

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KÌ II MÔN TOÁN LỚP 11_NĂM HỌC 2014 – 2015

PHẦN 1. GIẢI TÍCH

A. Một số kiến thức cơ bản

1. Nắm vững các định nghĩa: Dãy số có giới hạn hữu hạn và vô cực .Hàm số có giới hạn hữu hạn và vô cực . Hàm số liên tục tại một điểm , trên một khoảng , đoạn nửa khoảng Đạo hàm và ý nghĩa của đạo hàm , vi phân và đạo hàm cấp cao .

2. Nắm vững và sử dụng linh hoạt các định lý và các quy tắc tìm giới hạn của dãy số và hàm số để từ một số giới hạn đã biết tìm được giới hạn của những dãy số và những hàm số khác , biết cách chứng minh hoặc tìm điều kiện để hàm số liên tục tại một điểm, trên một khoảng , một đoạn . Vận dụng tính chất của hàm số liên tục trong bài toán chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình .

3. Vận dụng tốt các công thức và các quy tắc tính đạo hàm của tổng , hiệu , tích , thương các hàm số , hàm số hợp .Biết cách tính đạo hàm cấp cao của một số hàm thường gặp .

4. Biết ứng dụng đạo hàm để giải một số bài toán về tiếp tuyến .

B. Một số dạng bài tập cơ bản

VẤN ĐỀ 1 : GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.

Bài 1. Tính giới hạn của các dãy số sau:

$$1. u_n = \frac{5.2^n - 6.3^n}{3.2^n + 23^n}$$

$$2. u_n = \frac{2.3^{2n} + 6^{n+1} - 2^{2n-1}}{(2.3^{n-1} - 3.2^n)^2}$$

$$3. u_n = \frac{(2n-1)(3n+1)^2}{(2n-4)^3}$$

$$4. u_n = \frac{4n^2 - n - 1}{(2n-1)^2 (n+6)}$$

$$5. u_n = \frac{n^3 - n^2 + n + 8}{2n^2 + 7n + 9}$$

$$6. u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1}}$$

$$7. u_n = \frac{n + \sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^4+1} - n^2}$$

$$8. u_n = \sqrt{4n^2 + n} - \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2}$$

$$9. u_n = \sqrt{4n^2 + 1} \cdot \sqrt[3]{n^3 + 7} - 2n^2 + 1$$

Bài 2. Tính giới hạn của các dãy số sau:

$$1. u_n = \frac{1+4+7+\dots+(3n+4)}{1+6+11+\dots+(5n-4)}$$

$$3. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \right)$$

$$2. u_n = \frac{3^n(1+2+2^2+\dots+2^n)}{2^n(1+3+3^2+\dots+3^n)}$$

$$4. u_n = \frac{2}{(2^2-1)^2} + \frac{3}{(3^2-1)^2} + \dots + \frac{n}{(n^2-1)^2}$$

$$5. u_n = \left(\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} \right)$$

Bài 3. Cho dãy số:
$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{U_n} \end{cases}, n \in N^*$$
 Tìm công thức tính U_n theo n . Suy ra $\lim U_n$?

VẤN ĐỀ 2 : GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.

Bài 1. Tìm giới hạn các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 5x^2 + 10x); & 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} & 3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \\ 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} & 5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2010} + 4x^4 + 3x^3 - 8}{x^{2010} + x^3 + 2x^2 - 4} & 6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} \end{array}$$

Bài 2. Tìm giới hạn các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} & 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{x^3 - 4x^2 + 3} \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{2x + x^2} & 5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} (m, n \in \mathbb{N}^*) & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \\ 7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{x+8}} & 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+4} - 3}{x} & 9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{x^2 - 1} \\ 10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} & & \end{array}$$

Bài 3. Tìm giới hạn các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} & 2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{1 - 2\sin x} & 3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2\cos^2 x - 1} \\ 4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - \tan x} & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} & 6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + 2\sin^2 - \sin x - 2}{\cos^3 x + 3\cos^2 x} \end{array}$$

Bài 4. Tìm giới hạn các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1}; & 2. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 2}{3x^2 - x - 1} & 3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^2(7x+2)^2}{(2x+1)^4} \\ 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{3x-1} & 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2x}}{3x-1} & 6. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2+3x+1}}{\sqrt{4x^2+1+1-x}}; \end{array}$$

Bài 5. Tìm giới hạn các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 - 3x) & 2. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4} & 3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x); \\ 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) & 5. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2 + 5} + x) & 6. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x) \\ 7. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x}) & 8. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2}) \end{array}$$

Bài 6. Tìm giới hạn các hàm số sau:

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} \quad & 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{2x} \quad & 3. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+3}{x-2} \quad & 4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \\ 5. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4} \quad & 6. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1} \quad & 8. \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right) \end{aligned}$$

VẤN ĐỀ 3 : HÀM SỐ LIÊN TỤC.

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm x_0

$$\begin{aligned} 1. y = f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{với } x_0 = \sqrt{2} \quad 2. y = f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{(x-2)^2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 2 \\ 3. y = f(x) &= \begin{cases} x^2-x & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x}} & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 1 \quad 4. y = f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|x}{x^2+2x-3} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 1 \end{aligned}$$

Bài 2. Tìm các giá trị của tham số để các hàm số sau liên tục tại điểm x_0 .

$$\begin{aligned} 1. y &= \begin{cases} a \cdot \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x+7}-3} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{2x-a}{x-1} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 2 \quad 2. y = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ a + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 0 \\ 3. y &= \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + ax + b & \text{khi } x > 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \frac{a(x^3+x^2+x-3)}{x^2-3x+2} & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1 \quad 4. y = \begin{cases} \frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1})}{-x^2-x} & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2+(a-1)x+b}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{với } x_0 = 0 \end{aligned}$$

Bài 3. Chứng minh hàm số sau liên tục trên $[1; +\infty)$: $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}} & \text{khi } x > 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Bài 4. Tìm a, b để hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$1. y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-ax-1}{x^2+x-2} & \text{khi } x > 1 \\ bx^2-3x+4 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad 2. y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2x+4}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax-a+4 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

Bài 5. Chứng minh phương trình:

- $x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.
- $\sin^3 x = 3 - x$ có nghiệm.
- $\cos^2 x - \sqrt{x} = 0$ có ít nhất một nghiệm.

4. $x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 14 = 0$ có đúng 4 nghiệm .
5. $m(x-1)^3(x^2-4) + x^4 - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm với mọi m
6. $x^3 - 2(m^2 + 2)x^2 + mx + m^2 + m + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm với mọi m .
7. $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ có nghiệm với mọi m .
8. $m(2\cos x - \sqrt{2}) = 2\sin 5x + 1$ có nghiệm với mọi m .
9. $\cos 2x + a\cos x + b\sin x = 0$ có nghiệm với mọi a và b .
10. $m\sin \pi x + m - x = 0$ có nghiệm với mọi m .

VẤN ĐỀ 4: TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ.

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y = (x^2 + 3x)(2-x)$
2. $y = \frac{2x-1}{4x-3}$
3. $y = \frac{3}{2x-1}$
4. $y = \frac{-x^2 + 5x - 4}{3x-6}$
5. $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$
6. $y = x+1 - \frac{2}{x-1}$

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y = (2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)^2$
2. $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$
3. $y = \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2}$
4. $y = (x^2 - x + 1)^3(x^2 + x + 1)^2$
5. $y = (1 - 2x^2)^5$
6. $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$
8. $y = \frac{5x^2 - 4x - 9}{-2x^2 + 3x - 8}$
9. $y = (1 + 2x)(2 + 3x^2)(3 - 4x^3)$
10. $y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{1-x+x^2}$

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$
2. $y = (x-2)\sqrt{x^2+3}$
3. $y = \sqrt{(x-2)^3}$
4. $y = (1 + \sqrt{1-2x})^3$
5. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$
6. $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$
7. $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2}$
8. $y = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2$
9. $y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y = x \tan x$
2. $y = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$
3. $y = x \sin x + 5 \cos x$
4. $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$
5. $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$
6. $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$
7. $y = \cos^2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$
8. $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)^2$
9. $y = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}$
10. $y = 2\sin^2 4x - 3\cos^3 5x$
10. $y = 2\sin^2 4x - 3\cos^3 5x$
11. $y = (2 + \sin^2 2x)^3$

12. $y = \sin(\cos^2 x \tan^2 x)$ 13. $y = \sin x \cos 2x$

14. $y = (\cos^4 x - \sin^4 x)^5$

15. $y = \sin^2(\cos(\tan^4 3x))$ 16. $y = \sin^3 2x \cos^3 2x$

Bài 5: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y = \sqrt{\tan x + \cot x}$

2. $y = \frac{1}{2}(1 + \tan x)^2$

3. $y = \cot^3(2x + \frac{\pi}{4})$

4. $y = \left(\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}\right)^2$

5. $y = \frac{1 + \tan^2 3x}{1 - \tan^2 3x}$

6. $y = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

7. $y = \sqrt{x \tan x}$

8. $y = \cot^3(2x + \frac{\pi}{4})$

9. $y = \tan(\sin x)$

10. $y = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})(1 + \sin x)}{\sin x}$

11. $y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x}}}$; $x \in (0; \frac{\pi}{4})$

VẤN ĐỀ 5: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO.

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số đến cấp được chỉ ra:

1. $y = \cos x, y'''$

2. $y = 5x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 7, y''$

3. $y = \frac{x-3}{x+4}, y''$

4. $y = \sqrt{2x - x^2}, y''$

5. $y = (x^2 + 1)^3, y''$

6. $y = x^6 - 4x^3 + 4, y^{(4)}$

Bài 2. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

1. $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

2. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

3. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Bài 3. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

1. $y = \frac{1}{x+2}$

2. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

3. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

4. $y = \frac{1-x}{1+x}$

5. $y = \sin^2 x$

6. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Bài 4. Chứng minh các hệ thức sau với các hàm số được chỉ ra:

1. $\begin{cases} y = x \sin x \\ xy'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = \sqrt{2x - x^2} \\ y^3 y'' + 1 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = x \tan x \\ x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y) = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = \frac{x-3}{x+4} \\ 2y'^2 = (y-1)y'' \end{cases}$

5. $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^3$ CMR: $(1+x)^2 y'' + xy' - 9y = 0$.

VẤN ĐỀ 6: MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC.

Bài 1. Giải phương trình $f'(x) = 0$ với:

1. $f(x) = 3 \cos x - 4 \sin x + 5x$

2. $f(x) = \sin^2 x + 2 \cos x$

3. $f(x) = \sin x - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 6x}{6}$

4. $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2 \cos \frac{3\pi + x}{2}$

5. $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 3(\cos x - \sqrt{3} \sin x)$

Bài 2. Chứng minh hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$ có đạo hàm bằng 0

Bài 3. Tính $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ biết $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$

Bài 4. Giải phương trình $f'(x) = g(x)$ với:

$$1. \begin{cases} f(x) = \sin^3 2x \\ g(x) = 4 \cos 2x - 5 \sin 4x \end{cases} \quad 2. \begin{cases} f(x) = 2x^2 \cos^2 \frac{x}{2} \\ g(x) = x - x^2 \sin x \end{cases} \quad 3. \begin{cases} f(x) = 4x \cos^2 \frac{x}{2} \\ g(x) = 8 \cos \frac{x}{2} - 3 - 2x \sin x \end{cases}$$

Bài 5. Xác định m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

1. $f'(x) > 0$ với $f(x) = \frac{mx^3}{3} - 3x^2 + mx - 5$

2. $f'(x) < 0$ với $f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (m+1)x - 15$

Bài 6. Giải phương trình $y' = 0$ trong các trường hợp sau:

1. $y = \sin 2x - 2 \cos x$

2. $y = \cos^2 x + \sin x$

3. $y = 3 \sin 2x + 4 \cos 2x + 10x$

4. $y = \tan x + \cot x$

Bài 7. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ với:

1. $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$

2. $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$, $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$

3. $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = x - x^3$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ giải bpt: $f'(x) \leq 1$.

VẤN ĐỀ 7: TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

Bài 1. Cho hàm số: $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$. (C). Viết phương trình tiếp với (C):

1. Tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

2. Song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$.

3. Vuông góc với đường thẳng $x + 4y = 0$.

Bài 2. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó:

1. Có hệ số góc nhỏ nhất trong tất cả các tiếp tuyến với (C).

2. Song song với đường thẳng $3x + y + 1 = 0$.

3. Vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{7}x - 4$

4. Đi qua điểm $A(1; -2)$

5. Tìm m để (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = mx + 2$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2-x+x^2}{x-1}$ (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 4)$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -1$.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x+1}{1-x}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

1. Tại điểm $A(2; -7)$.
2. Tại giao điểm của (C) với trục hoành.
3. Tại giao điểm của (C) với trục tung.
4. Biết tiếp tuyến song song với d: $y = \frac{1}{2}x + 100$.
5. Biết tiếp tuyến vuông góc với $\Delta: 2x + 2y - 5 = 0$.
6. Biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông cân.
8. Biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho $OA = 3OB$.
9. Biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho ΔOAB có diện tích $\frac{1}{4}$ (đvdt)

Bài 5. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $I(1, -2)$.
2. Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của đồ thị (C) không đi qua I.
3. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị **kể từ điểm** $A(-1; -4)$

Bài 6. Cho hàm số (C): $y = \sqrt{1-x-x^2}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

1. Tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$.
2. Song song với đường thẳng $x + 2y = 0$.

Bài 7. Cho đường cong (C): $y = \frac{x+2}{x-2}$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C)

1. Tại điểm có hoành độ bằng 1
2. Tại điểm có tung độ bằng $\frac{1}{3}$
3. Biết tiếp tuyến đó có hệ số góc là -4

Bài 8. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ **kể từ điểm** A:

1. $y = x^3 - 3x$; $A(-1; 2)$
2. $y = x^3 - 3x + 1$; $A\left(\frac{2}{3}; -1\right)$
3. $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$; $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$.
4. $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$; $A(3; 3)$.

Bài 9: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 3x - 4x^3$ biết tiếp tuyến đó:

1. Có hệ số góc lớn nhất.
2. Đi qua $A(1; 3)$

Bài 10. Cho hàm số $y = \frac{5x+1}{x-3}$ có đồ thị (C). CMR không có t. tuyến nào **đi qua** $A(3; 5)$.

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x + 8$.

Bài 12. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm những điểm trên trục tung mà từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến đến đồ thị.

Bài 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Tìm những điểm trên đường thẳng $x = 2$ mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị.

Bài 14. (ĐH Ngoại Ngữ HN 2001) Cho (C) $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$. Tìm các điểm trên (C)

mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Bài 15. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm 2 tiệm cận của (C)

1. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M.
2. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với đường thẳng: $x + 1 = 0$ và $y = x + 1$.
Tìm tọa độ A, B và từ đó CMR: M là trung điểm của AB
3. CMR: diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Bài 16. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có đồ thị (C). Tìm điểm M thuộc (C) để tiếp tuyến tại

M cắt Ox, Oy tại A, B sao cho tam giác OAB vuông cân.

Bài 17. (ĐHQG TPHCM 1996) Cho (C_m) $y = f(x) = x^3 + mx^2 + 1$

Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -x + 1$ tại 3 điểm phân biệt A(0,1), B, C sao cho tiếp tuyến với (C_m) tại B và C vuông góc với nhau.

Bài 18. (HVCNBCVT 2001) Cho hàm số (C) $y = f(x) = x^3 - 3x$

1. CMR đường thẳng (d_m) $y = m(x + 1) + 2$ luôn cắt (C) tại điểm A cố định
2. Tìm m để (d_m) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại B và C vuông góc với nhau.

Bài 19. (KB_2008) Viết các phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ biết rằng tiếp tuyến đó đi qua $M(-1; -9)$.

PHẦN II. HÌNH HỌC

A. Một số kiến thức cơ bản.

1. Nắm vững các định nghĩa, các định lý và hệ quả... trong hình không gian . Vận dụng thành thạo các định lý và hệ quả để làm bài tập.
2. Nắm vững quy tắc xác định góc, tính góc giữa hai đường thẳng ; chứng minh các đường thẳng vuông góc.
3. Nắm vững quy tắc xác định góc, tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ; chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng.
4. Nắm vững quy tắc xác định góc, tính góc giữa hai mặt phẳng ; chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.
5. Xác định và tính được khoảng cách giữa các yếu tố trong không gian.
6. Xác định thiết diện bằng quan hệ vuông góc...liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc.....

B. Một số dạng bài tập.

Bài 1. Cho hình chóp S. ABC có tam giác $\triangle ABC$ vuông tại C; cạnh $SA \perp (ABC)$.

- 1) Chứng minh: $BC \perp (SAC)$.
- 2) E là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Chứng minh: $AE \perp (SBC)$.
- 3) Gọi mặt phẳng (P) qua AE và vuông góc với (SAB) và cắt SB tại D. Chứng minh rằng: $SB \perp (P)$.
- 4) Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại F. Chứng minh: $AF \perp (SAB)$.

Bài 2. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và $SA \perp (ABCD)$.

Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.

- 1) Chứng minh rằng : $BC \perp (SAB)$; $CD \perp (SAD)$; $BD \perp (SAC)$.
- 2) Chứng minh rằng : $SC \perp (AHK)$; và I là điểm thuộc mặt phẳng (AHK).
- 3) Chứng minh rằng : $HK \perp AI$.

Bài 3. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O và $SA = SC$; $SB = SD$.

- 1) Chứng minh rằng : $SO \perp (ABCD)$.
- 2) Gọi I, K lần lượt là trung điểm AB và BC. Chứng minh rằng : $IK \perp SD$.
- 3) Gọi (P) là mặt phẳng song song với SO và chứa IK. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (P). Chứng minh rằng : $BD \perp (P)$.

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. Biết $AB = 2a$, $AD = DC = a$, cạnh $SA = a$ và SA vuông góc với mp (ABCD).

- 1) CMR: $(SAD) \perp (SDC)$ và $(SAC) \perp (SBC)$
- 2) Tính góc giữa SC và AB.
- 3) Tính tan của góc giữa hai mp(SBC) và (ABCD).
- 4) Dựng thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp qua SD và vuông góc với (SAC). Tính diện tích thiết diện đó.

Bài 5. Cho hình chóp tứ giác S. ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Cạnh bên $SA = SB = SD = a\sqrt{7/12}$

- 1) CMR: hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABCD) là trọng tâm của $\triangle ABD$.

- 2) Tính góc giữa SC và mp(ABCD).
- 3) Tính góc tạo bởi (SAB), (SBC) và mp(ABCD).

Bài 6. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C', có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và CC'.

- 1) Chứng minh rằng : $AI \perp (BCC'B')$.
- 2) Chứng minh rằng : $(AB'I) \perp (A'BJ)$.
- 3) Tìm hình chiếu vuông góc của B trên mp(AB'I).
- 4) Tính góc giữa A'B và B'C.
- 5) Tính khoảng cách từ A đến B'C.
- 6) Tính khoảng cách của A'B và B'C.

Bài 7. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C', có đáy là tam giác vuông cân ABC với $AC=BC=a$, $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M, N, I, K lần lượt là trung điểm của AC, CC', AB, BB'.

- 1) Dựng thiết diện của lăng trụ cắt bởi mp qua N và vuông góc với NB'.
- 2) Dựng thiết diện của lăng trụ cắt bởi mp qua MN và vuông góc với (IKC).

Bài 8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

- 1) CMR: $(A'BC') \parallel (AD'C)$.
- 2) CMR: $B'D \perp (A'BC')$.
- 3) Tính góc giữa BC' và CD'.
- 4) Tính khoảng cách từ D' đến mặt phẳng $(A'BC')$.
- 5) Tính khoảng cách giữa BC' và $(AD'C)$.

Bài 9. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a và cạnh SA vuông góc với đáy, giả sử $SA = h$.

- 1) Tìm hệ thức liên hệ giữa a và h để góc giữa SC và AB bằng 60° .
- 2) Cho $h = a\sqrt{2}$, hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.
- 3) Xác định và tính cosin của góc giữa hai mp(SBC) và (SCD).
- 4) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của BD và SC.
- 5) Gọi M là một điểm di động trên SB. Tìm tập hợp hình chiếu của S trên mp(ADM).

Bài 10. Cho tam giác SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, biết ΔSBC là tam giác đều cạnh a, ΔABC là tam giác vuông tại A góc $\angle ABC = \alpha$. Gọi I là trung điểm của AB.

- 1) Tìm hình chiếu H của S trên mp(ABC).
- 2) Tìm điểm O cách đều 4 điểm S, A, B, C.
- 3) CMR: $(SIH) \perp (SAB)$.
- 4) Tính khoảng cách từ H đến mp(SAB) theo a và α .
- 5) Tính tan của góc giữa hai mp(SAB) và (ABC).
- 6) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABC bởi mp (P) qua I và vuông góc với SC.

Bài 11. Cho tứ diện SABC có ΔABC là tam giác vuông tại B, $AB=2a$, $BC=a\sqrt{3}$. SA vuông góc với mp(ABC) và $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của AB.

- 1) Tính góc giữa hai mp(SBC) và (ABC).
- 2) Tính độ dài đường cao AK của tam giác AMC.
- 3) Tính góc giữa hai mp(SMC) và (ABC).
- 4) Tính khoảng cách từ A đến mp(SMC).

Bài 12. Cho hình chóp tứ giác S. ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a, góc $\angle BAD = 60^\circ$, đường cao SO của hình chóp có độ dài bằng a.

- 1) Tính khoảng cách từ O đến mp(SBC).
- 2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

Bài 13. Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAD cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

- 1) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AD và SB.
- 2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Bài 14. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O, hai mặt bên SAB và SAC là các tam giác vuông tại A và C, hai mặt này hợp với đáy một góc α , biết góc $\angle ABC = \varphi$.

- 1) CMR: $SO \perp (ABCD)$.
- 2) CMR: hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) cùng hợp với đáy một góc β .
- 3) CMR: $\cot \beta = \cot \alpha \cdot \cos \varphi$.

Bài 15. Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C', có đáy là tam giác đều cạnh a, đường BC' tạo với mp(ABB'A') góc 30° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BB'.

- 1) Tính độ dài cạnh bên của lăng trụ.
- 2) Tính khoảng cách từ M đến mp(BA'C').
- 3) Tính góc giữa MN và mp(BA'C').

Bài 16. Cho tứ diện ABCD có các tam giác $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ đều là các tam giác vuông tại A. M là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa AM và các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD). Gọi φ, θ, η lần lượt là góc giữa mặt phẳng (BCD) với các mp(ABC), (ACD), (ABD).

- 1) Chứng minh rằng: $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.
- 2) Chứng minh rằng: $\cos \varphi + \cos \theta + \cos \eta \leq \sqrt{3}$.

Bài 17.(KD_2007). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang có góc $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$; $AB = BC = a$; $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. CMR: tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mp(SCD).

Bài 18. (KA_2008) Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có các cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm H của BC. Tính A'H theo a và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

Bài 19.(KB_2008). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) $\perp$ (ABCD). Tính khoảng cách từ S đến mp (ABCD) và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN trong đó M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

Bài 20.(KD_2009) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. M là trung điểm của $A'C'$ và $I = AM \cap A'C$. Tính khoảng cách từ A đến (IBC) .

Bài 21. (KA – 2010) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . H là giao điểm của CN và DM . Biết $SH \perp (ABCD)$; $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM với SC theo a .

Bài 22.(KB_2011) Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

Bài 23. (KA_2012) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Bài 24. (KA_2014) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

Bài 25.(KB_2014) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy là 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

Bài 26. (KD_2014) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .