

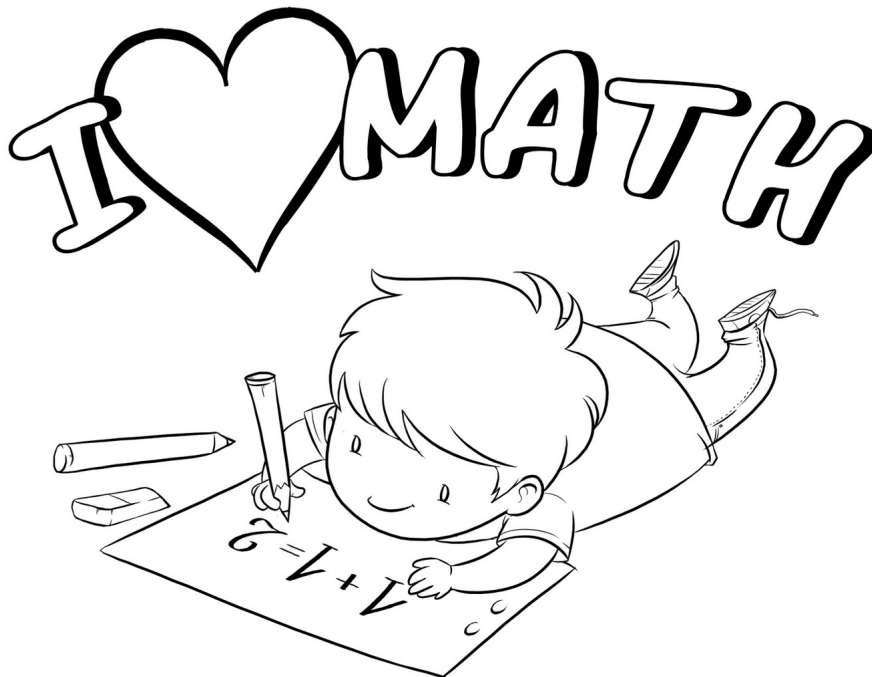
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT NGUYỄN THỊ MINH KHAI



ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HÈ

MÔN TOÁN LỚP

10





CHUYÊN ĐỀ 1. Phương trình

§1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

Bài 1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$m^2x + 2 = x + 2m \quad (1)$$

Bài 2. Giải và biện luận phương trình $(m^2 + 4)x - 3m = x - 3$. (1)

Bài 3. Giải và biện luận phương trình $m(x - 2m) = x + m + 2$. (1)

Bài 4. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 1 = (m - 1)x + m$. (1).

Bài 5. Giải và biện luận các phương trình sau:

1. $m^2x - 3 = x + 3m$
2. $m(mx - 1) = 4x + 2$
3. $a(x - b) + b(x - a) = 0$ với (a, b) là tham số
4. $m(mx + 3) = m(x - 3) + 6$
5. $m^2x + m = 9x - 3$
6. $3(m + 1)x + 4 = 2x + 5m + 5$
7. $m^2x = 9x + m^2 - 4m + 3$
8. $m^2(x - 1) + 3mx + (m^2 + 3)x - 1$
9. $mx + n = \frac{2x + mn}{2} + \frac{1}{3}$
10. $m(mx + 2n^2) - m^2 = n^2(x + m)$ với m, n là tham số
11. $\frac{x + m - n}{m} - \frac{x + n - m}{n} = \frac{m^2 - n^2}{mn}$ với m, n là tham số
12. $\frac{mx - 1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{m(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$

Bài 6. Tìm m để phương trình $(m - 2)x - (3x - 2) = 0$ vô nghiệm

Bài 7. Tìm m để mỗi phương trình sau có vô số nghiệm:

a) $m^2x + m(x - 4) = 2x + 8$ b) $\sqrt{x^2 - m} = x + m$

Bài 8. Tìm m nguyên để phương trình $m(mx + 3) = m(x - 3) + 6$ có nghiệm nguyên.

Bài 9. Tìm m để các phương trình sau đây có nghiệm duy nhất

1. $\frac{x + m}{x + 1} + \frac{x - 2}{x} = 2$
2. $\frac{(2m - 1)x + 3m - 2}{x + 1} = m$

Bài 10. Tìm m để phương trình $\frac{x - m}{x - 2m} = \frac{x + 1}{x - 2}$ vô nghiệm.

Bài 11. Cho phương trình $mx + m^2 - 3m + 1 = 0$.

1. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.
2. Tìm m để phương trình vô nghiệm.
3. Tìm m nguyên để phương trình có nghiệm nguyên.

Bài 12. Tìm m để:

1. Phương trình $\frac{2}{1-x} = m + 5$ có nghiệm âm.
2. Phương trình $m^2(x-1) = 4x - 3m + 2$ có nghiệm dương.
3. Phương trình $\frac{4x-m}{6} - 1 = \frac{2x+m}{3} - \frac{3(4-x)}{12}$ có nghiệm $x \in (0; 5)$.

Bài 13. Kí hiệu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$. Tính giá trị các biểu thức sau

- | | | |
|------------------------------------|--|--|
| 1. $x_1^2 + x_2^2$ | 4. $x_1x_2^3 + x_1^3x_2$ | 7. $x_1^4 + x_2^4$ |
| 2. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ | 5. $x_1^3 + x_2^3$ | 8. $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$ |
| 3. $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$ | 6. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ | |

Bài 14. Kí hiệu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 8x - 9 = 0$. Hãy lập phương trình bậc hai nhận các cặp số sau làm nghiệm.

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. x_1^2, x_2^2 | 3. $x_1 + 2, x_2 + 2$ | 6. $\frac{1}{x_1 + 1}, \frac{1}{x_1 + 2}$ |
| 2. $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ | 4. $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$ | 7. $2x_2 - x_1, 2x_1 - x_2$. |
| | 5. $x_1^2x_2, x_1x_2^2$ | |

Bài 15. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ với m là tham số.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt, hai nghiệm trái dấu.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương, âm phân biệt.
3. Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm dương.
4. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.
5. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$.
6. Tìm m để phương trình có hai nghiệm là độ dài hai cạnh tam giác vuông có diện tích bằng 12.
7. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ thỏa mãn $|x_1| > |x_2|$.
8. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $4x_1 - x_2 = 1$.

Bài 16. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m - 1 = 0$.

1. Biết rằng phương trình có một nghiệm $x = 1$. Tìm nghiệm còn lại.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$.
3. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 3x_2$.
4. Kí hiệu $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A .
5. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 6$.
6. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 mà không phụ thuộc vào m .

Bài 17. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 4m - 10 = 0$ với m là tham số thực.

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = -4$.

3. Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, tìm m nguyên để biểu thức $P = \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 18. Cho phương trình $x^2 - (2m + 3)x + 6m - 1 = 0$ với m là tham số thực.

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1(x_1 + 27) + x_2(x_2 + 27) = 0$.
3. Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, tìm m nguyên để biểu thức $P = \frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 19. Cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm dương.
3. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = 6$.

Bài 20. Cho phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m + 2 = 0$.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$.
3. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2$.
4. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 21. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 4m = 0$ với m là tham số.

1. Giải phương trình khi $m = 2$.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + m)(x_2 + m) = 3m^2 + 12$.

Bài 22. Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$.

1. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) = 16$

Bài 23. Cho phương trình $x^2 + 4x - 4 + m = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-4; 2]$.

Bài 24. Cho phương trình $x^4 + (1 - m)x^2 + m^2 - 1 = 0$.

1. Tìm m để phương trình đã cho vô nghiệm, có một nghiệm, hai nghiệm, ba nghiệm, bốn nghiệm phân biệt.
2. Tìm m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt cách đều nhau.

Bài 25. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq c$) có nghiệm này gấp k lần nghiệm kia thì ta có đẳng thức $kb^2 = (k + 1)^2ac$.

§2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 6x^2 - 5 = 0$

Bài 2. Tìm m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Bài 5. Giải các phương trình sau:



1. $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 82$

3. $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 90$

2. $(x+2)^4 + (x+8)^4 = 272$

4. $x^4 + (x-2)^4 = 70$

Bài 6. Tìm m để phương trình $(x-1)^4 + (x-3)^4 = m$ vô nghiệm.

Bài 7. Giải các phương trình sau:

1. $x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 6x + 4 = 0$

3. $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$

2. $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 24x + 9 = 0$

4. $x^4 - 13x^3 + 46x^2 - 39x + 9 = 0$

Bài 8. Giải các phương trình sau:

1. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$

5. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6) = 168x^2$

2. $(x+2)(x+3)(x-7)(x-8) = 0$

6. $(x+6)(x+8)(x+9)(x+12) = 2x^2$

3. $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40$

7. $(x+4)(x+6)(x-2)(x-12) = 25x^2$

4. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35$

8. $18(x+1)(x+2)(x+5)(2x+5) = \frac{19}{4}x^2$

§3

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình sau:

1. $\frac{3mx+2}{x+1} = 1$

3. $\frac{x-m}{x-2} + \frac{x-3}{x} = 2$

2. $\frac{4+(m+2)x}{2x-3} = -m+1$

4. $\frac{(x+1)(mx+2)}{x-3m} = 0$

Bài 2. Tìm m để phương trình $\frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$ vô nghiệm.

Bài 3. Giải các phương trình sau

1. $\frac{x^2+3x+4}{2x-1} = \frac{x+1}{2}$

11. $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2} = \frac{3}{x^4+4}$

2. $\frac{5x-3}{3x+5} = \frac{2x-5}{x-1}$

12. $\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}$

3. $\frac{2x^2+3x-1}{x+3} = \frac{4x-5}{2}$

13. $\frac{x^2-3x+5}{x^2-4x+5} - \frac{x^2-5x+5}{x^2-6x+5} = -\frac{1}{4}$

4. $\frac{2x^2-2}{2x+1} + \frac{x+2}{2x+1} = 2$

14. $\frac{x^3+x}{(x^2-x+1)^2} = 2$

5. $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

15. $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$

6. $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1}$

16. $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$

7. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1$

17. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}$

8. $x^2 + (x+1)^2 = \frac{1}{x^2+x+1}$

18. $\frac{x^4+4}{x^2+2} = 5x$

9. $x^2 + \frac{4}{x^2} = 4\left(x - \frac{2}{x}\right)$

19. $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 = \frac{5(x^2-4)}{2(x^2-1)}$

10. $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$

20. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 90$

$$21. \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 = 5$$

$$23. \frac{(x-1)^2x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2}{9}$$

$$22. \left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x^2+x+2}\right)^2 = \frac{13}{36}$$

$$24. \frac{(x^2+1)^2(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)} = x + \frac{1}{x}$$

§4

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN DƯỚI DẤU CĂN

Bài 1. Sử dụng phương pháp bình phương hai vế, giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1$$

$$6. \sqrt{x+1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}$$

$$2. \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$$

$$7. 2\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2\sqrt{2x-1}$$

$$3. \sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2+2x-2} = 2$$

$$8. \sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$$

$$4. \sqrt{2x+1} = 3-x$$

$$9. \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} = 8$$

$$5. \sqrt{3x^2-5x+4} = 2x-1$$

$$10. \sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2+6x+5} = \sqrt{2x^2+9x+7}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau

$$1. 2x^2 - 5\sqrt{x^2-3x+5} = 6x-7$$

$$7. \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} - 2x+2$$

$$2. 2x^2 - 2x + \sqrt{(x+1)(x-2)} = 14$$

$$8. 4\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 2x + \frac{1}{2x} + 2$$

$$3. \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{-x^2+4x-3} = 3$$

$$9. x+1 + \sqrt{x^2-4x+1} = 3\sqrt{x}$$

$$4. \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x^2} = 5$$

$$10. x^2 + \sqrt{x+5} = 5$$

$$5. \sqrt{x+9} + \sqrt{x+18} = 9$$

$$11. x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$$

$$6. 3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10-3x$$

§5

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1. |x-2| = |x+3|$$

$$6. |x-1| + |2x+1| = |3x|$$

$$2. \sqrt{4x^2-12x+9} = |x+1|$$

$$7. |3x-5| + |2x-1| = |-5x+6|$$

$$3. |x^2-4x+2| = 2$$

$$8. |x^2+5x+4| = x^2+6x+5$$

$$4. |x-1| = |x^2-3x+1|$$

$$9. x^2 - 2|x-1| = 0$$

$$5. |x^2-5x+4| - x = 4$$

$$10. \left| \frac{x^2-4x}{x^2+x+1} \right| = 1$$

Bài 2. Giải và biện luận các phương trình sau

$$1. |mx+2x-1| = |x|$$

$$4. 2(|x|+m-1) = |x|-m+3$$

$$2. |2x-1| = |mx+2|$$

$$3. |3x+m| = |2x-2m|$$

$$5. |mx+2m| = |mx+x+1|$$

Bài 3. Tìm m để phương trình $|x^2+2mx+1| = x+1$ có nghiệm duy nhất.

CHUYÊN ĐỀ 2. Hệ phương trình

§1 HỆ BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$1. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{10}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 6 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 62 \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} \frac{5}{2x+3} - \frac{2}{2y+1} = 11 \\ \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2y+1} = -2 \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} \frac{2}{2x+1} - \frac{5}{2y-1} = 8 \\ \frac{3}{2x+1} - \frac{1}{2y-1} = 1 \end{cases};$$

$$5. \begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 10 \\ \frac{2}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 3 \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} \frac{1}{x+2y} + \frac{2}{3x+1} = 3 \\ \frac{2}{x+2y} - \frac{1}{3x+1} = -4 \end{cases};$$

$$7. \begin{cases} \frac{10}{x-y+2} + \frac{3}{x+y-1} = \frac{7}{2} \\ \frac{3}{x-y+2} + \frac{2}{3x+1} = 3 \end{cases};$$

$$8. \begin{cases} \frac{3}{2x-3y} + \frac{2}{x+y} = 6 \\ \frac{7}{x+y} - \frac{2}{2x-3y} = -5 \end{cases}.$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$1. \begin{cases} |x-1| = 1 \\ x+2y = 6 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} x+y = 1 \\ x-|y-2| = 3 \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} 2x+y = 3 \\ |x-y| = 2 \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} |x+1| + |y-1| = 3 \\ |x+1| - y = 1 \end{cases};$$

$$5. \begin{cases} |x-1| + 3|y-2| = 9 \\ |x-1| - |y-2| = 1 \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} 2|3x-1| - |y+2| = 3 \\ |3x-1| + |y+2| = 6 \end{cases};$$

$$7. \begin{cases} 2|x+y| + |x-y| = 5 \\ 5|x+y| - 3|x-y| = 7 \end{cases};$$

$$8. \begin{cases} |x+2y-1| + 3|x-y+2| = 10 \\ 8|x+2y-1| - 5|x-y+2| = -7 \end{cases}.$$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau

$$1. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = \frac{13}{6} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y-2} = 4 \\ \frac{4}{x} - \frac{1}{y-2} = \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$



$$5. \begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+2y} = 5 \\ \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2y} = -1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -2 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{10}{\sqrt{12x-3}} + \frac{5}{\sqrt{4y+1}} = 1 \\ \frac{7}{\sqrt{12x-3}} + \frac{8}{\sqrt{4y+1}} = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} |x+2| + 4\sqrt{y-1} = 3 \\ 3|x+2| - 2\sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+1} = 4 \\ (x+y) - 3\sqrt{x+1} = -5 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{3}{2x} - y = 6 \\ \frac{1}{x} + 2y = -4 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} (x-1)^2 - 2y = 2 \\ 3(x-1)^2 + 3y = 1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 18 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{1}{y-1} = 5 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{y-1} = -1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{2}{y-2} = 6 \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \frac{3}{x-2} + \frac{2}{y+1} = \frac{17}{5} \\ \frac{2x-2}{x-2} + \frac{y+2}{y-1} = \frac{26}{5} \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \frac{x-1}{2x+1} - \frac{y-2}{y+2} = 1 \\ \frac{3x-3}{2x+1} + \frac{2y-4}{y+2} = 3 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \frac{4}{x+y} + 3\sqrt{4x-8} = 14 \\ \frac{5-x-y}{x+y} - 2\sqrt{x-2} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Bài 4. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$

Bài 5. Tìm m nguyên để hệ $\begin{cases} (m+1)x - 2y = m - 1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ duy nhất là số nguyên.

Bài 6. Tìm m để các hệ sau có vô số nghiệm

$$1. \begin{cases} mx + 2y = 1 \\ x + (m-1)y = m \end{cases} \quad 2. \begin{cases} (m-2)x + (m-4)y = 2 \\ (m+1)x + (3m+2)y = -1 \end{cases}$$

Bài 7. Tìm m để hệ $\begin{cases} (m+1)x - my = 4 \\ 3x - 5y = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x - y \leq \frac{1}{2}$

Bài 8. Tìm m để hệ $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 2y = 10m - 5 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 9. Tìm m để hệ $\begin{cases} x + (m+2)y = 2m + 2 \\ mx + 2y = m^2 + 2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x = y$.

§2 MỘT SỐ LOẠI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÁC

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

1.
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 - y^2 = 2x - 1 - y \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 3x^2 + 2x - y^2 = 1 \\ y^2 + 4x = 8 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^2 + 14y^2 = 1 + 4xy \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} x^3 + 2x = y \\ y^3 + 2y = x \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 6 \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} x^3 = 2y + x + 2 \\ y^3 = 2x + y + 2 \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ xy + 7 = x + y \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x + y - x^2y - y^2x = -3 \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} x + y + xy = -7 \\ x^2 + y^2 - 3(x + y) = 16 \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 3 \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} (4x + 2)^2 = 2y + 15 \\ (4y + 2)^2 = 2x + 15 \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} x - 3y = \frac{4y}{x} \\ y - 3x = \frac{4x}{y} \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12 \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12 \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 13 \\ xy(x + 2)(y + 2) = 24 \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 3. Bất đẳng thức và GTLN-GTNN

§1 CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. Cho a, b là hai số dương. Chứng minh:

a) $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$;

b) $a^2 + b^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

Bài 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, với $a, b \geq 0$;

$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Bài 3. Cho a, b, c, d, e là các số thực tùy ý. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực, chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

Bài 5. Cho x, y, z là các số thực, chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt{2}x(y + z)$$

Bài 6. Cho x, y, z là các số thực, chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$$

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực, chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \geq \frac{2}{3}(x + y + z)^2$$

Bài 8. Cho x, y, z là các số thực dương, chứng minh rằng

1. $(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq 9x^2y^2z^2$

2. $\frac{2xy}{x+y} + \frac{2yz}{y+z} + \frac{2xz}{x+z} \leq x + y + z$

3. $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$

4. $\frac{9x^2}{y+2z} + \frac{9y^2}{z+2x} + \frac{9z^2}{x+2y} \geq 3(x + y + z)$

Bài 9. Cho x, y, z là các số thực dương, chứng minh rằng

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}}$

2. $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq x + y + z$

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh các bất đẳng thức sau

1. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$
2. $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$
3. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$

Bài 11. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y=2$. Chứng minh rằng: $xy(x^2+y^2) \leq 2$, $x^3y^3(x^3+y^3) \leq 2$

§2

GTLN, GTNN

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1. $x + \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 2$
2. $2x + \frac{1}{x^2}, \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}$
3. $x^2(1-x), \quad 0 < x < 1$
4. $x(1-x^2), \quad 0 < x < 1$
5. $x(1-x^3), \quad 0 < x < 1$
6. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$
7. $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-4x}$
8. $2\sqrt{3-4x} + \sqrt{4+x}$
9. $\frac{1}{4(1-x)^2} - x, \quad 0 < x < 1$
10. $x + \frac{4}{(x-2)^2}, \quad x > 2$
11. $\frac{x-1}{\sqrt{x-3}}, \quad x > 3$
12. $x + \frac{3}{x-2}, \quad x > 2$
13. $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$
14. $2x + \frac{3}{x}, \quad x \geq 5$
15. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$
16. $\frac{4}{x} + \frac{9}{1-x}$
17. $\frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$
18. $4x^3 - 3x^4, \quad 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$
19. $x^2(5-6x), \quad 0 \leq x \leq \frac{5}{6}$
20. $3x^2 + \frac{1}{x}$
21. $\frac{x+3}{4} + \frac{16}{x+1}, \quad x > 0$
22. $\frac{(x+2)^2}{x}, \quad x > 0$
23. $x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x + 2y + 9$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của $(3-x)(2-y)(5x+6y)$, $x \in [0; 3], y \in [0; 2]$

CHUYÊN ĐỀ 4. Hàm số bậc nhất, hàm số bậc hai

§1 HÀM SỐ BẬC NHẤT

Bài 1. Xác định hàm số bậc nhất trong các trường hợp sau:

- Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(1; -3)$ và $B(0; 1)$.
- Đi qua điểm $C(1; 2)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .
- Đồ thị cắt đường thẳng $y = 2x + 5$ tại điểm có hoành độ bằng -2 và cắt đường thẳng $y = -3x + 4$ tại điểm có tung độ bằng -2 .
- Đồ thị đi qua giao điểm của $(d_1) : y = x + 1$ và $(d_2) : y = -2x + 1$ và điểm $B(-1; 2)$.

Bài 2. Xác định đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- Có hệ số góc bằng 3 và đi qua điểm $A(2; -3)$.
- Song song với đường thẳng $y = 2x + 2017$ và đi qua điểm $B(7; 3)$.
- Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{5}x + 2017$ và đi qua điểm $B(-4; 0)$.

Bài 3. Xác định hàm số bậc nhất biết rằng đồ thị của nó đi qua giao điểm của đường thẳng $y = -2x + 6$ với trục hoành và tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.

Bài 4. Tìm m để đồ thị ba hàm số $y = 2x$, $y = -x - 3$, $y = mx + 5$ đồng quy.

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = |2x - 1|$

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{nếu } -2 \leq x < -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 \leq x < 1 \\ x - 3 & \text{nếu } 1 < x \leq 3. \end{cases}$

- Khảo sát, lập bảng biến thiên của hàm số trên $[-2; 3]$.
- Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

Bài 7. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

- $y = |x - 2| - x$
- $y = 3|x - 1| - |x + 3|$
- $y = 2|x - 1| - 3|x - 2| + 1$
- $y = |2 - x| + |x + 1|$

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{nếu } x \geq 1 \\ -|x| & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$.

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số trên.
- Dựa vào đồ thị, tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 9. Cho hàm số $y = 3|x - 1| - |x + 3|$

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.
- Tìm m để phương trình $|x - 1| = \frac{|x + 3| + m}{3}$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 10. Với mỗi giá trị của m , xét đường thẳng $(d_m) : y = (2m - 1)x + 3$.

- Với $m = 2$, hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d_2) .
- Tìm điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi m .

§2

HÀM SỐ BẬC HAI

Bài 1. Xác định tọa độ đỉnh, trục đối xứng của các parabol sau

1. $y = x^2 - 6x + 9$

5. $y = -x^2 - 4x + 7$

2. $y = x^2 - 4x + 3$

6. $y = 3x^2 + 8x + 3$

3. $y = -x^2 - x + 3$

4. $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 8$

7. $y = -\frac{1}{6}x^2 + 4x + 3$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - 2x - 1$

b) $y = -x^2 + 4x$

c) $y = 2x^2 - 4x - 1$.

Bài 3. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + 2$ biết rằng đồ thị là một parabol :

a) Đi qua điểm $A(3; -4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$.

b) Có đỉnh $I(2; -2)$.

c) Đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$.

d) Đi qua điểm $B(-1; 6)$ và đỉnh có tung độ $-\frac{1}{4}$.

e) Có trục đối xứng $x = 1$ và cắt Oy tại điểm $M(0; 4)$.

Bài 4. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ trong các trường hợp sau:

a) Đồ thị hàm số qua $A(0; -1)$, $B(1; -1)$ và $C(-1; 1)$.

b) Đồ thị hàm số qua $D(3; 0)$ và có đỉnh $I(1; 4)$.

c) Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường thẳng $x = 6$ và đi qua $A(8; 0)$ và $B(0; 32)$.

d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = -2$ và có đồ thị đi qua $A(0; 6)$.

e) Đồ thị hàm số nhận điểm $x = \frac{1}{4}$ làm trục đối xứng, đi qua điểm $M(-2; 11)$ và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 1.

f) Đồ thị nhận đường thẳng $x = -2$ làm trục đối xứng và cắt đường thẳng $y = x - 3$ tại hai điểm có hoành độ $x = 0$, $x = -5$.

Bài 5. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ trong các trường hợp sau:

a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 6 khi $x = -1$.

Bài 6. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là (P) .

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

b) Từ đồ thị (P) hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

c) Từ đồ thị (P) hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$.

d) Từ đồ thị (P) hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$.

e) Từ đồ thị (P) hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

f) Từ đồ thị (P) hãy suy ra đồ thị của các hàm số $y = |x - 1|(x - 3)$ và $y = (x - 1)|x - 3|$.

e) Tìm m để phương trình $x^2 - 4|x| + 3 - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 7. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$, có đồ thị là (P) .

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x - 4)|x - 2| = m$.

c) Tìm m để phương trình $|x^2 - 6x + 8| = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Bài 8. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

1. $y = x^2 - 6|x| + 9$

2. $y = x^2 + x|x + 2|$

3. $y = |x^2 - 4|x| + 3|$

4. $y = |x^2 + 3x| - |x - 2|$

5. $y = x^2 - 3|x - 2|$

CHUYÊN ĐỀ 5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

§1 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 16, AC = 14$ và $\widehat{B} = 60^\circ$.

- Tính độ dài cạnh BC
- Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AB + AC = 21$ cm.

- Tính các cạnh của tam giác ABC .
- Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .

Bài 3. Cho tam giác cân ABC có đáy $BC = 2a$, cạnh bên bằng b ($b > a$).

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Dựng $BK \perp AC$. Tính tỷ số $\frac{AK}{AC}$.

Bài 4. Cho M là một điểm bất kỳ thuộc miền trong của hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh rằng $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Bài 5. Chứng minh rằng: Trong một hình thang, tổng các bình phương của hai đường chéo bằng tổng các bình phương của hai cạnh bên cộng hai lần tích hai cạnh đáy.

Bài 6. Cho tam giác ABC ($AC > AB$) với đường trung tuyến AM và đường cao AH . Chứng minh rằng

- $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM.MH$
- $AC^2 = AM^2 + MC^2 + 2MC.MH$
- $AB^2 + AC^2 = \frac{BC^2}{2} + 2AM^2$
- $AC^2 - AB^2 = 2BC.MH$

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ là tam giác nhọn và cân tại A . Kẻ các đường cao AH và BK . Đặt $AB = a, \widehat{BAH} = \alpha$.

- Tính các cạnh của $\triangle BAH$ theo a và α
- Tính các cạnh của $\triangle BAK$ và $\triangle CKB$ theo a và α
- Chứng minh rằng $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

§2 ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Tính $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ biết $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Bài 2. Cho $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Bài 3. Biết $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Tính $D = \sin x \cdot \cos x$.

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức sau:

- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.
- $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$.
- $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$.

$$4. \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1.$$

Bài 5.

- Cho $\tan x = 2$. Tính $D_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{4 \sin x - 5 \cos x}$, $D_2 = \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5 \sin^3 x + 4 \cos^3 x}$,
 $D_3 = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \sin^2 x \cos x}$, $D_4 = \frac{\sin x + 5 \cos x}{\sin^3 x - 2 \cos^3 x}$, $D_5 = \frac{8 \cos^3 x - 2 \sin^3 x + \cos x}{2 \cos x - \sin^3 x}$, $D_6 =$
 $\frac{\cos^2 x - \sin x \cos x}{2}$, $D_7 = 5 \cos^2 x + 3 \sin^2 x$
- Cho $\sin x = \frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $E = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$.

Bài 6. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Tính giá trị của các biểu thức: $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$, $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos^3 \alpha}$, $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, $\tan \alpha + \cot \alpha$.

Bài 7. Chứng minh rằng trong các điều kiện có nghĩa, các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x .

- $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$
- $\cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x$
- $\cos^6 x + \sin^6 x - \frac{3}{2}(\cos^4 x + \sin^4 x)$
- $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$
- $\frac{\cos^6 x}{4 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \sin^6 x}{4 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{\sin^4 x \cos^2 x}{4 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x} +$
- $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$
- $\cos^4 x (2 \cos^2 x - 3) + \sin^4 x (2 \sin^2 x - 3)$
- $\cos^2 x \cot^2 x + 5 \cos^2 x - \cot^2 x + 4 \sin^2 x$
- $(\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$
- $\frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$
- $\frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} - (1 + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x)$

Bài 8. Trong điều kiện có nghĩa, rút gọn các biểu thức sau:

- $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x}$
- $\left(1 + \tan x + \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$
- $\frac{1 - \cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
- $\frac{1 + 2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x} + \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{\sin x - \cos x}$
- $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\tan^2 x - 1}$
- $1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}$
- $\sqrt{\sin^2 x (1 + \cot x) + \cos^2 (1 + \tan x)}$
- $\cos^2 x (\tan x + 2)(2 \tan x + 1) - 5 \sin x \cos x$

CHUYÊN ĐỀ 6. Vectơ

§1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

Bài 1. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

1. Liệt kê tất cả các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với $\vec{MN}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.
2. Liệt kê các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng hướng với $\vec{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.
3. Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\vec{NP}$ mà có điểm đầu là A hoặc B .

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của véc-tơ $\vec{MD}$ và $\vec{MN}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG . Tính độ dài của các véc-tơ $\vec{AG}, \vec{BI}$.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\vec{MN} = \vec{QP}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\vec{BB'} = \vec{GA}$.

1. Chứng minh $\vec{BI} = \vec{IC}$.
2. Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh $\vec{BJ} = \vec{IG}$.

Bài 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O , hãy kể tên các vectơ bằng $\vec{AB}, \vec{OE}$, các vectơ cùng phương với vectơ $\vec{OA}$.

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Tìm các vectơ từ 5 điểm A, B, C, D, O sao cho:

- a) Bằng $\vec{AB}$
- b) Có độ dài bằng $|\vec{OB}|$.

Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O , gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng $\vec{B'B} = \vec{A'C}$ và $\vec{HC} = \vec{BA'}$.

Bài 9. Cho $\triangle ABC$, hãy xác định các điểm D và E sao cho $\vec{AD} = \vec{CB}, \vec{AE} = \vec{CA}$.

Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Gọi I là giao điểm của AM và BN , K là giao điểm của MD và CN . Chứng minh rằng $\vec{AM} = \vec{NC}, \vec{DK} = \vec{NI}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC và điểm M ở trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và N, P, Q lần lượt là điểm đối xứng của M qua A', B', C' . Chứng minh rằng $\vec{AQ} = \vec{CN}, \vec{AM} = \vec{PC}$ và AN, BP, CQ đồng quy.

Bài 12. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 3a, BC = \sqrt{5}a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của AG . Tính $|\vec{BM}|$.

Bài 13. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Các mệnh đề sau đúng hay sai. Giải thích.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

3. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$

5. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

2. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

4. $\overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OB}$

6. $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{DC}|$

Bài 14. Cho tam giác đều ABC , kẻ đường cao AH . Các đẳng thức sau đây đúng hay sai? Tại sao?

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

3. $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CH}$

5. $|\overrightarrow{BH}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CB}|$

2. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

4. $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HB}$

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F, M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD và DA .

1. Chứng tỏ rằng 3 vectơ $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương;

2. Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành.

Bài 16. Cho hai bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Đặt $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh $CDGH$ là hình bình hành.

§2 TỔNG, HIỆU CỦA HAI VECTƠ

Bài 1. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng:

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

4. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Chứng minh rằng:

1. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

2. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

3. $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$

Bài 3. Cho hai điểm A, B có trung điểm I . Gọi M là một điểm tùy ý không ở trên đường thẳng AB . Lấy trên MI kéo dài một điểm N sao cho $IN = MI$. Chứng minh:

1. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$

2. $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NA}$

Bài 4. Cho 4 điểm A, B, C, D . Xác định các vectơ sau:

1. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$

2. $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$

Bài 5. Cho ΔABC . Hãy xác định các điểm M thỏa điều kiện sau: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Bài 6. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a . Xác định các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng theo a .

1. $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}} + \overrightarrow{OB} +$

2. $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

3. $\vec{c} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

4. $\vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 2$ và $AB = 4$.

1. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$

3. Đặt $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$. Tính $|\vec{v}|$

2. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Tính $|\vec{u}|$

4. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$. Tính $|\vec{a}|$

Bài 8. Cho tam giác đều ΔABC có cạnh a . Kẻ đường cao AH .

1. Xác định vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ theo a .

2. Gọi E và F là hai điểm trên cạnh BC sao cho : $BE = EF = FC$. Tìm $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FA}$

3. Xác định vectơ $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}$. Tính $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}|$ theo a .

Bài 9. Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý. Chứng minh rằng

$$1. \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

$$2. \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$$

Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm M tùy ý, chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.

Bài 11. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

$$1. \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$$

$$2. \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

Bài 12. Cho tam giác ABC . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

Bài 13. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . M là một điểm bất kỳ. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC , dựng về phía ngoài tam giác các hình bình hành $ABIJ, BCPQ, CARS$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Bài 15. Cho tam giác ABC . Gọi A' là điểm đối xứng của B qua A , gọi B' là điểm đối xứng của C qua B , C' là điểm đối xứng của A qua C . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$.

Bài 16. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Chứng minh rằng với điểm O bất kỳ ta luôn có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Bài 17. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC . Dựng điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Bài 19. Cho hình bình hành $ABCD$, I là trung điểm BC . Tìm điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CA}$.

Bài 20. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng $Q \equiv A$.

Bài 21. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$1. |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|.$$

$$3. |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|.$$

$$2. |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|.$$

Bài 22. Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|, |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}|$.

Bài 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, BC = 4$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|, |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Bài 24. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a và M là một điểm bất kỳ, chứng minh rằng $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ không đổi. Tính $|\vec{u}|$.

Bài 25. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá vuông góc với nhau và $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|$.

§3

TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VEC-TƠ

BÀI 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, AC và BD . Chứng minh rằng:



$$1. \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN} \quad 2. \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{MN} \quad 3. \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ} \quad 4. \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$$

BÀI 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD ; G là trung điểm của EF . Chứng minh rằng:

$$1. \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \quad 2. \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG} \quad 3. \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

với O là điểm tùy ý.

BÀI 3. Cho 4 điểm A, B, C, D . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chứng minh rằng:

$$2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{DA}) = 3\overrightarrow{DB}.$$

BÀI 4. Cho tứ giác $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC .

$$1. \text{Lấy điểm } O \text{ thỏa } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}. \quad 2. \text{Chứng minh: } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

Chứng minh O là trung điểm của IJ .

BÀI 5. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , M là một điểm bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$1. \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \quad 3. \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$$

$$2. \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad 4. \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$$

BÀI 6. Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

$$1. \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad 2. \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC} \quad 3. \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

BÀI 7. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Chứng minh rằng:

$$1. \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0} \quad 3. \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$2. \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}$$

BÀI 8. Cho ΔABC . Gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB và O là điểm bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$1. \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} \quad 2. \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

BÀI 9. Cho ΔABC đều tâm O . Điểm M là điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M xuống 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

BÀI 10. Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có trọng tâm là G và G' . Chứng minh rằng:

$$1. \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'} \quad 2. \text{Từ đó suy ra điều kiện để hai tam giác có cùng trọng tâm.}$$

BÀI 11. Cho ΔABC và số thực k . Gọi A', B', C' lần lượt xác định bởi: $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{CA}$. Chứng tỏ rằng ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

BÀI 12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

BÀI 13. Cho ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm là G . Gọi G_1, G_2, G_3 là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 . Chứng minh rằng G là trọng tâm $\Delta G_1G_2G_3$.

BÀI 14. Cho 4 điểm A, B, C, D . Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ABD, ABC . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$

BÀI 15. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA . Chứng minh rằng: ΔPRT và ΔQSU có cùng trọng tâm.

XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA ĐẲNG THỨC VEC-TƠ CHO TRƯỚC

BÀI 16. Cho ΔABC . Hãy dựng các điểm I, J, K biết :

$$1. 2\vec{IA} - 3\vec{IB} = 3\vec{BC}$$

$$2. \vec{JA} + \vec{JB} + 2\vec{JC} = \vec{0}$$

$$3. 2\vec{KA} + \vec{KB} = 2\vec{CB} + \vec{CA}$$

BÀI 17. Cho ΔABC . Hãy dựng các điểm I, J, K, L biết:

$$1. \vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IC} = \vec{BC}$$

$$3. 3\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$$

$$2. \vec{JA} + \vec{JB} + \vec{JC} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$4. 3\vec{LA} - 2\vec{LB} + \vec{LC} = \vec{0}.$$

BÀI 18. Cho tam giác ABC . Hãy dựng các điểm I, J, K, L biết rằng

$$1. \vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$$

$$3. 2\vec{KA} + \vec{KB} - \vec{KC} = \vec{AB}$$

$$2. 3\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0}$$

$$4. \vec{LA} + \vec{LB} + \vec{LC} = \vec{BC}$$

BÀI 19. Cho các điểm A, B, C, D, E . Xác định các điểm O, I, K, M thỏa:

$$1. \vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0}$$

$$3. \vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + 3(\vec{KD} + \vec{KE}) = \vec{0}$$

$$2. \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$$

$$4. \vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC} = \vec{0}$$

BÀI 20. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hãy dựng các điểm I, J, K, L biết rằng :

$$1. \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 4\vec{ID}$$

$$3. 4\vec{KA} + 3\vec{KB} + 2\vec{KC} + \vec{KD} = \vec{0}.$$

$$2. 2\vec{JA} + 2\vec{JB} = 3\vec{JC} - \vec{JD}$$

BIỂU DIỄN MỘT VEC-TƠ THEO CÁC VEC-TƠ CHO TRƯỚC

BÀI 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tính các véc-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{AD}$ theo các véc-tơ $\vec{AC}$ và $\vec{BD}$.

BÀI 22. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CD . Hãy tính các véc-tơ $\vec{AC}, \vec{AI}, \vec{AJ}$ theo các véc-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{AD}$.

BÀI 23. Cho ΔABC . Gọi M là điểm thỏa: $\vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{0}$. Tính $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$

BÀI 24. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên đoạn BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng: $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$.

BÀI 25. Cho ΔABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC mà $MB = \frac{3}{2}MC$. Tính $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

BÀI 26. Cho tam giác ABC . Gọi K là điểm trên tia đối của tia AB sao cho $KB = 4KA$. Hãy tính véc-tơ $\vec{CK}$ theo hai véc-tơ $\vec{BA}$ và $\vec{BC}$.

BÀI 27. Cho tam giác ABC , gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

$$1. \text{ Tính } \vec{AI} \text{ theo } \vec{AB} \text{ và } \vec{AC}.$$

$$\text{Tính } \vec{JK} \text{ theo } \vec{AB} \text{ và } \vec{AC}.$$

$$2. \text{ Gọi } J \text{ và } K \text{ lần lượt là các điểm thuộc cạnh } AC, AB \text{ sao cho } JA = 2JC \text{ và } KB = 3KA.$$

$$3. \text{ Tính } \vec{BC} \text{ theo } \vec{AI} \text{ và } \vec{JK}.$$

BÀI 28. Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là điểm thỏa: $\vec{NC} = -2\vec{NA}$. Gọi K là trung điểm của MN .

$$1. \text{ Chứng minh rằng: } \vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}.$$

$$2. \text{ Gọi } D \text{ là trung điểm của } BC. \text{ Chứng minh rằng: } \vec{KD} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

BÀI 29. Cho ΔABC có trọng tâm G

$$1. \text{ Phân tích } \vec{AG} \text{ theo 2 véc-tơ } \vec{AB} \text{ và } \vec{AC}$$

$$2. \text{ Gọi } E, F \text{ là 2 điểm xác định bởi các điều kiện: } \vec{EA} = 2\vec{EB}, 3\vec{FA} + 2\vec{FC} = \vec{0}. \text{ Phân tích } \vec{EF} \text{ theo } \vec{AB} \text{ và } \vec{AC}.$$

BÀI 30. Cho ΔABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$. Gọi J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$.



1. Tính $\vec{AI}$ và $\vec{AJ}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

2. Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Tính $\vec{AG}$ theo $\vec{AI}$ và $\vec{AC}$.

BÀI 31. Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = BI$, gọi J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = JC$.

1. Tính $\vec{AI}, \vec{AJ}$ theo hai véc-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

2. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , tính $\vec{AG}$ theo hai véc-tơ $\vec{AI}$ và $\vec{AJ}$.

BÀI 32. Cho lục giác đều $ABCDEF$, hãy biểu diễn các véc-tơ sau theo các véc-tơ $\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AE}$.

1. $\vec{AD}$

2. $\vec{AC}$

3. $\vec{AF}$

4. $\vec{EF}$

CHỨNG MINH BIỂU THỨC VEC-TƠ KHÔNG ĐỔI

BÀI 33. Cho ΔABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng véc-tơ $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M . Đặt điểm D sao cho $\vec{CD} = \vec{v}$

BÀI 34. Cho ΔABC và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

1. $\vec{v} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

3. CD cắt AB tại K . Chứng minh rằng: $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0}$ và $\vec{CD} = 3\vec{CK}$.

2. Đặt điểm D sao cho: $\vec{CD} = \vec{v}$.

BÀI 35. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là một điểm bất kỳ. Chứng minh rằng các véc-tơ sau đây không đổi. Tính môđun của chúng.

1. $\vec{a} = 3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}$

2. $\vec{b} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MD}$

BÀI 36. Cho tam giác ABC và một điểm M . Chứng minh rằng các véc-tơ sau nay không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

1. $\vec{a} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$

2. $\vec{b} = \vec{MA} + 4\vec{MB} - 5\vec{MC}$

3. $\vec{c} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$

CHỨNG MINH 3 ĐIỂM THẲNG HÀNG, ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM

BÀI 37. Cho 4 điểm A, B, C, M thỏa mãn $\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}$. Chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

BÀI 38. Cho ΔABC . Gọi I, J là hai điểm thỏa: $\vec{IA} + 3\vec{IC} = \vec{0}; \vec{JA} + 2\vec{JB} + 3\vec{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng: I, J, B thẳng hàng.

BÀI 39. Cho 4 điểm A, B, C, D . Lấy các điểm M, N, P thỏa $\vec{AM} = 2\vec{AB}, \vec{AN} = 2\vec{AC}, \vec{AP} = 2\vec{AD}$.

1. Tính $\vec{MN}$ theo $\vec{BC}$, tính $\vec{NP}$ theo $\vec{CD}$.

2. Chứng minh rằng: M, N, P thẳng hàng nếu và chỉ nếu B, C, D thẳng hàng.

BÀI 40. Cho tam giác ABC , lấy các điểm M, N, P sao cho: $\vec{MB} = 3\vec{MC}, \vec{NA} + 3\vec{NC} = \vec{0}, \vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0}$.

1. Tính $\vec{AM}, \vec{PN}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$

2. Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.

BÀI 41. Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Lấy các điểm I, J sao cho $2\vec{JA} + 5\vec{JB} + 3\vec{JC} = \vec{0}$ và $2\vec{IA} + 3\vec{IC} = \vec{0}$.



1. CMR: M, N, J thẳng hàng với M, N theo thứ tự là trung điểm của $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$.
2. CMR: J là trung điểm của BI .
3. Gọi E là điểm thuộc AB thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

BÀI 42. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Lấy các điểm I, J sao cho $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{ID} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng: I, J, O thẳng hàng.

BÀI 43. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , M là một điểm bất kỳ. Gọi $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$. Chứng minh rằng đường thẳng MS đi qua một điểm cố định khi M di động.

BÀI 44. Cho hai điểm A, B cố định :

1. Chứng minh rằng có duy nhất một điểm I thỏa: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$
2. Cho hai điểm M, N di động thỏa: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN qua một điểm cố định.

BÀI 45. Cho tam giác ABC , điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

1. Chứng minh rằng: MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC khi M thay đổi.
2. Gọi P là trung điểm của CN . Chứng minh rằng: MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

BÀI 46. Cho tứ giác lồi $ABCD$, điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}$.

1. Chứng minh rằng: MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.
2. Gọi P là trọng tâm của ΔABN . Chứng minh rằng: MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

BÀI 47. Cho ΔABC , M là một điểm lưu động. Gọi I là điểm thỏa: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Đặt $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1. Chứng minh I cố định.
2. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MI}$. Suy ra MN đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.
3. Gọi J là điểm thỏa: $2\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0}$. Chứng minh J cố định.
4. Gọi P là trung điểm của CN . Chứng minh rằng MP đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

BÀI 48. Cho ΔABC , M là một điểm lưu động. Gọi I là điểm thỏa: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Đặt $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1. Chứng minh MN đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.
2. Gọi P là trung điểm của CN . Chứng minh rằng MP đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

BÀI 49. Cho tam giác ABC . Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự tại M và N . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AC và BC . Tìm điểm P thuộc EF sao cho M, N, P thẳng hàng.

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM THỎA HỆ THỨC

BÀI 50. Cho ΔABC . Tìm quỹ tích những điểm M thỏa mãn:

1. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$
2. $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$
3. $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$
4. $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$
5. $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$
6. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$
7. $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$



BÀI 51. Cho A, B cố định. Tìm quỹ tích những điểm M thỏa :

1. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$
2. $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$
3. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB}|$
4. $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$
5. $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB}|$

BÀI 52. Cho ΔABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

1. $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC} = \vec{0} \ (k \in \mathbb{R})$
2. $k\overrightarrow{MA} + (1 - k)\overrightarrow{MB} = \vec{0} \ (k \in \mathbb{R})$
3. $2\overrightarrow{MA} + (3 - k)\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC} = \vec{0} \ (k \in \mathbb{R})$
4. Vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$.
5. $2\overrightarrow{MA} - (1 + k)\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \ (k \in \mathbb{R})$

BÀI 53. Cho hình bình hành $ABCD$, M là điểm bất kỳ. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I sao cho các đẳng thức sau thỏa với mọi điểm M .

1. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MI}$
2. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = k.\overrightarrow{MI}$
3. $4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MI}$

BÀI 54. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi M, N là hai điểm lưu động định bởi: $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}$ là véc-tơ không đổi. Tìm tập hợp các điểm M biết rằng giá của $\overrightarrow{MN}$ qua O (O là tâm của hình bình hành).
2. Tìm tập hợp các điểm M biết rằng điểm điểm N chuyển động trên AC .

BÀI 55. Cho ΔABC vuông tại A . Gọi M là điểm thay đổi trong tam giác. Gọi D, E, F là hình chiếu của M lên BC, CA, AB .

1. Tìm quỹ tích những điểm M thỏa: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$ luôn cùng phương với $\overrightarrow{BC}$
2. Tìm quỹ tích những điểm M thỏa : $|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = |\overrightarrow{MA}|$.

BÀI 56. Cho ΔABC , gọi I là điểm định bởi $5\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{AB}$ (G là trọng tâm của ΔABC).
2. AI cắt BG tại O . Tính $\frac{OA}{OI}$.