

NGUYỄN CAM - NGUYỄN VĂN HIỂN
TRẦN ĐỨC HUYỀN - DƯƠNG BỬU LỘC
HUỲNH NGỌC THANH - NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN



**TÀI LIỆU
DẠY-HỌC**

TOÁN 8

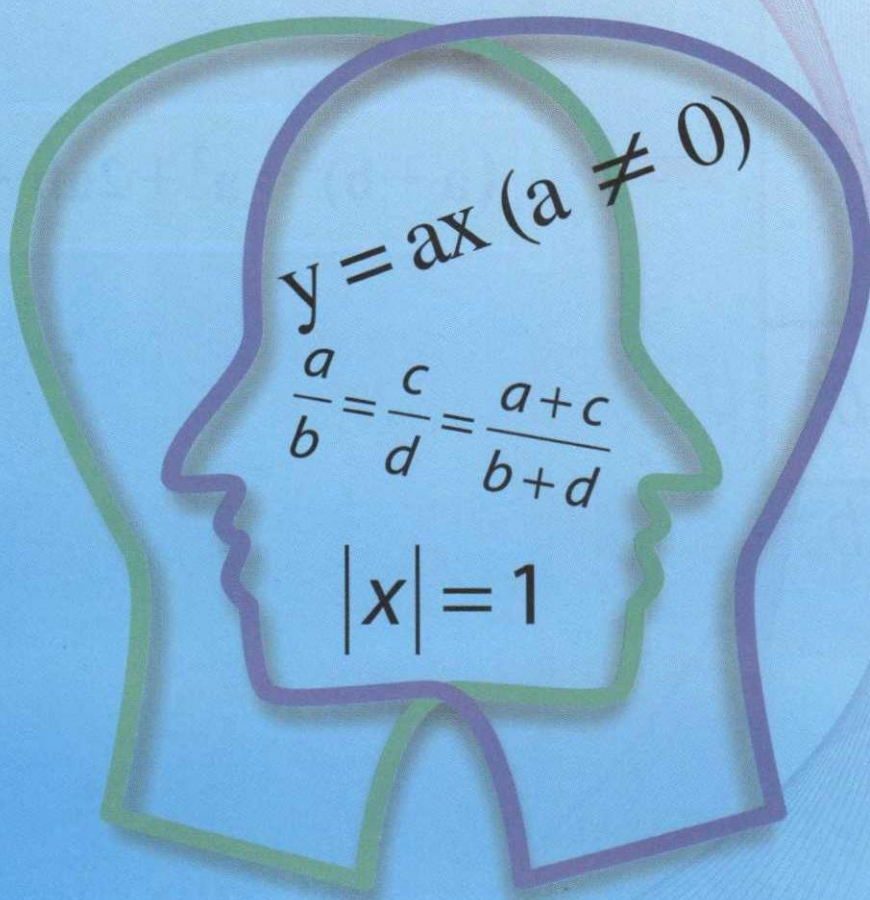
**TẬP
MỘT**



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHẦN

Đại số

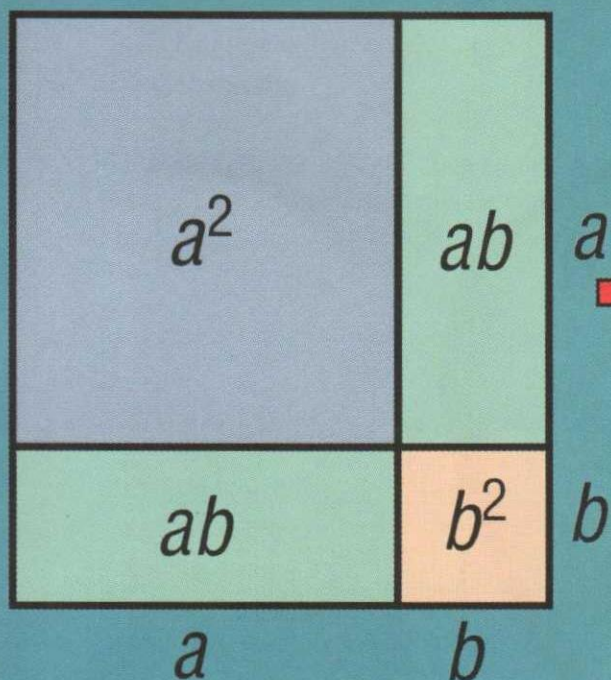


CHƯƠNG

1

PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

- Phép nhân đa thức – Hằng đẳng thức đáng nhớ
- Phân tích đa thức thành nhân tử
- Phép chia đa thức



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

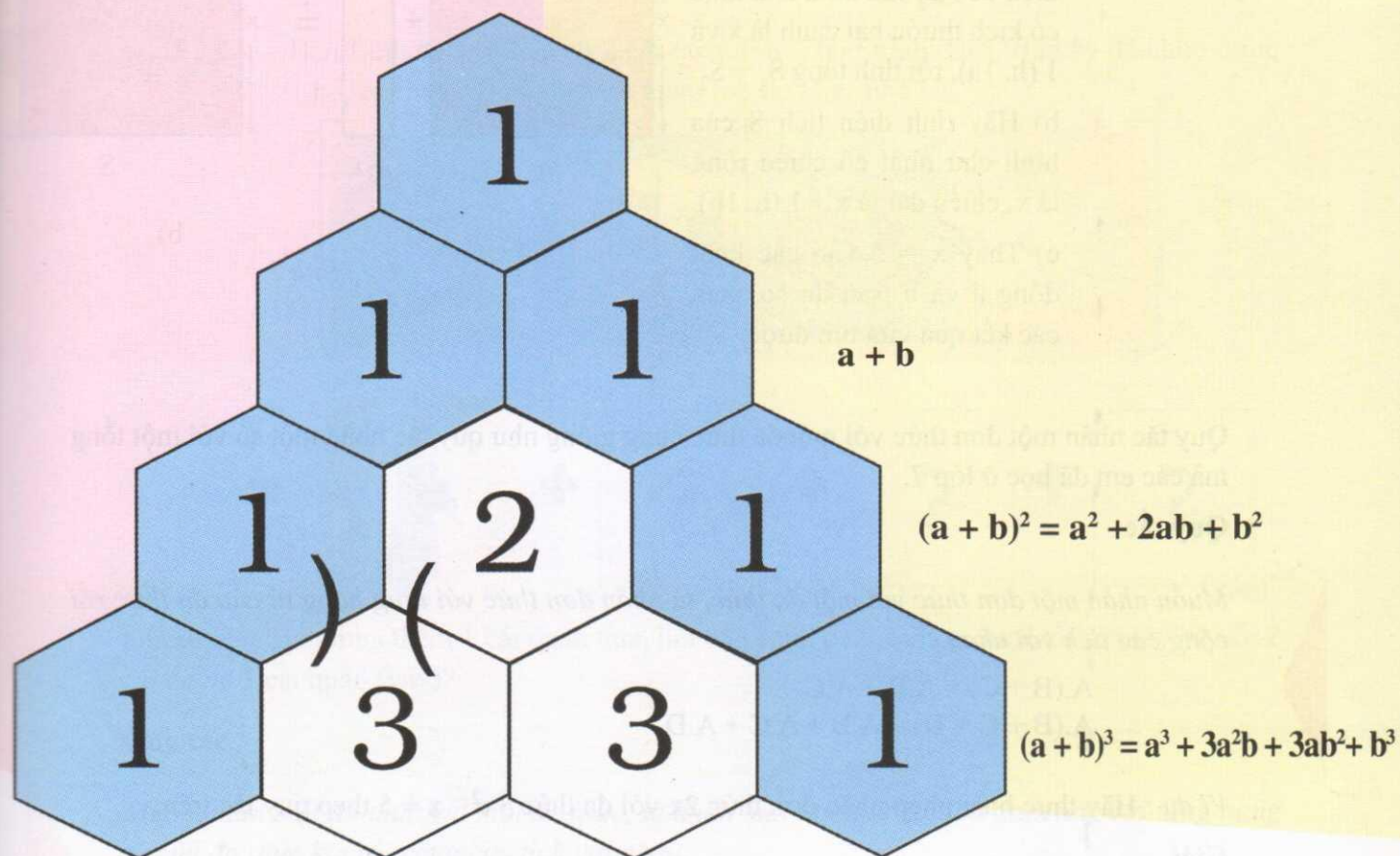
Diện tích hình vuông lớn bằng tổng diện tích các hình vuông nhỏ và hình chữ nhật giống như việc nhân hai đa thức giống nhau.

PHÉP NHÂN ĐA THỨC - HÀNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

Nhân đơn thức với đa thức

Nhân đa thức với đa thức

Hàng đẳng thức đáng nhớ



Tam giác Pascal cho biết cách tính hệ số trong một khai triển lũy thừa của một tổng hai hạng tử. Trong đó, mỗi con số trong một hàng của tam giác Pascal là hệ số của các hạng tử trong phép khai triển đó.



1. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

Hoạt động 1

Bạn An lần lượt đánh cờ tướng với hai bạn Bảo và Nam ; với mỗi bạn, An đánh một ván cờ.

Em hãy tính xem có mấy ván cờ tất cả giữa An với Bảo và Nam.

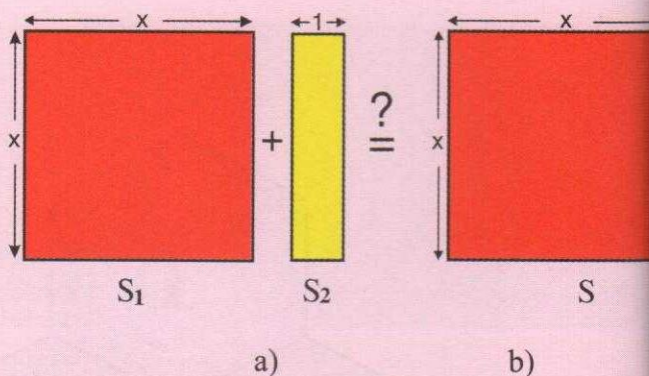


Hoạt động 2

a) Hãy tính diện tích S_1 của hình vuông có cạnh là x . Tính diện tích S_2 của hình chữ nhật có kích thước hai cạnh là x và 1 (h. 1a), rồi tính tổng $S_1 + S_2$.

b) Hãy tính diện tích S của hình chữ nhật có chiều rộng là x , chiều dài là $x + 1$ (h. 1b).

c) Thay $x = 5$ vào các hoạt động a và b, sau đó so sánh các kết quả vừa tìm được.



Hình 1

Quy tắc nhân một đơn thức với một đa thức cũng giống như quy tắc nhân một số với một tổng mà các em đã học ở lớp 7.

Quy tắc

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

$$A.(B + C) = A.B + A.C$$

$$A.(B + C + D) = A.B + A.C + A.D$$

Ví dụ : Hãy thực hiện phép nhân đơn thức $2x$ với đa thức $3x^2 - x + 5$ theo quy tắc trên.

Giải

$$2x.(3x^2 - x + 5) = 2x.3x^2 + 2x.(-x) + 2x.5 = 6x^3 - 2x^2 + 10x.$$

Ta nói đa thức $6x^3 - 2x^2 + 10x$ là tích của đơn thức $2x$ và đa thức $3x^2 - x + 5$.



THỬ TÀI BẠN

$y + z$

a) Thực hiện các phép nhân đơn thức với đa thức sau :

$$3x.(2x - 5);$$

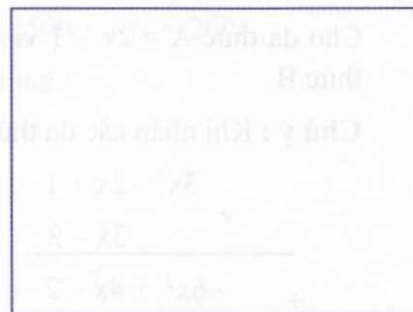
$$(4x^2 - 3x + 1).(-2x).$$

$\times$

b) Cho hình chữ nhật có chiều rộng là x (m), chiều dài là $y + z$ (m) (h.2).

– Hãy viết biểu thức tính diện tích hình chữ nhật theo x , y , z .

– Hãy tính diện tích hình chữ nhật khi $x = 2$ m, $y = 5$ m, $z = 3$ m bằng hai cách.

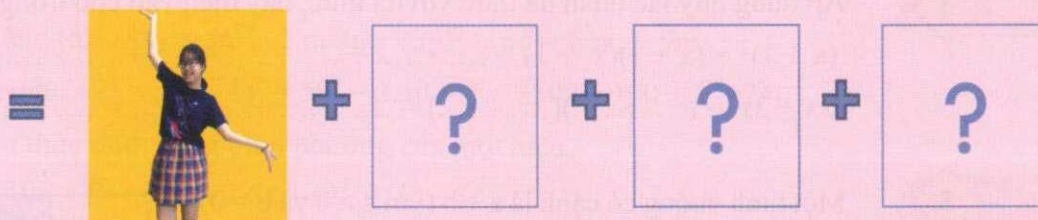


Hình 2

2. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

Hoạt động 3

Bạn Linh có 2 cái áo và 2 cái quần (váy) như hình dưới. Bạn ấy đã chọn được 1 bộ, em hãy giúp bạn chọn thêm các bộ khác nhé !



Giả sử bạn Linh mua thêm 1 cái quần nữa, hỏi bạn Linh có thể chọn được tất cả mấy bộ với 2 cái áo và 3 cái quần (váy)?

Quy tắc

Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

$$(A + B).(C + D) = A.C + A.D + B.C + B.D$$

Ví dụ : $(2x + y)(x - y^2) = 2x^2 - 2xy^2 + xy - y^3$

$$(3x - 2)(3x^2 - 2x + 1) = 9x^3 - 6x^2 + 3x - 6x^2 + 4x - 2 = 9x^3 - 12x^2 + 7x - 2.$$

Nhận xét : Tích của hai đa thức là một đa thức.

Với A, B là các biểu thức tùy ý, ta có :

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

Ví dụ :

a) $x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 = (x - 3y)(x + 3y)$.

b) $(2x - 5y)(2x + 5y) = (2x)^2 - (5y)^2 = 4x^2 - 25y^2$.



THỬ TÀI BẠN

Áp dụng hằng đẳng thức để tính nhanh :

a) 99.101;

b) 78.82.

♦ Lập phương của một tổng

Hoạt động

10

Điền vào chỗ trống (...) và sắp xếp kết quả theo thứ tự lũy thừa giảm dần của a ; với a, b là hai số tùy ý.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(\dots + \dots) = (\dots + \dots + \dots)(\dots + \dots) \\ = \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots + \dots + \dots + \dots$$

Với A và B là hai biểu thức tùy ý, ta có hằng đẳng thức :

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Ví dụ :

a) Khai triển : $(x + 2)^3 = x^3 + 3.x^2.2 + 3.x.2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

b) Khai triển : $(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3.(2x)^2.3y + 3.2x.(3y)^2 + (3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$.

c) Viết biểu thức dưới dạng lập phương của một tổng :

$$x^3 + 15x^2 + 75x + 125 = x^3 + 3.x^2.5 + 3.x.5^2 + 5^3 = (x + 5)^3.$$



THỬ TÀI BẠN

a) Tính $(x + 3)^3$; $(2x + 5)^3$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức để tính nhanh : $98^3 + 3.98^2.2 + 3.98.2^2 + 8$.

c) Tính thể tích của một hình lập phương có cạnh là $3m + 2$.

♦ Lập phương của một hiệu

Hoạt động

11

Áp dụng khai triển lập phương của một tổng hãy viết kết quả theo thứ tự lũy thừa giảm dần của a ; với a, b là hai số tùy ý.

$$(a - b)^3 = [a + (-b)]^3 = \dots$$

Với A và B là hai biểu thức tùy ý, ta có hằng đẳng thức :

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Ví dụ :

a) Khai triển : $(2m - 5n)^3 = (2m)^3 - 3.(2m)^2.5n + 3.(2m).(5n)^2 - (5n)^3$
 $= 8m^3 - 60m^2n + 150mn^2 - 125n^3.$

b) Tính nhanh : $12^3 - 3.12^2.2 + 3.12.2^2 - 2^3 = (12 - 2)^3 = 10^3 = 1000.$

c) Viết biểu thức dưới dạng lập phương của một hiệu :

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x)^3 - 3.(2x)^2.1 + 3.(2x).1^2 - 1^3 = (2x - 1)^3.$$



THỬ TÀI BẠN

a) Tính $(x - 2)^3$; $(2x - 1)^3$.

b) Cho hai đơn thức. Viết đa thức được lập từ hiệu của hai đơn thức đã cho. Khai triển lập phương của đa thức này.

c) Dùng hằng đẳng thức để tính nhanh :

$$101^3 - 3.101^2 + 303 - 1.$$



BẠN NÀO ĐÚNG ?

$(a - b)^3 = (b - a)^3.$



Dũng

Lan

$(a - b)^3 = -(b - a)^3.$

Theo em, bạn nào đúng ? Vì sao ?

♦ Tổng hai lập phương

Hoạt động 12

Tính và so sánh :

a) $(3 + 2)(3^2 - 3.2 + 2^2)$ và $3^3 + 2^3$.

b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ và $a^3 + b^3$ với a, b là hai số tùy ý.

Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta có:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

(Lưu ý : Ta gọi $A^2 - AB + B^2$ là *binh phương thiếu của hiệu* $A - B$).

Ví dụ :

a) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4).$

b) $27y^3 + 1 = (3y)^3 + 1 = (3y + 1)(9y^2 - 3y + 1).$

c) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = (2x + 1)[(2x)^2 - 2x.1 + 1] = (2x)^3 + 1 = 8x^3 + 1.$



THỬ TÀI BẠN

a) Dựa vào hằng đẳng thức, hãy tính kết quả của

$$(100^2 - 100 + 1)(100 + 1).$$

b) Khai triển nhanh : $(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

c) Viết tổng sau dưới dạng tích bằng cách áp dụng hằng đẳng thức : $125y^3 + 8$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cô giáo đố như sau : Kết quả của phép tính $(2x + 5)(4x^2 - 10x + 5^2)$ là :

a) $2x^3 + 5^3$;

b) $(2x)^3 + 5^3$.

Bạn Vinh chọn đáp án a, bạn Linh chọn đáp án b. Theo em, bạn nào đúng ?

♦ Hiệu hai lập phương

Hoạt động

13

Tính và so sánh :

a) $(5 - 2)(5^2 + 5 \cdot 2 + 2^2)$ và $5^3 - 2^3$.

b) So sánh $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ và $a^3 - b^3$ với a, b là hai số tùy ý.

Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta có :

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

(Lưu ý : Ta gọi $A^2 + AB + B^2$ là *biên phương thiếu của tổng* $A + B$).

Ví dụ :

a) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

b) $8y^3 - 64 = (2y)^3 - 4^3 = (2y - 4)(4y^2 + 8y + 16)$.

c) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = (2x - 1)[(2x)^2 + 2x \cdot 1 + 1] = (2x)^3 - 1 = 8x^3 - 1$.



THỬ TÀI BẠN

a) Dựa vào hằng đẳng thức, hãy tính kết quả của

$$(100^2 + 100 + 1)(100 - 1).$$

b) Khai triển nhanh :

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

c) Viết hiệu sau dưới dạng tích bằng cách áp dụng hằng đẳng thức :

$$8y^3 - 125.$$



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Linh và Vinh cùng thực hiện khai triển $64x^3 - 5^3$ và có kết quả như sau :

Bài của Linh : $64x^3 - 5^3 = (4x - 5)(16x^2 + 20x + 25)$

Bài của Vinh : $64x^3 - 5^3 = (4x - 5)(16x^2 - 20x + 25)$.

Theo em, bạn nào đúng ?

THƯ GIÃN

1. Em hãy lấy tuổi của mình :

- a) cộng thêm 7 ;
- b) tất cả nhân 2 ;
- c) trừ kết quả cho số tuổi của mình ;
- d) trừ đi 4 ;
- e) trừ kết quả cho số tuổi của mình.

Kết quả có phải là điểm số mà mọi bạn đều mong ước khi đi học ?

Em hãy giải thích vì sao.

2. Sau đây là một bài toán, mời các bạn cùng tham gia giải :

Cho $x + y = 3$; $xy = 10$ (với x, y là số tự nhiên). Hãy tính $(x - y)^2$.

Một bạn làm như sau :

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - 2xy \\ &= (x + y)^2 - 4xy = 3^2 - 4.10 = 9 - 40 = -39 < 0 \text{ (vô lý)}.\end{aligned}$$

Tại sao vậy, bạn hãy thử tìm giải đáp nhé !



GHI NHỚ



Phép nhân đa thức	
Nhân đơn thức với đa thức	$A.(B + C) = A.B + A.C$
Nhân đa thức với đa thức	$(A + B).(C + D) = A.C + A.D + B.C + B.D$
Những hằng đẳng thức đáng nhớ	
Bình phương một tổng	$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
Bình phương một hiệu	$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
Hiệu hai bình phương	$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
Lập phương một tổng	$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
Lập phương một hiệu	$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
Tổng hai lập phương	$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
Hiệu hai lập phương	$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

TRƯỜNG THCS TRẦN VĂN ON Q.1

★
THƯ VIỆN

Số: 4021 / TC / 17

BÀI TẬP

Nhân đơn thức với đa thức

1. Thực hiện các phép tính sau :

a) $2x(x - 3)$;

b) $(2x - 5)x$;

c) $\frac{1}{2}x(-2x^2 + 5)$;

d) $-2x^3y(2x^2 - 3y + 5yz)$;

e) $\frac{2}{3}x^2y(3xy - x^2 + y)$.

2. Thực hiện phép tính nhân, rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $x(2x - y) - 2x(y - x)$ tại $x = 5$ và $y = 29$;

b) $xy(x - 2) - x(xy + y)$ tại $x = 4$ và $y = 5$.

3. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x, y .

a) $3x(x - 2) + x(6 - 3x) + 5$;

b) $2xy(x - y) + xy(2y - x) - x^2y$.

4. Tìm x , biết :

a) $2x(x - 3) - x(2x + 3) = 18$;

b) $x(5x^2 - 2) + 5x(1 - x^2) = 3^4$.

5. Bạn hãy lấy tuổi của một người thân trong gia đình bạn

– nhân cho 2

– cộng thêm 4

– nhân tất cả cho 5

– cộng thêm 12

– nhân 10.

Cho biết kết quả cuối cùng, tôi sẽ đoán được tuổi của người thân trong gia đình bạn. Hãy giải thích tại sao.

Nhân đa thức với đa thức

6. Thực hiện các phép tính sau :

a) $(x - 1)(x + 2)$;

b) $(2 - x)(3x + 2)$;

c) $-4x(x - 2)(x + 2)$;

d) $(x + 3)(x^2 + 3x - 5)$;

e) $(x + 3)(x - 4)(x + 2)$;

f) $(2x^3 - 3x - 1)(5x + 2)$.

7. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x :

$(x - 2)(x + 1) - (x + 2)(x - 3)$.

8. Thực hiện phép tính nhân, rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau :

a) $(2x - y)(2x + y) + y^2$ tại $x = 5$ và $y = 37$;

b) $x(x - 1) + x(2 - x) - y$ tại $x = 52$ và $y = 12$.

9. Tìm x , biết :

a) $(x - 5)(x + 2) + (x + 1)(2 - x) = 15$;

b) $(2x - 3)(x + 5) - (x - 2)(2x + 1) = 3$.

10. a) Viết dạng tổng quát của ba số tự nhiên lẻ liên tiếp.

b) Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp biết rằng tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số trước là 20.

11*. Tính giá trị của đa thức

$P(x) = x^7 - 80x^6 + 80x^5 - 80x^4 + \dots + 80x + 1$ với $x = 79$.

Hằng đẳng thức đáng nhớ

12. Khai triển, hoặc rút gọn các biểu thức sau :

a) $(x - 2)^2$;

b) $(2x + 3)^2$;

c) $(x + 7)(x - 7)$;

d) $(5x - 1)(5x + 1)$;

e) $(x + 2)^3$;

f) $(2x - 5)^3$;

g) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$;

h) $(1 - x)(1 + x + x^2)$.

13. Điền biểu thức thích hợp vào chỗ trống :

a) $x^2 + 6x + 9 = \dots\dots$

b) $x^2 - 10x + 25 = \dots\dots$

c) $(x + 3)(x - 3) = \dots\dots$

d) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = \dots\dots$

e) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = \dots\dots$

f) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = \dots\dots$

g) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = \dots\dots$

h) $16x^2 - 8x + 1 = \dots\dots$

i) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = \dots\dots$

14. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x :

a) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 2(4x^3 - 3)$;

b) $(4x - 1)^3 - (4x - 3)(16x^2 + 3)$.

15. Tìm x, biết :

a) $(2x + 1)^2 - (3 - 2x)^2 + 4 = 0$;

b) $(x - 1)^3 + (2 - x)(4 + 2x + x^2) + 3x(x + 2) = 17$;

c) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 2) = 15$.

16. So sánh hai số :

a) $A = 2015^2$ và $B = 2014 \cdot 2016$;

b) $C = 3^{16} - 1$ và $D = 8(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)$.

17. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau :

a) $M = x^2 + 4x + 5$;

b) $N = 9x^2 - 6x + 6$.

18. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau :

a) $E = 5 - 2x - x^2$;

b) $F = 5 + 6x - 9x^2$.

19. Tìm x, y biết :

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$;

b) $4x^2 + y^2 - 4x + 10y + 26 = 0$.



LUYỆN TẬP

1. Thực hiện các phép tính :

- a) $2x(x - 5) + (x - 2)(x + 3)$;
- b) $(2x - 5)(1 - x) - (x - 3)(-2x)$;
- c) $(4x - 3)(4x - 3) - (3x + 2)(3x - 2)$;
- d) $(x - 2)(x - 1)(x + 3) - x^2(x - 5)$.

2. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x.

$$(2x - 1)(2x + 1) - 4(x^2 + 1).$$

3. Tính giá trị của biểu thức

$(2x - y)(2x + y) - (4x + y)(x - y)$ trong các trường hợp sau :

- a) $x = 12$ và $y = 5$;
- b) $x = -5$ và $y = -\frac{3}{5}$.

4. Tìm x, biết :

- a) $(5x - 2)(5x + 2) - (5x + 3)(5x - 4) = 8$;
- b) $(4x - 3)(4x + 2) + (4x + 5)(1 - 4x) = 2.5^2$.

5. a) Viết dưới dạng tổng quát ba số tự nhiên chẵn liên tiếp

b) Tìm ba số trên, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 64.

6. So sánh hai số bằng cách vận dụng hằng đẳng thức :

- a) $A = 1999.2001$ và $B = 2000^2$;
- b) $A = 2011.2013$ và $B = 2012^2$;
- c) $A = 4(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{64} + 1)$ và $B = 3^{128} - 1$.

7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

- a) $A = 5x - x^2$;
- b) $B = x - x^2$;
- c) $C = 4x - x^2 + 3$;
- d) $D = -x^2 + 6x - 11$;
- e) $E = 5 - 8x - x^2$.

8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

- a) $A = x^2 - 6x + 11$;
- b) $B = x^2 - 20x + 101$;
- c) $C = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 8$.

9. Cho $a + b = S$ và $ab = P$. Hãy biểu diễn theo S và P, các biểu thức sau đây :

- a) $A = a^2 + b^2$;
- b) $B = a^3 + b^3$;
- c) $C = a^4 + b^4$.



◆ TIỂU SỬ NHÀ TOÁN HỌC BLAISE PASCAL

Blaise Pascal (19/6/1623 – 19/8/1662) là nhà toán học, vật lí học người Pháp.

Năm 1642, với mong muốn giúp đỡ cha trong công việc tính toán triền miên về những khoản trả thuế và nợ thuế, Pascal, khi đó chưa tròn 19 tuổi, đã chế tạo một máy tính cơ học có thể thực hiện phép cộng và trừ, được gọi là máy tính Pascal. Tại Bảo tàng Kỹ nghệ Musée des Arts et Métiers ở Paris và Bảo tàng Zwinger ở Dresden (Đức) trưng bày hai trong số những máy tính cơ học nguyên thủy này.



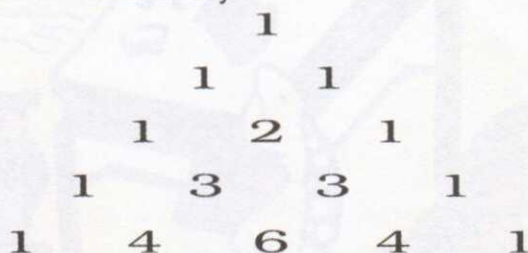
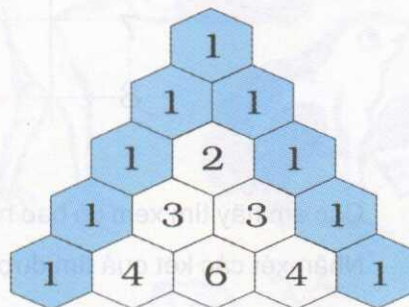
Năm 1653, ông viết *Traité du triangle arithmétique* ("Chuyên luận về Tam giác Số học") miêu tả một biểu mẫu nay gọi là Tam giác Pascal. Tam giác này có thể được trình bày như sau :

Hàng đầu tiên là con số 1, hàng kế tiếp là hai con số 1.

Ở những hàng tiếp theo :

- Con số đầu tiên và con số cuối cùng bao giờ cũng là 1;
- Mỗi con số bên trong sẽ bằng tổng của hai con số đứng ngay ở hàng trên :

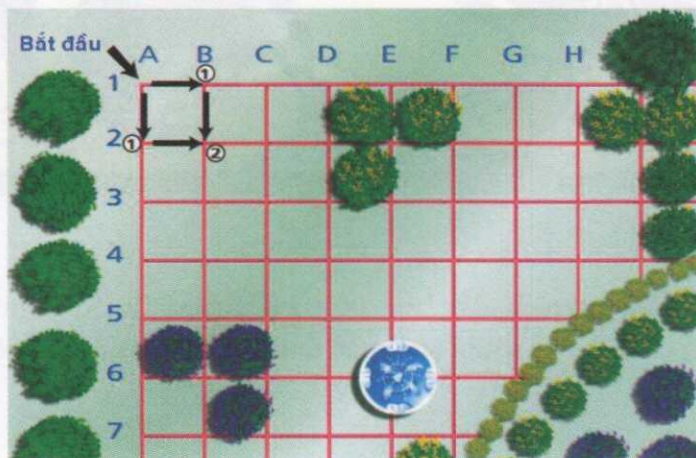
$1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$, $1 + 3 = 4$, $3 + 3 = 6$, $3 + 1 = 4$, v.v... và kết quả như hình dưới đây



Còn em, em có thể viết tiếp tục các số ở hàng thứ 6, thứ 7, ... không ?

◆ Trò chơi tam giác Pascal

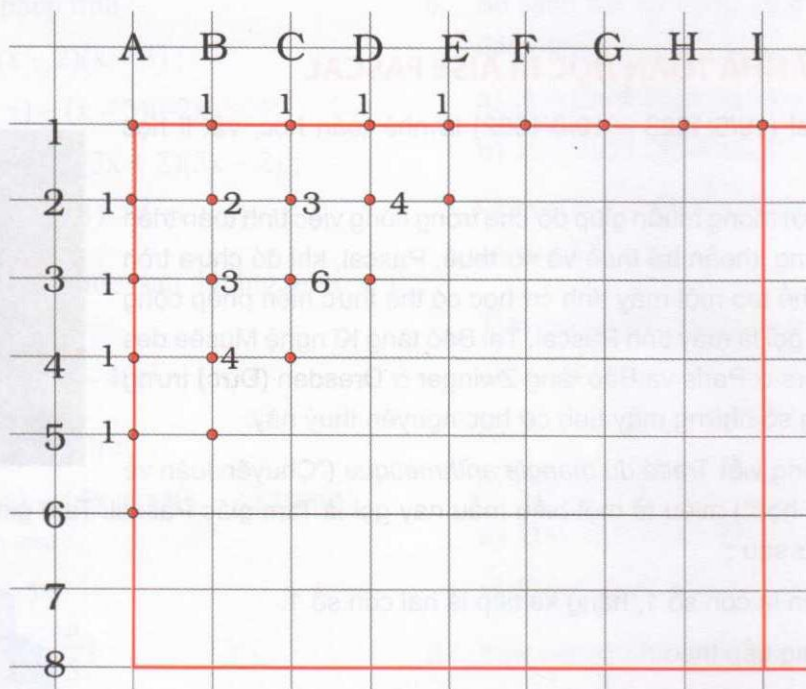
Xuất phát từ vị trí A1. Người chơi chỉ được phép di chuyển theo chiều xuống hoặc qua phải. Từ vị trí A1 di chuyển theo chiều xuống hoặc sang phải người chơi tìm được bao nhiêu cách để đến một vị trí khác thì ghi con số đó vào ngay tọa độ của điểm đó.



Ví dụ : Từ vị trí A1 đi đến các vị trí B1, C1, D1 hoặc đi đến vị trí A2, A3, A4 chỉ có một cách thì ghi số 1.

Từ A1 đi đến B2 có 2 cách ta ghi số 2.

Từ A1 đi đến D2 có 4 cách ta ghi số 4, đi đến C3 có 6 cách thì ghi số 6, ...



Các em hãy tìm xem có bao nhiêu cách để từ vị trí A1 đi đến C2, B4, C4, ... và các vị trí khác nữa. Nhận xét các kết quả tìm được và giải thích tại sao gọi đây là trò chơi “**Tam Giác Pascal**”.

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Phương pháp đặt nhân tử chung

Phương pháp dùng hằng đẳng thức

Phương pháp nhóm các hạng tử

Phương pháp tổng hợp



Bức tranh Đông Hồ “Ếch đi học” có chiều rộng là x (cm), chiều dài $x + 30$ (cm). Nếu diện tích bức tranh bằng $8611(\text{cm}^2)$ thì chiều rộng và chiều dài bức tranh bằng bao nhiêu?

Bạn cần nhận xét gì về bài toán của Mai và Thu?

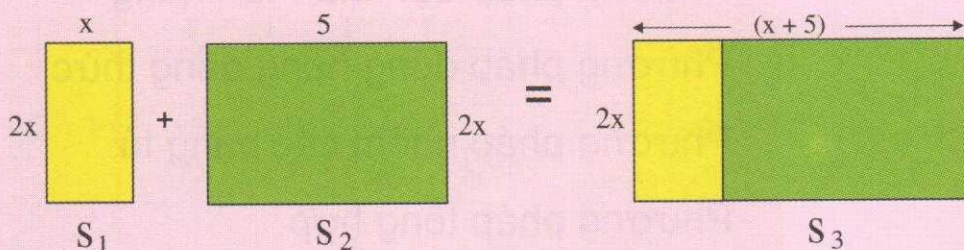
1. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

♦ Phân tích đa thức thành nhân tử

Hoạt động

1

Ở hình dưới đây, ta có $S_1 + S_2 = S_3$.



Em hãy điền vào chỗ trống (...) để tính diện tích hình chữ nhật S_1, S_2, S_3 theo x .

$S_1 = \dots\dots\dots$; $S_2 = \dots\dots\dots$; $S_3 = \dots\dots\dots$

Do $S_1 + S_2 = S_3$ nên $2x^2 + 10x = 2x(x + 5)$ (*)

Việc biến đổi $2x^2 + 10x$ thành tích $2x(x + 5)$ được gọi là phân tích đa thức $2x^2 + 10x$ thành nhân tử.

Định nghĩa

Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

♦ Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

Bài toán (*) là bài toán phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung.

Biểu thức $2x$ gọi là nhân tử chung của $2x^2$ và $10x$.

Hoạt động

2

Tìm nhân tử chung của $8y^2$ và $10y$.

Hãy điền vào chỗ trống (...) kết quả thích hợp :

$$10y = 2.5.y = 2y.(5)$$

$$8y^2 = 2.2.2.y.y = \dots .(4y)$$

Nhân tử chung của $10y$ và $8y^2$ là

Hoạt động

3

Điền vào chỗ trống (...) để thực hiện bài toán phân tích đa thức thành nhân tử.

a) $10y + 8y^2 = \dots .(5) + \dots .(4y) = 2y(5 + 4y)$

b) $15x^3 - 6x^2 = \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = 3x^2(5x - 2)$

c) $2x^3 + 8x^2 - 6x = 2x.x^2 + \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = 2x(\dots\dots\dots + \dots\dots\dots - \dots\dots\dots)$

Ví dụ : Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $12x^2 + 18x$; b) $21x^2y - 14xy^2 + 7xy$.

Giải

a) $12x^2 + 18x = 6x.2x + 6x.3 = 6x(2x + 3)$.

b) $21x^2y - 14xy^2 + 7xy = 7xy.3x - 7xy.2y + 7xy.1 = 7xy(3x - 2y + 1)$.



THỬ TÀI BẠN

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 + 2x$; b) $15ab^2 - 25abc$. c) $-45x^3yz - 15xy^2z + 30x^2yz$.

Thực động

4

Cho đa thức $x(x + 2) - 3(x + 2)$.

Hãy tìm nhân tử chung và phân tích đa thức trên thành nhân tử.

Chú ý : Nhiều khi, để làm xuất hiện nhân tử chung, ta cần đổi dấu các hạng tử. Khi đó, cần lưu ý tới tính chất $A = -(-A)$.

Ví dụ : Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $5x(y - 2) + 10(y - 2)$;

b) $3a^2(x - 5) - 6ab(5 - x)$.

Giải

a) $5x(y - 2) + 10(y - 2) = (y - 2)(5x + 10)$

$= 5(y - 2)(x + 2)$.

b) $3a^2(x - 5) - 6ab(5 - x) = 3a^2(x - 5) + 6ab(x - 5)$

$= (x - 5)(3a^2 + 6ab)$

$= 3a(x - 5)(a + 2b)$.



THỬ TÀI BẠN

Phân tích đa thức sau thành nhân tử : a) $15(x - 2y) - 3x(2y - x)$;

b) $-12x^2(-x + y) + 18x^3(y - x)$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Mai và Thu cùng phân tích đa thức $10x^2 - 15xy + 5x$ thành nhân tử

$10x^2 - 15xy + 5x$
 $= 5x(2x - 3y + 1)$



Mai



Thu

$10x^2 - 15xy + 5x$
 $= 5x(2x - 3y)$

Em có nhận xét gì về bài giải của Mai và Thu ?

◆ Ứng dụng việc phân tích đa thức thành nhân tử vào bài toán tìm x

Ví dụ : Tìm x sao cho : $x^3 - 9x = 0$.

Giải

Ta có $x^3 - 9x = 0$

$$x(x^2 - 9) = 0 \quad (\text{Đặt nhân tử chung})$$

$$x(x + 3)(x - 3) = 0 \quad (\text{Dùng hằng đẳng thức})$$

Suy ra : $x = 0$ hay $x + 3 = 0$ hay $x - 3 = 0$ (tích bằng 0 khi một trong các nhân tử bằng 0).

Vậy $x = 0$ hay $x = -3$ hay $x = 3$.



THỬ TÀI BẠN

Tìm x, biết : a) $x^2 - 4x = 0$; b) $2x(x - 5) + 5 - x = 0$.



2. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG HẸNG ĐẲNG THỨC

◆ Sử dụng hằng đẳng thức

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

hoặc $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

Hoạt động 5

Em hãy điền chữ hoặc số thích hợp vào chỗ trống (...).

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A + B)^2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot (...) \cdot (...) + 2^2 = (x + 2)^2$$

Ví dụ : Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 + 6x + 9$;

b) $4a^2 - 4ab + b^2$.

Giải

a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$.

b) $4a^2 - 4ab + b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot (2a) \cdot b + b^2 = (2a - b)^2$.



THỬ TÀI BẠN

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 + 2xy + y^2$;

b) $9x^2 - 6x + 1$;

c) $x^2 - 10xy + 25y^2$;

d) $-x^2 - 2x - 1$.

◆ Sử dụng hằng đẳng thức

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Thực động 6

Điền chữ hoặc số thích hợp vào chỗ trống (...):

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + \dots)(x - \dots)$$

Ví dụ: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 9$; b) $(x - 1)^2 - 4y^2$.

Giải

a) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$.

b) $(x - 1)^2 - 4y^2 = (x - 1)^2 - (2y)^2 = (x - 1 + 2y)(x - 1 - 2y)$.

Thực động 7

Điền chữ hoặc số thích hợp vào chỗ trống (...):

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + \dots)(x^2 - \dots + \dots)$$

Thực động 8

Sử dụng hằng đẳng thức $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$, hãy điền chữ hoặc số thích hợp vào chỗ trống (...):

$$8y^3 - 27 = (\dots)^3 - 3^3 = (\dots - 3)(4y^2 + \dots + \dots).$$

Ví dụ: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 + 27$; b) $x^3 - 64y^3$.

Giải

a) $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

b) $x^3 - 64y^3 = x^3 - (4y)^3 = (x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$.



THỬ TÀI BẠN

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $25x^2 - 4y^2$; b) $8y^3 + 1$; c) $27 - 125x^3$.

◆ Sử dụng hằng đẳng thức

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

Ví dụ : a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$.

b) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 = (x - 3y)^3$.



3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP NHÓM HẠNG TỬ

Hoạt động

9

Cho đa thức $3x - 3 + xy - y$. Hãy phân tích đa thức thành nhân tử.

Nhận xét :

- Cả 4 hạng tử của đa thức không có nhân tử chung.
- Nhưng với từng nhóm hai hạng tử ta có nhân tử chung

$$\begin{array}{ccc} \boxed{3x - 3} & + & \boxed{xy - y} \\ | & & | \\ 3 \text{ là nhân tử chung} & & y \text{ là nhân tử chung} \end{array}$$

Hãy điền vào chỗ trống (...) để phân tích đa thức $3x - 3 + xy - y$ thành nhân tử

$$\begin{aligned} 3x - 3 + xy - y &= (\dots - \dots) + (\dots - \dots) \\ &= 3(\dots - \dots) + y(\dots - \dots) \\ &= (\dots - \dots)(3 + y). \end{aligned}$$

Ví dụ : Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^2 - 5x + xy - 5y$;

b) $x^2y + xy^2 - 3x - 3y$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 5x + xy - 5y &= (x^2 - 5x) + (xy - 5y) \\ &= x(x - 5) + y(x - 5) \\ &= (x - 5)(x + y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2y + xy^2 - 3x - 3y &= (x^2y + xy^2) - (3x + 3y) \\ &= xy(x + y) - 3(x + y) \\ &= (x + y)(xy - 3). \end{aligned}$$

Chú ý : Một đa thức có thể có nhiều cách nhóm những hạng tử thích hợp.

Chẳng hạn ở ví dụ b, ta có thể phân tích bằng cách nhóm khác :

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 - 3x - 3y &= (x^2y - 3x) + (xy^2 - 3y) \\ &= x(xy - 3) + y(xy - 3) = (xy - 3)(x + y). \end{aligned}$$



THỬ TÀI BẠN

Hãy phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp nhóm với hai cách nhóm nhau :

a) $x^2 - 2xy + 3x - 6y$;

b) $6p^2 - 2p - 9pq + 3q$.

✓ BẠN NÀO ĐÚNG ?

Hùng phân tích đa thức $3x + 3y - x^2 - xy$ thành nhân tử.

$$\begin{aligned} 3x + 3y - x^2 - xy \\ &= (3x + 3y) - (x^2 - xy) \\ &= 3(x + y) + x(x + y) \\ &= (x + y)(3 + x). \end{aligned}$$



Hùng

Bạn đã có sự nhầm lẫn.



Lan

Lan cho rằng bài giải của Hùng có sự nhầm lẫn. Em có nhận xét gì về ý kiến của Lan ?

4. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG CÁCH PHỐI HỢP NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

◆ Phối hợp các phương pháp

Hoạt động 10

Điền vào chỗ trống (...) các phương pháp đã sử dụng khi phân tích các đa thức thành nhân tử.

Ví dụ	Phương pháp đã sử dụng
Ví dụ 1. $5x^3 - 10x^2 + 5x$ $= 5x(x^2 - 2x + 1)$ $= 5x(x - 1)^2$	
Ví dụ 2. $x^2 - 2xy + y^2 - 9$ $= (x^2 - 2xy + y^2) - 9$ $= (x - y)^2 - 3^2$ $= (x - y - 3)(x - y + 3)$	

Nhận xét :

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp ta thường *thứ* tiến hành theo trình tự sau :

- Đặt nhân tử chung.
- Nhóm nhiều hạng tử.
- Dùng hằng đẳng thức.

Ví dụ : Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^3 + 4x^2y + 4xy^2$; b) $a^2 - b^2 - 5a + 5b$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } x^3 + 4x^2y + 4xy^2 &= x(x^2 + 4xy + 4y^2) && \rightarrow \text{Đặt nhân tử chung} \\ &= x(x + 2y)^2 && \rightarrow \text{Dùng hằng đẳng thức.} \end{aligned}$$

$$\text{b) } a^2 - b^2 - 5a + 5b$$

$$\begin{aligned} &= (a^2 - b^2) - (5a - 5b) && \rightarrow \text{Nhóm các hạng tử thích hợp} \\ &= (a + b)(a - b) - 5(a - b) && \rightarrow \text{Dùng hằng đẳng thức và đặt nhân tử chung} \\ &= (a - b)(a + b - 5) && \rightarrow \text{Đặt nhân tử chung.} \end{aligned}$$



THỬ TÀI BẠN

Phân tích các đa thức thành nhân tử :

$$\text{a) } x^3 - 6x^2y + 9xy^2; \quad \text{b) } x^2 + 4y^2 - 5x - 10y + 4xy; \quad \text{c) } x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x.$$

◆ Vài phương pháp khác

Tách một hạng tử thành nhiều hạng tử

Ví dụ : Phân tích đa thức $x^2 - 6x + 8$ thành nhân tử.

Giải

Cách 1 : Tách $-6x = -2x - 4x$ với nhận xét : $(-2) + (-4) = -6$ và $(-2) \cdot (-4) = 8$.

$$\text{Khi đó : } x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2x - 4x + 8 = (x^2 - 2x) - (4x - 8)$$

$$= x(x - 2) - 4(x - 2)$$

$$= (x - 4)(x - 2).$$

Cách 2 : Tách $8 = 9 - 1$ với nhận xét : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

$$\text{Khi đó : } x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 = (x^2 - 6x + 9) - 1$$

$$= (x - 3)^2 - 1^2$$

$$= (x - 3 + 1)(x - 3 - 1)$$

$$= (x - 2)(x - 4).$$

Thêm và bớt cùng một hạng tử

Ví dụ : Phân tích $x^4 + 4$ thành nhân tử :

Giải

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$$

$$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$



THỬ TÀI BẠN

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $x^2 - 4x + 3$; b) $x^2 + 5x + 6$; c) $3x^2 - 5x + 2$.

THƯ GIÃN

Ứng dụng phân tích đa thức thành nhân tử

(Bài toán tìm chiều dài, chiều rộng bức tranh Đông Hồ – trang 23).

Bức tranh Đông Hồ "Ếch đi học" có chiều rộng là x (cm), chiều dài $x + 30$ (cm).

Nếu diện tích bức tranh bằng $8611 \text{ (cm}^2\text{)}$ thì chiều rộng và chiều dài bức tranh bằng bao nhiêu ?

Giải

Ta có :

$$x(x + 30) = 8611$$

(Diện tích bức tranh)

$$x^2 + 30x - 8611 = 0$$

(Thực hiện phép nhân và chuyển vế)

$$x^2 - 79x + 109x - 8611 = 0$$

(Tách hạng tử)

$$x(x - 79) + 109(x - 79) = 0$$

(Nhóm hạng tử và đặt nhân tử chung)

$$(x - 79)(x + 109) = 0$$

$$x - 79 = 0 \text{ hay } x + 109 = 0$$

$$x = 79 \text{ hay } x = -109.$$

Vì chiều rộng bức tranh là số dương nên $x = 79$.

Vậy chiều rộng bức tranh bằng 79 cm, chiều dài bằng 109 cm.



ĐỐ EM

An cho rằng có thể tìm được sáu số nguyên b để phân tích đa thức $x^2 + bx - 12$ thành dạng $x^2 + bx - 12 = (x + p)(x + q)$. Em có đồng ý với An không ? Giải thích rõ ý kiến của em nhé.



GHI NHỚ

Các phương pháp phân tích một đa thức thành nhân tử

Phương pháp	Cách thực hiện
Phương pháp đặt nhân tử chung	Đưa nhân tử chung của các hạng tử của đa thức ra ngoài dấu ngoặc $AB + AC = A(B + C)$
Phương pháp dùng hằng đẳng thức	Vận dụng các hằng đẳng thức để đưa đa thức về dạng tích các đa thức hay dạng lũy thừa của một đa thức $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$ $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$
Phương pháp nhóm các hạng tử	Nhóm các hạng tử của đa thức một cách thích hợp để có thể đặt nhân tử chung hay dùng hằng đẳng thức.
Phối hợp các phương pháp	Phối hợp linh hoạt các phương pháp và thường thử tiến hành theo trình tự – Đặt nhân tử chung – Dùng hằng đẳng thức – Nhóm các hạng tử thích hợp.

Ngoài ra, ta còn dùng cách tách hoặc thêm bớt cùng một hạng tử sau đó vận dụng các phương pháp cơ bản để phân tích một đa thức thành nhân tử.

BÀI TẬP

Phương pháp đặt nhân tử chung

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $3a + 6$;
- b) $x^2 + 2x$;
- c) $9x^2y - 6xy^2$;
- d) $7x^2 + 21xy - 14xz$;
- e) $-2a^3b^2 - 6ab^2 + 4ab$.

2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $3x(x - 2) + 5(x - 2)$;
- b) $7x^2(y + 3) - 14x(3 + y)$;
- c) $10x^2(x - y) + 15x^3(y - x)$;
- d) $5x(2x - 3y) - 15(3y - 2x)$.

Vận dụng hằng đẳng thức

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $x^2 - 9y^2$;
- b) $\frac{4}{25}x^2 - 36y^2$;
- c) $(x + 5)^2 - 16$;
- d) $49a^2 - (3a - b)^2$;
- e) $(2x + 3)^2 - (x - 7)^2$;
- f) $4(x - y)^2 - (3x + y)^2$.

Vận dụng hằng đẳng thức

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $x^2 - 8x + 16$;
- b) $9x^2 + 6x + 1$;
- c) $x^2 - 4xy + 4y^2$;
- d) $10xy - 25y^2 - x^2$;

$$e) \frac{x^2}{4} + 3xy + 9y^2 ;$$

$$f) 1 - 12xy + 36x^2y^2.$$

Vận dụng hằng đẳng thức

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$$

5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $8x^3 - 27$;
- b) $125y^3 + 1$;
- c) $64x^3 - 27y^3$;
- d) $27x^3 + \frac{y^3}{8}$;
- e) $(x - 2)^3 + 64$;
- f) $125 - (x + 1)^3$.

Vận dụng hằng đẳng thức

$$A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$$

6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$;
- b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;
- c) $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$.

Phương pháp nhóm các hạng tử

7. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $ay + by + ax + bx$;
- b) $3xy - 6y + 2ax - 4a$;
- c) $x^2 - ax + bx - ab$;
- d) $a^4b^2 + a^4 - 5b^2 - 5$;
- e) $x^2 - xy - ax + ay$;
- f) $2a^2 - bc^2 - a^2b + 2c^2$.

8. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $6x + 3 - (2x - 5)(2x + 1)$;
- b) $ab^3c^2 - a^2b^2c^2 + ab^2c^3 - a^2bc^3$;
- c) $ax^2 + cx^2 - ay + ay^2 - cy + cy^2$;
- d) $5xy^3 - 2xyz - 15y^2 + 6z$.

9. Tìm x , biết :

- a) $x(x - 5) + x - 5 = 0$;
- b) $7x(x - 4) - x + 4 = 0$;
- c) $(x^2 - 4x) - 5x + 20 = 0$;
- d) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$.

Phối hợp các phương pháp

10. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $5x^2 - 10x + 5$;
- b) $-3x^2 + 6xy - 3y^2$;
- c) $a^2 - b^2 + 2a - 2b$;
- d) $x^3 - 6x^2y + 9xy^2$;
- e) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9$.

11. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $x^2 + 4x - y^2 + 4$;
- b) $ax^2 + bx^2 + 2xy(a + b) + ay^2 + by^2$;
- c) $(xy + 1)^2 - (x + y)^2$;
- d) $x^2 - (a + b)xy + aby^2$.

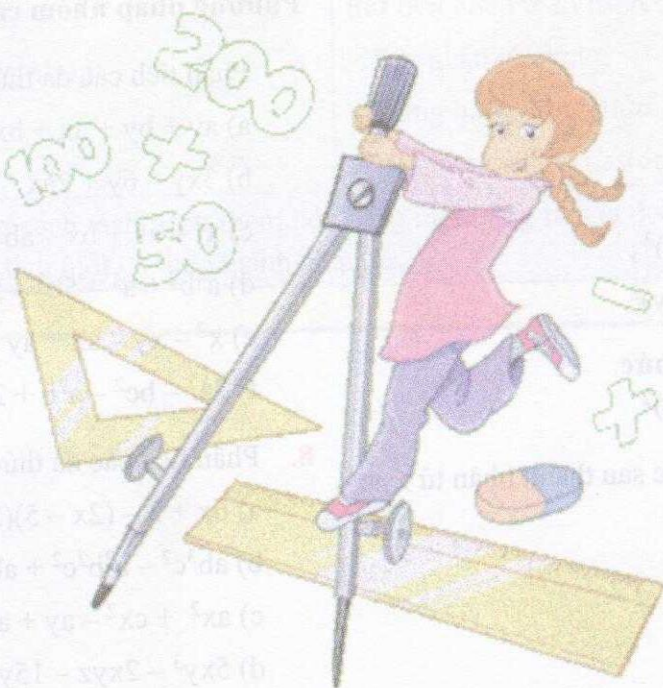
12. Tìm x , biết :

- a) $x^3 - x = 0$;
- b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$;
- c) $(x^2 + 4)^2 - 16x^2 = 0$.

Phương pháp tách và thêm bớt hạng tử

13. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $x^2 - 3x + 2$;
- b) $x^2 - x - 6$;
- c) $x^2 + 7x + 12$;
- d) $3x^2 + x - 2$;
- e) $x^4 + x^2 + 1$;
- f) $x^2 + 2xy - 15y^2$.



LUYỆN TẬP

1. Phân tích các đa thức thành nhân tử :

- a) $x^2 - xy + x - y$;
- b) $a^3 - a^2x - ay + xy$;
- c) $3x^2 + 12x + 12$;
- d) $2a^2 - 2b^2 - 5a + 5b$;
- e) $x^2y - xy^2 - 3x^2 + 3y^2$;
- f) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$.

2. Phân tích các đa thức thành nhân tử :

- a) $x^2 + 6x - 7$;
- b) $3x^2 + 10x + 7$;
- c) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$;
- d) $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$.

3. Tính giá trị các biểu thức :

- a) $5a^2c - 10abc + 5b^2c$
với $a = 124$, $b = 24$, $c = 2$.
- b) $(x^2 - 3y)(x^2 - 5) + (x^2 - 3y)(y - x^2)$
với $x = -24\ 681\ 357$, $y = 5$.

4. Tìm x , biết :

- a) $x^2 - 6x = 0$;
- b) $x^3 - 25x = 0$;
- c) $(2x - 5)^2 - x(2x - 5) = 0$;
- d) $(3x - 1)^2 - (x + 3)^2 = 0$;
- e) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

5. Chứng minh rằng :

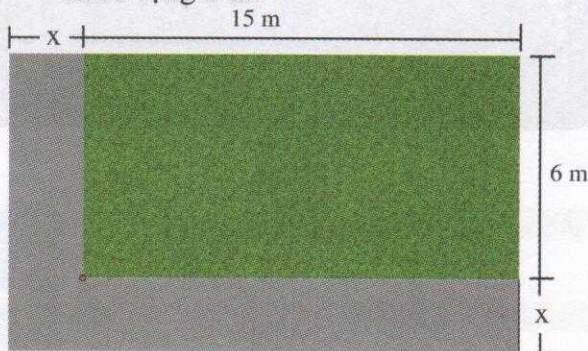
- a) $33^{n+1} - 33^n$ chia hết cho 32 (n là số tự nhiên).
- b) $(4n + 7)^2 - 49$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

6. Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.

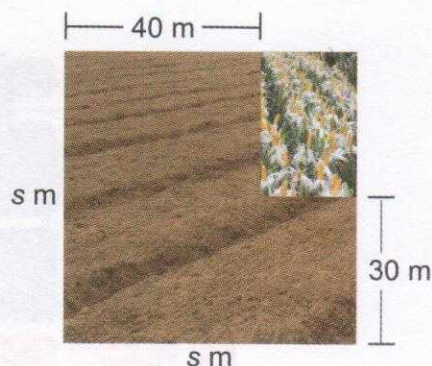
7*. Tính kích thước của một thùng giấy ở hình bên, biết rằng chiều rộng của thùng bằng x , chiều cao kém chiều rộng 1 cm, chiều dài hơn chiều rộng 9 cm, thể tích của thùng bằng 72 cm^3 .



8. Người ta làm một lối đi theo chiều dài và chiều rộng của một sân cỏ hình chữ nhật như hình sau. Em hãy tính chiều rộng x của lối đi. Biết rằng lối đi có diện tích bằng 46 m^2 , sân cỏ có chiều dài 15 m, chiều rộng 6 m.



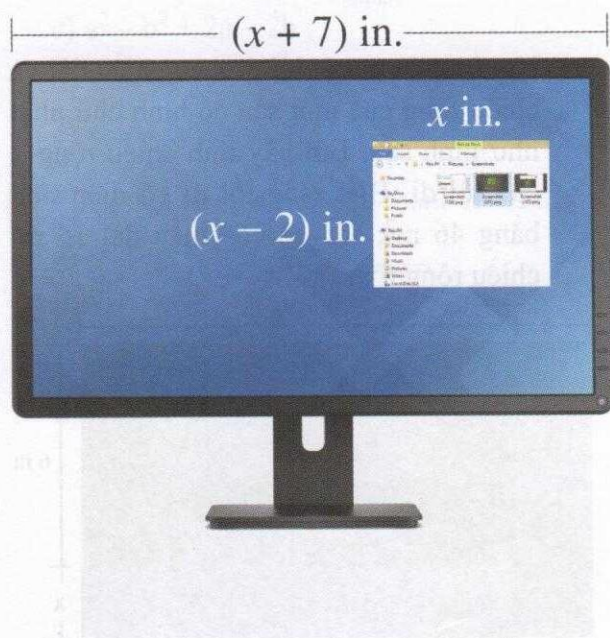
9. Một bác nông dân muốn dành một miếng đất hình chữ nhật ở góc khu vườn hình vuông để trồng bắp như hình sau. Biết diện tích miếng đất trồng bắp bằng 600 m^2 . Quan sát hình sau, em hãy tính cạnh s của khu vườn hình vuông.



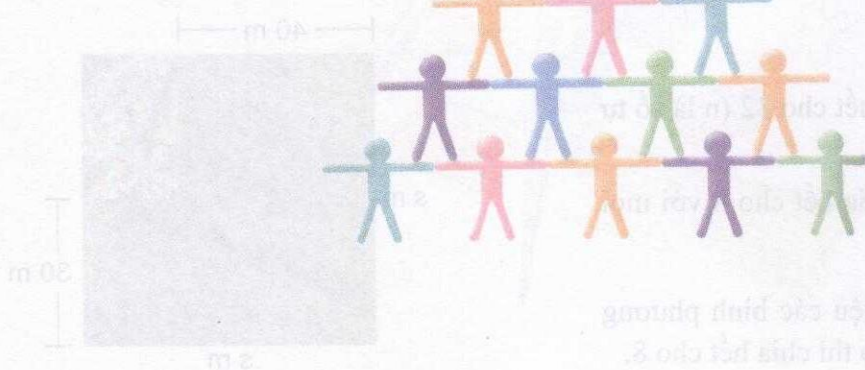
10. Một trình duyệt web mở ra trên màn hình máy tính như hình dưới.

a) Tính chiều dài x của cửa sổ trình duyệt nếu diện tích của cửa sổ trình duyệt bằng 24 inch^2 .

b) Biết cửa sổ trình duyệt che phủ $\frac{3}{13}$ màn hình vi tính. Hãy tính kích thước chiều dài, chiều rộng của màn hình vi tính.

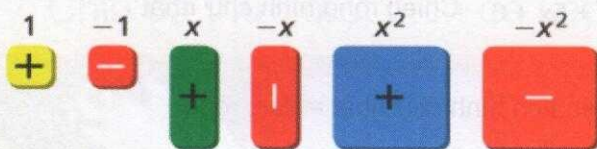


Một bác nông dân muốn dành một miếng đất hình chữ nhật ở góc khu vườn hình vuông để trồng bắp như hình sau. Biết diện tích miếng đất trồng bắp bằng 600 m². Quan sát hình sau, tìm bày trình bày của khu vườn hình vuông.



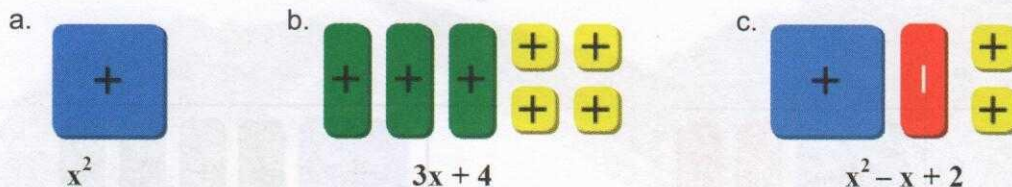


Người ta dùng các mô hình hay biểu tượng để thực hiện các phép tính của một biểu thức đại số. Với các số $1, -1, x, -x, x^2, -x^2$ được biểu diễn bởi các mô hình sau :



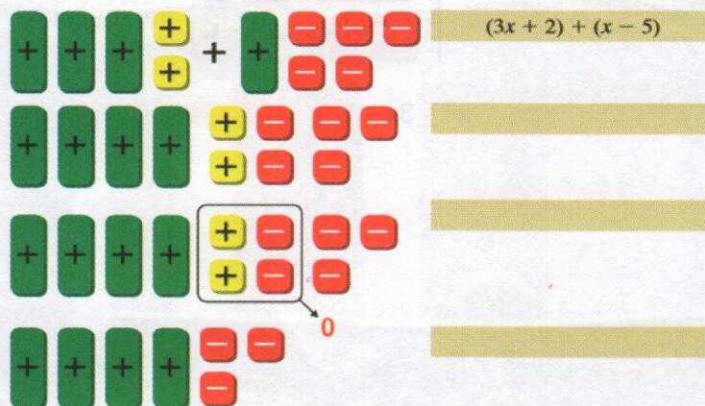
Từ các mô hình này người ta có thể biểu diễn một đa thức, thực hiện các phép tính về đa thức.

Ví dụ 1: Biểu diễn đa thức.

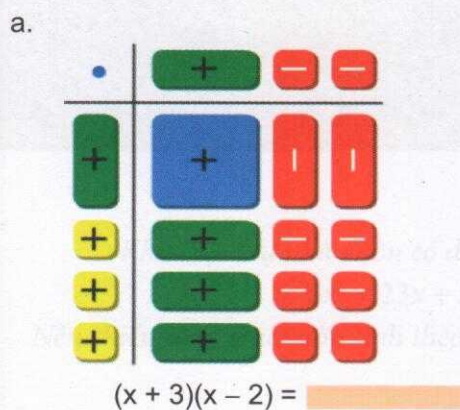


Ví dụ 2: Cộng đa thức.

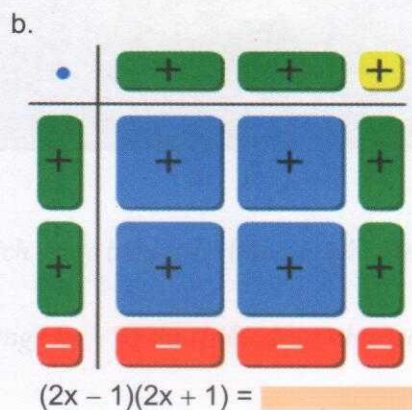
Quan sát mô hình, em hãy từng bước cộng hai đa thức $(3x + 2) + (x - 5)$ và ghi biểu thức tương ứng vào ô bên phải.



Ví dụ 3: Quan sát mô hình, hãy ghi kết quả phép nhân hai đa thức.

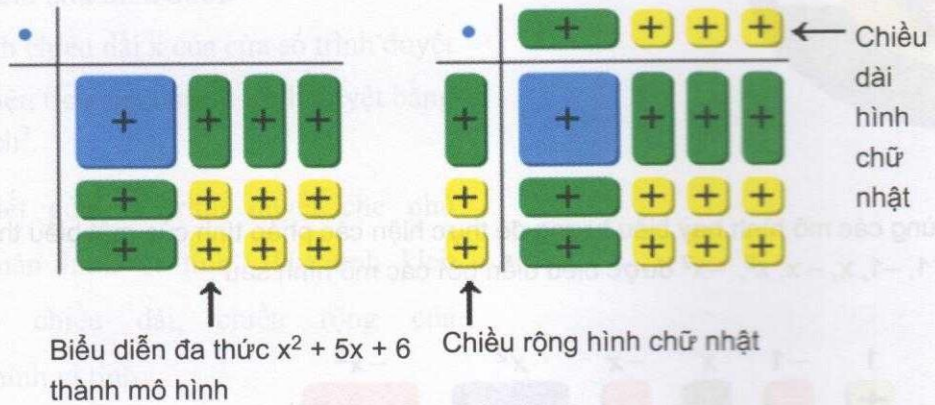


$$(x + 3)(x - 2) =$$



$$(2x - 1)(2x + 1) =$$

Ví dụ 4 : Phân tích đa thức $x^2 + 5x + 6$ thành nhân tử.

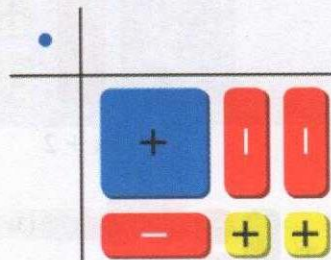


Ta có : Diện tích hình chữ nhật = dài . rộng

$$\text{Vậy } x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

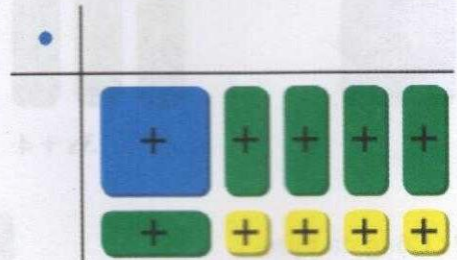
Áp dụng : Dựa theo mô hình dưới đây, hãy phân tích các đa thức $x^2 - 3x + 2$ và $x^2 + 5x + 4$ thành nhân tử.

a.



$$x^2 - 3x + 2 =$$

b.



$$x^2 + 5x + 4 =$$

PHÉP CHIA ĐA THỨC

Chia đơn thức cho đơn thức

Chia đa thức cho đơn thức

Chia đa thức một biến đã sắp xếp



Khu biệt thự nhà vườn có diện tích được biểu diễn bởi đa thức theo x như sau :

$$6x^2 + 23x + 20.$$

Nếu chiều rộng khu vườn tính theo x bằng $(2x + 5)$ thì chiều dài tính theo x bằng bao nhiêu ?



1. CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

Cho A và B là hai đa thức, $B \neq 0$. Ta nói đa thức A chia hết cho đa thức B nếu tìm được một đa thức Q sao cho $A = B \cdot Q$

A được gọi là *đa thức bị chia*, B được gọi là *đa thức chia*, Q được gọi là *đa thức thương* (gọi tắt là *thương*).

Kí hiệu : $Q = A : B$ hoặc $Q = \frac{A}{B}$. ($B \neq 0$).

Hoạt động

1

Áp dụng phép chia hai lũy thừa cùng cơ số, hãy thực hiện các phép tính sau :

a) Chia 3^5 cho 3^2 .

b) Chia a^7 cho a^5 .

Hoạt động

2

Điền số hoặc biến thích hợp vào chỗ trống (...) để thực hiện tính chia.

$$a) 15x^7 : 5x^2 = \frac{15x^7}{5x^2} = \frac{15}{5} \cdot \frac{x^7}{x^2} = 3x^{7-2} = 3x^5.$$

$$b) 18x^5y^3 : 12x^3y^2 = \frac{18}{12} \cdot \frac{x^5}{x^3} \cdot \frac{y^3}{y^2} = \frac{3}{2}x^{5-3}y^{3-2} = \frac{3}{2}x^2y.$$

Nhận xét. Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A.

Quy tắc

Muốn chia một đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau :

- Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.
- Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B.
- Nhân các kết quả tìm được với nhau.

Ví dụ : Thực hiện tính chia

$$a) 16x^3 : 4x^2 = \frac{16x^3}{4x^2} = \frac{16}{4} \cdot \frac{x^3}{x^2} = 4x^{3-2} = 4x.$$

$$b) 24x^5y^7 : 16x^3y^5 = \frac{24x^5y^7}{16x^3y^5} = \frac{24}{16} \cdot \frac{x^5}{x^3} \cdot \frac{y^7}{y^5} = \frac{3}{2}x^{5-3}y^{7-5} = \frac{3}{2}x^2y^2.$$



THỬ TÀI BẠN

Thực hiện phép tính : a) $12x^6 : 3x^3$;

b) $21x^8y^5 : 14x^5y^3$;

c) $7x^4y : 2x^3$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

An thực hiện phép chia đơn thức $20x^4y^5$ cho đơn thức $10x^6y^3z$ với kết quả như sau :

$$20x^4y^5 : 10x^6y^3z = 2x^2y^2z.$$

Mai cho rằng bài toán trên không thực hiện được. Em có nhận xét gì về bài giải của An và kiến của Mai ?

Chú ý : Trong thực hành ta thường bỏ các phép tính trung gian.

Ví dụ : $27x^7y^5 : 9x^4y^4 = 3x^3y$.

2. CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

Ví dụ : Diện tích hình chữ nhật trong hình bên được biểu diễn bởi đa thức $8x^2 + 12x$.

Nếu chiều rộng hình chữ nhật bằng $4x$ thì chiều dài bằng bao nhiêu tính theo x ?

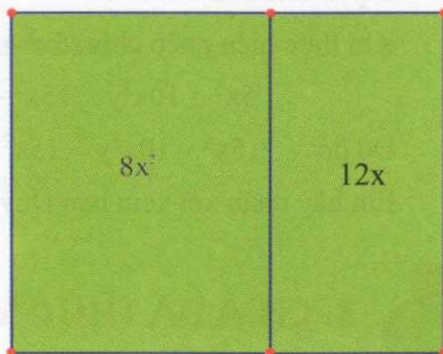
Giải

Diện tích hình chữ nhật là $8x^2 + 12x$.

Chiều rộng hình chữ nhật là $4x$.

Chiều dài hình chữ nhật bằng :

$$\begin{aligned}(8x^2 + 12x) : 4x &= \frac{8x^2 + 12x}{4x} \\ &= \frac{8x^2}{4x} + \frac{12x}{4x} = \frac{8}{4} \cdot \frac{x^2}{x} + \frac{12}{4} \cdot \frac{x}{x} = 2x + 3.\end{aligned}$$



Thực động 3

Một nhóm gồm 8 học sinh đi tham quan khu du lịch Suối Tiên (TP. HCM). Tổng số tiền vé vào cổng là x (đồng). Các bạn còn phải trả chung một số tiền gửi xe là 24 000 đồng. Như vậy tổng số tiền cả nhóm phải trả là $(x + 24000)$ đồng.

Hỏi mỗi bạn phải trả bao nhiêu tiền tính theo x ?



Quy tắc

Muốn chia một đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B), ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

Ví dụ : Thực hiện phép tính

a) $(18x^7 + 12x^5 - 24x^3) : 6x^3 ;$

b) $(15x^3y^5 - 8x^2y^2 - 5x^4y^4) : 5x^2y^2.$

Giải

a) $(18x^7 + 12x^5 - 24x^3) : 6x^3 = \frac{18x^7}{6x^3} + \frac{12x^5}{6x^3} - \frac{24x^3}{6x^3} = 3x^4 + 2x^2 - 4.$

b) $(15x^3y^5 - 8x^2y^2 - 5x^4y^4) : 5x^2y^2 = \frac{15x^3y^5}{5x^2y^2} - \frac{8x^2y^2}{5x^2y^2} - \frac{5x^4y^4}{5x^2y^2} = 3x^2y^3 - \frac{8}{5}x - x^2y^2.$



THỬ TÀI BẠN

Thực hiện phép tính :

a) $(20x^5 - 15x^3 + 10x^2) : 5x^2$;

b) $(18x^4y^5 + 24x^3y^4 - 5x^2y^3) : 6x^2y^2$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Khi thực hiện phép chia $(5x^5 - 10x^3y + 15x^2) : (-5x^2)$, bạn Duy đã thực hiện như sau :

$$5x^5 - 10x^3y + 15x^2 = -5x^2(-x^3 + 2xy - 3).$$

Do đó $(5x^5 - 10x^3y + 15x^2) : (-5x^2) = -x^3 + 2xy - 3$.

Em hãy nhận xét xem bạn Duy giải đúng hay sai.



3. CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

♦ Phép chia hết

Ví dụ : Chia đa thức $(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6)$ cho đa thức $(x - 3)$.

Giải

Muốn chia đa thức $(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6)$ cho đa thức $(x - 3)$ ta làm như sau :

Đặt phép chia
$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 \\ \hline x - 3 \end{array}$$

- Chia hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia :

$$2x^3 : x = 2x^2$$

Ta nhân kết quả tìm được $2x^2$ với đa thức chia rồi lấy đa thức bị chia trừ đi tích nhận được :

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 \\ - (2x^3 - 6x^2) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 3 \\ \hline 2x^2 \end{array}$$

$3x^2 - 11x + 6$ ← đa thức dư thứ nhất

Hiệu vừa tìm được gọi là đa thức dư thứ nhất.

- Chia hạng tử bậc cao nhất của đa thức dư thứ nhất cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia

$$3x^2 : x = 3x$$

Lấy đa thức dư thứ nhất trừ đi tích của $3x$ với đa thức chia ta được đa thức dư thứ hai

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 \\ - (2x^3 - 6x^2) \\ \hline 3x^2 - 11x + 6 \\ - (3x^2 - 9x) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 3 \\ \hline 2x^2 + 3x \end{array}$$

$-2x + 6$ ← đa thức dư thứ hai

$-2x + 6$ ← đa thức dư thứ hai

Thực hiện tương tự như trên, ta được

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 & x - 3 \\
 \underline{2x^3 - 6x^2} & 2x^2 + 3x - 2 \\
 3x^2 - 11x + 6 & \leftarrow \text{đa thức dư thứ nhất} \\
 \underline{3x^2 - 9x} & \\
 -2x + 6 & \leftarrow \text{đa thức dư thứ hai} \\
 \underline{-2x + 6} & \\
 0 &
 \end{array}$$

• Dư cuối cùng bằng 0, ta được thương là $2x^2 + 3x - 2$. Khi đó :

$$(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) : (x - 3) = 2x^2 + 3x - 2.$$

Phép chia có dư bằng 0 là phép chia hết.



THỬ TÀI BẠN

- Kiểm tra lại xem $(x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$ có bằng $(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6)$ hay không ?
- Thực hiện tính chia $(x^3 - 7x + 3 - x^2) : (x - 3)$.

♦ Phép chia có dư

Ví dụ : Thực hiện phép chia đa thức $(2x^3 - 3x^2 + 9x + 10)$ cho đa thức $(x^2 - 2x + 3)$.

Làm tương tự như trên, ta được

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 3x^2 + 9x + 10 & x^2 - 2x + 3 \\
 \underline{2x^3 - 4x^2 + 6x} & 2x + 1 \\
 x^2 + 3x + 10 & \\
 \underline{x^2 - 2x + 3} & \\
 5x + 7 &
 \end{array}$$

Ta thấy đa thức dư $5x + 7$ có bậc bằng 1 nhỏ hơn bậc của đa thức chia (bằng 2) nên phép chia không thể tiếp tục được.

Phép chia trong trường hợp này được gọi là *phép chia có dư*, $5x + 7$ gọi là *dư* và ta có :

$$2x^3 - 3x^2 + 9x + 10 = (x^2 - 2x + 3)(2x + 1) + 5x + 7.$$

Chú ý

Người ta chứng minh được rằng đối với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B.Q + R$, trong đó R bằng 0 hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B (R được gọi là dư trong phép chia A cho B).

Khi $R = 0$ phép chia A cho B là phép chia hết.



THỬ TÀI BẠN

Tìm a để đa thức $(x^2 + 2x + a)$ chia hết cho đa thức $(x - 1)$.



BÀI TẬP

Chia đơn thức cho đơn thức

1. Thực hiện phép chia :

- a) $2x^2 : x$;
- b) $5x^4 : 2x^2$;
- c) $(-8x^2) : 4x$;
- d) $xy^3z^4 : (-3xyz)$;
- e) $\frac{2}{3}x^3y^4 : \left(-\frac{4}{9}x^2y^3\right)$.

Chia đa thức cho đơn thức

2. Thực hiện phép chia :

- a) $(6x - 3) : 3$;
- b) $(4x^2 - 6x) : 2x$;
- c) $(15x^3 + 10x^2) : 5x$;
- d) $(3x^3 - 9x^2 + 6x) : 3x$;
- e) $(14x^4 + 21x^3 - 7x^5) : 7x^3$;
- f) $(12x^2y^3 - 15x^4y^3 + 9x^2y^2) : 3x^2y$.

Chia đa thức một biến đã được sắp xếp

3. Thực hiện phép chia :

- a) $(x^2 + 3x - 4) : (x - 1)$;
- b) $(3x^2 + 20x - 32) : (3x - 4)$;
- c) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$;
- d) $(x^3 + 5x^2 - x - 5) : (x^2 - 1)$.

4. Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm của biến rồi làm tính chia :

- a) $(8x + 12 - 4x^2) : (x - 3)$;
- b) $(12x - 10x^2 + 3x^3 - 8) : (x - 2)$;
- c) $(7x^2 + x^3 + 12x - 6) : (x^2 + 4x - 2)$;
- d) $(2x^2 + 2x - 5x^3 + 2x^4 - 1) : (-x + x^2 + 1)$.

5. Áp dụng hằng đẳng thức để làm phép chia :

- a) $(x^2 + 2xy + y^2) : (x + y)$;
- b) $(4x^2 - 4x + 1) : (1 - 2x)$;
- c) $(25x^2 - 4y^2) : (5x - 2y)$;
- d) $(27x^3 + 8) : (3x + 2)$.

6. Tìm dư R trong phép chia đa thức A cho đa thức B rồi viết dưới dạng

$$A = B.Q + R.$$

- a) $A = 3x^4 + x^3 + 6x - 5, B = x^2 + 1$;
- b) $A = 10x^3 + 27x^2 + 14x + 5, B = x^2 + 2x$.

7. Tìm a sao cho đa thức A chia hết cho đa thức B :

- a) $A = (3x^3 - 16x^2 + 25x + a)$ và $B = x^2 - 4x + 3$;
- b) $A = (x^4 - x^3 + 6x^2 - x + a)$ và $B = x^2 - x + 5$.

LUYỆN TẬP

1. Thực hiện phép tính :

- a) $(9x^4 - 12x^3 + 6x^2) : 3x^2$;
- b) $(24x^5 + 12x^4 - 7x^3) : 6x^3$;
- c) $(15x^3y^3 + 12x^2y^4 - 9x^2y^2) : 3x^2y^2$.

2. Làm tính chia :

- a) $(-x^2 + 6x^3 - 26x + 21) : (2x - 3)$;
- b) $(-3x^3 + 5x^2 - 9x + 15) : (5 - 3x)$;
- c) $(x^4 + 2x^2 - x + 5) : (x^2 - x + 1)$;
- d) $(17x^2 - 6x^4 + 5x^3 - 23x + 7) : (7 - 3x^2 - 2x)$.

3. Thực hiện tính chia :

- a) $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) : (m^2 - n^2)$;
- b) $(25x^2 - 81y^2) : (5x + 9y)$;
- c) $(8x^3 + 1) : (4x^2 - 2x + 1)$.

4. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phép chia sau là phép chia hết :

$$(15x^3y^5 - 7x^4y^3 + 6x^2y^2) : (3x^ny^n).$$

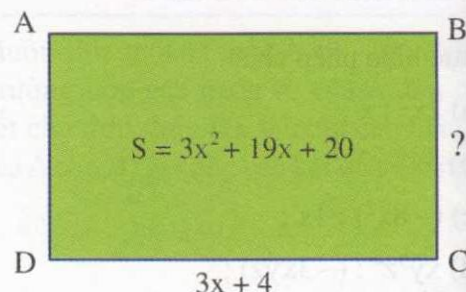
5. Tìm a, b sao cho đa thức :

$3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + ax + b$ chia hết cho đa thức $3x^2 - 2x + 1$ với mọi x.

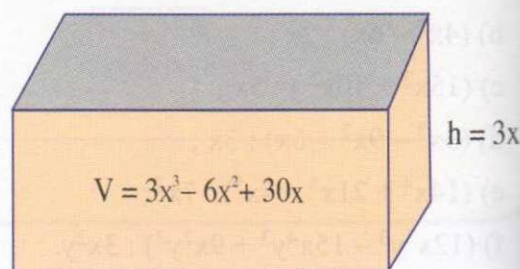
6. Thực hiện các phép tính :

- a) $(x^2 - 1) : (x - 1)$;
- b) $(x^3 - 1) : (x - 1)$;
- c) $(x^4 - 1) : (x - 1)$;
- d) Dựa vào kết quả của các bài a), b), c) hãy cho biết kết quả của phép tính $(x^{50} - 1) : (x - 1)$.

7. Diện tích hình chữ nhật ABCD (tính theo x) được cho bởi biểu thức $S = 3x^2 + 19x + 20$ như hình sau. Tính chiều rộng hình chữ nhật theo x khi biết chiều dài bằng $3x + 4$.



8. Một nhà thầu xây dựng một hồ chứa nước cứu hỏa cho một chung cư như hình sau. Thể tích của hồ được biểu thị bằng biểu thức $V = 3x^3 - 6x^2 + 30x$. Tính theo x diện tích của hồ chứa nếu chiều cao h của hồ bằng $3x$.





♦ **Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $(x - a)$ là $f(a)$**

Em hãy điền kết quả thích hợp vào chỗ trống (...) để khám phá ra điều thú vị !

Số dư của phép chia đa thức $(2x^2 + 3x - 5)$ cho đa thức $(x - 2)$ bằng (.....).

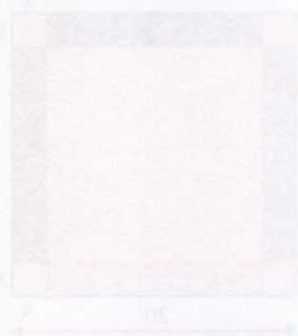
Giá trị của đa thức $(2x^2 + 3x - 5)$ tại $x = 2$ bằng

Số dư của phép chia đa thức $(3x^3 + 14x^2 - 23x + 6)$ cho đa thức $(x - 6)$ bằng (.....).

Giá trị của đa thức $(3x^3 + 14x^2 - 23x + 6)$ tại $x = 6$ bằng

Người ta chứng minh được rằng **số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $(x - a)$ là $f(a)$.**

Em hãy tìm thêm ví dụ để kiểm chứng nhận xét trên nhé !



ÔN TẬP CHƯƠNG 1

1. Làm tính nhân :

- a) $3x(5x^2 - 3x + 2)$;
- b) $\frac{3}{5}x^2y(2x^3y + 5xy - 10y^2)$;
- c) $(4x + 3)(x^2 + 7x - 2)$;
- d) $(x - 3y)(2xy - 5y^2 + 4x)$.

2. Rút gọn các biểu thức sau :

- a) $(x + 3)(x - 2) + (x - 3)^2$;
- b) $(x + 2)^2 + (x + 1)(x - 1)$;
- c) $(2x - 1)(2x + 1) - (2x - 3)^2$;
- d) $(x + 2)^3 - (x + 1)^3 - (x + 1)^2$.

3. Tính giá trị biểu thức :

- a) $A = x^2 + 9y^2 - 6xy$ tại $x = \frac{2}{3}$ và $y = \frac{5}{9}$.
- b) $B = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$ tại $x = 5$ và $y = \frac{3}{2}$.

4. a) Cho $x + y = 15$ và $xy = 56$. Tính $x^2 + y^2$.

- b) Cho $a + b = 10$ và $ab = 21$. Tính $a^3 + b^3$.

5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $7x^2 - 28x + 28$;
- b) $x^2 - xy + x - y$;
- c) $a^2 - b^2 - 5a + 5b$;
- d) $x^2 - 6xy - 25 + 9y^2$;
- e) $49 - y^2 - x^2 + 2xy$.

6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

- a) $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$;
- b) $x^2 - 7x + 12$;
- c) $x^2 - x - 6$;
- d) $2x^2 + x - 6$;
- e) $x^3 - 2x - 4$.

7. Làm tính chia :

- a) $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x + 1)$;
- b) $(x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 22x + 15) : (x^2 - 2x + 3)$;

8. Tìm x, biết :

- a) $5x(x - 4) - x^2 + 16 = 0$;
- b) $x + 6x^2 + 9x^3 = 0$;
- c) $x^2 - 4x + 3 = 0$.

9. Chứng minh :

- a) $x^2 - 4xy + y^2 + 2 > 0$ với mọi số thực x, y.
- b) $x^2 - x + 1 > 0$ với mọi số thực x.
- c) $x - x^2 - 2 < 0$ với mọi số thực x.

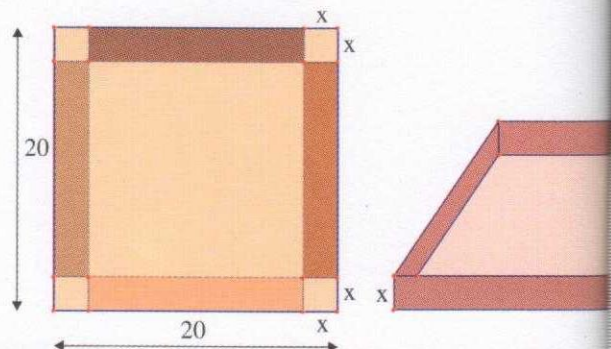
10. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $2n^2 - n + 2$ chia hết cho $2n + 1$.

11*. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ không phải là số chính phương.

12. Minh làm một cái hộp đựng dụng cụ học tập bằng một tấm bìa cứng hình vuông có cạnh dài 20 cm. Để tạo chiều cao chiếc hộp, Minh cắt bốn góc tấm bìa bốn hình vuông mỗi hình đều có cạnh dài x cm như hình dưới.

a) Dựa theo hình dưới, viết biểu thức tính thể tích V của hộp theo x.

b) Tính thể tích của hộp khi biết chiều cao của hộp bằng 3 cm.



13. Chào mừng ngày nhà giáo Việt Nam 20/11, trường của Hùng tổ chức cho các học sinh nam khối 8 thi đấu bóng đá. Các đội thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt. Tổng số trận các bạn đã thi đấu được tính bằng biểu thức $T = \frac{x(x - 1)}{2}$ (T là tổng số trận đấu, x là số đội tham gia). Em hãy tính xem có bao nhiêu đội đã tham gia thi đấu nếu tổng số trận đấu là 10 trận.

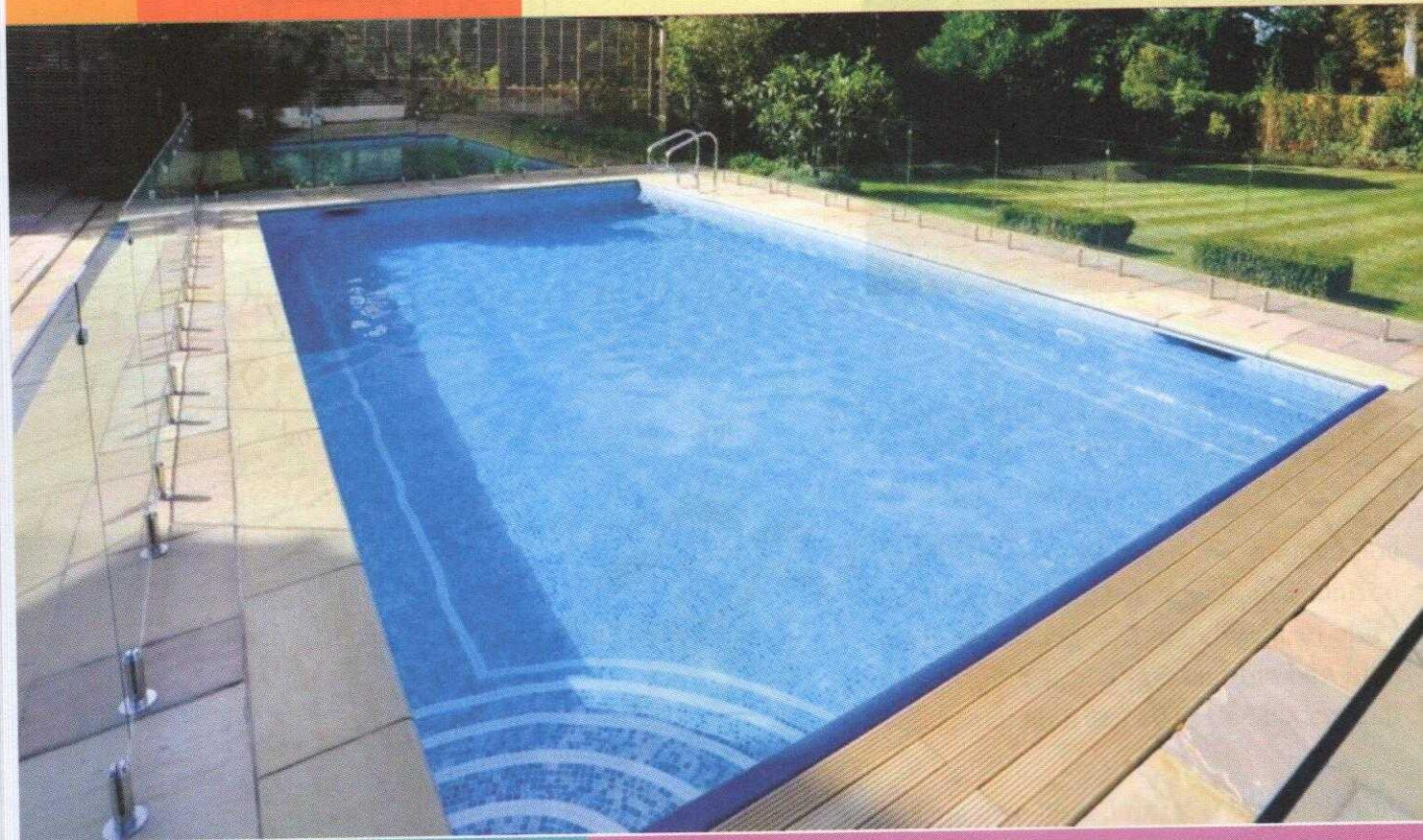


CHƯƠNG

2

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

- Định nghĩa – Các phép biến đổi phân thức
- Các phép toán với phân thức



Một hồ bơi có đáy là hình chữ nhật có độ dài cạnh là a (m) và b (m). Thể tích nước trong hồ là V (m^3). Em hãy nêu cách tính chiều cao h của cột nước trong hồ.

ĐỊNH NGHĨA – CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI PHÂN THỨC

Phân thức

Tính chất cơ bản của phân thức

Rút gọn phân thức

Quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức



Trong hình là những chiếc bánh giầy và bánh chưng.

- Em hãy diễn tả diện tích bề mặt của một chiếc bánh giầy theo độ dài đường kính là x (cm).
- Em hãy diễn tả diện tích bề mặt của một chiếc bánh chưng theo độ dài cạnh là y (cm).



1. PHÂN THỨC

◆ Định nghĩa

Hoạt động 1

Em hãy lập tỉ số giữa diện tích bề mặt của một chiếc bánh giầy và diện tích bề mặt của một chiếc bánh chưng đã cho trong hình ở trang 51 theo x và y .

Ta có định nghĩa :

Một phân thức (hay phân thức đại số) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và B khác đa thức 0.

A được gọi là tử thức (hay tử), B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).

Ví dụ : $\frac{3}{4}; \frac{2}{3x-1}; \frac{xy}{5}; \frac{2x+1}{x+7}; \frac{y^2+2x}{x-y}$ là các phân thức.



THỬ TÀI BẠN

- Mỗi số thực có phải là một phân thức không ? Vì sao?
- Mỗi đa thức có phải là một phân thức không ? Vì sao ?
- Hãy viết một phân thức mà bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu một bậc.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x}}$ là một phân thức.



Mai

$\frac{x-2}{1+\frac{2}{x}}$ không là một phân thức.



Lan

Theo em, bạn nào đúng ?

THẢO LUẬN NHÓM

Như trong hoạt động 1, em hãy tìm trong thực tiễn một đại lượng được diễn tả như một phân thức.

♦ Phân thức bằng nhau

Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu $A.D = B.C$.

Do đó

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ nếu } A.D = B.C$$



Sao giống ti lệ thức quá vậy ?

Ví dụ 1 : $\frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$ vì $1.(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$.

Ví dụ 2 : $\frac{x}{2y} = \frac{2xy}{4y^2}$ vì $x(4y^2) = 2y(2xy)$.

Ví dụ 3 : $\frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x+y}$ vì $(x-y)(x+y) = 1.(x^2-y^2)$.



THỬ TÀI BẠN

Hãy điền một đa thức thích hợp vào ô trống sau đây : $\frac{y}{2} = \frac{y-y^2}{\square}$.

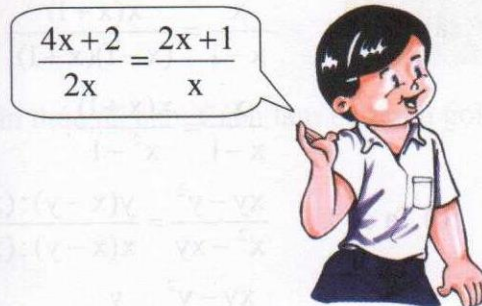


BẠN NÀO ĐÚNG ?



$$\frac{4x+2}{2x} = 4$$

Bảo



$$\frac{4x+2}{2x} = \frac{2x+1}{x}$$

Dũng

Theo em thì bạn nào đúng ?

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC



$$\frac{A.C}{B.C} = ?$$

Đễ quá ! Cứ làm như với phân số là được chứ gì.



Hoạt động 2

Cho phân thức $\frac{x+1}{x+2}$. Hãy nhân tử và mẫu của phân thức này với $x-1$. Xét xem phân thức vừa nhận được với phân thức đã cho có bằng nhau không?

Hoạt động 3

Cho phân thức $\frac{x^2y+xy^2}{xy+x^3y}$. Hãy chia tử và mẫu của phân thức này cho xy . Xét xem phân thức vừa nhận được với phân thức đã cho có bằng nhau không?

Phân thức đại số có tính chất cơ bản sau:

Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức bằng với phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C} \quad (\text{với } C \text{ là đa thức khác đa thức } 0)$$

Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho cùng một nhân tử chung thì được một phân thức bằng với phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{A:D}{B:D} \quad (\text{với } D \text{ là một nhân tử chung}).$$

Ví dụ:

a) Ta có: $\frac{x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$ (nhân tử và mẫu với $x+1$)

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{x^2-1}$$

b) Ta có: $\frac{xy-y^2}{x^2-xy} = \frac{y(x-y):(x-y)}{x(x-y):(x-y)}$ (chia tử và mẫu cho $x-y$)

$$\frac{xy-y^2}{x^2-xy} = \frac{y}{x}$$

**THỬ TÀI BẠN**

a) Dùng tính chất cơ bản của phân thức để chứng tỏ sự bằng nhau của hai phân thức sau:

$$\frac{x}{x+3} ; \frac{x^2-3x}{x^2-9}$$

b) Dùng tính chất cơ bản của phân thức để điền một đa thức thích hợp vào ô trống sau:

$$\frac{x^2+xy}{xy+y^2} = \frac{\square}{y}$$

Quy tắc đổi dấu**Hoạt động 4**

Nhân cả tử và mẫu của phân thức $\frac{x^2-2x}{x+1}$ với -1 rồi so sánh phân thức nhận được với phân thức ban đầu.

Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng với phân thức đã cho :

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$$

Ví dụ :

Ta có : $\frac{2a-3b}{b-a} = \frac{(-1)(2a-3b)}{(-1)(b-a)} = \frac{3b-2a}{a-b}$.



THỬ TÀI BẠN

Dùng quy tắc đổi dấu, hãy điền một đa thức thích hợp vào ô trống sau đây : $\frac{2x-y}{y-x} = \frac{y-2x}{\square}$.



3. RÚT GỌN PHÂN THỨC

Hoạt động

5

Cho phân thức $\frac{9x^2y^3}{6x^3y^2}$.

- Tìm nhân tử chung của tử và mẫu.
- Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung vừa tìm được.

$$\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{?}{x-2}$$

Khó quá !



Kết quả là thu được một phân thức đơn giản hơn phân thức đã cho. Cách làm nêu trên gọi là rút gọn phân thức.

Ví dụ 1 : Rút gọn phân thức $\frac{12(x^2-2x)}{9(x^2-4)}$.

Giải

Ta có : $12(x^2-2x) = 4.3x(x-2)$

$$9(x^2-4) = 3.3(x-2)(x+2).$$

Tử và mẫu có nhân tử chung là $3(x-2)$

nên $\frac{12(x^2-2x)}{9(x^2-4)} = \frac{4.3x(x-2)}{3.3(x-2)(x+2)} = \frac{4x}{3(x+2)}.$

Nhận xét

Muốn rút gọn một phân thức, ta làm như sau :

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử để tìm nhân tử chung.
- Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

Ví dụ 2 : Rút gọn phân thức $\frac{3x - x^2}{x^2 - 9}$.

Giải

Ta có : $\frac{3x - x^2}{x^2 - 9} = \frac{x(3 - x)}{(x - 3)(x + 3)}$ (phân tích tử và mẫu thành nhân tử)

$$= \frac{-x(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} \quad (\text{ta viết } x(3 - x) = -x(x - 3) \text{ để tìm nhân tử chung})$$

$$= \frac{-x}{x + 3} \quad (\text{chia tử và mẫu cho nhân tử chung là } x - 3).$$



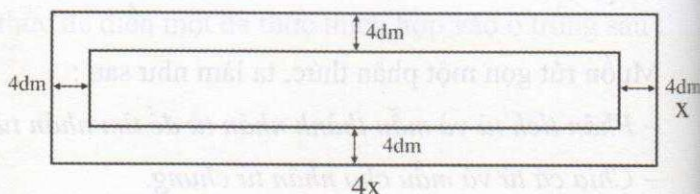
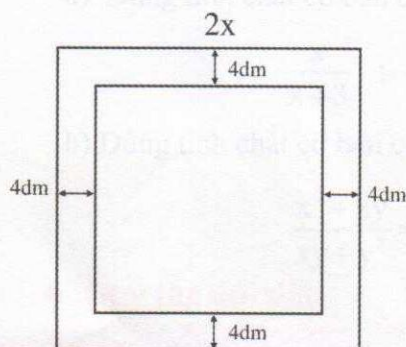
THỬ TÀI BẠN

Thực hiện rút gọn phân thức và điền đa thức thích hợp vào ô trống :

$$\frac{xy - y}{x - x^2} = \frac{y}{\square}$$

ĐỐ VUI

Trên một mảnh vườn hình vuông với độ dài cạnh là $2x$ (dm), người ta trồng xung quanh một luống hoa có bề rộng 4 dm với diện tích là S_1 (dm²). Trên một mảnh vườn hình chữ nhật có độ dài cạnh là x (dm) và $4x$ (dm), người ta trồng xung quanh một luống hoa có bề rộng 4 dm với diện tích là S_2 (dm²). Em hãy tính S_1 , S_2 rồi lập tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$. Đố em diện tích nào lớn hơn ?



4. QUY ĐỒNG MẪU THỨC CỦA NHIỀU PHÂN THỨC

Làm sao biến đổi $\frac{1}{x+2y}$ và $\frac{1}{2x-y}$ thành hai phân thức có cùng mẫu ?



Thực động 6

Cho hai phân thức $\frac{2}{2x+y}$ và $\frac{3}{x-2y}$. Hãy điền đa thức thích hợp vào ô trống :

$$\frac{2}{2x+y} = \frac{\boxed{}}{(2x+y)(x-2y)}$$

$$\frac{3}{x-2y} = \frac{\boxed{}}{(x-2y)(2x+y)}$$

Em có nhận xét gì về mẫu của hai phân thức trên.

Quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức là biến đổi các phân thức ấy thành những phân thức có cùng mẫu thức. Ta kí hiệu mẫu thức chung bởi MTC.

Ví dụ : Hãy quy đồng mẫu thức của hai phân thức $\frac{1}{3x+2y}$ và $\frac{1}{x-y}$.

Giải

Ta có : $\frac{1}{3x+2y} = \frac{x-y}{(3x+2y)(x-y)}$ và $\frac{1}{x-y} = \frac{3x+2y}{(3x+2y)(x-y)}$.

Trong ví dụ này thì MTC = $(3x+2y)(x-y)$.

♦ Tìm mẫu thức chung

Thực động 7

Cho hai phân thức $\frac{1}{6xy^2}$ và $\frac{2}{9x^2y}$. Em hãy điền vào chỗ trống (...) dưới đây :

$$\frac{1}{6xy^2} = \frac{9x^2y}{6xy^2 \cdot 9x^2y} = \frac{9x^2y}{\dots}$$

$$\frac{2}{9x^2y} = \frac{2 \cdot 6xy^2}{9x^2y \cdot 6xy^2} = \frac{12xy^2}{\dots}$$

Hai phân thức trên có MTC là ...

Lại có : $\frac{1}{6xy^2} = \frac{3x}{6xy^2 \cdot 3x} = \frac{3x}{\dots}$

$$\frac{2}{9x^2y} = \frac{2 \cdot 2y}{9x^2y \cdot 2y} = \frac{4y}{\dots}$$

Hai phân thức trên cũng có MTC là ...



THỬ TÀI BẠN

Với hai phân thức $\frac{1}{10x^2y}$ và $\frac{1}{15x^3y^2}$, bạn Hoa chọn mẫu thức chung là $150x^5y^3$; còn bạn Mai chọn mẫu thức chung là $30x^3y^2$. Bạn nào chọn mẫu thức chung đơn giản hơn?

Nhận xét:

Để tìm mẫu thức chung của nhiều phân thức thì ta làm như sau:

1) Phân tích các mẫu thức thành nhân tử.

2) Mẫu thức chung là tích của các nhân tử được chọn như sau:

– Nhân tử bằng số của mẫu thức chung là tích các nhân tử bằng số của các mẫu thức (với các nhân tử là số nguyên dương thì chọn BCNN của chúng).

– Với nhân tử là các lũy thừa của cùng một biểu thức thì chọn lũy thừa có số mũ cao nhất.

Ví dụ 1: Tìm mẫu thức chung của hai phân thức $\frac{1}{4xy^3}$ và $\frac{5}{6x^2y}$.

Để tìm mẫu thức chung, ta làm như sau:

– Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$$4xy^3 = 4 \cdot x \cdot y^3$$

$$6x^2y = 6 \cdot x^2 \cdot y$$

– Với các nhân tử bằng số là 4 và 6 thì chọn BCNN(4, 6) = 12.

Với các nhân tử x và x^2 thì chọn x^2 .

Với các nhân tử y và y^3 thì chọn y^3 .

– Chọn mẫu thức chung là $12x^2y^3$.

Ví dụ 2: Tìm mẫu thức chung của hai phân thức $\frac{1}{8(x+x^2)}$ và $\frac{1}{12(x^2+2x+1)}$.

Để tìm mẫu thức chung, ta làm như sau:

– Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$$8(x+x^2) = 8x(1+x)$$

$$12(x^2+2x+1) = 12(x+1)^2$$

– Với nhân tử bằng số là 8 và 12 thì chọn BCNN(8, 12) = 24.

Với nhân tử x thì chọn x .

Với các nhân tử $x+1$ và $(x+1)^2$ thì chọn $(x+1)^2$.

– Chọn mẫu thức chung là $24x(x+1)^2$.



THỬ TÀI BẠN

Tìm mẫu thức chung của $\frac{1}{12(x^3-x)}$ và $\frac{1}{18(x^2+x)}$.

Cho hai phân thức $\frac{1}{4(x^3 - 2x^2 + x)}$ và $\frac{1}{6(x^2 - x^3)}$.

Hãy điền vào chỗ trống (...) dưới đây :

Ta có : $4(x^3 - 2x^2 + x) = 4x(x^2 - 2x + 1) = 4x(x - 1)^2$

$6(x^2 - x^3) = 6x^2(1 - x) = -6x^2(x - 1)$

$MTC = 12x^2(x - 1)^2$

Khi đó $4(x^3 - 2x^2 + x)(...) = 12x^2(x - 1)^2$

$6(x^2 - x^3)(...) = 12x^2(x - 1)^2$

Ta gọi $3x$ là nhân tử phụ của mẫu thức $4x(x - 1)^2$; và $-2(x - 1)$ là nhân tử phụ của mẫu thức $6x^2(1 - x)$.

Nhận xét

Muốn quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức, ta thực hiện như sau :

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử
- Tìm mẫu thức chung
- Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức
- Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

Ví dụ : Hãy quy đồng mẫu thức của hai phân thức $\frac{1}{4(x^3 - 2x^2 + x)}$ và $\frac{1}{6(x^2 - x^3)}$.

Giải

Ta có : $MTC = 12x^2(x - 1)^2$

$\frac{1}{4(x^3 - 2x^2 + x)} = \frac{1}{4x(x - 1)^2} = \frac{3x}{12x^2(x - 1)^2}$ (nhân tử và mẫu cho nhân tử phụ là $3x$)

$\frac{1}{6(x^2 - x^3)} = \frac{1}{6x^2(1 - x)} = \frac{-2(x - 1)}{12x^2(x - 1)^2}$ (nhân tử và mẫu cho nhân tử phụ là $-2(x - 1)$).



THỬ TÀI BẠN

Quy đồng mẫu thức của hai phân thức $\frac{x - 1}{x^2 - 3x}$ và $\frac{x}{9 - x^2}$.

THƯ GIẢN

Xét phân thức có dạng $\frac{x^3 - 6}{x + \square}$ trong đó ta xem tử là ngày và mẫu là tháng. Em hãy chọn giá trị của x và điền giá trị thích hợp vào ô trống để có ngày Quốc khánh của nước ta.



GHI NHỚ

$$\bullet \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ nếu } A.D = B.C$$

$$\bullet \frac{A.C}{B.C} = \frac{A}{B} \text{ (với } C \text{ là đa thức khác đa thức } 0)$$

$$\bullet \frac{A:D}{B:D} = \frac{A}{B} \text{ (với } D \text{ là một nhân tử chung)}$$

$$\bullet \frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$$

- Muốn rút gọn một phân thức ta phân tích tử và mẫu thành nhân tử để tìm nhân tử chung rồi chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó.
- Quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức là biến đổi các phân thức ấy thành những phân thức có cùng mẫu thức (mẫu thức chung : MTC).

BÀI TẬP

Phân thức

1. Hãy điền biểu thức thích hợp vào ô trống :

a) $\frac{8x}{2xy} = \frac{\square}{y}$;

b) $\frac{2xy}{6y} = \frac{\square}{3}$;

c) $\frac{3(x+2)}{2x} = \frac{6(x+2)}{\square}$;

d) $\frac{4(x-2)}{3(x+1)} = \frac{8(x-2)x}{\square}$.

2. Hai phân thức sau đây có bằng nhau không ? Vì sao ?

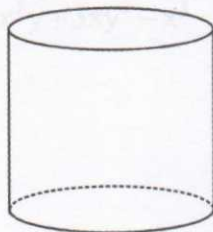
$\frac{x+2}{x}$ và $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x}$.

3. Hãy điền biểu thức thích hợp vào ô trống :

$\frac{\square}{x^2-9} = \frac{x}{x+3}$.

4. Thể tích của một cái xi-lanh được tính bởi công thức : $V = \pi R^2 h$.

Trong đó V là thể tích, h là chiều cao và R là bán kính đáy của xi-lanh. Em hãy nêu cách tính chiều cao nếu ta đã biết thể tích và bán kính đáy của xi-lanh.

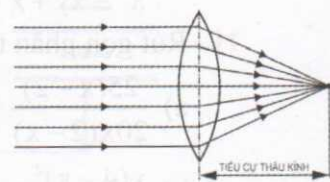


5. $\frac{x+1}{2+\sqrt{x}}$ có phải là một phân thức không ?

6. Tiêu cự f (cm) của một ống kính được tính bởi công thức $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$.

Trong đó u (cm) và v (cm) lần lượt là khoảng cách từ vật và ảnh tới tâm ống kính.

Hãy biểu diễn f thành một phân thức.



Tính chất cơ bản của phân thức

7. Sử dụng các tính chất cơ bản của phân thức để điền biểu thức thích hợp vào các ô trống sau :

a) $\frac{x-1}{2x+1} = \frac{x^2-x}{\square}$;

b) $\frac{(x+2)^2}{x^2+2x} = \frac{\square}{x}$.

8. Sử dụng các tính chất cơ bản của phân thức và quy tắc đổi dấu để điền biểu thức thích hợp vào các ô trống sau :

a) $\frac{x-2}{3-x} = \frac{2-x}{\square}$;

b) $\frac{(x-3)^2}{3-x} = \frac{\square}{1}$.

9. Đẳng thức $\frac{(x-1)^2}{1-x} = \frac{(1-x)^2}{x-1}$ đúng hay sai ? Vì sao ?

Rút gọn phân thức

10. Rút gọn phân thức :

a) $\frac{6x^3y^2}{9x^2y}$;

b) $\frac{6xy^3}{4x^2y}$;

c) $\frac{8(x^2 - xy)}{12x(x - y)^2}$;

d) $\frac{x^2 + xy + x + y}{x^2 - xy + x - y}$.

11. Rút gọn phân thức :

a) $\frac{25(x - 2)}{20x(2 - x)}$;

b) $\frac{x(4 - x)^2}{x - 4}$;

c) $\frac{(x - y)^2}{x(y - x)^3}$;

d) $\frac{x(x - 2)}{(2 - x)^3}$.

12. Kết quả rút gọn phân thức sau đây là đúng hay sai ? Vì sao ?

a) $\frac{4y}{6xy} = \frac{2}{3x}$;

b) $\frac{4 + 4xy}{2 + 2y} = \frac{2 + 2x}{1 + 1} = 2 + 2x$.

Quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức

13. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $\frac{4}{3x^2y}$ và $\frac{3}{4xy^3}$;

b) $\frac{5}{14x^2y^3}$ và $\frac{8}{21x^4y^2}$.

14. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $\frac{5}{2x + 2}$ và $\frac{9}{x^2 - 1}$;

b) $\frac{1}{4 - 2x}$ và $\frac{3}{x^2 - 4}$.

15. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

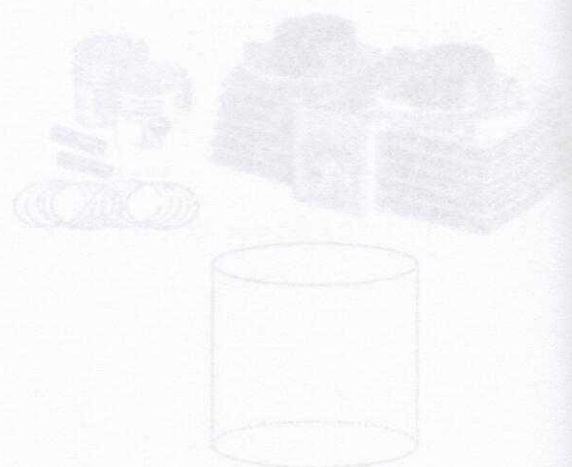
a) $\frac{1}{3x - 9}$ và $\frac{2}{x^2 - 6x + 9}$;

b) $\frac{7}{4 - 2x}$ và $\frac{2}{x^2 - 4x + 4}$.

16. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $\frac{1}{x - 1}$; $\frac{2}{x^3 - 1}$ và $\frac{3}{x^2 + x + 1}$;

b) $\frac{3}{6 - 2x}$; $\frac{2}{x - 3}$ và $\frac{-5}{3x - 9}$.



LUYỆN TẬP

1. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{36x^2y^3}{24x^3y^2}$;

b) $\frac{6x^2(x-1)^3}{27x(x-1)}$.

2. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{x^4 - 4x^2}{x(x+2)^2}$;

b) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$.

3. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{8x(1-x)}{12x^2(x-1)^3}$;

b) $\frac{10x(2-x)^3}{25x^3(x-2)^2}$.

4. Rút gọn các phân thức sau :

a) $\frac{xy - x^2}{y(x-y)^3}$;

b) $\frac{x^3 - y^3}{xy^2 - x^2y}$.

5. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

a) $\frac{x-1}{x^2-9}$ và $\frac{2xy+1}{2x+6}$;

b) $\frac{3x+y}{y^2-2xy+x^2}$ và $\frac{y+1}{2x-2y}$.

6. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau :

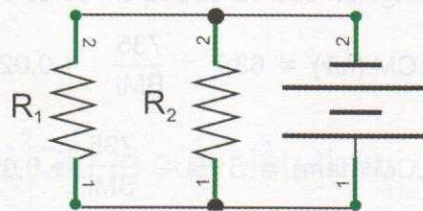
a) $\frac{x-1}{2}$ và $\frac{x^2}{x^2-16}$;

b) $\frac{x+y}{y^3-3x^2y+3xy^2-x^3}$ và $\frac{1}{x^2-xy}$.

7. Xét một mạch điện gồm hai dây điện trở có số đo là R_1 và R_2 (như hình vẽ) thì điện trở hữu dụng R được tính bởi công thức sau : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

a) Hãy biểu diễn R thành dạng một phân thức theo hai biến R_1 và R_2 .

b) Cho $R_1 = 2 \Omega$ và $R_2 = 3 \Omega$. Hãy tính R .



8*. Rút gọn phân thức : $\frac{y^2 - 3xy - 4x^2}{3y^2 - 12xy}$.

9*. Rút gọn phân thức : $\frac{a^2 + ab - ac - bc}{ac + 3ab - 3bc - c^2}$.

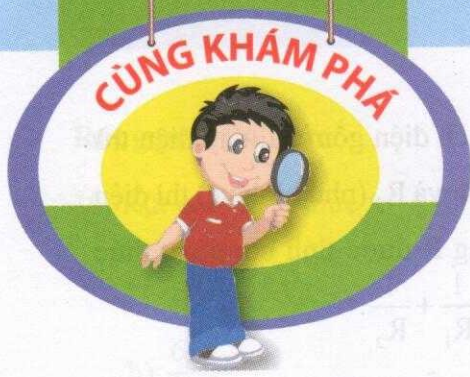
10*. Rút gọn phân thức : $\frac{y^4 - 3y^2 + 2}{y^4 - 4}$.

Bài tập nhóm

Hãy tìm giá trị của n và m sao cho :

$$\frac{x^{n+2}y^{3-m}}{x^m y^{2n+5}} = \frac{x^{13}}{y^9}.$$





CHỈ SỐ ĐO TỈ LỆ CHẤT MỠ (TLCM)

Do chỉ số BMI không thể hiện được tỉ lệ chất mỡ chứa trong cơ thể nên Gallager và các cộng sự đã nghiên cứu và đưa ra chỉ số đo tỉ lệ chất mỡ (TLCM) như sau :

$$\text{TLCM (nữ)} = 63,7 - \frac{735}{\text{BMI}} + 0,029.T = \frac{(63,7)\text{BMI} - 735 + 0,029T.\text{BMI}}{\text{BMI}}$$

$$\text{TLCM (nam)} = 51,6 - \frac{735}{\text{BMI}} + 0,029.T = \frac{(51,6)\text{BMI} - 735 + 0,029T.\text{BMI}}{\text{BMI}}$$

Trong đó T là số tuổi và BMI là chỉ số khối cơ thể.

BMI là lấy trọng lượng (đo bằng kg) chia cho bình phương chiều cao (đo bằng m).

(TLCM được biểu diễn dưới dạng một phân thức phụ thuộc vào hai biến số là chỉ số BMI và số tuổi T).

Đối với nữ thì khi chỉ số TLCM > 35 có nghĩa là cơ thể có nhiều chất mỡ hơn mức cho phép ; còn với nam thì khi TLCM > 25 thì cần kiểm soát chất mỡ.

Ví dụ một người đàn ông 61 tuổi nặng 65 kg và cao 1 m 6 thì có chỉ số BMI là 25,4 (đã có trọng lượng vượt mức cho phép) ; nhưng sẽ có chỉ số TLCM là $51,6 - 28,9 + 1,77 = 24,47$ (tỉ lệ chất mỡ này vẫn ở trong vùng cho phép).



Hiện nay, trên thế giới đã có máy DXA để đo tỉ lệ chất mỡ trong cơ thể, thế nhưng máy DXA còn quá đắt tiền nên chưa thể sử dụng rộng rãi được. Do vậy, dùng chỉ số đo TLCM của Gallager là một bổ sung hợp lí.

Em hãy thử đo TLCM cho các thành viên trong gia đình.

CÁC PHÉP TOÁN VỚI PHÂN THỨC

Phép cộng các phân thức

Phép trừ các phân thức

Phép nhân các phân thức

Phép chia các phân thức

Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của biểu thức



Ảnh: fidityour.com

Một đội đua thuyền phải đi ngược dòng chảy 1 km rồi trở lại điểm xuất phát. Cho biết tốc độ của dòng chảy là x (km/giờ), và tốc độ chèo thuyền gấp 4 lần tốc độ của dòng chảy.

Hãy lập công thức tổng thời gian đi và về theo x .



1. PHÉP CỘNG CÁC PHÂN THỨC

Cách cộng hai phân thức tương tự như cách cộng hai phân số.

♦ Cộng hai phân thức cùng mẫu

Hoạt động

1

Hãy điền vào ô trống :

$$\frac{2}{7x-2} + \frac{4}{7x-2} = \frac{\square + \square}{7x-2} \text{ (Cộng hai tử, giữ nguyên mẫu)}$$

$$= \frac{\square}{7x-2} \text{ (Thu gọn tử).}$$

Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta giữ nguyên mẫu thức và cộng các tử thức.

Ví dụ. Cộng hai phân thức và rút gọn : $\frac{2x-1}{3x+6} + \frac{3-x}{3x+6}$.

Giải

$$\frac{2x-1}{3x+6} + \frac{3-x}{3x+6} = \frac{2x-1+3-x}{3x+6} \text{ (Cộng hai tử, giữ nguyên mẫu)}$$

$$= \frac{x+2}{3x+6} \text{ (Thu gọn tử)}$$

$$= \frac{x+2}{3(x+2)} = \frac{1}{3} \text{ (Rút gọn phân thức).}$$



THỬ TÀI BẠN

Thực hiện phép cộng : $\frac{2x}{5x-2} + \frac{4}{5x-2}$.

♦ Cộng hai phân thức không cùng mẫu

Hoạt động

2

Điền vào ô trống để thực hiện phép cộng hai phân thức : $\frac{7x}{15y^2}$ và $\frac{y}{18xy}$.

MTC : $90xy^2$

$$\frac{7x}{15y^2} + \frac{y}{18xy} = \frac{7x \cdot \square}{15y^2 \cdot \square} + \frac{y \cdot \square}{18xy \cdot \square} \text{ (Quy đồng mẫu thức, nhân tử và mẫu)}$$

của phân thức $\frac{7x}{15y^2}$ với nhân tử phụ $6x$, nhân tử

và mẫu của phân thức $\frac{y}{18xy}$ với nhân tử phụ $5y$)

$$= \frac{\square}{90xy^2} + \frac{\square}{90xy^2}$$

$$= \frac{\square}{\square} \text{ (Cộng hai tử thức, giữ nguyên mẫu thức).}$$

Muốn cộng hai phân thức không cùng mẫu, ta quy đồng mẫu thức rồi thực hiện phép cộng.

Ví dụ. Tính và rút gọn : $\frac{x-4}{4x-16} + \frac{4+x}{8-2x}$.

Giải

Ta có : $4x - 16 = 4(x - 4)$; $8 - 2x = 2(4 - x)$

MTC : $4(x - 4)$

$$\frac{x-4}{4x-16} + \frac{4+x}{8-2x} = \frac{x-4}{4(x-4)} + \frac{(4+x).(-2)}{2(4-x).(-2)}$$

$$= \frac{x-4-8-2x}{4(x-4)}$$

$$= \frac{-x-12}{4(x-4)}$$



THỬ TÀI BẠN

Tính và rút gọn : $\frac{y+1}{2y-2} + \frac{-2y}{y^2-1}$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cô giáo ra bài toán :

Thực hiện phép tính : $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$.

Hai bạn Dũng và Mai làm như sau :

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{x}{b} &= \frac{bx}{ab} + \frac{ax}{ab} \\ &= \frac{bx+ax}{ab} \end{aligned}$$



Dũng



Mai

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{x}{a+b}$$

Bạn nào giải đúng, bạn nào giải sai ? Giải thích tại sao sai.

Ví dụ. Ứng dụng vào đời sống

Một đội đua thuyền phải đi ngược dòng chảy 1 km rồi trở lại điểm xuất phát. Cho biết tốc độ của dòng chảy là x , và tốc độ chèo thuyền gấp 4 lần tốc độ của dòng chảy.

a) Hãy lập công thức tổng thời gian đi và về theo x .

b) Nếu tốc độ dòng chảy là 2 km/giờ, thời gian đi và về là bao lâu ?

Giải

a) Lập công thức tổng thời gian đi và về theo x .

Bước 1. Xác định tốc độ đi và về.

Gọi x là tốc độ của dòng chảy, thì :

+ Tốc độ chèo thuyền là $4x$.

+ Tốc độ ngược dòng là $4x - x = 3x$.

+ Tốc độ xuôi dòng là $4x + x = 5x$.

Bước 2. Viết biểu thức thời gian theo x .



Dòng chảy	Khoảng cách	Tốc độ	Thời gian (khoảng cách/tốc độ)
Ngược dòng	1	$3x$	$\frac{1}{3x}$
Xuôi dòng	1	$5x$	$\frac{1}{5x}$

Bước 3. Viết và rút gọn biểu thức tổng thời gian đi và về.

Tổng thời gian là :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x} &= \frac{1.5}{3x.5} + \frac{1.3}{5x.3} \\ &= \frac{5}{15x} + \frac{3}{15x} \\ &= \frac{8}{15x} \end{aligned}$$

b) Nếu tốc độ dòng chảy là 2 km/giờ , thời gian đi và về là : $\frac{8}{15.2} = \frac{4}{15}$ (giờ).

Thời gian cả đi và về là $\frac{4}{15}$ giờ hay 16 phút.



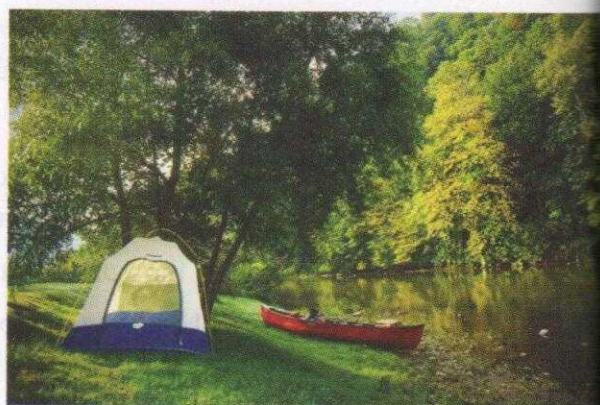
THỬ TÀI BẠN

Hoạt động ngoài trời

Nhóm của Nam cắm trại bên bờ sông. Nam được phân công chèo thuyền đi mua thực phẩm ở chợ trên sông cách nơi cắm trại 4 km . Biết rằng tốc độ chèo thuyền gấp 2 lần tốc độ dòng chảy.

a) Hãy viết và rút gọn biểu thức thể hiện thời gian Nam chèo thuyền cả đi và về.

b) Nếu vận tốc dòng chảy là $2,5 \text{ km/giờ}$ thì thời gian cả đi và về của Nam là bao lâu ?



♦ Tính giao hoán và kết hợp của phép cộng phân thức

Giống như phân số, phép cộng các phân thức cũng có các tính chất sau :

– Giao hoán :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$$

– Kết hợp :

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D} \right) + \frac{E}{F} = \frac{A}{B} + \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F} \right).$$

Ví dụ : Thực hiện phép tính và rút gọn :

$$\frac{2x}{x^2 + 2x + 1} + \frac{x-1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2 + 2x + 1}.$$

Giải

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 + 2x + 1} + \frac{x-1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2 + 2x + 1} &= \frac{2x}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1-x}{x^2 + 2x + 1} + \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{2x+1-x}{x^2 + 2x + 1} + \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

2. PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC

♦ Phân thức đối

Hoạt động 3

a) Thực hiện phép cộng hai phân thức sau : $\frac{2x}{3x-1} + \frac{-2x}{3x-1}$.

b) Em hãy tìm hai phân thức khác có tổng bằng 0.

Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.

Cho phân thức $\frac{A}{B}$, ta có $\frac{A}{B} + \frac{-A}{B} = 0$. Khi đó $\frac{-A}{B}$ là phân thức đối của phân thức $\frac{A}{B}$ và ngược lại $\frac{A}{B}$ là phân thức đối của phân thức $\frac{-A}{B}$.

Phân thức đối của phân thức $\frac{A}{B}$ được kí hiệu là $-\frac{A}{B}$.

Vì vậy ta suy ra : $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$.

Ví dụ : Phân thức $\frac{-2x}{3x-1}$ là **phân thức đối** của phân thức $\frac{2x}{3x-1}$.



THỬ TÀI BẠN

Tìm phân thức đối của phân thức : $\frac{-2x}{3x-1}$.

♦ Quy tắc trừ

Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, ta cộng $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của $\frac{C}{D}$:

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right).$$

Ví dụ. Thực hiện phép tính sau : $\frac{5y}{y^2-4} - \frac{2}{y-2}$.

Giải

MTC : $y^2 - 4$

$$\frac{5y}{y^2-4} - \frac{2}{y-2} = \frac{5y}{y^2-4} + \frac{-2}{y-2}$$

(Cộng với phân thức đối)

$$= \frac{5y}{y^2-4} + \frac{-2(y+2)}{(y-2)(y+2)}$$

(Quy đồng mẫu thức)

$$= \frac{5y-2(y+2)}{y^2-4}$$

(Thực hiện phép cộng phân thức)

$$= \frac{3y-4}{y^2-4}$$

(Rút gọn phân thức)



THỬ TÀI BẠN

Thực hiện phép tính : $\frac{2h}{h-2k} - \frac{3k}{2k-h}$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cô giáo cho bài toán :

Thực hiện phép tính : $\frac{3x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1}$.

Bạn Tài làm như sau :

$$\text{Ta có : } \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

Vì vậy :

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} &= \frac{3x}{x+1} - 0 \\ &= \frac{3x}{x+1}. \end{aligned}$$

Theo em, bạn nào đúng ?

Bạn Nam làm như sau :

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} &= \frac{3x - (x-1) - (x-1)}{x+1} \\ &= \frac{3x - x + 1 - x + 1}{x+1} \\ &= \frac{x+2}{x+1}. \end{aligned}$$

Chú ý

Trong một dãy các phép tính cộng và trừ phân thức, thứ tự thực hiện từ trái qua phải.

3. PHÉP NHÂN CÁC PHÂN THỨC

Hoạt động

4

Thực hiện phép tính sau : $\frac{2}{a^2} \cdot \frac{4c}{a^2b}$

Cách nhân hai phân thức cũng giống như cách nhân hai phân số.

Quy tắc nhân

Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau :

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Ví dụ : Thực hiện phép tính sau :

$$\frac{h}{h^2 - 2h + 1} \cdot \frac{(h-1)^3}{2h+1}$$

Giải

$$\begin{aligned} \frac{h}{h^2 - 2h + 1} \cdot \frac{(h-1)^3}{2h+1} &= \frac{h}{(h-1)^2} \cdot \frac{(h-1)^3}{2h+1} \\ &= \frac{h(h-1)}{2h+1} \end{aligned}$$



THỬ TÀI BẠN

Thực hiện phép tính : $\frac{x^2 - 6x + 9}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^3}{2(x-3)^3}$

♦ Tính chất của phép nhân phân thức

Phép nhân các phân thức có các tính chất :

– Giao hoán : $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B}$

– Kết hợp : $\left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} \right)$

– Phân phối đối với phép cộng : $\frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F} \right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$

Ví dụ : Thực hiện phép tính sau :

$$\frac{x^4 - 6x + 9}{x^3 - 1} \cdot \frac{2}{x+3} \cdot \frac{x^3 - 1}{x^4 - 6x + 9}$$

Giải

$$\frac{x^4 - 6x + 9}{x^3 - 1} \cdot \frac{2}{x + 3} \cdot \frac{x^3 - 1}{x^4 - 6x + 9} = \frac{2}{x + 3} \cdot \frac{x^4 - 6x + 9}{x^3 - 1} \cdot \frac{x^3 - 1}{x^4 - 6x + 9} = \frac{2}{x + 3}$$



4. PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC

♦ Phân thức nghịch đảo

Hoạt động

5

a) Điền vào ô trống : $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = \square$

b) Tìm hai phân thức có tích bằng 1.

Hai phân thức được gọi là nghịch đảo của nhau nếu tích của chúng bằng 1.

Ví dụ. Phân thức $-\frac{x+1}{x}$ là nghịch đảo của phân thức $-\frac{x}{x+1}$.

Phân thức $-\frac{x}{x+1}$ là nghịch đảo của phân thức $-\frac{x+1}{x}$.



THỬ TÀI BẠN

Tìm phân thức nghịch đảo của mỗi phân thức sau :

a) $-\frac{2x+1}{x^2-1}$;

b) $\frac{2a+3b}{5a+3b}$.

♦ Phép chia

Quy tắc

Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân phân thức $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{C}{D}$:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \text{ với } \frac{C}{D} \neq 0.$$

Ví dụ. Thực hiện phép tính sau : $\frac{4x-16}{x-y} : \frac{8}{x-y}$.

Giải

$$\frac{4x-16}{x-y} : \frac{8}{x-y} = \frac{4(x-4)}{x-y} \cdot \frac{x-y}{8} = \frac{x-4}{2}$$



THỬ TÀI BẠN

Thực hiện phép tính sau : $\frac{x}{y} \cdot \frac{x^2 z}{y^2} : \frac{x^2}{y^2}$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cô giáo ra bài toán rút gọn phân thức $\frac{x}{y} : \frac{y}{x} : \frac{y}{x}$.

Bài làm của Hà :

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} : \frac{y}{x} : \frac{y}{x} &= \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} : \frac{y}{x} \\ &= \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \\ &= \frac{x^3}{y^3} \end{aligned}$$

Bài làm của Nam :

$$\text{Ta có } \frac{y}{x} : \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{yx}{xy} = 1.$$

$$\text{Vì vậy } \frac{x}{y} : \frac{y}{x} : \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \cdot 1 = \frac{x}{y}.$$

Theo em, bạn nào đúng ?

Chú ý :

- Trong một dãy các phép tính nhân và chia phân thức, thứ tự thực hiện từ trái qua phải.
- Giống như phép tính số, trong một dãy gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia phân thức, ta thực hiện phép nhân, chia trước, cộng, trừ sau.

Ví dụ : Tính và rút gọn : $\frac{1}{x} - \frac{1}{x} : \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{3}$.

Giải

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x} : \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{3} = \frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{3} = \frac{3 - 3x + x^2}{3x}.$$

5. BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

◆ Biểu thức hữu tỉ

Hoạt động

6

Thực hiện phép tính :

$$\text{a) } \frac{2x+3}{3-x} - \frac{3}{x-3} + \frac{x}{3-x}; \quad \text{b) } \frac{x}{3-x} \cdot \frac{x-3}{x^2}.$$

Biểu thức gồm các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức được gọi là biểu thức hữu tỉ.

Ví dụ. Các biểu thức ở hoạt động 6 là các biểu thức hữu tỉ.

Các biểu thức : 0 ; 5 ; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{3}$; $x^2 - 5x + 1$ cũng là các biểu thức hữu tỉ.

◆ Biến đổi biểu thức hữu tỉ thành phân thức

Ví dụ. Biến đổi biểu thức $1 + \frac{1}{y+1}$ thành phân thức.

Giải

$$1 + \frac{1}{y+1} = \frac{y+1+1}{y+1} = \frac{y+2}{y+1}.$$



THỬ TÀI BẠN

Biến đổi biểu thức sau thành phân thức : $1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{x}}$.

◆ Giá trị của phân thức

Hoạt động 7

a) Tìm giá trị của đa thức $x^2 - 6x + 9$ tại $x = 2$; $x = 3$.

b) Tìm giá trị của phân thức $\frac{x}{x^2 - 6x + 9}$ tại $x = 2$; $x = 3$.

Ta thấy tại $x = 3$, phân thức $\frac{x}{x^2 - 6x + 9}$ có mẫu bằng 0, ta nói phân thức $\frac{x}{x^2 - 6x + 9}$ không xác định tại $x = 3$.

Khi làm những bài toán có liên quan đến giá trị của phân thức, trước tiên ta phải tìm điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0. Đó là điều kiện để giá trị của phân thức được xác định. Nếu tại giá trị của biến mà giá trị của phân thức được xác định thì phân thức ấy và phân thức rút gọn có cùng một giá trị.

Ví dụ 1. Cho phân thức $\frac{x^2 + 1}{x + 3}$.

a) Tìm điều kiện của x để giá trị phân thức được xác định.

b) Tính giá trị của phân thức tại $x = 7$.

Giải

a) Giá trị phân thức xác định với điều kiện $x + 3 \neq 0$.

Do đó điều kiện của x để phân thức xác định là $x \neq -3$.

b) $x = 7$ thoả mãn điều kiện $x \neq -3$.

Vậy giá trị của phân thức $\frac{x^2 + 1}{x + 3}$ tại $x = 7$ là $\frac{7^2 + 1}{7 + 3} = \frac{50}{10} = 5$.

Ví dụ 2. Cho phân thức $\frac{x^3 - 1}{(x + 2)(x - 3)}$.

a) Tìm điều kiện của x để giá trị phân thức được xác định.

b) Tính giá trị của phân thức tại $x = 1$.

Giải

a) Giá trị phân thức xác định với điều kiện $(x + 2)(x - 3) \neq 0$.

Do đó điều kiện của x để phân thức xác định là $x \neq -2$ và $x \neq 3$.

b) $x = 1$ thỏa mãn điều kiện $x \neq -2$ và $x \neq 3$.

Vậy giá trị của phân thức tại $x = 1$ là $\frac{1^3 - 1}{(1 + 2)(1 - 3)} = 0$.



THỬ TÀI BẠN

Cho phân thức : $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$.

a) Tìm điều kiện của x để giá trị phân thức được xác định.

b) Hãy rút gọn phân thức trên.

c) Tính giá trị của phân thức tại $x = 1$ và tại $x = 0$.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Thầy giáo ra đề toán :

Cho phân thức : $P = \frac{x - 1}{x^2 - x}$. Tính giá trị của phân thức tại $x = 1$.

Bạn Thu và Lan giải như sau :



Ta có :

$$P = \frac{x - 1}{x^2 - x} = \frac{x - 1}{x(x - 1)} = \frac{1}{x}$$

Tại $x = 1$, giá trị của phân thức là : $\frac{1}{1} = 1$.

Thu

Tại $x = 1$, mẫu thức của phân thức bằng 0 nên phân thức không xác định.



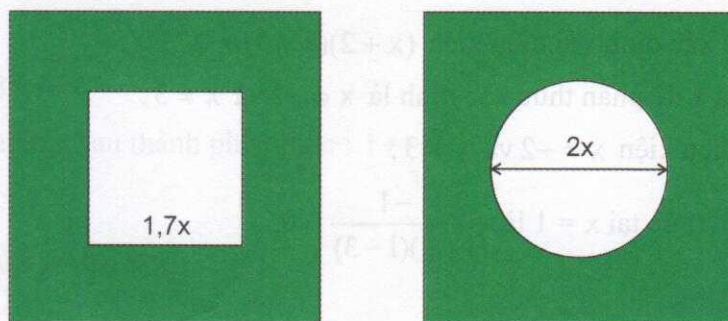
Lan

Theo em, bạn nào đúng ?

THƯ GIÃN

Toán học và trò chơi

Tại một gian hàng trò chơi ở hội chợ, người ta bố trí hai tấm bảng như hình bên dưới. Một bảng có một hình vuông, bảng còn lại là hình tròn. Người chơi ném phi tiêu trúng vào hình vuông hay hình tròn sẽ được trúng thưởng. Em hãy tính xem tỉ lệ diện tích của hình vuông và hình tròn, từ đó suy ra ném vào bảng nào thì khả năng trúng thưởng cao hơn.



Giải

Diện tích hình vuông : $(1,7x)^2 = 2,89x^2$.

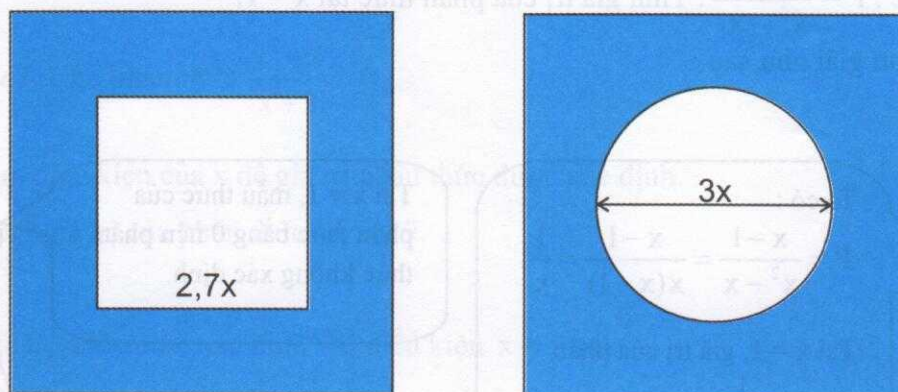
Diện tích của hình tròn : $\pi x^2 \approx 3,14x^2$.

Tỉ lệ của hình vuông và hình tròn trong hai tấm bảng là :

$$\frac{2,89x^2}{3,14x^2} = \frac{2,89}{3,14} (< 1).$$

Chọn bảng hình tròn thì khả năng trúng cao hơn.

Em hãy thực hiện yêu cầu như bài toán trên với hai tấm bảng như hình bên dưới :



GHÌ NHỚ

Các phép toán với phân thức

1. Phép cộng

a) Cộng hai phân thức cùng mẫu thức : $\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A+B}{M}$

b) Cộng hai phân thức khác mẫu thức : Quy đồng mẫu thức rồi cộng hai phân thức cùng mẫu.

2. Phép trừ

a) Phân thức đối của phân thức $\frac{A}{B}$ kí hiệu bởi $-\frac{A}{B}$.

Ta có : $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{B}{-A}$.

b) $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right)$.

3. Phép nhân

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

4. Phép chia

a) Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B}$ khác 0 là $\frac{B}{A}$.

b) $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \left(\frac{C}{D} \neq 0 \right)$.

• Giống như phép tính số, trong một dãy gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia phân thức, ta thực hiện phép nhân, chia trước, cộng, trừ sau.

BÀI TẬP

Phép cộng phân thức

1. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{2}{3x} + \frac{5}{3x}$;

b) $\frac{5}{2ab} + \frac{9}{2ab}$;

c) $\frac{7}{6x} + \frac{4}{9y}$;

d) $\frac{3}{2b} + \frac{1}{3b} + \frac{5}{6}$;

e) $\frac{4a}{x-3y} + \frac{3a}{3x-9y}$.

2. Thực hiện phép tính và rút gọn :

a) $\frac{5}{a} + \frac{3}{a+4}$;

b) $\frac{4}{c-5} + \frac{2}{2c+3}$;

c) $\frac{3}{k^2-1} + \frac{2}{k-1}$.

3. Thực hiện phép tính và rút gọn :

a) $\frac{2}{a+3} + \frac{3}{(a+3)(a+1)}$;

b) $\frac{1}{p^2-4p-5} + \frac{2p}{p-5}$;

c) $x + \frac{3x}{x+2} + 2$;

d) $\frac{x}{x+y} + \frac{4}{x^2+3xy+2y^2} + \frac{-3x}{x+2y}$.

4. Thực hiện phép tính và rút gọn :

a) $\frac{x+1}{2x+6} + \frac{2x+3}{x(x+3)}$;

b) $\frac{1-3x}{2x} + \frac{3x-2}{2x-1} + \frac{3x-2}{2x-4x^2}$;

c) $\frac{x}{(x-2y)(z-x)} + \frac{2y}{(2y-z)(x-2y)} + \frac{z}{(z-x)(2y-z)}$

5. Tìm mẫu thức chung rồi thực hiện phép tính :

a) $\frac{4}{2+y} + \frac{2}{y-2} + \frac{5y-6}{4-y^2}$;

b) $\frac{1-3m}{2m} + \frac{3m-2}{2m-1} + \frac{3m-2}{2m-4m^2}$;

c) $\frac{k}{k^2-9} + \frac{1}{6k-9-k^2} + \frac{1}{k^2+6k+9}$.

6. Toán học và Giao thông

Gia đình ông Ba đi du lịch bằng hơi 7 chỗ. Họ phải lái xe 100 km trên đường thường, và 240 km trên đường cao tốc. Tốc độ trên đường cao tốc là 50%. Gọi r (km/giờ) là tốc độ trên đường thường.

a) Hãy viết biểu thức tính thời gian mà gia đình ông Ba phải đi.

b) Hãy tính thời gian gia đình ông Ba phải đi nếu họ lái xe đúng theo giới hạn tốc độ trên biển chỉ đường ở hình bên dưới.



Phép trừ phân thức

7. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\frac{5}{3x} - \frac{2}{3x}$;

b) $\frac{-5}{7y} - \frac{6}{7y}$;

$$c) \frac{7x}{x-y} - \frac{2x+3}{x-y};$$

$$d) \frac{1}{3c} - \frac{1}{3d};$$

$$e) \frac{f-4h}{3k} - \frac{2f-5h}{8k};$$

$$f) \frac{p+3}{2z} + \frac{p-1}{6z} - \frac{2p+1}{3z}.$$

8. Thực hiện phép tính và rút gọn :

$$a) \frac{1}{2b} - \frac{3}{b+c};$$

$$b) \frac{2}{x+5} - \frac{3}{x-1};$$

$$c) x - \frac{3x}{x+3};$$

$$d) \frac{3}{4m^2-1} - \frac{5}{2m+1}.$$

9. Thực hiện phép tính và rút gọn :

$$a) \frac{d-1}{3d-7} - \frac{1}{14-6d};$$

$$b) \frac{2n-5}{9n-6} - \frac{m+3}{4-6n};$$

$$c) \frac{u+1}{2u-8} - \frac{u+2}{12-3u};$$

$$d) \frac{5a^2}{6a-6b} - \frac{2a^2}{3b-3a};$$

$$e) \frac{3x}{4y-2z} - \frac{2x}{z-2y} + \frac{5}{3z-6y}.$$

10. Thực hiện phép tính và rút gọn :

$$a) \frac{x+y}{x-y} + \frac{x^2-4y^2}{x^2-y^2} - \frac{x-3y}{x+y};$$

$$b) \frac{1}{2z-3} - \frac{2}{3-2z} + \frac{18}{9-4z^2};$$

$$c) \frac{1}{a^2-5a-6} - \frac{a}{a-6};$$

$$d) \frac{x}{x+y} + \frac{4}{x^2+3xy+2y^2} - \frac{3x}{x+2y}.$$

11. Toán học và rèn luyện thân thể

Na đi bộ 1 km từ nhà của mình tới trung tâm thể thao. Sau khi chơi bóng rổ, Na đi bộ về nhà với tốc độ chỉ đạt 85% so với lúc đi. Gọi x là tốc độ của Na lúc đi.

a) Hãy viết biểu thức thời gian Na đi và về.

b) Nếu tốc độ lúc đi là 3 km/giờ, thì tổng thời gian Na đi và về là bao lâu ?



Phép nhân phân thức

12. Thực hiện phép nhân các phân thức :

$$a) \frac{15a^2}{8ab^3c} \cdot \frac{4c}{5ab};$$

$$b) \frac{3(x+y)}{x-y} \cdot \frac{2x-2y}{4x+4y};$$

$$c) \frac{3x^2}{x-5} \cdot \frac{x^2-25}{9x^3}.$$

13. Thực hiện các phép tính :

$$a) \frac{x^2+x}{x^2-16} \cdot \frac{4x-x^2}{3x+3};$$

$$b) \frac{2x^3-4x^2}{x^2+8x+16} \cdot \frac{3x+12}{4x-x^3};$$

$$c) \frac{a+3}{a^2-4} \cdot \frac{8-12a+6a^2-a^3}{9a+27};$$

$$d) \frac{x+1}{y^2-2y-8} \cdot \frac{4-y}{x^2+x}.$$

14. Áp dụng tính chất phân phối để thực hiện phép tính :

$$a) \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{x^2} - \frac{2y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{x^2};$$

$$b) \left(\frac{x^3}{x-1} + x^2 - x + 1 \right) \cdot \frac{1-x}{x}.$$

15. Chứng minh các đẳng thức sau :

$$a) \left(a^2 - \frac{1}{a} \right) \cdot \left(\frac{a+1}{a^2+1+a} - \frac{1}{1-a} \right) = 2a+1;$$

$$b) \frac{3}{x^2-3x} - \frac{x^2}{3-x} = x+3 + \frac{9x+3}{x^2-3x}.$$

Phép chia phân thức

16. Thực hiện phép chia các phân thức :

$$a) \frac{a-2b}{16} : \frac{2a-4b}{12};$$

$$b) \frac{3(c+d)}{c-d} : \frac{12c+12d}{3c-3d};$$

$$c) \frac{a-2b}{8} : \frac{4a-8b}{12};$$

$$d) \frac{8c^3}{6(c+d)} : \frac{2c^2}{3c+3d}.$$

17. Thực hiện các phép tính sau :

$$a) 2y : \frac{4x}{5xy} \cdot \frac{64xy}{100x^3y^4};$$

$$b) \frac{6df}{9f^3} \cdot \frac{3f}{16d^2} : \frac{8d^3f^2}{27d};$$

$$c) \frac{3ps}{4pqr} : \frac{3pq^2}{12p^3q} \cdot \frac{14s^3}{7qr};$$

$$d) \frac{3w-7}{5w^3} : \frac{21-9w}{27w}.$$

18. Thực hiện các phép tính sau :

$$a) \frac{c^2-d^2}{c^2-2cd+d^2} : \frac{1}{cd+d^2};$$

$$b) \frac{m^2-4}{m^2-3m+2} : \frac{m}{m-1};$$

$$c) \frac{m^2-9}{m^2+m+1} : (m-3);$$

$$d) (m-1) : \frac{m^2}{(m-1)^2}.$$

19. Tính C ở đẳng thức sau :

$$\frac{2}{C} \cdot \frac{m^2-4}{m^2-3m+2} : \frac{m}{m-1} = 1.$$

Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức

20. Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức :

$$a) \frac{2x}{\frac{1}{x}+1}; \quad b) \frac{1+\frac{2}{y-1}}{2y};$$

$$c) \frac{1-\frac{2}{x+1}}{1+\frac{2-x^2}{x^2-1}}; \quad d) \frac{\frac{x}{4}-1+\frac{3}{4x}}{\frac{x}{2}-\frac{6}{x}+\frac{1}{2}}.$$

21. Cho phân thức : $\frac{x^2-4}{(x-3)(x-2)}.$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.

b) Rút gọn phân thức và tính giá trị của phân thức tại x = 13.

22. Cho phân thức : $\frac{x^2-9}{x^2+1}.$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.

b) Tìm giá trị của x để phân thức bằng 0.

23. Cho phân thức : $\frac{x^2+4x-5}{x-5}.$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.

b) Rút gọn phân thức và tính giá trị của phân thức tại x = -1 và x = 5.

24. Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định, và rút gọn biểu thức sau :

$$\left(\frac{x}{x^2-36} + \frac{6-x}{6x+x^2} \right) : \frac{2x-6}{x^2+6x} + \frac{x}{6-x}.$$

LUYỆN TẬP

1. Đơn giản và rút gọn biểu thức :

a) $\frac{t^2 - t - 6}{t^2 - 6t + 9}$;

b) $\frac{3ab^3}{8a^2b} \cdot \frac{4ac}{9b^4}$;

c) $-\frac{4}{8x} : \frac{16}{xy^2}$;

d) $\frac{48}{6a + 42} \cdot \frac{7a + 49}{16}$;

e) $\frac{w^2 + 5w + 4}{6} : \frac{w + 1}{18w + 24}$;

f) $\frac{\frac{x^2 + x}{x + 1}}{\frac{x}{x - 1}}$.

2. Đơn giản và rút gọn biểu thức :

a) $\frac{4a + 2}{a + b} + \frac{1}{-a - b}$;

b) $\frac{2x}{5ab^3} + \frac{4y}{3a^2b^2}$;

c) $\frac{5}{n + 6} - \frac{4}{n - 1}$;

d) $\frac{x - 5}{2x - 6} - \frac{x - 7}{4x - 12}$.

3. Tìm hai phân thức có tổng là

$$\frac{2x - 1}{(x + 1)(x - 2)}$$

4. Trong một cuộc đua xe đạp, anh Nam phải hoàn thành đoạn đường 48 km. Nửa đoạn đường đầu anh Nam đạp cùng một tốc độ. Nửa đoạn đường còn lại, anh Nam đạp với tốc độ nhỏ hơn lúc đầu 4 km/giờ.

a) Gọi x là tốc độ ở nửa đoạn đường đầu, hãy viết biểu thức thể hiện thời gian anh Nam đi trong nửa đoạn đường đó.

b) Hãy viết biểu thức thể hiện thời gian anh Nam đi nửa đoạn đường còn lại.

c) Hãy viết biểu thức thể hiện thời gian anh Nam hoàn thành cả đoạn đường.



5. Cho phân thức $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$.

a) Với giá trị nào của x thì giá trị của phân thức được xác định ?

b) Rút gọn phân thức.

c) Tìm giá trị của x để phân thức bằng 1.

d) Tìm giá trị của x để phân thức bằng 0.

6. Cho phân thức $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$.

a) Với giá trị nào của x thì giá trị của phân thức được xác định ?

b) Rút gọn phân thức.

c) Tìm giá trị của x để phân thức bằng 0.



BIẾN ĐỔI MỘT PHÂN THỨC THÀNH HIỆU HAI PHÂN THỨC ĐỂ GIẢI TOÁN

Chúng ta dễ dàng nhận thấy :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Tuy nhiên từ đẳng thức này nếu nhìn từ một góc nhìn khác

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad (\text{Phân thức có mẫu là tích được phân thành hiệu hai phân thức}).$$

Nhờ vậy ta giải được một số bài toán khó như sau :

Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20}.$$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{10-1}{20} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

Các em làm bài tập tương tự sau :

a) Tính $B = \frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \dots + \frac{1}{20.19}$

b*) Rút gọn biểu thức $S = \frac{1}{x(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+10)} + \dots + \frac{1}{(x+2010)(x+2015)}$

c*) Rút gọn biểu thức $W = \frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+6)} + \dots + \frac{1}{(x+27)(x+30)}$

Hướng dẫn (câu b và c) : Sử dụng công thức :

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right) \quad \text{với } a < b.$$

1. Rút gọn biểu thức sau :

a) $\frac{3a^2b}{4c} \cdot \frac{c^2}{ab}$;

b) $\frac{9}{d-3f} : \frac{6}{9f-3d}$;

c) $\frac{10k}{k-5} \cdot \frac{3k^2-15k}{5k^2}$;

d) $\frac{4x-1}{4y-4x} : \frac{3}{9x-9y}$;

e) $\frac{mn-4m+2n^2-8n}{m+2n} : \frac{4-n}{n}$;

f) $\frac{7(p-q)^2}{pq} \cdot \frac{2p^3q^2}{p-q^2}$.

2. Thực hiện phép tính và rút gọn :

a) $\frac{5}{4a} - \frac{3}{8a}$;

b) $\frac{5b}{3b+2c} + \frac{b}{9b+6c}$;

c) $\frac{9}{2d-4f} + \frac{7}{8f-4d}$;

d) $\frac{3}{k-1} - \frac{2}{4k+5}$;

e) $\frac{m}{2m-5} + \frac{4}{8+3m}$;

f) $\frac{1}{p^2+3p-4} - \frac{1}{p+4}$.

3. Thực hiện phép tính và rút gọn :

a) $\frac{5}{x^2-3x-28} + \frac{7}{2x-14}$;

b) $\frac{d-4}{d^2+2d-8} - \frac{d+2}{d^2-16}$;

c) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} + \frac{m}{n-m} + \frac{n}{m+n}$;

d) $\frac{y+1}{y-1} + \frac{y+2}{y-2} + \frac{y}{y^2-3y+2}$;

e) $\frac{\frac{1}{b+2} + \frac{1}{b-5}}{\frac{2b^2-b-3}{b^2-3b-10}}$;

f) $\left(\frac{2s}{2s+1} - 1\right) : \left(1 + \frac{2s}{1-2s}\right)$.

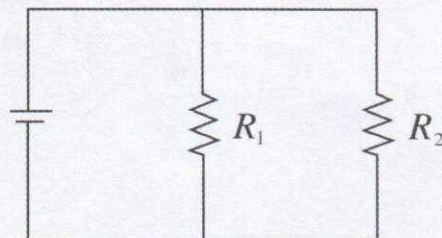
4. Cho biết $V = \pi R^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$, hãy tìm :

a) Giá trị của V với $\pi = 3,14$; $R = 12$; $h = 14$; $r = 9$.

b) Giá trị của h với $\pi = 3,14$; $R = 8$; $V = 3800$; $r = 6$.

c) Giá trị của r với $\pi = 3,14$; $h = 6,9$; $V = 3500$; $R = 11$.

5. Trong mạch điện gồm hai điện trở R_1 và R_2 mắc song song (như hình vẽ bên dưới), điện trở tổng R được tính theo công thức $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.



a) Gọi R_1 là x và R_2 bé hơn R_1 4 đơn vị, hãy viết biểu thức tính R theo x.

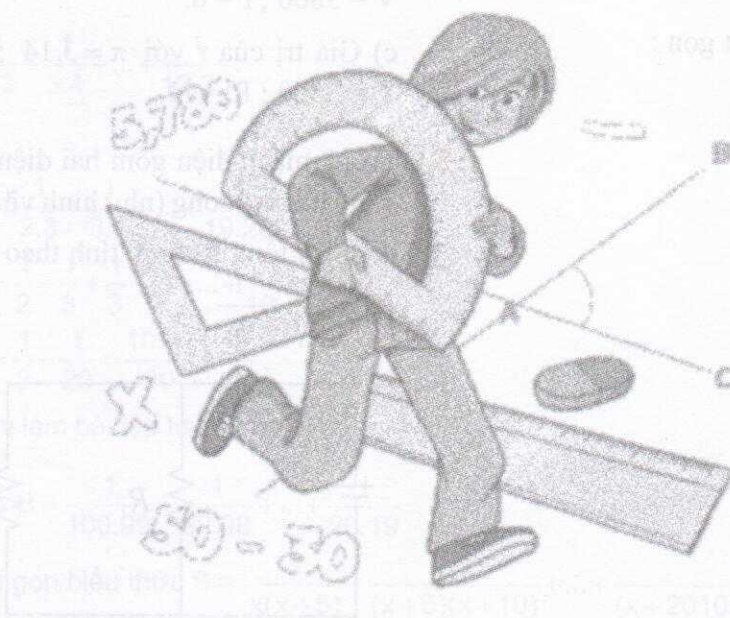
b) Tính điện trở tổng với $R_1 = 30\Omega$ và $R_2 = 20\Omega$.

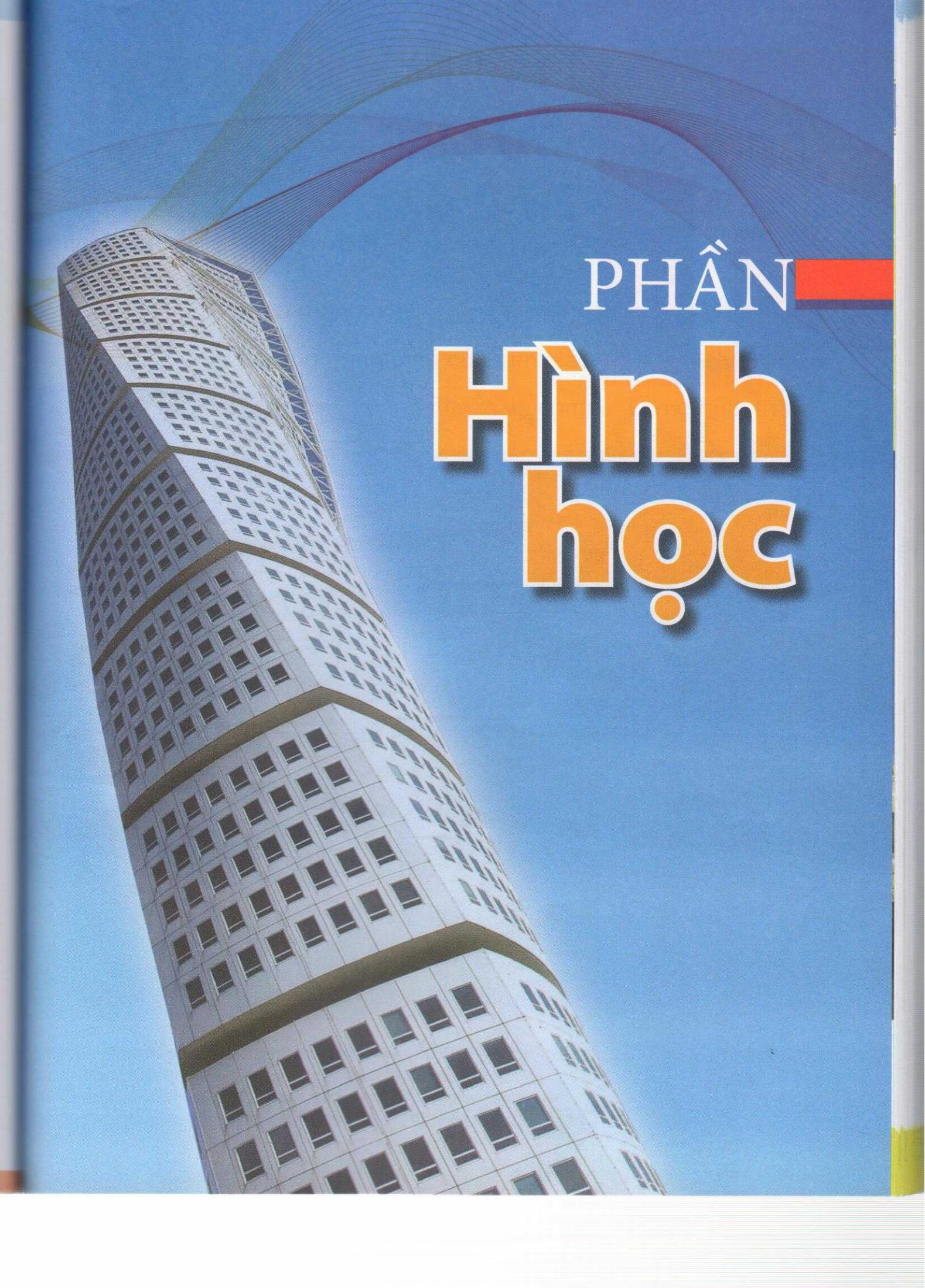
6. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$.

- Tìm điều kiện của x để giá trị biểu thức A xác định.
- Tính giá trị của A tại $x = 4$.
- Tính giá trị của A tại $x = 2$; $x = -2$.
- Tính giá trị của x để $A = 0$.

7. Cho biểu thức $Q = \frac{2}{x^2 - 5x + 6} : \frac{x-1}{x+1}$.

- Tìm điều kiện của x để giá trị biểu thức Q xác định.
- Tính giá trị của Q tại $x = 10$; $x = 20$.





PHẦN

Hình học

CHƯƠNG

1

TỨ GIÁC

- Tứ giác - Hình thang
- Hình bình hành – Hình chữ nhật – Hình thoi – Hình vuông



Ngọ Môn, cổng chính của kinh thành Huế thời Nguyễn, nền lát đá hình vuông, ba cửa chính có hình chữ nhật, bên là tường thành hình thang, các mái dạng hình tam giác cân lợp ngói đỏ. Tất cả được xây đối xứng trên một trục chính dẫn vào Hoàng thành.

TỨ GIÁC – HÌNH THANG

Tứ giác

Hình thang

Hình thang cân

Đường trung bình của tam giác, của hình thang

Dựng hình bằng thước và compa. Dựng hình thang



Trụ sở Ủy ban nhân dân Thành phố Hồ Chí Minh với hai nóc tháp hình tứ giác lợp ngói đỏ đối xứng nhau qua tháp đồng hồ.

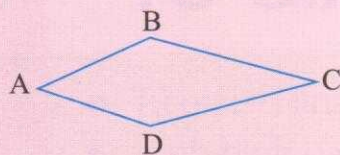


1. TỨ GIÁC

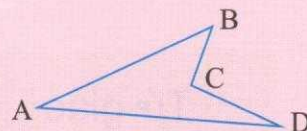
Hoạt động

1

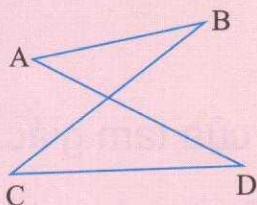
Quan sát các hình 1a, 1b, 1c, 1d dưới đây :



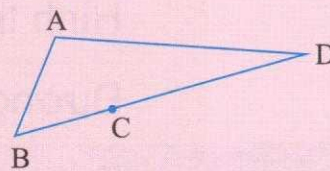
a)



b)



c)



d)

Hình 1

Hãy cho biết mỗi hình trong các hình 1a, 1b, 1c, 1d được tạo thành bởi những đoạn thẳng nào ?

Ở hình 1d, các đoạn thẳng BC và CD ở vị trí như thế nào ?

Ở các hình 1a, 1b, 1c các đoạn thẳng tạo nên hình có cùng nằm trên một đường thẳng như đoạn thẳng BC và CD của hình 1d không ?

Định nghĩa

Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD và DA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

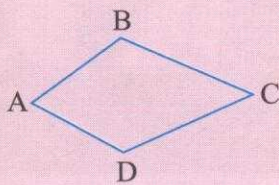
Trong hình 1, mỗi hình 1a, 1b, 1c là một tứ giác ; hình 1d không là tứ giác.

Tứ giác ABCD còn được gọi là tứ giác DCBA, CBAD, BADC, ... Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh*, các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA gọi là các *cạnh*.

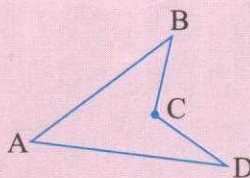
Hoạt động

2

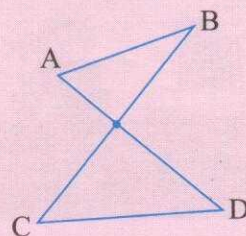
Quan sát hình 2. Em hãy nhận xét về vị trí của mỗi tứ giác so với nửa mặt phẳng có bờ là một đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.



a)



b)



c)

Hình 2

Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.

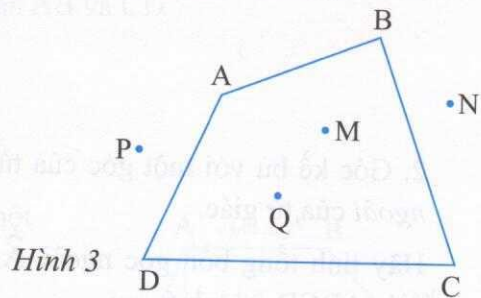
Tứ giác ở hình 2a là một tứ giác lồi.

Chú ý : Từ nay, khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.



THỬ TÀI BẠN

1. Hãy tìm các tứ giác lồi ở hình 1.
2. Hãy vẽ một tứ giác lồi và một tứ giác không lồi.



Hình 3

3. Quan sát hình 3, hãy trả lời các câu hỏi a, b, c, d, e và điền vào chỗ trống (...) ở các câu f, g, h.
Trong một tứ giác :

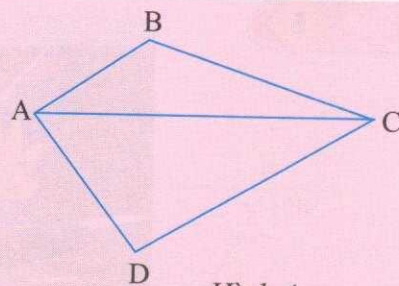
- a) Hai đỉnh kề nhau là hai đỉnh cùng nằm trên một cạnh. Ví dụ : Đỉnh A kề với đỉnh B. Hỏi đỉnh C kề với đỉnh nào ?
- b) Hai đỉnh đối nhau là hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh. Ví dụ : Đỉnh đối với đỉnh A là đỉnh C. Hỏi đỉnh đối với đỉnh B là đỉnh nào ?
- c) Đường chéo là đoạn thẳng nối hai đỉnh đối nhau. Ví dụ : AC là đường chéo. Tìm đường chéo còn lại của tứ giác.
- d) Hai cạnh kề nhau là hai cạnh có chung một đỉnh. Ví dụ : Một cặp cạnh kề nhau là AB và BC. Hãy kể tên các cặp cạnh kề nhau còn lại.
- e) Hai cạnh đối nhau là hai cạnh không có chung một đỉnh nào. Ví dụ : Một cặp cạnh đối nhau là AB và CD. Hãy kể tên một cặp cạnh đối nhau khác.
- f) Các góc của tứ giác là : góc A, ...
- g) Điểm nằm trong tứ giác là : M, ...
- h) Điểm nằm ngoài tứ giác là : P, ...

♦ Tổng các góc trong một tứ giác

Hoạt động 3

Đường chéo AC chia tứ giác ABCD thành hai tam giác ACB và ACD (h.4).

Tính tổng các góc của tam giác ABC và tam giác ADC. Từ đó, ta có nhận xét gì về tổng các góc của tứ giác ABCD.



Hình 4

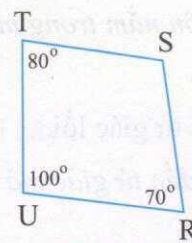
Định lí

Tổng số đo bốn góc trong một tứ giác bằng 360° .



THỬ TÀI BẠN

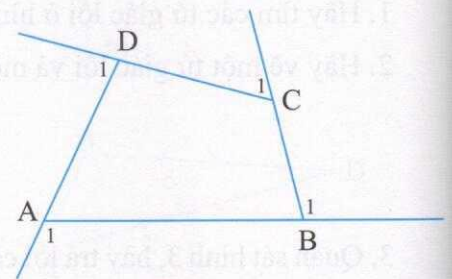
1. Tìm số đo góc S ở hình 5 :



Hình 5

2. Góc kề bù với một góc của tứ giác được gọi là góc ngoài của tứ giác.

Hãy tính tổng bốn góc ngoài $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1$ của tứ giác ABCD ở hình 6.



Hình 6



2. HÌNH THANG

Hoạt động

4

Hình 7b là hình vẽ minh họa một phần của chiếc thang tre ở hình 7a. Em có nhận xét gì về các bậc thang của chiếc thang ?



a)



b)

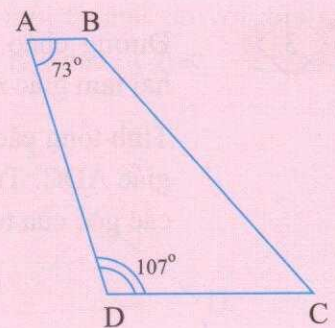
Hình 7

Hoạt động

5



a)



b)

Hình 8

Hình 8b là hình ảnh của phần đuôi một chiếc máy bay ở hình 8a.

Dùng thước đo góc đo số đo của cặp góc A và D của tứ giác ABCD ta được kết quả như trên hình 8b.

Dựa vào dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song đã học ở lớp 7, em rút ra nhận xét gì về mối quan hệ giữa hai cạnh AB và CD ?

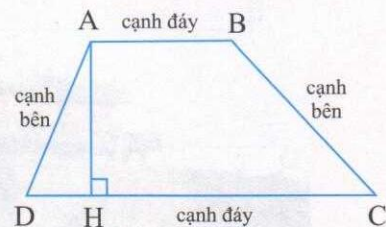
Định nghĩa

Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

Ví dụ : Tứ giác ABCD trên hình 8b có $AB \parallel CD$ là một hình thang.

Hình 9 là hình thang ABCD với $AB \parallel CD$. Ta có :

- Các đoạn thẳng AB, CD gọi là các **cạnh đáy** (hoặc **đáy**).
- Nếu $AB < CD$ thì ta còn gọi AB là đáy nhỏ, CD là đáy lớn.
- Các đoạn thẳng AD, BC gọi là các **cạnh bên**.
- AH là đường vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng DC, đoạn thẳng AH gọi là **đường cao** của hình thang.



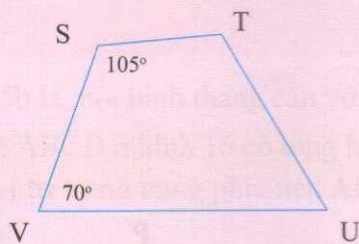
Hình 9

Hoạt động

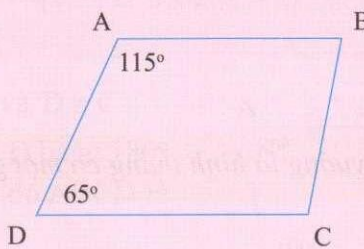
6

Quan sát hình 10a và 10b. Hãy chỉ ra hình nào là hình thang.

Em có nhận xét gì về hai góc kề một cạnh bên của hình thang.



a)



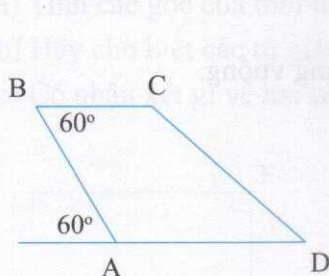
b)

Hình 10

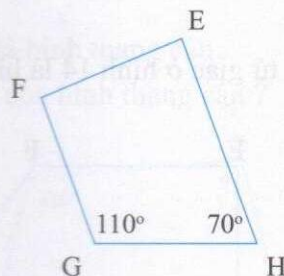


THỬ TÀI BẠN

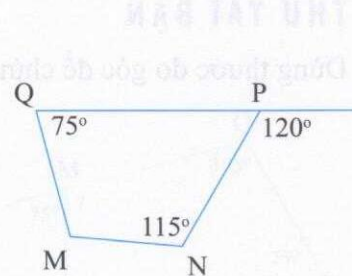
Tìm các tứ giác là hình thang trong hình 11 :



a)



b)



c)

Hình 11

Nhận xét

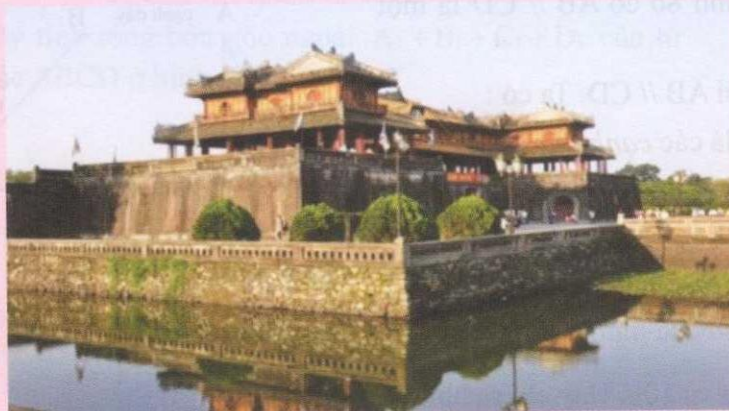
- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

♦ Hình thang vuông

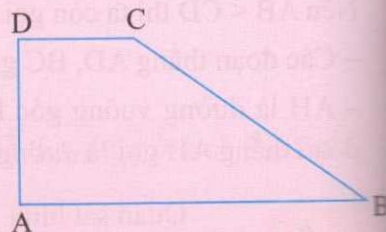
Hoạt động

7

Hình 12a là Cổng Ngọ Môn kinh thành Huế. Hình 12b là hình vẽ minh họa mặt trước chân thành. Hãy đo hai góc A và D rồi rút ra nhận xét về hai cạnh AB, CD của tứ giác ABCD.



a)



b)

Hình 12

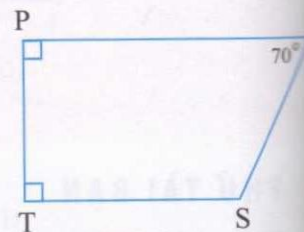
Định nghĩa

Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

Ví dụ :

Hình 12b là một hình thang vuông với $AB \parallel CD$ và $\hat{A} = 90^\circ$.

Hình 13 là một hình thang vuông với $PQ \parallel TS$ và $\hat{P} = 90^\circ$.

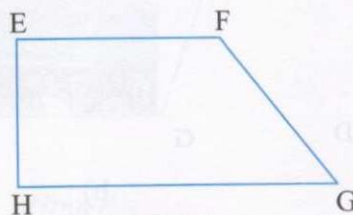


Hình 13



THỬ TÀI BẠN

Dùng thước đo góc để chứng minh tứ giác ở hình 14 là hình thang vuông.



Hình 14

3. HÌNH THANG CÂN

Hoạt động 8

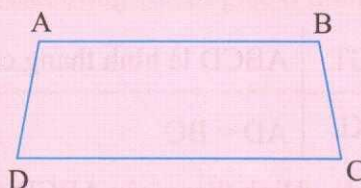
Hình 15b là hình ảnh của một mặt bên của tầng đế cột cờ Hà Nội. Dùng thước đo góc để đo hai góc A và D của tứ giác ABCD.

Suy ra tứ giác ABCD là hình gì ?

Hãy đo tiếp số đo của góc C, so sánh số đo góc C với góc D.



a)



b)

Hình 15

Định nghĩa

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

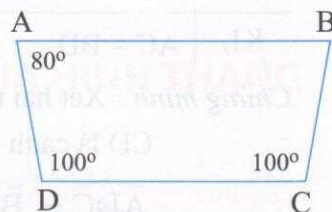
Tứ giác ABCD là hình thang cân (đáy AB, CD) $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ \widehat{C} = \widehat{D} \text{ hoặc } \widehat{A} = \widehat{B} \end{cases}$

Ví dụ :

a) Hình 15b là một hình thang cân với $AB \parallel CD$ và $\widehat{D} = \widehat{C}$.

b) Tứ giác ABCD ở hình 16 có tổng hai góc A và D bằng 180° mà lại ở vị trí trong cùng phía nên $AB \parallel CD$, do đó ABCD là hình thang.

Hình thang này có hai góc C và D bằng nhau (cùng bằng 100°) nên ABCD là hình thang cân.



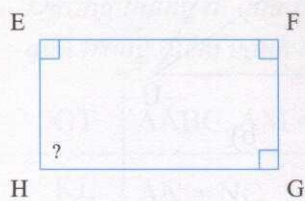
Hình 16



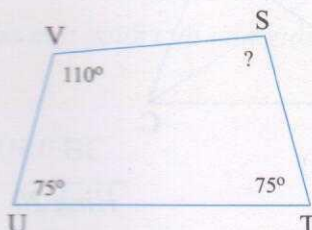
THỬ TÀI BẠN

Cho các tứ giác trong hình 17.

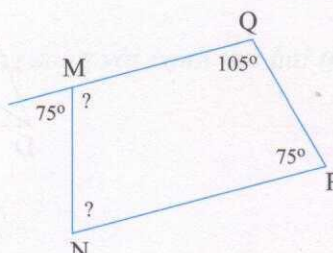
- Tính các góc của mỗi tứ giác.
- Hãy cho biết các tứ giác nào là hình thang cân.
- Có nhận xét gì về hai góc đối của hình thang cân ?



a)



b)



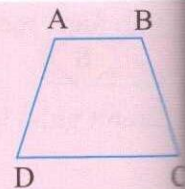
c)

Hình 17

♦ Tính chất

Hoạt động 9

Cho hình thang cân ABCD (h.18). Hãy đo độ dài hai cạnh bên AD và BC rồi rút ra kết luận.



Hình 18

Định lí 1

Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

GT | ABCD là hình thang cân ($AB \parallel CD$)

KL | $AD = BC$

Ví dụ : Hình thang cân ABCD trong hình 18 có $AD = BC$.

Chú ý : Hình thang cân thì có hai cạnh bên bằng nhau, nhưng hình thang có hai cạnh bên bằng nhau không phải luôn luôn là hình thang cân.

Hoạt động 10

Sử dụng thước để nối AC và BD ở hình 18. Hãy đo độ dài hai đường chéo AC và BD và rút ra kết luận.

Định lí 2

Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

GT | ABCD là hình thang cân ($AB \parallel CD$)

KL | $AC = BD$

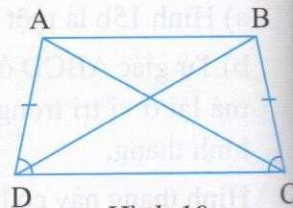
Chứng minh : Xét hai tam giác ADC và BCD (h.19), ta có :

CD là cạnh chung

$\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ (định nghĩa hình thang cân)

$AD = BC$ (cạnh bên của hình thang cân)

Do đó : $\triangle ADC = \triangle BCD$ (c.g.c), suy ra $AC = BD$.

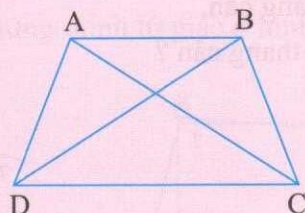


Hình 19

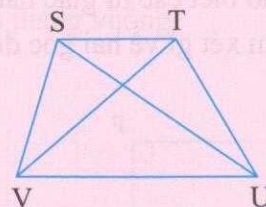
♦ Dấu hiệu nhận biết

Hoạt động 11

Cho các hình thang sau :



a)



b)

Hình 20

Em hãy đo độ dài hai đường chéo của mỗi hình thang và nêu nhận xét.

Định lý 3

Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

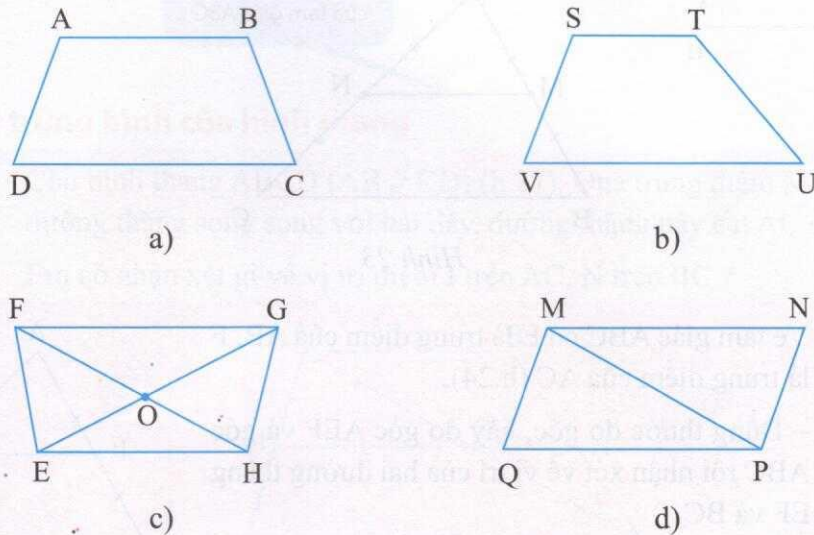
Dấu hiệu nhận biết hình thang cân :

1. Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.
2. Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.



THỬ TÀI BẠN

Hãy sử dụng thước đo góc và thước dài để tìm hình thang cân trong các tứ giác ở hình 21.



Hình 21

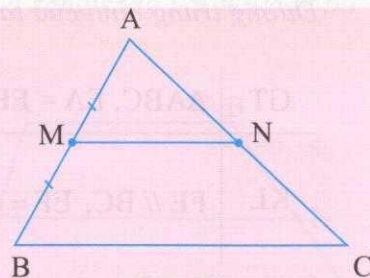
4. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

◆ Đường trung bình của tam giác

Hoạt động

12

Vẽ tam giác ABC, lấy M là trung điểm của AB. Qua M vẽ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này cắt AC ở N (h.22). Đo AN và NC rồi nêu nhận xét.



Hình 22

Định lý 1

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

GT	$\triangle ABC, AM = MB, MN \parallel BC$
KL	$AN = NC$



THỬ TÀI BẠN

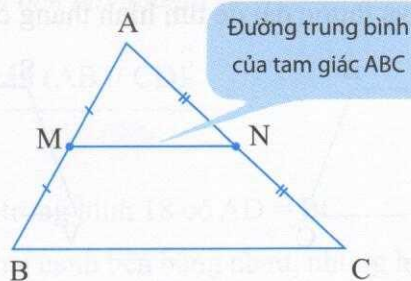
Ở hình 22, cho biết $AN = 6$ cm. Tính AC.

Định nghĩa

Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

Ví dụ :

Trên hình 23, M là trung điểm của AB, N là trung điểm của AC, đoạn thẳng MN gọi là **đường trung bình** của tam giác ABC.



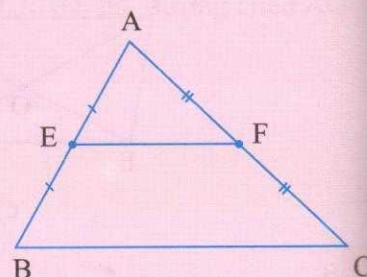
Hình 23

Hoạt động 13

Vẽ tam giác ABC có E là trung điểm của AB, F là trung điểm của AC (h.24).

– Dùng thước đo góc, hãy đo góc AEF và góc ABC rồi nhận xét về vị trí của hai đường thẳng EF và BC.

– Dùng thước chia khoảng, hãy đo EF và BC rồi nêu nhận xét.



Hình 24

Định lý 2

Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

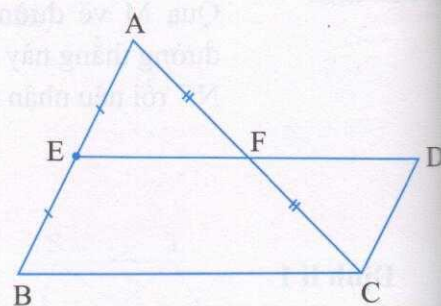
GT	$\triangle ABC, EA = EB, FA = FC$
KL	$FE \parallel BC, EF = \frac{1}{2} BC$

Chứng minh (h.25)

Từ C, kẻ đường thẳng song song với AB cắt đường thẳng EF tại D.

Ta có : $\triangle AEF = \triangle CDF$ (g.c.g), suy ra $EF = DF = \frac{1}{2} ED$.

Mặt khác $AE = EB$ (giả thiết) và $AE = CD$ nên $EB = CD$.



Hình 25

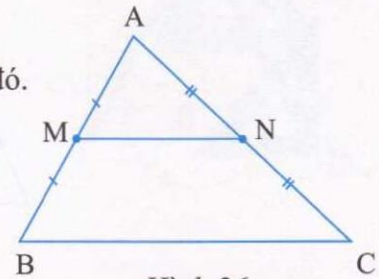
DEBC là hình thang (do $CD \parallel AB$) có hai đáy EB, CD bằng nhau nên hai cạnh bên ED, BC song song và bằng nhau.

Do đó $EF \parallel BC$ và $EF = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC$.



THỬ TÀI BẠN

- a) Vẽ tam giác ABC, rồi vẽ các đường trung bình của tam giác đó.
b) Ở hình 26, biết $MN = 24$ cm, tính độ dài BC.



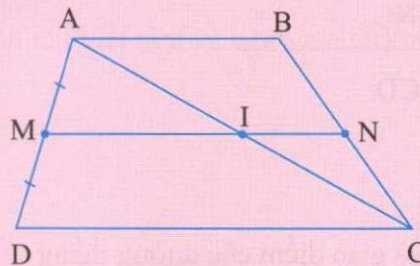
Hình 26

◆ Đường trung bình của hình thang

Hoạt động

14

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) (h.27). Qua trung điểm M của cạnh AD kẻ đường thẳng song song với hai đáy, đường thẳng này cắt AC ở I, cắt BC ở N.
Em có nhận xét gì về vị trí điểm I trên AC, N trên BC ?

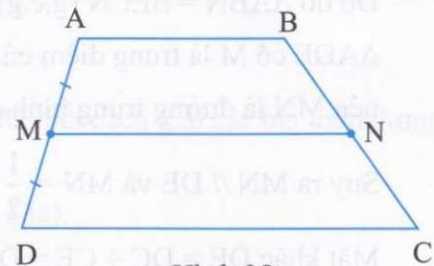


Hình 27

Định lý 3

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.

GT	ABCD là hình thang ($AB \parallel CD$) $AM = MD$, $MN \parallel AB$, $MN \parallel CD$
KL	$BN = NC$



Hình 28



THỬ TÀI BẠN

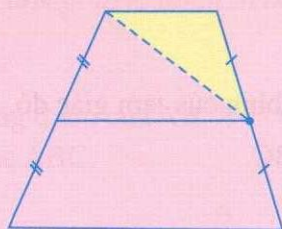
Ở hình 28, cho $BN = 8$ cm. Tính BC.

Trên hình 28, M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC. Đoạn thẳng MN gọi là đường trung bình của hình thang ABCD.

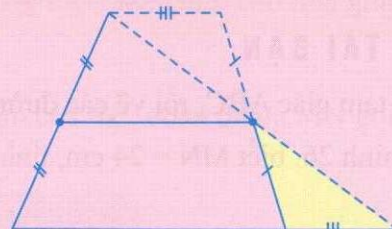
Định nghĩa

Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

Vẽ trên tờ giấy một hình thang và đường trung bình của hình thang đó. Tô màu tam giác nằm trong hình thang như hình 29a. Cắt rời tam giác đã tô màu khỏi hình thang và đặt vào vị trí như hình 29b. Hãy nêu dự đoán về độ dài đường trung bình của hình thang so với tổng độ dài hai đáy của hình thang.



a)



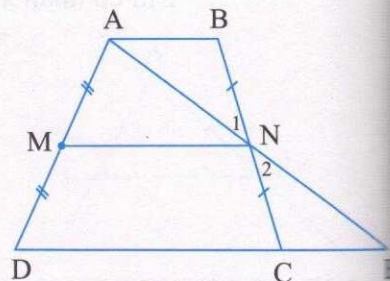
b)

Hình 29

Định lý 4

Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

GT	Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) $AM = MD, BN = NC$
KL	$MN \parallel AB, MN \parallel CD$ $MN = \frac{AB + CD}{2}$



Hình 30

Chứng minh. (h.30) Gọi E là giao điểm của đường thẳng AN với đường thẳng DC.

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle ECN$ có : $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$ (đối đỉnh)

$NB = NC$ (giả thiết)

$\widehat{ABN} = \widehat{ECN}$ (so le trong, $AB \parallel DE$).

Do đó $\triangle ABN = \triangle ECN$ (g.c.g), suy ra $AN = NE$ và $AB = CE$.

$\triangle ADE$ có M là trung điểm của AD, N là trung điểm của AE

nên MN là đường trung bình của $\triangle ADE$.

Suy ra $MN \parallel DE$ và $MN = \frac{1}{2} DE$.

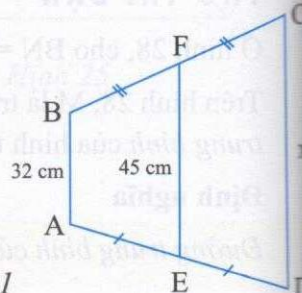
Mặt khác $DE = DC + CE = DC + AB$.

Như vậy $MN \parallel AB, MN \parallel DC$ và $MN = \frac{DC + AB}{2}$.



THỬ TÀI BẠN

Tính x trên hình 31.



Hình 31

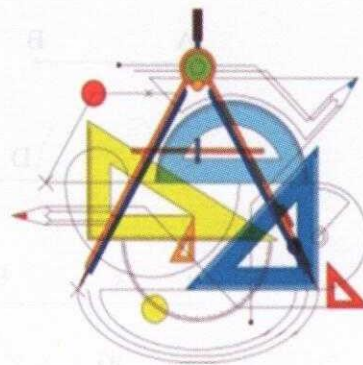


5. DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA

♦ Bài toán dựng hình

Ta đã biết vẽ hình bằng nhiều dụng cụ : thước thẳng, compa, êke, thước đo góc, ...

Ta xét các bài toán vẽ hình mà chỉ sử dụng hai dụng cụ là thước và compa, chúng được gọi là các *bài toán dựng hình*.



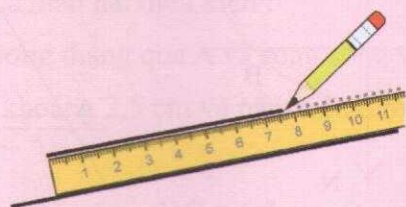
Hoạt động 16

a) Dùng thước thẳng, hãy vẽ :

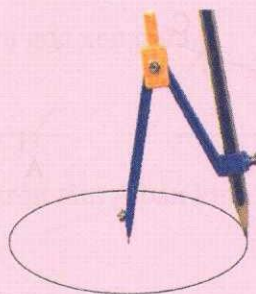
- Một đường thẳng khi biết hai điểm của nó.
- Một đoạn thẳng khi biết hai đầu mút của nó.
- Một tia khi biết gốc và một điểm của tia.

b) Dùng compa, hãy vẽ :

- Một đường tròn khi biết tâm và bán kính của nó.



a)



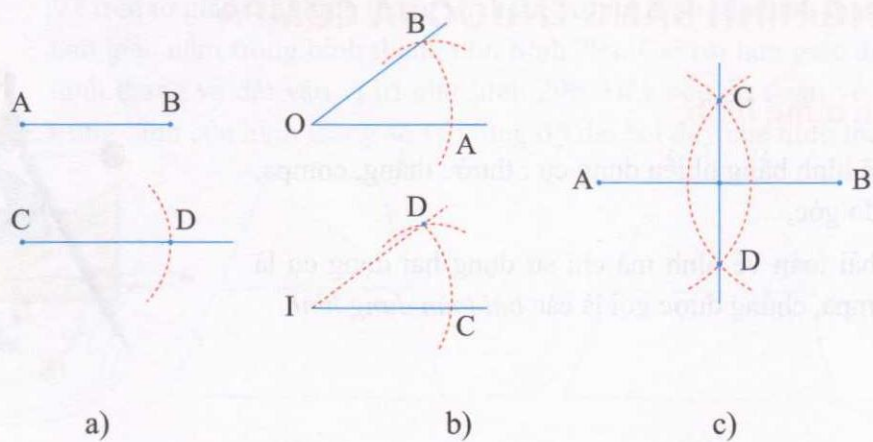
b)

Hình 32

♦ Các bài toán dựng hình đã biết

Ở hình học lớp 6 và hình học lớp 7, với thước và compa, ta đã biết cách giải các bài toán dựng hình sau :

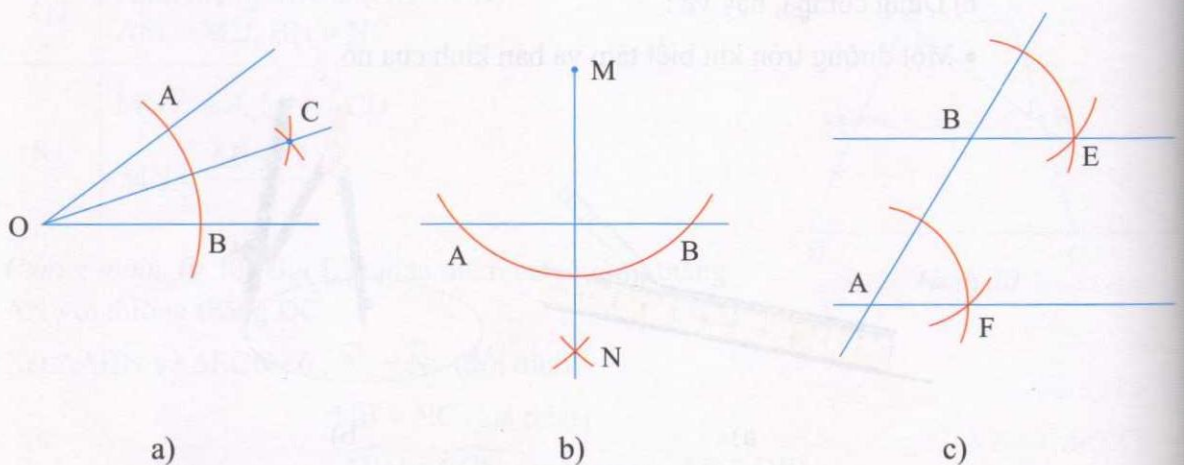
- Dựng một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước (h.33a).
- Dựng một góc bằng một góc cho trước (h.33b).
- Dựng đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước, dựng trung điểm của một đoạn thẳng cho trước (h.33c).
- Dựng tia phân giác của một góc cho trước (hình 34a).
- Qua một điểm cho trước, dựng đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước (hình 34b).



Hình 33

f) Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước (hình 34c).

g) Dựng tam giác biết ba cạnh, hoặc biết hai cạnh và góc xen giữa, hoặc biết một cạnh và hai góc kề.



Hình 34

Ta được sử dụng các bài toán dựng hình trên để giải các bài toán dựng hình khác.



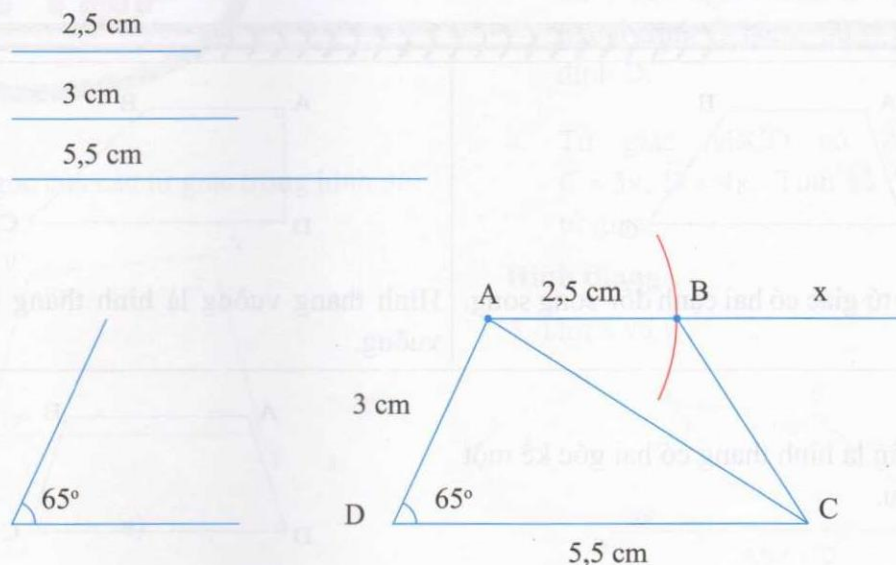
THỬ TÀI BẠN

a) Hãy dựng một tam giác đều.

b) Hãy dựng một góc bằng 30° .

♦ Dựng hình thang

Ví dụ : Dựng hình thang ABCD biết đáy $AB = 2,5 \text{ cm}$, đáy $CD = 5,5 \text{ cm}$, cạnh $AD = 3 \text{ cm}$, $\widehat{D} = 65^\circ$.



Hình 35

a) Phân tích

Giả sử dựng được hình thang ABCD thoả mãn yêu cầu của đề bài.

Ta thấy tam giác ADC dựng được vì biết hai cạnh và góc xen giữa.

Điểm B phải thoả mãn hai điều kiện :

- + B nằm trên đường thẳng qua A và song song với CD.
- + B cách A một khoảng 2,5 cm và nằm trên đường tròn tâm A bán kính 2,5 cm.

b) Cách dựng

- + Dựng $\triangle ADC$ có $\widehat{D} = 65^\circ$, $DC = 5,5$ cm, $DA = 3$ cm.
- + Dựng tia Ax song song với DC (tia Ax và điểm C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AD).
- + Dựng điểm B trên tia Ax sao cho $AB = 2,5$ cm. Kẻ đoạn thẳng BC.

c) Chứng minh

Tứ giác ABCD là hình thang vì $AB \parallel CD$.

Hình thang ABCD có $CD = 5,5$ cm, $\widehat{D} = 65^\circ$, $AD = 3$ cm, $AB = 2,5$ cm nên thoả mãn yêu cầu của bài toán.

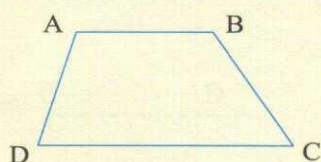
d) Biện luận

Ta luôn luôn dựng được một hình thang thoả mãn điều kiện của đề bài.

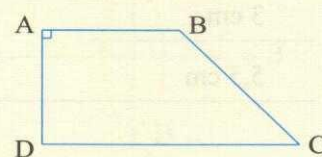


THỬ TÀI BẠN

Dựng hình thang ABCD, biết $\widehat{D} = 90^\circ$, đáy $CD = 3$ cm, cạnh bên $AD = 2$ cm, cạnh bên $BC = 3$ cm.

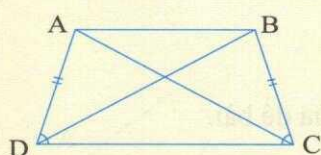
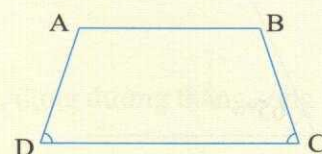


Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.



Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

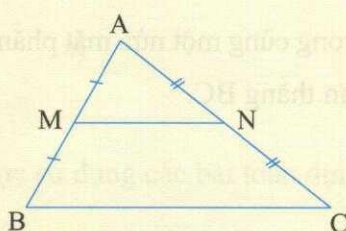


- + Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.
- + Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

• Dấu hiệu nhận biết

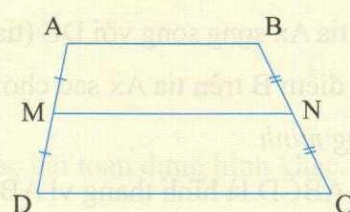
- + Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- + Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Đường trung bình của tam giác



- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.
- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Đường trung bình của hình thang

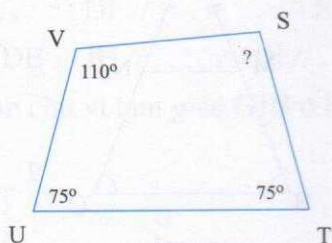


- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.
- Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

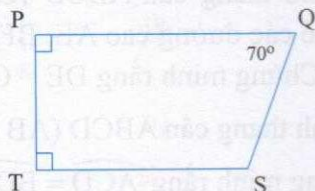
BÀI TẬP

Tứ giác

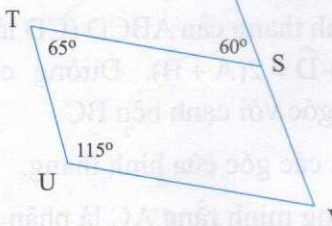
1. Tính các góc của các tứ giác trong hình 36:



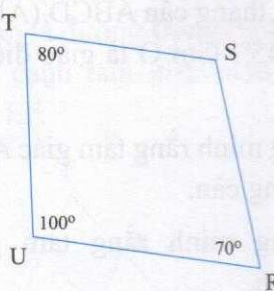
a)



b)



c)



d)

Hình 36

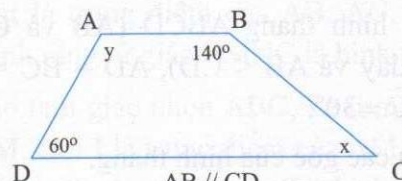
2. Tứ giác ABCD có $\hat{A} = 100^\circ$, góc ngoài đỉnh B bằng 110° , $\hat{C} = 75^\circ$. Tính góc D.

3. Tứ giác ABCD có góc ngoài đỉnh A bằng 65° , góc ngoài đỉnh B bằng 100° , góc ngoài đỉnh C bằng 60° . Tính góc ngoài đỉnh D.

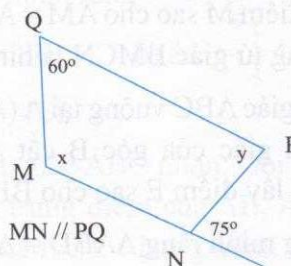
4. Tứ giác ABCD có $\hat{A} = x$, $\hat{B} = 2x$, $\hat{C} = 3x$, $\hat{D} = 4x$. Tính số đo các góc của tứ giác.

Hình thang

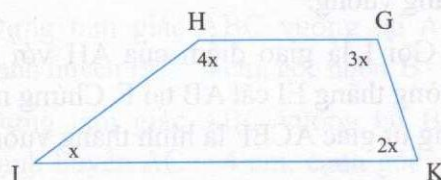
5. Tìm x và y :



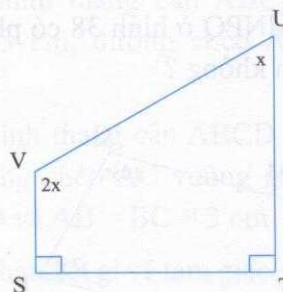
a)



b)



c)



d)

Hình 37

6. Tứ giác ABCD có $AB = AD$, BD là phân giác góc B. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

7. Cho tam giác nhọn ABC có AH là đường cao. Tia phân giác của góc B cắt AC tại M. Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với AH cắt AB tại N.

a) Chứng minh rằng tứ giác BCMN là hình thang.

b) Chứng minh rằng $BN = MN$.

8. Cho hình thang ABCD (AB và CD là hai đáy và $AB < CD$), $AD = BC = AB$, $\widehat{BDC} = 30^\circ$.

Tính các góc của hình thang.

9. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Trên tia AC lấy điểm N sao cho $AN = AB$, trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Chứng minh rằng tứ giác BMCN là hình thang.

10. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Trên BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$.

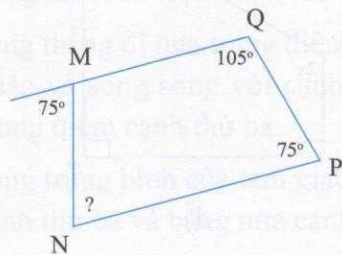
a) Chứng minh rằng $\triangle ABD = \triangle EBD$.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh rằng tứ giác ADEH là hình thang vuông.

c) Gọi I là giao điểm của AH với BD, đường thẳng EI cắt AB tại F. Chứng minh rằng tứ giác ACEF là hình thang vuông.

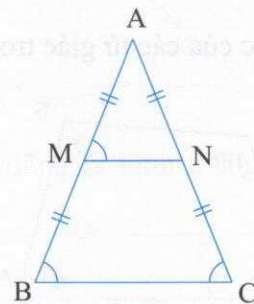
Hình thang cân

11. Tứ giác MNPQ ở hình 38 có phải là hình thang cân không?



Hình 38

12. Cho tam giác ABC cân tại A (h.39). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng tứ giác MNCB là hình thang cân.



Hình 39

13. Cho hình thang cân ABCD (CD là đáy lớn). Kẻ các đường cao AE, BF của hình thang. Chứng minh rằng $DE = CF$.

14. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$).

a) Chứng minh rằng $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$.

b) Gọi E là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $EA = EB$.

15. Cho hình thang cân ABCD (CD là đáy bé) có $\widehat{C} + \widehat{D} = 2(\widehat{A} + \widehat{B})$. Đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC.

a) Tính các góc của hình thang.

b) Chứng minh rằng AC là phân giác của góc DAB.

16. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{DBA} = 45^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh rằng tam giác AOB là tam giác vuông cân.

b) Chứng minh rằng tam giác DOC vuông cân.

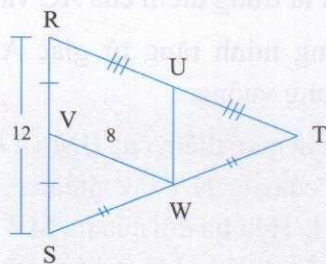
17. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE ($D \in AC, E \in AB$).

a) Chứng minh rằng $ED \parallel BC$.

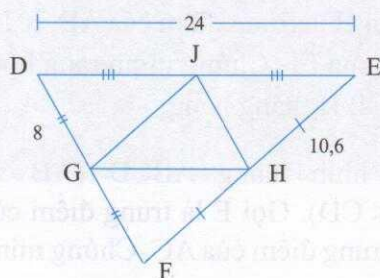
b) Chứng minh rằng BEDC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.

Đường trung bình của tam giác, của hình thang

18. a) Tính UW và RT trên hình 40a.
 b) Trên hình 40b, biết GJ, JH, GH là các đường trung bình của $\triangle DEF$.
 Hãy điền vào chỗ trống (...):
 $JG \parallel \dots$ $DF \parallel \dots$ $\dots \parallel EF$
 $\dots \parallel DE$ $JH \parallel \dots$ $GH \parallel \dots$
 c) Tính chu vi tam giác GJH ở hình 40b.



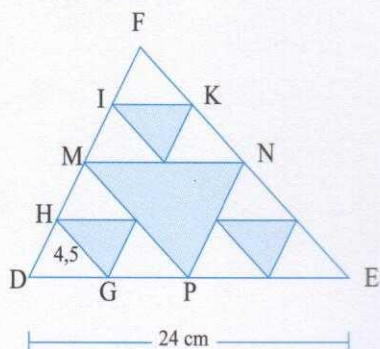
a)



b)

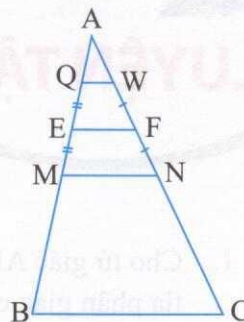
Hình 40

19. Trong hình 41, mỗi cạnh của tam giác màu xanh là đường trung bình tương ứng của các cạnh tam giác màu trắng. Hãy tính IK, EF.



Hình 41

20. Ở hình 42, cho biết MN là đường trung bình của tam giác ABC, EF là đường trung bình của hình thang QWNM.



Hình 42

- Biết $BC = 20$ cm,
 $EF = 3x$, $QW = x$.
 Tính x.
 21. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng tứ giác BMNC là hình thang.
 22. Cho tam giác nhọn ABC, kẻ trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM, đường thẳng CI cắt AB tại E. Từ M kẻ đường thẳng song song với CE cắt AB tại F. Chứng minh rằng :
 a) $EF = FB$; b) $AE = \frac{1}{3}AB$;
 c) $CE = 4EI$.
 23. Cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Kẻ đường cao AH. Chứng minh rằng tứ giác MNPH là hình thang cân.

Dựng hình

24. Dựng tam giác ABC vuông tại A, biết cạnh huyền $BC = 4$ cm, góc nhọn $\hat{B} = 65^\circ$.
 25. Dựng tam giác ABC vuông tại B, biết cạnh huyền $AC = 4$ cm, cạnh góc vuông $BC = 2$ cm.
 26. Dựng hình thang cân ABCD, biết đáy $CD = 3$ cm, đường chéo $AC = 4$ cm, $\hat{D} = 80^\circ$.
 27*. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có đường chéo AC vuông góc với cạnh bên AD và $AB = BC = 3$ cm.
 a) Có nhận xét gì về tam giác ACD, chứng minh điều đó. Tính các góc của tam giác ACD và của hình thang cân ABCD.
 b) Nêu cách dựng hình thang cân ABCD.

LUYỆN TẬP

1. Cho tứ giác ABCD có $AB = BC$ và CA là tia phân giác của góc BCD. Đường thẳng vuông góc với AC tại A cắt đường thẳng CD ở E. Gọi M là trung điểm của AC.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình thang.

b) Chứng minh rằng tứ giác ABME là hình thang.

2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm D và E sao cho $AD = AE$.

a) Chứng minh rằng BDEC là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang cân đó, biết $\widehat{BAC} = 40^\circ$.

3. Cho tứ giác ABCD, gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết rằng $OA = OB$, $OC = OD$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình thang cân.

4. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Vẽ trung tuyến BM và CN.

a) Chứng minh rằng tứ giác BNMC là hình thang.

b) Gọi O là giao điểm của BM và CN. Trên tia AO cắt BC tại E. Tính chu vi tam giác ABC khi biết chu vi tam giác MNE bằng 12 cm.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC.

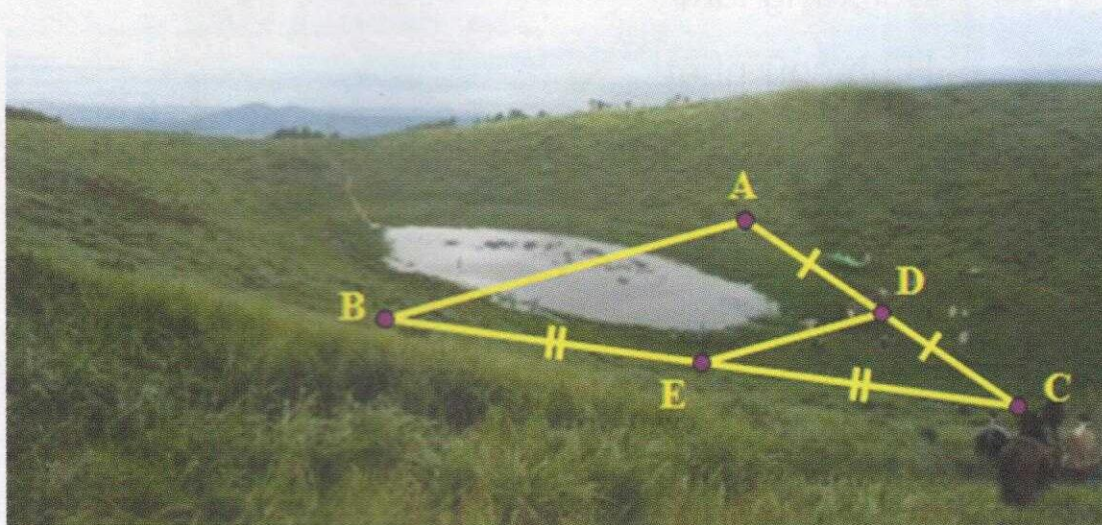
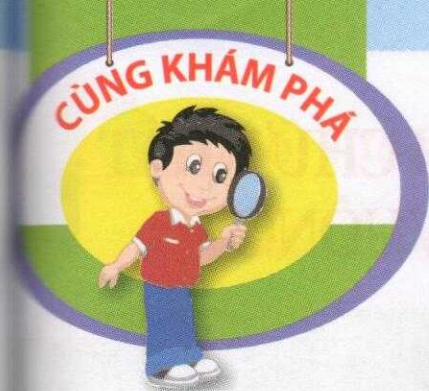
a) Chứng minh rằng tứ giác AMNB là hình thang vuông.

b) Gọi I là giao điểm của BM và AN. Trên tia đối của tia NA lấy điểm E sao cho $NE = NI$. Trên tia đối của tia MB lấy điểm F sao cho $MF = MI$. Chứng minh rằng $EF \parallel AB$.

c) Gọi H là trung điểm của AB, K là trung điểm của EF. Chứng minh rằng bốn điểm C, K, I, H thẳng hàng.

6. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi E là trung điểm của BD, F là trung điểm của AC. Chứng minh rằng

$$EF = \frac{CD - AB}{2}.$$



Trong Tài liệu dạy học Toán 7 – tập 1, các em đã biết người ta có thể dùng giác kế để đo khoảng cách giữa hai điểm bị ngăn cách bởi một chướng ngại vật.

Ngoài cách dùng giác kế người ta có thể ứng dụng đường trung bình của tam giác để đo khoảng cách giữa hai điểm.

Ở hình trên, để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B bị ngăn cách bởi một cái hồ người ta đã ứng dụng đường trung bình của tam giác. Khi đó chỉ cần biết độ dài đường trung bình DE của tam giác ABC thì sẽ biết được độ dài AB.

HÌNH BÌNH HÀNH - HÌNH CHỮ NHẬT HÌNH THOI - HÌNH VUÔNG

Đối xứng trục

Hình bình hành

Đối xứng tâm

Hình chữ nhật

Tập hợp các điểm cách đều một đường thẳng cho trước

Hình thoi

Hình vuông



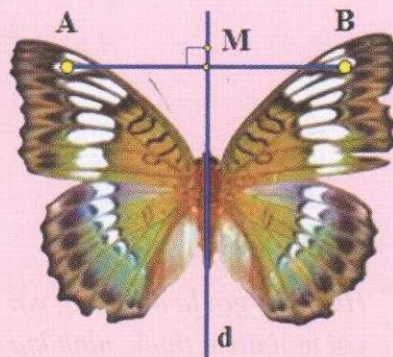
Dinh Thống Nhất là khu di tích lịch sử, văn hoá nổi tiếng của TP. Hồ Chí Minh. Nó thể hiện sự kết hợp hài hoà giữa nghệ thuật kiến trúc hiện đại và kiến trúc truyền thống với mặt tiền sử dụng nhiều hình có tính đối xứng.

1. ĐỐI XỨNG TRỰC

♦ Hai điểm đối xứng với nhau qua một đường thẳng

Hoạt động

1



Hình 1

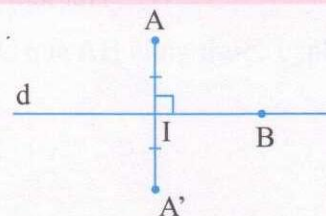
Đo độ dài MA , MB ở hình 1. Dự đoán xem đường thẳng d có là đường trung trực của đoạn thẳng AB không?

Hoạt động

2

Cho đường thẳng d và một điểm A không thuộc d . Hãy vẽ điểm A' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng AA' .

Ở hình 2, ta gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d , A là điểm đối xứng với điểm A' qua đường thẳng d , hai điểm A và A' là hai điểm đối xứng với nhau qua đường thẳng d .



Hình 2

Định nghĩa

Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Quy ước : Nếu điểm B nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng d cũng là điểm B (h.2).

♦ Hai hình đối xứng qua một đường thẳng

Hoạt động

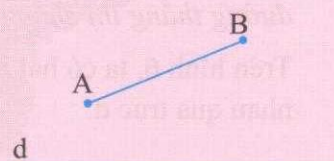
3

Cho đường thẳng d và đoạn thẳng AB (h.3).

Vẽ điểm A' đối xứng với A qua d .

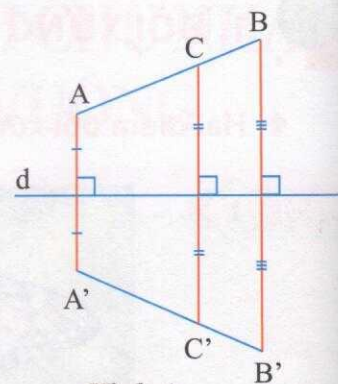
Vẽ điểm B' đối xứng với B qua d . Lấy điểm C thuộc đoạn thẳng AB . Vẽ điểm C' đối xứng với C qua d .

Dùng thước để kiểm chứng rằng điểm C' thuộc đoạn thẳng $A'B'$.



Hình 3

Trong hình 4, hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ gọi là hai đoạn thẳng đối xứng với nhau qua đường thẳng d .



Hình 4

Định nghĩa

Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hai hình đó.

Hoạt động

4

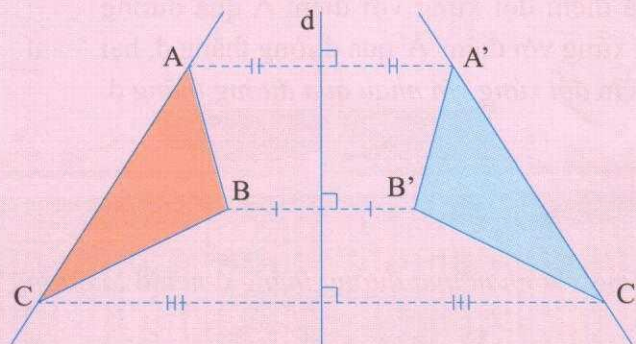
Quan sát hình 5, hãy điền vào chỗ trống (...)

Hai đoạn thẳng AB và ... đối xứng với nhau qua trục d .

Hai đường thẳng AC và ... đối xứng với nhau qua trục d .

Hai góc ... và $A'B'C'$ đối xứng với nhau qua trục d .

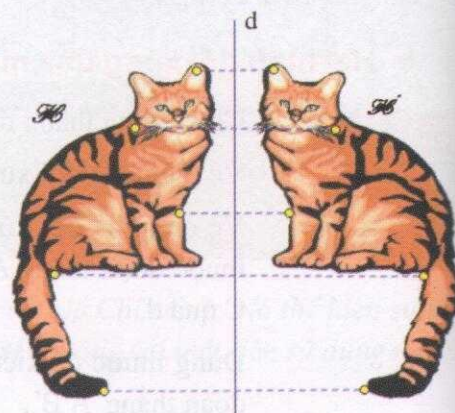
Hai tam giác ... và ... đối xứng với nhau qua trục d .



Hình 5

Người ta chứng minh được rằng : Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

Trên hình 6, ta có hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ đối xứng với nhau qua trục d .



Hình 6

♦ Hình có trục đối xứng

Hoạt động

5

Em hãy vẽ trục đối xứng hình chụp con chuồn chuồn ở hình 7.

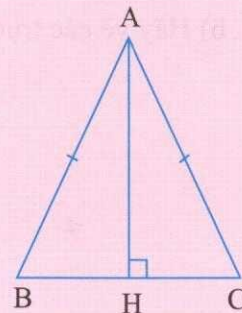


Hình 7

Hoạt động

6

Cho tam giác ABC cân tại A có đường cao AH (h.8). Tìm hình đối xứng với mỗi cạnh của tam giác ABC qua AH.



Hình 8

Ở hình 8, điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc cạnh của tam giác ABC qua AH cũng thuộc cạnh của tam giác ABC.

Ta nói đường thẳng AH là *trục đối xứng* của tam giác ABC.

Định nghĩa

Đường thẳng d gọi là *trục đối xứng* của hình $\mathcal{H}$ nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ qua đường thẳng d cũng thuộc hình $\mathcal{H}$.

Trong trường hợp này, ta nói rằng hình $\mathcal{H}$ có trục đối xứng.

Ví dụ : Các hình 9a, 9b dưới đây là các hình có trục đối xứng.



a)



b)

Hình 9

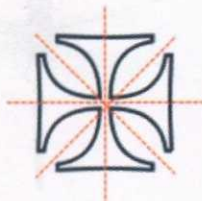


THỬ TÀI BẠN

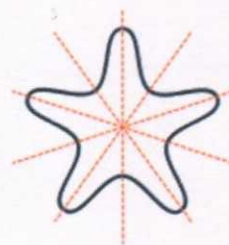
a) Mỗi hình sau có bao nhiêu trục đối xứng ?



a)



b)



c)

Hình 10

b) Hãy vẽ các trục đối xứng trong mỗi hình 11a, b, c.



a)



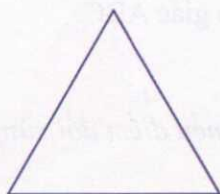
b)



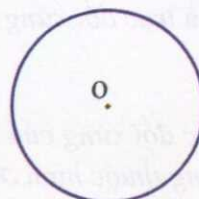
c)

Hình 11

c) Hình 12a, 12b có bao nhiêu trục đối xứng ?



a)

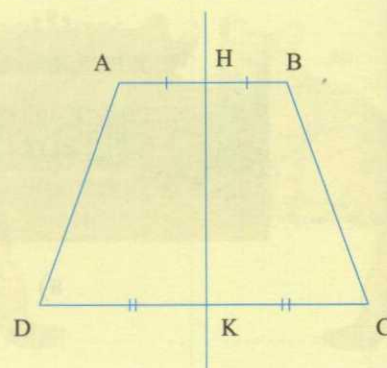


b)

Hình 12

Người ta chứng minh được định lí sau :

Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.



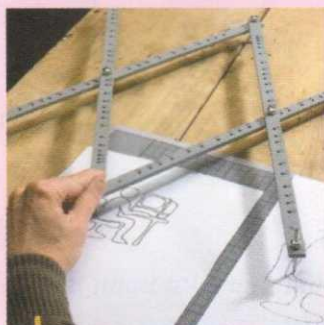
2. HÌNH BÌNH HÀNH

Hoạt động

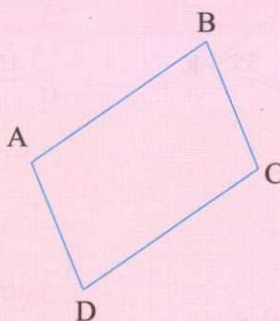
7

Hình 13b là hình ảnh của một thước vẽ truyền dùng để phóng to hay thu nhỏ một hình vẽ có sẵn.

Hãy dùng thước đo góc để đo số đo của các cặp góc A và D, A và B của tứ giác ABCD rồi rút ra nhận xét về mối quan hệ giữa các cặp cạnh AB, CD và AD, BC.



a)



b)

Hình 13

Định nghĩa

Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$

Ví dụ :

a) Tứ giác ABCD trong hình 13b là một hình bình hành.

b) Quan sát hình chụp các mái nhà ở phố cổ Hội An (h.14), ta thấy một mái nhà có dạng hình bình hành ABCD.



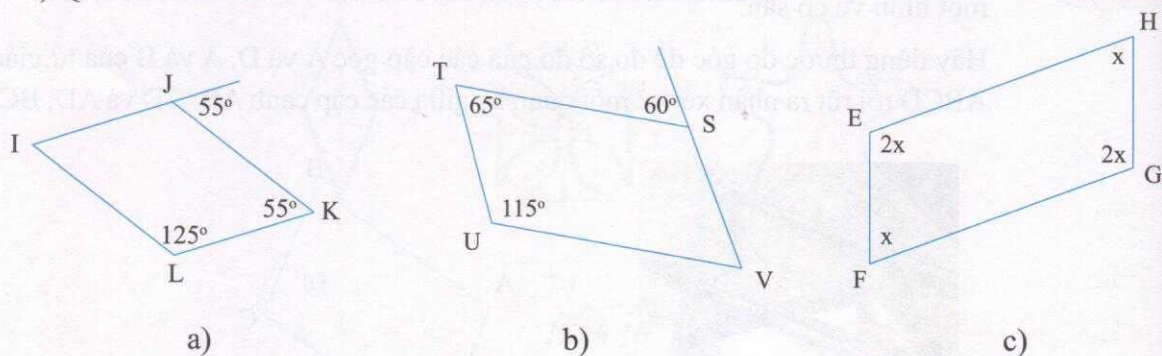
Hình 14



THỬ TÀI BẠN

a) Hãy tìm tiếp hai hình bình hành ở hình 14.

b) Quan sát hình 15 và cho biết hình nào là hình bình hành.

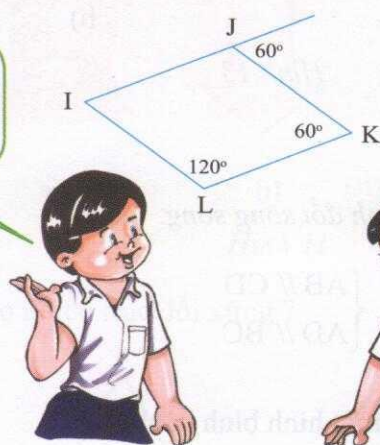


Hình 15



BẠN NÀO ĐÚNG ?

IJKL chỉ là hình bình hành, không phải là hình thang cân.



Dũng

IJKL vừa là hình bình hành, vừa là hình thang cân.



Lan

Theo em, bạn nào đúng ?

TÍNH CHẤT

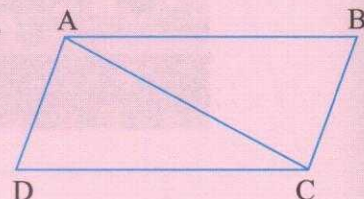
Hoạt động 8

Điền vào chỗ trống để chứng minh trong hình bình hành các cạnh đối bằng nhau, các góc đối bằng nhau và hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

a) Hình bình hành ABCD là hình thang có hai cạnh bên AD, BC song song với nhau nên $AD = \dots$; $\dots = CD$.

b) $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c.c.c) suy ra: $\widehat{B} = \widehat{\dots}$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có: $\widehat{\dots} = \widehat{C}$ (h.16).



Hình 16

c) Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COD$ (h.17) có :

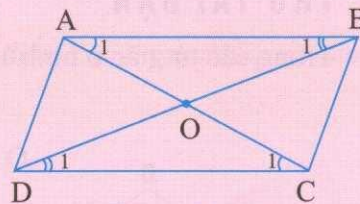
$AB = \dots\dots$ (cạnh đối hình bình hành)

$\dots\dots = \widehat{C_1}$ (so le trong, $AB \parallel CD$)

$\widehat{B_1} = \dots\dots$ (so le trong, $AB \parallel CD$).

Do đó $\triangle AOB = \triangle COD$ (g.c.g), suy ra :

$OA = \dots\dots$ và $\dots\dots = OD$.



Hình 17

Định lí

Trong hình bình hành :

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

♦ Dấu hiệu nhận biết

Hoạt động 9

Quan sát tứ giác ABCD trong hình 18, hãy điền vào chỗ trống (...) để chứng minh $AB \parallel CD$ và $AD \parallel BC$.

Từ đó, suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành.

Xét hai tam giác AOB và COD, ta có :

$OA = \dots\dots$

$\dots\dots = OD$

$\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (đối đỉnh).

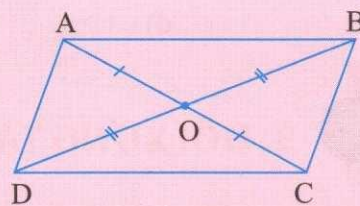
Do đó $\triangle \dots\dots = \triangle \dots\dots$

Suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{DCO}$

mà hai góc này ở vị trí so le trong, nên : $\dots\dots \parallel \dots\dots$ (1)

Chứng minh tương tự, ta cũng được : $\dots\dots \parallel \dots\dots$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABCD là hình ...



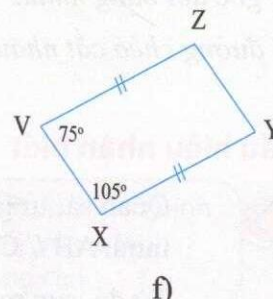
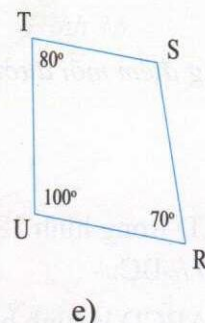
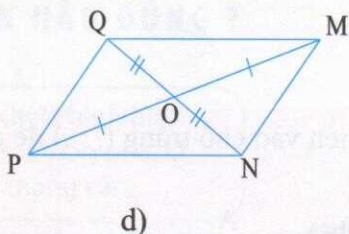
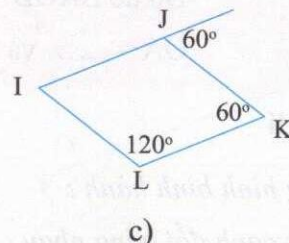
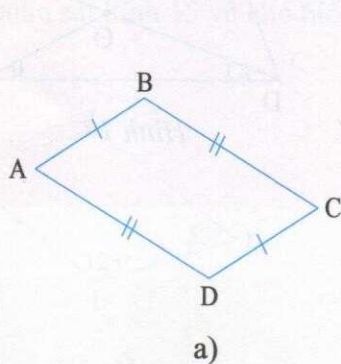
Hình 18

Dấu hiệu nhận biết hình bình hành

1. Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
2. Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
3. Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
4. Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
5. Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.



Trong các tứ giác ở hình 19, tứ giác nào là hình bình hành ?



Hình 19

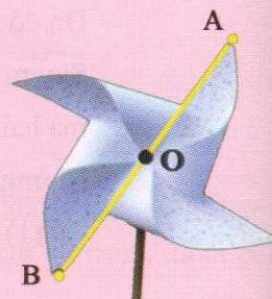


3. ĐỐI XỨNG TÂM

♦ Hai điểm đối xứng qua một điểm

Hoạt động 10

Ở hình 20, dùng thước chia khoảng đo độ dài OA, OB. Nêu nhận xét.



Hình 20

Hoạt động 11

Cho điểm O và điểm A. Hãy vẽ điểm A' sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng AA'.

Ở hình 21, ta gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua điểm O, A là điểm đối xứng với điểm A' qua điểm O, hai điểm A và A' là hai điểm đối xứng với nhau qua điểm O.



Hình 21

Định nghĩa

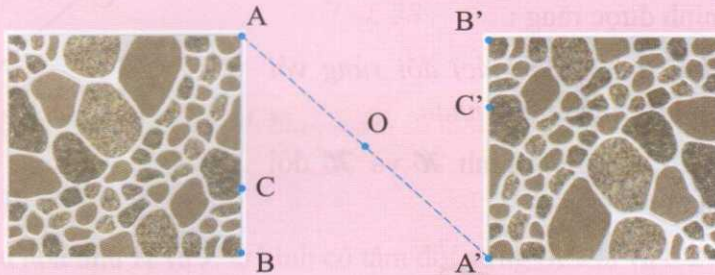
Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Quy ước. Điểm đối xứng với điểm O qua điểm O cũng là điểm O .

♦ Hai hình đối xứng với nhau qua một điểm

Hoạt động 12

Ở hình 22, O là trung điểm của đoạn thẳng AA' . Nối BB' , CC' . Nhận xét về vị trí điểm O đối với BB' và CC' .



Hình 22

Hoạt động 13

Cho điểm O và đoạn thẳng AB (h.23).

Vẽ điểm A' đối xứng với A qua O .

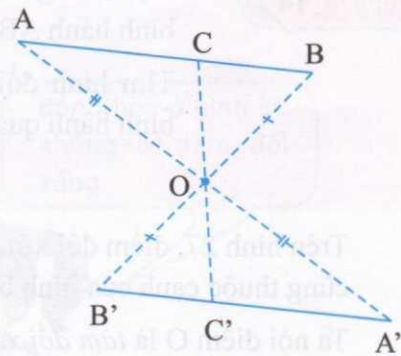
Vẽ điểm B' đối xứng với B qua O .

Lấy điểm C thuộc đoạn thẳng AB , vẽ điểm C' đối xứng với C qua O . Dùng thước kẻ để kiểm chứng rằng điểm C' thuộc đoạn thẳng $A'B'$.



Hình 23

Trên hình 24, hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ gọi là hai đoạn thẳng đối xứng với nhau qua điểm O .



Hình 24

Định nghĩa

Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại.

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình đó.

Trên hình 25, ta có :

Hai đoạn thẳng AC và $A'C'$ đối xứng với nhau qua tâm O .

Hai đường thẳng AB và $A'B'$ đối xứng với nhau qua tâm O .

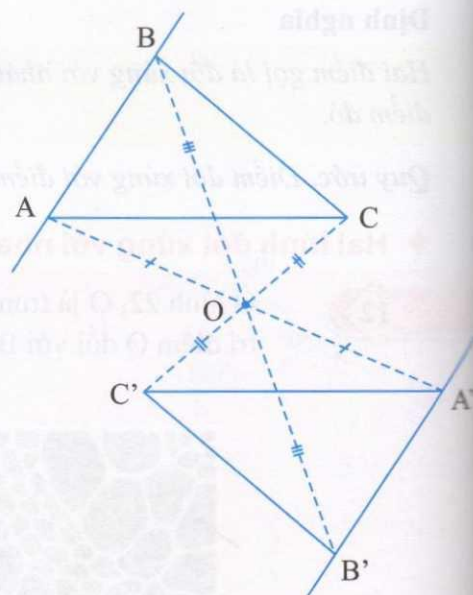
Hai góc ABC và $A'B'C'$ đối xứng với nhau qua tâm O .

Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đối xứng với nhau qua tâm O .

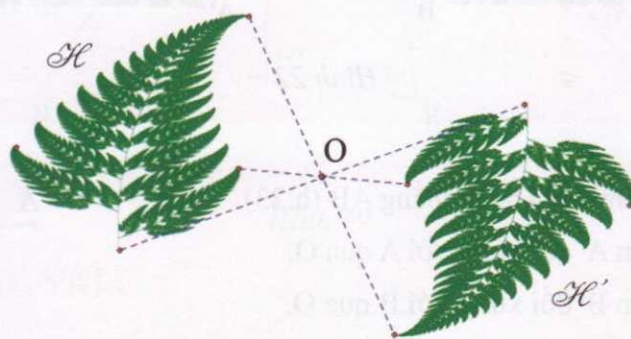
Người ta chứng minh được rằng :

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.

Ví dụ : Trên hình 26, ta có hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ đối xứng với nhau qua tâm O .



Hình 25



Hình 26

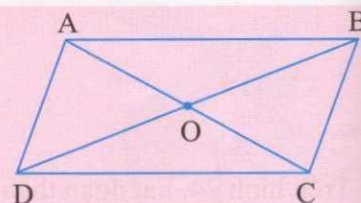
♦ Hình có tâm đối xứng

Hoạt động

14

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$ (h.27).

Tìm hình đối xứng với mỗi cạnh của hình bình hành qua điểm O .



Hình 27

Trên hình 27, điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc cạnh của hình bình hành $ABCD$ qua điểm O cũng thuộc cạnh của hình bình hành.

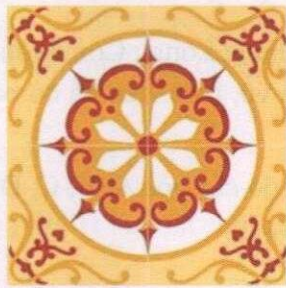
Ta nói điểm O là **tâm đối xứng** của hình bình hành $ABCD$.

Định nghĩa

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ qua điểm O cũng thuộc hình $\mathcal{H}$.

Trong trường hợp này, ta nói rằng hình $\mathcal{H}$ có tâm đối xứng.

Ví dụ : Hình 28a, 28b là các hình có tâm đối xứng.



a)



b)

Hình 28

Định lí

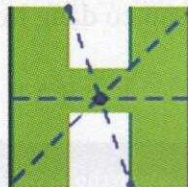
Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.



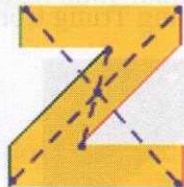
THỬ TÀI BẠN

a) Các chữ cái in hoa như H và Z là hình có tâm đối xứng (h.29a và h.29b). Hãy tìm thêm một vài chữ cái in hoa khác có tâm đối xứng.

b) Hãy xác định tâm đối xứng của hình 29c.



a)



b)



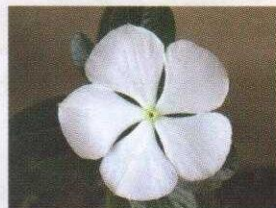
c)

Hình 29



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Bông hoa ở hình 30 có tâm đối xứng.



Hình 30

Bông hoa ở hình 30 không có tâm đối xứng.



Dũng



Mai

Theo em, bạn nào đúng ?

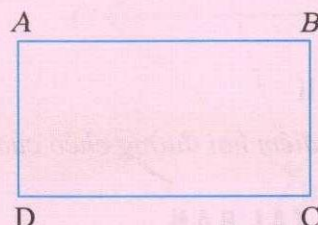


4. HÌNH CHỮ NHẬT

Hoạt động 15

Di tích thời nhà Lê trong thành Thăng Long : Con đường đi từ cổng Đoan Môn vào điện Kính Thiên được lát đá vôi, mỗi viên đá có bề mặt là dạng hình chữ nhật được minh hoạ bởi hình 31.

Hãy dùng thước đo góc để đo số đo các góc A, B, C, D ở hình 31.



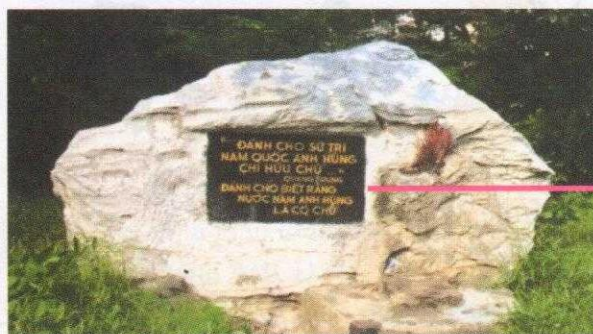
Hình 31

Định nghĩa

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Tứ giác ABCD là hình chữ nhật $\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$.

Ví dụ : Bia đá có khắc câu nói của vua Quang Trung trong hình sau có dạng hình chữ nhật.



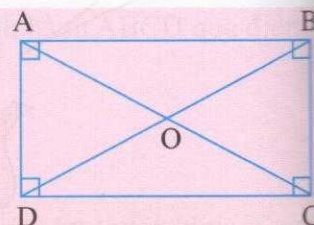
Đánh cho sử tri
Nam quốc anh hùng
Chỉ hữu chủ
QUANG TRUNG
Đánh cho biết rằng
Nước Nam anh hùng
Là có chủ

Chú ý : Từ định nghĩa hình chữ nhật, ta suy ra : Hình chữ nhật cũng là hình thang cân, cũng là hình bình hành.

Hoạt động 16

Từ tính chất hai đường chéo của hình thang cân và hình bình hành, hãy suy ra tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật.

Kiểm chứng lại bằng cách dùng thước đo (h.32).



Hình 32

Tính chất

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

◆ Dấu hiệu nhận biết

Hoạt động

17

Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$ (h.33). Hãy điền vào chỗ trống (. . .) để chứng minh tứ giác đó là hình chữ nhật.

GT	$\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$
KL	ABCD là hình chữ nhật

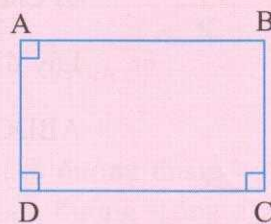
Tứ giác ABCD có : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = \dots$ (. . .)

Suy ra $\widehat{B} = \dots$

Mà $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{D} = \dots$ (giả thiết)

Do đó $\widehat{B} = \dots$

Tứ giác ABCD có nên là hình chữ nhật.



Hình 33

Dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật

1. Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
2. Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
3. Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
4. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

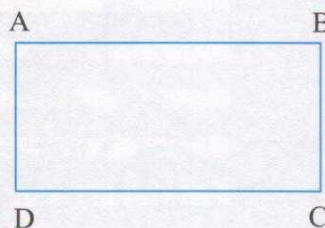


THỬ TÀI BẠN

- a) Hãy sử dụng ê ke để sau 3 lần đo có thể xác định khung cửa sổ ở hình 34a có phải là hình chữ nhật hay không.
- b) Hãy sử dụng một cuộn dây để xác định khung cửa sổ ở hình 34a có là hình chữ nhật hay không.
- c) Hãy sử dụng compa để kiểm tra tứ giác ở hình 34b có phải là hình chữ nhật không.



a)



b)

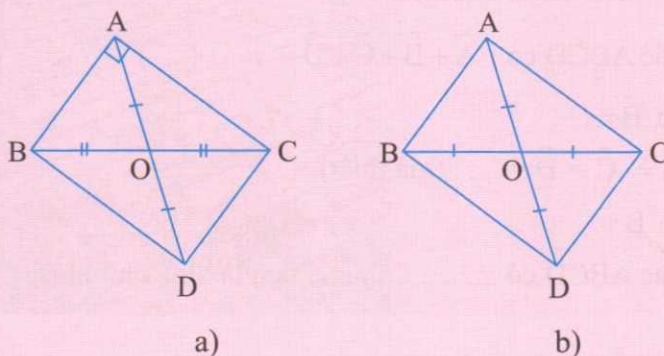
Hình 34

Hoạt động 18

a) Cho tam giác ABC vuông tại A, O là trung điểm BC. Lấy điểm D đối xứng với điểm A qua O (h.35a). Chứng minh rằng tứ giác ABDC là hình chữ nhật.

b) Cho tam giác ABC có điểm O thuộc BC sao cho $OA = OB = OC = \frac{1}{2} BC$.

Lấy điểm D đối xứng với điểm A qua O (h.35b). Chứng minh rằng tứ giác ABDC là hình chữ nhật.



Hình 35

Định lý

1. Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền.
2. Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.



THỬ TÀI BẠN

Cho tam giác ABC vuông tại B có I là trung điểm AC.

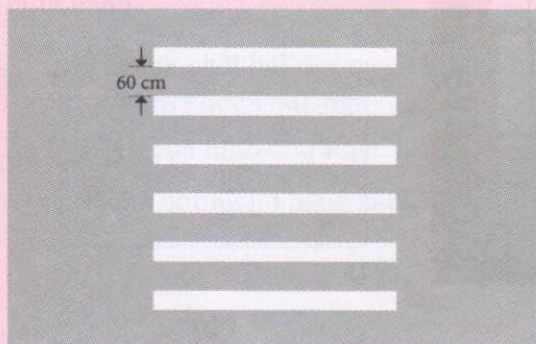
Tính độ dài BI, biết $BA = 4$, $BC = 3$.

5. TẬP HỢP CÁC ĐIỂM CÁCH ĐỀU MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

◆ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Hoạt động 19

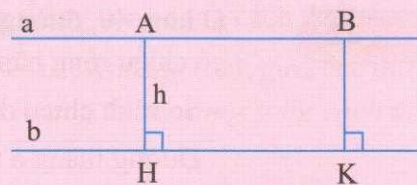
Hình 36 cho biết quy định về việc kẻ vạch sơn đường dành cho người đi bộ. Em có nhận xét gì về khoảng cách các vạch sơn đó ?



Hình 36

Cho hai đường thẳng song song a và b (h.37). Gọi A và B là hai điểm bất kì thuộc đường thẳng a ; AH và BK là các đường vuông góc kẻ từ A và B đến đường thẳng b . Gọi độ dài AH là h .

Tính độ dài BK theo h .



Hình 37

Ta rút ra nhận xét: Mọi điểm thuộc đường thẳng a trên hình 37 cách đường thẳng b một khoảng bằng h . Tương tự, mọi điểm thuộc đường thẳng b cũng cách đường thẳng a một khoảng bằng h . Ta nói h là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b .

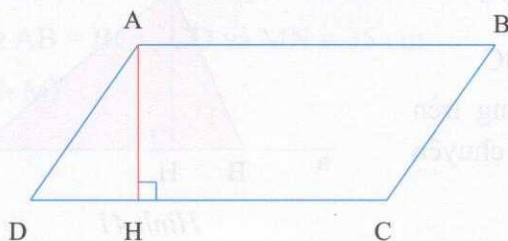
Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

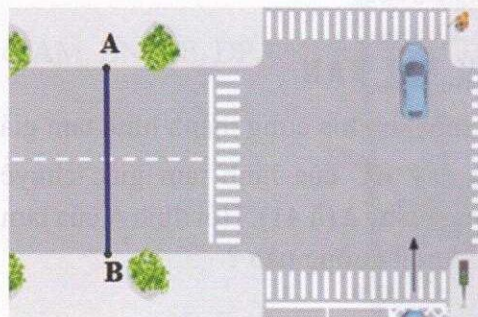
Ví dụ:

Ở hình 38a, AH là khoảng cách giữa hai cạnh AB , DC của hình bình hành $ABCD$.

Hình 38b, AB là khoảng cách giữa hai lề đường (chiều rộng con đường) của hình vẽ một phần con đường.



a)

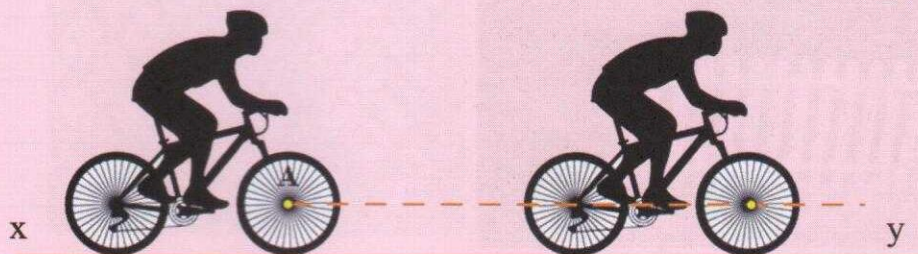


b)

Hình 38

♦ Tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước

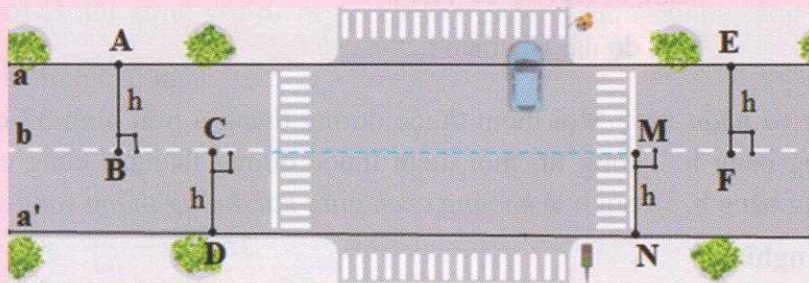
Một vận động viên xe đạp chạy xe trên một quãng đường phẳng (h.39). Hỏi trục A của bánh xe trước di động trên đường nào?



Hình 39

Ở hình 40, đường thẳng b (vạch đứt quãng) chia con đường thành 2 làn đường có chiều rộng bằng nhau.

- So sánh chiều dài các đoạn thẳng AB , CD , MN , EF .
- Đường thẳng a và đường thẳng a' có song song với nhau không? Vì sao?



Hình 40

Tính chất

Các điểm cách đường thẳng b một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h .

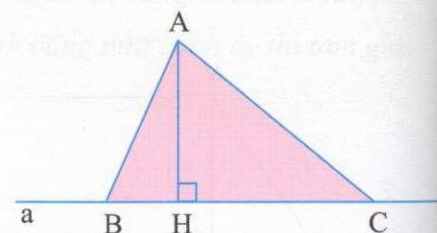
Ví dụ: Ở hình 40, các điểm A , E , D , N là các điểm cách đều đường thẳng b một khoảng bằng h cho trước.



THỬ TÀI BẠN

Cắt một tấm bìa cứng thành hình tam giác ABC .

Cho đáy BC của hình tam giác chuyển động trên đường thẳng a (h.41). Hỏi đỉnh A của tam giác chuyển động trên đường nào?



Hình 41

Nhận xét

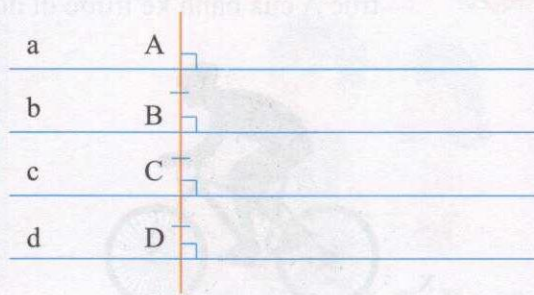
Từ định nghĩa khoảng cách giữa hai đường thẳng song song và tính chất trên, ta có:

Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h .

♦ Đường thẳng song song cách đều



a)



b)

Hình 42

Hàng rào gỗ trong hình 42a cho ta hình ảnh của các đường thẳng song song cách đều.

Ở hình 42b, các đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và các khoảng cách giữa các đường thẳng a và b, b và c, c và d bằng nhau. Ta gọi chúng là các đường thẳng song song cách đều.

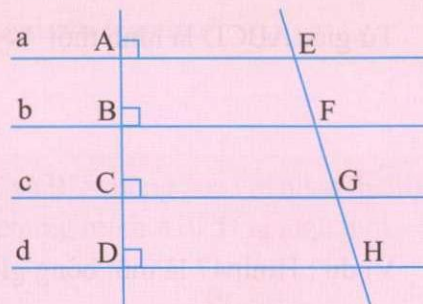
Hoạt động 23

Cho hình 43, trong đó các đường thẳng a, b, c, d song song với nhau.

Chứng minh rằng :

a) Nếu các đường thẳng a, b, c, d song song và cách đều thì $EF = FG = GH$.

b) Nếu $EF = FG = GH$ thì các đường thẳng a, b, c, d song song và cách đều.



Hình 43

Định lý

– Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

– Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.



THỬ TÀI BẠN

Ở hình 44, đường thẳng AD lần lượt vuông góc với AM, BN, CE, DF.

Biết $AB = BC = CD$ và $MN = 35$ cm.

Tính MF.



Hình 44

6. HÌNH THOI

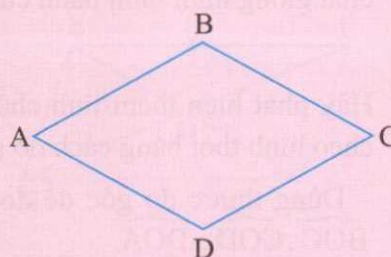
Hoạt động 24

Hình 45a là hình chụp tấm lưới thép được dệt thành nhiều mắt, mỗi mắt có dạng hình thoi.

Hình 45b là hình ảnh của một mắt lưới. Hãy đo độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA và nhận xét.



a)



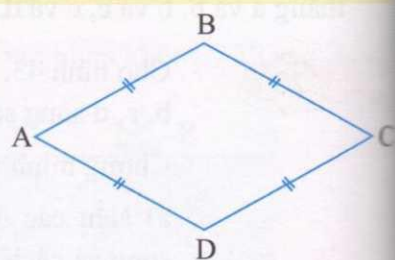
b)

Hình 45

Định nghĩa

Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Tứ giác ABCD là hình thoi $\Leftrightarrow AB = BC = CD = DA$.



Hình 46

Ví dụ : Hình 47 là một bông gió với các hình thoi ở giữa.

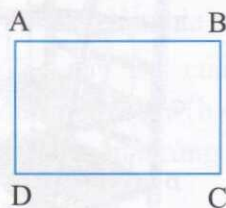


Hình 47

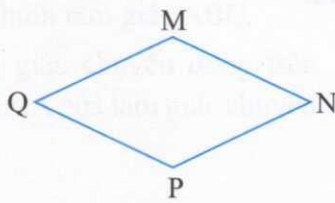


THỬ TÀI BẠN

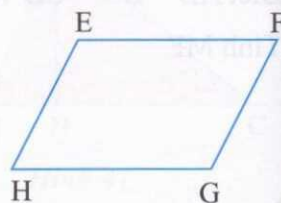
Quan sát các hình dưới đây và dự đoán hình nào là hình thoi, sau đó dùng thước để kiểm tra lại.



a)



b)



c)

Hình 48

♦ Tính chất

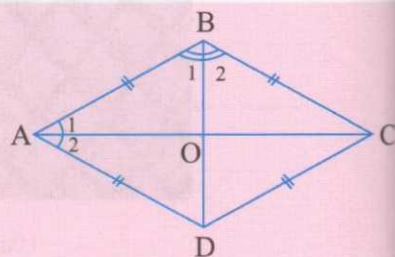
Hoạt động 25

Từ định nghĩa hình thoi, ta suy ra hình thoi cũng là hình bình hành nên hình thoi có tất cả những tính chất của hình bình hành. Hãy phát biểu những tính chất giống hình bình hành của hình thoi.

Hoạt động 26

Hãy phát hiện thêm tính chất của hai đường chéo hình thoi bằng cách đo sau (h.49) :

- Dùng thước đo góc để đo các góc $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$.
- Dùng thước đo góc để đo các góc $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$, $\widehat{B_1}$, $\widehat{B_2}$.



Hình 49

Định lý

Trong hình thoi :

1. Hai đường chéo vuông góc nhau.
2. Hai đường chéo cũng là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

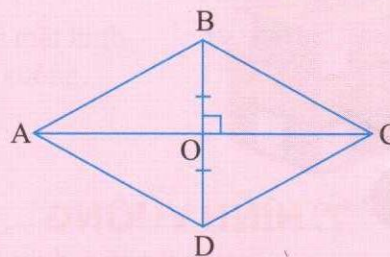
♦ Dấu hiệu nhận biết

Hoạt động

27

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC và BD vuông góc với nhau (h.50).
Hãy sắp xếp các câu sau theo đúng thứ tự để chứng minh ABCD là hình thoi.

- a) Xét $\triangle AOB$ và $\triangle AOD$ có :
- b) $OB = OD$ (tính chất đường chéo hình bình hành)
- c) Suy ra $\triangle AOB = \triangle AOD$ (c.g.c)
- d) $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} = 90^\circ$ ($AC \perp BD$)
- e) Mà $AB = CD$ và $AD = BC$ (ABCD là hình bình hành)
- f) OA là cạnh chung
- g) Do đó $AB = AD$
- h) Vậy $AB = BC = CD = DA$, suy ra ABCD là hình thoi.



Hình 50

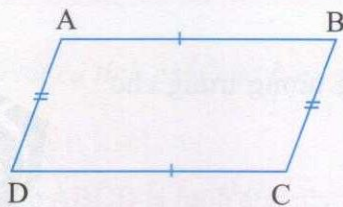
Dấu hiệu nhận biết hình thoi

1. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
2. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
3. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
4. Hình bình hành có một đường chéo cũng là phân giác của một góc là hình thoi.

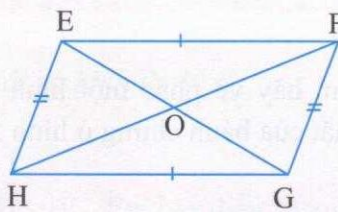


THỬ TÀI BẠN

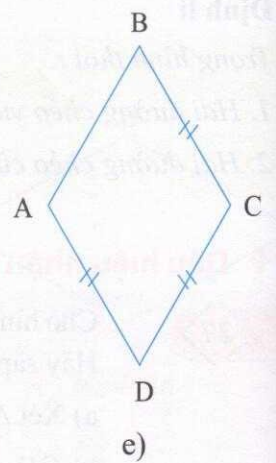
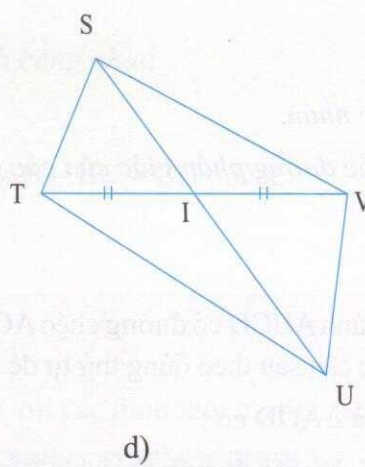
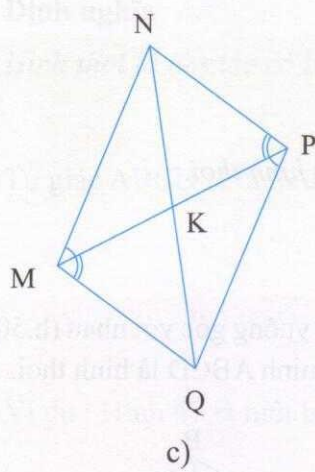
Em có thể thêm một điều kiện ở mỗi hình để các tứ giác sau trở thành hình thoi ?



a)



b)



Hình 51

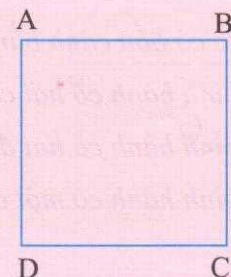


7. HÌNH VUÔNG

Hoạt động 28

Hình 52a là hình chụp trò chơi dân gian nhảy lò cò. Trong trò chơi này, các em sẽ nhảy trên các ô hình vuông.

Hình 52b là hình ảnh của một hình vuông như thế. Em hãy đo các góc và các cạnh của hình.



a)

b)

Hình 52

Hoạt động 29

Em hãy vẽ phác một hình vuông tượng trưng cho mặt của bánh chưng ở hình 53.

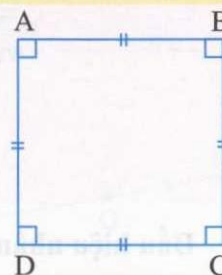


Hình 53

Định nghĩa

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

Tứ giác ABCD là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = BC = CD = DA. \end{cases}$



Ví dụ : Hình 54 là hình chụp một khối vuông Rubik gồm 6 mặt hình vuông, mỗi mặt được ghép bởi 9 miếng có bề mặt là hình vuông.



Hình 54

✓ BẠN NÀO ĐÚNG ?

Hình vuông là hình thang cân có một góc vuông.



Dũng

Hình vuông là hình thang vuông có cạnh bên bằng cạnh đáy.



Mai

Theo em, bạn nào đúng ?

Hoạt động 30

Điền vào chỗ trống :

Vì hình vuông có bốn góc vuông, nên hình vuông cũng là hình

Vì hình vuông có bốn cạnh bằng nhau nên hình vuông cũng là hình

Như vậy, hình vuông vừa là hình vừa là hình

Tính chất

Hình vuông có tất cả tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

♦ Dấu hiệu nhận biết

Hoạt động 31

Cho ABCD là hình chữ nhật có $AB = BC$. Em hãy điền vào chỗ trống để chứng minh rằng ABCD là hình vuông.

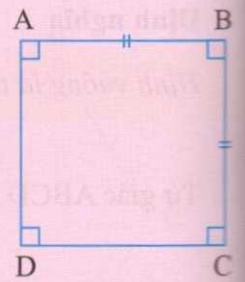
Ta có : ABCD là hình chữ nhật (gt)

$\Rightarrow AB = \dots$

Mà $AB = \dots$ và $BC = \dots$ (hai cạnh đối hình chữ nhật)

$\Rightarrow \dots = \dots = \dots = \dots$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABCD là hình (tứ giác có 4 góc vuông và 4 cạnh bằng nhau).



Hình 55

Dấu hiệu nhận biết hình vuông

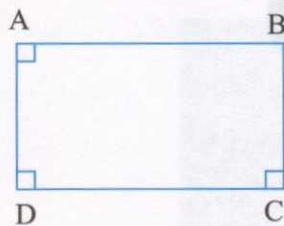
1. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
2. Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
3. Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.
4. Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
5. Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

Nhận xét : Một tứ giác vừa là hình thoi, vừa là hình chữ nhật thì tứ giác đó là hình vuông.

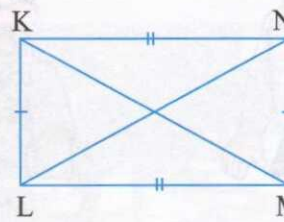


THỬ TÀI BẠN

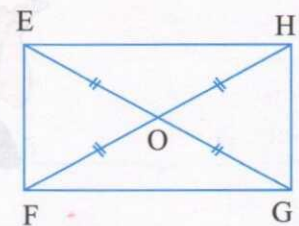
Em có thể thêm một điều kiện để các tứ giác nào sau đây trở thành hình vuông ?



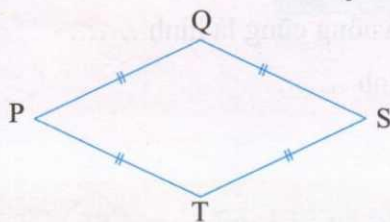
a)



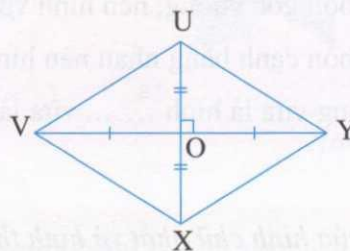
b)



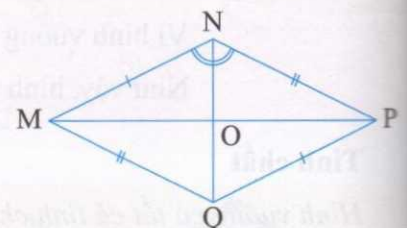
c)



d)



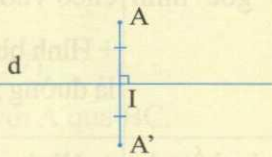
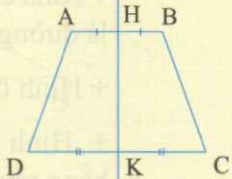
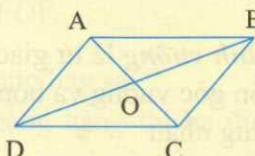
e)

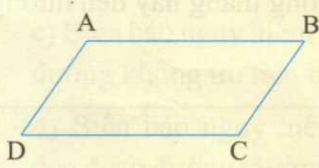
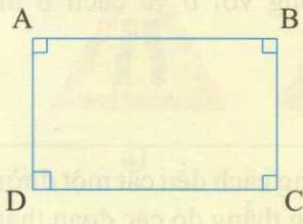


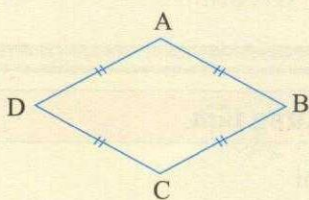
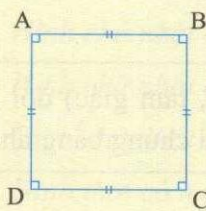
f)

Hình 56

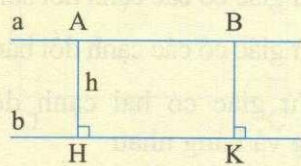
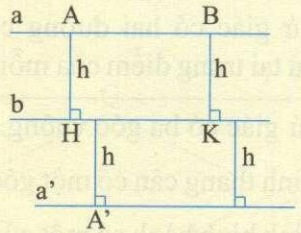
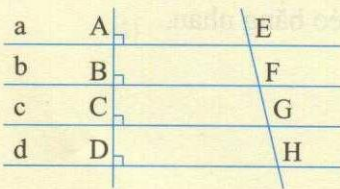
GHI NHỚ

Đối xứng trục	Đối xứng tâm
Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó. 	Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó. 
Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.	Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.
Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của một hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó. 	Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó. 

Định nghĩa	Tính chất	Dấu hiệu nhận biết
Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song. 	Trong hình bình hành : + Các cạnh đối bằng nhau + Các góc đối bằng nhau + Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.	+ Tứ giác có các cạnh đối song song + Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau + Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau + Tứ giác có các góc đối bằng nhau + Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông. 	+ Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Áp dụng vào tam giác : + Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền. + Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó vuông.	+ Tứ giác có ba góc vuông. + Hình thang cân có một góc vuông + Hình bình hành có một góc vuông + Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.

 Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.	Trong hình thoi : + Hai đường chéo vuông góc với nhau + Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc hình thoi.	+ Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau + Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau + Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau + Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc.
 Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau	Hình vuông có đủ tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.	+ Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau + Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau + Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc + Hình thoi có một góc vuông + Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

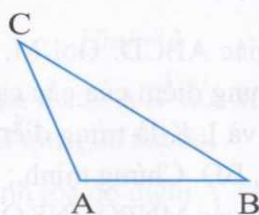
Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước

	Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.
	Các điểm cách đường thẳng b một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h.
	+ Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau. + Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

BÀI TẬP

Đối xứng trục

- Cho tam giác ABC (h.57).
Vẽ điểm A' đối xứng với A qua BC.
Vẽ điểm C' đối xứng với C qua AB.
Vẽ đoạn thẳng B'C' đối xứng với BC qua AC.



Hình 57

- Trong các biển báo giao thông sau, biển báo nào có trục đối xứng?
a) Biển báo nguy hiểm : đường hẹp hai bên (h.58a).
b) Biển báo nguy hiểm : đường giao với đường sắt có rào chắn (h.58b).
c) Biển báo nguy hiểm : đường ưu tiên gặp đường không ưu tiên bên phải (h.58c).
d) Biển báo nguy hiểm : báo trước gần đến đoạn đường thường có trẻ em (h.58d).



a)



b)



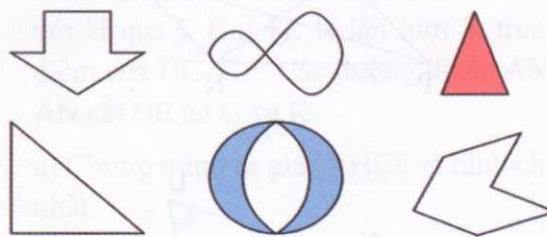
c)



d)

Hình 58

- Hãy vẽ trục đối xứng của các hình sau.

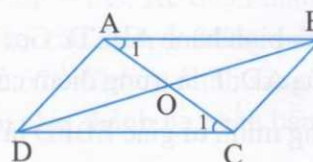


Hình 59

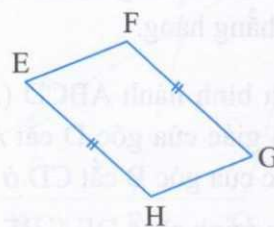
- Cho M là điểm nằm trong góc xOy có số đo bằng 60° . Vẽ điểm E đối xứng với M qua Ox, vẽ điểm F đối xứng với M qua Oy.
a) So sánh độ dài OE và OF.
b) Tính số đo góc EOF.
- Các câu sau đây đúng hay sai?
a) Nếu ba điểm thẳng hàng thì ba điểm đối xứng với chúng qua một trục cũng thẳng hàng.
b) Hai tam giác đối xứng với nhau qua một trục thì có chu vi bằng nhau.
c) Một đường tròn có vô số trục đối xứng.
d) Một đoạn thẳng chỉ có một trục đối xứng.

Hình bình hành

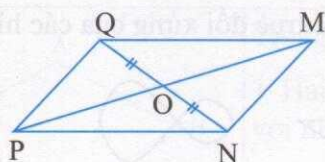
- Cần thêm điều kiện gì để các tứ giác ở hình dưới đây trở thành hình bình hành:



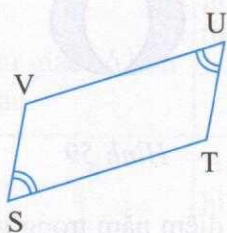
a)



b)



c)

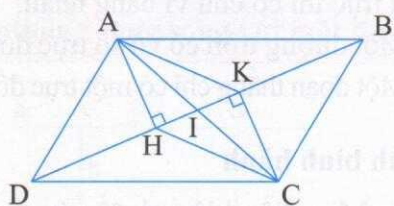


d)

Hình 60

7. Cho hình 61, trong đó ABCD là hình bình hành.

- Chứng minh rằng tứ giác AHCK là hình bình hành.
- Gọi I là trung điểm của BD. Chứng minh rằng ba điểm A, I, C thẳng hàng.



Hình 61

8. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC.

- Chứng minh tứ giác EBFD là hình bình hành.
- Gọi O là tâm đối xứng của hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

9. Cho hình bình hành ABCD ($AB > BC$). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

- Chứng minh rằng $DE \parallel BF$.
- Tứ giác DEBF là hình gì ?

- c) Chứng minh rằng ba đường thẳng AC, BD và EF đồng quy.

10. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, E và F là giao điểm của AK và CI với BD.

- Chứng minh tứ giác AKCI là hình bình hành.
- Chứng minh rằng $DE = EF = FB$.
- Chứng minh ba đường thẳng AC, IK, EF đồng quy.

11. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và I, K là trung điểm các đường chéo AC, BD. Chứng minh :

- Các tứ giác MNPQ, INKQ là hình bình hành.
- Các đường thẳng MP, NQ, IK đồng quy.

Đối xứng tâm

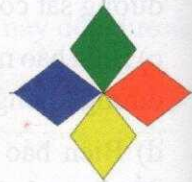
12. Trong các hình sau, hình nào có tâm đối xứng. Hãy xác định tâm đối xứng của các hình đó.



a)



b)



c)



d)

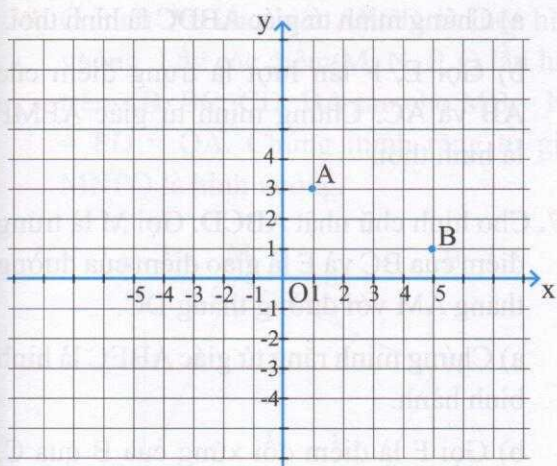


e)

Hình 62

13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(1; 3)$, $B(5; 1)$.

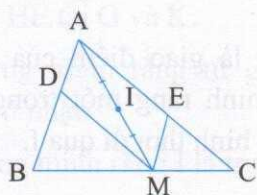
– Vẽ đoạn thẳng AB.



Hình 63

- Vẽ đoạn thẳng $A'B'$ đối xứng với đoạn thẳng AB qua gốc tọa độ.
- Xác định tọa độ điểm A' và B' .

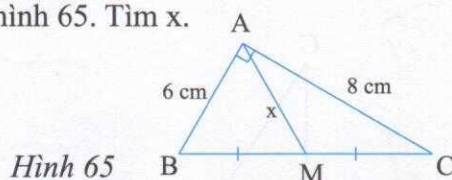
14. Ở hình 64, cho biết $MD \parallel AC$, $ME \parallel AB$, I là trung điểm của AM . Chứng minh rằng điểm D đối xứng với điểm E qua điểm I .



Hình 64

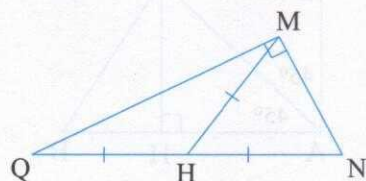
Hình chữ nhật

15. Cho hình 65. Tìm x .



Hình 65

16. Cho hình 66. Vẽ thêm điểm P để tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Hình 66

17. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Gọi I là trung điểm của AC , E là điểm đối xứng với H qua I . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE . Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K .

a) Chứng minh tứ giác $AHCE$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $HG = GK = KE$.

18. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Tứ giác $EFGH$ là hình gì? Vì sao?

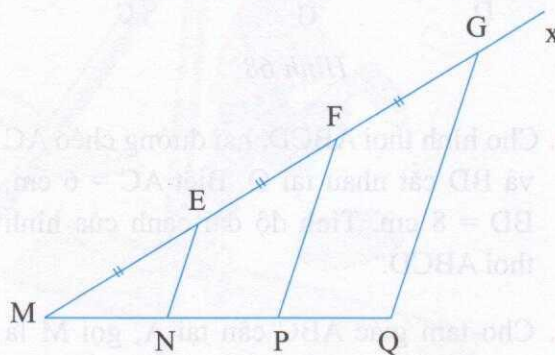
19. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi D là trung điểm của BC . Vẽ $DE \parallel AB$, vẽ $DF \parallel AC$ ($E \in AC, F \in AB$).

a) Chứng minh rằng tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng tứ giác $BFED$ là hình bình hành.

Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước

20. Cho đoạn thẳng MQ . Kẻ tia Mx bất kì. Trên tia Mx lấy các điểm E, F, G sao cho $ME = EF = FG$. Kẻ đoạn thẳng GQ . Qua E, F , kẻ các đường thẳng song song với GQ (h.67). Chứng minh rằng đoạn thẳng MQ bị chia thành ba phần bằng nhau.



Hình 67

21. Cho góc nhọn xOy . Trên tia Ox lần lượt lấy các điểm A, B, C, D sao cho $OA = AB = BC = CD$. Từ A, B, C, D lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với Oy , chúng lần lượt cắt Oy tại M, N, E, F .

a) Chứng minh $OM = \frac{1}{4} OF$.

b) Biết $AM = 3$ cm. Tính DF .

22. Cho góc vuông xOy , lấy điểm A thuộc tia Ox sao cho $OA = 3$ cm. Lấy điểm B bất kì trên tia Oy . Gọi M là trung điểm của AB . Khi điểm B di chuyển trên tia Oy thì điểm M di chuyển trên đường nào?

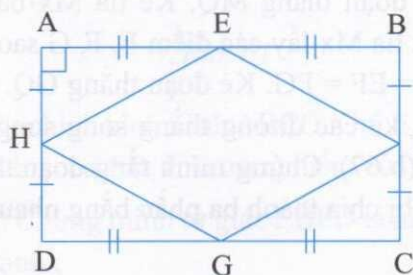
23. Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy M là điểm bất kì trên cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC .

a) Chứng minh rằng $AM = EF$.

b) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài nhỏ nhất?

Hình thoi

24. Cho hình 68. Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ là hình thoi.



Hình 68

25. Cho hình thoi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Biết $AC = 6$ cm, $BD = 8$ cm. Tính độ dài cạnh của hình thoi $ABCD$.

26. Cho tam giác ABC cân tại A , gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm D đối xứng với điểm A qua BC .

a) Chứng minh tứ giác $ABDC$ là hình thoi.

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và AC . Chứng minh tứ giác $AEMF$ là hình thoi.

27. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là trung điểm của BC và E là giao điểm của đường thẳng AM với đường thẳng DC .

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABEC$ là hình bình hành.

b) Gọi F là điểm đối xứng của B qua C . Chứng minh rằng tứ giác $BEFD$ là hình thoi.

c) Gọi I là trung điểm của cạnh EF . Chứng minh rằng ba điểm A, C, I thẳng hàng.

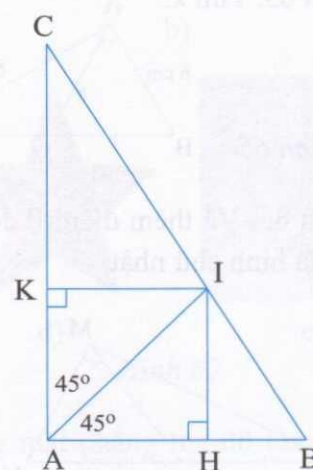
28. Cho hình thang cân $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD .

a) Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

b) Gọi I là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng một trong hai đường chéo của hình thoi đi qua I .

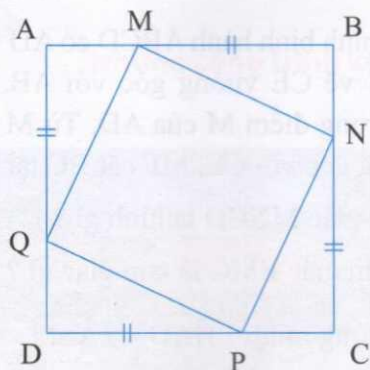
Hình vuông

29. Tứ giác $AHIK$ ở hình 69 là hình gì? Vì sao?



Hình 69

- 30.** Ở hình 70, cho biết ABCD là một hình vuông. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên AB, BC, CD, DA sao cho $MB = NC = PD = QA$. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.



Hình 70

- 31.** Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K.
- a) Chứng minh rằng tứ giác AHCE là hình chữ nhật.
- b) Chứng minh rằng I là trung điểm GK.
- c) Góc C bằng bao nhiêu độ để tứ giác AHCE trở thành hình vuông ?

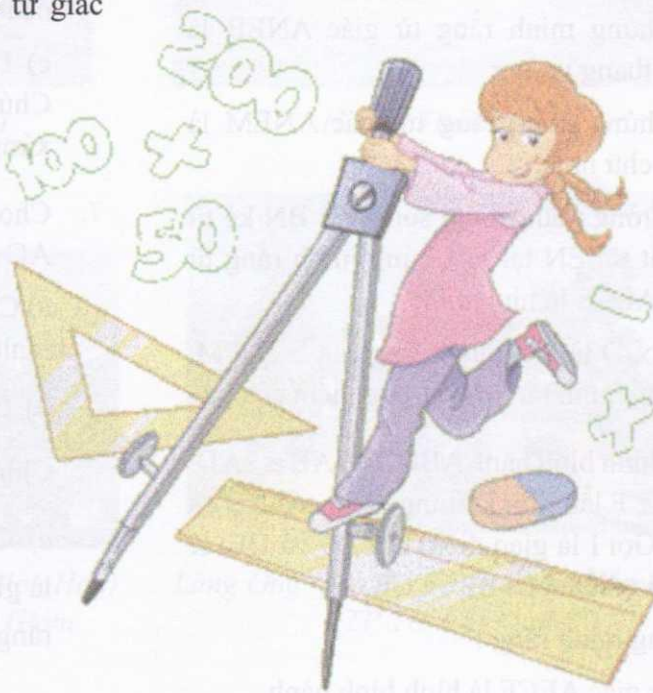
- Chứng minh rằng tứ giác AHCE là hình chữ nhật.
- Chứng minh rằng I là trung điểm GK.
- Góc C bằng bao nhiêu độ để tứ giác AHCE trở thành hình vuông ?

- 32.** Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

- a) Chứng minh rằng tứ giác EFGH là hình bình hành.

- b) Hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD cần điều kiện gì để tứ giác EFGH lần lượt là

- Hình chữ nhật
- Hình thoi
- Hình vuông.



LUYỆN TẬP

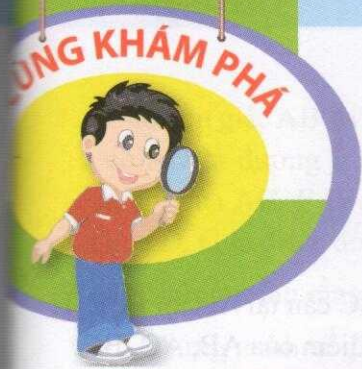
1. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm E, F thuộc đường chéo AC sao cho $AE = EF = FC$. Gọi M là giao điểm của BF và CD; N là giao điểm của DE và AB. Chứng minh rằng :
 - a) M, N theo thứ tự là trung điểm của CD, AB.
 - b) Tứ giác EMFN là hình bình hành.
 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H, D lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AB.
 - a) Chứng minh rằng tứ giác ADHC là hình thang.
 - b) Gọi E là điểm đối xứng với H qua D. Chứng minh tứ giác AHBE là hình chữ nhật.
 - c) Tia CD cắt AH ở M và cắt BE ở N. Chứng minh tứ giác AMBN là hình bình hành.
 3. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.
 - a) Chứng minh rằng tứ giác ANEB là hình thang vuông.
 - b) Chứng minh rằng tứ giác ANEM là hình chữ nhật.
 - c) Đường thẳng song song với BN kẻ từ M cắt tia EN tại F. Chứng minh rằng tứ giác AFCE là hình thoi.
 - d) Gọi D là điểm đối xứng của E qua M. Chứng minh rằng A là trung điểm của DF.
 4. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 2AD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi I là giao điểm của AF và DE, K là giao điểm của BF và CE.

Chứng minh rằng :

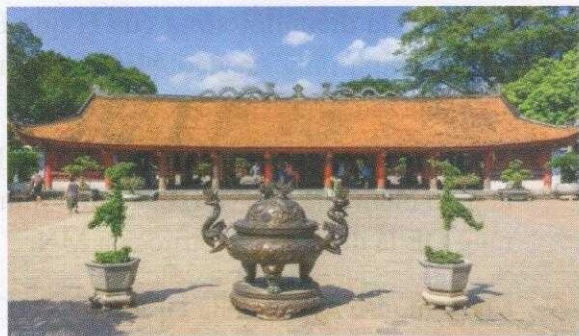
 - a) Tứ giác AECF là hình bình hành.
 - b) Tứ giác AEFD là hình gì ? Vì sao ?
 - c) Chứng minh rằng tứ giác EIFK là hình chữ nhật.
 - d) Tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để tứ giác EIFK là hình vuông.
5. Cho hình bình hành ABCD có $AD = 2AB$. Từ C vẽ CE vuông góc với AB. Nối E với trung điểm M của AD. Từ M vẽ MF vuông góc với CE, MF cắt BC tại N.
 - a) Tứ giác MNCD là hình gì ?
 - b) Tam giác EMC là tam giác gì ?
 - c) Chứng minh : $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$.

HD : b) $MF \parallel DC$ suy ra F là trung điểm của EC.

c) $\widehat{AEM} = \widehat{EMN} = \widehat{NMC} = \widehat{MCD} = \frac{1}{2}\widehat{NCD}$.
 6. Cho hình bình hành ABCD, tâm O. Trên đường chéo AC lấy hai điểm M, N sao cho $AM = MN = CN$.
 - a) Chứng minh rằng hai điểm M và N đối xứng nhau qua tâm O.
 - b) Chứng minh rằng O là tâm đối xứng của tứ giác DMBN.
 - c) DM cắt AB tại E, BN cắt CD tại F. Chứng minh rằng hai điểm E và F đối xứng nhau qua O.
 7. Cho hình bình hành ABCD. Lấy E, F trên AC sao cho $AE = EF = FC$.
 - a) Chứng minh rằng tứ giác BEDF là hình bình hành.
 - b) Gọi M là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng $FM = \frac{1}{2}FD$.
 - c) Gọi I là giao điểm của CD và BF, J là giao điểm của AB và DE. Chứng minh rằng ba điểm I, O, J thẳng hàng.



Những công trình kiến trúc cổ có cấu trúc đối xứng ở Việt Nam



Văn miếu Quốc Tử Giám (Hà Nội)



Hoàng Thành Thăng Long (Hà Nội)



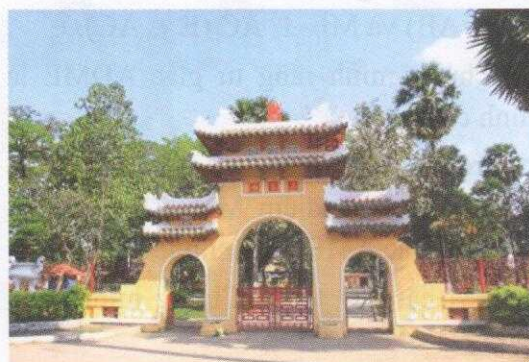
Thành nhà Hồ (Thanh Hoá)



Hoàng Thành (Huế)



Khu Di Tích Văn Miếu Trần Biên (Biên Hoà)
được xem là Văn Miếu Quốc Tử Giám
Nam Bộ



Lăng Ông (đền thờ Tả Quân Lê Văn Duyệt)
(TP. Hồ Chí Minh)

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

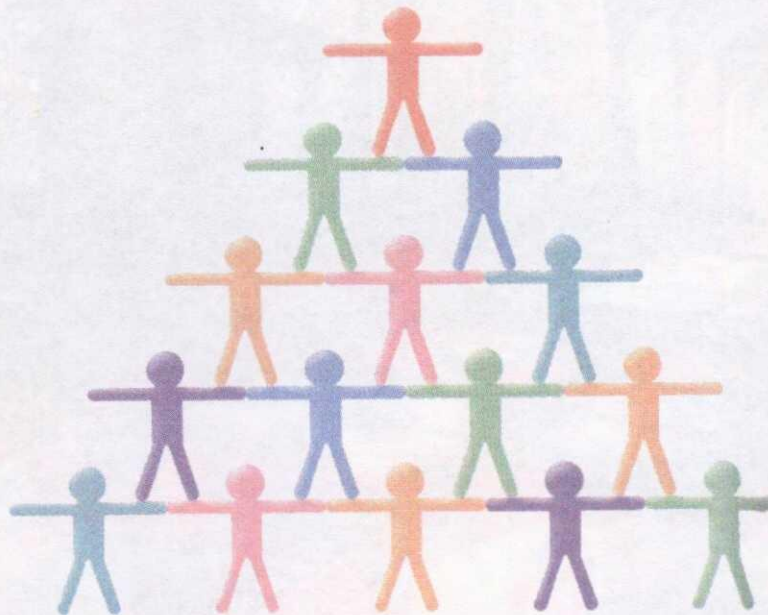
1. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC.
 - a) Tứ giác ABMN là hình gì ? Tại sao ?
 - b) Gọi E là điểm đối xứng của M qua N. Chứng minh rằng tứ giác AECM là hình bình hành.
 - c) Tam giác ABC cần có thêm điều kiện gì để tứ giác AECM lần lượt là :
 - Hình chữ nhật
 - Hình thoi
 - Hình vuông.
2. Cho hình thang ABCD (AB, CD là hai đáy). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD.
 - a) Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.
 - b) Hình thang ABCD cần có thêm điều kiện gì để tứ giác MNPQ lần lượt trở thành :
 - Hình thoi
 - Hình chữ nhật
 - Hình vuông.
3. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $MD \perp AB$ ($D \in AB$) và $ME \perp AC$ ($E \in AC$).
 - a) Chứng minh rằng tứ giác ADME là hình chữ nhật.
 - b) Trên tia đối của tia DM lấy điểm N sao cho D là trung điểm MN. Chứng minh rằng tứ giác AMBN là hình thoi.
 - c) AM cắt CD tại F. Chứng minh rằng $MB = 3MF$.
 - d) Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật ADME. Vẽ CK vuông góc với BN tại K. Chứng minh rằng tam giác IKC cân.
4. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, H lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.
 - a) Chứng minh rằng tứ giác ADHE là hình thoi.
 - b) Gọi F là điểm đối xứng của H qua E. Chứng minh rằng tứ giác AHCF là hình chữ nhật.
 - c) Gọi M là giao điểm của DF và AE ; N là giao điểm của DC và HE. Chứng minh rằng DE là đường trung trực của MN.
5. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AH là đường cao. Vẽ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$ ($E \in AB$, $F \in AC$).
 - a) Chứng minh rằng $AH = EF$.
 - b) Gọi M là điểm đối xứng của H qua E. Chứng minh rằng tứ giác MAFE là hình bình hành.
 - c) Gọi D là trung điểm của HC, I là giao điểm của AH và EF. Chứng minh rằng BI vuông góc với AD.
 - d) Gọi N là điểm đối xứng của H qua F. Chứng minh rằng ba điểm M, A, N thẳng hàng.
6. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Gọi I là trung điểm của BC.
 - a) Tính AI.
 - b) Gọi M là điểm đối xứng của A qua I. Chứng minh rằng tứ giác ABMC là hình chữ nhật.
 - c) Gọi E là trung điểm của AI, P là trung điểm của IC, Q là trung điểm của MB. Chứng minh tứ giác BQPE là hình bình hành.
 - d) Chứng minh rằng $BE \perp AP$.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$) có AD là đường trung tuyến. E là trung điểm của AC, F là điểm đối xứng của A qua D. G là điểm đối xứng của B qua E.

- Chứng minh rằng $DE \perp AC$.
- Chứng minh tứ giác ABFC là hình chữ nhật.
- Chứng minh rằng C là trung điểm của FG.
- Đường thẳng qua C song song với AD cắt DE ở H. Chứng minh rằng tứ giác ADCH là hình thoi.

8. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC.

- Chứng minh rằng tứ giác AEDF là hình chữ nhật.
- Đường thẳng kẻ từ E và song song với BF cắt đường thẳng DF tại N. Chứng minh rằng tứ giác ANCD là hình thoi.
- Gọi O là giao điểm của AD và EF. Chứng minh rằng ba điểm B, O, N thẳng hàng.
- Trên tia DN lấy điểm M sao cho N là trung điểm của FM. Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt MC tại K. Chứng minh ba điểm B, F, K thẳng hàng.

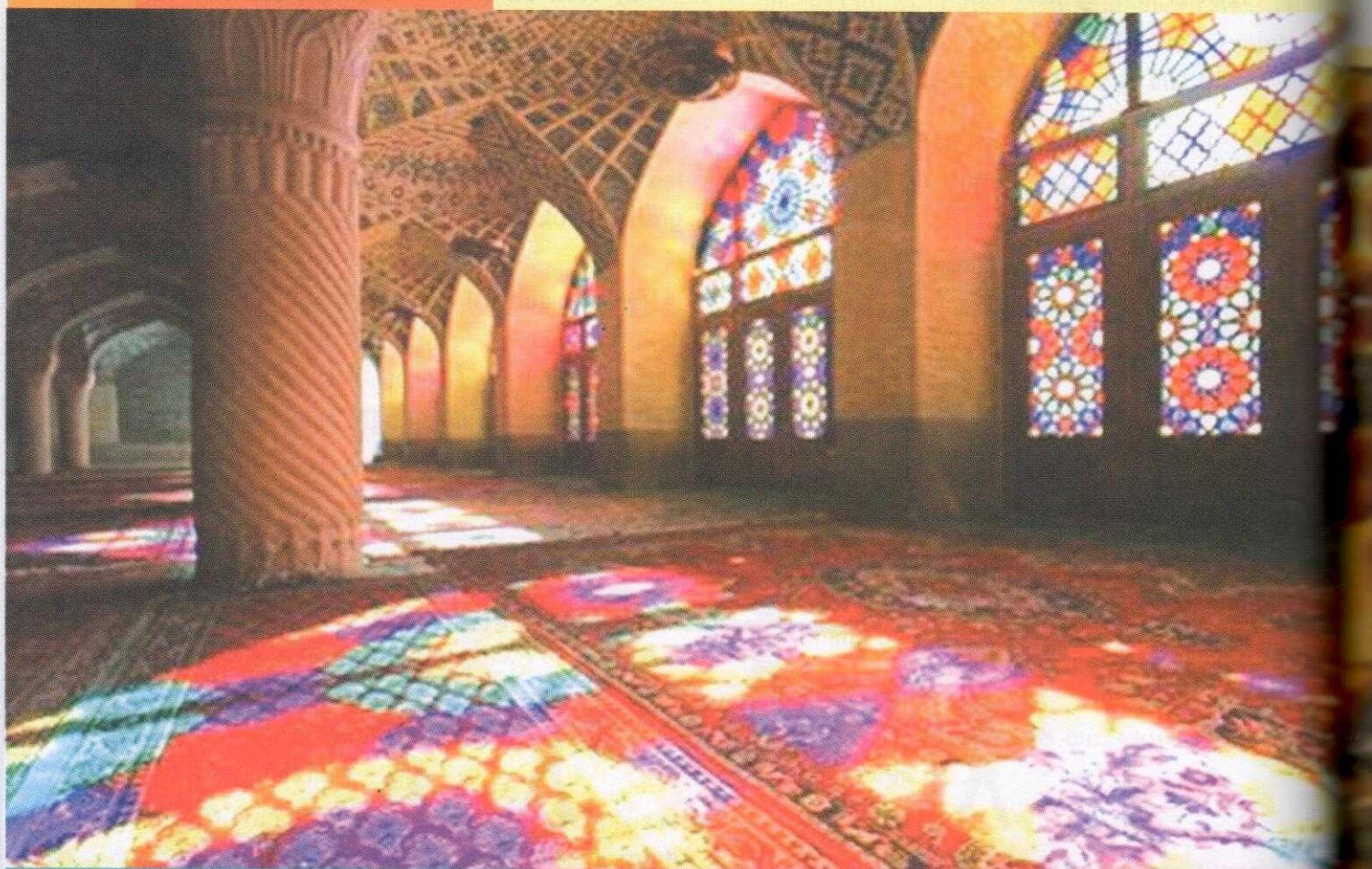


CHƯƠNG

2

ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

- Đa giác. Đa giác đều
- Diện tích đa giác



Các hình đa giác thường được lấy làm ý tưởng trong rất nhiều công trình xây dựng và trang trí.

ĐA GIÁC. ĐA GIÁC ĐỀU

Khái niệm về đa giác

Đa giác đều



Em hãy quan sát hình tổ ong và cho biết mặt cắt của các ô sáp trong tổ ong là hình có mấy cạnh.

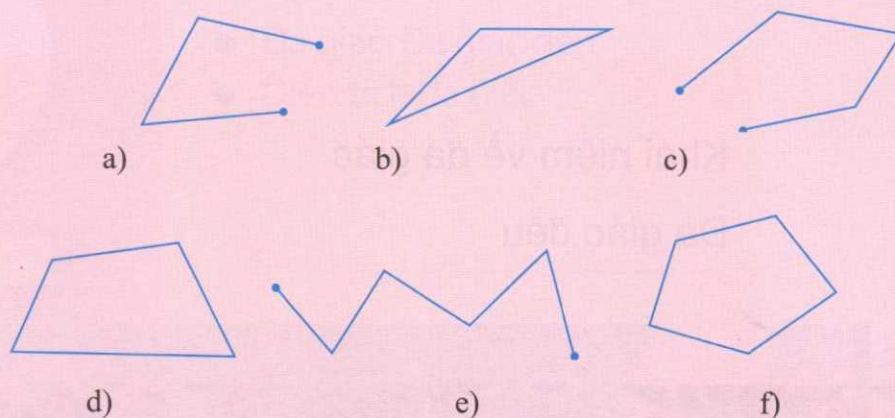


1. KHÁI NIỆM VỀ ĐA GIÁC

◆ Định nghĩa đa giác

Hoạt động 1

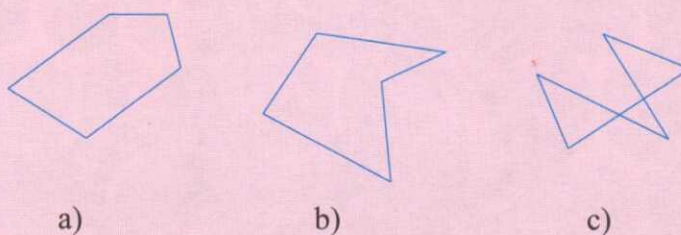
Tìm các đường khép kín trong các đường gấp khúc ở hình 1.



Hình 1

Hoạt động 2

Đếm số đoạn thẳng có trong các đường gấp khúc khép kín ở hình 2 :



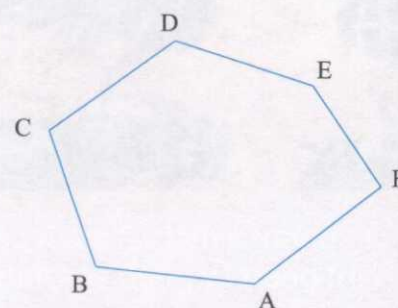
Hình 2

Đa giác là hình tạo bởi đường gấp khúc khép kín gồm các đoạn thẳng sao cho bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng. Các đoạn thẳng của đường gấp khúc được gọi là các **cạnh** còn các đầu mút của các đoạn thẳng được gọi là các **đỉnh** của đa giác.

Ví dụ : Đa giác ABCDEF ở hình 3 là hình tạo bởi đường gấp khúc khép kín gồm 6 đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Đa giác này có :

- 6 cạnh là : AB, BC, CD, DE, EF, FA.
- 6 đỉnh là : A, B, C, D, E, F.
- 6 góc là : $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$, $\widehat{F}$.

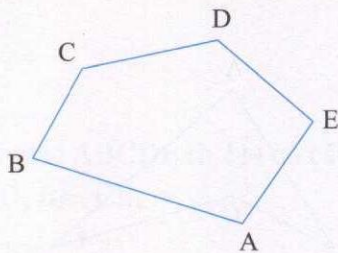


Hình 3

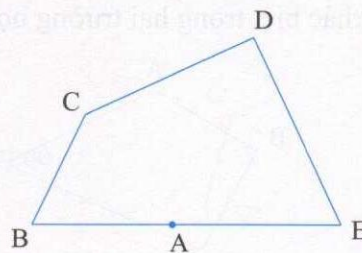


THỬ TÀI BẠN

1. Trong hai hình tạo bởi các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA sau hình nào là đa giác ?



a)

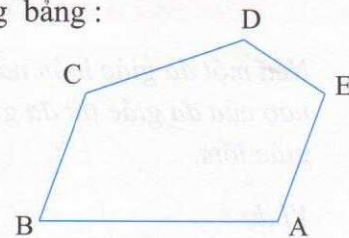


b)

Hình 4

2. Quan sát đa giác ABCDE ở hình 5 rồi điền vào chỗ trống trong bảng :

Các cạnh	
Các đỉnh	
Các góc	



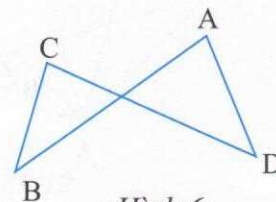
Hình 5



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Việt nói hình 6 không phải là một đa giác. Nam nói hình 6 là một đa giác.

Em hãy cho biết bạn nào đúng ?



Hình 6

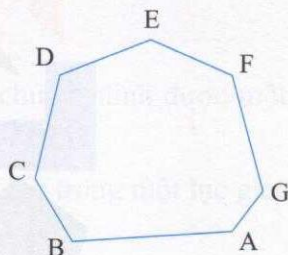
Gọi tên đa giác

Ta gọi đa giác có n cạnh ($n \geq 3$) là hình n cạnh hay hình n -giác. Khi $n = 3, 4, 5, 6, 8$ ta thường gọi là hình tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác, bát giác. Còn khi $n = 7, 9, 10, \dots$ ta thường gọi là hình 7 cạnh, hình 9 cạnh, hình 10 cạnh, ...

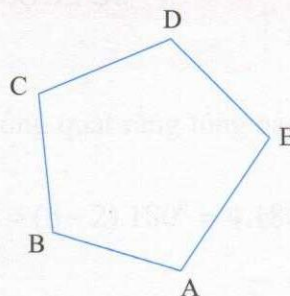


THỬ TÀI BẠN

Gọi tên các đa giác sau :



a)



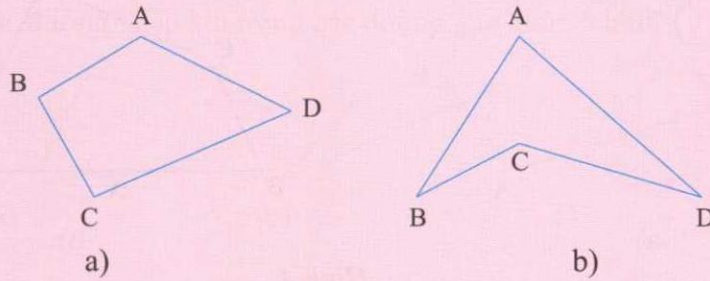
b)

Hình 7

♦ Đa giác lồi và đa giác lõm

Hoạt động 3

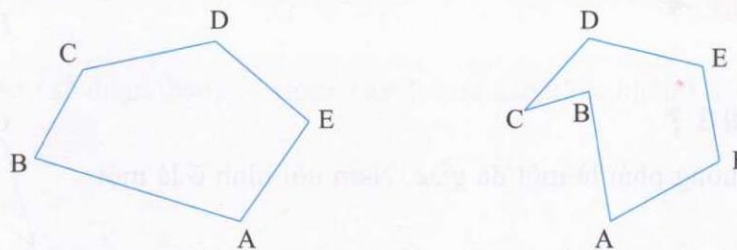
Vẽ các đường thẳng lần lượt chứa các cạnh của hai đa giác sau. Hãy nêu sự khác biệt trong hai trường hợp.



Hình 8

Nếu một đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác thì đa giác đó được gọi là đa giác lồi. Một đa giác không lồi được gọi là đa giác lõm.

Ví dụ :



a) Ngũ giác ABCDE là một đa giác lồi

b) Lục giác ABCDEF là một đa giác lõm

Hình 9

Chú ý : Do ta chỉ tập trung tìm hiểu về đa giác lồi nên từ nay, khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.



THỬ TÀI BẠN

Đếm số lượng mỗi loại đa giác có trong hình 10 và điền vào bảng sau :

TÊN ĐA GIÁC	SỐ LƯỢNG
Tam giác	
Tứ giác	
Ngũ giác	
Lục giác	
Bát giác	
Đa giác lồi	
Đa giác lõm	

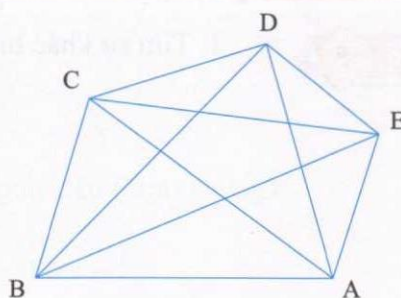


Hình 10

♦ Đường chéo

Các đường chéo là các đoạn thẳng nối hai đỉnh không kề nhau.

Ví dụ : Ngũ giác ABCDE (h.11) có các đường chéo AC, AD, BD, BE, CE.

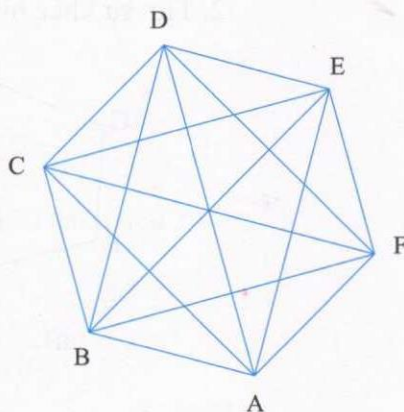


Hình 11



THỬ TÀI BẠN

Gọi tên các đường chéo đi qua đỉnh C của lục giác ABCDEF (h.12).

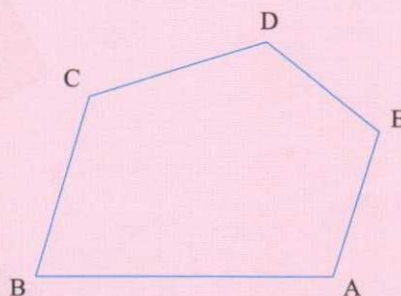


Hình 12

♦ Tổng các góc trong một đa giác

Động 4

Hãy vẽ các đường chéo đi qua một đỉnh của ngũ giác ABCDE (h.13). Các đường chéo này chia ngũ giác thành mấy tam giác? Tính tổng các góc trong của ngũ giác.



Hình 13

Chúng ta có thể chứng minh được một cách tổng quát rằng tổng các góc của một đa giác n cạnh bằng $(n - 2).180^\circ$.

Ví dụ : Tổng các góc trong một lục giác là : $S = (6 - 2).180^\circ = 4.180^\circ = 720^\circ$.



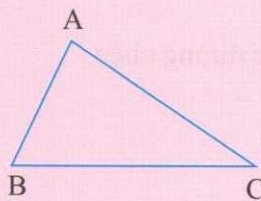
2. ĐA GIÁC ĐỀU

◆ Định nghĩa

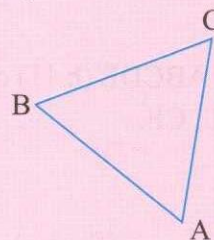
Hoạt động

5

1. Tìm sự khác biệt giữa hai tam giác sau đây :



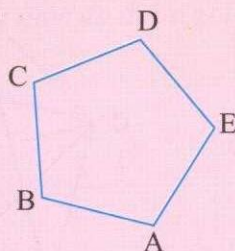
a)



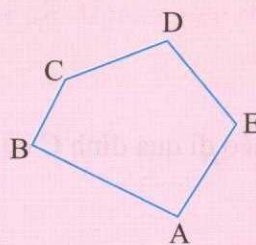
b)

Hình 14

2. Tìm sự khác biệt giữa hai ngũ giác sau đây :



a)



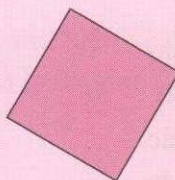
b)

Hình 15

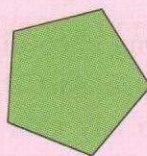
Hoạt động

6

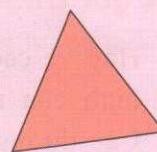
Các đa giác sau đây có chung đặc điểm gì ?



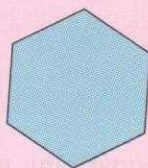
a)



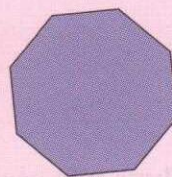
b)



c)



d)

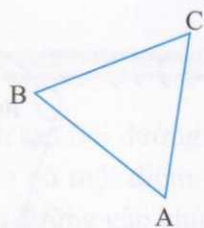


e)

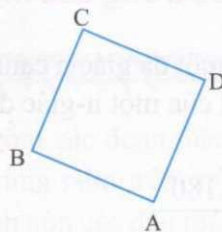
Hình 16

Đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau được gọi là đa giác đều.

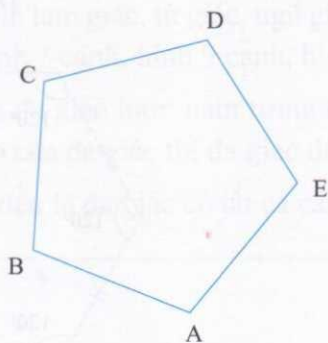
Ví dụ :



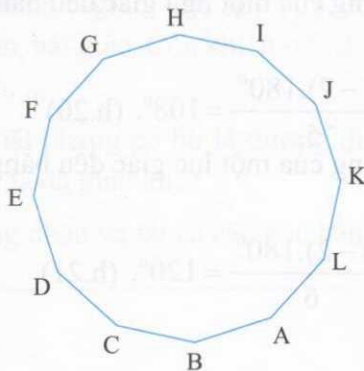
a) Tam giác đều



b) Tứ giác đều (hình vuông)



c) Ngũ giác đều



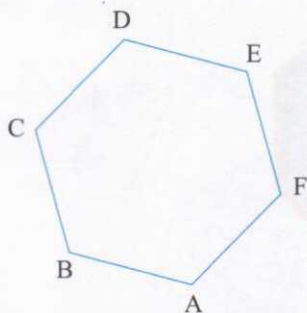
d) Hình 12 cạnh đều

Hình 17



THỬ TÀI BẠN

Đa giác đều ở hình 18 tên gì ? Và có bao nhiêu trục đối xứng ?

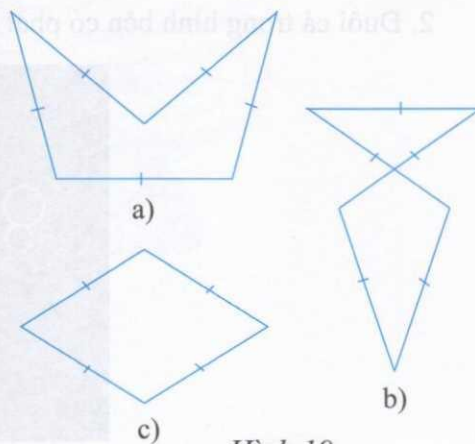


Hình 18



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Bạn Lan nói các đa giác ở hình 19 là đa giác đều vì chúng có các cạnh bằng nhau. Bạn Cúc nói chúng không phải là đa giác đều. Theo em, bạn nào đúng ? Hãy giải thích tại sao.



Hình 19

◆ Số đo mỗi góc trong của một n-giác đều

Tổng các góc của một đa giác n cạnh bằng $(n-2).180^\circ$ nên mỗi góc trong của một n-giác đều bằng :

$$\frac{(n-2).180^\circ}{n}$$

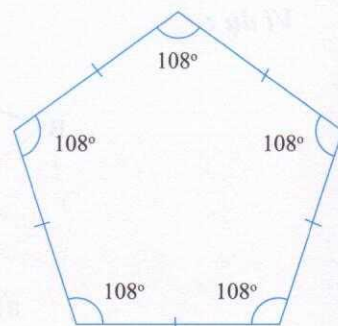
Ví dụ :

- Mỗi góc trong của một ngũ giác đều bằng :

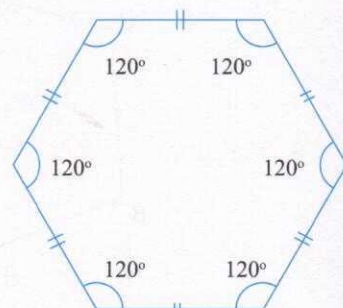
$$\frac{(5-2).180^\circ}{5} = 108^\circ. \text{ (h.20)}$$

- Mỗi góc trong của một lục giác đều bằng :

$$\frac{(6-2).180^\circ}{6} = 120^\circ. \text{ (h.21)}$$



Hình 20



Hình 21



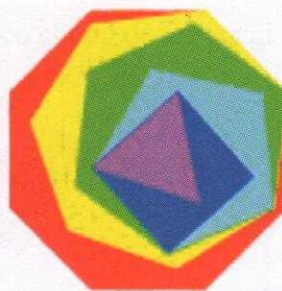
THỬ TÀI BẠN

Em hãy vẽ lục giác đều cạnh 2 cm.

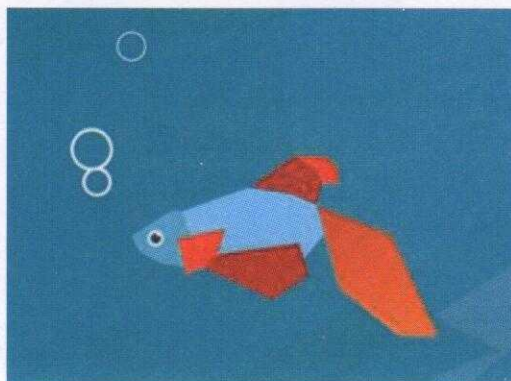


THƯ GIÃN

1. Có bao nhiêu loại đa giác đều khác nhau trong bức hình bên ? Hãy gọi tên của chúng.



2. Đuôi cá trong hình bên có phải là một đa giác lồi không ? Em hãy gọi tên đa giác đó.



GHI NHỚ



1. Đa giác là hình tạo bởi đường gấp khúc kín gồm các đoạn thẳng sao cho bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng. Các đoạn thẳng của đường gấp khúc được gọi là các cạnh còn các đầu mút của các đoạn thẳng được gọi là các *đỉnh của đa giác*.
2. Ta gọi đa giác có n cạnh là hình n cạnh hay hình n -giác. Khi $n = 3, 4, 5, 6, 8$ ta thường gọi là hình tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác, bát giác. Còn khi $n = 7, 9, 10, \dots$ ta thường gọi là hình 7 cạnh, hình 9 cạnh, hình 10 cạnh,
3. Nếu một đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác thì đa giác đó được gọi là đa giác lồi.
4. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.



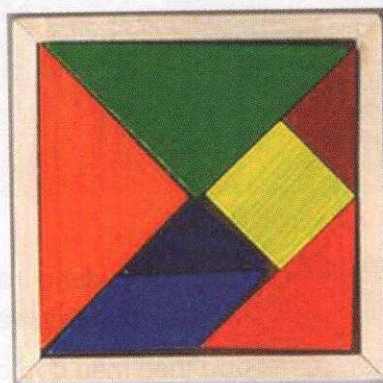
BÀI TẬP

1. Cho lục giác ABCDEF. Vẽ các đường chéo AC, AD, AE. Kể tên các đa giác có trong hình vẽ.
2. a) Hãy tính số đường chéo của một tứ giác, một ngũ giác.
b) Hãy tính số đường chéo của một hình n cạnh ($n \geq 3$).
3. Trong các hình sau, hình nào là tứ giác đều :
a) Hình thoi ;
b) Hình chữ nhật ;
c) Hình vuông.
4. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{B} = 120^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng đa giác MBNPDQ là lục giác đều.
5. Tính số đo mỗi góc của bát giác đều.

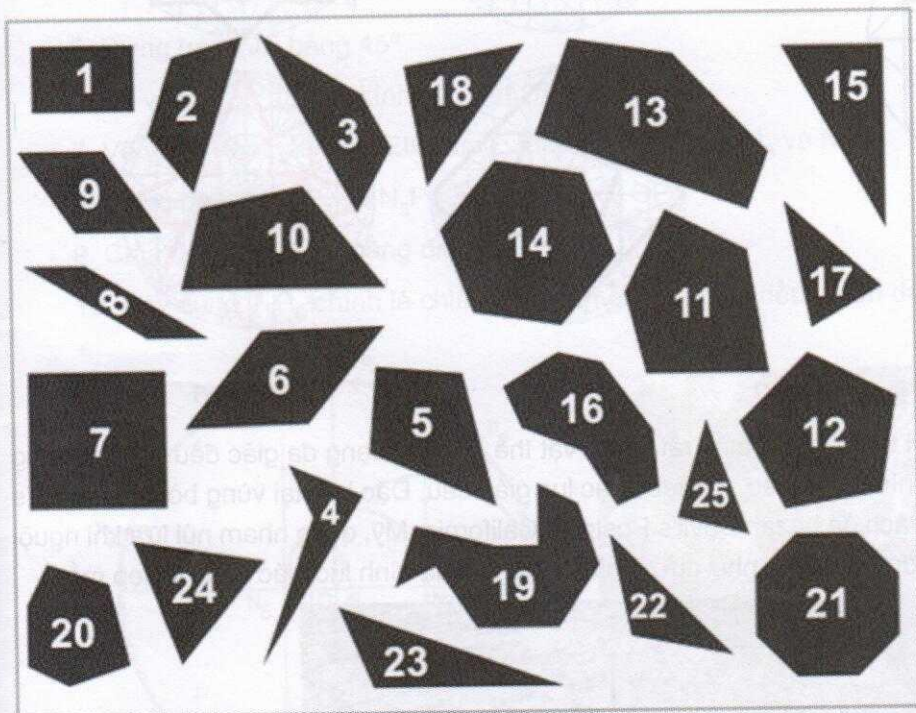


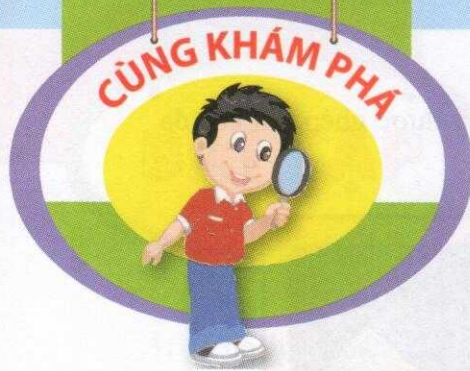
LUYỆN TẬP

5. Bức tranh sau đây được ghép bởi các đa giác nào ?



1. Cắt sáu tam giác đều bằng nhau từ một tấm bìa và ghép chúng thành một lục giác đều.
2. Chứng minh trung điểm các cạnh của một ngũ giác đều tạo thành một ngũ giác đều.
3. Chứng minh rằng trong một ngũ giác, tổng các đường chéo lớn hơn chu vi.
4. Gọi tên hình có nhiều cạnh nhất trong 25 hình dưới đây.

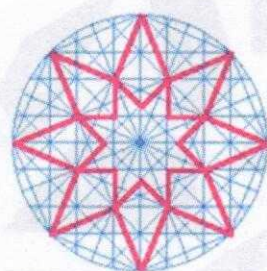
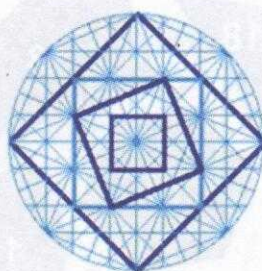
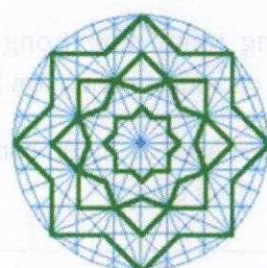
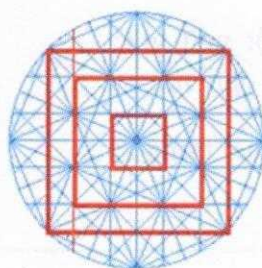
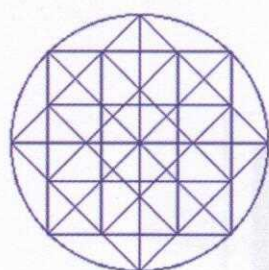




♦ Toán học và hội hoạ

Đa giác thường được ứng dụng trong hội hoạ để vẽ các hoa văn trang trí, chúng làm cho người xem cảm giác hài hoà, cân xứng và đẹp mắt.

Các em có thể dựa theo mẫu đơn giản thứ nhất để vẽ và tô màu thành 4 mẫu sau được không?



♦ Đa giác đều trong tự nhiên

1. Trong tự nhiên, người ta quan sát thấy rất nhiều vật thể có hình dạng đa giác đều. Các khoáng chất thường có tinh thể hình tam giác, tứ giác hoặc lục giác đều. Đặc biệt tại vùng bờ biển Giant's Causeway, Ireland hay vách đá bazan Devil's Postpile, California, Mỹ, dung nham núi lửa khi nguội đi tạo thành những con đường trông như được thiên nhiên lát đá hình lục giác đều rất đẹp mắt.



Hươu cao cổ có bộ da trông như được ghép bởi các đa giác. Các nhà khoa học nói rằng mỗi con có một kiểu ghép khác nhau và chúng nhận ra nhau nhờ các kiểu ghép đa giác đó giống như chúng ta nhận dạng nhờ vân tay vậy.



Lịch sử Toán học

Gauss và bài toán dựng đa giác 17 cạnh đều

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) là một nhà toán học người Đức nổi tiếng, người được mệnh danh là "hoàng tử của các nhà toán học". Năm ông 19 tuổi, Gauss tìm ra cách dựng đa giác đều 17 cạnh (xem hướng dẫn cách dựng bằng thước và compa) :



Vẽ vòng tròn tâm O bán kính OP_0 .

Dựng OB vuông góc với OP_0 .

Lấy điểm J trên OB với $OJ = \frac{1}{4} OB$.

Lấy góc OJE bằng $\frac{1}{4} \widehat{OJP_0}$.

Dựng góc FJE bằng 45° .

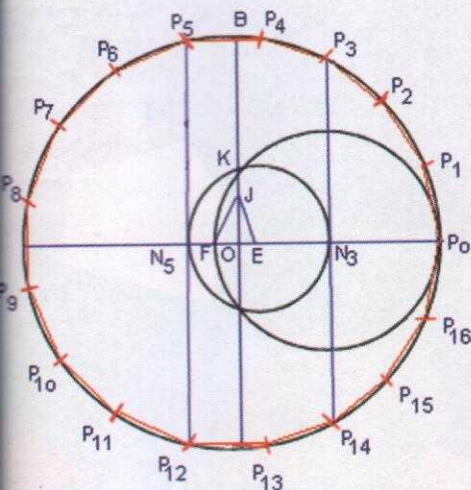
Vẽ vòng tròn đường kính FP_0 cắt OB tại điểm K.

Vẽ vòng tròn bán kính EK, tâm E thứ tự cắt OP_0 tại N_3 và N_5 .

Dựng đường N_3P_3 và N_5P_5 vuông góc với OP_0 .

Chia đôi cung P_3P_5 bằng điểm P_4 .

D. Dây cung P_4P_5 chính là chiều dài cạnh của đa giác đều muốn dựng.



Người ta kể lại rằng chính phát minh này đã thúc đẩy Gauss say mê đi vào con đường Toán học. Ông thích thú với phát hiện này tới mức ông muốn sau này một đa giác đều 17 cạnh được khắc lên trên ngôi mộ của mình. Không hiểu vì lý do gì, trên mộ của Gauss không có hình đa giác 17 cạnh, nhưng dưới tượng đài của Gauss tại quê nhà Brunswick có một hình ngôi sao 17 cạnh.

DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Khái niệm diện tích

Diện tích hình chữ nhật

Diện tích tam giác

Diện tích hình bình hành

Diện tích hình thang

Diện tích hình thoi

Diện tích đa giác



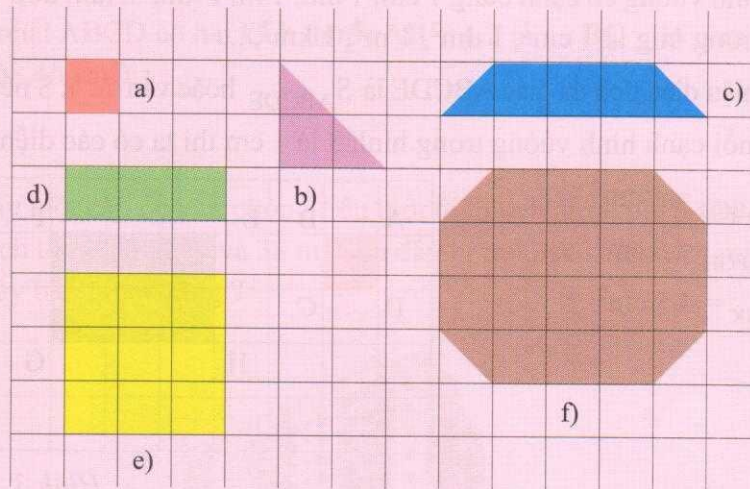
Bức tranh này được ghép bởi các đa giác, ta nói diện tích bức tranh bằng tổng diện tích của các đa giác tạo thành.



1. KHÁI NIỆM DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Hoạt động 1

Trên một tờ giấy kẻ ô vuông, bạn Mai dán các hình đa giác có kích thước khác nhau. Em hãy đếm xem phần mặt phẳng mà các đa giác chiếm chỗ là bao nhiêu ô vuông và điền số đó ngay trên mỗi đa giác.

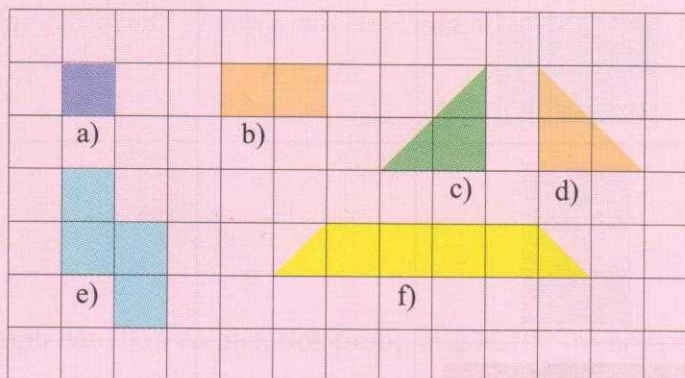


Hình 1

Diện tích của một đa giác là số đo phần mặt phẳng giới hạn bởi đa giác đó. Mỗi đa giác có diện tích là một số dương hoàn toàn xác định.

Hoạt động 2

Cho hình 2.



Hình 2

- Hãy so sánh hai hình 2c và 2d, rồi so sánh diện tích của chúng.
- Hãy giải thích tại sao diện tích hình e bằng hai lần diện tích hình b.
- Diện tích hình f bằng bao nhiêu lần diện tích hình a ?

Diện tích đa giác có các tính chất sau :

- Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
- Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1 cm, 1 dm, 1 m, 1 km, ... làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là 1 cm^2 , 1 dm^2 , 1 m^2 , 1 km^2 , ...

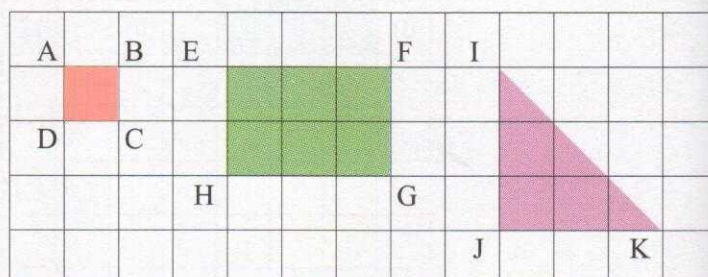
Ta thường kí hiệu diện tích đa giác ABCDE là S_{ABCDE} hoặc vắn tắt là S nếu không gây nhầm lẫn.

Ví dụ : Nếu mỗi cạnh hình vuông trong hình 3 là 1 cm thì ta có các diện tích sau :

$$S_{ABCD} = 1 \text{ cm}^2$$

$$S_{EFGH} = 6 \text{ cm}^2$$

$$S_{IJK} = 4,5 \text{ cm}^2.$$



Hình 3



2. DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT

♦ Diện tích hình chữ nhật

Hoạt động

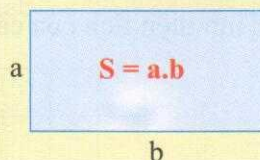
3

Đếm số dòng và số cột của các hình chữ nhật sau rồi tính xem diện tích của chúng là bao nhiêu ô vuông ?

Hình chữ nhật	Chiều rộng	Chiều dài	Diện tích

Ta có định lí

Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước.



Ví dụ : Hình chữ nhật ABCD có hai kích thước $AB = 4,2$ m và $BC = 16,3$ m sẽ có diện tích là $S = 4,2 \times 16,3 = 68,46$ (m^2).



THỬ TÀI BẠN

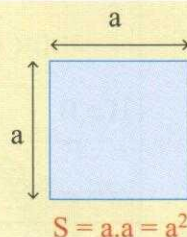
Người ta muốn xây một cao ốc văn phòng trên một diện tích được phép xây dựng là một hình chữ nhật có hai kích thước là 15 m và 38 m. Chủ đầu tư muốn có diện tích mặt sàn là 7980 m^2 . Hỏi ông ta phải xây bao nhiêu tầng ?



♦ Diện tích hình vuông và tam giác vuông

Do hình vuông là hình chữ nhật có hai kích thước bằng nhau, nên ta có :

Diện tích hình vuông bằng bình phương một cạnh của nó.



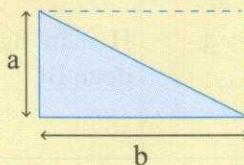
Chú ý :

- Hình vuông có cạnh dài 10 m có diện tích tương ứng là 100 m^2 hay còn gọi là 1 a.
- Hình vuông có cạnh dài 100 m có diện tích tương ứng là 10 000 m^2 hay còn gọi là 1 ha (héc-ta).

Do hình tam giác vuông bằng nửa hình chữ nhật nên ta cũng có :

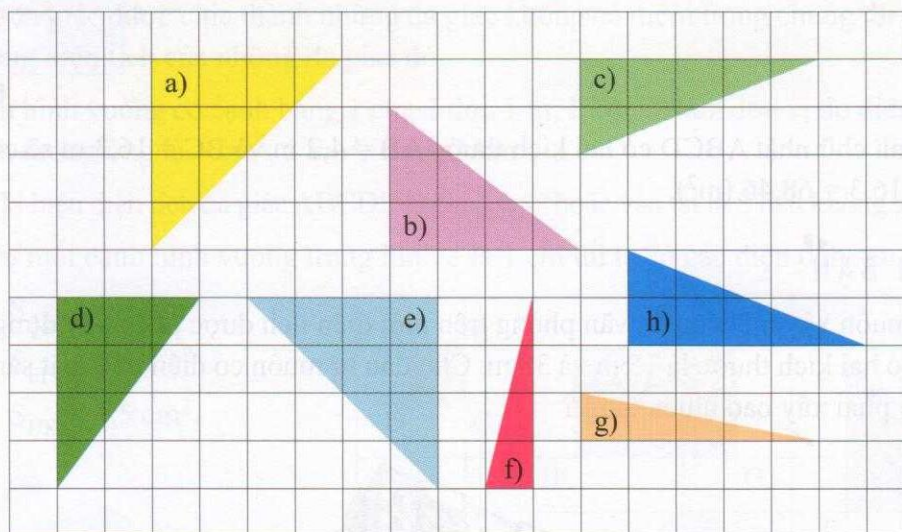
Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích của hai cạnh góc vuông.

$$S = \frac{1}{2} a.b$$





Tính diện tích của các tam giác vuông trong hình 4 (cho biết cạnh ô vuông là 1 cm).



Hình 4



3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Hoạt động

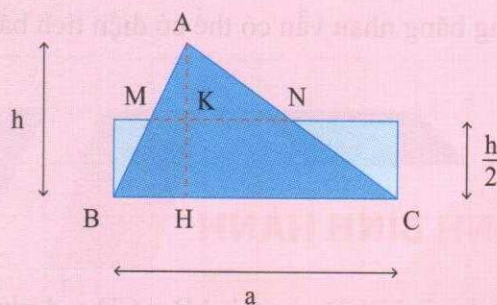
4

Cho tam giác ABC, vẽ đường cao AH. Đặt $BC = a$, $AH = h$.

Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau :

Trường hợp	Vị trí điểm H trên BC	Hình vẽ		Tính S_{ABC} theo a và h
1	$H \equiv B$		$S_{ABC} = S_{AHC} =$	
2	H thuộc đoạn BC		$S_{ABC} = S_{ABH} + S_{ACH}$ $= \frac{1}{2} AH (BH + CH) =$	
3	H nằm ngoài đoạn BC		$S_{ABC} = S_{ABH} - S_{ACH}$ $= \frac{1}{2} AH (BH - CH) =$	

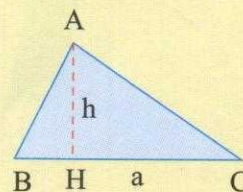
Hãy cắt tam giác thành ba mảnh để ghép lại thành một hình chữ nhật như hình 5. Tính diện tích hình chữ nhật rồi suy ra diện tích tam giác.



Hình 5

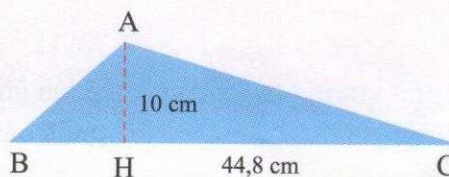
Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h$$



Ví dụ : Tam giác ABC (h.6) có đáy $BC = 44,8$ cm và chiều cao tương ứng $AH = 10$ cm sẽ có diện tích là

$$S = \frac{1}{2} (44,8 \times 10) = 224 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

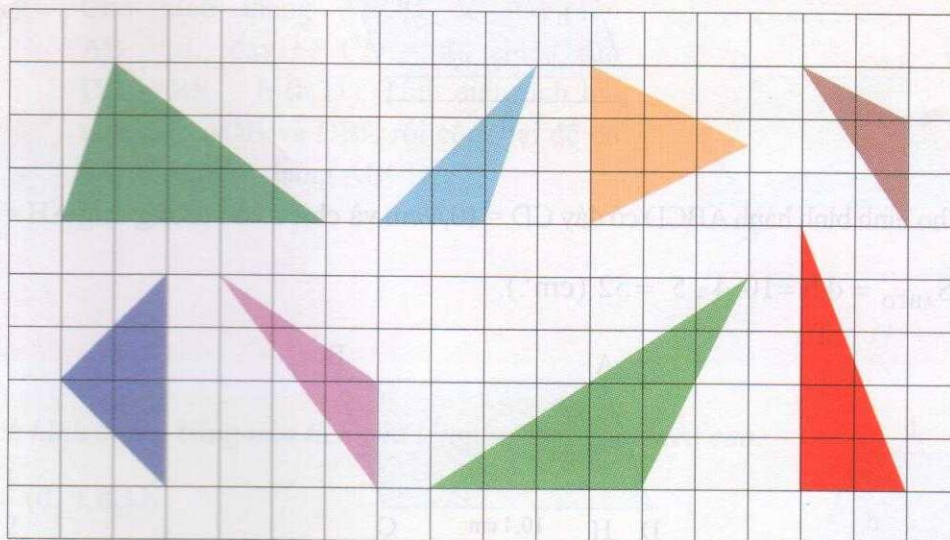


Hình 6



THỬ TÀI BẠN

Tính diện tích của các tam giác trong hình 7 (cho biết cạnh ô vuông là 1 m).



Hình 7



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Việt nói hai tam giác không bằng nhau có diện tích luôn khác nhau.

Nam nói hai tam giác không bằng nhau vẫn có thể có diện tích bằng nhau.

Theo em, bạn nào đúng ?

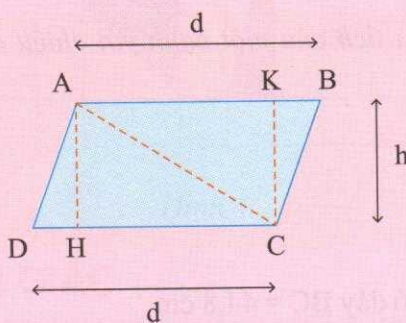


4. DIỆN TÍCH HÌNH BÌNH HÀNH

Hoạt động

6

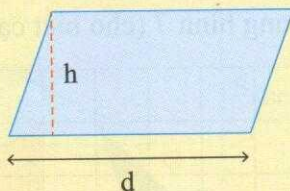
Cho hình bình hành ABCD có cạnh $AB = CD = d$, chiều cao $AH = CK = h$ (h.8).
Tính diện tích hai tam giác ADC và ABC rồi suy ra diện tích hình bình hành ABCD.



Hình 8

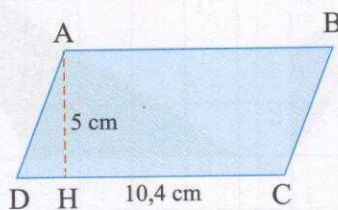
Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.

$$S = d.h$$



Ví dụ : Cho hình bình hành ABCD có đáy $CD = 10,4$ cm và chiều cao tương ứng $AH = 5$ cm (h.9)

Ta có : $S_{ABCD} = d.h = 10,4 \cdot 5 = 52$ (cm²).

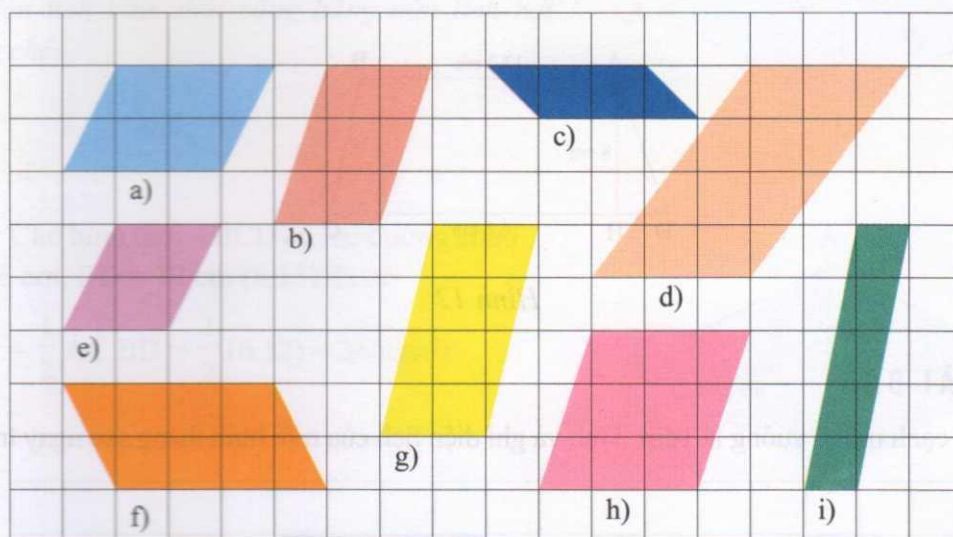


Hình 9



THỬ TÀI BẠN

Cho biết cạnh mỗi ô vuông là 1 m. Tính và ghi diện tích của mỗi hình bình hành sau ngay trên hình.



Hình 10



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Cho hình bình hành có diện tích không đổi, Hùng nói độ dài đáy và chiều cao tương ứng tỉ lệ nghịch. Dũng lại nói chúng tỉ lệ thuận. Theo em, bạn nào đúng ?

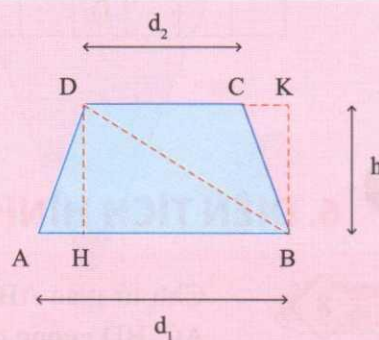


5. DIỆN TÍCH HÌNH THANG

Hoạt động

7

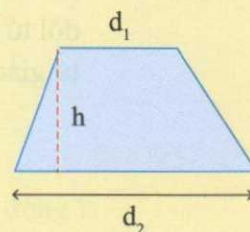
Cho hình thang ABCD có đáy lớn $AB = d_1$, đáy bé $CD = d_2$, chiều cao $DH = BK = h$ (h.11). Tính diện tích hai tam giác ADB và DBC rồi cộng lại để có diện tích hình thang ABCD.



Hình 11

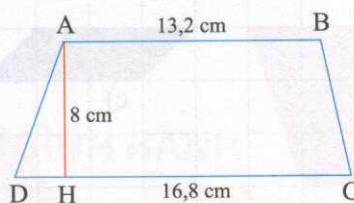
Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao.

$$S = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \cdot h$$



Ví dụ : Cho hình thang ABCD có hai đáy $AB = 13,2 \text{ cm}$; $CD = 16,8 \text{ cm}$ và chiều cao $AH = 8 \text{ cm}$ (h.12). Ta có :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).AH = \frac{1}{2}(13,2 + 16,8).8 = 120 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

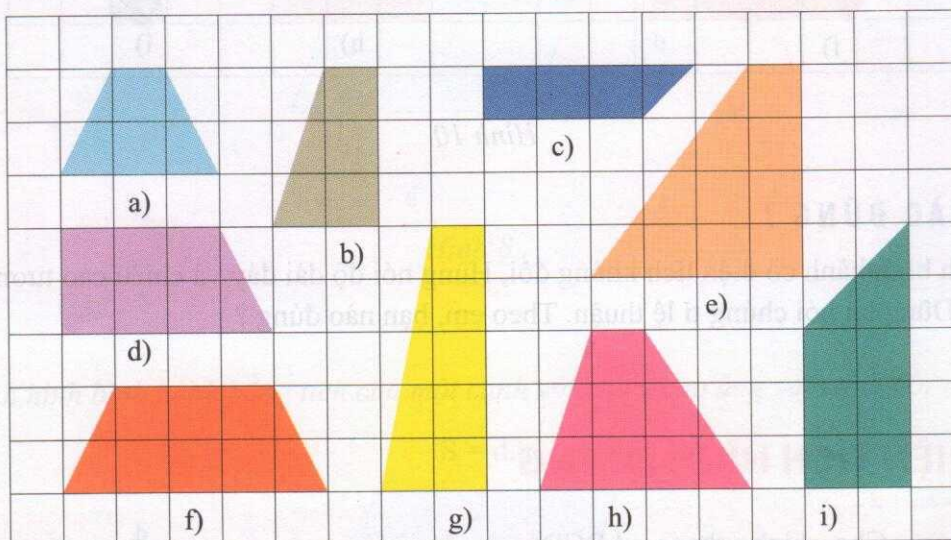


Hình 12



THỬ TÀI BẠN

Cho biết cạnh mỗi ô vuông là 1dm. Tính và ghi diện tích của mỗi hình thang sau ngay trên hình.



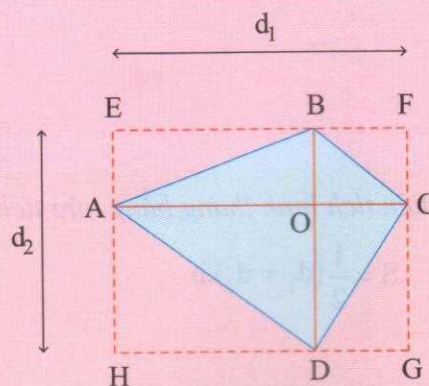
Hình 13

6. DIỆN TÍCH HÌNH THOI

Hoạt động

8

Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD vuông góc và có độ dài lần lượt là $AC = d_1$, $BD = d_2$ (h.14). Hãy chứng tỏ hình chữ nhật EFGH có diện tích gấp đôi tứ giác ABCD. Từ đó, tính diện tích tứ giác ABCD.

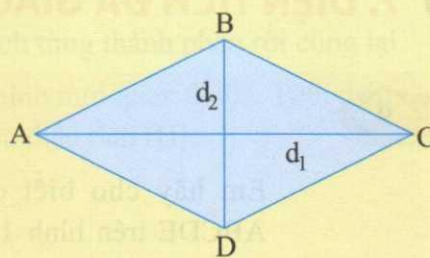


Hình 14

Diện tích của một tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo.

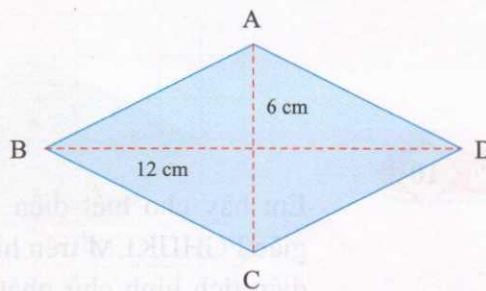
Do hình thoi cũng có hai đường chéo vuông góc nên diện tích hình thoi cũng bằng nửa tích hai đường chéo.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$



Ví dụ : Cho hình thoi ABCD có hai đường chéo $AC = 6 \text{ cm}$, $BD = 12 \text{ cm}$ (h.15). Ta có

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} (6 \cdot 12) = 36 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

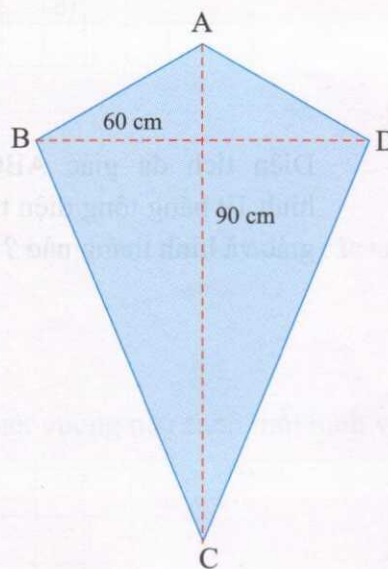
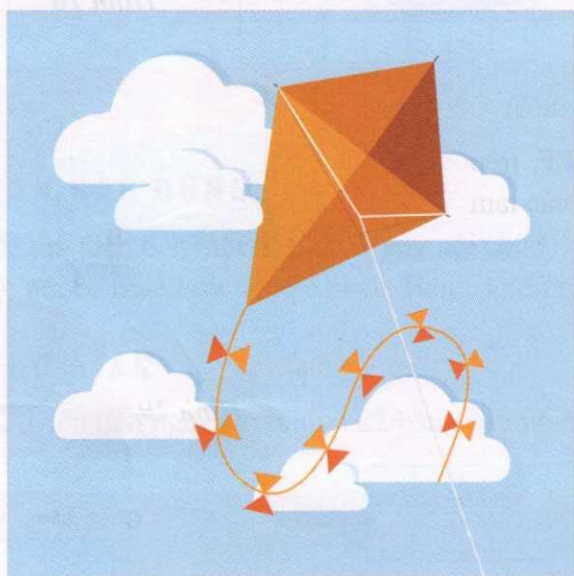


Hình 15



THỬ TÀI BẠN

Hùng làm một cái điều có thân là tứ giác ABCD. Cho biết AC là trung trực của đoạn BD và $AC = 90 \text{ cm}$, $BD = 60 \text{ cm}$ (h.16). Em hãy tính diện tích thân điều.



Hình 16



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Mai nói ta vẫn có thể tính diện tích hình thoi theo công thức

$$S = d \cdot h$$

trong đó d là độ dài một đáy và h là chiều cao tương ứng.

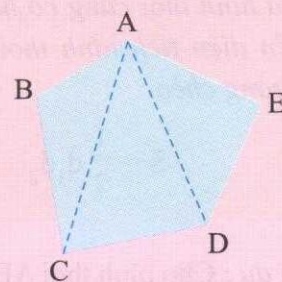
Nhưng Lan lại bảo không thể dùng công thức trên. Theo em, bạn nào đúng ?



7. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Hoạt động 9

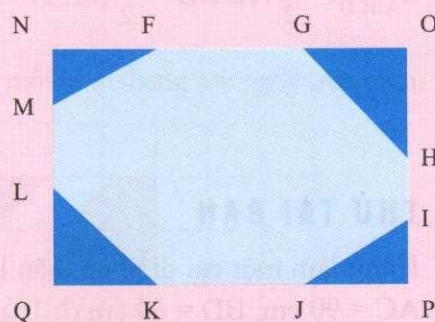
Em hãy cho biết diện tích của đa giác ABCDE trên hình 17 là tổng diện tích của các tam giác nào ?



Hình 17

Hoạt động 10

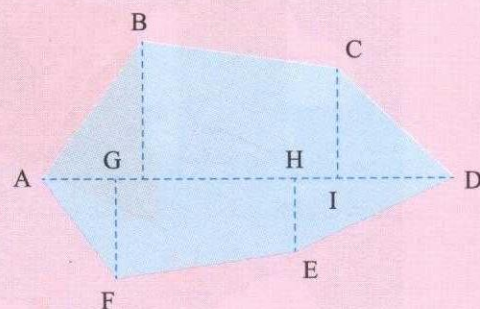
Em hãy cho biết diện tích của đa giác FGHJKLM trên hình 18 bằng diện tích hình chữ nhật NOPQ trừ đi những tam giác nào ?



Hình 18

Hoạt động 11

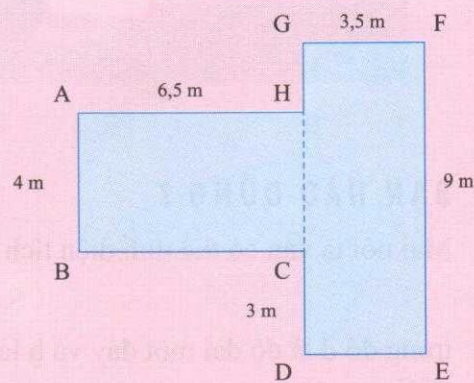
Diện tích đa giác ABCDEF trên hình 19 bằng tổng diện tích các tam giác và hình thang nào ?



Hình 19

Hoạt động 12

Tính diện tích của hình 20 theo kích thước đã cho trên hình.



Hình 20

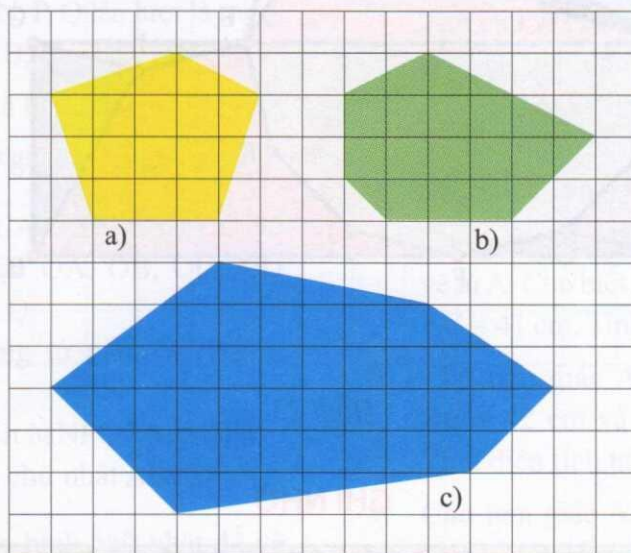
Để tính diện tích một đa giác (H) ta thường dùng các cách sau :

- Phân chia (H) thành các hình đơn giản. Tính diện tích từng thành phần rồi cộng lại.
- Ghép thêm vào (H) các hình đơn giản để được một hình mới quen thuộc. Tính diện tích hình mới đó rồi trừ đi diện tích các hình ghép thêm để được diện tích (H).



THỬ TÀI BẠN

Cho biết cạnh mỗi ô vuông trên hình 21 là 1 m. Tính và ghi diện tích của mỗi hình bên ngay trên hình.



Hình 21



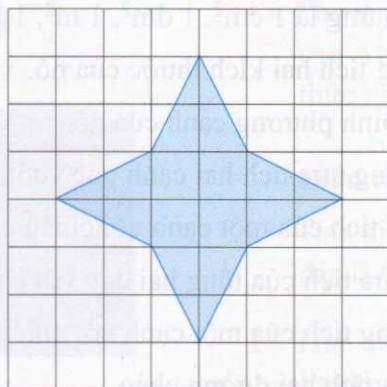
BẠN NÀO ĐÚNG ?

Để tìm diện tích một đa giác, Hùng nói chỉ có một cách phân chia nó thành các tam giác. Dũng lại nói có nhiều cách khác nhau. Bạn nào đúng ?



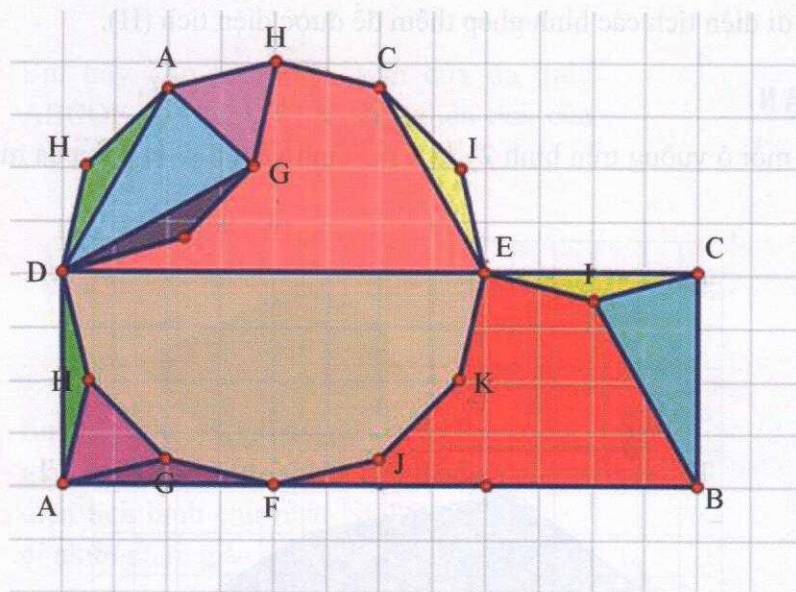
THƯ GIÃN

1. Diện tích ngôi sao ở hình 22 bằng bao nhiêu mét vuông nếu cạnh mỗi hình vuông là 1 m ?



Hình 22

2. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 3AD$. Hãy cắt hình chữ nhật theo hướng dẫn như trong hình 23 để ghép thành một đa giác đều 12 cạnh. Cho biết $AD = 10$ cm, tính diện tích của hình đa giác 12 cạnh đều.



Hình 23

GHI NHỚ

1. Diện tích của một đa giác là số đo phần mặt phẳng giới hạn bởi đa giác đó. Mỗi đa giác có diện tích là một số dương hoàn toàn xác định.
2. Diện tích đa giác có các tính chất sau :
 - Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
 - Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
 - Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1 cm, 1 dm, 1 m, 1 km,... làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là 1 cm^2 , 1 dm^2 , 1 m^2 , 1 km^2 ,
3. Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó.
4. Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó.
5. Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông.
6. Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.
7. Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao.
8. Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.
9. Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo.

BÀI TẬP

Diện tích hình chữ nhật, hình vuông, tam giác vuông

1. Cho hình thoi ABCD có $AC = 12$ cm, $BD = 9$ cm. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.
 - a) Tứ giác MNPQ là hình gì ?
 - b) Tính diện tích tứ giác MNPQ.
2. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O và trung điểm các đoạn OA, OB, OC, OD lần lượt là M, N, P, Q.
 - a) Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.
 - b) Cho biết diện tích MNPQ bằng 20 m^2 . Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.
3. Lan có một tấm bìa hình chữ nhật để vẽ tranh. Em cắt bớt mỗi bề đi 20%. Hỏi diện tích tấm bìa giảm đi bao nhiêu phần trăm ?
4. Tính diện tích của tam giác ABC có độ dài ba cạnh lần lượt là 5 cm ; 12 cm ; 13 cm.
5. Một căn phòng hình chữ nhật (h.24) có kích thước 9,5 m và 7,3 m cần được lót loại thảm bề ngang 4 m.



Hình 24

- a) Hãy vẽ sơ đồ hai cách lót thảm cho căn phòng.
 - b) Tính chiều dài thảm cần thiết cho mỗi cách lót.
 - c) Thảm được bán theo giá 1 000 000 đồng một mét tới. Hãy tính tiền thảm cho cách lót tiết kiệm hơn và cho biết tiết kiệm được bao nhiêu tiền.
6. Tìm chu vi của một miếng đất hình vuông có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật có hai kích thước là 20 m và 80 m.

Diện tích tam giác

7. Cho tam giác ABC có H là chân đường cao vẽ từ A. Cho biết $AB = 15$ cm, $BH = 12$ cm, $AC = 41$ cm. Tính diện tích tam giác ABC.
8. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, $BC = 42$ cm và chiều cao $AH = 10$ cm. Tính diện tích tam giác GBC.
9. Cho tam giác ABC có diện tích 36 cm^2 . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tính diện tích tam giác AMN.
10. Cho tam giác ABC có E và F lần lượt là trung điểm của AB và AC. Cho biết $BF = 12$ cm, $CE = 9$ cm và $BC = 10$ cm. Tính diện tích tam giác ABC.
11. Chứng minh rằng đường trung tuyến của một tam giác bất kì luôn chia nó thành hai tam giác có diện tích bằng nhau.
12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường cao AH. Chứng minh rằng ta luôn có hệ thức : $AB.AC = AH.BC$.

Diện tích hình thang

13. Tính diện tích của hình thang vuông có hai đáy là 12 cm, 6 cm và chiều cao là 6 cm.
14. Tính diện tích hình thang vuông ABCD có hai đáy $AB = 6$ cm, $CD = 9$ cm và cạnh xiên $BC = 5$ cm.

15. Tính diện tích hình thang cân có hai đáy bằng 23 cm, 13 cm và cạnh bên bằng 13 cm.
16. Tính diện tích của hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Cho biết $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $CD = 20$ cm và $\hat{C} = 30^\circ$.
17. Hãy chia hình thang ABCD thành hai hình thang có diện tích bằng nhau.
18. Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích 20m^2 và E là trung điểm của CD. Tính diện tích hình thang ABCE.

Diện tích hình bình hành

19. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 20$ cm, $AD = 30$ cm. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên CD và BC. Cho biết $AH = 15$ cm. Tính AK.
20. Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích 72 cm^2 . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính diện tích của các hình bình hành AECF, EBFD.
21. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 12$ cm, $AD = 24$ cm và $\hat{A} = 30^\circ$. Tính diện tích của hình bình hành ABCD.
22. Chứng minh hai đường chéo của một hình bình hành luôn chia nó thành bốn tam giác có diện tích bằng nhau.
23. Tính các góc của một hình bình hành có diện tích bằng 60 cm^2 và hai cạnh bên của góc nhọn có độ dài là 10 cm và 12 cm.
24. Cho hình bình hành ABCD. Hãy vẽ hình chữ nhật có diện tích bằng diện tích hình bình hành ABCD.

Diện tích hình thoi

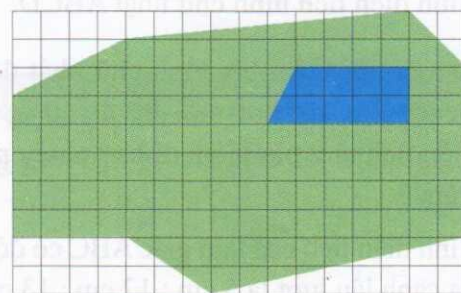
25. Tính diện tích của hình thoi có các đỉnh là trung điểm các cạnh của một hình chữ nhật có hai kích thước là 10 cm và 18 cm.
26. Cho hình thang cân ABCD có diện tích 50 cm^2 và M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh.

- a) Tứ giác MNPQ là hình gì ?
- b) Tính diện tích tứ giác MNPQ.

27. Tính theo a diện tích của hình thoi có bốn cạnh và một đường chéo cùng bằng a.
28. Tính diện tích của một hình thoi có cạnh bằng 4 cm và một góc bằng 150° .
29. Tính diện tích của hình thoi có mỗi cạnh bằng 5 cm và một đường chéo bằng 8 cm.

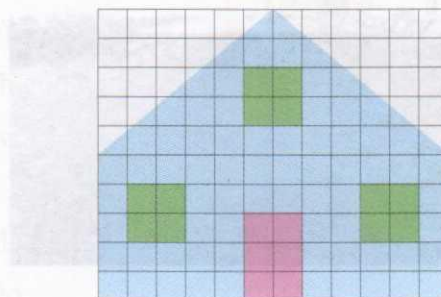
Diện tích đa giác

30. Một nông trường có sơ đồ vẽ theo tỉ lệ xích $\frac{1}{20\,000}$ là phần tô màu xanh lá cây trên hình 25 (mỗi ô vuông có cạnh 1 cm). Hãy tính diện tích thực của nông trường. Biết rằng phần tô màu xanh dương là hồ nước phải trừ đi.



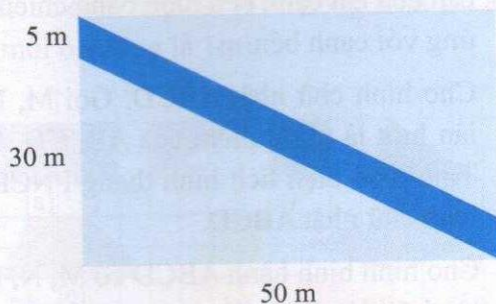
Hình 25

31. Tính diện tích tường nhà trong hình 26 (không tính một cửa đi hình chữ nhật và ba cửa sổ hình vuông). Cho biết mỗi ô vuông có cạnh 1 m.



Hình 26

32. Bác Bảy có một miếng đất hình chữ nhật kích thước 30 m và 50 m như hình 27. Bác dự định làm một con đường hình bình hành băng ngang qua có kích thước như trong hình. Em hãy giúp bác Bảy tính diện tích con đường và diện tích còn lại của miếng đất.



Hình 27



LUYỆN TẬP

1. Bác Bảy muốn lát gạch một cái sân hình chữ nhật có hai kích thước là 8 m và 12 m. Tiền gạch là 120 000 đồng/m² và tiền công lót (tính cả vật liệu) là 60 000 đồng/m². Hỏi bác Bảy phải tốn tổng cộng bao nhiêu tiền ?



2. Cắt hai tam giác vuông bằng nhau từ một tấm bìa. Hãy ghép chúng lại để tạo thành :
a) Một tam giác cân.
b) Một hình chữ nhật.
c) Một hình bình hành.
d) Hãy so sánh diện tích của các hình vừa ghép được.
3. Muốn tăng thêm 125% diện tích, một hình vuông phải được tăng độ dài mỗi cạnh thêm bao nhiêu phần trăm ?
4. Cho hình vuông ABCD có cạnh là a và O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh BC sao cho góc MON vuông. Tính theo a diện tích tứ giác MONB.
5. Tính diện tích S của một tam giác, biết độ dài ba cạnh trong các trường hợp sau :

a (m)	b (m)	c (m)	S (m ²)
3	4	5	
5	12	13	
9	12	15	
9	40	41	

- 6*. Cho tam giác đều ABC có cạnh là a. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm M bên trong tam giác đến ba cạnh luôn bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

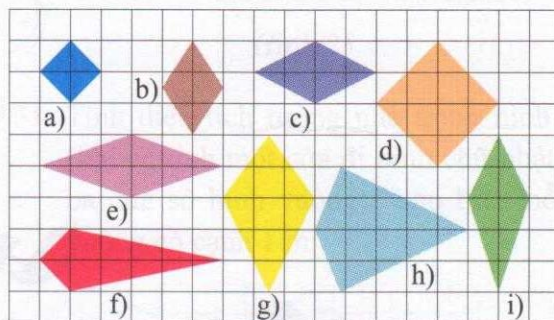
- 7*. Chứng minh rằng tổng hai khoảng cách từ một điểm trên cạnh đáy của một tam giác cân đến hai cạnh bên luôn bằng chiều cao ứng với cạnh bên.

8. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, MB. Tính tỉ số diện tích hình thang PNCD và hình chữ nhật ABCD.

9. Cho hình bình hành ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Đoạn BQ cắt AP và CM tại R và S, đoạn DN cắt AP và CM tại V và T. Tính tỉ số diện tích của hai hình bình hành RSTV và ABCD.

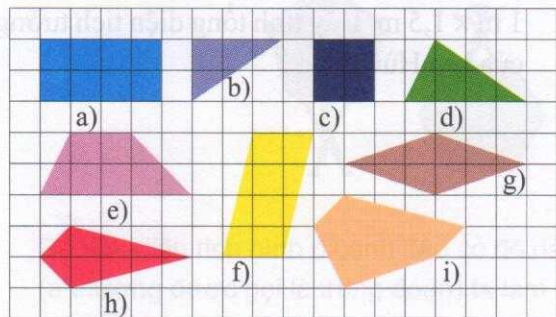
10. Cho hình bình hành ABCD có M là trung điểm của AD và E là một điểm tùy ý trên đoạn CD. Đường thẳng EM cắt AB tại F. Hãy so sánh diện tích của hình bình hành ABCD và tứ giác ECFB.

11. Cho biết cạnh mỗi ô vuông ở hình dưới là 1 cm. Tính diện tích của mỗi hình.



ÔN TẬP CHƯƠNG 2

- Cho biết tổng số đo các góc của một đa giác là 1080° . Hỏi đa giác có bao nhiêu cạnh?
- Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?
- Tính diện tích các hình trong hình 1 (cạnh mỗi ô vuông là 1m).



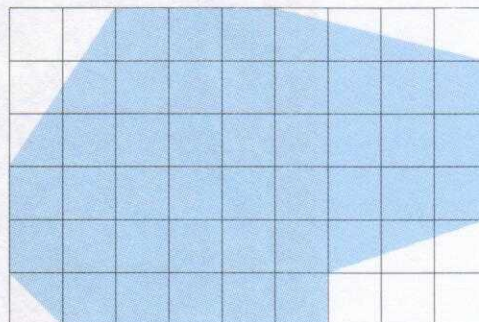
Hình 1

- Chứng minh rằng nếu một tam giác đều có cạnh bằng a thì diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
 - Tính diện tích của lục giác đều có cạnh bằng a .
- Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng hai tam giác MAD và MBC có diện tích bằng nhau.
- Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AD, BC và MN. Qua O vẽ một đường thẳng cắt hai đáy AB và CD tại P, Q. Chứng minh hai tứ giác APQD và BCQP có diện tích bằng nhau.
- Cho hình thang ABCD có đáy lớn DC bằng ba lần đáy nhỏ AB. Trên đoạn DC lấy hai điểm E và F sao cho $DE = EF = FC$. Cho biết diện tích của hình bình hành ABFE là S.

a) Tìm các hình bình hành trong hình cũng có diện tích S.

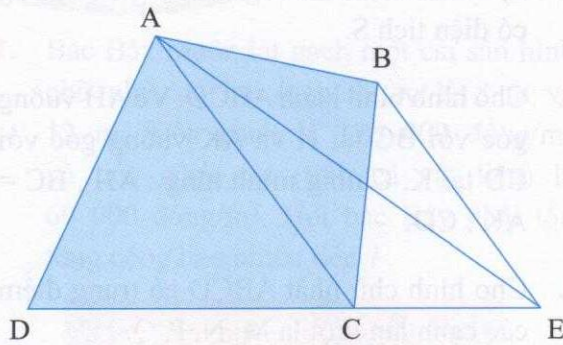
b) Tìm các hình tam giác trong hình cũng có diện tích S.

- Cho hình bình hành ABCD. Vẽ AH vuông góc với BC tại H và AK vuông góc với CD tại K. Chứng minh rằng: $AH \cdot BC = AK \cdot CD$.
- Cho hình chữ nhật ABCD có trung điểm các cạnh lần lượt là M, N, P, Q.
 - Chứng minh rằng MNPQ là một hình thoi.
 - Cho biết diện tích hình chữ nhật ABCD là 20 cm^2 . Tính diện tích hình thoi MNPQ.
- Tính diện tích của hình vuông có độ dài đường chéo là 40 cm.
- Trong các hình thoi cùng có cạnh là a , chứng minh hình vuông có diện tích lớn nhất.
- Cho hình bình hành ABCD có diện tích 120 m^2 . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD, BN cắt DM tại P. Tính diện tích tứ giác ABPD.
- Một miếng đất có bản đồ được vẽ theo tỉ lệ xích $1/10\,000$ là một đa giác như trong hình 2. Cho biết cạnh mỗi ô vuông là 1 cm. Hãy tính xem diện tích thực của miếng đất là bao nhiêu héc-ta.



Hình 2

14. So sánh diện tích tứ giác ABCD và diện tích tam giác ADE, cho biết $BE \parallel AC$ (h.3).

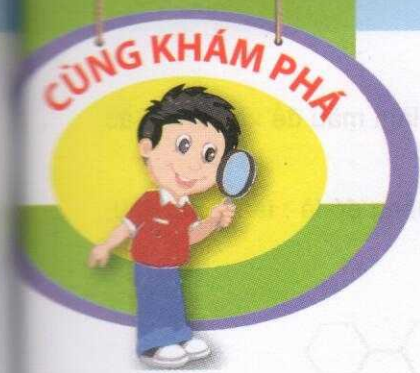


Hình 3

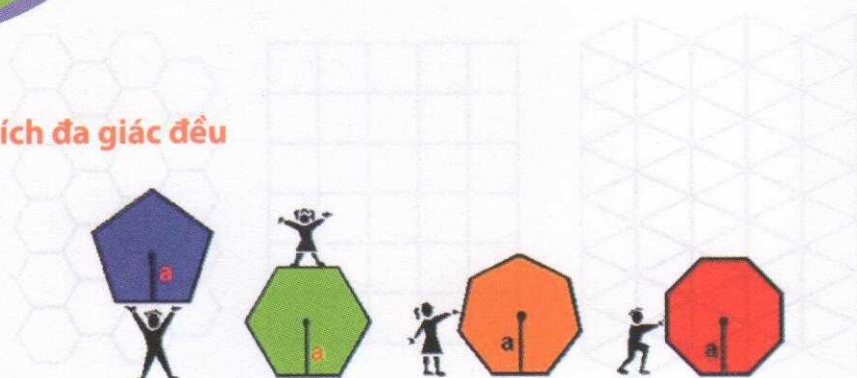
15. Cho một hình thang cân có hai đường chéo vuông góc và có độ dài là 10 cm. Tính diện tích của tứ giác có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình thang.

16. Lớp học của Hùng có sàn hình chữ nhật có kích thước là 4 m và 6 m. Chiều cao của lớp là 4 m. Lớp có một cửa ra vào có kích thước $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ và hai cửa sổ bằng nhau có kích thước $1 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$. Hãy tính tổng diện tích tường của lớp Hùng.





♦ Diện tích đa giác đều



Để tính diện tích hình n cạnh đều có độ dài mỗi cạnh là c , khoảng cách từ tâm đến một cạnh là a (a thường được gọi là trung đoạn) ta làm như sau :

– Chia hình n cạnh đều thành n tam giác cân bằng nhau có đỉnh là tâm của đa giác đều.

– Tính diện tích mỗi tam giác cân : $S_1 = \frac{1}{2} a.c$

– Diện tích đa giác đều bằng n lần diện tích tam giác cân

$$S = nS_1 = n \cdot \frac{1}{2} a.c = \frac{1}{2} a(nc) = \frac{1}{2} a.p \quad (p \text{ là chu vi}).$$

Tóm lại diện tích đa giác đều bằng nửa tích của chu vi và trung đoạn.

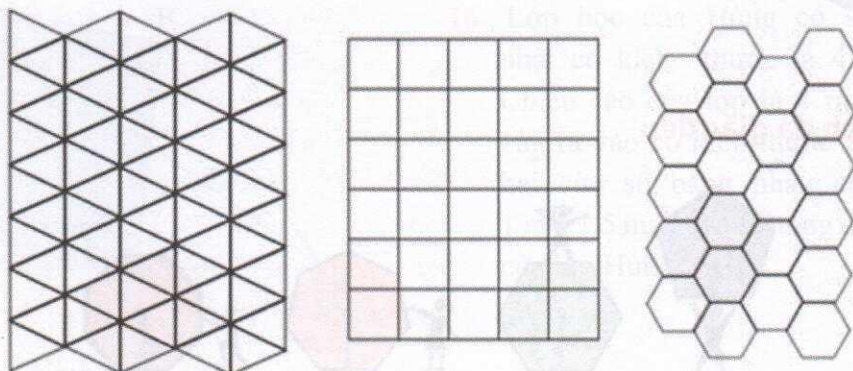
$$S = \frac{1}{2} a.p.$$

♦ Tại sao tổ ong lại có hình lục giác đều ?



Có bao giờ các em tự hỏi : Tại sao loài ong lại chọn hình lục giác đều làm mẫu để xây tổ ? Các nhà khoa học giải thích như sau :

Trong các đa giác đều chỉ có ba loại có thể ghép lại để phủ kín mặt phẳng đó là : tam giác đều, hình vuông và lục giác đều.



Thử tính tỉ số giữa diện tích và chu vi giữa các hình này (cùng có cạnh là 1 đơn vị).

$$\text{Tam giác đều : } \frac{S}{p} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{3} = \frac{1}{4\sqrt{3}} ; \text{ Hình vuông : } \frac{S}{p} = \frac{1}{4} ; \text{ Lục giác đều : } \frac{S}{p} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{4}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4} .$$

$$\text{So sánh ba tỉ số trên, ta có : } \frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{1}{4} > \frac{1}{4\sqrt{3}} .$$

Ta thấy trong ba loại hình nêu trên thì hình lục giác đều có tỉ số giữa diện tích và chu vi lớn nhất, nghĩa là khi xây tổ theo hình lục giác đều, ong tốn ít sáp để làm vách tổ (chu vi nhỏ) mà lại đựng được nhiều mật (diện tích lớn). Như vậy, xem ra loài ong cũng học rất giỏi môn Hình học phải không các em ?