

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN

9

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHAN ĐỨC CHÍNH (Tổng Chủ biên)

TÔN THÂN (Chủ biên)

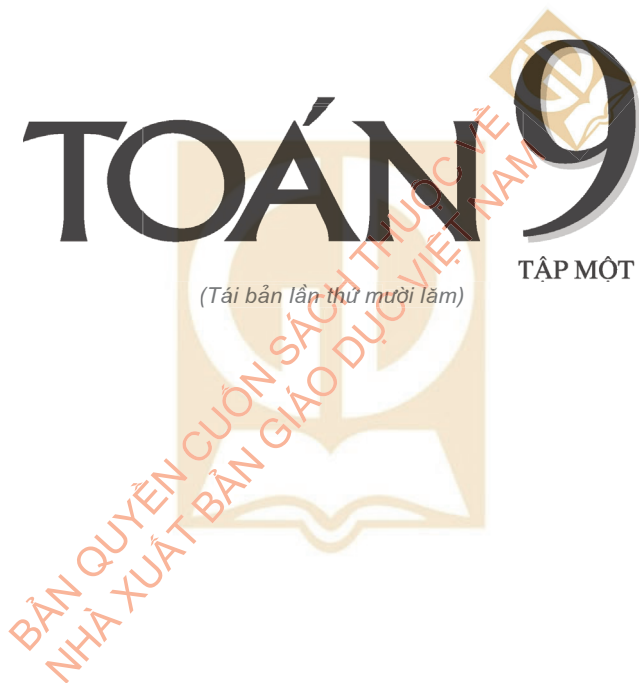
VŨ HỮU BÌNH – TRẦN PHƯƠNG DUNG – NGÔ HỮU DŨNG

LÊ VĂN HỒNG – NGUYỄN HỮU THẢO

TOÁN 9

(Tái bản lần thứ mười lăm)

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng cho các em học sinh lớp sau !

Phần

ĐẠI SỐ

BẢN QUYỀN CUỐN SÁCH THUỘC VỀ
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chương I – CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

§1. Căn bậc hai

Phép toán ngược của phép bình phương
là phép toán nào ?

1. Căn bậc hai số học

Ở lớp 7, ta đã biết :

- Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau : Số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.
- Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.

?1 Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau :

a) 9 ; b) $\frac{4}{9}$; c) 0,25 ; d) 2.

ĐỊNH NGHĨA

Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là **căn bậc hai số học** của a .
Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.

Ví dụ 1. Căn bậc hai số học của 16 là $\sqrt{16}$ ($= 4$).

Căn bậc hai số học của 5 là $\sqrt{5}$.

➤ **Chú ý.** Với $a \geq 0$, ta có :

Nếu $x = \sqrt{a}$ thì $x \geq 0$ và $x^2 = a$;

Nếu $x \geq 0$ và $x^2 = a$ thì $x = \sqrt{a}$.

Ta viết

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = a. \end{cases}$$

?2 Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau :

- a) 49 ; b) 64 ; c) 81 ; d) 1,21.

Giải mẫu

$$\sqrt{49} = 7, \text{ vì } 7 \geq 0 \text{ và } 7^2 = 49.$$

Phép toán tìm căn bậc hai số học của số không âm gọi là *phép khai phương* (gọi tắt là khai phương). Để khai phương một số, người ta có thể dùng máy tính bỏ túi hoặc dùng bảng số (xem §5).

Khi biết căn bậc hai số học của một số, ta dễ dàng xác định được các căn bậc hai của nó. Chẳng hạn, căn bậc hai số học của 49 là 7 nên 49 có hai căn bậc hai là 7 và -7 .

?3 Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau :

- a) 64 ; b) 81 ; c) 1,21.

2. So sánh các căn bậc hai số học

Ta đã biết :

Với hai số a và b không âm, nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ta có thể chứng minh được :

Với hai số a và b không âm, nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

Như vậy ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Với hai số a và b không âm, ta có
 $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}.$

Ví dụ 2. So sánh

- a) 1 và $\sqrt{2}$; b) 2 và $\sqrt{5}$.

Giải

a) $1 < 2$ nên $\sqrt{1} < \sqrt{2}$. Vậy $1 < \sqrt{2}$.

b) $4 < 5$ nên $\sqrt{4} < \sqrt{5}$. Vậy $2 < \sqrt{5}$.

24 So sánh

a) 4 và $\sqrt{15}$;

b) $\sqrt{11}$ và 3.

Ví dụ 3. Tìm số x không âm, biết :

a) $\sqrt{x} > 2$;

b) $\sqrt{x} < 1$.

Giải

a) $2 = \sqrt{4}$, nên $\sqrt{x} > 2$ có nghĩa là $\sqrt{x} > \sqrt{4}$.

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} > \sqrt{4} \Leftrightarrow x > 4$. Vậy $x > 4$.

b) $1 = \sqrt{1}$, nên $\sqrt{x} < 1$ có nghĩa là $\sqrt{x} < \sqrt{1}$.

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} < \sqrt{1} \Leftrightarrow x < 1$. Vậy $0 \leq x < 1$.

25 Tìm số x không âm, biết :

a) $\sqrt{x} > 1$;

b) $\sqrt{x} < 3$.

Bài tập

1. Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng :
121 ; 144 ; 169 ; 225 ; 256 ; 324 ; 361 ; 400.
2. So sánh
a) 2 và $\sqrt{3}$; b) 6 và $\sqrt{41}$; c) 7 và $\sqrt{47}$.
3. Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) :
a) $x^2 = 2$; b) $x^2 = 3$;
c) $x^2 = 3,5$; d) $x^2 = 4,12$.

Hướng dẫn. Nghiệm của phương trình $x^2 = a$ (với $a \geq 0$) là các căn bậc hai của a.

- a)  14m
- b)  14m 3,5m

Hình 1



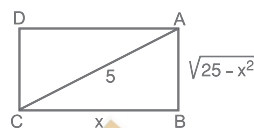
Có thể em chưa biết

7

§2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

1. Căn thức bậc hai

- ?1** Hình chữ nhật ABCD có đường chéo AC = 5 cm và cạnh BC = x (cm) thì cạnh AB = $\sqrt{25 - x^2}$ (cm). Vì sao ? (h.2).



Người ta gọi $\sqrt{25 - x^2}$ là căn thức bậc hai của $25 - x^2$, còn $25 - x^2$ là biểu thức lấy căn.

Một cách tổng quát :

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là **căn thức bậc hai** của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.

$\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi A lấy giá trị không âm.

Ví dụ 1. $\sqrt{3x}$ là căn thức bậc hai của $3x$; $\sqrt{3x}$ xác định khi $3x \geq 0$, tức là khi $x \geq 0$. Chẳng hạn, với $x = 2$ thì $\sqrt{3x}$ lấy giá trị $\sqrt{6}$; với $x = 12$ thì $\sqrt{3x}$ lấy giá trị $\sqrt{36} = 6$.

- ?2** Với giá trị nào của x thì $\sqrt{5 - 2x}$ xác định ?

2. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

- ?3** Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

a	-2	-1	0	2	3
a^2					
$\sqrt{a^2}$					

ĐỊNH LÝ

Với mọi số a , ta có $\sqrt{a^2} = |a|$.

Chứng minh

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối thì $|a| \geq 0$.

Ta thấy :

Nếu $a \geq 0$ thì $|a| = a$, nên $(|a|)^2 = a^2$;

Nếu $a < 0$ thì $|a| = -a$, nên $(|a|)^2 = (-a)^2 = a^2$.

Do đó, $(|a|)^2 = a^2$ với mọi số a .

Vậy $|a|$ chính là căn bậc hai số học của a^2 , tức là $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt{12^2}$;

b) $\sqrt{(-7)^2}$;

Giải

a) $\sqrt{12^2} = 12 = 12$.

b) $\sqrt{(-7)^2} = -7 = 7$.

Ví dụ 3. Rút gọn

a) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$;

b) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$.

Giải

a) $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ (vì $\sqrt{2} > 1$).

Vậy $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$.

b) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$ (vì $\sqrt{5} > 2$).

Vậy $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$.

➤ **Chú ý.** Một cách tổng quát, với A là một biểu thức ta có $\sqrt{A^2} = |A|$, có nghĩa là :

$$\sqrt{A^2} = A \text{ nếu } A \geq 0 \text{ (tức là } A \text{ lấy giá trị không âm) ;}$$

$$\sqrt{A^2} = -A \text{ nếu } A < 0 \text{ (tức là } A \text{ lấy giá trị âm).}$$

Ví dụ 4. Rút gọn

a) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$;

b) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.

Giải

a) $\sqrt{(x-2)^2} = x-2 = x-2$ (vì $x \geq 2$).

b) $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = a^3$.

Vì $a < 0$ nên $a^3 < 0$, do đó $a^3 = -a^3$.

Vậy $\sqrt{a^6} = -a^3$ (với $a < 0$).

Bài tập

6. Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa :

a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$;

b) $\sqrt{-5a}$;

c) $\sqrt{4-a}$;

d) $\sqrt{3a+7}$?

7. Tính

a) $\sqrt{(0,1)^2}$;

b) $\sqrt{(-0,3)^2}$;

c) $-\sqrt{(-1,3)^2}$;

d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$.

8. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$;

b) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$;

c) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$;

d) $3\sqrt{(a-2)^2}$ với $a < 2$.

9. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{x^2} = 7$;

b) $\sqrt{x^2} = |-8|$;

c) $\sqrt{4x^2} = 6$;

d) $\sqrt{9x^2} = -12$.

10. Chứng minh

a) $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$.

Luyện tập

11. Tính

a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$;

b) $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$;

c) $\sqrt{\sqrt{81}}$;

d) $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

12. Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa :

a) $\sqrt{2x + 7}$;

b) $\sqrt{-3x + 4}$;

c) $\sqrt{\frac{1}{-1 + x}}$;

d) $\sqrt{1 + x^2}$.

13. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $2\sqrt{a^2} - 5a$ với $a < 0$;

b) $\sqrt{25a^2} + 3a$ với $a \geq 0$;

c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$;

d) $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a < 0$.

14. Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 - 3$;

b) $x^2 - 6$;

c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$;

d) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$.

Hướng dẫn. Dùng kết quả :

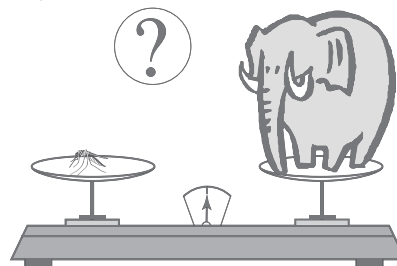
Với $a \geq 0$ thì $a = (\sqrt{a})^2$.

15. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 5 = 0$;

b) $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$.

16. **Đố.** Hãy tìm chỗ sai trong phép chứng minh "Con muỗi nặng bằng con voi" dưới đây.



Giả sử con muỗi nặng m (gam), còn con voi nặng V (gam). Ta có

$$m^2 + V^2 = V^2 + m^2.$$

Cộng cả hai vế với $-2mV$, ta có

$$m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2,$$

hay $(m - V)^2 = (V - m)^2.$

Lấy căn bậc hai mỗi vế của đẳng thức trên, ta được

$$\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2}.$$

Do đó $m - V = V - m.$

Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi (!).

§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

1. Định lí

?1 Tính và so sánh : $\sqrt{16 \cdot 25}$ và $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$.

ĐỊNH LÍ

Với hai số a và b không âm, ta có

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Chứng minh. Vì $a \geq 0$ và $b \geq 0$ nên $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ xác định và không âm.

Ta có $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$.

Vậy $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ là căn bậc hai số học của $a \cdot b$, tức là $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

➤ **Chú ý.** Định lý trên có thể mở rộng cho tích của nhiều số không âm.

2. Áp dụng

a) Quy tắc khai phương một tích

Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính :

a) $\sqrt{49 \cdot 1,44 \cdot 25}$;

b) $\sqrt{810 \cdot 40}$.

Giải

a) $\sqrt{49 \cdot 1,44 \cdot 25} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{1,44} \cdot \sqrt{25} = 7 \cdot 1,2 \cdot 5 = 42$.

b) $\sqrt{810 \cdot 40} = \sqrt{81 \cdot 4 \cdot 100} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = 9 \cdot 2 \cdot 10 = 180$.

?

Tính

a) $\sqrt{0,16 \cdot 0,64 \cdot 225}$;

b) $\sqrt{250 \cdot 360}$.

b) Quy tắc nhân các căn bậc hai

Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$;

b) $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{10}$.

Giải

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$.

b) $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{1,3 \cdot 52 \cdot 10} = \sqrt{13 \cdot 52} = \sqrt{13 \cdot 13 \cdot 4} = \sqrt{(13 \cdot 2)^2} = 26$.

23 Tính

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$;

b) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{4,9}$.

➤ **Chú ý.** Một cách tổng quát, với hai biểu thức A và B không âm ta có

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}.$$

Đặc biệt, với biểu thức A không âm ta có

$$(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a}$ với $a \geq 0$;

b) $\sqrt{9a^2b^4}$;

Giải

a) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a} = \sqrt{3a \cdot 27a} = \sqrt{81a^2} = \sqrt{(9a)^2} = 9a = 9a$ (vì $a \geq 0$).

b) $\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^4} = 3 \cdot |a| \cdot \sqrt{(b^2)^2} = 3|a|b^2$.

Ta còn có thể rút gọn như sau : $\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{(3ab^2)^2} = |3ab^2| = 3|a|b^2$.

24 Rút gọn các biểu thức sau (với a và b không âm) :

a) $\sqrt{3a^3} \cdot \sqrt{12a}$;

b) $\sqrt{2a} \cdot 32ab^2$.

Bài tập

17. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính

a) $\sqrt{0,09 \cdot 64}$;

b) $\sqrt{2^4 \cdot (-7)^2}$;

c) $\sqrt{121 \cdot 360}$;

d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$.

18. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{63}$;

b) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{48}$;

c) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{6,4}$;

d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{1,5}$.

19. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{0,36a^2}$ với $a < 0$;

b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$;

c) $\sqrt{27,48(1-a)^2}$ với $a > 1$;

d) $\frac{1}{a-b} \cdot \sqrt{a^4(a-b)^2}$ với $a > b$.

20. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$;

b) $\sqrt{13a} \cdot \sqrt{\frac{52}{a}}$ với $a > 0$;

c) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$;

d) $(3-a)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180a^2}$.

21. Khai phương tích $12 \cdot 30 \cdot 40$ được :

(A) 1200 ;

(B) 120 ;

(C) 12 ;

(D) 240.

Hãy chọn kết quả đúng.

Luyện tập

22. Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi tính

a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$;

b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$;

c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$;

d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$.

23. Chứng minh

a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$;

b) $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005})$ và $(\sqrt{2006} + \sqrt{2005})$ là hai số nghịch đảo của nhau.

24. Rút gọn và tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) của các căn thức sau :

a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2}$ tại $x = -\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ tại $a = -2, b = -\sqrt{3}$.

25. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{16x} = 8$;

b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$;

c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$;

d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$.

26. a) So sánh $\sqrt{25+9}$ và $\sqrt{25} + \sqrt{9}$;

b) Với $a > 0$ và $b > 0$, chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

27. So sánh

a) 4 và $2\sqrt{3}$;

b) $-\sqrt{5}$ và -2 .

§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

1. Định lí

21 Tính và so sánh $\sqrt{\frac{16}{25}}$ và $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

ĐỊNH LÍ

Với số a không âm và số b dương, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Chứng minh. Vì $a \geq 0$ và $b > 0$ nên $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ xác định và không âm.

Ta có $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$.

Vậy $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ là căn bậc hai số học của $\frac{a}{b}$, tức là $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

2. Áp dụng

a) Quy tắc khai phương một thương

Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó số a không âm và số b dương, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b , rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính

a) $\sqrt{\frac{25}{121}}$;

b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}} = \frac{5}{11}$.

b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{9}{10}$.

?

Tính

a) $\sqrt{\frac{225}{256}}$;

b) $\sqrt{0,0196}$.

b) Quy tắc chia hai căn bậc hai

Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho căn bậc hai của số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

Ví dụ 2. Tính

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$.

Giải

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$.

b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{49}{8} : \frac{25}{8}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$.

?3 Tính

a) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$;

b) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

➤ **Chú ý.** Một cách tổng quát, với biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$;

b) $\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}} = \frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2}}{5} = \frac{2}{5} |a|$.

b) $\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{27a}{3a}} = \sqrt{9} = 3$ (với $a > 0$).

?4 Rút gọn

a) $\sqrt{\frac{2a^2b^4}{50}}$;

b) $\frac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ với $a \geq 0$.

Bài tập

28. Tính

a) $\sqrt{\frac{289}{225}}$;

b) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$;

c) $\sqrt{\frac{0,25}{9}}$;

d) $\sqrt{\frac{8,1}{1,6}}$.

29. Tính

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$;

b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$;

c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$;

d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$.

30. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\frac{y}{x} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$;

b) $2y^2 \cdot \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$;

c) $5xy \cdot \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0, y > 0$;

d) $0,2x^3y^3 \cdot \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $x \neq 0, y \neq 0$.

31. a) So sánh $\sqrt{25-16}$ và $\sqrt{25}-\sqrt{16}$;

b) Chứng minh rằng, với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

Luyện tập

32. Tính

a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}$;

b) $\sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4}$;

c) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$;

d) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$.

33. Giải phương trình

a) $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0$;

b) $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3} = \sqrt{12} + \sqrt{27}$;

c) $\sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{12} = 0$;

d) $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0$.

34. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $ab^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$ với $a < 0, b \neq 0$;

b) $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$;

c) $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $a \geq -1,5$ và $b < 0$; d) $(a-b) \cdot \sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

35. Tìm x , biết :

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$;

b) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6$.

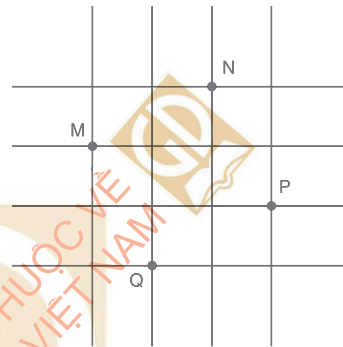
36. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ?
Vì sao ?

a) $0,01 = \sqrt{0,0001}$;

b) $-0,5 = \sqrt{-0,25}$;

c) $\sqrt{39} < 7$ và $\sqrt{39} > 6$;

d) $(4 - \sqrt{13}) \cdot 2x < \sqrt{3}(4 - \sqrt{13})$
 $\Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.



Hình 3

37. **Đố.** Trên lưới ô vuông, mỗi ô vuông cạnh 1cm, cho bốn điểm M, N, P, Q (h.3).
Hãy xác định số đo cạnh, đường chéo và diện tích của tứ giác MNPQ.

§5. Bảng căn bậc hai

Một công cụ tiện lợi để khai phương khi không có máy tính.

Để tìm căn bậc hai của một số dương, người ta có thể sử dụng bảng tính sẵn các căn bậc hai. Trong cuốn "Bảng số với 4 chữ số thập phân" của V.M. Bra-di-xơ, bảng căn bậc hai là bảng IV dùng để khai căn bậc hai của bất cứ số dương nào có nhiều nhất bốn chữ số.

1. Giới thiệu bảng

Bảng căn bậc hai được chia thành các hàng và các cột. Ta quy ước gọi tên của các hàng (cột) theo số được ghi ở cột đầu tiên (hàng đầu tiên) của

mỗi trang. Căn bậc hai của các số được viết bởi không quá ba chữ số từ 1,00 đến 99,9 được ghi sẵn trong bảng ở các cột từ cột 0 đến cột 9. Tiếp đó là chín cột hiệu chỉnh được dùng để hiệu chỉnh chữ số cuối của căn bậc hai của các số được viết bởi bốn chữ số từ 1,000 đến 99,99.

2. Cách dùng bảng

a) Tìm căn bậc hai của số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 100

Ví dụ 1. Tìm $\sqrt{1,68}$.

Tại giao của hàng 1,6 và cột 8, ta thấy số 1,296. Vậy $\sqrt{1,68} \approx 1,296$ (mẫu 1).

N	...	8	...
.			
.			
1,6		1,296	
.			
.			

Mẫu 1

Ví dụ 2. Tìm $\sqrt{39,18}$.

Tại giao của hàng 39, và cột 1, ta thấy số 6,253. Ta có $\sqrt{39,1} \approx 6,253$.

Tại giao của hàng 39, và cột 8

hiệu chỉnh, ta thấy số 6.

Ta dùng số 6 này để hiệu

chỉnh chữ số cuối ở số

6,253 như sau :

$$6,253 + 0,006 = 6,259.$$

Vậy $\sqrt{39,18} \approx 6,259$ (mẫu 2).

N	...	1	...	8	...
.					
.					
39,		6,253		6	
.					
.					

Mẫu 2

❓

Tìm

a) $\sqrt{9,44}$;

b) $\sqrt{39,82}$.

Bảng tính sẵn căn bậc hai của tác giả V.M. Bra-đi-xơ chỉ cho phép ta tìm trực tiếp căn bậc hai của số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 100. Tuy nhiên, dựa vào tính chất của căn bậc hai, ta vẫn dùng bảng này để tìm được căn bậc hai của số không âm lớn hơn 100 hoặc nhỏ hơn 1.

b) Tìm căn bậc hai của số lớn hơn 100

Ví dụ 3. Tìm $\sqrt{1680}$.

Ta biết $1680 = 16,8 \cdot 100$.

$$\text{Do đó } \sqrt{1680} = \sqrt{16,8} \cdot \sqrt{100} = 10 \cdot \sqrt{16,8}.$$

Tra bảng ta được $\sqrt{16,8} \approx 4,099$. Vậy $\sqrt{1680} \approx 10 \cdot 4,099 = 40,99$.

?2 Tìm

a) $\sqrt{911}$; b) $\sqrt{988}$.

c) Tìm căn bậc hai của số không âm và nhỏ hơn 1

Ví dụ 4. Tìm $\sqrt{0,00168}$.

Ta biết $0,00168 = 16,8 : 10000$.

$$\text{Do đó } \sqrt{0,00168} = \sqrt{16,8} : \sqrt{10000} \approx 4,099 : 100 = 0,04099.$$

➤ **Chú ý.** Để thực hành nhanh, khi tìm căn bậc hai của số không âm lớn hơn 100 hoặc nhỏ hơn 1, ta dùng hướng dẫn của bảng : "Khi dời dấu phẩy trong số N đi 2, 4, 6,... chữ số thì phải dời dấu phẩy theo cùng chiều trong số $\sqrt{N}$ đi 1, 2, 3,... chữ số" (ví dụ 3 minh họa trường hợp dời dấu phẩy ở số 16,8 sang phải 2 chữ số nên phải dời dấu phẩy ở số 4,099 sang phải 1 chữ số ; ví dụ 4 minh họa trường hợp dời dấu phẩy ở số 16,8 sang trái 4 chữ số nên phải dời dấu phẩy ở số 4,099 sang trái 2 chữ số).

?3 Dùng bảng căn bậc hai, tìm giá trị gần đúng của nghiệm phương trình

$$x^2 = 0,3982.$$

Bài tập

Dùng bảng số để tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau đây rồi dùng máy tính bỏ túi kiểm tra và so sánh kết quả (từ bài 38 đến bài 40).

38. 5,4 ; 7,2 ; 9,5 ; 31 ; 68.
39. 115 ; 232 ; 571 ; 9691.
40. 0,71 ; 0,03 ; 0,216 ; 0,811 ; 0,0012 ; 0,000315.
41. Biết $\sqrt{9,119} \approx 3,019$. Hãy tính
 $\sqrt{911,9}$; $\sqrt{91190}$; $\sqrt{0,09119}$; $\sqrt{0,0009119}$.
42. Dùng bảng căn bậc hai để tìm giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau :
a) $x^2 = 3,5$; b) $x^2 = 132$.



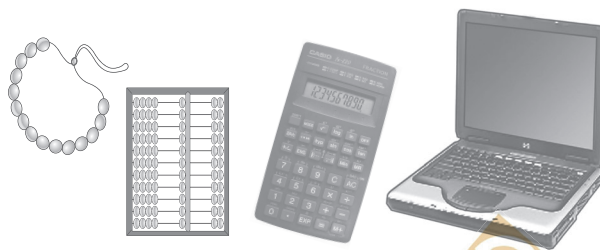
Có thể em chưa biết

Thời xa xưa, con người làm tính bằng cách đếm ngón tay, ngón chân rồi đến đốt ngón tay, đốt ngón chân ; khi gặp các số lớn hơn, người ta dùng hòn sỏi, hạt cây. Sau đó, họ làm ra các bàn tính gậy (có thể bắt đầu do ghép xâu các hạt cây lại). Dùng bàn tính gậy, người ta có thể tính toán được với cả các số thập phân. Hiện nay, bàn tính gậy vẫn còn được sử dụng ngay cả ở các nước rất sẵn máy tính bỏ túi.

Sự phát triển của khoa học, kỹ thuật và nhu cầu thương mại đã đòi hỏi phải đặt ra các bảng tính sẵn. Các nhà thiên văn học, toán học Cô-pec-ních (Ba Lan), Kê-ple (Đức), Nê-pe (Anh) là những người đầu tiên xây dựng kỹ thuật tính toán và đã lập ra nhiều bảng tính sẵn. Bảng số với 4 chữ số thập phân là một dạng bảng tính sẵn như thế.

Ngày nay, những chiếc máy tính bỏ túi gọn nhẹ không chỉ thay thế các bảng tính sẵn để tính một cách nhanh chóng mà còn có độ chính xác cao hơn. Tuy nhiên, cũng như các bàn tính gậy, các bảng tính sẵn vẫn có những ưu thế riêng nên người ta vẫn tiếp tục dùng chúng. Mạnh hơn những chiếc máy

tính bỏ túi và cũng dễ dàng mang theo bên người là những chiếc máy tính xách tay.



Chuỗi hạt cây để đếm, bàn tính gậy, chiếc máy tính bỏ túi và chiếc máy tính xách tay.

§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

¶1 Với $a \geq 0, b \geq 0$, hãy chứng tỏ $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.

- Đẳng thức $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ trong **¶1** cho phép ta thực hiện phép biến đổi $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ (với $a \geq 0, b \geq 0$) Phép biến đổi này được gọi là phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn.
- Đôi khi, ta phải biến đổi biểu thức dưới dấu căn về dạng thích hợp rồi mới thực hiện được phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Ví dụ 1

a) $\sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$.

- Có thể sử dụng phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn để rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5}.$$

Giải

$$\begin{aligned} 3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5} &= 3\sqrt{5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \\ &= (3 + 2 + 1)\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Các biểu thức $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{5}$ được gọi là *đồng dạng* với nhau.

22 *Rút gọn biểu thức*

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$;

b) $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$.

Một cách tổng quát :

Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$, ta có $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A|\sqrt{B}$, tức là :

Nếu $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$;

Nếu $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$.

Ví dụ 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{4x^2y}$ với $x \geq 0, y \geq 0$;

b) $\sqrt{18xy^2}$ với $x \geq 0, y < 0$.

Giải

a) $\sqrt{4x^2y} = \sqrt{(2x)^2 y} = |2x|\sqrt{y} = 2x\sqrt{y}$ (với $x \geq 0, y \geq 0$).

b) $\sqrt{18xy^2} = \sqrt{(3y)^2 2x} = |3y|\sqrt{2x} = -3y\sqrt{2x}$ (với $x \geq 0, y < 0$).

23 *Đưa thừa số ra ngoài dấu căn*

a) $\sqrt{28a^4b^2}$ với $b \geq 0$;

b) $\sqrt{72a^2b^4}$ với $a < 0$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

- Phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn có phép biến đổi ngược với nó là phép đưa thừa số vào trong dấu căn.

Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ ta có $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$.

Với $A < 0$ và $B \geq 0$ ta có $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$.

Ví dụ 4. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $3\sqrt{7}$;

b) $-2\sqrt{3}$;

c) $5a^2\sqrt{2a}$ với $a \geq 0$;

d) $-3a^2\sqrt{2ab}$ với $ab \geq 0$.

Giải

a) $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}.$

$$\text{b) } -2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2 \cdot 3} = -\sqrt{12}.$$

$$\text{c) } 5a^2\sqrt{2a} = \sqrt{(5a^2)^2 \cdot 2a} = \sqrt{25a^4 \cdot 2a} = \sqrt{50a^5}.$$

$$\text{d) } -3a^2\sqrt{2ab} = -\sqrt{(3a^2)^2 \cdot 2ab} = -\sqrt{9a^4 \cdot 2ab} = -\sqrt{18a^5b}.$$

?4 Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $3\sqrt{5}$;

$$b) 1, 2\sqrt{5} ;$$

c) $ab^4\sqrt{a}$ với $a \geq 0$;

d) $-2ab^2\sqrt{5a}$ với $a \geq 0$.

- Có thể sử dụng phép đưa thừa số vào trong (hoặc ra ngoài) dấu căn để so sánh các căn bậc hai.

Ví dụ 5. So sánh $3\sqrt{7}$ với $\sqrt{28}$.

Giải

Cách 1. $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}$.

Vì $\sqrt{63} > \sqrt{28}$ nên $3\sqrt{7} > \sqrt{28}$.

Cách 2. $\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$. Vì $3\sqrt{7} > 2\sqrt{7}$ nên $3\sqrt{7} > \sqrt{28}$.

Bài tập

43. Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{54}$; b) $\sqrt{108}$; c) $0,1\sqrt{20000}$;
d) $-0,05\sqrt{28800}$; e) $\sqrt{7.63.a^2}$.

44. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$3\sqrt{5} ; -5\sqrt{2} ; -\frac{2}{3}\sqrt{xy} \text{ với } xy \geq 0 ; x\sqrt{\frac{2}{x}} \text{ với } x > 0.$$

45. So sánh

a) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$; b) 7 và $3\sqrt{5}$;
c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

46. Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$; b) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$.

47. Rút gọn

a) $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0, y \geq 0$ và $x \neq y$;
b) $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$ với $a > 0,5$.

§7. Biến đổi đơn giản biểu thức

chứa căn thức bậc hai

(tiếp theo)

1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Khi biến đổi biểu thức chứa căn thức bậc hai, người ta có thể sử dụng phép khử mẫu của biểu thức lấy căn. Dưới đây là một số trường hợp đơn giản.

Ví dụ 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; b) $\sqrt{\frac{5a}{7b}}$ với $a, b > 0$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

b) $\sqrt{\frac{5a}{7b}} = \sqrt{\frac{5a \cdot 7b}{7b \cdot 7b}} = \frac{\sqrt{5a \cdot 7b}}{\sqrt{(7b)^2}} = \frac{\sqrt{35ab}}{7|b|}$.

Một cách tổng quát :

Với các biểu thức A, B mà $A \cdot B \geq 0$ và $B \neq 0$, ta có

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}.$$

21 Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{4}{5}}$; b) $\sqrt{\frac{3}{125}}$; c) $\sqrt{\frac{3}{2a^3}}$ với $a > 0$.

2. Trục căn thức ở mẫu

Trục căn thức ở mẫu cũng là một phép biến đổi đơn giản thường gặp. Dưới đây là một số trường hợp đơn giản.

Ví dụ 2. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$; b) $\frac{10}{\sqrt{3}+1}$; c) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}\sqrt{3}$.

b) $\frac{10}{\sqrt{3}+1} = \frac{10(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{10(\sqrt{3}-1)}{3-1} = 5(\sqrt{3}-1)$.

c) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = 3(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

Trong ví dụ trên ở câu b), để trục căn thức ở mẫu, ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức $\sqrt{3} - 1$. Ta gọi biểu thức $\sqrt{3} + 1$ và biểu thức $\sqrt{3} - 1$ là *hai biểu thức liên hợp với nhau*. Tương tự, ở câu c), ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ là $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Một cách tổng quát :

a) Với các biểu thức A, B mà B > 0, ta có

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

b) Với các biểu thức A, B, C mà A ≥ 0 và A ≠ B², ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}.$$

c) Với các biểu thức A, B, C mà A ≥ 0, B ≥ 0 và A ≠ B, ta có

$$\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}.$$

22 Trục căn thức ở mẫu :

a) $\frac{5}{3\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{b}}$ với b > 0 ;

b) $\frac{5}{5-2\sqrt{3}}, \frac{2a}{1-\sqrt{a}}$ với a ≥ 0 và a ≠ 1 ;

c) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}, \frac{6a}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với a > b > 0.

Bài tập

Khử mẫu của biểu thức lấy căn (các bài 48 và 49)

48. $\sqrt{\frac{1}{600}}; \sqrt{\frac{11}{540}}; \sqrt{\frac{3}{50}}; \sqrt{\frac{5}{98}}; \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}.$

49. $ab\sqrt{\frac{a}{b}}; \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}; \sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}}; \sqrt{\frac{9a^3}{36b}}; 3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}.$

(Giả thiết các biểu thức có nghĩa).

Trục căn thức ở mẫu với giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa (từ bài 50 đến bài 52)

$$\begin{aligned}
 50. & \frac{5}{\sqrt{10}}; \quad \frac{5}{2\sqrt{5}}; \quad \frac{1}{3\sqrt{20}}; \quad \frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}; \quad \frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}. \\
 51. & \frac{3}{\sqrt{3}+1}; \quad \frac{2}{\sqrt{3}-1}; \quad \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}; \quad \frac{b}{3+\sqrt{b}}; \quad \frac{p}{2\sqrt{p}-1}. \\
 52. & \frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}; \quad \frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}; \quad \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}; \quad \frac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.
 \end{aligned}$$

Luyện tập

53. Rút gọn các biểu thức sau (giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa) :

$$\begin{aligned}
 a) & \sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}; & b) & ab\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}}; \\
 c) & \sqrt{\frac{a}{b^3}+\frac{a}{b^4}}; & d) & \frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.
 \end{aligned}$$

54. Rút gọn các biểu thức sau (giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa) :

$$\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}; \quad \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}; \quad \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}; \quad \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}; \quad \frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}.$$

55. Phân tích thành nhân tử (với a, b, x, y là các số không âm)

$$\begin{aligned}
 a) & ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1; \\
 b) & \sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}.
 \end{aligned}$$

56. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

$$a) 3\sqrt{5}, 2\sqrt{6}, \sqrt{29}, 4\sqrt{2}; \quad b) 6\sqrt{2}, \sqrt{38}, 3\sqrt{7}, 2\sqrt{14}.$$

57. $\sqrt{25x}-\sqrt{16x}=9$ khi x bằng

$$(A) 1; \quad (B) 3; \quad (C) 9; \quad (D) 81.$$

Hãy chọn câu trả lời đúng.

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

Ví dụ 1. Rút gọn $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$ với $a > 0$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} 5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5} &= 5\sqrt{a} + \frac{6}{2}\sqrt{a} - a\sqrt{\frac{4a}{a^2}} + \sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt{5} = 6\sqrt{a} + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

?1 Rút gọn $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$.

Rút gọn biểu thức được áp dụng trong nhiều bài toán về biểu thức có chứa căn thức bậc hai.

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}.$$

Giải. Biến đổi về trái, ta có

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) &= (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

?2 Chứng minh đẳng thức

$$\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \text{ với } a > 0, b > 0.$$

Ví dụ 3. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right) \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tìm giá trị của a để $P < 0$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \left(\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} - 1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{a} - 1)^2 - (\sqrt{a} + 1)^2}{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)} \\ &= \left(\frac{a - 1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \frac{a - 2\sqrt{a} + 1 - a - 2\sqrt{a} - 1}{a - 1} = \frac{(a - 1)(-4\sqrt{a})}{(2\sqrt{a})^2} \\ &= \frac{(1 - a) \cdot 4\sqrt{a}}{4a} = \frac{1 - a}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1 - a}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

b) Do $a > 0$ và $a \neq 1$ nên $P < 0$ khi và chỉ khi

$$\frac{1 - a}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow 1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1.$$

?3 Rút gọn các biểu thức sau :

$$\text{a) } \frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}} ; \quad \text{b) } \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} \text{ với } a \geq 0 \text{ và } a \neq 1.$$

Bài tập

58. Rút gọn các biểu thức sau :

$$\begin{aligned} \text{a) } 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5} ; & \quad \text{b) } \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} ; \\ \text{c) } \sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} ; & \quad \text{d) } 0,1\sqrt{200} + 2 \cdot \sqrt{0,08} + 0,4 \cdot \sqrt{50} . \end{aligned}$$

59. Rút gọn các biểu thức sau (với $a > 0$, $b > 0$) :

$$\begin{aligned} \text{a) } 5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a} ; \\ \text{b) } 5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b} . \end{aligned}$$

60. Cho biểu thức $B = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$ với $x \geq -1$.

a) Rút gọn biểu thức B ;

b) Tìm x sao cho B có giá trị là 16.

61. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$;

b) $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x} \right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$.

Luyện tập

Rút gọn các biểu thức sau (các bài 62 và 63) :

62. a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$; b) $\sqrt{150} + \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{60} + 4,5 \cdot \sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$;

c) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$; d) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

63. a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ với $a > 0$ và $b > 0$;

b) $\frac{m}{\sqrt{1-2x+x^2}} \sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$ với $m > 0$ và $x \neq 1$.

64. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 = 1$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$;

b) $\frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$.

65. Rút gọn rồi so sánh giá trị của M với 1, biết

$$M = \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1} \quad \text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

66. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$; (B) 1; (C) -4; (D) 4.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

§9. Căn bậc ba

Có gì khác căn bậc hai không ?

1. Khái niệm căn bậc ba

Bài toán : Một người thợ cần làm một thùng hình lập phương chứa được đúng 64 lít nước.

Hỏi người thợ đó phải chọn độ dài cạnh của thùng là bao nhiêu đềximét ?

Giải

Gọi x (dm) là độ dài cạnh của thùng hình lập phương. Theo bài ra ta có $x^3 = 64$. Ta thấy $x = 4$ vì $4^3 = 64$. Vậy độ dài cạnh của thùng là 4dm.

Từ $4^3 = 64$, người ta gọi 4 là căn bậc ba của 64.



ĐỊNH NGHĨA

Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

Ví dụ 1. 2 là căn bậc ba của 8, vì $2^3 = 8$.

-5 là căn bậc ba của -125, vì $(-5)^3 = -125$.

Ta công nhận kết quả sau :

Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.

Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$. Số 3 gọi là chỉ số của căn. Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

➤ **Chú ý.** Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.

?1 Tìm căn bậc ba của mỗi số sau :

a) 27 ; b) -64 ; c) 0 ; d) $\frac{1}{125}$.

Giải mẫu. $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$.

Nhận xét

Căn bậc ba của số dương là số dương ;

Căn bậc ba của số âm là số âm ;

Căn bậc ba của số 0 là chính số 0.

2. Tính chất

Tương tự tính chất của căn bậc hai, ta có các tính chất sau của căn bậc ba :

a) $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

c) Với $b \neq 0$, ta có $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Dựa vào các tính chất trên, ta có thể so sánh, tính toán, biến đổi các biểu thức chứa căn bậc ba.

Ví dụ 2. So sánh 2 và $\sqrt[3]{7}$.

Giải. Ta có $2 = \sqrt[3]{8}$; $8 > 7$ nên $\sqrt[3]{8} > \sqrt[3]{7}$. Vậy $2 > \sqrt[3]{7}$.

Ví dụ 3. Rút gọn $\sqrt[3]{8a^3} - 5a$.

Giải. Ta có $\sqrt[3]{8a^3} - 5a = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{a^3} - 5a = 2a - 5a = -3a$.

?2 Tính $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64}$ theo hai cách.

Bài tập

67. Hãy tìm

$$\sqrt[3]{512} ; \quad \sqrt[3]{-729} ; \quad \sqrt[3]{0,064} ; \quad \sqrt[3]{-0,216} ; \quad \sqrt[3]{-0,008}.$$

68. Tính

$$\text{a) } \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125} ; \quad \text{b) } \frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}.$$

69. So sánh

$$\text{a) } 5 \text{ và } \sqrt[3]{123} ; \quad \text{b) } 5\sqrt[3]{6} \text{ và } 6\sqrt[3]{5}.$$



Bài đọc thêm

TÌM CĂN BẬC BA NHỜ BẢNG SỐ VÀ MÁY TÍNH BỎ TÚI

1. Tìm căn bậc ba nhờ bảng số

Trong "Bảng số với 4 chữ số thập phân" của V.M. Bra-di-xơ không có bảng tính sẵn căn bậc ba, nhưng ta có thể dùng bảng lập phương (bảng V) để tìm căn bậc ba của một số cho trước.

a) Giới thiệu bảng lập phương

Bảng lập phương được chia thành các hàng và các cột. Ta cũng quy ước gọi tên của các hàng (cột) theo số được ghi ở cột đầu tiên (hàng đầu tiên) của mỗi trang.

Dùng bảng lập phương ta có thể tìm được lập phương của số từ 1,000 đến 10,00. Với những số được viết bởi không quá ba chữ số, lập phương của nó được tìm trực tiếp từ bảng. Với những số được viết bởi bốn chữ số, ta phải dùng thêm các số ở cột hiệu chính.

b) Cách dùng bảng lập phương tìm căn bậc ba

Ví dụ 1. Tìm $\sqrt[3]{344,5}$.

Ta tìm số 344,5 ở trong bảng. Số 344,5 nằm ở giao của hàng **7,0** và cột **1**, có nghĩa $(7,01)^3 \approx 344,5$.

Vậy $\sqrt[3]{344,5} \approx 7,01$ (mẫu 3).

<i>N</i>	0	1	...
.			
.			
7,0		344,5	
.			
.			
.			

Ví dụ 2. Tìm $\sqrt[3]{103}$.

Do không tìm thấy số 103 ở trong bảng, ta chọn số gần nhất với nó.

Đó là số 103,16 nằm ở giao của hàng **4,6** và cột **9** nên $(4,69)^3 \approx 103,16$. Do đó

$\sqrt[3]{103,16} \approx 4,69$. Trên hàng

4,6 ta tìm trong các cột hiệu chính số nào gần với số 16 nhất, ta thấy số 13 (hoặc số 19), nằm ở cột **2** (hoặc cột **3**) hiệu chính. Ta hiệu

chính $\sqrt[3]{103,16}$ để xác định $\sqrt[3]{103}$ như sau :

$$4,69 - 0,002 = 4,688 \text{ (hoặc } 4,69 - 0,003 = 4,687).$$

Vậy $\sqrt[3]{103} \approx 4,688$ (hoặc $\sqrt[3]{103} \approx 4,687$) (mẫu 4).

<i>N</i>	...	9	1	2	3	...
.						
.						
.						
4,6		103,16		13	19	
.						
.						
.						

Ví dụ 3. Tìm $\sqrt[3]{0,103}$.

Ta biết $0,103 = 103 : 1000$.

$$\text{Do đó } \sqrt[3]{0,103} = \sqrt[3]{103} : \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{103} : 10.$$

Tra bảng tìm $\sqrt[3]{103} \approx 4,688$. Vậy $\sqrt[3]{0,103} \approx 4,688 \times 0,1 = 0,4688$.

➤ **Chú ý.** Bảng lập phương có nêu hướng dẫn "Khi dời dấu phẩy trong số N đi 1 chữ số thì phải dời dấu phẩy trong số N^3 đi 3 chữ số" nên khi tìm căn bậc ba, ta thực hành như sau :

Khi dời dấu phẩy trong số N đi 3, 6, 9,... chữ số, ta dời dấu phẩy theo cùng chiều ở số $\sqrt[3]{N}$ đi 1, 2, 3,... chữ số (ví dụ 3 minh họa trường hợp dời dấu phẩy ở số 103 sang trái 3 chữ số nên phải dời dấu phẩy ở số 4,688 sang trái 1 chữ số).

2. Tìm căn bậc ba bằng máy tính bỏ túi

Có thể dùng máy tính bỏ túi có nút bấm $\sqrt[3]{}$ để tìm căn bậc ba như sau.

Ví dụ 4. (Trên máy CASIO fx-220).

Tính	Nút bấm	Kết quả
$\sqrt[3]{1728}$	$\boxed{1} \boxed{7} \boxed{2} \boxed{8} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sqrt[3]{}}$	12
$\sqrt[3]{11390,625}$	$\boxed{1} \boxed{1} \boxed{3} \boxed{9} \boxed{0} \boxed{\cdot} \boxed{6} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sqrt[3]{}}$	22,5
$\sqrt[3]{-12,167}$	$\boxed{1} \boxed{2} \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{6} \boxed{7} \boxed{+/-} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sqrt[3]{}}$	-2,3

Ví dụ 5. (Trên máy SHARP EL-500M)

Tính	Nút bấm	Kết quả
$\sqrt[3]{1728}$	$\boxed{3} \boxed{2\text{ndF}} \boxed{\sqrt[3]{}} \boxed{1} \boxed{7} \boxed{2} \boxed{8} \boxed{=}$	12
$\sqrt[3]{11390,625}$	$\boxed{3} \boxed{2\text{ndF}} \boxed{\sqrt[3]{}} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{3} \boxed{9} \boxed{0} \boxed{\cdot} \boxed{6} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{=}$	22,5
$\sqrt[3]{-12,167}$	$\boxed{3} \boxed{2\text{ndF}} \boxed{\sqrt[3]{}} \boxed{(-)} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{6} \boxed{7} \boxed{=}$	-2,3

Ôn tập chương I

Câu hỏi

1. Nêu điều kiện để x là căn bậc hai số học của số a không âm. Cho ví dụ.
2. Chứng minh $\sqrt{a^2} = |a|$ với mọi số a .
3. Biểu thức A phải thoả mãn điều kiện gì để $\sqrt{A}$ xác định ?
4. Phát biểu và chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương. Cho ví dụ.
5. Phát biểu và chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép chia và phép khai phương. Cho ví dụ.

Các công thức biến đổi căn thức

- 1) $\sqrt{A^2} = |A|$.
- 2) $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$).
- 3) $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0$ và $B > 0$).
- 4) $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).
- 5) $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$).
- 6) $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (với $A < 0$ và $B \geq 0$).
- 7) $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (với $AB \geq 0$ và $B \neq 0$).
- 8) $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$).
- 8) $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$ (với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$).
- 9) $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$ (với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$).

Bài tập

70. Tìm giá trị các biểu thức sau bằng cách biến đổi, rút gọn thích hợp :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}} ; & \text{b) } \sqrt{3 \frac{1}{16} \cdot 2 \frac{14}{25} \cdot 2 \frac{34}{81}} ; \\ \text{c) } \frac{\sqrt{640} \cdot \sqrt{34,3}}{\sqrt{567}} ; & \text{d) } \sqrt{21,6} \cdot \sqrt{810} \cdot \sqrt{11^2 - 5^2} . \end{array}$$

71. Rút gọn các biểu thức sau :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})\sqrt{2} - \sqrt{5} ; & \text{b) } 0,2\sqrt{(-10)^2 \cdot 3} + 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} ; \\ \text{c) } \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{4}{5} \cdot \sqrt{200} \right) : \frac{1}{8} ; & \text{d) } 2\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{2 \cdot (-3)^2} - 5\sqrt{(-1)^4} . \end{array}$$

72. Phân tích thành nhân tử (với các số x, y, a, b không âm và a ≥ b)

$$\begin{array}{ll} \text{a) } xy - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 ; & \text{b) } \sqrt{ax} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay} ; \\ \text{c) } \sqrt{a+b} + \sqrt{a^2 - b^2} ; & \text{d) } 12 - \sqrt{x} - x . \end{array}$$

73. Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{-9a} - \sqrt{9+12a+4a^2} \text{ tại } a=-9 ; & \text{b) } 1 + \frac{3m}{m-2} \sqrt{m^2 - 4m + 4} \text{ tại } m=1,5 ; \\ \text{c) } \sqrt{1-10a+25a^2} - 4a \text{ tại } a=\sqrt{2} ; & \text{d) } 4x - \sqrt{9x^2 + 6x + 1} \text{ tại } x = -\sqrt{3} . \end{array}$$

74. Tìm x, biết:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{(2x-1)^2} = 3 ; & \\ \text{b) } \frac{5}{3} \sqrt{15x} - \sqrt{15x} - 2 = \frac{1}{3} \sqrt{15x} . & \end{array}$$

75. Chứng minh các đẳng thức sau :

$$\text{a) } \left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -1,5 ;$$

$$b) \left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2 ;$$

$$c) \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a - b \text{ với } a, b \text{ dương và } a \neq b ;$$

$$d) \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} \right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right) = 1 - a \text{ với } a \geq 0 \text{ và } a \neq 1.$$

76. Cho biểu thức

$$Q = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \text{ với } a > b > 0,$$

a) Rút gọn Q ;

b) Xác định giá trị của Q khi $a = 3b$.

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên **NGUYỄN ĐỨC THÁI**
Tổng Giám đốc **HOÀNG LÊ BÁCH**

Chịu trách nhiệm nội dung : Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

Biên tập lần đầu : **PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - HOÀNG XUÂN VINH**

Biên tập tái bản : **LƯU THẾ SƠN**

Biên tập kỹ thuật và trình bày : **NGUYỄN THANH THUY - TRẦN THANH HẰNG**

Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**

Sửa bản in : **ĐẶNG VĂN TUYẾN**

Chế bản : **CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI**

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - Bộ Giáo dục và Đào tạo

TOÁN 9 - TẬP MỘT

Mã số : 2H901T0

In cuốn (QĐ in số :), khổ 17 × 24 cm.

Đơn vị in : địa chỉ

Cơ sở in : địa chỉ

Số ĐKXB : 01- 2020CXBIPH/327-869/GD

Số QĐXB : ... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm

In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm ...

Mã số ISBN : Tập một : 978-604-0-18606-5

Tập hai : 978-604-0-18607-2



§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

1. Khái niệm hàm số

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x , và x được gọi là *biến số*.
- Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc bằng công thức,...

Ví dụ 1

a) y là hàm số của x được cho bằng bảng sau :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	6	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

b) y là hàm số của x được cho bằng công thức :

$$y = 2x ; \quad y = 2x + 3 ; \quad y = \frac{4}{x}.$$

- Khi hàm số được cho bằng công thức $y = f(x)$, ta hiểu rằng biến số x chỉ lấy những giá trị mà tại đó $f(x)$ xác định. Chẳng hạn, ở các ví dụ trên, giá trị của các biểu thức $2x$, $2x + 3$ luôn luôn xác định với mọi giá trị của x nên trong các hàm số $y = 2x$ và $y = 2x + 3$, biến số x có thể lấy những giá trị tùy ý ; còn trong hàm số $y = \frac{4}{x}$, biến số x chỉ lấy những giá trị khác 0,

vì giá trị của biểu thức $\frac{4}{x}$ không xác định khi $x = 0$.

- Khi y là hàm số của x , ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$,... Ví dụ, đối với hàm số $y = 2x + 3$, ta còn có thể viết $y = f(x) = 2x + 3$; khi đó, thay cho câu "Khi x bằng 3 thì giá trị tương ứng của y là 9", ta viết $f(3) = 9$.

- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y được gọi là hàm hằng.

?1 Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 5$.

Tính $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(-2)$; $f(-10)$.

2. Đồ thị của hàm số

?2 a) Biểu diễn các điểm sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy:

$A\left(\frac{1}{3}; 6\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $C(1; 2)$, $D(2; 1)$, $E\left(3; \frac{2}{3}\right)$, $F\left(4; \frac{1}{2}\right)$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x$.

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Chẳng hạn, tập hợp các điểm A, B, C, D, E, F vẽ được trong **?2** a) là đồ thị của hàm số được cho bằng bảng ở ví dụ 1a); tập hợp các điểm của đường thẳng vẽ được trong **?2** b) là đồ thị của hàm số $y = 2x$.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

?3 Tính giá trị tương ứng của các hàm số $y = 2x + 1$ và $y = -2x + 1$ theo giá trị đã cho của biến x rồi điền vào bảng sau:

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$y = 2x + 1$									
$y = -2x + 1$									

a) Xét hàm số $y = 2x + 1$.

Dễ thấy $2x + 1$ xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Qua bảng trên ta thấy : Khi cho x các giá trị tùy ý tăng lên thì các giá trị tương ứng của $y = 2x + 1$ cũng tăng lên. Ta nói rằng hàm số $y = 2x + 1$ đồng biến trên $\mathbf{R}$.

b) Xét hàm số $y = -2x + 1$, ta thấy :

$-2x + 1$ xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Khi cho x các giá trị tùy ý tăng lên thì các giá trị tương ứng của $y = -2x + 1$ lại giảm đi. Ta nói rằng hàm số $y = -2x + 1$ nghịch biến trên $\mathbf{R}$.

Một cách tổng quát :

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbf{R}$

a) Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng $f(x)$ cũng tăng lên thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là **hàm số đồng biến trên $\mathbf{R}$** (gọi tắt là hàm số đồng biến).

b) Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng $f(x)$ lại giảm đi thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là **hàm số nghịch biến trên $\mathbf{R}$** (gọi tắt là hàm số nghịch biến).

Nói cách khác, với x_1, x_2 bất kỳ thuộc $\mathbf{R}$:

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ **đồng biến trên $\mathbf{R}$** ;

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến trên $\mathbf{R}$** .

Bài tập

1. a) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x$.

Tính : $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$.

- b) Cho hàm số $y = g(x) = \frac{2}{3}x + 3$.

Tính : $g(-2)$; $g(-1)$; $g(0)$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $g(1)$; $g(2)$; $g(3)$.

- c) Có nhận xét gì về giá trị của hai hàm số đã cho ở trên khi biến x lấy cùng một giá trị ?

2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

a) Tính các giá trị tương ứng của y theo các giá trị của x rồi điền vào bảng sau :

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y = -\frac{1}{2}x + 3$											

b) Hàm số đã cho là hàm số đồng biến hay nghịch biến ? Vì sao ?

3. Cho hai hàm số $y = 2x$ và $y = -2x$.

a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng tọa độ đồ thị của hai hàm số đã cho.

b) Trong hai hàm số đã cho, hàm số nào đồng biến ? Hàm số nào nghịch biến ? Vì sao ?

Luyện tập

4. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x$ được vẽ bằng compa và thước thẳng ở hình 4.

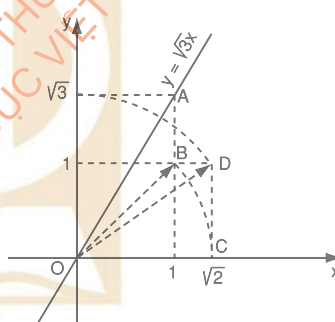
Hãy tìm hiểu và trình bày lại các bước thực hiện vẽ đồ thị đó.

5. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x$ và $y = 2x$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy (h.5).

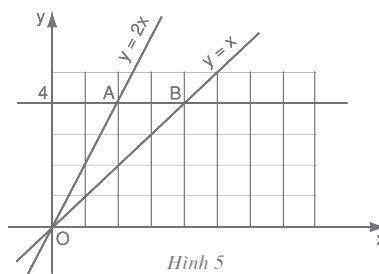
b) Đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y = 4$ lần lượt cắt các đường thẳng $y = 2x$, $y = x$ tại hai điểm A và B .

Tìm tọa độ của các điểm A , B và tính chu vi, diện tích của tam giác OAB theo đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét.

6. Cho các hàm số $y = 0,5x$ và $y = 0,5x + 2$.



Hình 4



Hình 5

a) Tính giá trị y tương ứng của mỗi hàm số theo giá trị đã cho của biến x rồi điền vào bảng sau :

x	-2,5	-2,25	-1,5	-1	0	1	1,5	2,25	2,5
$y = 0,5x$									
$y = 0,5x + 2$									

b) Có nhận xét gì về các giá trị tương ứng của hai hàm số đó khi biến x lấy cùng một giá trị ?

7. Cho hàm số $y = f(x) = 3x$.

Cho x hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$.

Hãy chứng minh $f(x_1) < f(x_2)$ rồi rút ra kết luận hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbf{R}$.

§2. Hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất có dạng như thế nào ?

1. Khái niệm về hàm số bậc nhất

Bài toán : Một xe ô tô chở khách đi từ bến xe Phía nam Hà Nội vào Huế với vận tốc trung bình 50km/h. Hỏi sau t giờ xe ô tô đó cách trung tâm Hà Nội bao nhiêu kilômét ? Biết rằng bến xe Phía nam cách trung tâm Hà Nội 8km.



?1 Hãy điền vào chỗ trống (...) cho đúng

Sau 1 giờ, ô tô đi được : ...

Sau t giờ, ô tô đi được : ...

Sau t giờ, ô tô cách trung tâm Hà Nội là : $s = \dots$

- ?2** Tính các giá trị tương ứng của s khi cho t lần lượt lấy các giá trị 1 giờ ; 2 giờ ; 3 giờ ; 4 giờ... rồi giải thích tại sao s là hàm số của t ?

ĐỊNH NGHĨA

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức

$$y = ax + b$$

trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.

➤ **Chú ý.** Khi $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$ (đã học ở lớp 7).

2. Tính chất

Để tìm hiểu tính chất của hàm số bậc nhất, trước tiên ta xét ví dụ sau đây :

Ví dụ. Xét hàm số $y = f(x) = -3x + 1$.

Hàm số $y = -3x + 1$ luôn xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbf{R}$ vì biểu thức $-3x + 1$ luôn xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbf{R}$.

Khi cho biến x lấy hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ hay $x_2 - x_1 > 0$, ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = (-3x_2 + 1) - (-3x_1 + 1) = -3(x_2 - x_1) < 0 \text{ hay } f(x_1) > f(x_2).$$

Vậy hàm số $y = -3x + 1$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbf{R}$.

- ?3** Cho hàm số bậc nhất $y = f(x) = 3x + 1$.

Cho x hai giá trị bất kì x_1, x_2 , sao cho $x_1 < x_2$. Hãy chứng minh $f(x_1) < f(x_2)$ rồi rút ra kết luận hàm số đồng biến trên $\mathbf{R}$.

• Tổng quát

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbf{R}$ và có tính chất sau :

- a) Đồng biến trên $\mathbf{R}$, khi $a > 0$.
- b) Nghịch biến trên $\mathbf{R}$, khi $a < 0$.

- ?4** Cho ví dụ về hàm số bậc nhất trong các trường hợp sau :

- a) Hàm số đồng biến ;
- b) Hàm số nghịch biến.

Bài tập

- 8.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ? Hãy xác định các hệ số a, b của chúng và xét xem hàm số bậc nhất nào đồng biến, nghịch biến.
- a) $y = 1 - 5x$; b) $y = -0,5x$;
c) $y = \sqrt{2}(x-1) + \sqrt{3}$; d) $y = 2x^2 + 3$.
- 9.** Cho hàm số bậc nhất $y = (m-2)x + 3$. Tìm các giá trị của m để hàm số :
- a) Đồng biến ;
b) Nghịch biến.
- 10.** Một hình chữ nhật có các kích thước là 20cm và 30cm. Người ta bớt mỗi kích thước của hình đó đi x (cm) được hình chữ nhật mới có chu vi là y (cm). Hãy lập công thức tính y theo x.

Luyện tập

11. Hãy biểu diễn các điểm sau trên mặt phẳng tọa độ : A(-3 ; 1), C(0 ; 3) , D(1 ; 1), E(3 ; 0), F(1 ; -1), G(0 ; -3), H(-1 ; -1).
12. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$. Tìm hệ số a, biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2,5$.
13. Với những giá trị nào của m thì mỗi hàm số sau là hàm số bậc nhất ?
- a) $y = \sqrt{5-m}(x-1)$;
- b) $y = \frac{m+1}{m-1}x + 3,5$.
14. Cho hàm số bậc nhất $y = (1 - \sqrt{5})x - 1$.
- a) Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbf{R}$? Vì sao ?
- b) Tính giá trị của y khi $x = 1 + \sqrt{5}$;
- c) Tính giá trị của x khi $y = \sqrt{5}$.

§3. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) như thế nào ?

1. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

?1 Biểu diễn các điểm sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ :

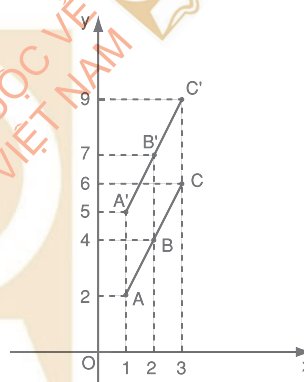
$A(1; 2), \quad B(2; 4), \quad C(3; 6),$

$A'(1; 2+3), \quad B'(2; 4+3), \quad C'(3; 6+3).$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy (h.6), với cùng hoành độ thì tung độ của mỗi điểm A', B', C' đều lớn hơn tung độ của mỗi điểm tương ứng A, B, C là 3 đơn vị.

Ta có $A'B' \parallel AB$ và $B'C' \parallel BC$ (vì các tứ giác $AA'B'B$ và $BB'C'C$ đều là hình bình hành).

Từ đó suy ra : Nếu A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng (d) thì A', B', C' cùng nằm trên một đường thẳng (d') song song với (d) .



Hình 6

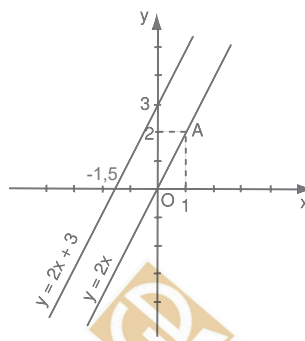
?2 Tính giá trị y tương ứng của các hàm số $y = 2x$ và $y = 2x + 3$ theo giá trị đã cho của biến x rồi điền vào bảng sau :

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$y = 2x$											
$y = 2x + 3$											

Ta thấy rằng :

Với bất kì hoành độ x nào thì tung độ y của điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ cũng lớn hơn tung độ y tương ứng của điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 2x$ là 3 đơn vị.

Ta đã biết, đồ thị của hàm số $y = 2x$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $A(1; 2)$. Qua nhận xét ở trên, ta thấy rằng đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ là một đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 (h.7).



Hình 7

• Tổng quát

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng :

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b ;
- Song song với đường thẳng $y = ax$, nếu $b \neq 0$; trùng với đường thẳng $y = ax$, nếu $b = 0$.

➤ **Chú ý.** Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) còn được gọi là đường thẳng $y = ax + b$. b được gọi là tung độ gốc của đường thẳng.

2. Cách vẽ đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Khi $b = 0$ thì $y = ax$. Đồ thị của hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $A(1; a)$.
- Xét trường hợp $y = ax + b$ với $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

Ta đã biết đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là một đường thẳng. Do đó, để vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$, ta chỉ cần xác định được hai điểm phân biệt nào đó thuộc đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Trong thực hành, ta thường xác định hai điểm đặc biệt là giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ.

Bước 1. Cho $x = 0$ thì $y = b$, ta được điểm $P(0 ; b)$ thuộc trục tung Oy .

Cho $y = 0$ thì $x = -\frac{b}{a}$, ta được điểm $Q\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ thuộc trục hoành Ox .

Bước 2. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm P và Q ta được đồ thị của hàm số $y = ax + b$.

33 *Vẽ đồ thị của các hàm số sau :*

a) $y = 2x - 3$;

b) $y = -2x + 3$.

Bài tập

15. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2x$; $y = 2x + 5$; $y = -\frac{2}{3}x$ và $y = -\frac{2}{3}x + 5$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
b) Bốn đường thẳng trên cắt nhau tạo thành tứ giác $OABC$ (O là gốc tọa độ). Tứ giác $OABC$ có phải là hình bình hành không ? Vì sao ?
16. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x$ và $y = 2x + 2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
b) Gọi A là giao điểm của hai đồ thị nói trên, tìm tọa độ điểm A .
c) Vẽ qua điểm $B(0 ; 2)$ một đường thẳng song song với trục Ox , cắt đường thẳng $y = x$ tại điểm C . Tìm tọa độ của điểm C rồi tính diện tích tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).

Luyện tập

17. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.