{A}{2}$ ,  
 $\angle AI'C = 90^\circ + \frac{B}{2} \Rightarrow$  tứ giác  $BCII', ACII'$  nội tiếp. Điều đó chứng tỏ  $I'$  thuộc đồng thời hai đường tròn khác nhau cùng đi qua  $I, C$ .

5)  $60^\circ$ .

6)  $60^\circ$ .

### 3. Dựng hình

Ta quy ước một cung chứa góc hoàn toàn dựng được, nếu ta biết một đoạn thẳng cho trước là dây cung và số đo góc.



### A. Bài tập

- 1) Dụng  $\triangle ABC$ , biết  $AB = c$ ,  $AC = b$  và góc nhọn tạo bởi  $BC$  với trung tuyến  $AM$  bằng  $\alpha$ .
- 2) Dụng  $\triangle ABC$ , biết  $BC = a$ ,  $\angle A = \alpha$  và đường cao  $AH = h$ .
- 3) Dụng  $\triangle ABC$ , biết  $BC = a$ ,  $\angle A = \alpha$  và trung tuyến  $AM = m$ .
- 4) Dụng  $\triangle ABC$ , biết  $BC = a$ ,  $\angle A = \alpha$  và bán kính đường tròn nội tiếp  $r$ .
- 5) Dụng  $\triangle ABC$ , biết  $AB = c$ ,  $\angle A - \angle B = \alpha$  và đường cao  $CH = h$ .
- 6) Dụng hình thang  $ABCD$ , biết hai đáy  $AB = a$ ,  $CD = b$ , cạnh bên  $BC = c$  và góc tạo bởi hai đường chéo bằng  $\alpha$ .

### B. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Giả sử  $\triangle ABC$  đã dựng có  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $\angle AMB = \alpha$ . Khi đó  $M$  thuộc cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên dây  $AB$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  ta có  $IM = \frac{b}{2} \Rightarrow M$  thuộc đường tròn  $(I, \frac{b}{2})$ . Vậy  $M$  là điểm chung của cung chứa góc và đường tròn  $(I, \frac{b}{2})$ . Điểm  $C$  đối xứng với  $B$  qua  $M$ .

5) Kẻ qua  $C$  đường thẳng  $d \parallel AB$  và gọi  $B'$  đối xứng với  $B$  qua  $d$ . Ta chứng minh được  $\angle ACB' = 180^\circ - \alpha$ . Như vậy  $C$  là giao điểm của cung chứa góc  $180^\circ - \alpha$  dựng trên dây  $AB'$  và đường thẳng  $d$ .

### 4. Tập hợp điểm là một cung tròn

#### A. Bài tập

1) Cho tam giác  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn có cạnh  $BC$  cố định. Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp tam giác khi  $A$  biến thiên trên đường tròn.

2) Cho đường tròn  $(O)$  và dây cung  $AB$  cố định. Với mỗi điểm  $C$  trên cung lớn  $AB$  ta dựng điểm  $M$  nằm trên tia đối của tia  $CA$  và thỏa mãn điều kiện  $CM = CB$ . Tìm tập hợp  $M$ .

3) Cho  $\triangle ABC$  cân tại đỉnh  $A$ . Với mỗi điểm  $M$  nằm trong tam giác ta xác định  $H, P, Q$  tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ  $M$  xuống các cạnh  $BC, CA, AB$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $MH^2 = MP \cdot MQ$ .

4) Cho hai đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$ . Một đường thẳng đi qua  $A$  cắt các đường tròn lần thứ hai tại các điểm  $C, D$ . Tìm tập hợp trung điểm của đoạn  $CD$ , khi đường thẳng  $CD$  quay quanh  $A$ .

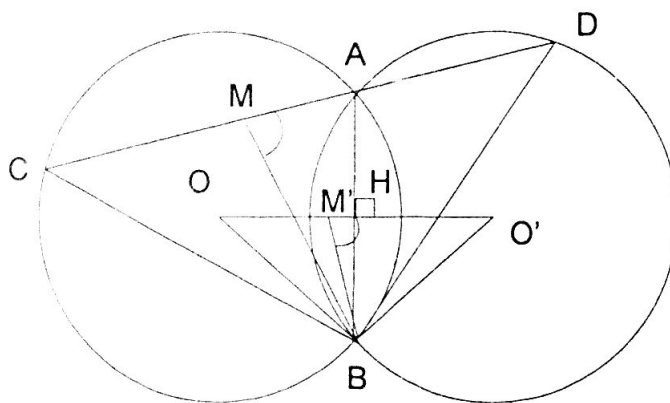
### B. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Nếu  $\angle BAC = \alpha$ , thì  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ . Nếu  $\angle BAC = \beta$ , thì  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ . Tập hợp  $I^*$  là một trong hai cung chứa góc được dựng trên dây  $BC$ .

2) Đặt  $\angle ACB = 2\alpha$  với  $\alpha$  là một số không đổi, khi đó  $\angle AMB = \alpha$ . Tập hợp  $M$  là một cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên dây  $AB$ .

3) Ta chứng minh được rằng số đo của  $\angle BMC$  không đổi.

4) Ta chứng minh được  $\triangle BCD$  đồng dạng với  $\triangle BOO'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ ,  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $B$  xuống  $CD$ ,  $M'$  là trung điểm của đoạn thẳng  $OO'$  và  $H'$  là giao điểm của  $AB$  với đường thẳng  $OO'$ , khi đó  $\angle BMH = \angle BM'H'$ . Vì  $\angle BM'H'$  có số đo không đổi, nên  $\angle BMH$  có số đo không đổi. Điểm  $M$  luôn nhìn đoạn thẳng  $AB$  dưới một góc không đổi bằng  $\angle BM'H'$ .



H. 37

## Đường thẳng biến thiên đi qua một điểm cố định

### Bài toán

Cho đường thẳng  $d$  thay đổi thoả mãn điều kiện  $X$ . Tìm điểm cố định  $M$  mà  $d$  đi qua.

### Phương pháp

Ta cần xác định điểm  $M$ . Có thể tìm  $M$  bằng một trong các cách sau:

- Đoán nhận điểm  $M$  dựa vào một số điểm đặc biệt có trong giả thiết của bài toán. Những điểm đó không phụ thuộc vào vị trí của  $d$ .
- Đoán nhận điểm  $M$  bằng cách xét các vị trí đặc biệt của  $d$ .
- Sử dụng lại một số bài toán có liên quan tới tìm  $M$  đã gặp trước đó.
- Phương pháp tọa độ.

### Bài tập

1. Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Với mỗi điểm  $C$  thuộc nửa đường tròn ta lấy điểm  $H$  trên đường kính  $AB$  sao cho  $AB$  vuông góc với  $CH$ .

Xét đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với nửa đường tròn tại  $M$ , với  $CH$  tại  $N$  và với đoạn thẳng  $BH$ . Chứng minh rằng khi  $C$  thay đổi, thì đường thẳng  $MN$  đi qua một điểm cố định.

2. Cho góc  $xOy$  và điểm  $A$  cố định trên tia  $Ox$ . Với mỗi điểm  $B$  thuộc tia  $Oy$  ta dựng đường tròn nội tiếp tam giác  $OAB$ , tiếp xúc với cạnh  $OB$  tại  $N$  và cạnh  $AB$  tại  $M$ . Chứng minh rằng khi  $B$  thay đổi trên tia  $Oy$ , thì đường thẳng  $MN$  đi qua một điểm cố định.

3. Cho góc  $xOy$  và điểm  $A$  cố định trên tia  $Ox$ . Với mỗi điểm  $B$  thuộc tia  $Oy$  ta dựng đường tròn bàng tiếp tam giác  $OAB$ , tiếp xúc với cạnh  $OB$  tại  $N$  và đường thẳng  $AB$  tại  $M$ . Chứng minh rằng khi  $B$  thay đổi trên tia  $Oy$ , thì đường thẳng  $MN$  đi qua một điểm cố định.

4. Cho góc  $xOy$  và các độ dài  $a, b$ . Trên hai cạnh của góc ta lấy các điểm  $A, B$  thoả mãn điều kiện  $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} = 1$ . Chứng minh rằng khi các điểm  $A, B$  thay đổi, thì đường thẳng  $AB$  đi qua một điểm cố định

5. Cho góc  $xOy$  và các độ dài  $a, b$ . Trên hai cạnh của góc ta lấy các điểm  $A, B$  thoả mãn điều kiện  $\frac{a}{OA} - \frac{b}{OB} = 1$ . Chứng minh rằng khi các điểm  $A, B$  thay đổi, thì đường thẳng  $AB$  đi qua một điểm cố định

6. Cho góc  $xOy$  và độ dài  $a$ . Trên hai cạnh của góc ta lấy các điểm  $A, B$  thoả mãn điều kiện  $OA + OB = a$ . Chứng minh rằng khi các điểm  $A, B$  thay đổi, thì đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$  đi qua một điểm cố định

7. Cho góc  $xOy$  và độ dài  $a$ . Trên hai cạnh của góc ta lấy các điểm  $A, B$  thoả mãn điều kiện  $OA - OB = a$ . Chứng minh rằng khi các điểm  $A, B$  thay đổi, thì đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$  đi qua một điểm cố định

8. Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  có đường chéo  $BD$  cố định và khác đường kính. Các đỉnh  $A, C$  thay đổi sao cho  $AB > BC, AD > CD$  và các đường phân giác của các góc  $ABC, ADC$  cắt nhau trên đường chéo  $AC$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AC$  đi qua một điểm cố định.

9. Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$ . Một đường thẳng đi qua  $A$  cắt hai đường tròn lần thứ hai tại các điểm  $M, N$ . Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng  $MN$  đi qua một điểm cố định, khi đường thẳng  $MN$  thay đổi.

10. Cho tam giác  $ABC$  không vuông nội tiếp đường tròn  $(O)$  có cạnh  $BC$  cố định, đỉnh  $A$  thay đổi trên cung lớn  $BC$ . Gọi  $S_1$  là đường tròn đi qua  $B$  tiếp xúc với  $AC$  tại  $A$ .  $S_2$  là đường tròn đi qua  $C$  và tiếp xúc với  $AB$  tại  $A$ . Hai

đường tròn  $S_1$  và  $S_2$  cắt nhau lần thứ hai tại  $D$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AD$  đi qua một điểm cố định.

11. Cho đường thẳng  $d$  và đường tròn  $(O)$  không có điểm chung với  $d$ . Trên  $d$  ta lấy điểm  $A$  cố định. Trên đường tròn  $(O)$  ta lấy điểm  $B$  cố định. Với mỗi điểm  $M$  trên  $d$  (không trùng với  $A$ ) ta dựng đường tròn đi qua 3 điểm  $\{M, A, B\}$ . Đường tròn đó cắt  $(O)$  tại điểm  $N$  khác  $B$ . Chứng minh rằng khi  $M$  thay đổi trên  $d$ , thì đường thẳng  $MN$  đi qua một điểm cố định.

12. Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Trên cung  $BC$  không chứa đỉnh  $A$  ta lấy điểm  $M$ . Gọi  $M_1, M_2$  là các điểm đối xứng với  $M$  qua các đường thẳng  $AB, AC$ . Chứng minh rằng khi  $M$  thay đổi trên cung đó, thì đường thẳng  $M_1M_2$  đi qua một điểm cố định.

13. Cho tam giác  $ABC$  có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $H$  là trực tâm tam giác. Các điểm  $P, Q$  là giao điểm của các đường thẳng  $BH, CH$  với đường tròn  $(O)$ . Trên cung  $BC$  không chứa  $A$  ta lấy điểm  $M$ . Đường thẳng  $MP$  cắt  $AC$  tại  $K$ , đường thẳng  $MQ$  cắt  $AB$  tại  $L$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $KL$  đi qua một điểm cố định, khi  $M$  thay đổi trên cung đó.

14. Cho đường tròn  $(O)$  và dây cung  $AB$  cố định. Với mỗi điểm  $C$  thuộc đường tròn (khác  $A, B$ ) ta dựng đường thẳng  $d$  đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ . Gọi  $d'$  là đường thẳng đối xứng với  $d$  qua phân giác của góc  $ACB$ . Chứng minh rằng  $d'$  đi qua một điểm cố định khi  $C$  thay đổi trên đường tròn và khác  $A, B$ .

15. Cho đường thẳng  $d$  và đường tròn  $(O)$  không có điểm chung với  $d$ . Với mỗi điểm  $M$  trên  $d$  ta dựng các tiếp tuyến  $MA, MB$  tới đường tròn  $(O)$  ( $A, B$  là các tiếp điểm). Chứng minh rằng khi  $M$  thay đổi trên  $d$ , thì đường thẳng  $AB$  đi qua một điểm cố định.

16. Cho đường thẳng  $d$  và đường tròn  $(O)$  không có điểm chung với  $d$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của tâm đường tròn trên  $d$ . Với mỗi điểm  $M$  trên  $d$  khác  $H$ , ta dựng các tiếp tuyến  $MA, MB$  tới đường tròn  $(O)$  ( $A, B$  là các tiếp điểm). Gọi  $P, Q$  là hình chiếu của  $H$  trên các đường thẳng  $MA, MB$ . Chứng minh rằng khi  $M$  thay đổi trên  $d$ , thì đường thẳng  $PQ$  đi qua một điểm cố định.

### **Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

1) Gọi  $O'$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ , theo giả thiết đường thẳng  $OM$  đi qua  $O'$  và  $ON \parallel AB$ . Vì vậy  $M$  và  $O'$  nằm khác pha với đường thẳng  $ON$ , nghĩa là đường thẳng  $MN$  nằm trong  $\angle ONC$ . Gọi  $A'$  là giao điểm của  $MN$  với  $AB$ , khi đó  $A'$  nằm trên tia  $O'A$ . Từ sự đồng dạng của hai tam giác  $\triangle OMN, \triangle O'MA'$ , ta suy ra  $O'M = O'A' = O'A \Rightarrow A$  trùng với  $A'$ .

2) Trên tia  $Oy$  ta lấy điểm  $C$  thoả mãn điều kiện  $OA = OC$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn  $AC$ . Rõ ràng khi  $B$  trùng với  $C$ , thì  $M$  trùng với  $H$ . Trường hợp này đường thẳng  $MN$  đi qua  $H$ . Với  $B$  khác  $C$ , gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle OAB$ , ta thấy rằng tứ giác  $AIMH$  nội tiếp, do đó  $\angle AMH = \angle AIH$ . Vì  $\angle AIH$  là góc ngoài của  $\triangle AOI$ , nên  $\angle AIH = \frac{1}{2}(\angle OAB + \angle AOB)$ .

Xét  $\angle BMN = 90^\circ - \frac{\angle OBA}{2} = \frac{1}{2}(\angle OAB + \angle AOB) = \angle AMH$ . Các điểm  $M, N$  nằm khác phía đối với đường thẳng  $AB$ , nên đường thẳng  $MN$  đi qua  $H$ . Vì  $H$  cố định, nên ta suy ra điều cần chứng minh.

3) Gọi  $J$  là tâm đường tròn bàng tiếp  $\triangle OAB$  thuộc  $\angle OAB$ ,  $P$  là giao điểm của  $JO$  và  $MN$ . Ta chứng minh  $P$  là điểm cố định. Ta có:

$$\begin{aligned} \angle PNO = \angle BNM = \frac{\angle OBA}{2}, \quad \angle PON = \angle POA + \angle AON &= \frac{1}{2}(\angle OAB + \angle ABO) + \angle AOB \\ \Rightarrow \angle OPN = 180^\circ - (\angle PON + \angle PNO) &= \frac{1}{2}\angle OAB = \angle JAM. \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ tứ giác  $APJM$  nội tiếp đường tròn có đường kính là  $AJ$ . Vì vậy  $AP \perp OJ$ .

4) Ta nhắc lại một bài toán sau đây. "Trên cạnh  $AB$  của  $\triangle OAB$  ta lấy điểm  $M$ . Trên các cạnh  $OA, OB$  ta lấy điểm  $P, Q$  sao cho  $MP \parallel OB, MQ \parallel OA$ , khi đó  $\frac{OP}{OA} + \frac{OQ}{OB} = 1$ ". Căn cứ vào kết quả đó bài toán đang xét được giải như sau:

Trên hai tia  $Ox, Oy$  ta chọn các điểm  $P, Q$  thoả mãn điều kiện  $OP = a, OQ = b$ . Dựng hình bình hành  $OPMQ$ . Ta chứng minh được rằng  $AB$  đi qua  $M$ .

5) Ta nhắc lại một bài toán sau đây: "Trên phần kéo dài của cạnh  $AB$  về phía  $A$  của  $\triangle OAB$  ta lấy điểm  $M$ . Trên tia  $OA$  ta lấy điểm  $P$  sao cho  $MP \parallel OB$  và trên tia đối của tia  $OB$  ta lấy điểm  $Q$  sao cho  $MQ \parallel OA$ , khi đó  $\frac{OP}{OA} - \frac{OQ}{OB} = 1$ ". Căn cứ vào kết quả đó bài toán đang xét được giải như sau:

Trên hai tia  $Ox$  ta chọn các điểm  $P$  thoả mãn điều kiện  $OP = a$ . Trên tia đối của tia  $Oy$  ta chọn điểm  $Q$  thoả mãn điều kiện  $OQ = b$ . Dựng hình bình hành  $OPMQ$ . Ta chứng minh được rằng  $AB$  đi qua  $M$ .

6) Trên các tia  $Ox, Oy$  ta chọn các điểm  $A_1, B_1$  thoả mãn điều kiện  $OA_1 = OB_1 = \frac{a}{2}$ . Đường phân giác của  $\angle xOy$  là đường trung trực của  $A_1B_1$ .

Ta chọn trên  $Oy$  điểm  $B_2$  thoả mãn điều kiện  $OB_2 = a$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường trung trực của hai đoạn thẳng  $A_1B_1$  và  $OB_2$ . Giả sử điểm  $A$  nằm trên đoạn  $OA_1$ , khi đó điểm  $B$  nằm trên đoạn  $B_1B_2$ . Rõ ràng  $\triangle IOA = \triangle IB_2B(c.g.c) \Rightarrow IA = IB$ .

7) Ta chọn trên  $Ox$  hai điểm  $A_1, A_2$  sao cho  $OA_1 = a, OA_2 = 2a$ . Trên  $Oy$  chọn điểm  $B_1$  sao cho  $OB_1 = a$ . Gọi  $I$  là giao điểm các đường trung trực của hai đoạn thẳng  $OA_1$  và  $A_2B_1$ . Ta chứng minh đường trung trực của đoạn  $AB$  đi qua  $I$ . Thật vậy từ  $OA - OB = a \Rightarrow OA > a$ , mặt khác  $OA - OB = a \Rightarrow OA_1 + A_1A - OB = a \Leftrightarrow A_1A = OB$ . Ta có  $\triangle IA_1A_2 = \triangle IOB$ . Nếu  $A \in A_1A_2 = \triangle IA A_1 = \triangle IOB \Rightarrow IA = IB$ . Trường hợp  $A$  nằm ngoài đoạn  $A_1A_2$  kết quả vẫn đúng.

8) Gọi  $K$  là giao điểm của phân giác  $\triangle ABC$  với đường chéo  $AC$ ,  $P$  là giao điểm của  $AC$  và tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tứ giác tại  $B$ . Ta đã biết  $PK = PB$ . Tương tự ta chứng minh được  $PD$  là tiếp tuyến của đường tròn.

9) Ta chứng minh được  $\angle BDC = \angle BAC$ , vì vậy  $D$  nhìn  $BC$  dưới một góc không đổi và  $D$  chạy trên một đường tròn cố định đi qua  $B, C$ . Gọi  $E$  là giao điểm của đường tròn đó với  $AD$  khác  $D$ . Ta chứng minh được rằng  $EB = EC$ . Điểm  $E$  là cố định.

10) Gọi  $D$  là giao điểm thứ hai của  $MN$  với đường tròn  $(O)$ . Ta có  $\angle MAB = \angle MNB$  (cùng chắn một cung). Vì  $\angle MAB$  không đổi, nên  $\angle MNB$  không đổi. Do đó số đo  $\widehat{BD}$  thuộc đường tròn  $O$  không đổi. Điểm  $D$  cố định.

11) Ta chứng minh rằng  $M_1M_2$  đi qua trực tâm  $H$  của  $\triangle ABC$ . Thật vậy, ta có  $\angle AM_1B = \angle AMB = \angle ACB = \angle AHB'$  ( $B'$  là chân đường cao hạ từ  $B$ ), do đó tứ giác  $AM_1BH$  nội tiếp và  $\angle BHM_1 = \angle BAM_1 = \angle BAM$ . Tương tự  $\angle CHM_2 = \angle CAM \Rightarrow M_1HB + \angle BHC + \angle CHM_2 = 180^\circ$ .

13) Dễ dàng thấy rằng  $\triangle PKH, \triangle QLH$  là cân tại  $K, L$

$$\Rightarrow \angle PHK = \angle MPB = \angle MAB,$$

$$\angle LHQ = \angle MQC = \angle MAC \Rightarrow \angle PHK + \angle LHQ + \angle QHL = 180^\circ$$



14) Hãy chứng minh rằng  $d'$  đi qua tâm đường tròn ( $O$ ).

15) Gọi  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ tâm đường tròn xuống  $d$ ,  $I$  là giao điểm của  $AB$  và  $OH$ ,  $K$  là giao điểm của  $OM$  và  $AB$ . Tứ giác  $OKMH$  nội tiếp, nên  $OK \cdot OM = OI \cdot OH$ ,  $OK \cdot OM = R^2$  ( $R$  là bán kính đường tròn).

## Chương 4. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

### Diện tích tam giác và một số hệ quả

#### A. Công thức tính diện tích tam giác

Ta đặt  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  là độ dài các cạnh  $\triangle ABC$ ; ký hiệu  $h_a, h_b, h_c$  là độ dài các đường cao kẻ từ  $A, B, C$ ;  $S$  là diện tích  $\triangle ABC$ . Ta có  $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$ .

#### B. Bài tập

1) Tính diện tích  $\triangle ABC$ , biết  $BC = 1$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ .

2) Tính diện tích  $\triangle ABC$ , biết  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$  và đường cao  $AH = 1$ .

3) Tính diện tích  $\triangle ABC$ , biết  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$  và đường cao  $BK = 1$ .

4) Tính diện tích tam giác đều, biết độ dài cạnh bằng  $a$ .

5) Tính diện tích tam giác cân  $ABC$ , biết  $AB = AC = 5a$ ,  $BC = 6a$ .

6) Trên nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$  ta lấy điểm  $C$ . Dựng qua  $A$  một đường thẳng  $d \perp AB$  và trên đó ta lấy điểm  $H$  sao cho  $CH \perp d$ , biết  $CH = h$ . Tính diện tích  $\triangle ACH$  theo  $h, R$ .

7) Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$  và một tam giác đều  $\triangle MPQ$  có đỉnh  $M$  nằm trên nửa đường tròn, các đỉnh còn lại nằm trên đường kính  $AB$ , biết rằng  $\triangle MPQ$  có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo  $R$ .

8) Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 1$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ . Trên các cạnh  $BC, CD$  về phía ngoài hình chữ nhật ta dựng các tam giác đều  $\triangle BCM, \triangle CDN$ . Tính diện tích  $\triangle AMN$ .



### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Kẻ  $AH \perp BC$ . Vì hai góc kề với cạnh  $BC$  cùng nhọn, nên  $H$  nằm trên cạnh đó. Ta có  $BC = BH + CH$ . Vì  $\triangle AHC$  vuông cân tại  $H \Rightarrow AH = CH$ . Trong  $\triangle ABH$  ta có:

$$\cot 60^\circ = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \frac{AH}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = 1$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}}$$

$$2) S = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}};$$

$$3) S = \frac{2}{3 + \sqrt{3}};$$

$$4) S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4};$$

$$5) S = 12a^2;$$

6) Kẻ

$$CK \perp AB \Rightarrow CK = AH = \sqrt{AK \cdot BK} = \sqrt{h(2R - h)}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACH} = \frac{h\sqrt{h(2R - h)}}{2};$$

7) Kẻ  $MN \perp AB$ , khi đó  $S_{\triangle MPQ} = \frac{MN^2}{\sqrt{3}}$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $AB$ ,

ta có:

$$MN \leq OM = R \Rightarrow S_{\triangle MPQ} \leq \frac{R^2}{\sqrt{3}}.$$

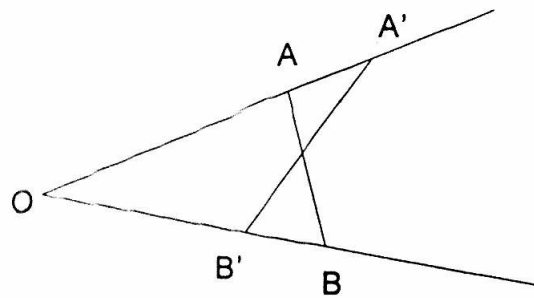
#### Hệ quả 1

##### A. Mệnh đề

Trên hai cạnh của  $\angle xOy$  ta lấy các cặp điểm  $A, A'$  thuộc

$Ox$  và  $B, B'$  thuộc  $Oy$ . Khi đó  $\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OA'B'}} = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OB}{OB'}.$

Nếu  $A$  và  $A'$  trùng nhau, thì  $\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OA'B'}} = \frac{OB}{OB'}.$



H. 38

Nếu  $\triangle OAB$  đồng dạng với  $\triangle OA'B'$ , thì  $\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OA'B'}} = k^2$ , trong đó hoặc

$$k = \frac{OA}{OA'} \text{ hoặc } k = \frac{OB}{OA'}.$$

### B. Bài tập

1) Cho  $\triangle ABC$  có diện tích bằng  $S$ . Trên cạnh  $AB$  ta lấy điểm  $M$  sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $\frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}$ . Trên cạnh  $CA$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\frac{CP}{CA} = \frac{1}{4}$ . Tính theo  $S$  diện tích  $\triangle MNP$ .

2) Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $AB = a$ . Trên cạnh  $BC$  ta lấy điểm  $M$  sao cho  $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$ . Trên cạnh  $CD$  lấy điểm  $N$  sao cho  $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$ . Gọi  $P, Q$  là giao điểm của các đoạn thẳng  $AM, AN$  với đường chéo  $BD$ . Tính diện tích  $\triangle APQ$ .

3) Trên các cạnh  $AC, AB$  của  $\triangle ABC$  ta lấy các điểm  $E, F$ . Gọi  $M$  là giao điểm của hai đoạn thẳng  $BE, CF$ , biết diện tích các tam giác  $\triangle MBF, \triangle MBC, \triangle MCE$  tương ứng bằng 3, 5, 4. Tính diện tích  $\triangle ABC$ .

4) Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Một đường thẳng đi qua  $G$  cắt các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại các điểm  $M, N$ . Biết rằng  $\frac{AM}{AB} = p$ . Tính tỷ số  $\frac{AN}{AC}$  theo  $p$ .

5) Cho  $\triangle ABC$  và các điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên các cạnh  $AB, AC$  thoả mãn điều kiện  $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 1$ . Chứng minh rằng khi các điểm  $M, N$  thay đổi, thì đường thẳng  $MN$  cắt đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh  $A$  tại một điểm cố định.

6) Trên các cạnh  $BC, CA, AB$  của  $\triangle ABC$  có diện tích bằng 1 ta lấy lần lượt các điểm  $A', B', C'$ . Gọi  $S_1, S_2, S_3$  lần lượt là diện tích các tam giác  $\triangle AB'C', \triangle BA'C', \triangle CB'A'$ . Chứng minh rằng  $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leq \frac{3}{2}$ .

7) Cho  $\triangle ABC$  có diện tích  $S$  và tỷ số  $\frac{AB}{AC} = k$ . Đường phân giác của  $\angle BAC$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$ . Tính diện tích các tam giác  $\triangle ABD, \triangle ACD$ .

8) Trên cạnh  $BC, CA, AB$  của  $\Delta ABC$  ta lấy các điểm tương ứng  $M, P, Q$  sao cho  $MP \parallel AB, MQ \parallel AC$ . Chứng minh rằng  $S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta MPQ} = S_{\Delta AMB} \cdot S_{\Delta AMC}$ .

9) Bên trong  $\angle xOy$  cho điểm cố định  $M$ . Hãy dựng một đường thẳng đi qua  $M$  cắt góc đã cho thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

*C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số*

$$1) S_{\Delta MNP} = \frac{7}{24} S;$$

$$2) S_{\Delta APQ} = \frac{5a^2}{24};$$

3) Ta ký hiệu  $x, y$  tương ứng là diện tích các tam giác  $\Delta MAF, \Delta MAE$ .

Ta có:

$$\frac{MB}{ME} = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta MEC}} = \frac{5}{4}, \quad \frac{MB}{ME} = \frac{S_{\Delta MBA}}{S_{\Delta MEA}} = \frac{3+x}{y}.$$

Từ đó ta suy ra:

$$\frac{3+x}{y} = \frac{5}{4} \Rightarrow 5y - 4x = 12.$$

Tương tự ta có:

$$5x - 3y = 12 \Rightarrow x = \frac{96}{13}, y = \frac{108}{13}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta EMF} = x + y = \frac{204}{13} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{204}{13} + 12$$

4) Gọi  $E$  là giao điểm của  $AG$  và  $BC$ . Ta có  $\frac{S_{\Delta AMG}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2p}{3}$ .

Tương tự:

$$\frac{S_{\Delta ANG}}{S_{\Delta ACE}} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2q}{3} \left( q = \frac{AN}{AC} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta AMG}}{S_{\Delta ABE}} + \frac{S_{\Delta ANG}}{S_{\Delta ACE}} = 2 \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2(p+q)}{3}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = pq \Rightarrow \frac{p+q}{3} = pq \Rightarrow q = \frac{p}{3p-1};$$

5) Xem cách giải bài tập 4);

6) Đặt

$$x = \frac{BA'}{BC}, y = \frac{CB'}{CA}, z = \frac{AC'}{AB} \Rightarrow 1-x = \frac{CA'}{BC}, 1-y = \frac{AB'}{CA}, 1-z = \frac{BC'}{AB}.$$

$$\text{Ta có } \frac{S_1}{S} = z(1-y) \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \sqrt{z(1-y)} \leq \frac{1+z-y}{2}.$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \sqrt{x(1-z)} \leq \frac{1+x-z}{2}, \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \sqrt{y(1-x)} \leq \frac{1+y-x}{2}$$

$$7) S_{\Delta ABD} = \frac{k.S}{1+k}, S_{\Delta ACD} = \frac{S}{1+k}$$

$$8) \text{ Ta có } \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMQ}} = \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{AB}{AQ}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{AC}{AP} \Rightarrow \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta APQ}} \frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{AB}{AQ} \frac{AC}{AP} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta APQ}}$$

9) Giả sử đường thẳng đi qua  $M$  cắt các cạnh của góc tại hai điểm  $A, B$ . Trên  $OA, OB$  ta lấy các điểm tương ứng  $P, Q$  sao cho  $MP \parallel OB, MQ \parallel OA$ , khi đó  $\Delta OPQ$  có diện tích  $s$  không đổi. Ta có

$$\frac{s}{S_{\Delta OAB}} = \frac{OP}{OA} \frac{OQ}{OB}.$$

$$\text{Vì } \frac{OP}{OA} + \frac{OQ}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{s}{S_{\Delta OAB}} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta OAB} \geq 4s.$$

Dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức khi  $\frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{OB} \Rightarrow M$  là trung điểm của đoạn  $AB$ .

## Hệ quả 2

### A. Mệnh đề

Giả sử  $M$  là một điểm nằm trong hoặc trên cạnh hoặc trùng với đỉnh  $\Delta ABC$  có khoảng cách đến  $BC, CA, AB$  tương ứng bằng  $x, y, z$ . Khi đó

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$

Nếu  $M$  trùng với điểm đặc biệt của tam giác, thì ta được kết quả thú vị.

### B. Bài tập

1) Bên trong  $\Delta ABC$  có diện tích  $S$  ta lấy điểm  $M$ . Các đường thẳng song song với các cạnh tam giác và đi qua  $M$  cắt nó thành 6

phần, trong đó 3 phần là các tam giác có diện tích bằng  $S_1, S_2, S_3$ . Chứng minh rằng  $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}$ .

2) Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $C$ . Đường phân giác  $\angle ACB$  cắt cạnh  $AB$  tại  $D$ . Chứng minh rằng  $\frac{\sqrt{2}}{CD} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}$ .

3) Cho  $\triangle ABC$  có  $\angle BAC = 60^\circ$ . Đường phân giác của  $\angle BAC$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{AD}$ .

4) Cho  $\triangle ABC$  có  $\angle BAC = 120^\circ$ . Đường phân giác của  $\angle BAC$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD\sqrt{3}}$ .

5) Cho  $\triangle ABC$  đều và điểm  $M$  nằm trong tam giác. Gọi  $H, P, Q$  là chân các đường vuông góc hạ từ  $M$  xuống các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $AP + CH + BQ$  có giá trị không phụ thuộc vào  $M$ .

6) Giả sử tâm  $O$  đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  nằm trong tam giác,  $R$  là bán kính của đường tròn đó. Chứng minh rằng  $\frac{\cos \frac{A}{2}}{h_a} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{h_b} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{h_c} = \frac{1}{R}$ .

7) Các đường phân giác của hai góc  $B, C$  cắt các cạnh  $AC, AB$  tại  $E, F$ . Trên đoạn thẳng  $EF$  ta lấy điểm  $M$  và ký hiệu khoảng cách từ đó đến  $BC, CA, AB$  tương ứng là  $x, y, z$ . Chứng minh rằng  $x = y + z$ .

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Ký hiệu  $x, y, z$  lần lượt là khoảng cách từ  $M$  đến các đường thẳng  $BC, CA, AB$ . Từ sự đồng dạng của các tam giác, ta suy ra  $\frac{x}{h_a} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \frac{y}{h_b} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}, \frac{z}{h_c} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}$ . Sử dụng kết quả  $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$  ta suy ra điều cần chứng minh.

2) Ký hiệu  $x, y$  lần lượt là khoảng cách từ  $D$  đến các đường thẳng  $BC, AC$ , khi đó ta có  $x = y = \frac{AD}{\sqrt{2}}$ .

$$\text{Rõ ràng } h_a = AC, h_b = BC \Rightarrow \frac{x}{AC} + \frac{y}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{AD}.$$

3) Ký hiệu  $y, z$  lần lượt là khoảng cách từ  $D$  đến các đường thẳng  $AC, AB$ , khi đó ta có  $y = z = AD \sin 30^\circ = \frac{AD}{2}$ . Mặt khác:

$$h_b = AB \sin 60^\circ = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, h_c = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{AD}$$

5) Qua các đỉnh  $A, B, C$  ta kẻ các đường thẳng tương ứng vuông góc với các cạnh  $AC, AB, BC$ . Các đường thẳng đó cắt nhau tại các điểm  $A_1, B_1, C_1$  là đỉnh của một tam giác đều mà điểm  $M$  vẫn nằm trong nó.

Độ dài cạnh của tam giác đó có giá trị không phụ thuộc vào vị trí của  $M$ . Ta ký hiệu  $x, y, z$  là khoảng cách từ  $M$  đến các cạnh  $\Delta A_1 B_1 C_1$  và ta có  $x + y + z = h$ , trong đó  $h$  là đường cao của  $\Delta A_1 B_1 C_1$ . Hiển nhiên  $x = AP, y = CH, z = BQ \Rightarrow AP + CH + BQ = h$ .

6) Vì  $O$  nằm trong  $\Delta ABC$

$$\Rightarrow \angle BOC = 2\angle A,$$

$$\angle COA = 2\angle B,$$

$$\angle AOB = 2\angle C$$

Ta kẻ  $OH \perp BC$  và xét  $\Delta OBC$  cân tại  $O$ , ta có  $OH = OB \cdot \cos A = R \cdot \cos A$ .

Tương tự kẻ

$$OK \perp AC \Rightarrow OK = R \cdot \cos B,$$

$$OI \perp AB \Rightarrow OI = R \cos C$$

Sử dụng công thức

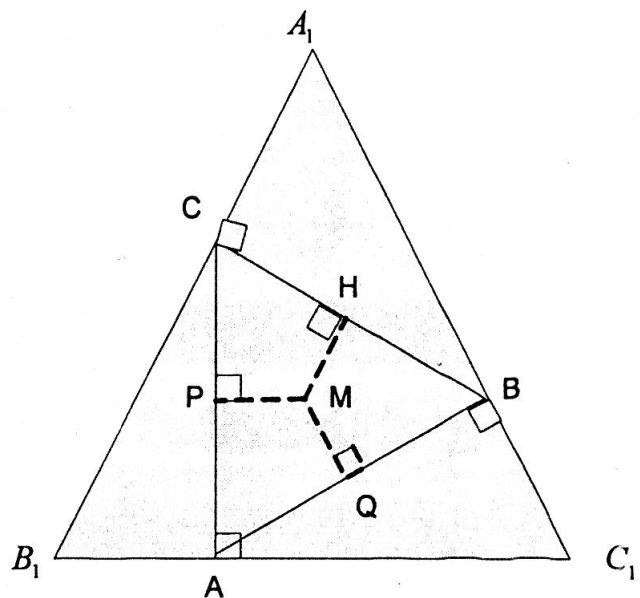
$$\frac{OH}{h_a} + \frac{OK}{h_b} + \frac{OI}{h_c} = 1 \text{ ta suy ra}$$

điều cần chứng minh.

7) Ta ký hiệu  $h_e, h_f$  lần lượt là độ dài các đường cao của  $\Delta AEF$  kẻ từ các đỉnh  $E, F$  tương ứng. Ta kẻ  $EE' \perp BC, FF' \perp BC$  khi đó ta có  $EE' = h_e, FF' = h_f$ . Ta kẻ  $MN \perp BC$  và gọi  $K$  là giao điểm của  $MN$  với

$$E'F. \text{ Trong } \Delta AEF \text{ ta có } \frac{y}{h_f} = \frac{EM}{EF} = \frac{E'K}{FE'} = \frac{KN}{FF'} \Rightarrow y = KN.$$

$$\text{Tương tự ta có } z = MK \Rightarrow y + z = MK + KN = x.$$



H. 39

### Hệ quả 3

#### A. Mệnh đề

Nếu hai tam giác có đáy chung và hai đỉnh đối diện cùng nằm trên một đường thẳng song song với đáy chung đó, thì diện tích của hai tam giác bằng nhau.

#### B. Bài tập

1) Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) và các điểm  $M, N$  nằm tương ứng trên các cạnh  $AD, BC$  sao cho  $MN \parallel AB$ . Chứng minh rằng  $S_{\triangle MBC} = S_{\triangle NAD}$ .

2) Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Hãy dựng một đường thẳng  $d$  đi qua một đỉnh tứ giác và cắt nó thành hai phần có diện tích bằng nhau.

3) Cho lục giác lồi  $ABCDEF$  thoả mãn điều kiện  $AB \parallel CF$ ,  $CD \parallel BE$ ,  $EF \parallel DA$ . Chứng minh rằng  $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle BDF}$ .

4) Cho hình bình hành  $ABCD$  có diện tích  $S$ . Xét  $\triangle MNP$  có các đỉnh nằm trên các cạnh của hình bình hành. Chứng minh rằng  $S_{\triangle MNP} \leq \frac{S}{2}$ .

5) Cho hai đoạn thẳng  $AB, CD$  nằm trên hai đường thẳng khác nhau. Chứng minh rằng tập hợp điểm  $M$  sao cho  $S_{\triangle MAB} = S_{\triangle MCD}$  nằm trên một đường thẳng cố định.

6) Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Hãy tìm bên trong tứ giác điểm  $M$  sao cho  $S_{\triangle MAB} = S_{\triangle MBC} = S_{\triangle MCD} = S_{\triangle MDA}$ .

7) Tính diện tích tam giác  $\triangle ABC$ , biết  $AB = 3$ ,  $AC = 5$  và trung tuyến  $AM = 2$ .

8) Tính diện tích tam giác, biết độ dài 3 trung tuyến bằng 3, 4, 5.

#### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1) Rõ ràng ta có  $S_{\triangle BMN} = S_{\triangle AMN}$ ,  $S_{\triangle CMN} = S_{\triangle DMN}$ . Cộng các kết quả đó ta suy ra điều phải chứng minh.

2) Giả sử diện tích  $\triangle ABD$  không lớn hơn diện tích  $\triangle BCD$ . Kẻ qua đỉnh  $A$  một đường thẳng  $d \parallel BD$ . Đường thẳng  $d$  cắt đường thẳng  $BC$  tại điểm  $E$ . Hiển nhiên diện tích tứ giác  $ABCD$  bằng diện tích  $\triangle CDE$ . Gọi  $F$  là trung điểm của đoạn thẳng  $CE$ . Khi đó  $DF$  chia đôi tam giác  $\triangle CDE$  thành hai phần có diện tích bằng nhau. Vì  $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle EBD} \leq S_{\triangle BCD} \Rightarrow BC \geq CE \Rightarrow F$  nằm trên cạnh  $BC$ . Đường thẳng  $DF$  là đường thẳng cần dựng.



3) Ký hiệu  $S$  là diện tích của lục giác, ta có:

$$S_{\Delta ACE} = S - S_{\Delta ABC} - S_{\Delta CDE} - S_{\Delta EFA}, S_{\Delta BDF} = S - S_{\Delta BCD} - S_{\Delta DEF} - S_{\Delta FAB}.$$

Để dàng nghiệm lại  $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta FAB}, S_{\Delta CDE} = S_{\Delta BCD}, \dots$

4) Trường hợp  $\Delta PMN$  có hai đỉnh nằm trên cùng một cạnh của hình bình hành, thì ta có ngay điều cần chứng minh. Bây giờ ta xét  $P$  thuộc  $AB$ ,  $M$  thuộc  $BC$  và  $N$  thuộc  $AD$ . Ta kẻ đường thẳng đi qua  $P$  và song song với  $MN$ . Đường thẳng đó cắt cạnh  $BC$  tại  $Q$  và ta có  $S_{\Delta QMN} = S_{\Delta PMN}$ , trong đó  $M, Q$  cùng thuộc một cạnh  $BC$ .

5) Nếu hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song, thì  $M$  nằm trên một đường thẳng song song với hai đường thẳng đó và đi qua một điểm  $N$  sao cho tỷ số khoảng cách từ  $N$  đến đường thẳng chứa đoạn  $AB$  và đường thẳng chứa  $CD$  bằng  $\frac{CD}{AB}$ . Ta xét trường hợp các đường thẳng chứa hai đoạn thẳng cắt nhau tại  $O$ . Ta dựng đường thẳng  $x \parallel AB$  và cách nó một khoảng bằng  $CD$ . Dựng đường thẳng  $y \parallel CD$  và cách nó một khoảng bằng  $BA$ . Giao điểm của  $x$  và  $y$  là  $N$ . Tập hợp  $M$  nằm trên đường thẳng  $ON$ .

6) Sử dụng lại kết quả bài 5).

7) Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $M$ , khi đó  $S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ABC}$ . Trong  $\Delta ACD$  ta có các cạnh  $AC = 5, CD = 3, AD = 4 \Rightarrow S_{\Delta ACD} = 6$ .

8) Ký hiệu  $AM, BN, CE$  là các đường trung tuyến của tam giác,  $G$  là trọng tâm,  $K$  đối xứng với  $G$  qua  $M$ ,  $H$  nằm trên tia  $BK$  và thoả mãn điều kiện  $NH \parallel GK$ . Khi đó  $\Delta BNH$  có 3 cạnh bằng 3, 4, 5. Ta thấy rằng

$$S_{\Delta BGK} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}, \Delta BGK \text{ và } \Delta BNH \text{ đồng dạng.}$$

## Diện tích hình chữ nhật và hình vuông

### A. Công thức tính diện tích hình chữ nhật và hình vuông

Một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh liên tiếp bằng  $a, b$ , thì diện tích  $S = a.b$ . Hình vuông là trường hợp riêng của hình chữ nhật, khi  $a = b$ .

### B. Bài tập

1) Trên đường chéo  $BD$  của hình vuông  $ABCD$  ta lấy điểm  $M$ . Các đường thẳng đi qua  $M$  song song với hai cạnh  $AB, BC$  cắt hình vuông thành 4 phần, trong đó hai phần là các hình vuông có diện tích bằng  $a$  và  $b$ . Tính diện tích hình vuông  $ABCD$ .

2) Cho  $\Delta ABC$  có cạnh  $BC = a$ , đường cao  $AH = h$ . Giả sử  $MNPQ$  là một hình vuông có các đỉnh  $M, N$  nằm trên cạnh  $BC$ . Các đỉnh còn lại nằm trên hai cạnh  $AB, AC$ . Tính theo  $a, h$  diện tích hình vuông.

3) Cho  $\Delta ABC$  có cạnh  $BC = a$ , đường cao  $AH = h$ . Giả sử  $MNPQ$  là một hình chữ nhật có các đỉnh  $M, N$  nằm trên cạnh  $BC$ . Các đỉnh còn lại nằm trên hai cạnh  $AB, AC$ , biết rằng tỷ số hai cạnh liên tiếp của hình chữ nhật bằng  $k$ . Tính theo  $a, h, k$  diện tích hình chữ nhật.

4) Cho nửa đường tròn đường kính  $PQ = 2R$ . Ta xét hình vuông  $ABCD$  có hai đỉnh  $A, B$  nằm trên đường kính  $PQ$ , hai đỉnh còn lại nằm trên nửa đường tròn. Tính theo  $R$  diện tích hình vuông.

5) Cho nửa đường tròn đường kính  $PQ = 2R$ . Ta xét hình chữ nhật  $ABCD$  có hai đỉnh  $A, B$  nằm trên đường kính  $PQ$ , hai đỉnh còn lại nằm trên nửa đường tròn, biết tỷ số hai cạnh liên tiếp bằng  $k$ . Tính theo  $R, k$  diện tích hình vuông.

6) Cho đường tròn  $(O; R)$ . Ta xét một hình chữ nhật nội tiếp đường tròn, biết rằng tỷ số hai cạnh liên tiếp của hình chữ nhật bằng  $k$ . Tính theo  $k, R$  diện tích hình chữ nhật. Với giá trị nào của  $k$  diện tích đó lớn nhất?

### C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

$$1) (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 ; \quad 2) \left(\frac{ah}{a+h}\right)^2 ; \quad 3) \frac{k(ah)^2}{(kh+a)^2} ;$$

$$4) \frac{4R^2}{5} ; \quad 5) \frac{4kR^2}{4+k^2} ;$$

$$6) \frac{k}{k^2+1} R^2. \text{ Vì } \frac{k}{k^2+1} \leq \frac{1}{2}, \text{ do đó diện tích hình chữ nhật lớn nhất khi}$$

$$k = 1 \text{ và giá trị lớn nhất của diện tích là } \frac{R^2}{2}.$$

## Diện tích hình thang

### A. Công thức tính diện tích hình thang

Nếu hai đáy của một hình thang bằng  $a, b$  và đường cao của nó bằng  $h$ , thì diện tích  $S = \frac{(a+b)h}{2}$ .

## B. Bài tập

1) Một hình thang cân  $ABCD$  có các cạnh đáy  $AB = a, CD = 3a$  và góc nhọn bằng  $45^\circ$ . Tính diện tích hình thang theo  $a$ .

2) Cho hình thang  $ABCD (AB \parallel CD)$  có hai góc kề với cạnh  $CD$  bằng  $45^\circ, 60^\circ$ , đường cao bằng  $h$ , cạnh  $AB = a$ . Tính diện tích hình thang theo  $a, h$ .

3) Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$ . Xét hình thang  $ABCD$  có hai đỉnh  $C, D$  nằm trên nửa đường tròn đó và thoả mãn điều kiện  $AB = 3CD$ . Tính diện tích hình thang theo  $R$ .

4) Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh  $AB = a, \angle A = 60^\circ$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M, N$  là các tiếp điểm của  $(O)$  với các cạnh  $AB, AD$ . Trên các cạnh  $CB, CD$  ta lấy lần lượt các điểm  $Q, P$  sao cho  $PQ \parallel BD$  và  $PQ$  tiếp xúc với  $(O)$ . Tính diện tích hình thang  $MNPQ$  theo  $a$ .

5) Một hình thang  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$  có tâm  $O$  nằm trong hình thang, biết rằng điểm  $O$  nhìn hai đáy hình thang dưới những góc có số đo bằng  $90^\circ, 60^\circ$ . Tính theo  $R$  diện tích hình thang  $ABCD$ .

6) Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $AB = 1$ . Xét các điểm  $M, N, P, Q$  nằm tương ứng trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  sao cho  $MQ \parallel NP \parallel BD, \angle BMN = 30^\circ$ . Tính diện tích hình thang  $MNPQ$ .

7) Hai đường tròn  $(O; 2r), (O'; r)$  tiếp xúc ngoài với nhau. Ta dựng các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn. Tính diện tích hình thang có đỉnh là 4 tiếp điểm.

8) Tính diện tích hình thang, biết độ dài hai đường chéo bằng 3,5 và khoảng cách giữa trung điểm hai đáy của hình thang bằng 2.

## C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

- 1)  $2a^2$ ;      2)  $\frac{h^2(1+\sqrt{3})+2ah\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ ;      3)  $\frac{8R^2\sqrt{2}}{9}$ ;  
4)  $\frac{15a^2\sqrt{3}}{64}$ ;      5)  $\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4}R^2$ ;      8) 6.

## Diện tích hình thoi

### A. Công thức tính diện tích hình thoi

Diện tích một hình thoi bằng một nửa tích số hai đường chéo.

## B. Bài tập

1) Góc nhọn của một hình thoi bằng  $2\alpha$  và một đường chéo bằng  $2a$ . Tính diện tích hình thoi.

2) Bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi bằng  $r$ , góc nhọn hình thoi bằng  $2\alpha$ . Tính diện tích hình thoi.

3) Tính diện tích của một hình thoi  $ABCD$ , biết độ dài  $AC = 2a$  và bán kính đường tròn đi qua 3 điểm  $\{A, B, C\}$  bằng  $R$ .

4) Tính diện tích của một hình thoi  $ABCD$ , biết độ dài cạnh  $AB = a$  và bán kính đường tròn đi qua 3 điểm  $\{A, B, C\}$  bằng  $R$ .

5) Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $AB = a$ . Các đường tròn  $(A; a), (C; a)$  cắt đường chéo  $AC$  tương ứng tại các điểm  $P, Q$ . Tính diện tích tứ giác  $BPDQ$ .

6) Bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi bằng  $r$  và cạnh hình thoi bằng  $a$ . Tính diện tích hình thoi.

7) Tính diện tích hình thoi  $ABCD$ , biết bán kính đường tròn đi qua 3 điểm  $\{A, B, C\}$  bằng  $a$  và bán kính đường tròn đi qua 3 điểm  $\{A, B, D\}$  bằng  $b$ .

## C. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số

1)  $2a^2 \tan \alpha, 2a^2 \cot \alpha$ ;

2)  $\frac{2r^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$ ;

3)  $2a(R + \sqrt{R^2 - a^2}), 2a(R - \sqrt{R^2 - a^2})$ ;

4)  $\frac{a^3}{4R^2} \cdot \sqrt{4R^2 - a^2}$ ;

5)  $a^2(\sqrt{2} - 1)$ ;

6)  $2ar$ ;

7)  $\frac{(2ab)^3}{(a^2 + b^2)^2}$ .

## Dùng các kết quả diện tích đa giác để giải một số bài toán khác

### A. Phương pháp

Ta có thể sử dụng công thức tính diện tích của từng hình hoặc phối hợp các công thức đó để giải một số bài toán tương chừng như không liên quan gì đến diện tích.

## B. Bài tập

1) Chứng minh rằng nếu các đường chéo của một tứ giác lồi chia tứ giác thành 4 tam giác có diện tích bằng nhau, thì tứ giác đó là một hình bình hành.

2) Đường phân giác  $AD$  chia  $\triangle ABC$  thành hai tam giác  $\triangle ABD, \triangle ACD$ . Ký hiệu  $x, y$  lần lượt là các khoảng cách từ  $B, C$  đến đường thẳng  $AD$ . Chứng minh rằng  $\frac{x}{y} = \frac{BA + BD}{CA + CD}$ .

3) Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Chứng minh rằng nếu diện tích  $\triangle MCD$  không nhỏ hơn diện tích các tam giác  $\triangle ACD$  và  $\triangle BCD$ , thì tứ giác đó là một hình thang.

4)  $AH, BK$  là các đường cao của  $\triangle ABC$  thoả mãn điều kiện  $AH + BC = BK + AC$ . Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  hoặc vuông hoặc cân.

5) Cho  $\triangle ABC$  và điểm  $M$  nằm trong tam giác đó. Các đường thẳng  $AM, BM, CM$  cắt các cạnh đối diện tại các điểm  $A', B', C'$ . Chứng minh rằng

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1$$

6) Bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác bằng 1. Các đường cao của nó là các số nguyên dương. Chứng minh rằng tam giác đó là đều.

7) Đường thẳng đi qua đỉnh  $A$  của  $\triangle ABC$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$  và thoả mãn điều kiện  $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BA + BD}{CA + CD}$ . Chứng minh rằng  $AD$  là phân giác của  $\angle BAC$ .

8) Chứng minh rằng nếu  $G$  là điểm nằm trong  $\triangle ABC$  thoả mãn điều kiện  $S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GBC} = S_{\triangle GCA}$ , thì  $G$  là trọng tâm của tam giác đó.

9) Chứng minh rằng nếu  $I$  là điểm nằm trong  $\triangle ABC$  thoả mãn điều kiện  $\frac{S_{\triangle IAB}}{S_{\triangle IBC}} = \frac{AB}{BC}$  và  $\frac{S_{\triangle IAC}}{S_{\triangle IBC}} = \frac{AC}{BC}$ , thì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $\triangle ABC$ .

10) Chứng minh rằng nếu các góc của  $\triangle ABC$  nhọn, thì  $\frac{a \cos \angle A + b \cos \angle B + c \cos \angle C}{a + b + c} = \frac{r}{R}$ , trong đó  $a, b, c, R, r$  lần lượt là độ dài các cạnh và bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.

11) Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn có trục tâm  $H$  nằm trong tam giác đó. Cội  $A', B', C'$  lần lượt là giao điểm của  $AH, BH, CH$  với đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . Ký hiệu  $S'$  là diện tích lục giác  $AB'CA'BC'$ . Chứng minh rằng  $S' = 2S_{\Delta ABC}$ .

12) Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn có trục tâm  $H$  nằm trong tam giác đó. Cội  $A', B', C'$  lần lượt là giao điểm các đường phân giác trong của các góc  $A, B, C$  với đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . Ký hiệu  $S'$  là diện tích lục giác  $AB'CA'BC'$ . Chứng minh rằng  $S' \geq 2S_{\Delta ABC}$ .

13) Cho một lục giác lồi. Chứng minh rằng tồn tại một đường chéo cắt lục giác thành một tam giác có diện tích không lớn hơn một phần sáu diện tích lục giác đó.

## Chương 5. CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG MẪU MỤC

Chúng ta biết rằng việc giải các bài toán ở các chương trước đều dựa vào các định nghĩa và tính chất của từng vấn đề đã được trình bày trong phần lý thuyết. Nội dung những bài toán là khai thác các khía cạnh khác nhau của chính vấn đề đang xét. Các bước giải của mỗi bài toán thường ngắn gọn. Các suy luận trong quá trình giải mỗi bài toán rất tự nhiên và từ dễ đến khó. Ta coi các bài toán đó là những bài toán mẫu mực. Bên cạnh những bài toán mẫu mực có một số bài toán mà khi đọc xong nội dung, ta chưa nhận ra được nó thuộc vào dạng toán quen thuộc nào. Thậm chí khi xem lời giải các bài toán đó, ta có thể chẳng hiểu tại sao người ta lại suy luận theo kiểu mà trong chương trình cơ bản chưa thấy xuất hiện, nghĩa là người ta sử dụng một vài kết luận rất hiển nhiên mà chúng ta chưa biết đến. Những bài toán đó được coi là không mẫu mực. Trong chương này ta sẽ xét một số dạng toán hình học không mẫu mực bao gồm cách giải không mẫu mực và cách phát biểu không quen thuộc. Đó là những bài toán mà trong quá trình giải có sử dụng một số nguyên lý toán học, như nguyên lý Diricle, nguyên lý cực hạn. Dưới đây là nội dung các nguyên lý đó và ứng dụng vào hình học.

### Nguyên lý Diricle

Nguyên lý đó được dùng khá phổ biến trong số học, đại số và hình học và được phát biểu theo ngôn ngữ "thỏ" và "lồng".

Người ta nhốt  $n$  con thỏ vào  $m$  cái lồng, với  $n > m$ , khi đó tồn tại một lồng chứa ít nhất hai thỏ.



## A. Phương pháp

Để giải một bài toán bằng nguyên lý trên ta cần thực hiện các bước sau:

a) Các yếu tố trong giả thiết của bài toán phải liên quan đến các số nguyên dương.

b) Tiến hành phân chia các yếu tố trong giả thiết của bài toán thành hai tập hợp các đối tượng  $\{A\}, \{B\}$ . Đây là bước quan trọng nhất của tiến trình giải toán. Việc phân chia như vậy thường dựa trên tính chất của từng loại yếu tố.

c) Số lượng các đối tượng của tập hợp nào trong hai tập  $\{A\}, \{B\}$  lớn hơn được chọn làm "thỏ", tập hợp kia là "lông".

Vì vậy nếu trong bài toán đang xét ta đã chỉ ra được hai tập hợp các đối tượng là "thỏ" và "lông", thì có thể xem như bài toán đã được giải xong.

## B. Ví dụ

*Ví dụ 1.* Trên một tờ giấy kẻ ô vuông có 7 đường kẻ ngang và 9 đường kẻ dọc. Giao điểm của một đường kẻ ngang với một đường kẻ dọc được gọi là nút. Người ta tô các nút trên tờ giấy đó bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng có ít nhất hai nút cùng màu.

*Lời giải.* Số lượng các nút trên tờ giấy là 63. Số màu dùng để tô là 2. Các yếu tố trong giả thiết của bài toán được phân chia thành hai tập hợp. Tập  $\{A\}$  gồm 63 nút và tập  $\{B\}$  gồm hai màu xanh và đỏ. Ta coi tập  $\{A\}$  là thỏ, tập  $\{B\}$  là lông. Theo nguyên lý Diricle tồn tại một lông chứa không ít hơn hai thỏ. Điều đó có nghĩa là có không ít hơn hai nút cùng màu.

*Ví dụ 2.* Cho  $\triangle ABC$  đều có cạnh  $AB = 1$ . Bên trong tam giác ta đánh dấu 5 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại hai trong 5 điểm đánh dấu cách nhau một khoảng bé hơn 0,5.

*Lời giải.* Trước hết ta chứng minh rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ nằm trong tam giác đều không lớn hơn cạnh tam giác. Ta ký hiệu hai điểm  $K, L$  nằm trong  $\triangle ABC$  đều, khi đó ta có  $\angle KAL < 60^\circ$ . Một trong hai góc còn lại của  $\triangle AKL$  không nhỏ hơn  $60^\circ$ , chẳng hạn  $\angle ALK \geq 60^\circ \Rightarrow AK > KL$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $AK$  với cạnh  $BC$ , ta có  $AE > AK$ . Trong  $\triangle ABE$ ,  $\angle AEB > 60^\circ$  (nó là góc ngoài của  $\triangle AEC$ ), nên  $AB > AE$ . Kết hợp các kết quả trên ta suy ra điều cần chứng minh.

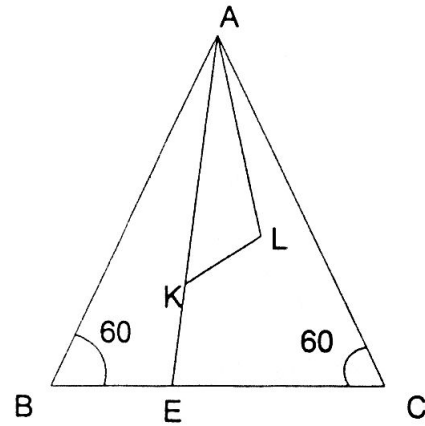
Nhận xét đó cùng với số 0,5 đã gợi cho ta tìm một tập hợp các đối tượng hình học khác tập hợp 5 điểm đánh dấu. Ta ký hiệu  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh của  $\triangle ABC$ . Các đoạn thẳng  $MN, MP, NP$  chia tam giác ban



đầu thành 4 tam giác đều  $\{\Delta AMN, \Delta BMP, \Delta CNP, \Delta MNP\}$  có cạnh bằng 0,5. Ta coi tập  $\{A\}$  gồm 5 điểm là thỏ, tập  $\{B\}$  gồm 4 tam giác đều đã liệt kê ở trên là lông. Theo nguyên tắc Diricle tồn tại một lông chứa ít nhất hai thỏ. Điều đó có nghĩa là tồn tại ít nhất hai điểm được đánh dấu nằm bên trong hoặc trên cạnh của một trong 4 tam giác đều đã liệt kê. Ta ký hiệu  $K, L$  là hai điểm đánh dấu và xét các trường hợp sau:

a)  $K, L$  nằm trong  $\Delta AMN$ . Theo nhận xét đã nêu ở trên  $KL < MN = 0,5$ .

b)  $K, L$  nằm trên đoạn thẳng  $MN$ , vì các điểm đó không thể trùng với các điểm  $M, N$ , do đó  $KL < MN$ .



H. 40

### C. Bài tập

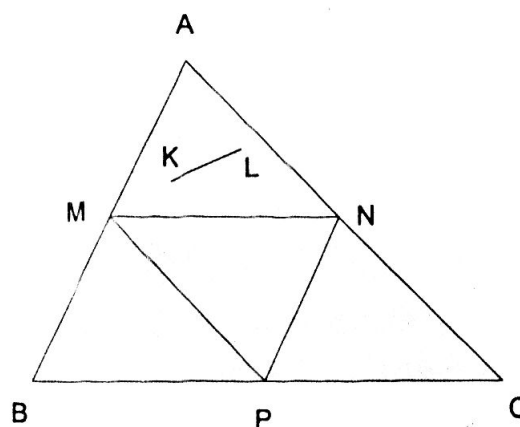
1) Trên một tờ giấy kẻ ô vuông có 7 đường kẻ ngang và 9 đường kẻ dọc. Giao điểm của một đường kẻ ngang với một đường kẻ dọc được gọi là nút. Người ta tô các nút bằng 31 màu khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai nút cùng màu.

2) Cho một hình vuông có cạnh bằng 10. Bên trong hình vuông ta đánh dấu 201 điểm. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác mà các đỉnh là điểm được đánh dấu có diện tích không lớn hơn  $\frac{1}{2}$  (nếu 3 điểm đánh dấu

thẳng hàng, thì ta coi tam giác với đỉnh là các điểm đó có diện tích bằng 0).

3) Bên trong một hình chữ nhật kích thước  $3 \times 4$  ta đánh dấu 6 điểm. Chứng minh rằng luôn tìm được hai điểm đánh dấu cách nhau một khoảng không lớn hơn  $\sqrt{5}$ .

4) Bên trong một hình vuông có cạnh bằng 1 ta đánh dấu 51 điểm phân biệt.



H. 41

Chúng minh rằng luôn tìm được một đường tròn có bán kính bằng  $\frac{1}{7}$  chứa trong nó 3 điểm đánh dấu.

5) Trong mặt phẳng cho tập hợp  $M$  gồm 25 điểm có tính chất là với 3 điểm bất kỳ thuộc  $M$  tồn tại hai điểm cách nhau một khoảng bé hơn 1. Chúng minh rằng luôn tìm được một đường tròn có bán kính 1 chứa trong nó không ít hơn 13 điểm thuộc  $M$ .

6) Bên trong đường tròn  $(O; R)$  ta đánh dấu 7 điểm, không có điểm nào trùng với tâm của đường tròn. Chúng minh rằng luôn tìm được hai điểm đánh dấu cách nhau một khoảng nhỏ hơn  $R$ .

7) Cho một tập hợp gồm 6 điểm nằm trong mặt phẳng có tính chất là 3 điểm bất kỳ thuộc tập hợp đó là đỉnh của một tam giác với các cạnh có độ dài khác nhau. Chúng minh rằng cạnh nhỏ nhất của một tam giác là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

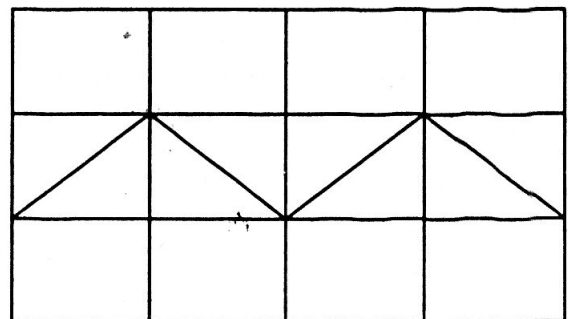
8) Cho một tập hợp gồm 9 đường thẳng mà mỗi đường cắt hình vuông thành hai tứ giác có tỷ số diện tích bằng  $\frac{2}{3}$ . Chúng minh rằng có ít nhất 3 trong 9 đường thẳng đó đồng quy.

9) Bên trong một đa giác lồi  $2n$ -cạnh ta lấy điểm  $P$ . Qua mỗi đỉnh của đa giác và  $P$  ta kẻ một đường thẳng. Chúng minh rằng tồn tại một cạnh đa giác không có điểm chung với các đường thẳng vừa kẻ.

#### **D. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

1) Xem lại cách giải của ví dụ 1.

2) Thỏ là tập hợp 201 điểm, lồng được xác định như sau. Ta chia hình vuông ban đầu thành 100 hình vuông nhỏ bằng các đường thẳng song song với hai cạnh liên tiếp của hình vuông đó. Mỗi hình vuông nhỏ có cạnh bằng 1. Vì các điểm được đánh dấu nằm trong hình vuông ban đầu, nên các điểm đó phải thuộc vào một trong các hình vuông nhỏ. Ta coi 100 hình vuông nhỏ là lồng. Có 201 thỏ được nhốt vào 100 lồng, suy ra có một lồng



H. 42

được nhất không ít hơn 3 thỏ. Giả sử  $A, B, C$  là 3 điểm thuộc hình vuông  $MNPQ$  có cạnh  $MN = 1$ . Ta chứng minh được rằng  $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}$ .

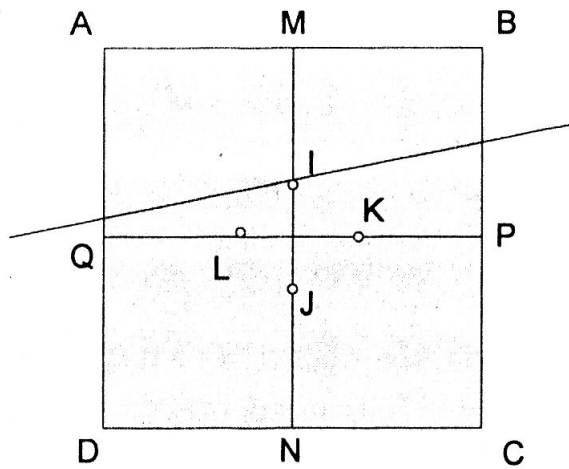
3) Ta chia hình chữ nhật theo hình 42 và coi tập hợp 4 miền đa giác là "lồng".

5) Giả sử  $A$  là điểm thuộc  $M$  và dựng đường tròn  $(A;1)$ . Nếu mọi điểm còn lại của  $M$  nằm trong đường tròn đó, thì ta có ngay điều cần chứng minh. Giả sử  $B$  là điểm thuộc  $M$  nằm ngoài đường tròn đó. Ta xét một điểm  $C$  bất kỳ thuộc  $M$  khác  $A, B$ . Theo giả thiết ta có hoặc  $AC < 1$  hoặc  $BC < 1$ . Ta coi tập hợp 23 điểm thuộc  $M$  là thỏ, tập hợp hai đường tròn  $(A;1), (B;1)$  là lồng. Như vậy 23 thỏ được nhốt vào hai lồng, theo nguyên lý Diricle tồn tại một lồng chứa 12 thỏ. Nghĩa là tồn tại một đường tròn  $(A;1)$  hoặc  $(B;1)$  chứa trong nó 13 điểm thuộc  $M$ .

6) Chia đường tròn thành 6 hình quạt có góc ở tâm bằng nhau. Coi tập 7 điểm là thỏ, tập hợp 6 hình quạt là lồng.

7) Ta ký hiệu  $\{A_1, A_2, \dots, A_6\}$  là tập hợp điểm đã cho. Ta xét một tam giác bất kỳ có đỉnh tại các điểm đó. Vì độ dài các cạnh của cùng một tam giác khác nhau, nên ta sẽ sơn cạnh có độ dài nhỏ nhất bằng màu đỏ. Hai cạnh còn lại ta sơn xanh. Với cách làm như vậy tập hợp các đoạn thẳng  $A_n A_m$  nối hai điểm bất kỳ  $\{A_n, A_m\}$  thuộc tập hợp điểm đã cho hoặc có màu đỏ hoặc có màu xanh. Ta cần chứng minh rằng tồn tại một tam giác có cả 3 cạnh màu đỏ. Thật vậy ta xét các đoạn thẳng có chung đầu mút là  $A_1$ . Tập hợp các đoạn thẳng đó được coi là thỏ. Tập hợp các màu dùng để sơn các đoạn là lồng. Có 5 thỏ được nhốt vào hai lồng, khi đó tồn tại một lồng chứa ít nhất 3 thỏ. Điều đó có nghĩa là có ít nhất 3 đoạn chung đầu mút  $A_1$  được sơn cùng màu. Giả sử có ít nhất 3 đoạn thẳng  $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4$  được sơn đỏ, khi đó  $\Delta A_2 A_3 A_4$  phải có một cạnh màu đỏ, chẳng hạn  $\Delta A_2 A_3$ . Vậy tồn tại một tam giác có 3 cạnh đỏ. Nếu có ít nhất 3 đoạn màu xanh cùng đầu mút là  $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4$ , thì  $\Delta A_2 A_3 A_4$  phải có 3 cạnh màu đỏ. Nếu  $\Delta A_2 A_3 A_4$  có 3 cạnh đỏ và giả sử  $A_1 A_2$  là cạnh dài nhất của nó, thì nó chính là cạnh nhỏ nhất của một tam giác khác.

8) Ký hiệu  $ABCD$  là hình vuông đã cho,  $d_n, n = 1, 2, 3, \dots, 9$  là các đường thẳng cắt hình vuông.  $MN$  và  $PQ$  là các đường trung bình của hình vuông. Từ điều kiện bài toán ta suy ra mỗi đường thẳng  $d_n$  cắt  $MN$  hoặc  $PQ$  tại một trong các điểm  $I, J, K, L$  khác nhau (xem hình dưới đây):



H. 43

Coi tập hợp các đường thẳng  $d_n$  là thỏ, tập hợp điểm  $\{I, J, K, L\}$  là lồng.

9) Nếu  $P$  thuộc vào một đường chéo của đa giác, chẳng hạn là  $AB$ , thì  $PA, PB$  là các đường thẳng trùng nhau không cắt được cạnh đa giác. Ta xét  $P$  không nằm trên bất kỳ đường chéo nào. Ta đánh số các đỉnh của đa giác  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  và xét đường chéo  $A_1 A_{n+1}$  cắt đa giác thành hai phần. Ta coi  $P$  là điểm trong của đa giác  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ . Các đường thẳng  $PA_{n+1}, PA_{n+2}, \dots, PA_{2n}, PA_1$  không thể cắt các cạnh  $A_{n+1} A_{n+2}, A_{n+2} A_{n+3}, A_{n+3} A_{n+4}, \dots, A_{2n} A_1$ . Số các đường thẳng còn lại là  $PA_2, PA_3, \dots, PA_n$  có thể cắt các cạnh đó. Ta coi lồng là tập hợp các đường thẳng  $PA_2, PA_3, \dots, PA_{n-1}$  và có cả thảy  $n-1$  lồng. Thỏ là tập hợp các cạnh  $A_{n+1} A_{n+2}, A_{n+2} A_{n+3}, A_{n+3} A_{n+4}, \dots, A_{2n} A_1$ . Có cả thảy  $n+1$  thỏ. Điều đó có nghĩa là tồn tại hai cạnh cùng bị cắt bởi một đường thẳng. Điều này không thể xảy ra, vì đa giác là lồi.

## Nguyên lý cực hạn

Nguyên lý cực hạn cũng được sử dụng trong số học, đại số và hình học và được phát biểu như sau:

Cho một tập hợp  $M$  gồm  $n$  đối tượng. Với mỗi đối tượng thuộc  $M$  ta cho tương ứng một số thực duy nhất, nghĩa là hai số thực khác nhau phải ứng với hai đối tượng khác nhau, khi đó trong tập  $M$  có một đối tượng ứng với số thực lớn nhất và một đối tượng ứng với một số thực nhỏ nhất. Những đối tượng ứng với số thực lớn nhất hoặc nhỏ nhất được gọi là đối tượng cực hạn.

Ví dụ 1. Cho tập hợp  $M$  gồm  $n$  đoạn thẳng không bằng nhau. Mỗi đoạn thẳng có một độ dài xác định. Như vậy độ dài của mỗi đoạn thẳng là một số thực ứng với đoạn thẳng đó. Đoạn thẳng dài nhất hoặc ngắn nhất là các đối tượng cực hạn của  $M$ .

Ví dụ 2. Cho tập hợp  $M$  gồm  $n$  điểm và một đường thẳng  $d$ . Với mỗi điểm thuộc  $M$  ta xét khoảng cách từ đó đến đường thẳng  $d$ , khi đó mỗi điểm thuộc  $M$  tương ứng với một số thực. Điểm thuộc  $M$  có khoảng cách đến  $d$  lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) là yếu tố cực hạn của tập  $M$ . Trong ví dụ này số đối tượng cực hạn có thể nhiều hơn một. Tuy nhiên khi giải toán ta chỉ cần sử dụng một đối tượng cực hạn.

### A. Phương pháp

Để giải bài toán bằng nguyên lý trên ta tiến hành các bước sau:

- Chỉ ra các yếu tố của bài toán liên quan đến số nguyên dương.
- Thiết lập được một tương ứng giữa các yếu tố của bài toán với số thực và xác định yếu tố cực hạn.
- Sử dụng yếu tố cực hạn để giải toán.

### E. Ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác đó nhỏ hơn  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

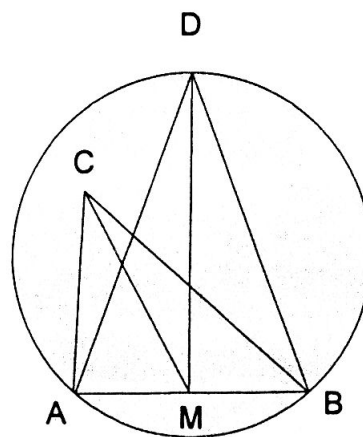
Lời giải: Giả sử  $AB$  là cạnh dài nhất của  $\triangle ABC$ , khi đó  $\angle ACB \geq 60^\circ$ . Ta dựng  $\triangle ABD$  đều có đỉnh  $D$  cùng phía với  $C$  đối với đường thẳng  $AB$ . Rõ ràng  $C$  phải nằm trong hoặc trên đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD$ , bởi vì  $\angle ACB \geq \angle ADB$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , ta thấy rằng đường cao tam giác  $\triangle ABC$  kẻ từ  $C$  không lớn

hơn  $CM$ ,  $CM \leq DM = \frac{\sqrt{3}AB}{2}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} \leq \frac{CM \cdot AB}{2} \leq \frac{\sqrt{3}AB^2}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ví dụ 2. Ở một quốc gia có 30 sân bay mà khoảng cách giữa hai sân bay bất kỳ khác nhau. Từ mỗi sân bay có một máy bay bay đến một sân bay gần nhất. Chứng minh rằng không có một sân bay nào có nhiều hơn 5 máy bay bay đến.

Lời giải. Ta ký hiệu  $A, B, C$  là các sân bay mà các máy bay bay từ  $A$  và  $B$  đến  $C$ , khi đó  $AC < AB, BC < AB \Rightarrow \angle ACB > 60^\circ$ . Ta ký hiệu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là  $n$  sân bay mà các máy bay bay từ đó tới sân bay  $C$ . Ta đặt  $\angle A_1CA_2 = \alpha_1, \angle A_2CA_3 = \alpha_2, \angle A_3CA_4 = \alpha_3, \dots, \angle A_nCA_1 = \alpha_n$ . Theo nhận xét



H. 44

trên ta có  $\alpha_m > 60^\circ$  với mọi  $m = 1, 2, \dots, n$ . Giả sử  $\alpha_1$  là góc nhỏ nhất. Từ  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 360^\circ \Rightarrow n \cdot \alpha_1 < 360^\circ \Rightarrow n < \frac{360^\circ}{\alpha_1} < \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6 \Rightarrow n \leq 5$ .

### C. Bài tập

1) Cho một tứ giác lồi  $ABCD$ . Trên các cạnh của tứ giác ta dựng các nửa đường tròn có đường kính bằng độ dài các cạnh đó và về phía trong tứ giác. Chứng minh rằng tồn tại một nửa đường tròn vừa dựng chứa bên trong hoặc trên nó giao điểm các đường chéo tứ giác.

2) Trong mặt phẳng cho  $n$  điểm mà 3 điểm bất kỳ lập thành đỉnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có diện tích bằng 4 chứa trong hoặc trên cạnh  $n$  điểm đã cho.

3) Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn và điểm  $M$  nằm trong tam giác. Ký hiệu  $x$  là khoảng cách lớn nhất từ  $M$  đến các đỉnh tam giác,  $y$  là khoảng cách nhỏ nhất từ  $M$  đến các đường thẳng chứa 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng  $x \geq 2y$ .

4) Trên các cạnh  $BC, CA, AB$  của  $\triangle ABC$  ta lấy lần lượt các điểm  $A_1, B_1, C_1$ . Chứng minh rằng nếu độ dài các đoạn thẳng  $AA_1, BB_1, CC_1$  không lớn hơn 1, thì  $S_{\triangle ABC} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

5) Trong mặt phẳng cho  $n$  điểm ( $n > 3$ ) không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn luôn dựng được một đường tròn đi qua 3 trong  $n$  điểm đã cho và không chứa bên trong bất kỳ điểm nào trong số các điểm còn lại.

6) Trong mặt phẳng cho tập hợp  $M$  gồm  $n$  điểm mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ thuộc  $M$  là khác nhau. Ta tiến hành nối mỗi điểm thuộc  $M$  với điểm gần nó nhất bằng một đoạn thẳng. Bằng cách đó có thể nhận được một đường gấp khúc khép kín hay không?

7) Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi luôn tìm được 3 đường chéo lập thành 3 cạnh của một tam giác.

8) Trong mặt phẳng cho 4 điểm không thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh là các điểm đã cho và một trong 3 góc của tam giác đó vuông hoặc tù.

9) Cho một tứ giác lồi và điểm  $M$  nằm trong tứ giác đó. Ta ký hiệu  $a, b$  là tổng độ dài các cặp cạnh đối diện của tứ giác.  $x, y$  lần lượt là tổng



khoảng cách từ  $M$  tới trung điểm của các cặp cạnh đối đó. Ta lập các tỷ số  $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ . Chứng minh rằng luôn tồn tại điểm  $M$  sao cho có ít nhất một trong 2 tỷ số không lớn hơn  $\frac{1}{2}$ .

10) Cho một lục giác lồi và điểm  $M$  nằm trong lục giác đó. Ta ký hiệu  $a, b, c$  là tổng độ dài các cặp cạnh đối diện của lục giác.  $x, y, z$  lần lượt là tổng khoảng cách từ  $M$  tới trung điểm của các cặp cạnh đối đó. Ta lập các tỷ số  $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ . Chứng minh rằng luôn tồn tại điểm  $M$  sao cho có ít nhất một trong 3 tỷ số không lớn hơn  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

#### **D. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số**

1) Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Ta xét tập hợp các góc  $\{\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOA\}$  và chọn ra góc có số đo lớn nhất, chẳng hạn  $\angle AOB$  khi đó  $\angle AOB \geq 90^\circ$ . Bất đẳng thức đó chứng tỏ  $O$  nằm trong hoặc trên nửa đường tròn đường kính  $AB$ .

2) Trong số các tam giác có 3 đỉnh thuộc các điểm đã cho ta chọn ra một tam giác có diện tích lớn nhất, chẳng hạn  $\triangle ABC$ . Qua các đỉnh của  $\triangle ABC$  ta kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Ký hiệu  $A', B', C'$  là các giao điểm của các đường thẳng đó. Ta thấy rằng mọi điểm thuộc  $n$  điểm đã cho nằm trong  $\triangle A'B'C'$ , còn  $\triangle A'B'C'$  có diện tích bằng 4 lần diện tích  $\triangle ABC$ .

3) Các đoạn thẳng  $MA, MB, MC$  chia các góc của tam giác  $\triangle ABC$  thành 6 góc nhỏ. Trong 6 góc đó ta chọn ra một góc có số đo bé nhất, chẳng hạn  $\angle MAB$ , khi đó  $\angle MAB \leq 30^\circ$ . Ta kẻ  $MN \perp AB$ , trong tam giác vuông  $\triangle AMN$  ta có  $2MN \leq AM$ . Vì  $MN \geq y, x \geq AM$ , ta suy ra điều cần chứng minh.

4) Giả sử:

$$\begin{aligned} \angle BAC \geq 90^\circ &\Rightarrow AB \leq BB_1 \leq 1, AC \leq CC_1 \leq 1 \\ &\Rightarrow S_{\triangle ABC} \leq \frac{1}{2}(BB_1 \cdot CC_1) \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ta xét trường hợp các góc của tam giác cùng nhọn và coi  $\angle A$  có số đo lớn nhất, khi đó  $\angle A \geq 60^\circ$ . Kẻ  $BH \perp AC, CK \perp AB$



$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{BH \cdot AC}{2} \leq \frac{BB_1 \cdot AC}{2} \leq \frac{AC}{2} = \frac{CK}{2 \sin A} \leq \frac{CC_1}{2 \sin A} \leq \frac{1}{2 \sin A}$$

Ta chứng minh rằng  $\sin A \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ta lấy trên tia  $KC$  điểm  $C'$  sao cho  $\angle KAC' = 60^\circ$ , khi đó tia  $AC'$  nằm trong  $\angle KAC$  hoặc trùng với tia  $AC$ . Ta có

$$\tan 60^\circ = \frac{KC'}{AK} = \sqrt{3} \leq \frac{KC}{AK} = \tan A$$

$$\Rightarrow \tan^2 A \geq 3 \Rightarrow \sin^2 A \geq 3 \cos^2 A$$

$$\Rightarrow \sin^2 A \geq 3(1 - \sin^2 A)$$

$$\Rightarrow 4 \sin^2 A \geq 3 \Rightarrow 2 \sin A \geq \sqrt{3}$$

5) Ký hiệu  $A, B$  là hai điểm thuộc tập hợp điểm đã cho cách nhau một khoảng nhỏ nhất, khi đó đường tròn đường kính  $AB$  không chứa bên trong nó các điểm còn lại của tập hợp. Ta xét tất cả các điểm của tập hợp nhìn đoạn thẳng  $AB$  và chọn ra điểm  $C$  có góc nhìn lớn nhất, khi đó đường tròn đi qua  $A, B, C$  không thể chứa trong nó các điểm còn lại của tập hợp.

6) Không. Giả sử  $AB$  là cạnh lớn nhất và  $AC, BD$  là các cạnh kề, khi đó  $AB > AC, AB > BD$ . Vậy thì  $C$  là điểm gần  $A$  hơn  $B$  và  $D$  gần  $B$  hơn  $A$ . Điều vô lý đó chứng tỏ đường gấp khúc không thể kín.

8) Ta ký hiệu  $A, B, C, D$  là 4 điểm đã cho. Ta chứng minh rằng hoặc chúng lập thành đỉnh của một tứ giác lồi hoặc tồn tại một tam giác có đỉnh trùng với các điểm đã cho và chứa trong hoặc trên cạnh điểm còn lại.

9) Ta ký hiệu  $ABCD$  là tứ giác lồi. Gọi  $M$  là giao các đường chéo tứ giác và giả sử  $AB + CD = a, \angle AMB \leq 90^\circ$ . Khi đó khoảng cách từ  $M$  tới trung điểm của  $AB$  không lớn hơn  $\frac{1}{2}$ . Từ đó ta suy ra  $x \leq \frac{a}{2}$ .

10) Ký hiệu  $ABCDEF$  là lục giác lồi,  $M$  là giao điểm các đường chéo  $AD$  và  $CF$ ,  $N$  là giao điểm các đường chéo  $BE$  và  $CF$ ,  $P$  là giao điểm các đường chéo  $AD$  và  $BE$ . Giả sử  $M, N, P$  là đỉnh của một tam giác với góc tại  $M$  lớn nhất, khi đó  $\angle AMF = \angle CMD \geq 60^\circ \Rightarrow$  khoảng cách từ  $M$  tới trung điểm các cạnh  $AF$  và  $CD$  tương ứng không lớn hơn  $\frac{AF\sqrt{3}}{2}$  và  $\frac{CD\sqrt{3}}{2}$ .

## Hình học tổ hợp

Các bài toán hình học mà nội dung liên quan đến việc tính hoặc đếm các yếu tố hình học kết hợp với nhau theo một quy tắc xác định được gọi là hình học tổ hợp.

## A. Phương pháp

a) Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của các hình hình học.

b) Sử dụng các quy tắc đếm sau đây.

1) Cho một tập hợp  $M$  gồm  $n$  đối tượng. Ta tiến hành sắp xếp các đối tượng của  $M$  theo một thứ tự xác định. Mỗi cách sắp xếp đó được gọi là một hoán vị của  $M$ . Số hoán vị của  $M$  là  $n(n-1)(n-2)\dots 2.1$ .

2) Cho một tập hợp  $M$  gồm  $n$  đối tượng. Ta lấy ra từ  $M$  một nhóm gồm  $k$  đối tượng ( $k < n$ ). Số cách lấy như vậy là  $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k}$ .

## B. Ví dụ

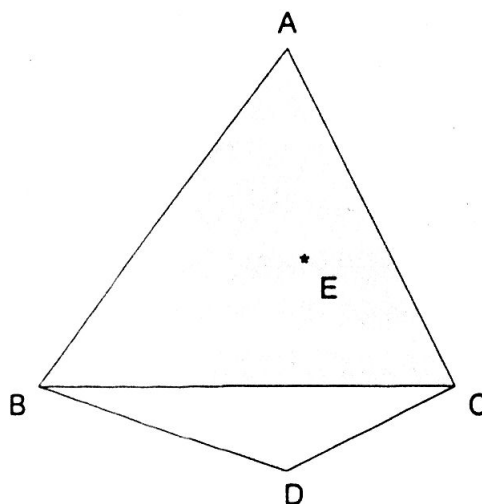
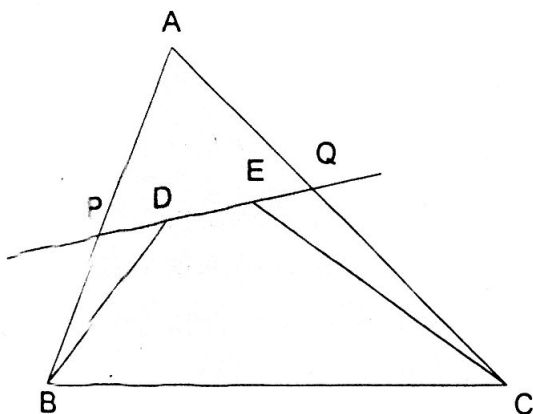
*Ví dụ 1.* Trong mặt phẳng cho 7 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tính số tam giác có 3 đỉnh là các điểm đã cho.

*Lời giải:* Ta ký hiệu  $M$  là tập hợp chứa  $n = 7$  điểm. Để lập ra một tam giác có 3 đỉnh là các điểm thuộc  $M$  ta cần lấy ra từ  $M$  một nhóm  $k = 3$  điểm. Theo quy tắc đếm ta có số tam giác cần tính bằng số nhóm được lập ra từ  $M$ . Số nhóm đó bằng  $\frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$ .

*Ví dụ 2.* Trong mặt phẳng cho một tập hợp 10 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

a) Ta xét 5 điểm bất kỳ  $\{A, B, C, D, E\}$  được chọn ra từ 10 điểm đã cho. Chứng minh rằng luôn tìm được một tứ giác lồi có các đỉnh là những điểm đó.

b) Chứng minh rằng có thể lập được ít nhất 42 tứ giác lồi có 4 đỉnh thuộc tập hợp 10 điểm đã cho.



### Lời giải

a) Giả sử  $\triangle ABC$  là tam giác mà bên trong nó chứa nhiều nhất số điểm còn lại. Nếu  $\{D, E\}$  nằm trong tam giác đó, thì đường thẳng  $DE$  phải cắt hai cạnh tam giác ( $DE$  không đi qua đỉnh tam giác, vì không có 3 điểm nào thẳng hàng). Giả sử  $DE$  cắt  $AB, AC$  tại  $P, Q$ . Tứ giác  $BCDE$  là tứ giác lồi. Nếu  $E$  nằm trong tam giác còn  $D$  nằm ngoài tam giác, thì  $D$  không thể thuộc vào các miền góc đối đỉnh với các góc của  $\triangle ABC$ . Giả sử  $D$  thuộc miền góc  $\angle BAC$ , khi đó  $ABDC$  là một tứ giác lồi.

b) Từ tập hợp 10 điểm ta chọn ra một nhóm gồm 5 điểm để thành lập một tứ giác lồi có đỉnh là những điểm đã chọn. Theo quy tắc đếm có tất cả  $\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$  nhóm như vậy. Ta lại thấy rằng nếu  $ABCD$  là tứ giác lồi được lập ra từ 5 điểm, thì số nhóm chứa 5 điểm khác nhau có cùng tứ giác đó là 6. Điều đó có nghĩa là tứ giác  $ABCD$  đã được đếm 6 lần. Vì vậy số các tứ giác lồi được lập ra không ít hơn  $\frac{252}{6} = 42$ .

### C. Bài tập

1) Cho một đa giác lồi  $n$ - cạnh ( $n \geq 4$ ) có tính chất là 3 đường chéo bất kỳ không đồng quy. Tính số giao điểm các đường chéo của đa giác.

2) Cho một đa giác lồi  $n$ - cạnh ( $n \geq 4$ ) có tính chất là 3 đường chéo bất kỳ không đồng quy chia đa giác thành các phần. Tính số phần đó.

3) Trong mặt phẳng cho 10 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét tất cả các tam giác có 3 đỉnh là các điểm đã cho. Chứng minh rằng trong số các tam giác đó, số tam giác nhọn chiếm không quá  $\frac{7}{10}$  (tam giác có cả 3 góc nhọn được gọi là tam giác nhọn).

4) Trên đường tròn cho 10 điểm phân biệt. Ta xét các đường gấp khúc khác nhau có đỉnh là các điểm đã cho không tự cắt, không kín và có 9 cạnh. Tính số các đường gấp khúc đó.

5) Cho 5 đường tròn nằm trong một mặt phẳng có tính chất là 4 đường tròn bất kỳ đi qua một điểm. Chứng minh rằng tồn tại một điểm mà cả 5 đường tròn cùng đi qua.

6) Chứng minh rằng không tồn tại quá  $n$  đường chéo của một đa giác lồi  $n$  cạnh sao cho hai đường chéo bất kỳ trong chúng có điểm chung.

7) Cho một đa giác đều  $n$  cạnh  $A_1A_2...A_n$ . Có bao nhiêu tam giác tù  $A_iA_jA_k$  mà 3 đỉnh trùng với các đỉnh của đa giác trong các trường hợp sau đây:

a)  $n = 20$ ?

b)  $n = 19$ ? (tam giác có một góc tù được gọi là tam giác tù).

8) Trong mặt phẳng cho  $n$  đường thẳng đôi một cắt nhau và không có 3 đường thẳng nào đồng quy chia mặt phẳng thành các miền. Chứng minh rằng số miền tam giác không ít hơn  $\frac{2(n-1)}{3}$ .

#### D. Hướng dẫn giải các bài tập và đáp số.

1) Số giao điểm các đường chéo bằng số cách lập nhóm gồm 4 đỉnh của đa giác. Số nhóm đó là  $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ .

2)  $\frac{n(n-3)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + 1$ .

3) Hãy chứng minh rằng cứ 5 điểm được lấy ra từ tập hợp 10 điểm đã cho có không ít hơn 3 tam giác không nhọn (tam giác có một góc vuông hoặc tù được gọi là tam giác không nhọn). Từ tập 10 điểm ta lập được  $\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$  nhóm mà mỗi nhóm chứa 5 điểm. Do đó số tam giác

không nhọn được lập ra ít nhất là 756. Ta biết rằng nếu  $\triangle ABC$  là một tam giác không nhọn, thì từ tam giác đó ta có thể lập ra được  $\frac{7.6}{2} = 21$  nhóm

khác nhau, chung nhau 3 đỉnh  $\{A, B, C\}$  và mỗi nhóm chứa 5 điểm. Điều đó có nghĩa là trong cách tính trên đây mỗi  $\triangle ABC$  được đếm 21 lần. Vì vậy số tam giác không nhọn ít nhất là  $\frac{756}{21} = 36$ . Tổng số các tam giác được lập

từ các điểm đã cho là  $\frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$ . Số lượng tối đa các tam giác nhọn là

$120 - 36 = 84$  và chiếm tối đa  $\frac{84}{120} = \frac{7}{10}$ .

a) 1280;

a) 720;      7b) 684.

4) Nếu  $\triangle ABC$  là một trong các miền được tạo ra từ các đường thẳng đã cho, thì đường thẳng bất kỳ trong số  $n-3$  đường thẳng còn lại không thể cắt nó thành hai phần khác nhau. Mỗi đường thẳng đều tương ứng với ít nhất hai tam

giác như vậy, nên số các miền tam giác có một cạnh trên mỗi đường thẳng ít nhất là  $2n$ . Với cách đếm đó, mỗi  $\triangle ABC$  được đếm 3 lần. Để ý rằng số các giao điểm của các cặp đường thẳng là hữu hạn, nên các điểm đó phải thuộc miền trong của một góc tạo bởi hai trong  $n$  đường thẳng đã cho. Miền tam giác có cạnh nằm trên mỗi đường thẳng chứa cạnh của góc đó chỉ có một. Vậy số miền tam giác có ít nhất là  $\frac{2n-2}{3}$ .

## **Phụ lục**

### **GIỚI THIỆU CÁC ĐỀ THI MÔN TOÁN HỌC VÀO CÁC KHỐI CHUYÊN CỦA TRƯỜNG ĐHKHTN THUỘC ĐHQG HN TỪ NĂM 1993**

#### **Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 1993**

##### *Câu I.*

i) Chứng minh rằng nếu  $a, b, c$  là các số dương thoả mãn điều kiện  $a + b + c = 1$ , thì  $6(ab + bc + ca) + a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \leq 2$ .

ii) Tính tổng  $x + y$ , biết rằng  $x^3 - 3x + 5x + y^3 - 3y + 5y = 6$ .

##### *Câu II.*

Cho 1993 số nguyên dương, mỗi số đều nhỏ hơn hoặc bằng 1993 và không phải tất cả các số đã cho bằng nhau. Biết rằng tổng của chúng là 3986. Chứng minh rằng từ 1993 các số đã cho, ta luôn chọn ra được  $k$  số ( $k \geq 1$ ) để tổng của  $k$  số này bằng 1993.

##### *Câu III.*

Người ta dự định lát nền một căn phòng hình chữ nhật bằng các viên gạch men có dạng hình thang cân với kích thước: đáy nhỏ 7cm, đáy lớn 21cm, cạnh bên  $7\sqrt{2}$  cm. Số lượng gạch dùng để lát không hạn chế. Hỏi có thể lát kín được hay không? Vì sao? (Không được đập vỡ từng viên hay lát chồm viên này lên viên kia).

##### *Câu IV.*

Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AB$  và  $AD$  ta lấy tương ứng các điểm  $M$  và  $N$ . Qua  $M$  và  $N$  ta kẻ các đường thẳng tương ứng song song với  $AD$  và  $AB$ . Gọi  $S$  là giao điểm các đường thẳng đó. Chứng minh rằng các đường thẳng  $MD, NB, SC$  đồng quy.

Câu V.

Trong một giải bóng đá có tám đội tham gia thi đấu vòng tròn, mỗi đội đá một trận với tất cả các đội còn lại, và giải được chia thành hai đợt. Tìm số trận đấu nhiều nhất có thể có ở đợt đầu sao cho với 3 đội bất kỳ đều có ít nhất hai đội chưa thi đấu với nhau trong đợt đầu.

## Hướng dẫn và đáp số

Câu I.

Hiển nhiên  $0 \leq a, b, c \leq 1$ . Ta có

$$\begin{aligned} & 6(ab + bc + ca) + a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \\ & \leq 6(ab + bc + ca) + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 \\ & = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) = 2(a + b + c)^2 = 2. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

Câu III. Trả lời không lát kín được. Ta ký hiệu  $ABCD$  là sàn hình chữ nhật và giả sử ta có thể lát kín sàn bằng các viên gạch có dạng hình thang cân mà góc nhọn ở đáy bằng  $45^\circ$ . Ta biết rằng ranh giới giữa hai hàng gạch là đường chỉ. Có hai loại đường chỉ và mỗi đường chỉ loại này cắt đường chỉ loại kia tại một điểm mà ta gọi là điểm nút. Tại mỗi nút là nơi tiếp giáp của nhiều viên gạch. Rõ ràng nếu  $A$  là nút nằm trong hình chữ nhật, thì số lượng các góc nhọn không ít hơn số lượng các góc tù tại đó. Nếu  $A$  là nút nằm trên cạnh của  $ABCD$  khác đỉnh, thì số lượng các góc nhọn cũng không ít hơn số lượng các góc tù tại đó. Riêng tại 4 đỉnh hình chữ nhật không thể có góc tù. Bởi vậy số lượng góc nhọn nhiều hơn số lượng góc tù tối thiểu là 4. Thế nhưng vì nền nhà được lát kín, do đó số lượng các viên gạch là số nguyên dương mà mỗi viên gạch có đúng hai góc tù và hai góc nhọn. Điều đó chứng tỏ rằng số lượng các góc tù và góc nhọn phải bằng nhau. Hai cách tính đó mâu thuẫn với nhau. Vì vậy không thể lát được.

Câu IV. Gọi  $I$  là giao của  $SC$  với  $NB$ ,  $J$  là giao của  $SM$  với  $NB$  và  $K$  là giao của  $IM$  với  $BC$ . Ta có  $\frac{SJ}{JM} = \frac{CB}{BK} = \frac{AD}{BK}$  (1),  $\frac{SJ}{JM} = \frac{SN}{BM} = \frac{AM}{BM}$  (2). Từ (1) và (2) ta suy ra  $\frac{AD}{BK} = \frac{AM}{BM}$ .

Hai tam giác  $ADM$  và  $BKM$  đồng dạng, nên  $\angle AMD = \angle BMK$ . Vì  $D$  và  $K$  nằm khác phía với  $AB$ , do đó  $K, M, D$  thẳng hàng. Điều đó chứng tỏ  $I$  thuộc  $MD$ .

## Đề thi vào các khối chuyên, năm 1996

Câu I. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x + \frac{1}{x})^6 - (x^6 + \frac{1}{x^6}) - 2}{(x + \frac{1}{x})^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}} \text{ với } x > 0$$

Câu II. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = 2, \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2. \end{cases}$$

Câu III. Chứng minh rằng với mọi  $n$  nguyên dương số  $n^3 + 5n$  chia hết cho 6.

Câu IV. Chứng minh rằng nếu  $a, b, c > 0$ , thì

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca.$$

Câu V. Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $AB = a$ . Gọi  $M, N, P, Q$  là các điểm bất kỳ lần lượt nằm trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ .

i) Chứng minh rằng  $2a^2 \leq MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 \leq 4a^2$ .

ii) Giả sử  $M$  cố định trên cạnh  $AB$ . Tìm vị trí các điểm  $N, P, Q$  trên các cạnh  $BC, CD, DA$  để tứ giác  $MNPQ$  là hình vuông.

## Hướng dẫn và đáp số

Câu I.

$$\begin{aligned} P &= \frac{(x + \frac{1}{x})^6 - (x^6 + \frac{1}{x^6}) - 2}{(x + \frac{1}{x})^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}} = \frac{(x + \frac{1}{x})^2 \left[ \left( x + \frac{1}{x} \right)^4 - \left( x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 \right)^2 \right]}{(x + \frac{1}{x}) \left[ (x + \frac{1}{x})^2 + (x^2 + \frac{1}{x^2} - 1) \right]} \\ &= \frac{(x + \frac{1}{x}) \left[ \left( x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \right)^2 - \left( x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 \right)^2 \right]}{2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 1} \end{aligned}$$



$$= \frac{3(x + \frac{1}{x}) \left[ 2 \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 1 \right]}{2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 1} = 3(x + \frac{1}{x}) \geq 6.$$

Giá trị bé nhất của  $P = 6$  khi  $x = 1$ .

*Câu II.* Nếu  $x, y$  là nghiệm của hệ, thì  $x, y > 0$ . Giả sử  $x \geq y$ , khi đó

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{2 - \frac{1}{y}} \leq \sqrt{2 - \frac{1}{x}}.$$

Từ  $2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2 - \frac{1}{y}} \leq \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{y}}$ , ta suy ra  $\frac{1}{\sqrt{y}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Kết hợp

các kết quả trên ta được  $x = y$ . ĐS:  $x = 1, y = 1$ .

*Câu III.* Ta đặt  $M = n^3 - n$  và chứng minh  $M$  chia hết cho 6 với mọi  $n$  nguyên. Thật vậy từ  $M = n(n-1)(n+1)$  ta suy ra rằng nếu  $n = 6k + 1$ ,  $M$  là bội của 6. Nếu  $n = 6k + 2$ , thì  $n + 1 = 6k + 3$  chia hết cho 3,  $n(n-1)$  chia hết cho 2. Nếu  $n = 6k + 3$ , thì  $n + 1 = 6k + 4$ .

Tương tự như vậy với  $n = 6k + 4, 6k + 5$ .

*Câu IV.* Từ  $\frac{a^3}{b} + ab \geq 2a^2$ , ta suy ra:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ab + bc + ca \geq 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ta lại có  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .

*Câu V.* i) Ta ký hiệu  $I, K$  lần lượt là trung điểm các đoạn  $MN$  và  $PQ$ , ta có  $2BI = MN, 2DK = PQ, 2IK \leq NP + MQ$ . Vậy thì  $4(MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2) \geq (MN + NP + PQ + QM)^2 \geq (2BI + 2IK + 2KD)^2 \geq 4BD^2 = 8a^2$ . Ta có  $MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 = (BM^2 + AM^2) + (BN^2 + CN^2) + (CP^2 + DP^2) + (DQ^2 + AQ^2) = 4a^2 - 2(BM \cdot AM + BN \cdot CN + CP \cdot DP + DQ \cdot DA) \leq 4a^2$ .

ii) Nếu  $MNPQ$  là hình vuông, thì các tam giác  $BMN, CNP, DPQ, AQM$  bằng nhau. Do đó  $BM = CN = DP = QA$ .

## Đề thi vào các khối chuyên, năm 1997

*Câu I.* Cho  $x = \frac{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}(\sqrt[3]{3} - 1)}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}$ .

Tính giá trị của biểu thức  $P = (x^3 - 4x + 1)^{1997}$ .

*Câu II.*

Giải phương trình  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5\sqrt{x}$ .

*Câu III.*

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2xy = x + y + 1, \\ 2yz = y + z + 7, \\ 2zx = z + x + 2. \end{cases}$$

*Câu IV.*

Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để  $2^n + 15$  là số chính phương.

*Câu V.*

Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng 1. Bên trong tam giác ta đặt hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  tiếp xúc ngoài với nhau, sao cho một trong hai đường tròn tiếp xúc với các cạnh  $BC$  và  $BA$ , đường tròn kia tiếp xúc với các cạnh  $BC$  và  $CA$ .

i) Chứng minh rằng  $R + R' \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

ii) Các bán kính  $R$  và  $R'$  bằng bao nhiêu để tổng diện tích các hình tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

### Hướng dẫn và đáp số

*Câu I.* Ta có  $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1, \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5}+1$ . Do đó  $x=2$  và  $P=1$ .

*Câu II.* Vì  $x=0$  không là nghiệm phương trình, bằng cách chia cả hai vế cho  $\sqrt{x}$ , ta được phương trình tương đương

$$\sqrt{1+3y} + \sqrt{1+8y} = 5, y = \frac{1}{x} \Rightarrow 5 - \sqrt{1+3y} = \sqrt{1+8y}$$

Bình phương hai vế ta được  $y = 5 - 2\sqrt{1+3y} \Rightarrow 2\sqrt{1+3y} = 5 - y$ , với  $0 < y \leq 5$ .

ĐS:  $y = 1, 21$ .

*Câu III.* Từ  $2xy = x + y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2y-1} (y \neq \frac{1}{2})$ ,  $2xz = z + x + 2 \Rightarrow$

$2z \cdot \frac{y+1}{2y-1} = z + \frac{y+1}{2y-1} + 2 \Rightarrow 3z = 5y - 1 (*)$ . Thay  $(*)$  vào phương trình còn

lại trong hệ ta được  $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2, x = 1, z = 3; y = -1, x = 0, z = -2$ .

Hiển nhiên  $y = \frac{1}{2}$  không tìm được  $x, z$  thích hợp.

*Câu V.* Gọi  $M, N$  là tiếp điểm của đường tròn  $O$  và  $O'$  với  $BC$ .

Ta có  $MN = 1 - (BM + CN)$

$$BM = R\sqrt{3}, CN = R'\sqrt{3},$$

do đó  $MN = 1 - (R + R')\sqrt{3}$ . Mặt khác  $OO' = R + R' \geq MN$ , từ các kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh.

ii) Tổng diện tích hai hình tròn là

$$S = (R^2 + R'^2) \geq \frac{\pi}{2}(R + R')^2 \geq \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $OO' \parallel BC$  và  $S = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ .

## Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 1997

*Câu I.*

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 + y^2x + 3x - 6y = 0, \\ x^2 + xy = 3 \end{cases}$$

*Câu II.*

Có hay không các số nguyên  $x, y$  thoả mãn điều kiện

$$1992x^{1993} + 1993y^{1995} = 1995$$

*Câu III.*

Số 1997 viết được dưới dạng tổng  $n$  hợp số, nhưng không viết được dưới dạng tổng của  $n + 1$  hợp số. Hỏi  $n$  bằng bao nhiêu?

*Câu IV.*

Xét các tam giác  $ABC$  ngoại tiếp đường tròn có bán kính 1. Ta ký hiệu  $h_a, h_b, h_c$  là độ dài đường cao tương ứng kẻ từ  $A, B, C$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{h_a + 2h_b} + \frac{1}{h_b + 2h_c} + \frac{1}{h_c + 2h_a}$$

*Câu V.*

Trên đường tròn cho 16 điểm và dùng 3 màu xanh, đỏ, vàng để tô các điểm này (mỗi điểm được tô bằng một màu). Mỗi cặp điểm được nối bằng một đoạn thẳng được tô bằng màu tím hoặc nâu.

Chứng minh rằng với mọi cách tô màu các điểm (chỉ dùng 3 màu xanh, đỏ, vàng) và mọi cách tô màu các đoạn nối hai điểm (chỉ dùng hai màu tím hoặc nâu) ta đều tìm được trên hình vẽ một tam giác có đỉnh là các điểm đã cho mà các đỉnh được tô bằng cùng một màu và các cạnh cũng được tô bằng cùng một màu.

**Đề thi vào các khối chuyên, năm 1998**

*Câu I.*

i) Giải phương trình  $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$ .

ii) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21. \end{cases}$$

*Câu II.*

Các số  $a, b$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 19, \\ b^3 - 3a^2b = 98. \end{cases}$$

Tính giá trị của  $P = a^2 + b^2$ .

*Câu III.*

Chứng minh rằng nếu  $0 \leq x, y, z \leq 1$ , thì  $x + y^2 + z^3 - xy - yz - zx \leq 1$ .

*Câu IV.*

Cho đường tròn  $(O;R)$  và dây  $AB$  cố định của đường tròn khác đường kính. Giả sử  $M$  là điểm nằm trên cung lớn  $AB$  của đường tròn.

i) Kẻ từ  $B$  đường thẳng vuông góc với  $AM$ , đường thẳng đó cắt  $AM$  tại  $I$  và cắt đường tròn  $(O;R)$  tại  $N$ . Gọi  $J$  là trung điểm của  $MN$ . Chứng minh rằng khi  $M$  thay đổi trên cung lớn, thì mỗi điểm  $I, J$  nằm trên một đường tròn cố định.

ii) Tìm vị trí điểm  $M$  để chu vi tam giác  $MAB$  lớn nhất.

*Câu V.*

i) Tìm các số nguyên dương  $n$  sao cho  $n+26$  và  $n-11$  được viết dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

ii) Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = xy + yz + zx + \frac{1}{2} [x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2],$$

biết rằng  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

### Hướng dẫn và đáp số

Câu I. i) Đặt  $u = \sqrt{2-x^2}$ ,  $v = \sqrt{x^2+8}$  ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ u^2 + v^2 = 10, \\ u \geq 0, v > 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được  $u = 1$ ,  $v = 3$ . ĐS:  $x = \pm 1$ .

ii) Đặt  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = xy$ , hệ phương trình trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} u + v = 7, \\ u^2 - v^2 = 21, \\ u \geq 2v \end{cases}$$

Hệ trên cho ta  $u = 5$  và  $v = 2$ . Xét hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 3, \\ xy = 2 \end{cases}$$

Hệ trên cho ta nghiệm  $x = 1, y = 2$ ;  $x = 2, y = 1$ ;  $x = -1, y = -2$ ;  $x = -2, y = -1$ .

Câu II. Từ hệ đã cho ta suy ra  $(a^3 - 3ab^2)^2 = 19^2$ ,  $(b^3 - 3a^2b)^2 = 98^2$ .

Cộng các đẳng thức đó ta được

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) &= 19^2 + 98^2 \\ \Rightarrow (a^2 + b^2)^3 &= 19^2 + 98^2 \Rightarrow P = \sqrt[3]{9965}. \end{aligned}$$

Câu III. Xuất phát từ  $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 0$

$$\Rightarrow (1-x-y-z) + (xy + yz + zx) + xyz \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - xyz \geq x + y + z - xy - yz - xz \geq x + y^2 + z^3 - xy - yz - zx.$$

Câu V. i) Ta ký hiệu  $a, b$  là các số nguyên dương thoả mãn đồng thời các điều kiện  $n + 26 = a^3$ ,  $n - 11 = b^3$ .

Trừ hai phương trình cho nhau ta được

$$a^3 - b^3 = 37 \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 1 \cdot 37.$$

Vì  $a - b < a^2 + ab + b^2$ ,

nên  $a - b = 1$  và  $a^2 + ab + b^2 = 37 \Rightarrow b = -4, 3. \Rightarrow n = 38$ .

ii) Trước hết ta thấy rằng với mọi số thực  $x, y$  và  $0 \leq t \leq 1$ , thì  $(x-y)^2(1-t) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy + t \cdot (x-y)^2$ . Sử dụng kết quả đó nhiều lần với  $t = z^2, y^2, x^2$  ta được

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx + \frac{1}{2} [x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2]$$

$$\Rightarrow P \leq 1 \text{ và dấu " = " khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Câu IV.** i) Điểm  $I$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ . Vì  $\angle AIB$  có đỉnh nằm trong hoặc ngoài đường tròn, do đó tổng hoặc hiệu số đo hai cung  $AB$  và  $MN$  là một số không đổi. Cung  $AB$  không đổi, nên cung  $MN$  không đổi. Vậy độ dài  $MN$  không đổi.  $J$  thuộc đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $r = \sqrt{R^2 - a^2}, 2a = MN$ .

ii) Gọi  $C$  là điểm thuộc tia đối của tia  $MB$  sao cho  $MC = MA$ . Ta thấy  $MA + MB = MB + MC = BC$ ,  $\angle ACB$  có số đo không đổi,  $C$  thuộc cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên  $AB$ . Vì vậy  $BC$  dài nhất, khi  $BC$  là đường kính của đường tròn chứa  $\alpha$ . Khi đó  $M$  là trung điểm của cung lớn  $AB$  thuộc đường tròn  $O$ .

## Đề thi vào các khối chuyên, năm 1999

**Câu I.**

Các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ a^2+b^2+c^2=14. \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức  $P=1+a^4+b^4+c^4$ .

**Câu II.**

1. Giải phương trình  $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$ .

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{2}, \\ xy+\frac{1}{xy}=\frac{5}{2} \end{cases}$$

**Câu III.**

Tìm tất cả các số nguyên dương  $n$  sao cho  $n^2 + 9n - 2$  chia hết cho  $n+11$ .

Câu IV.

Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $I$  nằm trong đường tròn. Dựng qua  $I$  hai dây cung  $MIN$  và  $EIF$ . Gọi  $M', N', E', F'$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $IM, IN, IE, IF$ .

1. Chứng minh rằng tứ giác  $M'N'E'F'$  nội tiếp.

2. Giả sử điểm  $I$  thay đổi và các dây cung  $MIN, EIF$  thay đổi. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $M'N'E'F'$  có bán kính không đổi.

3. Giả sử  $I$  cố định và các dây cung  $MIN, EIF$  thay đổi nhưng vuông góc với nhau. Tìm vị trí các dây cung đó để tứ giác  $M'N'E'F'$  có diện tích lớn nhất.

Câu V.

Các số dương  $x$  và  $y$  thay đổi thoả mãn điều kiện  $x + y = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (x^2 + \frac{1}{y^2})(y^2 + \frac{1}{x^2})$

## Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 1999

Câu I.

1. Giải phương trình  $\sqrt{\frac{x+7}{x+1}} + 8 = 2x^2 + \sqrt{2x-1}$ .

Câu II. Các số  $a_1, a_2, a_3, \dots$  được xác định bởi công thức

$a_n = \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3}$  với mọi  $n = 1, 2, \dots$ . Tính giá trị của tổng

$P = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_9$ .

Câu III.

Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 1999 và tổng các chữ số của số đó bằng 1999.

Câu IV.

Cho đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $R$ . Giả sử  $A$  và  $B$  là hai điểm cố định trên đường tròn với  $AB = R\sqrt{3}$ .

1. Giả sử  $M$  là điểm trên cung lớn  $AB$  của đường tròn tâm  $O$  sao cho  $M$  không trùng với các điểm  $A$  và  $B$ . Đường tròn nội tiếp tam giác  $MAB$  tiếp xúc với cạnh  $MA$  tại  $E$  và cạnh  $MB$  tại  $F$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $EF$  luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định, khi  $M$  thay đổi sao cho  $M$  không trùng với các điểm  $A$  và  $B$ .



2. Tìm tập hợp điểm  $P$  sao cho đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với đường thẳng  $OP$  tại  $P$  cắt đoạn thẳng  $AB$ .

Câu V.

Cho đường tròn  $(O)$  có bán kính  $R = 1$ . Ta xét 8 điểm  $A_1, A_2, \dots, A_8$  bất kỳ nằm trong hoặc trên đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng trong 8 điểm đó luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

## Đề thi vào các khối chuyên, năm 2000

Câu I.

1. Tính tổng  $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1999.2000}$ .

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y} = 3 \\ x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 3. \end{cases}$$

Câu II.

Giải phương trình  $\sqrt{x-1} - \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \sqrt{x^4 - 1}$ .

2. Tìm tất cả các giá trị của số thực  $a$  để phương trình

$$2x^2 - \left(4a + \frac{11}{2}\right)x + 4a^2 + 7 = 0$$

có ít nhất một nghiệm nguyên.

Câu III.

Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) ngoại tiếp đường tròn  $(O)$  có các cạnh  $AB$  và  $CD$  tiếp xúc với  $(O)$  lần lượt tại các điểm  $E$  và  $F$ .

i) Chứng minh rằng  $\frac{BE}{AE} = \frac{DF}{CF}$ .

ii) Cho biết  $AB = a, BC = b$  ( $b > a$ ),  $BE = 2AE$ . Tính diện tích hình thang.

Câu IV.

Cho  $x$  và  $y$  là hai số thực bất kỳ khác không. Chứng minh rằng

$$\frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

## Hướng dẫn và đáp số

Câu I.

1. Viết lại tổng

$$S = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{1999} - \frac{1}{2000}) \Rightarrow S = \frac{1999}{2000}.$$

2. Đáp số:  $x = 1, y = 1$ .

Câu II.

1. Điều kiện  $x \geq 1$ . Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng sau

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \sqrt{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} - 1) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Đáp số:  $a=1, a=\frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu III.

i) Hãy chứng minh rằng các tam giác  $OBC$  và  $OAD$  vuông tại  $O$ . Từ đó ta suy ra  $BQ \cdot CQ = DP \cdot AP$  ( $Q$  và  $P$  là điểm tiếp xúc của  $(O)$  với  $BC$  và  $AD$ ). Mặt khác ta có  $BQ = BE, CQ = CF, DF = DP, AE = AP$ . Từ các kết quả đó, ta suy ra điều cần chứng minh.

ii) Đáp số  $S = \frac{\sqrt{2a(3b-2a)}(3b-a)}{3}.$

Câu IV. Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$M = \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^4+y^4}{x^2y^2} \geq 3.$$

Hiển nhiên ta có

$$M \geq \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2)^2}{4x^2y^2} + \frac{(x^2+y^2)^2}{4x^2y^2} \geq 2+1=3.$$

## Đề thi vào khối chuyên Toán –Tin, năm 2000

Câu I.

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thoả mãn đẳng thức  $y(x-1) = x^2 + 2$ .

2. Cho các số thực  $x$  và  $y$  thoả mãn đồng thời các điều kiện  $-1 \leq x+y \leq 1, -1 \leq xy+x+y \leq 1$ . Chứng minh rằng  $|x| \leq 1, |y| \leq 2$ .

*Câu II.*

1. Giải phương trình

$$\frac{1}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}.$$

2. Cho biểu thức  $f(x) = ax^2 + bx + c$  có tính chất là  $f(1), f(4), f(9)$  là các số hữu tỉ. Chứng minh rằng  $a, b, c$  là các số hữu tỉ.

*Câu III.*

1. Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Chứng minh rằng nếu các góc  $B$  và  $D$  của tứ giác không nhọn, thì  $AC \geq BD$ .

2. Cho đoạn thẳng  $AC$  cố định. Hãy tìm tập hợp điểm  $B$  để tam giác  $ABC$  là tam giác không có góc tù và góc  $\angle BAC$  là góc nhỏ nhất của tam giác.

*Câu IV.*

Trên mặt phẳng cho 6 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau. Ta nối mỗi cặp điểm thuộc 6 điểm đã cho bằng một đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong số các đoạn thẳng nhận được có một đoạn thẳng là cạnh nhỏ nhất của một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho.

## **Đề thi vào các khối chuyên, năm 2001**

*Câu I.*

Tìm các giá trị nguyên  $x, y$  thỏa mãn đẳng thức  $(y+2)x^2 + 1 = y^2$ .

*Câu II.*

i) Giải phương trình  $\sqrt{x(3x+1)} - \sqrt{x(x-1)} = 2\sqrt{x^2}$ .

ii) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + 2 = 3x + y, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

*Câu III.*

Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2a$ . Trên đoạn  $AB$  ta lấy điểm  $M$ . Trong nửa mặt phẳng bờ  $AB$  chứa nửa đường tròn, ta kẻ hai tia  $Mx$  và  $My$  sao cho  $\angle AMx = \angle BMy = 30^\circ$ . Hai tia  $Mx$  và  $My$  cắt nửa đường tròn tương ứng tại  $E$  và  $F$ . Gọi  $E', F'$  là chân các đường vuông góc hạ từ  $E$  và  $F$  xuống  $AB$ .

i) Cho biết  $AM = \frac{a}{2}$ . Tính diện tích hình thang vuông  $EE'F'F$  theo  $a$ .

ii) Chứng minh rằng đường thẳng  $EF$  tiếp xúc với một đường tròn cố định, khi  $M$  di động trên  $AB$ .

**Câu IV.**

Cho các số thực  $x, y, z$  khác không là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) + y(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}) + z(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = -2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

Tìm giá trị của tổng  $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ .

**Câu V.**

Với  $x, y, z$  là các số dương, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

## Hướng dẫn và đáp số

**Câu I.** Từ  $x^2 = \frac{y^2 - 1}{y + 2} = y - 2 + \frac{3}{y + 2}$  và  $\frac{3}{y + 2}$  là số nguyên, ta suy ra  $y + 2 = \pm 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$  và  $x = 0$ ,  $y = -1$ .

**Câu II.** i)  $x = 0$ ;  $x = 1$ .

ii)  $x = 1$ ,  $y = 1$ ;  $x = 1$ ,  $y = -1$ .

**Câu III.** i) Diện tích hình thang vuông là  $\frac{15\sqrt{3}}{32}a^2$ .

ii)  $EF$  tiếp xúc với đường tròn tâm  $O$  bán kính  $\frac{a}{2}$ .

**Câu IV.** Nhân hai vế của (1) với  $xyz$  và tiến hành biến thành tích ta được

$$(x+y)(y+z)(z+x) = 0. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

**Câu V.**

$$\text{Ta có } M \leq \frac{xyz}{2\sqrt{xy}2\sqrt{yz}2\sqrt{zx}} = \frac{1}{8}.$$

## Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 2001

### Câu I.

i) Cho  $f(x) = ax^2 + bx + c$  có tính chất là  $f(x)$  nhận giá trị nguyên, khi  $x$  là số nguyên. Hỏi các hệ số  $a, b, c$  có nhất thiết là các số nguyên hay không? Tại sao?

ii) Tìm các số nguyên không âm  $x, y$  thoả mãn điều kiện  $x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$

### Câu II.

Giải phương trình  $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$ .

### Câu III.

Cho các số thực  $a, b, x, y$  thoả mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} ax + by = 3, \\ ax^2 + by^2 = 5, \\ ax^3 + by^3 = 9, \\ ax^4 + by^4 = 17. \end{cases}$$

Tính giá trị các biểu thức  $A = ax^5 + by^5$ ,  $B = ax^{2001} + by^{2001}$ .

### Câu IV.

Cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm là  $O$ . Gọi  $d_1, d_2$  là các đường thẳng vuông góc với  $AB$  tương ứng tại  $A$  và  $B$ . Một góc vuông đỉnh  $O$  có một cạnh cắt  $d_1$  ở  $M$ , còn cạnh kia cắt  $d_2$  ở  $N$ . Kẻ  $OH$  vuông góc xuống  $MN$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MHB$  cắt  $d_1$  ở điểm thứ hai  $E$  khác  $M$ .  $MB$  cắt  $NA$  ở  $I$ , đường thẳng  $HI$  cắt  $EB$  ở  $K$ . Chứng minh rằng  $K$  nằm trên một đường tròn cố định khi góc vuông quay xung quanh đỉnh  $O$ .

### Câu V.

Cho 2001 đồng tiền, mỗi đồng tiền được sơn một mặt bằng màu đỏ và mặt kia màu xanh. Xếp 2001 đồng tiền đó theo một vòng tròn sao cho tất cả các đồng tiền đều có mặt xanh ngửa lên phía trên. Cho phép mỗi lần đổi mặt đồng thời 5 đồng tiền liên tiếp cạnh nhau. Hỏi với cách làm như thế, sau một số hữu hạn lần ta có thể làm cho tất cả các đồng tiền đều có mặt đỏ ngửa lên phía trên được hay không? Tại sao?

## Hướng dẫn và đáp số

### Câu I.

1) Chỉ cần  $c$  nguyên, vì ta có thể chọn  $f(x) = \frac{x(x+1)}{2} + c = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + c$ .

Nếu  $x, y$  là nghiệm của phương trình, thì  $x > y$  và  $(x^2 - y^2)^2 = y + 1$ .  
Đặt  $x = y + m$ ;  $m \geq 1$ , ta có  $x^2 - y^2 = 2my + m^2 \geq 2y + 1$ . Do đó  $(x^2 - y^2)^2 \geq (2y + 1)^2$ .  
Từ giả thiết ta có  $y + 1 \geq (2y + 1)^2 \Leftrightarrow 4y^2 + 3y \leq 0 \Leftrightarrow y = 0$  và  $x = 1$ .

### Câu II.

Phương trình đã cho tương đương với  $(\sqrt{x+1} - 2)^2 + (x-3)^2 = 0$ .  $x = 3$ .

### Câu III. Xuất phát từ hằng đẳng thức

$$ax^{n+2} + by^{n+2} = (ax^{n+1} + by^{n+1})(x+y) - (ax^n + by^n)xy$$

ta suy ra

$$ax^3 + by^3 = 5(x+y) - 3xy = 9$$

và

$$ax^4 + by^4 = 9(x+y) - 5xy = 17. \Rightarrow xy = 2 \text{ và } x+y = 3$$

$$A = ax^5 + by^5 = (ax^4 + by^4)(x+y) - (ax^3 + by^3)xy = 33.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta tính được  $B = 1 + 2^{2001}$ .

### Câu IV.

Hai tam giác  $AOM$  và  $BNO$  đồng dạng, nên  $\frac{OA}{NB} = \frac{OM}{ON} = \frac{OB}{NB}$ . Tam giác  $OMN$  đồng dạng với  $BON$ , do đó  $\angle MNO = \angle ONB$  và  $NH = NB$ . Tương tự ta có  $MH = MA$ . Vì  $MA \parallel BN$ , nên  $\frac{AM}{NB} = \frac{IA}{IN} \Rightarrow \frac{HM}{HN} = \frac{IA}{IN} \Rightarrow IH \parallel MA \Rightarrow \angle MEB = \angle HKB$ . Vì tứ giác  $MEBH$  nội tiếp, do đó  $\angle MEB = \angle NHB$ . Đường tròn đường kính  $AB$  tiếp xúc với  $MN$  tại  $H$ , nên  $\angle HAB = \angle NHB$ . Từ các kết quả trên ta suy ra  $\angle HAB = \angle HKB$ . Tứ giác  $AKBH$  nội tiếp hay  $K$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ .

Câu V. Được. Ta đánh số các đồng tiền  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2001}$  và lập lược đồ đổi mặt 5 đồng tiền

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5.$$

$$a_2 a_3 a_4 a_5 a_6.$$

$$a_3 a_4 a_5 a_6 a_7.$$

$$a_4 a_5 a_6 a_7 a_8.$$

.....

$$a_{1999} a_{2000} a_{2001} a_1 a_2.$$

$$a_{2000} a_{2001} a_1 a_2 a_3.$$

$$a_{2001} a_1 a_2 a_3 a_4.$$

Căn cứ vào lược đồ trên ta thấy mỗi đồng tiền được đổi mặt 5 lần, do đó chúng đều là đở.

## Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 2002

*Câu I.*

i) Giải phương trình  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

ii) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $x + xy + y = 9$ .

*Câu II.*

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1, \\ x^3 + y^3 = x + 3y. \end{cases}$$

*Câu III.*

Cho mười số nguyên dương 1, 2, ..., 10. Sắp xếp mười số đó một cách tùy ý thành một hàng. Cộng mỗi số với số thứ tự của nó trong hàng, ta được mười tổng. Chứng minh rằng trong mười tổng đó tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.

*Câu IV.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{a+c-b} + \frac{16c}{a+b-c},$$

trong đó  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

*Câu V.*

Đường tròn  $(C)$  tâm  $I$  nội tiếp tam giác  $ABC$  tiếp xúc với các cạnh  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  tương ứng tại các điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

i) Gọi các giao điểm của đường tròn  $(C)$  với các đoạn  $IA$ ,  $IB$ ,  $IC$  lần lượt là  $M$ ,  $N$ ,  $P$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $A'M$ ,  $B'N$ ,  $C'P$  đồng quy.

ii) Kéo dài đoạn  $AI$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  tại  $D$  (khác  $A$ ). Chứng minh rằng  $\frac{IB \cdot IC}{ID} = 2r$ , trong đó  $r$  là bán kính của đường tròn  $(C)$ .

## Hướng dẫn và đáp số

*Câu I.*

i) Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3})=0$$



Nghiệm phương trình là  $x = 2$ .

ii) Phương trình đã cho tương đương với  $(x + 1)(y + 1) = 10$ . ĐS: (0;9), (9;0), (-2; -11), (-11; -2), (1;4), (4;1), (-3; -6), (-6; -3).

Câu II. ĐS:  $x = \pm 1, y = 0$ .

Câu III. Giả sử 10 được xếp thành một hàng là  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ . Mười tổng đó là

$$a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3, \dots, a_{10} + 10.$$

Rõ ràng tổng của 10 số này là

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + (1 + 2 + 3 + \dots + 10) = 110.$$

Tận cùng của tổng là số 0. Giả sử 10 tổng trên có các số tận cùng khác nhau, khi đó tổng các chữ số tận cùng của chúng là  $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$ . Vì vậy chữ số tận cùng của tổng đó là 5. Hai kết quả nhận được khác nhau. Mâu thuẫn đó chứng minh kết luận bài toán.

Câu IV. Đặt

$$2x = b + c - a, 2y = c + a - b, 2z = a + b - c,$$

khi đó  $x > 0, y > 0, z > 0$ .

Ta có

$$\begin{aligned} 2P &= 4\left(\frac{y+z}{x}\right) + 9\left(\frac{z+x}{y}\right) + 16\left(\frac{x+y}{z}\right) \\ &= \left(\frac{4y}{x} + \frac{9x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{x} + \frac{16x}{z}\right) + \left(\frac{9z}{y} + \frac{16y}{z}\right) \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức  $m + n \geq 2\sqrt{mn}$ , ta suy ra  $2P \geq 52 \Rightarrow P \geq 26$ . Dấu bằng xảy ra khi  $2y = 3x$  và  $z = 2x$ .

Câu V. i) Theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm A tới đường tròn (C), ta suy ra M là trung điểm của cung B'C'. Tương tự N là trung điểm của cung A'C' và P - trung điểm của cung A'B'. Tam giác A'B'C' có A'M, B'N, C'P là các đường phân giác của 3 góc tam giác.

ii) Tam giác IBD cân tại D có  $\angle IDB = \angle C$ . Gọi E là trung điểm của IB, hai tam giác IDE và ICA' đồng dạng, nên

$$\frac{ID}{IC} = \frac{IE}{IA'} = \frac{2IE}{2IA'} = \frac{IB}{2IA'} \Rightarrow \frac{IB \cdot IC}{ID} = 2IA' = 2r.$$

## Đề thi vào các khối chuyên, năm 2002

Câu I.

i) Giải phương trình  $\sqrt{8 + \sqrt{x}} + \sqrt{5 - \sqrt{x}} = 5$

ii) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 8, \\ x(x+1) + y(y+1) + xy = 17. \end{cases}$$

*Câu II.*

Cho các số  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình  $x^2 + (a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$  vô nghiệm.

*Câu III.*

Tìm tất cả các số nguyên  $n$  sao cho  $n^2 + 2002$  là một số chính phương.

*Câu IV.* Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{zx},$$

trong đó  $x, y, z$  là các số dương thay đổi thoả mãn điều kiện  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ .

*Câu V.*

Cho hình vuông  $ABCD$ .  $M$  là điểm thay đổi trên cạnh  $BC$  (khác  $B$ ) và  $N$  là điểm thay đổi trên cạnh  $CD$  (khác  $D$ ) sao cho  $MAN = MAB + NAD$ .

i) Gọi  $P$  và  $Q$  lần lượt là giao điểm của  $BD$  với  $AN$  và  $AM$ . Chứng minh rằng tập hợp các điểm  $P, Q, M, C, N$  nằm trên cùng một đường tròn.

ii) Chứng minh rằng đường thẳng  $MN$  luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định, khi  $M$  và  $N$  thay đổi.

iii) Ký hiệu  $S_1$  và  $S_2$  lần lượt là diện tích tam giác  $APQ$  và  $MNPQ$ . Chứng minh rằng tỷ số  $\frac{S_1}{S_2}$  không đổi khi  $M$  và  $N$  thay đổi.

## Hướng dẫn và đáp số

*Câu I.*

i) Đặt  $t = \sqrt{x}$ , phương trình đã cho tương đương với phương trình  $\sqrt{40-3t-t^2} = 6; t=1 \Rightarrow x=1$ .

ii) Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x+y+xy=7, \\ (x+y)^2+(x+y)-xy=17. \end{cases}$$

Đặt  $S = x+y, P = xy \Rightarrow S=4$  và  $P=3 \Rightarrow x=1, y=3; x=3, y=1$ .

Câu II.

$$\Delta = (a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca.$$

Vì  $a + b > c \Rightarrow c(a + b) > c^2$  suy ra

$$2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta < 0.$$

Câu III.

Nếu  $n^2 + 2002 = m^2$  với  $m$  là số nguyên, thì  $(m - n)(m + n) = 2004$ . Vậy  $m, n$  cùng chẵn hoặc cùng lẻ, nghĩa là  $m - n$  và  $m + n$  chia hết cho 2 và  $(m - n)(m + n)$  chia hết cho 4. Điều này không thể xảy ra vì 2002 không chia hết cho 4.

Câu IV.

Sử dụng bất đẳng thức sau đây: Nếu  $a, b, c > 0$ , thì

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Ta xem

$$a = 1 + xy, b = 1 + yz, c = 1 + xz,$$

ta được 
$$P \geq \frac{9}{3 + xy + yz + zx} \geq \frac{9}{3 + x^2 + y^2 + x^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{3}{2}$ , khi  $x = y = z = 1$ .

Câu V.

i) Từ giả thiết ta suy ra các tứ giác  $ADNQ$  và  $ABMP$  nội tiếp, do đó các điểm  $P, Q$  nhìn đoạn  $MN$  dưới một góc vuông.

ii) Trên tia đối của tia  $BC$  ta lấy điểm  $K$  sao cho  $BK = ND$ . Hai tam giác  $AMN$  và  $AMK$  bằng nhau, do đó khoảng cách từ  $A$  đến  $MN$  bằng  $AB$ .

iii) Các tam giác  $APM$  và  $AQN$  vuông cân tại  $P$  và  $Q$ , do đó

$$\frac{AQ}{AN} = \frac{AP}{AM} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## Đề thi vào các khối chuyên, năm 2003

Câu I.

Giải phương trình  $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3$ .

Câu II. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5, \\ y^3 + 6xy^2 = 7. \end{cases}$$

*Câu III.*

Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$  ( $R$  là một độ dài cho trước).  $M, N$  là hai điểm trên nửa đường tròn  $(O)$  sao cho  $M$  thuộc cung  $AN$  và tổng các khoảng cách từ  $A, B$  đến đường thẳng  $MN$  bằng  $R\sqrt{3}$ .

i) Tính độ dài đoạn  $MN$  theo  $R$ .

ii) Gọi giao điểm của hai dây  $AN$  và  $BM$  là  $I$ , giao điểm của các đường thẳng  $AM$  và  $BN$  là  $K$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $M, N, I, K$  cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó theo  $R$ .

iii) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác  $KAB$  theo  $R$  khi  $M, N$  thay đổi nhưng vẫn thoả mãn giả thiết của bài toán.

*Câu V.*  $x, y, z$  là các số thực thoả mãn điều kiện  $x + y + z + xy + yz + zx = 6$ . Chứng minh rằng  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ .

**Đề thi vào khối chuyên Toán – Tin, năm 2003**

*Câu I.*

Cho phương trình  $x^4 + 2mx^2 + 4 = 0$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để phương trình có 4 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2, x_3, x_4$  thoả mãn điều kiện  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32$ .

*Câu II.* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

*Câu III.*

Tìm các số nguyên  $x, y$  thoả mãn đẳng thức  $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$ .

*Câu IV.*

Đường tròn tâm  $O$  nội tiếp tam giác  $ABC$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  tương ứng tại các điểm  $D, E, F$ . Đường tròn tâm  $O'$  bàng tiếp trong góc  $BAC$  của tam giác  $ABC$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  và phần kéo dài của các cạnh  $AB, AC$  tương ứng tại các điểm  $P, M, N$ .

i) Chứng minh rằng  $BP = CD$ .

ii) Trên đường thẳng  $MN$  ta lấy các điểm  $I$  và  $K$  sao cho  $CK \parallel AB$ ,  $BI \parallel AC$ . Chứng minh rằng các tứ giác  $BICE$  và  $BKCF$  là các hình bình hành.

iii) Gọi  $(S)$  là đường tròn đi qua 3 điểm  $I, K, P$ . Chứng minh rằng  $(S)$  tiếp xúc với các đường thẳng  $BC, BI, CK$ .

Câu V.

Số thực  $x$  thay đổi và thoả mãn điều kiện  $x^2 + (3 - x)^2 \geq 5$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^4 + (3 - x)^4 + 6x^2(3 - x)^2$ .

### Đề thi vào các khối chuyên, năm 2004

Câu I.

i) Giải phương trình  $|x + 1| + |x - 1| = 1 + |x^2 - 1|$

ii) Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y^2 - x^2 - xy + 2y - 2x = 7, \\ x^3 + y^3 + x - y = 8. \end{cases}$$

Câu II.

Cho các số dương  $a, b$  thoả mãn điều kiện

$$a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}.$$

Tính giá trị của  $P = a^{2004} + b^{2004}$ .

Câu III.

Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$  cm,  $BC = 4$  cm,  $AC = 5$  cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ  $B$  chia tam giác đó thành 4 phần. Tính diện tích mỗi phần.

Câu IV.

Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp trong đường tròn có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau tại  $H$  ( $H$  không trùng với tâm đường tròn). Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ  $H$  xuống các đường thẳng  $AB$  và  $AC$ ;  $P$  và  $Q$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $MH$  và  $NH$  với các đường thẳng  $CD$  và  $DA$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $PQ \parallel AC$  và 4 điểm  $M, N, P, Q$  nằm trên cùng một đường tròn.

Câu V.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{2} \left( \frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} \right) + \frac{1}{4} (x^{16} + y^{16}) - (1 + x^2 y^2)^2$$

### Hướng dẫn và đáp số

Câu I. i) ĐS:  $x = 0, \pm 2$ .

ii) Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} (x+2y+2)(x-y) = -7, \\ x^3 + y^3 + x - y = 8. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp

$$\begin{cases} x+2y+2=7, \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=2.; \begin{cases} x+2y+2=-7, \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

$$\begin{cases} x+2y+2=-1, \\ x-y=7 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm}; \begin{cases} x+2y+2=1, \\ x-y=-7 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

*Câu II.* Hãy sử dụng lại hằng đẳng thức của cách giải câu III đề thi năm 2001.

ĐS:  $P = 2$

*Câu III.* Diện tích các tam giác là  $\frac{54}{25} \text{ cm}^2, \frac{72}{175} \text{ cm}^2, \frac{3}{7} \text{ cm}^2, 3 \text{ cm}^2$ .

*Câu V.*

$$\frac{1}{2} \left( \frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} + 1 + 1 \right) \geq 2x^2 y^2,$$

$$\frac{1}{4} (x^{16} + y^{16} + 1 + 1) \geq x^4 y^4 \Rightarrow Q + \frac{5}{2} \geq (1 + x^2 y^2)^2.$$

Giá trị nhỏ nhất của  $Q = -\frac{5}{2}$ .

## Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 2004

*Câu I.*

Giải phương trình  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 2$

*Câu II.*

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15, \\ (x-y)(x^2-y^2) = 3 \end{cases}$$

*Câu III.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}$$

với  $x, y$  là các số thực lớn hơn 1.

*Câu IV.*

Cho hình vuông  $ABCD$  và điểm  $M$  nằm trong hình vuông.

i) Tìm tất cả các vị trí của  $M$  sao cho  $\angle MAB = \angle MBC = \angle MCD = \angle MDA$ .

ii) Xét điểm  $M$  nằm trên đường chéo  $AC$ . Gọi  $N$  là chân đường vuông góc hạ từ điểm  $M$  xuống cạnh  $AB$  và  $O$  là trung điểm của đoạn  $AM$ . Chứng minh rằng tỷ số  $\frac{OB}{CN}$  có giá trị không đổi khi  $M$  di chuyển trên đường chéo  $AC$ .

Với giả thiết  $M$  nằm trên đường chéo  $AC$ , xét các đường tròn  $(S_1)$  và  $(S_2)$  có đường kính tương ứng là  $AM$  và  $CN$ . Hai tiếp tuyến chung của  $(S_1)$  và  $(S_2)$  tiếp xúc với  $(S_2)$  tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $PQ$  tiếp xúc với  $(S_1)$ .

*Câu V.*

Với số thực  $a$ , ta định nghĩa phần nguyên của  $a$  là số nguyên lớn nhất không vượt quá  $a$  và được ký hiệu  $[a]$ . Dãy các số  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  được xác định bởi công thức  $\left[ \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right] - \left[ \frac{n}{\sqrt{2}} \right]$ . Hỏi trong 200 số  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{199}$  có bao nhiêu số khác 0? (biết  $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ ).

## Hướng dẫn và đáp số

*Câu I.*

Đáp số:  $x = 1$ .

*Câu II.*

Đáp số  $x = 1, y = 2$ ;  $x = 2, y = 1$ .

*Câu III.*

$P$  được viết lại dưới dạng

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 2 \frac{xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} \geq 2 \frac{x}{\frac{x-1+1}{2}} \frac{y}{\frac{y-1+1}{2}} = 8.$$

*Câu IV.*

i)  $M$  trùng với tâm hình vuông.

ii) Gọi  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $M$  xuống  $BC$ . Ta có  $MH = NB$ . Các tam giác  $AMN$  và  $MCH$  vuông cân tại các đỉnh  $N$  và  $H$ , nên



$$\frac{ON}{MN} = \frac{MH}{MC} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Các tam giác } ONB \text{ và } MNC \text{ đồng dạng, do đó}$$

$$\frac{OB}{NC} = \frac{ON}{MN} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

iii)  $S_2$  đi qua tâm  $O$  của  $S_1$ . Vì vậy  $S_1$  cắt  $S_2$ . Gọi  $P'$  là tiếp điểm thuộc  $S_1$  và  $T$  là giao điểm của đoạn  $OO'$  với  $S_1$ , trong đó  $O'$  là trung điểm của  $NC$ . Ta có  $\angle O'OP = \angle O'PO$ . Do  $O'P \parallel OP$ , nên  $\angle P'OP = \angle O'PO$ . Từ các kết quả trên ta suy ra  $\angle POP' = \angle POT$ . Hai tam giác  $POP'$  và  $POT$  bằng nhau, nên  $\angle PP'O = \angle PTO = 90^\circ$ .

## Đề thi vào các khối chuyên, năm 2005

Câu I. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Câu II.

Giải phương trình  $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$ .

Câu III.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 17y^2 + 34xy + 51(x + y) = 1740$$

Câu IV.

Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  nằm ngoài nhau có tâm tương ứng là các điểm  $O$  và  $O'$ . Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tiếp xúc với  $(O)$  tại  $A$  và  $(O')$  tại  $B$ . Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn cắt  $AB$  tại  $I$ , tiếp xúc với  $(O)$  tại  $C$  và với  $(O')$  tại  $D$ . Biết rằng  $C$  nằm giữa  $I$  và  $D$ .

1) Hai đường thẳng  $OC$ ,  $O'B$  cắt nhau tại  $M$ . Chứng minh rằng  $OM > O'M$ .

2) Ký hiệu  $(S)$  là đường tròn đi qua 3 điểm  $A, C, B$  và  $(S')$  là đường tròn đi qua 3 điểm  $A, D, B$ . Đường thẳng  $CD$  cắt  $(S)$  tại  $E$  khác  $C$  và cắt  $(S')$  tại  $F$  khác  $D$ . Chứng minh rằng  $AF$  vuông góc với  $BE$ .

Câu V.

Giả sử  $x, y, z$  là các số dương thay đổi thoả mãn điều kiện  $xy^2z^2 + x^2z + y = 3z^2$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{z^4}{1 + z^4(x^4 + y^4)}.$$

## Hướng dẫn và đáp số

Câu I. Đặt  $x + y = S$ ;  $xy = P$ .

Hệ đã cho có dạng :

$$\begin{cases} S + P = 3 \\ S^2 - 2P = 2. \end{cases}$$

Hệ trên có các nghiệm là

$$\begin{cases} S = 2 \Rightarrow x = y = 1 \\ P = 1. \\ S = -4 \Rightarrow \text{không tồn tại } x, y. \\ P = 7. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là  $(1, 1)$ .

Câu II

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} 11 - x - 4\sqrt{x+3} - 2\sqrt{3-2x} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3 - 4\sqrt{x+3} + 4) + (3-2x - 2\sqrt{3-2x} + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + (\sqrt{3-2x} - 1)^2 &= 0 \\ \begin{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \sqrt{3-2x} - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu III

PT đã cho có dạng  $x^2 + 17[y^2 + 2xy + 3(x+y)] = 1740$ , chú ý rằng với số  $x$  nguyên,  $x$  có thể có dạng sau:  $x = 17k \pm r$  với  $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  và  $k \in \mathbb{Z}$ . Từ đó suy ra  $x^2 \in \{17k, 17k+1, 17k+4, 17k+9, 17k+8, 17k+16, 17k+2, 17k+15, 17k+13\}$ . Nhận thấy rằng vế phải là 1740 khi chia cho 17 có số dư là 6. Trong khi đó vế trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6 vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Câu IV

Ta có  $OM \parallel O'D$  ( $OM$  và  $O'D$  cùng vuông góc với  $CD$ )  $\Rightarrow \angle MOO' = \angle OO'D < \angle IO'D = \angle IO'M < \angle OO'M \Rightarrow OM > O'M$ . Tứ giác  $ACBE$  nội tiếp và  $IA = IC$ , nên  $IB = IE$ . Mặt khác,  $IB = ID$ , do đó tam giác  $BED$  vuông tại  $B$  hay  $BD$  vuông góc với  $BE$ . Tứ giác  $ADBF$  nội tiếp và  $IB = ID$ , nên  $IA = IF$  suy ra  $AF \parallel BD$ .  $\Rightarrow AF$  vuông góc với  $BE$ .

Câu V

Điều kiện đã cho có thể viết lại là  $xy^2 + x^2 \frac{1}{z} + y \frac{1}{z^2} = 3$ .

Biểu thức  $P$  có dạng

$$P = \frac{1}{\frac{1}{z^4} + x^4 + y^4}$$

Đặt  $\frac{1}{z} = t$  ta thu được bài toán sau với  $x, y, t$  là các số dương thỏa mãn  $xy^2 + yt^2 + tx^2 = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^4 + y^4 + t^4}$$

Theo BĐT Cauchy cho bốn số dương, ta có:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + y^4 + 1 \geq 4xy^2 \\ y^4 + t^4 + t^4 + 1 \geq 4yt^2 \\ t^4 + x^4 + x^4 + 1 \geq 4tx^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(x^4 + y^4 + t^4) + 3 \geq 4(xy^2 + yt^2 + tx^2) = 12$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + t^4 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{x^4 + y^4 + t^4} \leq \frac{1}{3}.$$

Vậy  $P_{\min} = \frac{1}{3}$  khi  $x = y = z = 1$ .

## Đề thi vào khối chuyên Toán - Tin, năm 2005

*Câu I.*

Giải phương trình  $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$

*Câu II.* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y. \end{cases}$$

*Câu III.*

Giả sử  $x, y$  là những số không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện  $x^2 + y^2 = 1$ .

1) Chứng minh rằng  $1 \leq x + y \leq \sqrt{2}$ .

2) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2y}.$$

*Câu IV.* Cho hình vuông  $ABCD$  và điểm  $P$  nằm trong tam giác  $ABC$ .

1) Giả sử  $\angle PBC = 135^\circ$ . Chứng minh rằng  $2PB^2 + PC^2 = PA^2$ .

2) Các đường thẳng  $AP$ ,  $CP$  cắt các cạnh  $BC$ ,  $BA$  tương ứng tại các điểm  $M$ ,  $N$ . Gọi  $Q$  là điểm đối xứng với  $B$  qua trung điểm của đoạn  $MN$ . Chứng minh rằng khi  $P$  thay đổi trong tam giác  $ABC$ , thì đường thẳng  $PQ$  luôn đi qua một điểm cố định.

*Câu V.*

1) Cho một đa giác đều  $(H)$  có 14 đỉnh. Chứng minh rằng trong 6 đỉnh bất kỳ của  $(H)$  luôn tìm được 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang cân.

2) Có bao nhiêu phân số tối giản  $\frac{m}{n} > 1$  ( $m, n$  là các số nguyên dương) thoả mãn điều kiện  $m, n = 13860$ .

## Hướng dẫn và đáp số

*Câu I*

Điều kiện:  $-2 \leq x \leq 2$ .

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \quad (t \geq 0) \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}.$$

$$\text{PT đã cho có dạng } t^2 + 2t - 8 = 0 \Rightarrow t_1 = -4 \text{ (loại)}, t_2 = 2 \Rightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Thử lại ta thấy  $x = -2$  và  $x = 2$  là hai nghiệm của PT đã cho.

*Câu II*

Do  $x^3 + y^3 - xy^2 = 1$  nên PT thứ hai của hệ có dạng

$$4x^4 + y^4 = (4x + y)(x^3 + y^3 - xy^2)$$

$$\Rightarrow xy(3y^2 - 4xy + x^2) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{hệ có nghiệm } (0, 1).$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{hệ có nghiệm } (1, 0).$$

$$3y^2 - 4xy + x^2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Với } x \neq 0 \text{ chia cả hai vế của PT } (*) \text{ cho } x^2 \text{ ta nhận được } 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0$$

$$\text{Đặt } \frac{y}{x} = t \text{ ta có } 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{3}.$$

$$* \text{ Với } \frac{y}{x} = 1 \text{ ta tìm được } x = y = 1.$$

$$* \text{ Với } \frac{y}{x} = \frac{1}{3} \text{ ta tìm được } x = \frac{3}{\sqrt[3]{25}}, y = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}.$$

Vậy hệ có các nghiệm  $(x, y)$  là  $(0, 1); (1, 0); (1, 1); (\frac{3}{\sqrt[3]{25}}, \frac{1}{\sqrt[3]{25}})$ .

### Câu III

Từ  $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2$  suy ra  $x + y \leq \sqrt{2}$ .

Đẳng thức xảy ra khi  $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Mặt khác  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 1 + 2xy \geq 1$  suy ra  $x + y \geq 1$ . Đẳng thức xảy ra khi  $x = 0$  hoặc  $y = 0$ .

Ta có  $P^2 = 2 + 2(x + y) + 2\sqrt{1 + 2(x + y) + 4xy}$

Do  $x + y \leq \sqrt{2}$  và  $4xy \leq 2(x^2 + y^2) = 2$  suy ra

$$\begin{aligned} P^2 &\leq 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2} \\ \Rightarrow P &\leq \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Vậy  $P_{\max} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$ , đạt được khi  $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Mặt khác, do  $x + y \geq 1$  và  $4xy \geq 0$

nên  $P^2 \geq 2 + 2 + 2\sqrt{1 + 2 + 0} \Rightarrow P \geq \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ .

Vậy  $P_{\min} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$  đạt được khi  $x = 0$  hoặc  $y = 0$ .

### Câu IV

Lấy điểm  $P'$  khác phía với điểm  $P$  đối với đường thẳng  $AB$  sao cho  $\triangle BPP'$  vuông cân (tại  $B$ ).

Ta có  $\triangle BPC = \triangle BP'A$  (c.g.c)  $\angle BP'A = 135^\circ$ . Do  $\angle BP'P = 45^\circ$  nên  $\angle PP'A = 90^\circ$ .

Theo định lý Pythagore, ta có  $PA^2 = AP^2 + P'P^2 = PC^2 + 2PB^2$ .

Trước hết ta chứng minh nhận xét sau

**Nhận xét:** Giả sử  $I$  là điểm nằm trong hình chữ nhật  $ABCD$ . Qua  $I$  kẻ các đường thẳng  $MN, PQ$  tương ứng song song với  $AB, AD$ . Gọi diện tích hình chữ nhật  $IPBN$  là  $S_1$ , diện tích hình chữ nhật  $IQDM$  là  $S_2$ . Ta có  $S_1 = S_2$  khi và chỉ khi  $I$  thuộc đường chéo  $AC$ .

Thật vậy: Giả sử  $I$  thuộc đường chéo  $AC$ . Vì đường chéo của hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành hai phần có diện tích bằng nhau nên  $S_1 = S_2$ ,

suy ra  $IN \cdot IP = IM \cdot IQ \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{IQ}{IP} = \frac{NC}{MA} \Rightarrow \angle MAI = \angle NIC$ . Do  $M, I, N$  thẳng hàng nên  $A, I, C$  thẳng hàng.

Trở lại bài toán

Để thấy tứ giác  $NBMQ$  là hình chữ nhật. Qua  $P$  và  $Q$  kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông. Do  $P$  thuộc đường chéo  $AM$  của hình chữ nhật  $ABMR$  nên  $S_{BLPK} = S_{PIRS}$ .  $P$  thuộc đường chéo  $CN$  của hình chữ nhật  $NBCH$  nên  $S_{BLPK} = S_{PTHF}$ . Vậy  $S_{PIRS} = S_{PTHF} \Rightarrow S_{FQRS} = S_{QITH}$ . Theo nhận xét trên, suy ra  $Q$  thuộc đường chéo  $PD$  của hình chữ nhật  $SPTD$ , tức  $PQ$  đi qua điểm  $D$ .

Câu V

Các đỉnh của  $(H)$  chia đường tròn ngoại tiếp nó thành 14 cung bằng nhau, mỗi cung có số đo là  $\alpha = \frac{\pi}{7}$ . Các dây nối hai đỉnh của  $(H)$  chắn các cung nhỏ có số đo là  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, 7\alpha$ . Do vậy độ dài các dây đó chỉ nhận 7 giá trị khác nhau. Lấy 6 đỉnh của  $(H)$  thì số dây nối hai đỉnh trong 6 đỉnh đó là  $(6.5) : 2 = 15$ . Vì 15 dây này có các độ dài nhận không quá 7 giá trị khác nhau nên phải có ba dây cùng độ dài. Trong ba dây đó luôn có hai dây không chung đầu mút (vì nếu hai dây bất kì trong ba dây đó đều chung đầu mút thì ba dây bằng nhau đó tạo thành một tam giác đều, do đó số đỉnh của  $(H)$  chia hết cho 3, trái với giả thiết). Để thấy hai dây bằng nhau của một đường tròn không chung đầu mút thì 4 đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình thang (cân). Từ đó suy ra trong 6 đỉnh bất kì của  $(H)$  luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

Phân tích  $13860 = 2.2.3.3.5.7.11$  vì  $m.n = 13860$  nên  $m$  phải là ước số của 13860 tức là tích của một số nhân tử trong 7 nhân tử trên, còn  $n$  là tích của các nhân tử còn lại.

Nếu  $m$  có chứa nhân tử 2 (hoặc 3) thì nó phải chứa  $2^2$  (hoặc  $3^2$ ) vì ngược lại thì  $\frac{m}{n}$  không tối giản.

Do đó, nếu kí hiệu  $a_1 = 2^2, a_2 = 3^2, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11$  thì  $m$  là tích của một số nhân tử trong các số  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  còn  $n$  là tích các nhân tử còn lại.

Vì vậy, chỉ có các trường hợp sau:

Có 1 phân số có tử số là 1 (mẫu số là 13860).

Có 5 phân số có tử số là 1 trong 5 nhân tử  $a_1, a_2, \dots, a_5$ , (mẫu tích của 4 nhân tử còn lại).

Có 10 phân số có tử số là tích của hai nhân tử trong số  $a_1, a_2, \dots, a_5$ , (mẫu tích của 3 nhân tử còn lại).

Có 10 phân số có tử số là tích của ba nhân tử (mẫu tích của hai nhân tử còn lại).

Có 5 phân số có tử số là tích của bốn nhân tử còn mẫu là nhân tử còn lại.

Có 1 phân số có tử số là tích của cả 5 nhân tử (mẫu số là 1).

Vậy số phân số tối giản  $\frac{m}{n}$  thoả mãn  $m.n = 13860$  là  $1 + 5 + 10 + 5 + 1 = 32$ .

Các phân số trên được chia thành từng cặp nghịch đảo của nhau và khác 1 nên số phân số lớn hơn 1 là  $\frac{32}{2} = 16$ .