

ỦY BAN NHÂN DÂN HUYỆN HOÀI ĐỨC
TRƯỜNG THCS YÊN SỞ



SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH
BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Lĩnh vực/môn: Toán

Cấp học: THCS

Tác giả: Lê Thị Mai Chi

Đơn vị công tác: Trường THCS Yên Sở

Chức vụ: Giáo viên

NĂM HỌC: 2022 - 2023

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

1- Lý do chọn đề tài.

Trong quá trình học toán ở trường THCS thì lớp 9 là lớp cuối cấp, đòi hỏi học sinh phải nắm được một số cách giải phương trình. Đặc biệt là giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ. Bởi không phải mọi phương trình đều ở dạng cơ bản, đơn giản có thể giải được ngay mà rất nhiều phương trình rất phức tạp, nếu giải ngay rất khó khăn. Chính vì vậy phương pháp đặt ẩn phụ để đưa phương trình về dạng cơ bản, đơn giản hơn là rất cần thiết.

Mặt khác qua thực tế giảng dạy ở lớp 9 tôi nhận thấy khi giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ học sinh rất lúng túng, rất hay nhầm lẫn trong quá trình giải. Hơn nữa các em chỉ học bài nào biết bài ấy gây cho các em cảm giác không tự tin và sợ giải các phương trình đó. Vậy làm thế nào để các em có thể chủ động sáng tạo trong quá trình giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Do đó trong phạm vi đề tài nhỏ này, tôi mạnh dạn nêu ra một vài hướng suy nghĩ khi giảng dạy học sinh lớp 9 về “ ***Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ***”. Cụ thể tôi sẽ tổng hợp, phân loại và hướng dẫn học sinh phương pháp giải đối với từng dạng phương trình với hy vọng học sinh lớp 9 từ học lực khá trở lên sẽ có thể dựa vào đó phát huy tính sáng tạo, khả năng tìm tòi lời giải, chủ động trong quá trình giải những phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ. Từ đó sẽ thúc đẩy lòng say mê, yêu thích bộ môn toán học.

2- Phạm vi và thời gian thực hiện:

Đề tài được thực hiện với đối tượng học sinh lớp 9 năm học: 2021 – 2022

Thời gian thực hiện: Từ tháng 9 / 2021 đến tháng 4 /2023

B. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

1. TÌNH TRẠNG THỰC TẾ KHI CHƯA THỰC HIỆN:

Để giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ thường là khó và là loại toán thường thấy trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp, cho các kỳ thi chuyên cấp. Nếu học sinh nắm được chắc một số phương pháp giải loại toán này các em sẽ cảm thấy tự tin hơn, sáng tạo hơn trong học toán và không lúng túng khi gặp các dạng toán này. Mặc dù có rất nhiều tài liệu viết về dạng toán này song còn tản mạn, đan sen, mờ nhạt chưa rõ ràng. Điều đó khiến học sinh hay mắc phải những sai lầm khi giải các dạng toán này, dẫn đến nghiệm của phương trình không đúng hoặc nghiệm đúng nhưng lại sai trong quá trình giải. Chính vì vậy người giáo viên phải biết gom nhặt, tổng hợp, phân loại thành phương pháp giải các dạng toán này cho phù hợp với từng đối tượng học sinh.

2. SỐ LIỆU ĐIỀU TRA TRƯỚC KHI THỰC HIỆN

Lớp 9B: đạt 50%, Lớp 9A đạt 70%

3. NỘI DUNG CHỦ YẾU CỦA ĐỀ TÀI

3.1. Lý thuyết giải phương trình:

3.1.1 Giải phương trình bậc nhất một ẩn

3.1.2 Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

3.1.3 Giải phương trình tích

3.1.4 Giải phương trình bậc hai một ẩn số

3.1.5 Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ

3.2. Một số dạng phương trình và cách giải

3.3. Kết quả

4. PHƯƠNG PHÁP TIẾN HÀNH:

4.1. Lý thuyết giải phương trình:

4.1.1 Giải phương trình bậc nhất một ẩn:

- Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng là : $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

Phương trình này có nghiệm duy nhất $x = \frac{-b}{a}$

4.1.2 Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức:

- Khi giải phương trình dạng này phải qua các bước sau:

+ Tìm tập xác định

+ Quy đồng mẫu thức, rồi khử mẫu thức

+ Giải phương trình vừa tìm được

+ Nghiệm của phương trình là các giá trị vừa tìm được của x thuộc tập xác định .

4.1.3 Giải phương trình bậc hai một ẩn:

- Phương trình bậc hai một ẩn số có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$)

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Hoặc giải theo $\Delta' = (-b')^2 - ac$ trong đó $b' = \frac{b}{2}$

Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép là : $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} ; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

4.1.4 Giải phương trình tích :

- Phương trình tích có dạng: $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \dots m(x) = 0$

Nghiệm của phương trình là tất cả các nghiệm của các phương trình

$$f(x) = 0; g(x) = 0; h(x) = 0; \dots; m(x) = 0.$$

4.1.5 Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ :

- Phương trình chưa có dạng ở một trong bốn dạng trên . Ta dùng một ẩn mới đặt cho một biểu thức nào đó của phương trình ban đầu để đưa phương trình về một trong bốn dạng trên có cách giải cụ thể với ẩn mới.

Chú ý phải đặt điều kiện cho ẩn mới. Khi giải phương trình với ẩn mới được nghiệm phải đối chiếu với điều kiện của ẩn mới. Nếu thoả mãn thì từ biểu thức đặt đó giải ra nghiệm của phương trình đã cho. Nếu không có nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn mới thì phương trình đã cho vô nghiệm.

4.2. Một số dạng toán và cách giải :

Dạng I: Đặt ẩn phụ bằng một đa thức của ẩn để đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai:

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $(x^2 + 2x + 3)^2 - 9(x^2 + 2x + 3) + 18 = 0$

***) Phân tích để tìm lời giải:**

Khi gặp phương trình này học sinh thường hay phá ngoặc nhân bình thường thu gọn rồi giải .Làm như vậy vừa dài, hay dẫn đến nhầm lẫn, vả lại khi phá ngoặc sẽ đưa phương trình trở thành phương trình bậc cao sẽ khó khăn hơn khi giải. Do đó trước khi giải tôi gợi ý học sinh hãy nhận xét phương trình . Ta nhận thấy phương trình có biểu thức $x^2 + 2x + 3$, nếu thay thế bằng một ẩn khác thì phương trình đã cho sẽ trở thành phương trình bậc hai

Đặt $y = x^2 + 2x + 3$ (*) thì phương trình (1) trở thành $y^2 - 9y + 18 = 0$ (2)

Đến đây học sinh dễ dàng giải được phương trình (2) để tìm nghiệm y. Từ đó thay vào biểu thức (*) để tìm được nghiệm x của phương trình .

***) Lời giải :**

$$\text{Đặt } y = x^2 + 2x + 3 (*)$$

thay vào phương trình (1) thì phương trình (1) trở thành: $y^2 - 9y + 18 = 0$ (2)

$$\Delta = (-9)^2 - 4.18 = 9 > 0$$

$$\Rightarrow \text{phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt } y_1 = \frac{9 + \sqrt{9}}{2} = 6 ; y_2 = \frac{9 - \sqrt{9}}{2} = 3$$

Thay $y_1 = 6$ vào biểu thức (*) ta có : $x^2 + 2x + 3 = 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1 ; x_2 = -3$

Thay $y_2 = 3$ vào biểu thức (*) ta có:

$$x^2 + 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = 1 ; x_2 = -3 ; x_3 = 0 ; x_4 = -2$$

***) Khai thác bài toán:**

Từ ví dụ 1 ta nâng lên thành bài toán tổng quát là:

$$a[f(x)]^2 + bf(x) + c = 0 \quad (1) ; (a \neq 0)$$

Đặt $y = f(x)$ (*) thì phương trình (1) trở thành phương trình bậc hai đối với ẩn y
: $ay^2 + by + c = 0$

Đây là phương trình bậc hai ẩn y ở dạng cơ bản có thể giải dễ dàng tìm được nghiệm y . Sau đó thay vào biểu thức (*) để tìm được nghiệm x

***) Ví dụ áp dụng:**

Giải các phương trình sau:

a. $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$

b. $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15 = 0$

c. $(x^2 + 2x + 1)^2 + (2x^2 + 4x + 2) - 3 = 0$

d. $(x^2 - 4)^2 + (x^2 - 4) - \frac{5}{4} = 0$

***) Kết luận :**

Sau khi học sinh nắm chắc cách giải phương trình ở dạng ví dụ 1 thì đối với những phương trình ở trên không còn khó nữa, các em sẽ dễ dàng giải được.

Chú ý:

- Có những bài phải qua hai lần đặt ẩn phụ mới tìm ra nghiệm của phương trình đã cho.
- Khi biểu thức đặt ẩn phụ chỉ nhận giá trị trong khoảng nào đó thì phải đặt điều kiện cho ẩn phụ .

Ví dụ 2: Giải phương trình sau : $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 2 \quad (1)$

***) Phân tích để tìm lời giải :**

Thường học sinh khi ban đầu bắt gặp phương trình này thì cho rằng đây không phải là phương trình tích nên nhân phá ngoặc bình thường $\Leftrightarrow$ kết quả là phương trình trở thành phương trình bậc 4 không phải là dạng trùng phương nên sẽ gặp khó khăn khi giải . Chính vì vậy tôi sẽ gợi ý cho học sinh trước khi giải hãy nhận xét xem trong biểu thức của phương trình có biểu thức nào giống nhau .

Ta nhận thấy trong hai cụm tích của phương trình có biểu thức $x^2 - 3x$ giống nhau nên ta có thể đặt: $x^2 - 3x + 1 = y$ phương trình (1) trở thành $y(y+1) = 2$

Đây là phương trình đơn giản có thể giải dễ dàng từ đó tìm được nghiệm y thay vào biểu thức đặt để tìm tiếp nghiệm.

Chú ý: Có thể đặt $x^2 - 3x + 2 = y$

***) Lời giải:**

Đặt $y = x^2 - 3x + 1$ (*) Phương trình (1) trở thành :

$$y(y + 1) = 2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y + 2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1 \text{ hoặc } y_2 = -2$$

Thay $y_1 = 1$ vào phương trình (*) ta có:

$$x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 3$$

Thay $y_2 = -2$ vào phương trình (*) ta có: $x^2 - 3x + 1 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$

$$\Delta = 9 - 4.3 = -3 < 0 \text{ nên phương trình vô nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là : $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

***) Ví dụ áp dụng:**

Giải các phương trình sau:

a. $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 5 = 0$

b. $(x^2 + 6x - 5)(x^2 + 6x - 9) = 10$

c. $(2x^2 + 7)(9 - 2x^2) = 3$

Gợi ý câu c trước khi đặt ẩn phụ ta biến đổi để phương trình có dạng ví dụ 2

$$(2x^2 + 7)(9 - 2x^2) = 3 \Leftrightarrow -(2x^2 + 7)(2x^2 - 9) = 3$$

***) Kết luận :**

Sau khi học sinh nắm chắc cách giải phương trình ở dạng ví dụ 2 thì những phương trình như ví dụ áp dụng trên thì học sinh có thể giải được một cách tương tự không có gì khó khăn.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau: $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) = 9$ (1)

***) Phân tích đề tìm lời giải :**

Khi gặp phương trình này học sinh hay phá ngoặc nhân bình thường thì dẫn đến phương trình bậc cao khó giải .Nếu sử dụng cách giải như ở ví dụ 2 thì sau khi đặt vẫn dẫn đến phương trình bậc cao và sẽ khó khăn khi giải .

Do đó đối với dạng bài này tôi sẽ gợi ý cho học sinh nhận thấy các số hạng tự do ở các tích đó

$-1 + 5 = 1 + 3$ nên ta có thể viết lại phương trình (1) như sau:

$$[(x - 1)(x + 5)][(x + 1)(x + 3)] = 9 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = 9 \quad (2)$$

Phương trình (2) trở về dạng như ví dụ 2 nên cách giải tương tự như ví dụ 2

***) Lời giải:**

Phương trình (1) tương đương với

$$[(x - 1)(x + 5)][(x + 1)(x + 3)] = 9 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = 9 \quad (2)$$

Đặt $y = x^2 + 4x - 5$ (*) thay vào phương trình (2) ta có:

$$y(y + 8) = 9 \Leftrightarrow y^2 + 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y + 9) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ hoặc } y = -9$$

Thay $y = 1$ vào biểu thức (*) ta có: $x^2 + 4x - 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 6 = 0$

$$\Delta' = 4 + 6 = 10 > 0 \Rightarrow x_1 = -2 + \sqrt{10} ; x_2 = -2 - \sqrt{10}$$

Thay $y = -9$ vào biểu thức (*) ta có:

$$x^2 + 4x - 5 = -9 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy phương trình đã cho ban đầu có 3 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = -2 + \sqrt{10} ; x_2 = -2 - \sqrt{10} ; x_3 = -2$$

***) Khai thác bài toán:**

Từ ví dụ 3 ta có phương trình dạng tổng quát : $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$

Nếu $a+d = b+c$ thì ta viết phương trình lại như sau: $[(x+a)(x+d)][(x+b)(x+c)] = m$

Nếu $a+c = b+d$ thì ta viết phương trình lại như sau: $[(x+a)(x+c)][(x+b)(x+d)] = m$

Nếu $a+b = c+d$ thì ta viết phương trình lại như sau: $[(x+a)(x+b)][(x+c)(x+d)] = m$

Sau đó phá ngoặc nhân các tích trong dấu [...] thì phương trình sẽ có dạng như ở ví dụ 2 và tiến hành giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ như ở ví dụ 2.

***) Các ví dụ áp dụng:**

Giải các phương trình sau:

a. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 2$

b. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 24$

c. $(y-3)(y+2)(y+4)(y-5) = 3$

***) Kết luận:**

Sau khi học sinh nắm được cách giải dạng phương trình ở ví dụ 3 và dạng phương trình tổng quát thì học sinh dễ dàng giải được các phương trình ở ví dụ áp dụng.

Chú ý : Học sinh phải nắm chắc cả cách giải phương trình dạng ví dụ 2.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

$$\frac{3}{x^2 + 5x + 6} + \frac{2}{x^2 + 5x + 8} = 2 \quad (1)$$

***) Phân tích đề để tìm lời giải :**

Khi bắt đầu gặp phương trình này học sinh thường cho rằng đây là phương trình chứa ẩn ở mẫu thức nên áp dụng các bước giải đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, nhưng khi khử mẫu thì được phương trình bậc cao .

Do đó học sinh sẽ gặp khó khăn khi giải .

Đối với dạng bài này tôi sẽ gợi ý cho học sinh hãy quan sát các mẫu thức xem có biểu thức nào chứa ẩn giống nhau . Từ đó ta có thể đặt ẩn phụ

$$y = x^2 + 5x + 6 \text{ thì phương trình (1) trở thành: } \frac{3}{y} + \frac{2}{y+2} = 2$$

Đến đây được phương trình chứa ẩn ở mẫu thức dạng đơn giản ta có thể dễ dàng giải được nghiệm y, từ đó tìm được nghiệm x .

***) Lời giải:**

$$\text{Đặt } y = x^2 + 5x + 6 \quad (*)$$

Thay vào phương trình (1) ta sẽ đưa phương trình về dạng: $\frac{3}{y} + \frac{2}{y+2} = 2$ (2)

TXĐ: $y \neq 0$; $y \neq -2$

Khi đó ta có: $3y + 6 + 2y = 2y(y + 2) \Leftrightarrow 5y + 6 - 2y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 6 = 0$

$$\Delta = 1 + 4.2.6 = 49$$

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{49}}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad (\text{thoả mãn điều kiện})$$

$$y_2 = \frac{1 - \sqrt{49}}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \quad (\text{thoả mãn điều kiện})$$

Thay $y_1=2$ vào biểu thức (*) ta có:

$$x^2 + 5x + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -4$$

Thay $y_2 = -\frac{3}{2}$ vào biểu thức (*) ta có: $x^2 + 5x + 6 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 10x + 15 = 0$

$$\Delta' = 25 - 30 = -5 < 0 \text{ nên phương trình vô nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho ban đầu có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = -1$; $x = -4$

***) Ví dụ áp dụng:**

$$a) \frac{2}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 3x - 4} = 1$$

$$b) \frac{2}{(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) + 2} + \frac{3}{(x^2 - x)^2 - x^2 + x + 4} = 1$$

***) Kết luận:**

Sau khi học sinh nắm chắc cách giải phương trình dạng ví dụ 4 thì học sinh có thể dễ dàng nhận dạng được phương trình dạng này và linh hoạt sáng tạo trong cách giải, cũng như dễ dàng giải được các ví dụ áp dụng.

Chú ý: Một phương trình có thể vận dụng nhiều cách giải các dạng phương trình đặt ẩn phụ.

Ví dụ 5: Giải phương trình sau: $3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x^3 + 1)$ (1)

***) Phân tích để tìm lời giải :**

Khi gặp phương trình này học sinh thường nghĩ rằng phương trình này chứa một ẩn nên học sinh hay phá ngoặc dẫn đến phương trình bậc cao khó giải .

Đối với dạng này tôi gợi ý cho học sinh $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ nên ta đặt ẩn phụ như sau:

$$\text{Đặt } x^2 - x + 1 = a$$

$$x + 1 = b$$

***) Cách giải:**

$$\text{Đặt } x^2 - x + 1 = a \quad ; \quad \text{Đặt } x + 1 = b$$

$$\text{Phương trình (1) đưa về dạng: } 3a^2 - 2b^2 = 5ab \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 5ab - 2b^2 = 0 \text{ (Coi a là ẩn)}$$

$$\Delta_a = (-5b)^2 - 4.3.(-2b^2) = 25b^2 + 24b^2 = 49b^2 > 0$$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là :

$$a_1 = \frac{5b + \sqrt{49b^2}}{6} = \frac{5b + 7b}{6} = \frac{12b}{6} = 2b; \quad a_2 = \frac{5b - \sqrt{49b^2}}{6} = \frac{5b - 7b}{6} = \frac{-2b}{6} = \frac{-b}{3}$$

Với $a = 2b$ ta có: $x^2 - x + 1 = 2(x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

Với $a = \frac{-b}{3}$ ta có: $x^2 - x + 1 = \frac{-x-1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 3 = -x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 = 0$

(Vô nghiệm vì $\Delta = (-2)^2 - 4.3.4 = -44 < 0$)

Vậy phương trình (1) đã cho có 2 nghiệm là : $x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

***) Ví dụ áp dụng:**

Giải phương trình : $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$

Dạng II: Phương trình trùng phương:

Ví dụ 1: Giải phương trình : $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ (1)

***) Phân tích tìm lời giải :**

Đối với bài này học sinh dễ dàng đặt ẩn phụ để giải

Đặt $y = x^2$ thì phương trình trở thành phương trình bậc hai đối với ẩn y là:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

Nhưng các em rất hay mắc sai lầm khi đặt ẩn phụ $y = x^2$ các em thường không nghĩ đến điều kiện cho ẩn y mà giải bình thường dẫn đến nghiệm y không thỏa mãn điều kiện nhưng vẫn thay vào biểu thức đặt ẩn phụ để tìm x Do đó giải vừa dài vừa xuất hiện nghiệm ngoại lai.

Đối với dạng này tôi chú ý cho học sinh khi đặt ẩn phụ chú ý đến điều kiện của ẩn phụ. Sau khi giải tìm được nghiệm ẩn phụ thì phải đối chiếu với điều kiện đã đặt.

Đặt $y = x^2$ điều kiện $y \geq 0$ (do $x^2 \geq 0$); những nghiệm $y < 0$ sẽ loại.

***) Lời giải:**

Đặt $y = x^2$ (*) ($y \geq 0$)

Thay vào phương trình (1) ta có: $2y^2 - 5y + 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$y_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}; \quad y_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Thay $y_1 = 2$ vào biểu thức (*) ta có: $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Thay $y_2 = \frac{1}{2}$ vào biểu thức (*) ta có: $x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy phương trình đã cho ban đầu có 4 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \sqrt{2}; \quad x_2 = -\sqrt{2}; \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

***) Khai thác bài toán :**

Từ ví dụ này ta có thể khái quát thành dạng tổng quát của phương trình này là:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0; n \geq 2; n \in \mathbb{N})$$

Đặt $x^n = y$ (*) ($y \geq 0$)

từ đó đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai với ẩn phụ : $ay^2 + by + c = 0$

Ta dễ dàng giải được phương trình bậc hai ở dạng cơ bản này để tìm được y

Đối chiếu với điều kiện để lấy những nghiệm y thỏa mãn thay vào biểu thức (*) để tìm nghiệm x ; $x = \pm\sqrt[n]{y}$

***) Ví dụ áp dụng:**

a) $4x^4 - x^2 + 3 = 0$

b) $2x^4 - (\sqrt{x})^4 + 1 = 0$

c) $x^8 - 4x^4 + 1 = 0$

***) Kết luận:**

Học sinh nắm chắc cách giải dạng phương trình ở ví dụ 1 sẽ nhận dạng, sử dụng linh hoạt khi giải các phương trình dạng này và sẽ giải dễ dàng các ví dụ áp dụng

Chú ý: Khi giải các dạng phương trình này phải đặt điều kiện cho ẩn phụ và nắm chắc cách giải phương trình bậc hai căn bản, nắm chắc kiến thức về căn thức, lũy thừa.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $3(2x+1)^4 - 4(2x+1)^2 + 1 = 0$ (1)

***) Phân tích tìm lời giải:**

Thường khi giải học sinh hay nhân phá ngoặc và dẫn đến phương trình bậc cao gây khó khăn cho quá trình giải .

Đối với bài này tôi sẽ gợi ý cho học sinh nhận xét các biểu thức chứa ẩn của phương trình và số mũ của các biểu thức đó .

Học sinh sẽ nhận ra biểu thức chứa ẩn giống nhau là $2x+1$ và số mũ là $4=2.2$

Từ đó ta có thể đặt $y = (2x+1)^2$ (*) ($y \geq 0$) thì đưa phương trình đã cho về dạng bậc hai với ẩn y: $3y^2 - 4y + 1 = 0$

Đây là phương trình bậc hai cơ bản nên dễ dàng giải được tìm nghiệm y. Sau đó thay lại biểu thức (*) để tìm nghiệm x

***) Lời giải:**

Đặt $y=(2x+1)^2$ (*) ($y \geq 0$) thay vào phương trình (1) ta có: $3y^2 - 4y + 1 = 0$

$$\Delta' = 4 - 3 = 1$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{2+1}{3} = 1 \text{ (Thoả mãn)}; y_2 = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (Thoả mãn)}$$

Thay $y_1=1$ vào (*) ta có:

$$(2x+1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=1 \\ 2x+1=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2(x+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Thay $y_2 = \frac{1}{3}$ vào (*) ta có: $(2x+1)^2 = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 2x+1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{3}}{6} \\ x = \frac{-3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho ban đầu có 4 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = \frac{-3+\sqrt{3}}{6}; x_4 = \frac{-3-\sqrt{3}}{6}$$

***) Khai thác bài toán:**

Từ dạng phương trình (*) ở ví dụ 1,2,3 ta có thể viết thành dạng tổng quát của phương trình dạng II là: $a[f(x)]^{2n} + b[f(x)]^n + c = 0$

Trong đó $f(x)$ có thể là một đơn thức như ví dụ 1,2

$f(x)$ có thể là một đa thức như ví dụ 3

Ta đặt $[f(x)]^n = y$

+ Nếu n chẵn thì đặt điều kiện cho $y \geq 0$

+ Nếu n lẻ thì điều kiện là với mọi y

Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình bậc 2 với ẩn y . Ta có thể dễ dàng giải được nghiệm y và từ đó tìm được nghiệm x của phương trình.

***) Ví dụ áp dụng:**

$$a) (2x+3)^4 - (2x+3)^2 + 2 = 0$$

$$b) 2(x+4)^6 - (x+4)^3 + 4 = 0$$

$$c) 4(x-6)^8 + (x-6)^4 - 5 = 0$$

***) Kết luận:**

Học sinh nắm chắc cách giải phương trình dạng II thì dễ dàng nhận ra dạng phương trình này và các em có thể chủ động sáng tạo trong quá trình giải. Các ví

dự áp dụng trên giải tương tự.

Chú ý: Cần nắm chắc kiến thức về căn thức, về lũy thừa.

Dạng III: Phương trình có hệ số đối xứng:

1. Phương trình có hệ số đối xứng bậc chẵn :

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0$ (1)

***) Phân tích đề tìm lời giải:**

ở phương trình này học sinh thường lúng túng vì cho rằng đây là phương trình bậc cao mà tách thành phương trình tích thì không được, còn đặt ẩn phụ ngay thì vẫn chưa thể giải được. Do đó việc giải dẫn đến rất khó khăn. Vì thế đối với bài này tôi sẽ gợi ý học sinh nhận xét phần hệ số của các số hạng trong biểu thức vế trái của phương trình có đặc điểm gì. Ta sẽ nhận ra hệ số của x^4 và x^0 bằng nhau, hệ số của x^3 bằng hệ số của x . Do đó ta còn gọi phương trình này có hệ số đối xứng bậc chẵn. Tiếp đó ta nhận xét về nghiệm của phương trình: Dễ dàng nhận ra rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên ta có thể chia hai vế phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được phương trình mới:

$$2x^2 + 3x - 1 + 3\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \quad (2)$$

Đến đây tôi sẽ hướng dẫn học sinh đặt ẩn phụ là:

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ (*). Do $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ nên điều kiện $|y| \geq 2$

Khi đó phương trình (2) trở thành:

$$2(y^2 - 2) + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 5 = 0$$

Đây là phương trình bậc hai đơn giản ta có thể giải tìm nghiệm y một cách dễ dàng. Sau đó thay vào biểu thức (*) tìm nghiệm x .

***) Lời giải:**

Ta nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1). Ta chia 2 vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được phương trình mới:

$$2x^2 + 3x - 1 + 3\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \quad (2)$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ (*) ($|y| \geq 2$)

thì phương trình (2) trở thành: $2(y^2 - 2) + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 5 = 0$

$$\Rightarrow y_1 = 1 (\text{Loại}) ; \quad y_2 = \frac{-5}{2} (\text{Thoả mãn})$$

Thay $y = \frac{-5}{2}$ vào biểu thức (*) ta có: $x + \frac{1}{x} = \frac{-5}{2}$ với $x \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \quad \text{với } x \neq 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{4} = -2$$

Vậy phương trình (1) đã cho có 2 nghiệm phân biệt là: $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -2$

***) Khai thác bài toán:**

Từ ví dụ 1 ta có thể viết thành dạng tổng quát của phương trình này là:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0; b \neq 0)$$

ở phương trình dạng này $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta có thể chia cả 2 vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ thì phương trình trở thành:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \quad (1)$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ điều kiện $|y| \geq 2$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \quad \text{khi đó phương trình (1) trở thành phương trình bậc hai đối}$$

$$\text{với } y: a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

Ta có thể giải phương trình này tìm nghiệm y

Thay những nghiệm y thỏa mãn điều kiện vào biểu thức đặt ẩn phụ tìm nghiệm x .

***) Ví dụ áp dụng:**

$$a) x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = 0$$

$$b) x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

$$c) x^4 - x^3 - x + 1 = 0$$

***) Kết luận:**

Đối với dạng bài này học sinh phải nhận xét trước khi giải và khi đặt ẩn phụ phải chú ý đến điều kiện của ẩn phụ, khi tìm được nghiệm ẩn phụ phải đối chiếu với điều kiện. Nắm chắc cách giải dạng này học sinh sẽ dễ dàng, chủ động sáng tạo trong quá trình giải, cũng như giải các phương trình ở ví dụ áp dụng một cách tương tự.

2. Phương trình có hệ số đối xứng bậc lẻ:

Ví dụ 1: Giải phương trình sau : $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0 \quad (1)$

***) Phân tích tìm lời giải:**

Đối với phương trình này học sinh thường nghĩ đến tách thành phương trình tích để giảm bậc. Song tách thành tích cũng rất khó khăn. Tôi sẽ hướng dẫn các em nhận xét các hệ số của các số hạng có điểm gì, hệ số của x^3 và x^0 , hệ số của x^2 và x có bằng nhau không?

Từ đó ta còn gọi đây là phương trình có hệ số đối xứng bậc lẻ. Do sự đối xứng

của các hệ số đó mà ta dễ dàng nhận thấy $x = -1$ là một nghiệm của phương trình. Từ đó ta có thể tách biểu thức vế trái của phương trình thành tích của một biểu thức $(x+1)$ và một biểu thức là thương của phép chia đa thức (x^3+2x^2+2x+1) cho $x+1$. Khi đó ta đã hạ được bậc của phương trình đưa về bậc 2, phương trình (1) dễ dàng tìm được nghiệm.

***) Lời giải:**

Ta nhận thấy $x = -1$ luôn là nghiệm của phương trình nên phương trình (1) trở thành: $(x+1)(x^2+x+1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 & (1') \\ x^2+x+1=0 & (2') \end{cases}$$

Giải phương trình (1') $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Giải phương trình (2') $x^2+x+1=0$

$$\Delta = 1-4 = -3 < 0$$

$\Rightarrow$ phương trình (2') vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) đã cho có một nghiệm duy nhất $x = -1$

***) Khai thác bài toán:**

Từ ví dụ 1 ta có thể viết thành dạng tổng quát của phương trình có hệ số đối xứng bậc lẻ.

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{n-1}x^{n+1} + a_{n-1}x^n + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

Phương trình luôn có nghiệm $x = -1$ nên ta có thể viết phương trình về dạng:

$$(x+1)(a_0x^{2n} + \dots + a_0) = 0$$

Phương trình $a_0x^{2n} + \dots + a_0 = 0$ là phương trình đối xứng bậc chẵn ta có cách giải tổng quát nên dễ dàng tìm được nghiệm x của phương trình.

***) Ví dụ áp dụng:**

$$a) -3x^3 - 3x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$b) 7x^7 + 3x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x + 7 = 0$$

***) Kết luận:**

Học sinh nắm chắc cách giải phương trình có hệ số đối xứng bậc lẻ sẽ chủ động sáng tạo trong quá trình giải phương trình. Có thể giải các ví dụ áp dụng một cách tương tự.

Chú ý trước khi giải phương trình học sinh phải nhận xét, nhận dạng phương trình. Trong quá trình giải phải kết hợp với cách giải phương trình có hệ số đối xứng bậc lẻ. Có như vậy học sinh mới cảm thấy tự tin khi giải các phương trình bậc cao.

Dạng IV. Đặt ẩn phụ bằng biểu thức chứa căn

Ví dụ 1: Giải phương trình sau:

$$2(x+1) + 3\sqrt{x+1} - 5 = 0 \quad (1)$$

***) Phân tích tìm lời giải:**

Khi gặp phương trình có biểu thức chứa căn học sinh không biết biến đổi thế nào để tìm nghiệm. Đối với bài này tôi sẽ hướng dẫn học sinh hãy nhận xét về biểu thức chứa ẩn trong phương trình.

Từ đó đặt $t = \sqrt{x+1}$ (*) ($t > 0$) $\Rightarrow x+1 = t^2$

***) Lời giải:**

đặt $t = \sqrt{x+1}$ (*) ($t > 0$) $\Rightarrow x+1 = t^2$

Phương trình (1) trở thành: $2t^2 + 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t+5) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-1 = 0 \\ 2t+5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 & (\text{Thoả mãn}) \\ t=-\frac{5}{2} & (\text{Loại}) \end{cases}$$

Thay $t = 1$ vào biểu thức (*) ta có: $\sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$ (Thoả mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2(x^2+1) + 2x-1$ (1)

***) Phân tích tìm lời giải:**

Học sinh sẽ dễ dàng đặt ẩn phụ như ví dụ 1 tức là đặt ẩn phụ bằng biểu thức chứa căn. Nhưng ở bài này sau khi đặt ẩn phụ phương trình vẫn còn chứa ẩn x . Vì thế mà học sinh cảm thấy lúng túng không có hướng giải nữa. Đối với bài này tôi sẽ hướng dẫn học sinh vẫn giải phương trình ẩn phụ để tìm nghiệm ẩn phụ coi x như một tham số.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ (*) ($t \geq 1$)

Ta có: $(4x-1)t = 2t^2 + 2x - 1$

Tìm được nghiệm của t theo x . Sau đó thay lại biểu thức (*) để tìm nghiệm x .

***) Lời giải:**

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ (*) ($t \geq 1$) $\Rightarrow x^2+1 = t^2$

Phương trình (1) có dạng:

$$(4x-1)t = 2t^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 2t^2 - 4xt + t + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t^2 - 4xt + 2t) - (t - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t(t - 2x + 1) - (t - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 2x + 1)(2t - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t-1=0 \\ t-2x+1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} & (\text{Loại}) \\ t=2x-1 & (\text{Do } t \geq 1 \Rightarrow 2x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1) \end{cases}$$

Thay $t = 2x - 1$ vào biểu thức (*) ta có: $2x - 1 = \sqrt{x^2 + 1}$

Với điều kiện $x \geq 1$ ta có thể bình phương hai vế

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{Loại}) \\ x = \frac{4}{3} & (\text{Thoả mãn}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{4}{3}$

***) Chú ý:**

Trong quá trình giải phải chú ý đến điều kiện của nghiệm t, x để loại nghiệm, tránh nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+2} = 1$ (1)

***) Phân tích đề tìm lời giải:**

Đây là phương trình có biểu thức chứa căn nhưng có hai loại căn trong một phương trình. Do đó đặt ẩn phụ như ví dụ 1,2 thì vẫn còn biểu thức chứa căn dẫn đến khó khăn khi giải.

Đối với bài này tôi sẽ hướng dẫn học sinh đặt ẩn phụ: $y = \sqrt{x+2}$ (*) ($y \geq 0$)

Sau đó biến đổi x theo ẩn phụ để đưa phương trình về phương trình ẩn phụ có một loại biểu thức chứa căn.

$$\text{Từ (*) ta có: } x+2 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 - 2 \Rightarrow \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{3-y^2}$$

$$\text{khi đó phương trình trở thành: } \sqrt[3]{3-y^2} + y = 1$$

Đến phương trình này là phương trình có biểu thức chứa căn bậc lẻ ở dạng đơn giản. Có thể dễ dàng tìm được nghiệm y .

***) Lời giải:**

$$\text{TXĐ: } x \geq -2$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{x+2} \text{ (*) } (y \geq 0) \Rightarrow x = y^2 - 2 \Rightarrow 1 - x = 3 - y^2$$

Phương trình (1) có dạng:

$$\sqrt[3]{3-y^2} + y = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3-y^2} = 1 - y \Leftrightarrow 3 - y^2 = (1 - y)^3 \Leftrightarrow 3 - y^2 = 1 - 3y + 3y^2 - y^3$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 4y^2 + 3y + 2 = 0 \quad (2)$$

Đến đây tôi sẽ hướng dẫn học sinh nhằm nghiệm để đưa thành phương trình tích, hạ bậc của phương trình .

***)Chú ý :**

Nhằm nghiệm với số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ như 0; 1 ; (-1) ; 2 ; (-2)

Ta dễ dàng nhằm được $y = 2$ là một nghiệm của phương trình (2)

Do đó phương trình (2) có thể viết dưới dạng:

$$(y - 2)(y^2 - 2y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 2 = 0 \\ y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ (Thoả mãn)} \\ y^2 - 2y - 1 = 0 \text{ (3)} \end{cases}$$

$$\Delta' = 1 + 1 = 2$$

Giải phương trình (3) ta có: $\Rightarrow y_1 = 1 - \sqrt{2}$ (Loại)

$$y_2 = 1 + \sqrt{2} \text{ (Thoả mãn)}$$

Thay $y = 1 + \sqrt{2}$ vào biểu thức (*) ta có:

$$\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt{2} \text{ (Thoả mãn)}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = 2$; $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$

Ví dụ 4: Giải phương trình sau:

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2 \quad (1)$$

***) Phân tích tìm lời giải:**

Khi học bài này học sinh sẽ cảm thấy khó khăn vì biểu thức dưới căn của phương trình lại không giống nhau và không giống như ví dụ 1, 2, 3. Nên học sinh không biết đặt ẩn phụ bằng biểu thức nào.

Tôi sẽ hướng dẫn học sinh đặt ẩn phụ bằng biểu thức chỉ chứa một căn.

$$\text{Đặt } y = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \quad (*) \quad (y \geq 0)$$

Sau đó biến đổi x theo ẩn phụ y thay vào phương trình để đưa phương trình về ẩn y .

Từ (*) $\Rightarrow x = y^2 - \frac{1}{4}$ khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{4}} = 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Do $t \geq 0$ nên phương trình này dễ dàng giải tìm được nghiệm t để thay lại biểu thức (*) tìm nghiệm x .

***) Lời giải:**

$$\text{TXĐ: } x \geq \frac{1}{4}. \quad \text{Đặt } t = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \quad (*) \quad (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 - \frac{1}{4}$$

thay vào phương trình (1) ta có:

$$t^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

$$\text{Do } t \geq 0 \text{ nên } t^2 - \frac{1}{4} + t + \frac{1}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 4t - 7 = 0$$

$$\Delta' = 4 + 28 = 32$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-2 - 4\sqrt{2}}{4} = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2} < 0 \quad (\text{Loại})$$

$$t_2 = \frac{-2 + 4\sqrt{2}}{4} = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2} > 0 \quad (\text{Thoả mãn})$$

$$\text{Thay } t = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2} \text{ vào biểu thức } (*) \text{ ta có: } \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \quad (\text{Thoả mãn})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 2 - \sqrt{2}$

Ví dụ 5: Giải phương trình sau : $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^x} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^x} = 4$

***) Phân tích tìm lời giải:**

Đối với phương trình này ẩn x hoàn toàn khác với các phương trình trên. Ẩn x lại là số mũ của biểu thức dưới căn. Do đó học sinh sẽ lúng túng không thể giải bình thường được. Tôi sẽ hướng dẫn học sinh hãy nhận xét về các biểu thức nâng lên lũy thừa dưới dấu căn.

$$\text{Ta có: } (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

$$\text{Từ đó ta có thể đặt ẩn phụ } y = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^x} \quad (y \geq 0)$$

$$\text{Khi đó } \sqrt{(2 - \sqrt{3})^x} = \frac{1}{y}$$

Thay vào phương trình ta sẽ có phương trình ẩn y dạng đơn giản có thể dễ dàng giải tìm được nghiệm y.

***) Lời giải:**

$$\text{Đặt } y = \sqrt{(2+\sqrt{3})^x} \quad (*) \quad (y \geq 0) \Rightarrow \sqrt{(2-\sqrt{3})^x} = \frac{1}{y}$$

$$\text{Thay vào phương trình ta có: } y + \frac{1}{y} = 4 \quad (y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 + \sqrt{3} & (\text{Thoả mãn}) \\ y_2 = 2 - \sqrt{3} & (\text{Thoả mãn}) \end{cases}$$

$$\text{Thay } y_1 = 2 + \sqrt{3} \text{ vào biểu thức } (*) \text{ ta có: } \sqrt{(2+\sqrt{3})^x} = 2 + \sqrt{3} \\ \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Thay } y_2 = 2 - \sqrt{3} \text{ vào biểu thức } (*) \text{ ta có: } \sqrt{(2+\sqrt{3})^x} = 2 - \sqrt{3} \\ \Rightarrow x = -2$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là : $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

***) Chú ý:** ở dạng bài này cần lưu ý tới mối quan hệ giữa các biểu thức để từ đó có cách làm thích hợp .

$$\text{*) Ví dụ bài toán tương tự: } \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 6: Bài toán phát triển:

$$\text{Giải phương trình sau : } \sqrt[n]{(x+1)^2} - 3\sqrt[n]{(x-1)^2} = -2\sqrt[n]{x^2-1} \quad (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$$

***) Phân tích tìm lời giải:**

Đối với bài này nếu học sinh đặt ẩn phụ ngay thì sẽ khó khăn khi giải. Tôi sẽ hướng dẫn học sinh nhận xét trước khi giải.

Ta nhận thấy $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình . Do đó ta chia cả 2

$$\text{vế của phương trình cho } \sqrt[n]{(x-1)^2} \text{ ta được : } \sqrt[n]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} - 3 = -2\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} \quad (2)$$

Đến phương trình này ta có thể đặt ẩn phụ và dễ dàng giải được nghiệm của ẩn phụ.

***) Lời giải:**

$$\text{Đặt } y = \sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} \quad (*) \quad (n \text{ chẵn thì } y \geq 0, n \text{ lẻ thì mọi } y \text{ đều thoả mãn})$$

$$\text{Phương trình có dạng: } y^2 - 3 = -2y$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -3 \end{cases} \text{ (Loại với } n \text{ chẵn)}$$

Thay $y_1=1$ vào (*) ta có:

$$\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = x-1 \text{ (Vô nghiệm)}$$

Thay $y_1 = -3$ vào (*) với n lẻ ta có:

$$\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = -3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = (-3)^n \Leftrightarrow x = \frac{3^n - 1}{3^n + 1} \quad \text{Vậy } x = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$$

Ví dụ 7: Giải phương trình sau: $x^4 + \sqrt{x^2 + 2007} = 2007$ (1)

***) Phân tích tìm lời giải:**

Đối với phương trình này nếu học sinh đặt ẩn phụ ngay thì khó khăn khi giải.

Nếu tôi hướng dẫn học sinh trước khi đặt ẩn phụ cộng vào 2 vế với x^2 sau đó ta mới đặt ẩn phụ. Sau đó đưa về phương trình bậc hai với ẩn phụ.

***) Lời giải:**

$$x^4 + \sqrt{x^2 + 2007} = 2007 \text{ (1)} \Leftrightarrow x^4 + x^2 + \sqrt{x^2 + 2007} = x^2 + 2007$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 + 2007} = t; \quad (t \geq \sqrt{2007})$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 - t - x^2 - x^4 = 0$$

$$\Delta_t = (-1)^2 - 4(-x^2 - x^4) = 1 + 4x^2 + x^4 = (2x^2 + 1)^2$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1 + 2x^2 + 1}{2} = x^2 + 1 \text{ (Thoả mãn)}$$

$$t_2 = \frac{1 - 2x^2 - 1}{2} = -x^2 \text{ (Loại)}$$

$$\text{Vậy } x^2 + 1 = \sqrt{2007 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2007 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2007 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 2006 = 0 \text{ (2)}$$

$$\text{Đặt } a = x^2 \text{ (} a \geq 0 \text{)}$$

$$\text{Phương trình (2) trở thành: } a^2 + a - 2006 = 0$$

$$\Delta_a = 1 + 4 \cdot 2006 = 8025$$

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{8025}}{2} \text{ (Thoả mãn)} \quad ; \quad a_2 = \frac{-1 - \sqrt{8025}}{2} \text{ (Loại)}$$

$$\text{Với } a_1 = \frac{-1 + \sqrt{8025}}{2} = x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{8025}}{2}}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là : $x_1 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{8025}}{2}}$;

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{8025}}{2}}$$

***) Các câu giải tương tự:**

Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + \sqrt{x^2 + 3} = 3$

b) $x^4 - \sqrt{x^2 + 5} = 5$

c) $x^4 + \sqrt{x^2 + 2008} = 2008$

5 - KẾT QUẢ

Trên đây tôi đã trình bày lại kinh nghiệm của mình về cách giải bài toán bằng phương pháp đặt ẩn phụ trong chương trình toán lớp 9.

Qua việc chọn lọc, sắp xếp và phân thành các dạng chính như trên đã trình bày, đồng thời tiến hành giảng dạy ở hai lớp 9 tại trường tôi thấy học sinh có khả năng phát hiện, nhận dạng, phán đoán, tìm lời giải và có cách trình bày lập luận chặt chẽ hơn, không những vậy mà các em còn hào hứng, say mê học tập và chịu khó tư duy trong quá trình giải phương trình .

Sáng kiến này có thể tùy theo mức độ yêu cầu đối tượng học sinh mà giáo viên có thể dạy toàn bộ hay ít nhiều một phần nào đó. Còn đối với học sinh khá, giỏi thì việc truyền thụ cho các em một số kỹ năng, phương pháp giải trên là cần thiết và rất có ích.

Trước khi thực hiện					Sau khi thực hiện			
Lớp	Giỏi	Khá	TB	Dưới TB	Giỏi	Khá	TB	Dưới TB
9B	5 %	25 %	30 %	40 %	15 %	30 %	40 %	15 %
9A	50%	30%	20%		80%	20%		

C. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ:

Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ là một loại phương trình khó và đa dạng. Việc định hướng và tìm lời giải không hề đơn giản. Tuy nhiên loại toán này cho phép phát huy tư duy sáng tạo, khả năng vận dụng linh hoạt của học sinh.

Trong sáng kiến này tôi đã cố gắng chọn lọc, sắp xếp và phân loại, hệ thống theo từng dạng để phù hợp với đối tượng học sinh. Tôi thấy các em say mê và hào hứng hơn trong học toán. Các em không cảm thấy lúng túng và sợ khi gặp những dạng phương trình này.

Tuy nhiên vì thời gian có hạn, nên đề tài của tôi không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của Hội đồng Khoa học cơ sở để đề tài của tôi được áp dụng tốt hơn trong giảng dạy.

Tôi xin trân thành cảm ơn!

Hà nội ngày 11 tháng 4 năm 2023

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác

Tác giả



Lê Thị Mai Chi