

MỤC LỤC

Mục lục	Trang
PHẦN 1 - ĐẶT VẤN ĐỀ.	2
I. Lí do chọn đề tài.	2
II. Thời gian, đối tượng, phạm vi nghiên cứu.	3
III. Mục đích nghiên cứu.	3
IV. Nhiệm vụ nghiên cứu	3
V. Phương pháp nghiên cứu	4
VI. Tính mới của đề tài	4
PHẦN 2 - GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ	5
I. Cơ sở lí luận và cơ sở thực tiễn	5
1. Cơ sở lí luận	5
2. Cơ sở thực tiễn	5
II. Thực trạng vấn đề và số liệu khảo sát trước khi áp dụng sáng kiến.	6
III. Giải pháp chủ yếu	7
A. Một số vấn đề lí thuyết liên quan đến đề tài	7
B. Phân loại theo phương pháp giải bài toán tìm GTLN, GTNN	8
1. Dạng 1: Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN có dạng tam thức bậc hai	8
2. Dạng 2: Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN có dạng đa thức chứa dấu giá trị tuyệt đối	10
3. Dạng 3: Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN là đa thức bậc cao	12
4. Dạng 4: Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN có dạng phân thức	14
5. Dạng 5: Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN thỏa mãn điều kiện nào đó giữa các biến	17
C. Một số chú ý	20
PHẦN 3 – KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ	24
I. Kết luận	24
II. Đề xuất, kiến nghị	25
1. Với các cấp quản lí giáo dục	26
2. Đối với nhà trường	26
3. Đối với giáo viên	26
4. Đối với học sinh	26
TÀI LIỆU THAM KHẢO	28

PHẦN 1 - ĐẶT VẤN ĐỀ

I. Lí do chọn đề tài

Chương trình toán trung học cơ sở (THCS), Đại số là mảng kiến thức quan trọng. Các bài toán về đại số là nội dung không thể thiếu trong các kì thi chọn học sinh giỏi, cũng như kì thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, THPT chuyên. Trong đó bộ môn đại số 8 là một bộ môn rèn luyện tính tư duy nhạy bén của học sinh, nó đòi hỏi người học phải nhìn nhận được vấn đề dưới mọi góc độ, phải liên hệ những bài toán đã giải, những kiến thức đã biết để giải quyết. Bài toán “Tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức” luôn có mặt trong các đề thi nhưng nó là một dạng toán khó, chủ yếu dành cho học sinh khá, giỏi. Do đó, khi học sinh gặp phải thì rất ngỡ ngàng, lúng túng và gặp khó khăn. Hơn nữa, trong chương trình toán THCS SGK chưa đề cập nhiều về cách giải nên học sinh chưa định hướng, chưa có phương pháp giải những bài toán dạng như thế này.

Vì thế trong quá trình dạy học (dạy bồi dưỡng học sinh giỏi, dạy ôn thi vào lớp 10,...), người thầy phải cho học sinh nắm được các dạng toán cơ bản và các hướng mở rộng của bài toán đó. Từ đó để học sinh phát triển tư duy và hình thành kĩ năng giải toán. Muốn đạt được điều đó phải đòi hỏi tính tích cực, tính tư duy của người học nhưng phương pháp của người thầy cũng rất quan trọng, làm cho học sinh học một nhưng có thể làm được hai, ba. Từ bài toán đơn giản mở rộng lên bài khó.

Từ việc nhận thức được tầm quan trọng của vấn đề trên, trong quá trình giảng dạy nhiều năm của bản thân, đã nhiều năm dạy chương trình Toán 8, ôn thi học sinh vào lớp 10, tôi đã rút ra một số kinh nghiệm khi dạy bài toán “Tìm GTLN, GTNN của biểu thức”, đó là cách dạy học sinh đi từ dễ đến khó, mở rộng bài toán đơn giản thành bài toán nâng cao theo cách phân loại dạng bài tập kèm theo cách giải của dạng bài tập đó. Với mong muốn cung cấp, bổ sung kiến thức một cách có hệ thống và sâu sắc về bài toán “Tìm GTLN, GTNN của biểu thức” cho học sinh THCS và qua đó giúp các em có một cái nhìn khái quát, đầy đủ, chắc chắn và tự tin giải quyết tốt các bài toán tìm GTLN, GTNN; đặc biệt giúp các em tự tin hơn nữa bước vào kì thi tuyển sinh lớp 10 đạt thành tích cao; với những hiểu biết có hạn tôi xin mạnh dạn chia sẻ kinh nghiệm của mình trong

đề tài: “***PHÂN LOẠI THEO PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC***”.

II. Thời gian, đối tượng, phạm vi nghiên cứu.

1. Thời gian nghiên cứu: Trong nhiều năm học, đặc biệt trong năm học 2019 – 2020; 2020 – 2021 và 2021 - 2022.

2. Đối tượng nghiên cứu: Học sinh trường THCS, đặc biệt là học sinh khối 8, 9 trường THCS nơi tôi đang giảng dạy.

3. Phạm vi nghiên cứu: Các tiết dạy trên lớp; dạy bồi dưỡng học sinh giỏi toán 8; ôn thi vào lớp 10 qua các năm; các tiết sinh hoạt chuyên đề trong tổ chuyên môn của Trường THCS Thanh Liệt huyện Thanh Trì Hà Nội.

III. Mục đích nghiên cứu

Khi viết sáng kiến kinh nghiệm này, tôi luôn cố gắng hệ thống, phân loại dạng bài tương ứng với phương pháp giải của bài đó; phát triển bài toán nhằm nâng cao năng lực tự học của học sinh. Hình thành cho HS một cách tổng quan về phương pháp giải một số dạng bài tập, từ đó các em có thể vận dụng một cách thành thạo và linh hoạt trong việc giải các bài tập. Từ đó rèn luyện cho học sinh khả năng tư duy, phân tích bài toán, tránh những sai lầm trong suy luận, phát hiện và bồi dưỡng những học sinh có năng khiếu về môn học. Góp phần nâng cao chất lượng đại trà và đội tuyển học sinh giỏi. Hơn nữa, đây cũng là một tài liệu cho giáo viên tham khảo giúp ích cho việc bồi dưỡng học sinh giỏi, đặc biệt là kì thi chuyển cấp vào lớp 10 đạt kết quả cao, đáp ứng nhu cầu học hỏi tìm hiểu của học sinh làm cho các em yêu thích môn Toán hơn. SKKN giúp cho giáo viên nâng cao năng lực tự nghiên cứu, đồng thời vận dụng tổng hợp các tri thức đã học, mở rộng, đào sâu và hoàn thiện hiểu biết. Từ đó có phương pháp giảng dạy dạng toán này có hiệu quả.

IV. Nhiệm vụ nghiên cứu

+ Hệ thống kiến thức và phân loại bài toán tìm GTLN, GTNN theo phương pháp giải.

+ Đưa ra được những kĩ năng cần thiết khi biến đổi và tìm GTLN, GTNN.

- + Tạo sự đam mê, tìm hiểu, nghiên cứu, sáng tạo trong việc dạy học toán.
- + Tìm hiểu mức độ và kết quả đạt được khi triển khai đề tài.
- + Phân tích rút ra bài học kinh nghiệm.

V. Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp chủ yếu là nắm bắt tình hình thực tiễn, đưa ra một số phương pháp giải các bài toán tìm GTLN, GTNN thường gặp thông qua các bài toán cụ thể, các bài toán tổng hợp, chọn lọc và đề thi học sinh giỏi, đề thi vào lớp 10 qua các năm.
- Nghiên cứu các tài liệu (tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, các chuyên đề chọn lọc toán học, tạp chí toán học, tủ sách chuyên toán, internet,...), học hỏi, tham khảo ý kiến của các đồng nghiệp thông qua các buổi họp chuyên môn, các tiết chuyên đề và các tiết dự giờ thăm lớp, đặc biệt là các tiết học bồi dưỡng học sinh năng khiếu.

VI. Tính mới của đề tài

Nếu như giáo viên phân loại tốt dạng toán theo phương pháp giải đồng thời kết hợp với một số phương pháp dạy học, cho bài tập tự luyện một cách hợp lí thì sẽ tạo ra một không khí học tập tích cực, giúp các em quan tâm, yêu thích đến dạng toán hơn. Từ đó các em sẽ tự giác rèn luyện kĩ năng giải toán và có được kết quả học tập tốt hơn.

PHẦN 2 - GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I. Cơ sở lí luận và cơ sở thực tiễn

1. Cơ sở lí luận

Toán học là nền tảng cho mọi ngành khoa học. Vì vậy, việc dạy và học môn toán trong nhà trường đóng vai trò vô cùng quan trọng. Để dạy toán và học toán tốt thì giáo viên và học sinh không ngừng rèn luyện và đầu tư trí và lực vào nghiên cứu học hỏi góp sức để đưa bộ môn toán ngày càng phát triển; phát hiện, bồi dưỡng và phát triển hơn nữa những học sinh có năng lực về Toán, từ đó xây dựng cho học sinh kĩ năng nhận dạng và giải toán.

Toán học là bộ môn khoa học đa dạng về thể loại. Khi trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi, tôi thấy kiến thức toán học của bản thân còn rất hạn chế, nhất là những bài toán về tìm GTLN, GTNN của một biểu thức. Do đó, bản thân tôi thấy cần phải thúc đẩy việc tìm hiểu và mở rộng kiến thức thêm của giáo viên cũng như của học sinh.

Với nội dung của SKKN học sinh có thể tự học, tự nghiên cứu và nội dung không chỉ giới hạn ở cấp THCS mà còn vận dụng ở nhiều cấp học cao hơn.

2. Cơ sở thực tiễn

Bài toán tìm GTLN, GTNN là dạng toán mà học sinh THCS xem là dạng toán khó, khi gặp học sinh lúng túng không biết giải như thế nào? Có phương pháp nào để giải? Dạng toán thường hay có nhiều trong các đề thi học sinh giỏi các cấp, trong đề thi vào lớp 10 THPT. Tuy nhiên trong chương trình toán THCS chưa xây dựng hoàn chỉnh về nội dung và phương pháp cho dạng toán khó tìm GTLN, GTNN mà chỉ mang tính chất giới thiệu hoặc ở phần đọc thêm. Các tài liệu viết về vấn đề này còn hạn chế, chưa hệ thống thành dạng bài tương ứng với phương pháp giải dạng bài đó gây nhiều khó khăn trong việc học tập của học sinh.

Bên cạnh đó, để đáp ứng mong muốn của học sinh thì giáo viên cũng phải mất nhiều thời gian nghiên cứu, sưu tầm tài liệu để xây dựng chuyên đề về bài toán tìm GTLN, GTNN làm tài liệu tham khảo cho việc dạy và học tốt hơn. Vì

vậy, việc phân loại theo phương pháp giải bài toán tìm GTLN, GTNN là thiết thực giúp giáo viên giảng dạy đạt hiệu quả, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học; đặc biệt là chất lượng học sinh giỏi và giáo viên giỏi ở trường THCS.

II. Thực trạng vấn đề và số liệu khảo sát trước khi áp dụng sáng kiến

1. Thực trạng vấn đề.

Quá trình dạy dạng bài tìm GTLN, GTNN của biểu thức, tôi còn gặp nhiều khó khăn. Cụ thể:

a. Về phía giáo viên:

Nhiều tiết dạy chưa đạt hiệu quả cao, dạy thiên về lí thuyết ít thời gian thực hành cho học sinh, hướng dẫn học sinh làm bài một cách chung chung chưa phân tích rõ cho học sinh từng dạng với bài này thì cách làm sẽ như thế nào, chưa biết chọn bài tập mẫu theo dạng để các em học tập, chưa phát huy hết khả năng của học sinh.....

b. Về phía học sinh:

Các em học sinh của tôi ý thức được đây là bộ môn chính nên luôn cố gắng trong giờ học. Song các em vẫn không hứng thú với dạng toán này, đặc biệt rất nhiều học sinh đón nhận dạng toán với thái độ miễn cưỡng, đối phó hoặc chấp nhận bỏ qua, dẫn đến chất lượng bài làm của học sinh rất thấp. Tiềm năng của học sinh về môn toán chưa được khai thác hết. Chất lượng học sinh giỏi các cấp của nhà trường trong những năm gần đây có tăng về số lượng và chất lượng; tỉ lệ thi vào lớp 10 cũng tăng nhưng chưa tương xứng với tiềm năng thực tế.

Những năm gần đây, tôi được phân công dạy bộ môn toán 8 và ôn thi vào lớp 10. Khi tiếp nhận học sinh, tôi thấy chất lượng không đồng đều. Từ thực trạng đó, tôi tiến hành khảo sát, kết quả cụ thể như sau:

2. Số liệu khảo sát trước khi áp dụng sáng kiến

Đơn vị	Khối 8,9	Hứng thú với dạng toán	Biết cách tiếp cận dạng toán
Tổng số	210 HS	40 HS	12 HS
Tỉ lệ	100%	19,05%	5,7%

III. GIẢI PHÁP CHỦ YẾU

Thực tế, trong quá trình giải dạng toán này thì không có một con đường nào thật sự cụ thể mà việc giải dạng toán khó đòi hỏi người dạy, người học phải tìm tòi, sáng tạo cho mình một phương pháp tiếp cận bài toán dựa trên cơ sở đã học. Từ đó, hình thành và tìm ra những quy luật, những cách giải phù hợp cho dạng toán. Sau đó, sắp xếp, phân loại chúng theo từng phương pháp, từng dạng bài tập nhỏ trong bài toán lớn. Vì vậy, trong đề tài này tôi xin phân loại theo phương pháp giải một số dạng bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức.

A. Một số vấn đề lí thuyết liên quan đến đề tài

1. Khái niệm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất của một biểu thức (GTNN): Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số k và tồn tại một giá trị của biến để A có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biến thuộc khoảng xác định nói trên

2. Phương pháp

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A, ta cần:

- Chứng minh $A \geq k$ với k là hằng số
- Chỉ ra dấu "=" có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của A, ta cần:

- Chứng minh $A \leq k$ với k là hằng số
- Chỉ ra dấu "=" có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

Kí hiệu: $\min A$ là giá trị nhỏ nhất của A; $\max A$ là giá trị lớn nhất của A

3. Một số bất đẳng thức thường gặp :

3.1. Bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \quad \text{Với } a_i > 0, i = 1; 2; \dots; n$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

3.2. Bất đẳng thức Cauchy (dạng không chứa căn):

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \quad (*) \quad (\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } x = y)$$

Từ (*) ta suy ra hai hệ quả :

- Nếu hai số không âm có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.
- Nếu hai số không âm có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

3.3. Bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n}$$

Quy ước trong dấu “=” xảy ra, nếu mẫu nào bằng 0 thì tử tương ứng bằng 0.

$$3.4. \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \text{với } a, b > 0 \quad (\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } a = b)$$

$$3.5. \quad +) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

$$+) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y| \Leftrightarrow (x-y).y \geq 0$$

4. Sử dụng các mệnh đề tương đương:

- +) $-A$ lớn nhất $\Leftrightarrow A$ nhỏ nhất;
- +) $\frac{1}{B}$ lớn nhất $\Leftrightarrow B$ nhỏ nhất (với $B > 0$)
- +) C lớn nhất $\Leftrightarrow C^2$ lớn nhất

B. Phân loại theo phương pháp giải bài toán tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

1. Dạng 1: Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN có dạng tam thức bậc hai

Ví dụ:

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 - 8x + 1$
- b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = -5x^2 - 4x + 1$

Giải:

$$\text{a) } A = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$$

$$\min A = -7 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{b) } B = -5\left(x^2 + \frac{4}{5}x\right) + 1 = -5\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{25}\right) + \frac{9}{5} = \frac{9}{5} - 5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 \leq \frac{9}{5}$$

$$\max B = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$$

Qua ví dụ 1, tôi cung cấp cho học sinh bài toán tổng quát, từ đó học sinh sẽ giải quyết dạng toán này một cách đơn giản, kể cả học sinh trung bình.

Bài toán tổng quát: Cho tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$

(a, b, c là hằng số)

a) Tìm GTLN, GTNN của P khi $a > 0$

b) Tìm GTLN, GTNN của P khi $a < 0$

Giải:

$$\text{Ta có: } P = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$\text{Đặt } c - \frac{b^2}{4a} = k. \text{ Do } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \text{ nên:}$$

$$\text{a) Nếu } a > 0 \text{ thì } a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \text{ do đó } P \geq k \Rightarrow \min P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

và không có GTLN.

$$\text{b) Nếu } a < 0 \text{ thì } a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \text{ do đó } P \leq k \Rightarrow \max P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

và không có GTNN.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm GTNN của: $A(x) = x^2 - 4x + 24$

Bài 2: Tìm GTNN của: $B(x) = 2x^2 - 8x + 1$

Bài 3: Tìm GTNN của: $A(x) = -5x^2 - 4x + 1$

Bài 4: Tìm min của: $B = 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 - 4(x+3)^2$

HD:

$$B = 2(x^2 + 2x + 1) + 3(x^2 + 4x + 4) - 4(x^2 + 6x + 9) = x^2 - 8x - 22 = (x-4)^2 - 38 \geq -38$$

Bài 5: Tìm GTNN của : $A = 9x^2 - 6x - 4|3x-1| + 6$

HD: Đặt: $|3x-1| = t \Rightarrow t^2 = 9x^2 - 6x + 1 \Rightarrow E = t^2 - 4t + 5$

Bài 6: Tìm Min của: $P = 5x^2 - |6x-1| - 1$

HD: TH1: $x \geq \frac{1}{6} \Rightarrow P = 5x^2 - 6x$

TH2: $x < \frac{1}{6} \Rightarrow P = 5x^2 + 6x - 2$

Với dạng toán này ta có thể hướng dẫn học sinh phân tích đề xuất hiện hằng đẳng thức hoặc có thể vận dụng bài toán tổng quát thì học sinh sẽ thực hiện được dễ dàng hơn. Từ đó các em có thể tự tin hơn, hứng thú hơn về dạng toán này. Khi học sinh đã quen dạng 1, biết áp dụng thông qua bài tập tự luyện, ta tiếp tục giới thiệu dạng tiếp theo nhưng thực chất có thể tiến hành theo dạng 1.

2. Dạng 2: Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN có dạng đa thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = (3x-1)^2 - 4|3x-1| + 5$

Giải: đặt $|3x-1| = y$ thì $A = y^2 - 4y + 5 = (y-2)^2 + 1 \geq 1$

$$\text{Min } A = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 = 2 \\ 3x-1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

b) $B = |x-2| + |x-3|$

Giải: $B = |x-2| + |x-3|$

$$B = |x-2| + |x-3| = B = |x-2| + |3-x| \geq |x-2+3-x| = 1 \\ \Rightarrow \text{min} B = 1 \Leftrightarrow (x-2)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$$

Ví dụ 2: Tìm GTNN của $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$

Giải: Ta có:

$$C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = |x^2 - x + 1| + |2 + x - x^2| \\ \geq |x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2| = 3.$$

$$\min C = 3 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(2 + x - x^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + x - x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$$

Ví dụ 3:

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $T = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4|$

Giải:

$$\text{Ta có } |x - 1| + |x - 4| = |x - 1| + |4 - x| \geq |x - 1 + 4 - x| = 3 \quad (1)$$

$$\text{Và } |x - 2| + |x - 3| = |x - 2| + |3 - x| \geq |x - 2 + 3 - x| = 1 \quad (2)$$

$$\text{Vậy } T = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| \geq 1 + 3 = 4$$

Ta có từ (1) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $1 \leq x \leq 4$

(2) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $2 \leq x \leq 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2 \leq x \leq 3$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = |x - 3| + |x - 7|$

b. $B = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$

c. $C = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4|$

d. $D = |x + 5| + |x + 2| + |x - 7| + |x - 8|$

e. $E = |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| + |x + 5| + |x + 6|$

Bài 2: Cho số thực x. Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = |x + 3| + |x - 2| + |x - 5|$

b. $B = |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| + |x - 6|$

Bài 3: Cho số thực x. Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A = |x + 5| - |x - 2|$

b. $B = |x - 2| - 3|x - 5| - |x - 4|$

Bài 4 : Cho số thực x. Tìm GTNN của $A = \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x + 2}}$

HD: Đặt

$$\begin{aligned} t = \sqrt{x - 2} (t \geq 0) &\Rightarrow t^2 = x - 2 \Rightarrow x = t^2 + 2 \Rightarrow A = \sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = \sqrt{(t - 1)^2} + \sqrt{(t - 3)^2} \\ &= |t - 1| + |3 - t| \geq t - 1 + 3 - t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 \geq 0 \\ 3 - t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x - 2} \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 11 \end{aligned}$$

Bài 5: Cho số thực x . Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \sqrt{x-4+2\sqrt{x-5}} + \sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}} (x \geq 5)$

b. $B = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + 5\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} (x \geq 1)$

Bài 6: Tìm GTNN của $A = |x+3| + |x-2| + 2012$

Bài 7: Tìm GTNN của $A = |x+3| + |x-1| + |x-4| - 3$

Bài 8: Tìm GTNN của $A = |x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_n| + 2017 (a_1 < a_2 < \dots < a_n)$

Bài 9: Tìm GTNN của $A = |5x+3| + |2x-3| - x + 1$

HD : Ta có $A = |5x+3| + |2x-3| - x + 1 = 2\left|x + \frac{3}{5}\right| + 3\left|x + \frac{3}{5}\right| + |2x-3| - x + 1$

Mặt khác $2\left|x + \frac{3}{5}\right| \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}; 3\left|x + \frac{3}{5}\right| \geq 3\left(x + \frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}$

Lại có:

$$|3-2x| \geq 3-2x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow B \geq 0 + 3\left(x + \frac{3}{5}\right) + 3 - 2x + 1 = \frac{29}{5} \Rightarrow \text{Min} B = \frac{29}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$$

3. Dạng 3: Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN là đa thức bậc cao

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = x(x-3)(x-4)(x-7) = (x^2-7x)(x^2-7x+12)$

Giải: Đặt $x^2-7x+6 = y$ thì $A = (y-6)(y+6) = y^2-36 \geq -36$

Min $A = -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2-7x+6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 6$

b) $B = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$

Giải: $B = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$

$$= (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2$$

$$= (x-y)^2 + (x-1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

$$c) C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = x^2 - 2x + y^2 - 2y + xy - x - y$$

Giải: Ta có: $C + 3 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (xy - x - y + 1)$
 $= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1).$

Đặt $x - 1 = a; y - 1 = b$ thì

$$C + 3 = a^2 + b^2 + ab = \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} \right) + \frac{3b^2}{4}$$

$$= \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\text{Min}(C + 3) = 0 \text{ hay } \text{min}C = -3 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $C = (x + 8)^4 + (x + 6)^4$

Giải: Đặt $x + 7 = y \Rightarrow C = (y + 1)^4 + (y - 1)^4$

$$= y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1$$

$$= 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow \text{min} A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = -7$$

b) $D = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9)$
 $= (x^2 - 3x)^2 + (x - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{min}D = 0 \Leftrightarrow x = 3$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 3.1: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$

Bài 1: Tìm GTNN của: $A(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$

Bài 2: Tìm GTNN của: $C(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2017$

Bài 3: Tìm GTNN của: $D(x) = x^4 - x^2 + 2x + 7$

Bài 4: Tìm GTNN của biểu thức: $A = a^4 - 2a^3 - 4a + 5$

Dạng 3.2: $(x+a)^4 + (x+b)^4 + \dots$

Bài 1: Tìm min của: $G = (x+3)^4 + (x-7)^4$

Bài 2: Tìm min của: $A = (x+2)^4 + (x-2)^4$

Bài 3: Tìm max của: $F = 2 - 3(x+1)^4 - 3(x-5)^4$

Dạng 3.3: $x(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) + \dots$

Bài 1: Tìm GTNN của: $A = x(x-3)(x-4)(x-7)$

Bài 2: Tìm GTNN của: $B = (x-1)(x-3)(x^2 - 4x + 5)$

Bài 3: Tìm min của: $A = x(x+2)(x+4)(x+6) + 8$

Bài 4: Tìm GTNN của: $B = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

Bài 5: Tìm GTNN của: $A = (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 2)$

4. Dạng 4: Biểu thức cần tìm GTLN, GTNN có dạng phân thức:

4.1. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Biểu thức dạng này đạt GTNN khi mẫu đạt GTLN mà biểu thức ở dưới mẫu chính là biểu thức học sinh được tiếp cận ở dạng 1.

Ví dụ : Tìm GTNN của $A = \frac{2}{6x-5-9x^2}$

Giải: Ta có: $A = \frac{2}{6x-5-9x^2} = \frac{-2}{9x^2-6x+5} = \frac{-2}{(3x-1)^2+4}$

Vì $(3x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (3x-1)^2 + 4 \geq 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{(3x-1)^2+4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{(3x-1)^2+4} \geq \frac{-2}{4}$$

$$\Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}$$

$$\min A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

4.2. Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

Ví dụ 1: Tìm GTNN của $A = \frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1}$

Giải:

+) **Cách 1 :** Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

$$A = \frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1} = \frac{3(x^2-2x+1)-2(x-1)+1}{(x-1)^2} = 3 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Đặt $y = \frac{1}{x-1}$ Thì $A = 3 - 2y + y^2 = (y - 1)^2 + 2 \geq 2$

$$\Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

+) **Cách 2:** Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

$$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 4x + 4)}{(x - 1)^2}$$

$$= 2 + \frac{(x - 2)^2}{(x - 1)^2} \geq 2$$

$$\Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Ví dụ 2: Tìm GTLN của $B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100}$

Giải:

Ta có $B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100} = \frac{x}{(x+10)^2}$. Đặt $y = \frac{1}{x+10} \Rightarrow x = \frac{1}{y} - 10$ thì

$$B = \left(\frac{1}{y} - 10\right) \cdot y^2 = -10y^2 + y = -10\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{400}\right) + \frac{1}{40} =$$

$$-10\left(y - \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{1}{40} \leq \frac{1}{40}$$

$$\max B = \frac{1}{40} \Leftrightarrow y - \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{20} \Leftrightarrow x = 10$$

Ví dụ 3: Tìm GTNN của $C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Giải: Ta có: $C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{\frac{1}{2}[(x+y)^2 + (x-y)^2]}{(x+y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$$

4.3. Các phân thức có dạng khác

Ví dụ : Tìm GTNN, GTLN (Cực trị) của $A = \frac{3-4x}{x^2+1}$

Giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{3-4x}{x^2+1} = \frac{(4x^2-4x+4)-(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1$$

$$\Rightarrow \min A = -1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Ta lại có: } A = \frac{3-4x}{x^2+1} = \frac{(4x^2+4)-(4x^2+4x+1)}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2+1} \leq 4$$

$$\Rightarrow \max A = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 4.1. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Bài 1: Tìm min của: $A = \frac{2}{6x-5-9x^2}$

Bài 2: Tìm min của: $B = \frac{1}{x^2-4x+9}$

Bài 3: Tìm max của: $C = \frac{-3}{x^2-5x+1}$

Bài 4: Tìm min hoặc max của: $D = \frac{6}{-x^2+2x-3}$

Bài 5: Tìm min hoặc max của: $K = \frac{2}{x^2+8}$

Bài 6: Tìm GTLN hoặc GTNN của các biểu thức sau $C = \frac{y^2}{9x^2-12xy+5y^2} (x \neq 0)$

Dạng 4.2: Các dạng khác

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1} (x \neq 1)$

b. $C = \frac{4x^2-6x+1}{(x-2)^2} (x \neq 2)$

c. $E = \frac{4x^4-x^2-1}{(x^2+1)^2}$

d. $D = \frac{2x^2-16x+41}{x^2-8x+22} (x \in \mathbb{R})$

Bài 2: Tìm min hoặc max của: $D = \frac{2x+1}{x^2+2}$

HD : Nháp : $a = \frac{2x+1}{x^2+2} \Rightarrow a.x^2 - 2x + 2a - 1 = 0$,

Có $\Delta' = 1 - a(2a-1) = 0 \Rightarrow a = 1; a = \frac{-1}{2}$

Khi đó : $D = \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - 1 \right) + 1 = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+2} + 1 = \frac{-(x-1)^2}{x^2+2} + 1 \leq 1$

Mặt khác : $D = \left(\frac{2x+1}{x^2+2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{x^2+4x+4}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2} \geq \frac{-1}{2}$

Bài 3: Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{3-4x}{x^2+1}$

b. $B = \frac{2x+1}{x^2+2}$

c. $C = \frac{4x+3}{x^2+1}$

d. $D = \frac{8x+3}{4x^2+1}$

e. $E = \frac{4x}{4x^2+1}$

Bài 4: Tìm GTNN, GTLN của $P = \frac{8x^2+6xy}{x^2+y^2}$

HD : Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $P = \frac{8\frac{x^2}{y^2} + 6\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2} + 1}$,

Đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow P = \frac{8t^2+6t}{t^2+1} = 8 + \frac{6t-8}{t^2+1}$

Nháp : $a = \frac{6t-8}{t^2+1} \Rightarrow at^2 + a - 6t + 8 = 0$,

có $\Delta' = 9 - a(a+8) = 0 \Rightarrow a = 1; a = -9$.

Làm tiếp tương tự bài trên

Bài 5: Tìm min hoặc max của: $H = \frac{2x^2-2xy+9y^2}{x^2+2xy+5y^2}$

HD: Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được:

$H = \frac{2\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + 9}{\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{x}{y} + 5}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow H = \frac{2t^2-2t+9}{t^2+2t+5} = 2 - \frac{6t+1}{t^2+2t+5}$,

làm giống các bài trên

5. Dạng 5: Tìm GTNN, GTLN của một biểu thức thỏa mãn điều kiện nào đó giữa các biến

Dạng này nên cho học sinh tiếp cận bài toán từ giả thiết đã cho của bài toán

Ví dụ 1: Cho $x + y = 1$. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$

Giải: Ta có $A = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$ (vì $x + y = 1$)

a) Cách 1: Biểu thị ẩn này qua ẩn kia, rồi đưa về một tam thức bậc hai

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$, nên

$$A = (1 - y)^2 + y^2 = 2(y^2 - y) + 1$$

$$= 2\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

b) Cách 2: Sử dụng đk đã cho, làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A

$$\text{Từ } x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1(1).$$

$$\text{Mặt khác: } (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0(2)$$

Cộng (1) với (2) về theo về, ta có:

$$2(x^2 + y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: Cho $x + y + z = 3$

a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 + z^2$

b) Tìm GTLN của $B = xy + yz + xz$

Giải: Từ Cho $x + y + z = 3$

$$\Rightarrow \text{Cho } (x + y + z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 9 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

a) Từ (1) và (2) suy ra

$$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= 3(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow \min A = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

b) Từ (1) và (2) suy ra: $9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$

$$\geq xy + yz + zx + 2(xy + yz + xz)$$

$$= 3(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3$$

$$\Rightarrow \max B = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất của $S = xyz \cdot (x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x)$ với $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$

Giải: Vì $x, y, z > 0$, áp dụng BĐT Côsi ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{27}$$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $x + y; y + z; x + z$ ta có

$$(x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x) \geq 3\sqrt{(x + y) \cdot (y + z) \cdot (x + z)}$$

$$\Rightarrow 2 \geq 3\sqrt{(x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = \frac{1}{3} \Rightarrow S \leq \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{27} = \frac{8}{729}$$

Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Ví dụ 4: Cho $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + y^4 + z^4$

Giải: Áp dụng BĐT Bunhiacôpski cho 6 số $(x, y, z); (x, y, z)$

$$\text{Ta có } (xy + yz + zx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \Rightarrow 1 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \quad (1)$$

áp dụng BĐT Bunhiacôpski cho (x^2, y^2, z^2) và $(1, 1, 1)$

$$\text{Ta có } (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 3(x^4 + y^4 + z^4) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 1 \leq 3(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \leq \frac{1}{3}$$

Vậy $x^4 + y^4 + z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi $x = y = z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm min của: $A = 3x^2 + y^2$ biết: $3x + y = 1$

HD: Từ $3x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 3x \Rightarrow A = 3x^2 + (1 - 3x)^2 = 12x^2 - 6x + 1$

Bài 2: Tìm min của: $A = xy$ biết $3x + y = 1$

HD: $y = 1 - 3x \Rightarrow A = x(1 - 3x) = -3x^2 + x$

Bài 3: Cho $a, b > 0$ và $a + b = 4$, tìm GTLN của $P = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)$

HD: Ta có: $P = 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{4}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{3}{ab}$

Do $a, b > 0 \Rightarrow a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow ab \leq 4$

Khi đó: $\frac{3}{ab} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{3}{ab} \leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$,

Đấu = xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} a+b=4 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$

Bài 4: Tìm min của: $F = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$, biết: $a+b=1$ và $a, b > 0$

HD: Cách 1:

Ta có: $\left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2 = \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2 = 8 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$
 $\geq 8 + 4 \cdot 2 + 2 = 18$

Cách 2:

Ta có:

$$F = \left(1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(1 + \frac{2}{b} + \frac{1}{b^2}\right) = 2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 2 + 2\left(\frac{a+b}{ab}\right) + \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)$$

$$F = 2 + \frac{2}{ab} + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \quad (1)$$

Mà $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2=1-2ab$ thay vào (1) ta được:

$$F = 2 + \frac{2}{ab} + \frac{1-2ab}{a^2b^2} = 2 + \frac{1}{a^2b^2}$$

Lại có: $a+b=1 \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow a^2b^2 \leq \frac{1}{16}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2b^2} \geq \frac{16}{1} \Rightarrow F = 2 + \frac{1}{a^2b^2} \geq 2 + 16 = 18$$

Đấu = khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Bài 5: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x + y = 1$, Tìm min của: $A = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

HD: Ta có : $A = 16(xy)^2 + 12x^3 + 12y^3 + 9xy + 25xy = 6x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$

Vì $x + y = 1$ nên $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2 - 3xy = 1 - 3xy$,
thay vào A

$$A = 6x^2y^2 + 12(1 - 3xy) + 34xy, \text{ Đặt } xy = t \text{ khi đó : } A = 6t^2 - 2t + 12$$

C. Một số chú ý:

1. Khi tìm GTNN, GTLN ta có thể đổi biến

Ví dụ : Khi tìm GTNN của $A = (x - 1)^2 + (x - 3)^2$

Giải: ta đặt $x - 2 = y$ thì $A = (y + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2y^2 + 2 \geq 2 \dots$

2. Khi tìm cực trị của một biểu thức, ta có thể thay đk của biểu thức này đạt cực trị bởi điều kiện tương đương là biểu thức khác đạt cực trị:

- +) $-A$ lớn nhất $\Leftrightarrow A$ nhỏ nhất;
- +) $\frac{1}{B}$ lớn nhất $\Leftrightarrow B$ nhỏ nhất (với $B > 0$)
- +) C lớn nhất $\Leftrightarrow C^2$ lớn nhất

Ví dụ: Tìm cực trị của $A = \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Giải:

a) Ta có $A > 0$ nên A nhỏ nhất khi $\frac{1}{A}$ lớn nhất, ta có

$$\frac{1}{A} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 + 1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \geq 1 \Rightarrow \min \frac{1}{A} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \max A = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

b) Ta có $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 1 \geq 2x^2$.

(Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = 1$)

$$\text{Vì } x^4 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \max \frac{1}{A} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

3. Nhiều khi ta tìm cực trị của biểu thức trong các khoảng của biến, sau đó so sánh các cực trị đó để tìm GTNN, GTLN trong toàn bộ tập xác định của biến

Ví dụ: Tìm GTLN của $B = \frac{y}{5-(x+y)}$

Giải:

a) xét $x + y \leq 4$

- Nếu $1 \leq y \leq 3$ thì $A \leq 3$
- Nếu $x = 0$ thì $A = 0$
- Nếu $y = 4$ thì $x = 0$ và $A = 4$

b) xét $x + y \geq 6$ thì $A \leq 0$

So sánh các giá trị trên của A, ta thấy $\max A = 4 \Leftrightarrow x = 0; y = 4$

4. Sử dụng các hằng bất đẳng thức

Ví dụ 1: Tìm GTLN của $A = |2x + 3y|$ biết $x^2 + y^2 = 52$

Giải: áp dụng Bất Bunhiacôpxki: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ cho các số 2, x, 3, y ta có: $(2x + 3y)^2 \leq (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = (4 + 9).52 = 26^2$

$$\Rightarrow |2x + 3y| \leq 26$$

$$\max A = 26 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = 52$$

$$\Leftrightarrow 13x^2 = 52.4 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

$$\text{Vậy: } \max A = 26 \Leftrightarrow x = 4; y = 6 \text{ hoặc } x = -4; y = -6$$

Ví dụ 2: Cho $4x + 3y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $A = 4x^2 + 3y^2$

Giải: Ta có: $1^2 = (4x + 3y)^2$

$$= (2.2x + \sqrt{3}.\sqrt{3}y)^2 \leq (4 + 3)(4x^2 + 3y^2) = 7A \quad (\text{BĐT Bunhia})$$

$$\text{Suy ra: } A \geq \frac{1}{7}$$

$$\text{Vậy Min } A = \frac{1}{7} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{2x}{3y} = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{7}$$

Ví dụ 3: Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$.

$$\text{Tìm GTLN của biểu thức } K = \sqrt{4a + 5} + \sqrt{4b + 5} + \sqrt{4c + 5}$$

Giải: Ta có: $K^2 = (1 \cdot \sqrt{4a+5} + 1 \cdot \sqrt{4b+5} + 1 \cdot \sqrt{4c+5})^2$

$$\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(4a+5 + 4b+5 + 4c+5) \quad (\text{BĐT Bunhia})$$

$$= 3[4(a+b+c) + 15] = 3(4 \cdot 3 + 15) = 81$$

Suy ra: $K \leq 9$

Vậy Max $K = 9$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{\sqrt{4a+5}}{1} = \frac{\sqrt{4b+5}}{1} = \frac{\sqrt{4c+5}}{1} \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$

Ví dụ 4: Cho $x \neq 0$. Tìm GTNN của biểu thức $T = 8x^2 - 4x + \frac{1}{4x^2} + 15$

Giải: Có $T = (4x^2 - 4x + 1) + (4x^2 + \frac{1}{4x^2}) + 14$

$$= (2x - 1)^2 + \left(4x^2 \cdot \frac{1}{4x^2}\right) + 14 \geq 0 + 2\sqrt{4x^2 \cdot \frac{1}{4x^2}} + 14 = 16$$

(BĐT Cô Si)

Vậy min $T = 16$ khi $x = \frac{1}{2}$

5. Hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

Hai số có tích không đổi thì tổng của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

Ví dụ 1: Tìm GTLN của $A = (x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$

Giải:

Vì $(x^2 - 3x + 1) + (21 + 3x - x^2) = 22$ không đổi nên tích

$(x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$ lớn nhất khi và chỉ khi

$$x^2 - 3x + 1 = 21 + 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = -2$$

$$\text{Khi đó } A = 11 \cdot 11 = 121 \Rightarrow \text{Max } A = 121 \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = -2$$

Ví dụ 2: Tìm GTNN của $B = \frac{(x+4)(x+9)}{x}$

Giải: Ta có: $B = \frac{(x+4)(x+9)}{x} = \frac{x^2+13x+36}{x} = x + \frac{36}{x} + 13$

Vì các số x và $\frac{36}{x}$ có tích $x \cdot \frac{36}{x} = 36$ không đổi nên $x + \frac{36}{x}$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow x = \frac{36}{x} \Leftrightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow A = x + \frac{36}{x} + 13 \text{ nhỏ nhất là } \min A = 25 \Leftrightarrow x = 6$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $ab + bc + ca = 1$.

Tìm GTLN của biểu thức $P = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$

Bài 2: Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $ab + bc + ca = 3abc$.

Tìm GTLN của biểu thức $P = \frac{a^2}{c(c^2+a^2)} + \frac{b^2}{a(b^2+a^2)} + \frac{c^2}{b(c^2+b^2)}$

Bài 3: Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 2$.

Tìm GTNN của biểu thức $A = a^2 + b^2 + c^2$

Bài 4: Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$.

Tìm GTNN của biểu thức $M = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{b+c}{2}} + \sqrt{\frac{c+a}{2}}$

Bài 5: Cho $a \geq 0, b \geq 0$ và $\sqrt{a+2b} = 2 + \sqrt{\frac{b}{a}}$

Tìm GTLN của biểu thức $P = \frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2a}}$ (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên KHTN 2018).

PHẦN 3. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

I. Kết luận

Qua một số năm giảng dạy môn toán THCS, đặc biệt là môn toán 8, tôi nhận thấy dạng toán tìm GTLN, GTNN là một dạng toán hay, khó, ít phổ biến nhưng thường xuất hiện nhiều trong các đề thi học sinh giỏi. Vì vậy tôi đã tìm tòi nghiên cứu đưa ra một số phân loại theo phương pháp giải hướng dẫn cho học sinh tiếp cận và yêu thích dạng toán này. Khi áp dụng dạng bài tập khó được phân loại như trên để hướng dẫn học sinh học tập, tôi thấy học sinh tại các lớp dạy không còn lúng túng, lo lắng nữa mà đã nắm vững kiến thức hơn, nắm được phương pháp giải bài toán, biết cách suy luận, phân loại, nhận dạng được bài tập, từ đó áp dụng được phương pháp giải phù hợp, tính toán nhanh, chính xác. Hơn nữa, học sinh cũng đã hào hứng tiếp nhận kiến thức, hăng hái phát biểu. Trong quá trình học tập học sinh dần biết cách phát hiện chiếm lĩnh kiến thức mới, chất lượng học tập tăng lên, giúp các em tự tin hơn khi học bộ môn, khi tiếp cận dạng toán khó, góp phần vào việc nâng cao chất lượng dạy học và giáo dục học sinh.

Bản thân giáo viên đứng lớp cũng cảm thấy vui hơn trong sau mỗi tiết dạy. Thấy kết quả thu được rất khả quan, học sinh yêu thích dạng toán, biết cách tiếp cận, chủ động tìm hiểu những kiến thức nâng cao, học tập hiệu quả hơn. Đặc biệt, chất lượng bộ môn tôi dạy tăng lên một cách rõ rệt. Số lượng học sinh khá, giỏi chiếm tỉ lệ cao hơn so với năm học trước.

Sau khi đưa ra một số phân loại cho dạng toán này và hướng dẫn cho học sinh, tôi lại khảo sát và thu được kết quả như sau:

Đơn vị	Khối 8,9	Hứng thú với dạng toán	Biết cách tiếp cận dạng toán
Tổng số	210 HS	95HS	65
Tỉ lệ	100%	45,2%	31%

Việc phân loại theo phương pháp giải bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức được áp dụng trong các buổi học bồi dưỡng, góp phần giúp các em học sinh tiếp nhận kiến thức dễ dàng, hứng thú khi tiếp nhận kiến thức mới, kiến

thức khó. Qua đó các em học tập tích cực hơn, yêu thích môn học, hoạt động dạy và học trở nên nhẹ nhàng.

Trên cơ sở đó thúc đẩy các em đi vào con đường tìm tòi khám phá khoa học, giúp các em tiếp tục theo đuổi con đường chinh phục các đỉnh cao tri thức mới, cũng như góp phần vào phân loại hay định hướng nghề nghiệp sau này cho mỗi học sinh.

Qua việc nghiên cứu và giảng dạy, bản thân tôi cũng nâng cao được kiến thức, nâng cao nghiệp vụ, bồi dưỡng học sinh giỏi hiệu quả, chuyên môn của tôi cũng vững vàng hơn, đúc rút được nhiều kinh nghiệm hơn.

Với tổ chuyên môn mà tôi công tác, tôi cũng đã triển khai chuyên đề này tới các thành viên trong tổ cùng trao đổi, rút kinh nghiệm thống nhất thực hiện cách giảng dạy về dạng toán tìm GTLN, GTNN này.

Như vậy kĩ năng và chất lượng học tập bộ môn đã có sự chuyển biến rõ rệt so với khi chưa áp dụng sáng kiến. Tuy số lượng học sinh làm được dạng toán này chưa nhiều nhưng cũng rất khả quan vì có nhiều HS đã bộc lộ được năng khiếu bộ môn, quan trọng hơn cả các em có thái độ tích cực, chăm chú theo dõi, tích cực xây dựng bài, thêm yêu thích, hào hứng với dạng toán khó. Đó chính là niềm vui mà người viết muốn chia sẻ để các bạn đồng nghiệp có thêm những phương pháp tự học, tự nghiên cứu để có thể tiếp tục nghiên cứu các vấn đề khác tốt hơn trong suốt quá trình dạy học của để nâng cao năng lực chuyên môn cho bản thân.

II. Đề xuất, kiến nghị

Trong điều kiện của trường Phổ thông hiện nay, đặc biệt trong công cuộc đổi mới, nâng cao chất lượng dạy và học, để công tác giảng dạy bộ môn có hiệu quả cao, tôi có một số kiến nghị sau đây:

1. Với các cấp quản lí giáo dục:

- Thường xuyên tổ chức các chuyên đề, tăng cường hoạt động tập huấn cho giáo viên các trường THCS, cũng như thêm những buổi trao đổi chuyên môn hoặc mời các chuyên gia hỗ trợ giáo viên huyện về trong việc tiếp cận phương pháp

mới, tiến bộ. Để các giáo viên trong huyện được học tập kinh nghiệm giảng dạy của nhau.

- Các cơ quan quản lí giáo dục cần có nhiều biện pháp thiết thực để động viên giáo viên đổi mới phương pháp dạy học, khuyến khích học sinh đổi mới phương pháp học tập theo hướng tích cực, chủ động, sáng tạo, tự học.

2. Về phía nhà trường:

- Tổ nhóm chuyên môn và nhà trường tiếp tục duy trì và phát triển các buổi toạ đàm thảo luận sâu về chuyên môn để giáo viên trao đổi, học hỏi kinh nghiệm giảng dạy lẫn nhau.

- Những sáng kiến kinh nghiệm hay, những bài giảng tốt, những phương pháp dạy học mới tiếp tục phổ biến kịp thời đến giáo viên và học sinh trong toàn trường để chúng tôi được tiếp thu, ứng dụng và nhân rộng ra các lớp.

- Phòng thư viện nhà trường cần có đủ về số lượng và phong phú sách tham khảo, những tư liệu có liên quan như sách tham khảo, tạp chí cho giáo viên và học sinh.

3. Về phía giáo viên:

- Bản thân giáo viên thường xuyên lập kế hoạch và tiến hành nghiên cứu, tìm hiểu tài liệu, ..., ghi chép, so sánh, tổng hợp để rút ra kết luận đúng đắn.

- Tăng cường tổ chức nhiều phương pháp và hình thức dạy học phù hợp với từng đối tượng học sinh để tạo hứng thú học tập của học sinh.

- Tích cực dự giờ và trao đổi với đồng nghiệp để có phương pháp và kĩ năng giảng dạy.

- Tăng cường giao tiếp giữa thầy và trò, tạo mối quan hệ gần gũi trong quá trình giảng dạy.

4. Đối với học sinh:

- Cần có thái độ nghiêm túc trong học tập, đầy đủ sách giáo khoa, đồ dùng học tập.

- Tích cực tìm tòi, tra cứu tài liệu, nâng cao ý thức tự học, không ngừng học hỏi, trao đổi, thảo luận với bạn bè, thầy cô để chiếm lĩnh tri thức cho bản thân.

Do thời gian viết bài không nhiều nên cách phân loại theo phương pháp giải dạng toán mà tôi đưa ra chưa thật đủ đầy, cũng như vốn kiến thức có hạn của mình chắc chắn bài viết không tránh khỏi những hạn chế, thiếu sót. Tôi rất mong Hội đồng xét duyệt SKKN các cấp góp ý và bổ sung để SKKN của tôi được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn và kính chúc sức khỏe các đồng chí !

Xác nhận của thủ trưởng đơn vị

Hà Nội, ngày 26 tháng 04 năm 2022

Tôi xin cam đoan đây là đề tài nghiên cứu do tôi thực hiện, không sao chép nội dung của người khác.

Tác giả

Hoàng Thị Thanh Hòa

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bài tập nâng cao Toán 8 của Nhà xuất bản Giáo dục.
2. Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 8 của Nhà xuất bản Giáo dục.
3. Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán 8 của Nhà xuất bản Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.
4. Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán 9 của Nhà xuất bản Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.
5. Luyện giải đề thi vào 10 môn Toán của Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.
6. Ôn tập thi vào lớp 10 môn Toán của Nhà xuất bản Giáo dục.
7. Tổng hợp chuyên đề trọng tâm thi vào 10 chuyên và học sinh giỏi của Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.
8. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.