

ĐỀ C- ỢNG ƠN TẬP HÈ 2010
MÔN: TOÁN - LỚP 11
(DÀNH CHO GIÁO VIÊN)

PHẦN I: L- ỢNG GIÁC
(4 TIẾT/ TUẦN X 5 TUẦN = 20 TIẾT)

Chuyên đề 1: Ôn tập công thức l- ợng giác (2 tiết + 1 tiết)

Chuyên đề 2: Hệ thức l- ợng giác trong tam giác (2 tiết + 1 tiết)

Chuyên đề 3: Ph- ợng trình l- ợng giác cơ bản (2 tiết + 1 tiết)

Chuyên đề 4: Ph- ợng trình đối với một hàm l- ợng giác. (2 tiết + 1 tiết)

Chuyên đề 5: Ph- ợng trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$. (1 tiết + 1 tiết)

Chuyên đề 6: Ph- ợng trình thuần nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$. (2 tiết + 1 tiết)

Chuyên đề 7: Sử dụng các công thức l- ợng giác trong việc giải ph- ợng trình l- ợng giác (2 tiết + 1 tiết)

Chú ý: 1 tiết đ- ợc cộng thêm vào mỗi đơn vị kiến thức để giáo viên chữa và h- ớng dẫn một số bài tập về nhà cho học sinh.

Chuyên đề 1: Ôn tập công thức lượng giác (2 tiết + 1 tiết)

A. Nội dung: Ôn tập lại các công thức đã học: công thức cộng, công thức nhân đôi (nhân ba), công thức hạ bậc, công thức tổng thành tích và công thức tích thành tổng, các đẳng thức lượng giác thường gặp.

B. Bài tập :

Bài 1. Cho a, b là các góc nhọn và $\tan a = \frac{8}{15}; \cos b = \frac{12}{13}$.

Tính giá trị của $\sin(a+b); \cos(a-b); \tan(a-b)$.

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$1) \cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1.$$

$$2) \tan^2 a - \tan^2 b = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}.$$

$$3) \sin a = 4 \sin \frac{a}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{a}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{a}{3}\right).$$

$$4) \cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{c+b}{2} \cos \frac{a+c}{2}.$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

$$1) A = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right). \quad (A = \cos x)$$

$$2) B = \frac{\sin 2a + 2 \cos^2 a - 1}{\cos a - \sin a - \cos 3a + \sin 3a}. \quad (B = \frac{1}{2 \sin a})$$

$$3) C = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \quad (C = \frac{3}{4})$$

Bài 4. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$1) A = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right). \quad (A = 0)$$

$$2) B = \cos^2 x - 2 \sin a \cos x \sin(x+a) + \sin^2(x+a). \quad (B = \cos^2 a)$$

$$3) C = 4 \cos^4 x - 2 \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x. \quad (C = \frac{3}{2})$$

Bài 5. 1) Tính biểu thức $A = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ theo $\cos 2x$.

$$2) \text{ Tính } B = \cos 2a \text{ biết } \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$3) \text{ Không dùng bảng tính và máy tính hãy tính } S = \cos^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ - \cos^2 45^\circ.$$

Bài 6. 1) Với giá trị nào của a thì biểu thức sau không phụ thuộc vào x

$$A = \cos^2 x + \cos^2(x+a) - \cos x \cos(x+a). \quad (\cos a = 1/2)$$

$$2) \text{ Chứng minh rằng nếu } 3 \sin b = \sin(2a+b) \text{ thì } \tan(a+b) = 2 \tan a.$$

$$3) \text{ Chứng minh rằng } 8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ = 1.$$

4) Với giá trị nào của m thì biểu thức sau không phụ thuộc vào x

$$B = \sin^6 x + \cos^6 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x) + 8 \sin^2 x \cos^2 x.$$

5) Rút gọn $S_n = \sin^3 \frac{a}{3} + 3\sin^3 \frac{a}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{a}{3^n}$.

Chuyên đề 2: Hệ thức lượng giác trong tam giác (2 tiết + 1 tiết)

A. Nội dung: Ôn tập lại các định lý cosin, định lý sin, công thức đường trung tuyến, các công thức tính diện tích tam giác...

B. Bài tập

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi tam giác $\triangle ABC$ ta luôn có:

- 1) $\sin 4A + \sin 4B - \sin 4C = -4\cos 2A\cos 2B\sin 2C$.
- 2) $\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos \frac{A}{2}\cos \frac{B}{2}\sin \frac{C}{2}$.
- 3) $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$.
- 4) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2}\cot \frac{B}{2}\cot \frac{C}{2}$.
- 5) $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$.

Bài 2. Chứng minh rằng $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{9}{4}$. Từ đó suy ra :

- 1) $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$
- 2) $m_a m_b m_c \leq \frac{27R^3}{8}$

Bài 3. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác cân nếu các góc thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}$$

Bài 4. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác đều nếu thỏa mãn một trong các điều kiện:

- 1) $S = \frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2$.
- 2) $\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c^2}{ab} = 1 \\ \cos A \cos B = \frac{1}{4} \end{cases}$
- 3) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (\cot A + \cot B + \cot C) = \sqrt{3}$.

Bài 5. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông nếu thỏa mãn một trong các điều kiện:

- 1) $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$.
- 2) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$.
- 3) $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \sin B$.

Bài 6. Tam giác $\triangle ABC$ có đặc điểm gì biết $\begin{cases} a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 4ab \cos A \sin B \\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \sin B \end{cases}$.

Chuyên đề 3: Phương trình lượng giác cơ bản (2 tiết + 1 tiết)

A. Nội dung: Giới thiệu cho học sinh lần lượt bốn phương trình lượng giác cơ bản:

$\sin x = a$; $\cos x = a$; $\tan x = a$; $\cot x = a$, công thức nghiệm; giới thiệu và hướng dẫn học sinh dùng $\arcsin m$; $\arccos m$; $\arctan m$; $\operatorname{arccot} m$, giới thiệu các phương trình đặc biệt như $\sin x = 0$; $\sin x = 1$...

B. Bài tập

I. Phương trình $\sin x = a$.

Bài 1. Giải các phương trình lượng giác và biểu diễn nghiệm trên đường tròn::

$$1) \sin x = \frac{1}{2} \quad 2) \sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 3) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 4) \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{3}.$$

Bài 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

$$1) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \quad 2) \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad 3) \sin x = \sin(2x + 1) \quad 4) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x.$$

II. Phương trình $\cos x = a$.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1) \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \quad 2) \left| \cos \frac{5x}{2} \right| = 1 \quad 3) \cos(2x - 1) = \frac{1}{4} \quad 4) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Bài 2. Tìm nghiệm của các phương trình sau:

$$1) \cos 3x = \frac{3}{2} \quad 2) \cos(x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ với } (0^\circ \leq x \leq 180^\circ) \\ 3) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0 \text{ với } (-\pi \leq x \leq 0)$$

III. Phương trình $\tan x = a$.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1) \tan 2x = -1 \quad 2) \tan(3x - 4^\circ) = \sqrt{3} \quad 3) \tan \frac{3x}{2} + \tan x = 0 \quad 4) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -2.$$

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$1) y = \frac{2}{\tan x} \quad 2) y = \frac{\tan 2x - 1}{\tan x + \cot 2x}$$

IV. Phương trình $\cot x = a$.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1) \cot 2x + \cot \frac{\pi}{6} = 0 \quad 2) \cot(x - 1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad 3) \cot(x + \pi) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0.$$

Bài 2. Tìm nghiệm của các phương trình sau với khoảng đã chỉ ra:

$$1) \cot(x - 1) = 1 \text{ với } (0 \leq x \leq \pi) \quad 2) \cot 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ với } (-90^\circ < x < 0^\circ).$$

Chuyên đề 4: Phương trình lượng giác đối với một hàm lượng giác (2 tiết + 1 tiết)

A. Nội dung: Giới thiệu dạng phương trình và cách giải.

B. Bài tập:

Bài 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|---|---|
| 1) $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$ | 2) $4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0$ |
| 3) $2\tan^2 2x - 5\tan 2x + 3 = 0$ | 4) $5\cot x - 2\tan x - 3 = 0$ |
| 5) $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$ | 6) $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0$ |
| 7) $5\cos x(\cos x - 1) = \cos^2 x + 3$ | 8) $\cos^2(3x + \frac{\pi}{2}) - \cos^2 3x - 3\cos(\frac{\pi}{2} - 3x) + 2 = 0$ |
| 9) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}$ | 10) $\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$ |
| 11) $3\tan^3 x - 2\tan^2 x + 3\tan x - 2 = 0$ | 12) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{15}{18}\cos 2x - \frac{1}{2}$ |

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1) $y = \cos 2x + \sin x - 5$ | 2) $y = \frac{1}{\cos^2 x} + \tan x - 3$ với $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$. |
|-------------------------------|--|

Bài 3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\cos 4x + 2\cos 2x - 3m + 1 = 0$.

Chuyên đề 5: Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$. (1 tiết + 1 tiết)

A. Nội dung: Giới thiệu dạng phương trình và các phương pháp giải phương trình

B. Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$ | 2) $3\cos 2x + \sin 2x = 5$ |
| 3) $3\cos \frac{x}{2} + 4\sin \frac{x}{2} + 5 = 0$ | 4) $\cos 3x - \sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| 5) $\cos^2 x - \frac{3}{2}\sin 2x + 1 = 0$ | 6) $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ |

Bài 2. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm: $(m-2)\cos x + (m-1)\sin x = 1$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1) $y = \cos 5x - \sqrt{3}\sin 5x$ | 2) $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 3}$ |
| 3) $y = 3\sin^2 x + 2\sin 2x$ | 4) $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x + 2}$ |

Bài 4. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$ biết $\frac{2\pi}{5} < x < \frac{6\pi}{7}$.

Chuyên đề 6: Phương trình thuần nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$. (2 tiết + 1 tiết)

A. Nội dung: Giới thiệu dạng phương trình và các phương pháp giải phương trình.

B. Bài tập:

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1) 4\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 0$$

$$2) \cos^2 x - \sin x \cos x - 2\sin^2 x - 1 = 0$$

$$3) \cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$$

$$4) 4\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + 3\sin^2 \frac{x}{2} = 3.$$

$$5) \frac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x$$

$$6) \cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x \cos x = 0.$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi m ph- ơng trình sau luôn có nghiệm:

$$(3m-2)\sin^2 x - 2(5m-2)\cos x \sin x + 3(2m+1)\cos^2 x = 0.$$

Bài 3. Giải các ph- ơng trình:

$$1) \cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$$

$$2) 3\cos^4 x - 4\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = 0.$$

Bài 4. Cho ph- ơng trình $m\sin x + (m+1)\cos x = \frac{m}{\cos x}$

$$1) \text{ Giải ph- ơng trình với } m = \frac{1}{2}.$$

$$2) \text{ Tìm } m \text{ để ph- ơng trình có nghiệm.}$$

Chuyên đề 7: Sử dụng các công thức lượng giác trong việc giải phương trình lượng giác. (2 tiết + 1 tiết)

A. Nội dung: H- ớng dẫn học sinh sử dụng các công thức l- ợng giác để biến đổi ph- ơng trình về các dạng quen thuộc.

B. Bài tập

Bài 1. Giải các ph- ơng trình sau:

$$1) \sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x$$

$$2) \sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$$

$$3) 2\cos 2x \sin x = 1 + 2\sin 2x \cos x$$

$$4) \sin 3x \cos x = \cos 3x(1 + \sin x)$$

Bài 2. Giải các ph- ơng trình sau:

$$1) \cos 2x + \cos 4x = \sin x - \sin 5x$$

$$2) \cos 2x + \cos 4x + 2\cos x = 0$$

$$3) \sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$$

$$4) \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$$

Bài 3. Giải các ph- ơng trình sau:

$$1) \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 2x$$

$$2) \sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x.$$

$$3) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$$

$$4) 2\cos^2 x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x - 3 = \cos 4x(2\sin 2x + 1).$$

$$5) \cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \sin 2x$$

$$6) \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \sin^4 x - \cos^4 x$$

Bài 4. Giải các ph- ơng trình :

$$1) \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$$

$$2) 2\cos 3x \cos x - 4\sin^2 2x + 1 = 0$$

$$3) 6\tan x = \tan 2x$$

$$4) \tan x = \cot x + 2\cot^3 2x$$

$$5) 3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \sin 2x$$

$$6) 1 + 3\tan x = 2\sin 2x$$

PHẦN 2: HÌNH HỌC

(2 TIẾT / TUẦN X 5 TUẦN = 10 TIẾT)

Chuyên đề 1: Ôn tập hình giải tích trong mặt phẳng. (4 tiết)

Chuyên đề 2: Phép tịnh tiến. (2 tiết)

Chuyên đề 3: Phép đối xứng trục. (2 tiết)

Chuyên đề 4: Phép quay và phép đối xứng tâm. (2 tiết)

Chuyên đề 1: Ôn tập hình giải tích trong mặt phẳng.

A. Nội dung: Nhắc lại một số vấn đề chính liên quan đến toạ độ của véc tơ, điểm; một số bài toán liên quan đến đường thẳng, đường tròn...

B. Bài tập

Bài 1. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $A(-1; 4), B(-4; 0), C(2; -2)$.

1. Xác định toạ độ trực tâm H của tam giác ABC .
2. Xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và tính bán kính đường tròn đó.
3. Tính các góc A, B, C của tam giác.
4. Tìm toạ độ điểm D là điểm đối xứng của A qua BC .
5. Viết phương trình hai đường phân giác trong của góc A và góc B của tam giác ABC .
Từ đó chỉ ra toạ độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Bài 2. Cho hình vuông có đỉnh $A(-4; 5)$ và một đường chéo có phương trình: $7x - y + 8 = 0$. Lập phương trình bốn cạnh của hình vuông và đường chéo còn lại.

Bài 3. Cho đường thẳng $(d): x - 2y + 2 = 0$ và điểm $A(2; 3)$.

1. Lập phương trình đường thẳng đối xứng của (d) qua điểm A .
2. Lập phương trình đường thẳng đối xứng của (d) qua đường thẳng $(d_1): x - y + 1 = 0$.
3. Lập phương trình đường thẳng đối xứng của (d) qua đường thẳng $(d_2): x - 2y + 4 = 0$.
4. Tìm điểm M trên (d) sao cho $MA + MO$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 4. Lập phương trình đường tròn biết:

1. Tâm $I(3; -2)$ và đi qua điểm $A(0; 3)$.
2. Tâm $I(1; -1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $5x - 12y + 9 = 0$.
3. Tâm thuộc đường thẳng: $3x - y - 2 = 0$ và qua hai điểm $A(3; -1), B(-1; 3)$.
4. Đi qua ba điểm $A(-1; -5), B(5; -3), C(3; -1)$.
5. Tâm thuộc đường thẳng: $2x + y = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng: $4x - 3y + 10 = 0$ và $4x - 3y - 30 = 0$.
6. Tiếp xúc với ba đường thẳng: $3x + 4y - 35 = 0; 3x - 4y - 35 = 0; x - 1 = 0$.

Bài 5. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có tung độ bằng 1.
2. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng: $x - 2y + 5 = 0$.
3. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng: $2x + y + 10 = 0$.
4. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; 3)$.
5. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến tạo với trục hoành góc 45° .

Bài 6. Cho hai đường tròn (C) và (C') lần lượt có phương trình: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

1. Chứng minh rằng (C) và (C') cắt nhau. Lập phương trình đường thẳng qua giao điểm của chúng.
2. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên.

Chuyên đề 2: Phép biến hình và phép tịnh tiến.

A. Nội dung: Giới thiệu về phép biến hình, phép tịnh tiến và một số tính chất cơ bản.

B. Bài tập:

Bài 1. Cho tam giác $\triangle ABC$. Tìm ảnh của tam giác qua các phép tịnh tiến:

- a) $T_{\overline{AB}}$ b) $T_{\overline{AG}}$ (với G là trọng tâm của tam giác)

Bài 2. Cho hai đường tròn lần lượt có tâm là (C_1) ; (C_2) và đều có bán kính bằng R. Chứng minh rằng (C_2) là ảnh của (C_1) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overline{O_1O_2}$.

Bài 3. Cho đường tròn (C) và hai điểm A, B cố định trên mặt phẳng. Tìm quỹ tích điểm M' biết $\overline{MM'} + \overline{MA} = \overline{MB}$ khi M di động trên (C).

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $A(2; -1)$, $\vec{v} = (1; 3)$ và đường thẳng $(d): 2x - y + 1 = 0$. Tìm ảnh của điểm A và đường thẳng (d) trong các phép tịnh tiến: a) $T_{\vec{v}}$ b) $T_{-2\vec{v}}$.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD có hai điểm A, B cố định và điểm C di động trên đường thẳng (d) cho trước. Chứng minh rằng điểm D di động trên một đường thẳng cố định.

Chuyên đề 3: Phép đối xứng trục.

A. Nội dung: Giới thiệu phép đối xứng trục và một số tính chất cơ bản.

B. Bài tập

Bài 1. Gọi (d') là ảnh của đường tròn (d) qua phép đối xứng trục $\mathcal{D}_a$.

- 1) Khi nào thì (d) song song với (d') .
- 2) Khi nào thì (d) trùng với (d')
- 3) Khi nào thì (d) cắt (d') . Giao điểm của (d) và (d') có tính chất gì.
- 4) Khi nào thì (d) vuông góc với (d') .

Bài 2. Cho hai hình vuông ABCD và AMNP cùng có cạnh bằng a. Chứng minh rằng tồn tại một phép đối xứng trục biến hình vuông ABCD thành AMNP.

Bài 3. Cho đường thẳng (d): $3x + 4y - 12 = 0$ và điểm $M(7; 4)$. Tìm tọa độ điểm M' là điểm đối xứng với M qua (d).

Bài 4. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. Xác định phương trình đường tròn là ảnh của (C) qua các phép đối xứng trục $\mathcal{D}_d$ sau: a) (d): $x - 2 = 0$ b) (d): $y - 1 = 0$.

Bài 5. Tìm trục đối xứng của

a) Các chữ cái in hoa có trục đối xứng

b) tam giác cân

c) Hình chữ nhật.

Chuyên đề 4: Phép quay và phép đối xứng tâm.

A. Nội dung: Giới thiệu phép quay, phép đối xứng tâm và một số tính chất cơ bản.

B. Bài tập

Bài 1. Cho hình thoi ABCD có tâm O. Chứng minh rằng phép quay $Q_{(O; \pi)}$ biến tam giác OAB thành tam giác OCD.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Dựng ở ngoài tam giác ấy hai hình vuông ABDE và BCKF. Gọi P là trung điểm cạnh AC, H là điểm đối xứng của D qua B, M là trung điểm của FH.

1) Xác định ảnh của hai vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}$ trong phép quay tâm B góc quay 90° .

2) Chứng minh rằng $DF = 2BP$ và $DF \perp BP$.

Bài 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB, M là một điểm chạy trên đường tròn đó. Vẽ hình vuông BMDC ở ngoài tam giác AMB. Tìm quỹ tích điểm C.

Bài 4. Chỉ ra các tâm đối xứng của các hình sau:

a) Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau.

b) Hình gồm hai đường thẳng song song

c) Hình gồm hai đường tròn bằng nhau

d) Đường Elíp.

Bài 5. Cho điểm $I(3; -4)$. Tìm $M' = \mathcal{D}_I(M)$ và $O' = \mathcal{D}_I(O)$ biết $M(-2; 1)$ và O là gốc tọa độ.

Bài 6. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ và đường (d): $x - y + 3 = 0$. Xác định phương trình của đường tròn (C') và đường thẳng (d') là ảnh của (C) và (d) qua phép đối xứng tâm $I(1; 2)$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O) (khác A, B). Hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ qua M và tiếp xúc với AB tại A và B. Gọi N là giao điểm thứ hai của $(O_1), (O_2)$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp điểm N khi M di động trên (O).

BÀI TẬP VỀ NHÀ DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 10 LÊN 11 HÈ 2009

PHẦN I: LƯỢNG GIÁC

Chuyên đề 1: Ôn tập công thức lượng giác

Bài 1. Cho $\sin a = -2/3$ với $\pi < a < 3\pi/2$. Hãy tính các giá trị lượng giác của $\frac{a}{2}$; $2a$.

Bài 2. CMR các biểu thức sau độc lập đối với x

- 1) $\frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1}$
- 2) $2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$.
- 3) $(1 + \cot x)\sin^3 x + (1 + \tan x)\cos^3 x - \sin x - \cos x$

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

- 1) $\frac{1 + \cos x}{2\sin x} \left[1 - \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x} \right] = 2\cot x$
- 2) $\frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4\tan^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x} = -1$
- 3) $\tan 50^\circ - \tan 40^\circ = 2\tan 10^\circ$
- 4) $\frac{\cos 3a + \cos 2a + \cos a + 1}{2\cos^2 a + \cos a - 1} = 2\cos a$
- 5) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\tan \frac{\alpha + \beta}{2} + \cot \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{2\cos \beta}$
- 6) $\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c = \frac{\sin(a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c}$.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

- 1) $\sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} + \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}$
- 2) $\frac{\sin^2 2a - 4\sin^2 a}{\sin^2 2a + 4\sin^2 a - 4}$
- 3) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}$
- 4) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \tan^2 \frac{x}{2} - \cos^2 x$

Bài 5. 1) Cho $\cos(2a + b) = 1$ CMR: $\tan(a + b) - \tan a = 2\tan \frac{b}{2}$.

2) Cho $\sin b = \sin a \cos(a + b)$. CMR: $2\tan a = \tan(a + b)$.

3) Cho $\sin^2 b = \sin a \cos a$. CMR: $\cos 2b = 2\cos^2\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 6. Rút gọn các tổng và tích sau:

- 1) $S_1 = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n+1)\pi}{n}$
- 2) $S_2 = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x}$.
- 3) $P = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n}$.

Bài 7. Tính

- 1) $A = \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4\cos 15^\circ \cos 21^\circ \cos 24^\circ$.

$$2) B = 4\sin^3 50^\circ + 3\cos 140^\circ$$

$$3) C = \cos^4 15^\circ + \sin^4 15^\circ - 6\cos^2 15^\circ \sin^2 15^\circ$$

Bài 8. Tìm điều kiện của p, q để biểu thức sau không phụ thuộc vào x

$$A = p(\sin^6 x + \cos^6 x) - q(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

Bài 9. Chứng minh rằng:

$$1) |\sin^n x + \cos^n x| \leq 1 \text{ với } (n \in \mathbb{Z}; n \geq 2).$$

$$2) \frac{\cos x + \cos y}{2} \leq \cos \frac{x+y}{2} \text{ với } -\pi \leq x+y \leq \pi.$$

$$3) 4\sin 3x + 5 \geq 4\cos 2x + 5\sin x.$$

Bài 10. 1) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $y = \sin^8 x + \cos^8 x$.

$$2) \text{ Tìm giá trị lớn nhất của } y = \cos x + \sqrt{2 - \cos^2 x}.$$

$$3) \text{ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của } y = \sin^2 x - 3\sin x \cos x + 1.$$

Chuyên đề 2: Hệ thức lượng trong tam giác

Bài 1. CMR trong mọi tam giác ABC luôn có:

$$1) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$2) \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

$$3) a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 2ab \cdot \sin C.$$

Bài 2. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu:

$$a) \tan A + \tan B + \tan C = 3\sqrt{3}$$

$$b) \sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0.$$

$$c) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$

$$d) \tan A + \tan B = 2\cot \frac{C}{2}.$$

Bài 3. CMR tam giác ABC vuông nếu:

$$a) \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \cdot \sin B$$

$$b) \sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$$

$$c) 3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15.$$

Bài 4. CMR tam giác ABC có ít nhất một góc $60^\circ \Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}.$

Bài 5. CMR tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1/8$

Bài 6. CMR tam giác ABC là tam giác cân nếu: $a(\cot \frac{C}{2} - \tan A) = b(\tan B - \cot \frac{C}{2})$

Bài 7. Nhận dạng tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$$1) \begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ \sin B \sin C = \frac{3}{4} \end{cases} \quad 2) a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = c^2 \cot \frac{C}{2}.$$

Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn có bán kính bằng 1. Đặt $T = a^2 + b^2 + c^2$. Chứng minh tam giác này vuông, nhọn hay tù khi và chỉ khi: $T = 8$ hoặc $T > 8$ hoặc $T < 8$.

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Từ đó suy ra $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Bài 10. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$1) \quad 2 < \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$2) \quad \frac{3}{4} \leq \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} < 1.$$

Chuyên đề 3 → Chuyên đề 7

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$1) \sin(2x + \frac{\pi}{12}) = \sin(x + \frac{\pi}{4}).$$

$$2) \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$$

$$3) \cos 3x + \cos 2x = 0$$

$$4) \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 0.$$

$$5) \cos(3x + \frac{\pi}{6}) + \sin 2x = 0.$$

$$6) \tan(4x + 1) \cdot \tan(x - 1) = 1.$$

$$7) \sin^2(5x + \frac{2\pi}{3}) - \cos^2(2x + \frac{\pi}{3}) = 0.$$

$$8) 2\sin x \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos^2 2x - \sin^2 2x.$$

$$9) \tan(3x - 60^\circ) - \cot(30^\circ - 2x) = 0.$$

$$10) \cos(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$11) \sin(8\cos x) = 1.$$

$$12) \sin(x^2 - 4x) = 0.$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$1) 6\sin^2 x - 13 \sin x + 5 = 0$$

$$2) 2\cos 2x + \cos x = 1$$

$$3) 3\cos^2 x = 2 \sin^2 x + 4\sin x$$

$$4) \frac{3}{\cos x} = 3 + 2\tan^2 x.$$

$$5) \tan x + \cot x = 2$$

$$6) \cos 4x - 3\sqrt{2} \cos 2x + 2 = 0.$$

$$7) \cos 3x - \cos 2x + \cos x - 1 = 0$$

$$8) \cos 4x + 6\sin x \cdot \cos x = 1$$

$$9) \sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = 5/2$$

$$10) 3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1.$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$2) \cos 3x - \sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$3) 3\sin x + 4\cos x = 5/2$$

$$4) 2\sin^2 x - 5\sin 2x = 5.$$

$$5) 2\sqrt{2} (\sin x + \cos x) \cos x = 3 + \cos 2x$$

$$6) 2\cos 3x + \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0.$$

$$7) 2\cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{7}$$

Bài 4: Giải phương trình :

$$1) 3 \cdot \sin^2 x + 8\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 0.$$

$$2) 4\sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2\cos^2 x = 4$$

$$3) 4\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + 3\sin \frac{x}{2} = 3$$

$$4) \frac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x.$$

$$5) \cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x \cdot \cos x = 0.$$

$$6) 2\sin^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x + 2\sin x \cdot \cos^2 x - \cos^3 x =$$

Bài 5: Giải phương trình :

$$1) \sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$$

$$2) \sin x + \cos x = 1 - 2\sin 2x.$$

$$3) \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin x \cdot \cos x = 1$$

$$4) (1 + \sqrt{2})(\sin x - \cos x) + 2\sin x \cdot \cos x = 1 + \sqrt{2}.$$

Bài 6: Giải các phương trình :

$$1) 2\sin 2x - 5\cos x = 0$$

$$2) (\tan 2x - 1)\cos 2x = 0.$$

$$3) \frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} = 0$$

$$4) \sin x = \sqrt{2} \sin 5x - \cos x.$$

$$5) 2\sin x \cdot \cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$$

$$6) 3 + 2\sin x \cdot \sin 3x = 3\cos 2x$$

$$7) (1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$$

$$8) \tan x + \tan 2x = \sin 3x \cdot \cos x.$$

$$9) \tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$$

$$10) 2\sin 2x \cdot \cos 3x - \cos x = 2\sin 2x \cdot \cos x - \cos 3x$$

Bài 7. Tìm nghiệm nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình

$$(\sin 3x + \cos 3x)^2 = 2\cos^2 4x.$$

Bài 8. Tìm các nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$ của phương trình $3\sin x + 1 = 4\sin^2 x(\sin x + 2\cos^2 x)$.

Bài 9. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$: $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x$.

Bài 10. Giải các phương trình

$$1) \sin x - \frac{|2\cos x - 1|}{2\cos x - 1} \sin^2 x = \sin^2 x \text{ với } (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$2) |\cot x| = \tan x + \frac{1}{\sin x}$$

$$3) 2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x}$$

$$4) \sqrt{4 - x^2}(\sin 2\pi x - 3\cos \pi x) = 0$$

Bài 11. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

$$1) m(\sin^6 x + \cos^6 x) = \cos 4x.$$

$$2) \frac{m}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + m - 3}{\cos 2x} \text{ với } \left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Bài 12. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất $3\cos^2 x + 2|\sin x| = m$.

Bài 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của k để phương trình sau có nghiệm: $2\sin^2 x + 6\cos^2 \frac{x}{2} = 5 - 2k$.

Bài 14. Giải các phương trình sau:

$$1) \sin^5 x - \cos^3 x = 1$$

$$2) \sin 2x + \sin \frac{2x}{5} - 2 = 0$$

$$3) 8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$$

$$4) 1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$$

Bài 15. Cho phương trình $\sin^4 x + \cos 2x + m\cos^6 x = 0$.

1) Giải phương trình với $m = 2$.

2) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 16. Cho phương trình $\cos 4x + 6\sin x \cos x = m$.

1) Giải phương trình với $m = 1$.

2) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Bài 17. Tìm m để phương trình sau có đúng 7 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$:

$$\cos 3x - \cos 2x + m \cos x - 1 = 0.$$

Bài 18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$.

Bài 19. Cho hàm số $y_k = \frac{2k \cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$.

1) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số y_1 ứng với $k = 1$.

2) Xác định tham số k để giá trị lớn nhất của hàm số y_k là nhỏ nhất.

Bài 20. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ với $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

PHẦN 2: HÌNH HỌC

Chuyên đề 1: Ôn tập hình giải tích trong mặt phẳng

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm A(-1; 1), B(3; 1), C(2; 4).

1. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác.
2. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.
3. Tìm tọa độ trọng tâm G, trục tâm H, tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác. Từ đó chứng minh rằng ba điểm H, G, I thẳng hàng.
4. **Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.**
5. **Tính độ dài đường trung tuyến AM và độ dài đường phân giác trong AD của tam giác.**

Bài 2. Cho hai điểm A(-3; 2) và B(4; 3).

1. Tìm điểm E để tứ giác AOB E là hình thang vuông đáy AO và BE.
2. Tìm điểm M thuộc Ox để tam giác MAB cân tại M.
3. Tìm điểm N thuộc Oy để $(NA + NB)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Cho tam giác ABC với A(-2; 1), B(4; 3) và C(2; -3).

1. Lập phương trình tham số và tổng quát của cạnh BC.
2. Viết phương trình đường cao AH.
3. Lập phương trình qua A và song song với BC.
4. Viết phương trình đường trung trực của BC.

Bài 4. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $3x + 4y - 12 = 0$.

1. Tìm tọa độ hình chiếu H của gốc tọa độ O trên đường thẳng (d).
2. Tìm điểm M trên đường thẳng (d'): $y - 2x + 3 = 0$ biết M cách (d) một khoảng bằng 2.
3. Viết phương trình đường thẳng (d₁) đối xứng với đường thẳng (d) qua O.
4. Viết phương trình đường thẳng (d₂) tạo với (d) góc 60° .

Bài 5. Cho đường thẳng (d): $x + y - 5 = 0$.

1. Viết phương trình đường thẳng đối xứng với (d) qua đường (d'): $2x + y - 1 = 0$.
2. Viết phương trình đường thẳng đối xứng với (d) qua (d'): $x + y + 3 = 0$.

Bài 6. Cho điểm $P(3; 0)$ và hai đường thẳng $(d_1): 2x - y - 2 = 0$; $(d_2): x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua P và cắt (d_1) , (d_2) lần lượt tại A và B sao cho P là trung điểm của AB .

Bài 7. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết đỉnh $B(2; -1)$, đường cao và phân giác trong qua đỉnh A , C lần lượt có phương trình $(d_1): 3x - 4y + 27 = 0$, $(d_2): x + 2y - 5 = 0$.

Bài 8. Cho hai đường thẳng $(d_1): 2x + y + 1 = 0$ và $(d_2): x + 2y - 7 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ sao cho đường thẳng (d) tạo với (d_1) , (d_2) một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của chúng. Tính diện tích tam giác cân đó.

Bài 9. Cho đường thẳng $(d_m): x \cos m + y \sin m + 2 \cos m + 1 = 0$ với m là tham số.

1. Tìm những điểm trên mặt phẳng tọa độ mà (d_m) không bao giờ đi qua cho dù m nhận bất kỳ giá trị nào.
2. Chứng minh rằng các đường thẳng (d_m) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.
3. Cho điểm $I(-2; 1)$. Dựng IH vuông góc với (d_m) và kéo dài IH sao cho $HN = 2HI$. Xác định tọa độ của N theo tham số m .

Bài 10. Lập phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

1. Đường tròn đi qua điểm $A(3; 1)$, $B(5; 5)$ và có tâm nằm trên trục tung.
2. Đường tròn có tâm $I(-1; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình: $x - 2y - 2 = 0$.
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(-2; 4)$, $B(6; -2)$, $C(5; 5)$.
4. Đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng $(d): 2x - y = 0$, $(d'): x - 2y + 2 = 0$ và có tâm thuộc đường thẳng có phương trình: $x + y - 1 = 0$.
5. Đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ và đi qua điểm $A(4; 2)$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có phương trình các cạnh $AB: 2x - y + 4 = 0$, $BC: x + y - 1 = 0$ và $AC: x + 2y + 2 = 0$.

1. Xác định tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
2. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài 12. Cho họ đường conic (C_m) có phương trình: $x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$.

1. Chứng minh rằng (C_m) là họ đường tròn. Tìm quỹ tích tâm của các đường tròn đó.
2. Chứng minh rằng khi m thay đổi các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.
3. Cho $a = 2$ và điểm $Q(3; 0)$. Viết phương trình của tiếp tuyến của đường tròn (C_2) kẻ từ Q .

Bài 13. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ và một điểm $M(2; 4)$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MT_1 , MT_2 với đường tròn trong đó T_1 , T_2 là các tiếp điểm.

1. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 .
2. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với T_1T_2 .

Bài 14. Cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2; 1)$ và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A , B sao cho M là trung điểm của AB .

Bài 15. Cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và đường thẳng $(d): x - y - 1 = 0$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng có phương trình $y = 3x - 1$.
2. Viết phương trình đường tròn đối xứng với đường tròn (C) qua (d) .
3. Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C') .
4. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C) và (C') .

Bài 16. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ và một điểm $A(2; 0)$. Giả sử M là một điểm di động trên (C) . Gọi H là hình chiếu của M trên Oy . Tìm quỹ tích giao điểm I của AH và OM .

Chuyên đề 2: Phép biến hình và phép tịnh tiến.

a) d' trùng d. b) d' song song với d c) d' cắt d.

1. Dựng ảnh của tam giác ABD qua phép tịnh tiến theo véc tơ BC.
2. Gọi M, N, P, Q lần l-ợt là trung điểm của AB, BC, CD và CA. Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến hình bình hành AMOQ thành hình bình hành ONCP.

a) T_v^- b) T_{-v}^- c) $T_{\frac{3-v}{2}}^-$

b) Vho phép tịnh tiến T_v với $\vec{v}(2;-3)$. Tìm m biết rằng qua phép tịnh tiến T_v đ- ồng thẳng
(d): $(m + 1)x - my + 3 = 0$ biến thành chính nó.

b) Trong mặt phẳng Oxy cho hai đ-ờng thẳng $(d_1) : 3x - 2y + 1 = 0$ và $(d_2): 3x - 2y - 5 = 0$.
 Tìm toạ độ của véc tơ $\vec{v}$ có giá vuông góc với đ-ờng thẳng (d_1) để (d_2) là ảnh của (d_1) qua T_v .

Bài 7. Cho tam giác ABC. Vẽ hình chữ nhật BCDE bên ngoài tam giác. Gọi d_1 , d_2 lần l-ợt là các đ-ờng thẳng qua D và E và vuông góc với AB, AC. Gọi K là giao điểm của d_1 , d_2 .

2) Từ trên chúng minh rằng AK vuông góc với BC.

Bài 9. Trong mặt phẳng Oxy cho phép biến hình f biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$ thỏa

$$\text{mãn} \quad \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases} \quad (\text{biểu thức tọa độ của phép biến hình f})$$

2) Tìm ảnh của đ-ờng thẳng (d): $x - y = 0$ qua f.

b) Chứng minh rằng hợp thành của hai hay nhiều phép dời hình là một phép dời hình.

Bài 1. Tìm ảnh của điểm $A(2\sqrt{2}; -1)$ và đường thẳng có phương trình: $x + 3y = 1$ qua phép đối xứng trục Ox , Oy .

Bài 2. Tìm trục của phép đối xứng biết:

a) Điểm $M'(2; 3)$ là ảnh của điểm $M(-4; 5)$.

b) Đường thẳng $x - y + 2 = 0$ là ảnh của đường thẳng $x - y + 6 = 0$.

c) Đường tròn $x^2 + y^2 - 4x = 0$ là ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$.

Bài 3. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Tìm hai điểm B và C lần lượt nằm trên hai tia Ox , Oy sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Bài 4. Cho tam giác ABC là tam giác đều. Xác định phép đối xứng trục biến tam giác ABC thành chính nó. Từ đó chỉ ra các trục đối xứng của tam giác.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Chứng minh rằng các điểm đối xứng của H qua các cạnh của tam giác ABC nằm trên đường tròn $(O; R)$. Từ đó suy ra các đường tròn (HBC) , (HCA) , (HAB) và $(O; R)$ bằng nhau.

b) Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn (HBC) , (HCA) , (HAB) . Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác $O_1O_2O_3$ bằng nhau.

c) Giả sử B, C là hai điểm cố định và A là điểm thay đổi trên đường tròn $(O; R)$. Dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng H chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 6. Cho đường thẳng xx' và hai điểm P, Q cùng nằm một phía đối với xx' . Dựng điểm A thuộc xx' sao cho $PAx = QAx$.

Bài 7. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng khoảng cách từ P tới các điểm A và B là nhỏ nhất biết $A(1; 1)$, $B(3; 3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 8. Cho tam giác ABC biết phương trình cạnh $BC: 4x - y + 3 = 0$ và hai đường phân giác trong của các góc B, C có phương trình $(d_B): x - 2y + 1 = 0$ và $(d_C): x + y + 3 = 0$. Lập phương trình các cạnh AB, AC .

Bài 9. Cho $A(-1; 3)$, đường thẳng $(d): x - 3y + 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$.

a) Tìm ảnh của $A, d, (C)$ qua phép đối xứng $\mathcal{D}_{Ox}$.

b) Tìm ảnh của A qua $\mathcal{D}_d$.

c) Tìm ảnh của (C) qua $\mathcal{D}_d$.

Bài 10. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Chứng minh rằng đường thẳng $y = x + 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Chuyên đề 4: Phép quay và phép đối xứng tâm.

Bài 1. Cho tam giác đều ABC , trực tâm H . Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AB . Tìm ảnh của tam giác HMC qua phép quay tâm H với:

a) Góc quay 120° .

b) Góc quay -120° .

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho điểm $M(x; y)$. Gọi $M' = Q(M)$ trong đó Q là phép quay quanh tâm O góc 90° . Chứng minh rằng $M' = (-y; x)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 8x + 6y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O , góc quay 90° .

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$, A là một điểm cố định không trùng tâm O , BC là một dây cung của (O) , BC di động nhưng số đo của cung BC luôn bằng 120° . Gọi I là trung điểm của BC , vẽ tam giác đều AIJ . Tìm tập hợp điểm J .

Bài 5. Cho hai đường thẳng (d) và (d') song song và một điểm A không nằm trên (d) và (d') . Hãy dựng điểm B trên (d) và C trên (d') sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 6. Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C với B nằm giữa A và C . Dựng về một phía đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF .

a) Chứng minh rằng $AF = EC$ và góc giữa hai đường thẳng $(AF, EC) = 60^\circ$.

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC . Chứng minh rằng tam giác BMN đều.

Bài 7. Cho tam giác MNP có $M(1; -2), N(1; 2), P(5; 2)$

a) Tìm tọa độ tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

b) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác $M'N'P'$ qua phép đối xứng tâm I .

c) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác $M'N'P'$.

Bài 8. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) , hai điểm A, G không thuộc $(d_1), (d_2)$. Hãy dựng tam giác ABC có trọng tâm G và hai đỉnh B và C lần lượt thuộc (d_1) và (d_2) .

Bài 9. Cho hình (H) trên mặt phẳng xOy gồm hai đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$. Chứng minh rằng tồn tại một phép đối xứng tâm A biến (C) thành (C') . Xác định tọa độ điểm A .

Bài 10. Trên các cạnh của hình bình hành $ABCD$ dựng các tam giác đều ở ngoài hình bình hành đó: ABM, BCN, CDP, ADQ . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ cũng là hình bình hành.