

CHƯƠNG 3. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

3.1. NGUYÊN HÀM

MỨC ĐỘ 1: NHẬN BIẾT

□ Dạng 01: Định nghĩa, tính chất của nguyên hàm

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.** $\int f'(x)dx = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
- B.** $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x); g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- C.** $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- D.** $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x); g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

k phải là hằng số khác 0 thì biểu thức này mới đúng.

Khi ta có $\int kf(x)dx = \int 0dx = C$ còn $k \int f(x)dx = 0$.

Câu 2. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số bất kỳ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $k \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.** $\int f'(x)dx = f(x) + C$. **B.** $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.
- C.** $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. **D.** $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Lời giải

Chọn B

Mệnh đề: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$; và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là mệnh đề sai vì khi $k = 0$ thì $\int kf(x)dx \neq k \int f(x)dx$.

Các phương án B, C, D đúng theo tính chất nguyên hàm.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số, α là hằng số).

B. $\int e^x dx = e^x + C$ (C là hằng số).

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số, $x \neq 0$).

D. Mọi hàm số $f(x) \neq 0$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn $[a; b]$.

Lời giải

Chọn A

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (C \text{ là hằng số, } \alpha \text{ là hằng số khác } -1).$$

Câu 4. Nếu $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$ thì $f(x)$ bằng:

A. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$.

B. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$.

C. $f(x) = 3x^2 + e^x$.

D. $f(x) = x^2 + e^x$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + e^x + C \right)' = x^2 + e^x.$$

Câu 5. Cho biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $I = \int [2f(x) - 1] dx$.

A. $I = 2F(x) - 1 + C$.

B. $I = 2F(x) - x + C$.

C. $I = 2xF(x) - x + C$.

D. $I = 2xF(x) - 1 + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int [2f(x) - 1] dx = \int 2f(x) dx - \int 1 dx = 2F(x) - x + C..$$

Câu 6. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K . Tìm nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2f(x)$.

A. $2F(x)$.

B. $2xF(x) + C$.

C. $2xF(x)$.

D. $2F(x) + C$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Ta có: } G(x) = \int [2f(x)] dx = 2 \int f(x) dx = 2F(x) + C.$$

Câu 7. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$.

B. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.

D. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ (k là hằng số và $k \neq 0$).

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy A sai vì $G(x) = F(x) + C$ với $C \in \mathbb{R}$.

B, C, D đúng theo tính chất.

Câu 8. Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x) = 2xe^{x^2}$.

B. $f(x) = x^2e^{x^2} - 1$.

C. $f(x) = e^{2x}$.

D. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = F'(x) = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

□ Dạng 02: Nguyên hàm của hs cơ bản, gần cơ bản

Câu 9. Nguyên hàm $\int \pi^3 dx$ bằng

A. $\frac{\pi^3}{3} + C$.

B. $\frac{\pi^4}{4} + C$.

C. $\frac{x^4}{\pi} + C$.

D. $\pi^3 x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \pi^3 dx = \pi^3 \int dx = \pi^3 x + C$.

Câu 10. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2020x + 3x^2$ là:

A. $-2020 \cos 2020x + 6x + C$.

B. $\frac{-1}{2020} \cos 2020x + x^3 + C$.

C. $\frac{1}{2020} \cos 2020x + x^3 + C.$

D. $2020 \cos 2020x + 6x + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x) dx = \int (\sin 2020x + 3x^2) dx = \int \sin 2020x dx + \int 3x^2 dx = \frac{-1}{2020} \cos 2020x + x^3 + C.$

Câu 11. Nguyên hàm $\int e^{-2x+1} dx$ bằng:

A. $-\frac{1}{2} e^{-2x+1} + c.$

B. $e^{-2x+1} + c.$

C. $-2e^{-2x+1} + c.$

D. $\frac{1}{2} e^{-2x+1} + c.$

Lời giải

Chọn A

$$\int e^{-2x+1} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x+1} + c.$$

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int 2^x dx = 2^x + C.$

B. $\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + C.$

C. $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| + C.$

D. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

Lời giải

Chọn D

Xét A có $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ là mệnh đề đúng.

Xét B có $\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + C$ sai vì $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$

Xét C có $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| + C$ sai vì $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C.$

Xét D có $\int 2^x dx = 2^x + C$ sai vì $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 1$ là

A. $x^5 - x + C.$

B. $20x^3 + C.$

C. $20x^5 - x + C.$

D. $x^5 + x + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int (5x^4 - 1) dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} - x + C = x^5 - x + C$.

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$. **B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.**
- C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức nguyên hàm ta có $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 15. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

- A. $x^2 + C$. B. $2x^2 + C$. **C. $x^2 + 3x + C$.** D. $2x^2 + 3x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C$.

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $\int f(x) dx = 6 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$. **B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.**
- C. $\int f(x) dx = 3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$. D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức: $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$.

Câu 17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - x + 1$ là

A. $F(x) = x^4 - x^2 + 1 + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C.$

D. $F(x) = 3x^2 - 1.$

Lời giải

Chọn C

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - x + 1$ là $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C.$

Câu 18. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}.$

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - 3\sqrt{x^3} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2x - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + C.$

D. $\int f(x) dx = x - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int x^2 dx + \int \frac{3}{x} dx - \int 2\sqrt{x} dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

MỨC ĐỘ 2: THÔNG HIỂU

b Dạng 01: Định nghĩa, tính chất của nguyên hàm

Câu 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right).$

A. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

D. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x)dx = \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$$

Câu 20. Nếu $\int f(x)dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}.$

B. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx.$

C. $f(x) = 12x^2 + 2x + C.$

D. $f(x) = 12x^2 + 2x.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) = \left(\int f(x)dx \right)' = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x$

Câu 21. Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$ và $f(1) = e - 3$

A. $f(x) = x^4 + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}.$

B. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + \frac{17}{4}.$

C. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}.$

D. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x + \cos(\pi x) - \frac{9}{4}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)) dx = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + C.$

Do $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$ nên $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + C_0$ với $C_0 \in \mathbb{R}.$

Lại có $f(1) = e - 3$ nên $\frac{1^4}{4} + e^1 - \cos(\pi) + C_0 = e - 3 \Leftrightarrow C_0 = -\frac{17}{4}.$

Vậy $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}.$

Câu 22. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + x$ là

A. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C.$

B. $2^x + x^2 + C.$

C. $\frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C.$

D. $2^x + \frac{x^2}{2} + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int (2^x + x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C.$

Câu 23. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(2)$ là

- A. $F(2) = 2 \ln 3 - 2$. **B.** $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$. C. $F(2) = \ln 3 + 2$. D. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + C.$$

$$\text{Theo đề: } F(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln |1| + C = 2 \Leftrightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + 2 \Rightarrow F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$$

Câu 24. Cho $F(x) = \cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

- A. $f(\pi) = -1$. **B.** $f(\pi) = 1$. C. $f(\pi) = 0$. D. $f(\pi) = -3$.

Lời giải

Chọn B

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên suy ra

$$f(x) = F'(x) = -2 \sin 2x - \cos x \Rightarrow f(\pi) = -2 \sin 2\pi - \cos \pi = 1.$$

b Dạng 02: Nguyên hàm của hs cơ bản, gần cơ bản

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ là

- A. $\frac{1}{\sin^4 x} + C$. **B.** $\tan x - \cot x + C$.
C. $-\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} + C$. D. $-\tan x + \cot x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \tan x - \cot x + C.$$

Câu 26. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{1-2x}$ là

A. $\frac{3}{2}(2x-1)\sqrt{1-2x}$.

B. $-\frac{3}{2}(1-2x)\sqrt{1-2x}$.

C. $\frac{3}{4}(2x-1)\sqrt{1-2x}$.

D. $-\frac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx = \int \sqrt{1-2x}dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{1-2x}d(1-2x)$, với $x \leq \frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow \int f(x)dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(1-2x)^3} + C = -\frac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x} + C$$

Câu 27. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x$.

C. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + x$.

D. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} = e^{2x} - e^x + 1$.

Nên $\int f(x)dx = \int (e^{2x} - e^x + 1)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$.

Vậy một nguyên hàm của $f(x) = \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$ là $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$.

Câu 28. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - 6x^2$ là

A. $-\cos x - 2x^3 + C$.

B. $\cos x - 2x^3 + C$.

C. $-\cos x - 18x^3 + C$.

D. $\cos x - 18x^3 + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)dx = \int (\sin x - 6x^2)dx = \int \sin x dx - 2 \int 3x^2 dx = -\cos x - 2x^3 + C$.

Câu 29. Tính nguyên hàm $F(x) = \int \frac{1}{e^x + 1} dx$.

A. $F(x) = \ln(1 + e^x) - x + c \ (c \in \mathbb{R})$.

B. $F(x) = x - \ln(1 + e^x) + c \ (c \in \mathbb{R})$.

C. $F(x) = x + \ln(1 + e^x) - 1 + c \ (c \in \mathbb{R})$.

D. $F(x) = 1 - \ln(1 + e^x) + c \ (c \in \mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$F(x) = \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = x - \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = x - \ln(e^x + 1) + c \ (c \in \mathbb{R}).$$

Câu 30. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2^x$ là:

A. $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{x} + 2^x \cdot \ln 2 + C$.

C. $F(x) = \ln x^2 + 2^x \cdot \ln 2 + C$.

D. $F(x) = \ln x^2 + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} + 2^x \right) dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int 2^x dx = -\frac{1}{x} + \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

$$\text{Vậy họ nguyên hàm của hàm số } f(x) = \frac{1}{x^2} + 2^x \text{ là } F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

Câu 31. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$.

B. $\int f(x) dx = \sqrt{2x+3} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}x\sqrt{2x+3} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int (\sqrt{2x+3}) dx.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2x+3} = t \Leftrightarrow t^2 = 2x+3 \Leftrightarrow 2tdt = 2dx.$$

$$I = \int t.t dt = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+3})^3 + C \Leftrightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$$

Câu 32. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3^{1-2x} \cdot 2^{3x}$ là

A. $F(x) = \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln \frac{8}{9}} + C$. **B.** $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{9}{8}\right)^x}{\ln \frac{8}{9}} + C$. **C.** $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln \frac{8}{9}} + C$. **D.** $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln \frac{9}{8}} + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = 3^{1-2x} \cdot 2^{3x} = \frac{3}{3^{2x}} \cdot 2^{3x} = \frac{3}{(3^2)^x} \cdot (2^3)^x = \frac{3}{9^x} \cdot 8^x = 3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x$.

Nên $\int f(x) dx = \int 3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x dx = 3 \cdot \int \left(\frac{8}{9}\right)^x dx = 3 \cdot \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln \frac{8}{9}} + C$.

Vậy $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln \frac{8}{9}} + C$.

Câu 33. Tìm họ nguyên hàm $F(x) = \int \frac{1}{(2x+1)^3} dx$

A. $F(x) = \frac{-1}{6(2x+1)^2} + C$.

B. $F(x) = \frac{-1}{6(2x+1)^3} + C$.

C. $F(x) = \frac{-1}{4(2x+1)^2} + C$.

D. $F(x) = \frac{-1}{6(2x+1)^2} + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x) = \int \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \int (2x+1)^{-3} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{-3} d(2x+1)$.

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{-2}}{(-2)} + C = \frac{-1}{4(2x+1)^2} + C$$

b Dạng 03: PP đổi biến số $t \equiv u(x)$ hàm xác định (ngắn gọn là vi phân)

Câu 34. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ là

- A.** $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$. **B.** $\ln^2 x + C$. **C.** $\ln(\ln x) + C$. **D.** $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } I = \int f(x) dx = \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Khi đó } I = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

Câu 35. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ là

- A.** $\int f(x) dx = \sqrt[3]{3x+1} + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x+1} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C$. **D.** $\int f(x) dx = (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{\frac{1}{3}} d(3x+1) = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

Câu 36. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^3 + 3x^2)e^x$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.

- A.** $F(1) = 4e$. **B.** $F(1) = e + 1$. **C.** $F(1) = e$. **D.** $F(1) = e - 1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta tìm nguyên hàm từng phần bằng sơ đồ đường chéo như sau

Lấy đạo hàm	Dấu	Lấy nguyên hàm
$x^3 + 3x^2$	+	e^x
$3x^2 + 6x$	-	e^x
$6x + 6$	+	e^x
6	-	e^x
0		e^x

Suy ra $F(x) = (x^3 + 3x^2)e^x - (3x^2 + 6x)e^x + (6x + 6)e^x - 6e^x + C = x^3 e^x + C$.

Ta có $F(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = x^3 e^x + 1 \Rightarrow F(1) = e + 1$.

Cách 2.

Ta có $f(x) = (x^3 + 3x^2)e^x = (x^3)' e^x + x^3 (e^x)' = (x^3 \cdot e^x)'$.

Mà $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F(x) = x^3 e^x + C$.

Ta có $F(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = x^3 e^x + 1 \Rightarrow F(1) = e + 1$.

Câu 37. Giả sử $\int x(1-x)^{2017} dx = \frac{(1-x)^a}{a} - \frac{(1-x)^b}{b} + C$ với a, b là các số nguyên dương. Hiệu $2a - b$ bằng

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2017.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\begin{aligned} \int x(1-x)^{2017} dx &= \int [1 + (x-1)](1-x)^{2017} dx = \int [(1-x)^{2017} - (1-x)^{2018}] dx \\ &= -\frac{(1-x)^{2018}}{2018} + \frac{(1-x)^{2019}}{2019} + C. \end{aligned}$$

Vậy $a = 2019, b = 2018 \Rightarrow 2a - b = 2020$.

Câu 38. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sin^4 x \cdot \cos x$. $F(x)$ là hàm số nào sau đây

A. $F(x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

B. $F(x) = \frac{\cos^4 x}{4} + C$.

C. $F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

D. $F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} + C$.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Nên $F(x) = \int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$

Câu 39. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ được kết quả là

A. $\frac{2}{\sqrt{1-x}} + C$.

B. $C\sqrt{1-x}$.

C. $\frac{C}{\sqrt{1-x}}$.

D. $-2\sqrt{1-x} + C$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. (PP đổi biến số) Đặt $u = \sqrt{1-x}$ $\Rightarrow u^2 = 1-x$ $\Rightarrow dx = -2udu$.

Khi đó $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2udu}{u} = -2 \int du = -2u + C = -2\sqrt{1-x} + C$.

Cách 2. Áp dụng công thức $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C$ ta được

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x}}{-1} + C = -2\sqrt{1-x} + C.$$

Câu 40. Tính $\int 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx$, kết quả sai là

A. $2^{\sqrt{x}} + C$.

B. $2^{\sqrt{x}+1} + C$.

C. $2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$.

D. $2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx = 2 \int d(2^{\sqrt{x}}) = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + C = 2^{\sqrt{x}+1} + C$.

Câu 41. $\int (x-1)e^{x^2-2x+3} dx$ bằng

A. $\left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{x^2-2x+3} + C$.

B. $(x-1)e^{\frac{1}{3}x^3-x^2+3x} + C$.

C. $\frac{1}{2}e^{x^2-2x} + C.$

D. $\frac{1}{2}e^{x^2-2x+3} + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $I = \int (x-1)e^{x^2-2x+3} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2-2x+3} d(x^2-2x+3) = \frac{1}{2}e^{x^2-2x+3} + C.$

Câu 42. Tính $I = \int \frac{1}{x \cdot \ln^5 x} dx.$

A. $\frac{1}{4\ln^4 x} + C.$

B. $-\frac{1}{4\ln^4 x} + C.$

C. $-\frac{\ln^4 x}{4} + C.$

D. $-\frac{4}{\ln^4 x} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$I = \int \frac{1}{x \cdot \ln^5 x} dx$$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$

$$I = \int \frac{1}{x \cdot \ln^5 x} dx = \int \frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{4\ln^4 x} + C.$$

b Dạng 04: PP đổi biến số $x = u(t)$ hàm xác định

Câu 43. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ thỏa mãn $F(2) = 4$. Giá trị $F(-1)$ bằng

A. $\sqrt{3}.$

B. 1.

C. $2\sqrt{3}.$

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx = 2\sqrt{x+2} + C$$

Mà $F(2) = 4 \Rightarrow C = 0$

Vậy $F(-1) = 2.$

Câu 44. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 4$. Tìm $F(x)$.

- A.** $2\ln(x-1)+2$. **B.** $\ln(x-1)+3$. **C.** $4\ln(x-1)$. **D.** $\ln(x-1)-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x) = \int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C = \ln(x-1) + C$, (vì $x \in (1; +\infty)$).

Mà $F(e+1) = 4 \Rightarrow \ln(e+1-1) + C = 4 \Rightarrow C = 3$.

Vậy $F(x) = \ln(x-1) + 3$.

Câu 45. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0) = \frac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

- A.** $2e+100$. **B.** $\frac{1}{2}e+50$. **C.** $\frac{1}{2}e+100$. **D.** $\frac{1}{2}e+200$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$.

Theo đề ra ta được: $F(0) = \frac{201}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^0 + C = \frac{201}{2} \Leftrightarrow C = 100$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 100 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{2 \cdot \frac{1}{2}} + 100 = \frac{1}{2}e + 100$.

Câu 46. Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$ và $f(1) = e - 3$.

- A.** $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + \frac{17}{4}$. **B.** $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}$.
C. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x + \cos(\pi x) - \frac{9}{4}$. **D.** $f(x) = x^4 + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int (x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)) dx = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + C.$

Do $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$ nên $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + C_0$ với $C_0 \in \mathbb{R}.$

Lại có $f(1) = e - 3$ nên $\frac{1^4}{4} + e^1 - \cos(\pi) + C_0 = e - 3 \Leftrightarrow C_0 = -\frac{17}{4}.$

Vậy $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}.$

Câu 47. (Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa lần 2 -2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2.$

B. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2.$

C. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15.$

D. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = 3 - 5\sin x \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int (3 - 5\sin x) dx = 3x + 5\cos x + c.$

Mà $f(x) = 10 \Rightarrow 5 + c = 10 \Rightarrow c = 5$

Vậy $f(x) = 3x + 5\cos x + 5.$

Câu 48. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C.$

Mặt khác $F(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$

Vậy $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Câu 49. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(4)$.

- A.** $\ln 3 + 1$. **B.** $\ln 2 + 1$. **C.** 2 . **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_2^4 f(x) dx = F(4) - F(2) \Rightarrow F(4) = \int_2^4 f(x) dx + F(2) = \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx + 1 = \ln|x-1| \Big|_2^4 + 1 = \ln 3 + 1.$$

Câu 50. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$.

Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^{2x} + \frac{x^2}{2} + 1$. **B.** $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^2}{2} - 1$.

C. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^2}{2} + 1$. **D.** $F(x) = e^{2x} + x + 1$.

Chọn C

Lời giải

$$\text{Ta có } \int (e^{2x} + x) dx = \int e^{2x} dx + \int x dx = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^0 + 0 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = 1. \text{ Vậy } F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^2}{2} + 1.$$

b Dạng 05: PP nguyên hàm từng phần

Câu 51. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính $T = 2^{F(e)} + \log_4 3 \cdot \log_3 [F(e)]$.

A. $T = \frac{9}{2}$. **B.** $T = 17$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 8$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } F(x) = \int \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$F(x) = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

$$\text{Theo đề } F(1) = 1.0 - 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 4 \Rightarrow F(x) = x \ln x - x + 4$$

$$F(e) = 4 \Rightarrow T = 2^4 + \log_4 3 \cdot \log_3 4 = 17.$$

Câu 52. Hàm số $f(x) = (x-1)e^x$ có một nguyên hàm $F(x)$ là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này bằng 1 khi $x = 0$?

A. $F(x) = (x-1)e^x + 1.$

B. $F(x) = (x-2)e^x.$

C. $F(x) = (x-2)e^x + 3.$

D. $F(x) = (x-1)e^x.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } F(x) = \int f(x) dx = \int (x-1)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow F(x) = \int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C.$$

$$\text{Theo giả thiết: } F(0) = 1 \Leftrightarrow (0-1)e^0 - e^0 + C = 1 \Leftrightarrow -1-1+C = 1 \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\Rightarrow F(x) = (x-1)e^x - e^x + 3 = (x-2)e^x + 3.$$

Câu 53. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \sin(x^3)$ là

A. $\frac{1}{3} \sin(x^3).$

B. $\frac{1}{3} \cos(x^3).$

C. $3 \cos(x^3).$

D. $-\frac{1}{3} \cos(x^3).$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta tính } I = \int f(x) dx = \int x^2 \sin(x^3) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{3} dt = x^2 dx.$$

$$I = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C.$$

Câu 54. Một nguyên hàm $\int (x-2) \sin 3x dx = -\frac{(x-a) \cos 3x}{b} + \frac{1}{c} \sin 3x + 2017$ thì tổng $S = a.b + c$ bằng

A. $S = 10.$

B. $S = 14.$

C. $S = 15.$

D. $S = 3.$

Lời giải

Chọn C

$$I = \int (x-2) \sin 3x dx$$

$$\text{Đặt } u = x-2 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin 3x dx; \text{ chọn } v = \frac{-\cos 3x}{3}.$$

$$\text{Ta có } I = -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \int \frac{-\cos 3x}{3} dx = -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} - \frac{1}{9} \sin 3x + C.$$

$$\text{Từ đó suy ra } a=2, b=3, c=9.$$

$$\text{Vậy } S = a.b + c = 15.$$

Câu 55. Cho hàm số $y = e^x \sin x$. Họ nguyên hàm của hàm số trên là

A. $\frac{1}{2} e^x \cos x - \frac{1}{2} e^x \sin x + C.$

B. $-\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C.$

C. $\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C.$

D. $-\frac{1}{2} e^x \cos x - \frac{1}{2} e^x \sin x + C.$

Lời giải

Chọn B

Phương pháp: Áp dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

$$\text{Đặt } I = \int e^x \sin x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = e^x \\ dv_1 = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = e^x dx \\ v_1 = \sin x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1 - I.$$

$$\Rightarrow 2I = -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1 \Rightarrow I = -\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C \text{ (với } C = \frac{1}{2} C_1 \text{)}.$$

Câu 56. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ là:

A. $I = x - \ln x + C.$

B. $I = e^x + \ln(e^x + 1) + C.$

C. $I = x + \ln x + C$.

D. $I = e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow e^x = t - 1$ và suy ra $dt = e^x dx$

Ta có nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ là:

$$I = F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} \cdot e^x dx = \int \frac{t-1}{t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = t - \ln|t| + C$$

Vậy nguyên hàm của hàm số cần tìm là: $I = e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C$.

Câu 57. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^5 - xe^x$ là

A. $\frac{1}{6}x^6 - (x-1)e^x + C$.

B. $\frac{1}{6}x^6 - xe^x + C$.

C. $5x^4 - (x+1)e^x + C$.

D. $\frac{1}{6}x^6 - (x+1)e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int (x^5 - xe^x) dx = \int x^5 dx - \int xe^x dx$.

$$+) \int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C_1.$$

$$+) \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra. } \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_2 = (x-1)e^x + C_2.$$

$$\text{Vậy: } \int (x^5 - xe^x) dx = \frac{1}{6}x^6 - (x-1)e^x + C.$$

Câu 58. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+\ln x}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $-\frac{1}{x+1}(x + \ln x) + \ln x + C$.

B. $\frac{1}{x+1}(x + \ln x) + \ln x + C$.

C. $-\frac{1}{x+1}(x + \ln x) - \ln x + C$.

D. $\frac{1}{x+1}(x + \ln x) - \ln x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$$

$$\text{Vì vậy } \int f(x) dx = -\frac{1}{x+1} (x + \ln x) + \int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x+1} (x + \ln x) + \ln x + C.$$

b Dạng 06: Nguyên hàm của hs phân thức hữu tỷ

Câu 59. $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$ bằng

A. $\ln|x+1| + C.$

B. $\ln|x+1| + \ln|x+2| + C.$

C. $\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C.$

D. $\ln|x+1| + C.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C.$$

Câu 60. $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$ bằng

A. $\ln|x+1| + \ln|x+2| + C.$

B. $\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C.$

C. $\ln|x+1| + C.$

D. $\ln|x+1| + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C.$$

Câu 61. Để tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$. Một học sinh trình bày như sau:

$$(I) f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 5} = \frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1} \right)$$

(II) Một nguyên hàm của các hàm số $\frac{1}{x-5}$, $\frac{1}{x-1}$ theo thứ tự là $\ln|x-5|$, $\ln|x-1|$

(III) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $\frac{1}{4}(\ln|x-5| - \ln|x-1| + C) = \frac{1}{4} \left| \frac{x-1}{x-5} \right| + C$.

Nếu sai, thì sai ở phần nào?

A. (I), (II).

B. (II), (III).

C. (III).

D. (I).

Lời giải

Chọn C

Sai ở bước (III) vì họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4}(\ln|x-5| - \ln|x-1| + C_1) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C.$$

Câu 62. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$ là

A. $x + 3\ln(1-x) + C$.

B. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

C. $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

D. $x + 3\ln(x-1) + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{x+2}{x-1} dx = \int \frac{x-1+3}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x-1} \right) dx = x + 3 \ln|x-1| + C = x + 3 \ln(1-x) + C$$

(Do $x \in (-\infty; 1)$ nên $x-1 < 0$ suy ra $|x-1| = 1-x$).

Câu 63. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$.

A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$.

B. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C$.

C. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + C$.

D. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int \frac{1}{x(x-3)} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{3} (\ln|x-3| - \ln|x|) + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C.$$

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a + b$ bằng

- A.** 5. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$ (1).

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, các điểm $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ đều thuộc $(0; +\infty)$ nên

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(ax^2 + \frac{b}{x^3} \right) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{2x^2} + C.$$

$$+ f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \quad (2).$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \\ \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ C = \frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Câu 65. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| + C$.
C. $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\int \frac{1}{x(x+2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x+2-x}{x(x+2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+2| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$$

b Dạng 07: Nguyên hàm kết hợp đổi biến và từng phần hàm xđ

Câu 66. Nguyên hàm $I = \int \left(\frac{x^2-2}{x} \right) \ln x dx$ bằng

A. $I = 2\ln^2 x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

B. $I = -\ln^2 x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

C. $I = \ln^2 x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

D. $I = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int \left(\frac{x^2-2}{x} \right) \ln x dx = \int x \ln x dx - 2 \int \frac{\ln x}{x} dx.$

+) $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C_1.$

+) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_2.$

Vậy $I = -\ln^2 x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

Câu 67. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)e^x$ là

A. $(2x-1)e^x + C.$

B. $(2x+3)e^x + C.$

C. $2xe^x + C.$

D. $(2x-2)e^x + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int (2x+1)e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx = (2x+1)e^x - 2e^x + C = (2x-1)e^x + C$$

.

Câu 68. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Khi đó $\int f'(x)e^{2x} dx$ bằng

- A.** $-x^2 + x + C$. **B.** $2x^2 - 2x + C$. **C.** $-2x^2 + 2x + C$. **D.** $-x^2 + 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$

Ta có $(x^2)' = f(x)e^{2x} \Leftrightarrow 2x = f(x)e^{2x}$.

$$\begin{aligned} \int f'(x)e^{2x} dx &= e^{2x} f(x) - \int 2e^{2x} f(x) dx \\ &= 2x - 2x^2 + C. \end{aligned}$$

Câu 69. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

- A.** $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$. **B.** $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int f(x) dx = \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2t dt = dx.$$

$$\Rightarrow I = 2 \int t^2 \ln t^2 dt = 4 \int t^2 \ln t dt.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = t^2 dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = \frac{t^3}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt \right) = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{9} t^3 + C \right) = \frac{2}{9} t^3 (3 \ln t - 1) + C$$

$$= \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln \sqrt{x} - 1) + C$$

$$= \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$$

Câu 70. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(e^x - 1)$ là

A. $2e^x(x-1) - 4x^2.$

B. $2e^x(x-1) - x^2.$

C. $2e^x(x-1) - 4x^2 + C.$

D. $2e^x(x-1) - x^2 + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int 2x(e^x - 1)dx = \int 2xe^x dx - \int 2x dx.$

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}.$

Suy ra $\int 2xe^x dx - \int 2x dx = 2xe^x - 2 \int e^x dx - x^2 = 2xe^x - 2e^x - x^2 + C = 2e^x(x-1) - x^2 + C.$

Câu 71. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(\sin x + 1)$ là

A. $x^2 + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$

B. $x^2 - 2x \cos x + 2 \sin x + C.$

C. $x^2(x - \cos x) + C.$

D. $x^2 - 2x \cos x - 2 \sin x + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)dx = \int 2x(\sin x + 1)dx = \int 2x dx + \int 2x \sin x dx = x^2 + I.$

Với $I = \int 2x \sin x dx.$

Đặt $u = 2x; dv = \sin x dx.$ Suy ra $du = 2dx,$ chọn $v = -\cos x.$

$I = \int 2x \sin x dx = -2x \cos x + 2 \int \cos x dx = -2x \cos x + 2 \sin x + C.$

Do đó $\int f(x)dx = x^2 - 2x \cos x + 2 \sin x + C.$

b Dạng 08: Nguyên hàm liên quan đến hàm ẩn

Câu 72. Cho $\int f(x)dx = F(x) + C,$ khi đó $\int f(2x + 1)dx$ là

A. $F(2x + 1) + C.$

B. $\frac{1}{2}F(2x + 1) + C.$

C. $2F(2x+1) + C$.

D. $\frac{1}{2}F(x) + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int f(2x+1)dx = \int f(2x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot d(2x+1) = \frac{1}{2} \int f(2x+1)d(2x+1) = \frac{1}{2}F(2x+1) + C.$$

Câu 73. Cho $F(x) = \frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

B. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{x^3} + C$.

C. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3}\right) + C$.

D. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ suy ra $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{3x^3}\right)' = -\frac{1}{x^4}$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có

$$\int f'(x)\ln x dx = f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = -\frac{1}{x^3}(x\ln x) - \frac{1}{3x^3} + C = -\left(\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3}\right) + C$$

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^x$ là

A. $\sin 2x - \sin^2 x + C$.

B. $2\sin x - \sin^2 x + C$.

C. $\sin 2x + \sin^2 x + C$.

D. $2\cos x - \cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$ suy ra $f(x).e^x = (\sin^2 x)' = \sin 2x$.

Xét $I = \int f'(x).e^x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó ta có } I = \int f'(x).e^x dx = f(x).e^x - \int f(x).e^x dx = \sin 2x - \sin^2 x + C.$$

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $x.f(x)$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ là

A. $\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + C.$ **B.** $\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$ **C.** $\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x} + C.$ **D.** $\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$ nên ta có

$$(\ln x)' = xf(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = xf(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Tính } I = \int f'(x)\ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x).\ln x dx = f(x).\ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{\ln x}{x^2} - \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Câu 76. $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C.$ **B.** $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + x + C.$
C. $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C.$ **D.** $\int f'(x)e^{2x} dx = 2x^2 - 2x + C.$

Lời giải

Chọn A

$F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ suy ra $f(x)e^{2x} = 2x.$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2.e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}. \text{ Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có}$$

$$\int f'(x)e^{2x}dx = f(x)e^{2x} - 2\int f(x)e^{2x}dx = 2x - 2\int f(x)e^{2x}dx = -2x^2 + 2x + C.$$

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x + x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cos x$ là

A. $\sin x + x\cos x + C.$

B. $\sin x - x\cos x + C.$

C. $x\sin x + x\cos x + C.$

D. $x\sin x + \cos x + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x + x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$ nên ta có

$$\left(\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x + x\sin x\right)' = f(x)\sin x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}\sin x = f(x)\sin x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Tính $I = \int f'(x)\cos x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } I &= \int f'(x)\cos x dx = f(x)\cos x + \int f(x)\sin x dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x + x\sin x + C \\ &= \cos x + x\sin x + C. \end{aligned}$$

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x) = \frac{x^4}{16}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ là

A. $\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$

B. $\frac{x^4}{4}\ln x + \frac{x^4}{16} + C.$

C. $\frac{x^4}{4}\ln x + \frac{x^4}{4} + C.$

D. $-\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x) = \frac{x^4}{16}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên ta có

$$\left(\frac{x^4}{16}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{x^3}{4} = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4}.$$

Tính $I = \int f'(x) \ln x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) x^2 \ln x dx = f(x) \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

A. $3\cos 3x - \sin 3x + C$.

B. $-3\cos 3x - \sin 3x + C$.

C. $-3\cos 3x + \sin 3x + C$.

D. $3\cos 3x + \sin 3x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$ nên ta có

$$(\sin 3x)' = f(x).e^x \Leftrightarrow 3\cos 3x = f(x).e^x.$$

Tính $I = \int f'(x).e^x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x).e^x dx = f(x).e^x - \int f(x).e^x dx = 3\cos 3x - \sin 3x + C.$$

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x^3}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$ là

- A. $x^2 \ln x - x + C$. B. $-x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$. **C.** $x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$. D. $x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x^3}$ nên ta có

$$(\ln x)' = \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^3} \Leftrightarrow f(x) = x^2.$$

Tính $I = \int f'(x) \ln x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f'(x) \ln x dx = f(x) \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = x^2 \ln x - \int x dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C.$$

b Dạng 09: Nguyên hàm của hs cho bởi nhiều công thức

Câu 81 Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

- A. $F(x) = x^2 + e^x + 2017$. **B.** $F(x) = x^2 + e^x + 2018$.
C. $F(x) = e^x - 2019$. D. $F(x) = x^2 + e^x - 2018$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = x^2 + e^x + C$.

Mà $F(0) = 2019 \Leftrightarrow 1 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018$.

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2018$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

A. $F(x) = x^2 + e^x - 2018.$

B. $F(x) = x^2 + e^x + 2017.$

C. $F(x) = x^2 + e^x + 2018.$

D. $F(x) = e^x - 2019.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x) = x^2 + e^x + C.$

Mà $F(0) = 2019 \Leftrightarrow 1 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018.$

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2018.$

Câu 83. Biết $\int f(2x)dx = \sin^2 x + \ln x + C.$ Tìm nguyên hàm $\int f(x)dx?$

A. $\int f(x)dx = 2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\ln x + C.$

B. $\int f(x)dx = 2\sin^2 x + 2\ln x + C.$

C. $\int f(x)dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C.$

D. $\int f(x)dx = 2\sin^2 2x + 2\ln x + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(2x)dx = \sin^2 x + \ln x + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int f(2x)d(2x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \ln(2x) - \ln 2 + C$

$\Leftrightarrow \int f(2x)d(2x) = 1 - \cos 2x + 2\ln(2x) - 2\ln 2 + 2C$

$\Leftrightarrow \int f(x)dx = 1 - \cos x + 2\ln x - 2\ln 2 + 2C \Leftrightarrow \int f(x)dx = 2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\ln x + C'.$

b Dạng 10: Tìm nguyên hàm thỏa mãn ĐK cho trước

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 3\sin x$ và $f(0) = 10.$ Hãy chọn khẳng định đúng

A. $f(x) = 2x - 3\cos x + 11.$

B. $f(x) = 2x + 3\sin x + 7.$

C. $f(x) = 2x - 3\sin x + 11.$

D. $f(x) = 2x + 3\cos x + 7.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 3\sin x) dx = 2x + 3\cos x + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 10 \Leftrightarrow 3 + C = 10 \Leftrightarrow C = 7$.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = 2x + 3\cos x + 7$.

Câu 85. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x - 3\cos x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

A. $F(x) = x^2 - 3\sin x - \frac{\pi^2}{4}$.

B. $F(x) = x^2 - 3\sin x + \frac{\pi^2}{4}$.

C. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$.

D. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 + \frac{\pi^2}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (2x - 3\cos x) dx = x^2 - 3\sin x + C \Rightarrow F(x) = x^2 - 3\sin x + C$.

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} - 3 + C = 3 \Leftrightarrow C = 6 - \frac{\pi^2}{4}$$

Vậy $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$.

Câu 86. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = e^{-x}$. Biết $F(0) = 1$. Tính giá trị của $F(-\ln 2)$.

A. 0.

B. -2.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$. Do $F(0) = 1$ nên $-e^{-0} + C = 1 \Leftrightarrow -1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

Do đó $F(x) = -e^{-x} + 2$.

Vậy $F(-\ln 2) = -e^{\ln 2} + 2 = 0$.

Câu 87. Cho hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 6x$. Biết $F(3) = 27$. Tính $F(-3)$.

A. $F(-3) = -9$.

B. $F(-3) = 9$.

C. $F(-3) = 0$.

D. $F(-3) = 18$.

Lời giải

Chọn B

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 + 6x) dx = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + C \text{ (với } C \text{ là hằng số)}.$$

$$F(3) = \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 + C = 36 + C. \text{ Mà } F(3) = 27 \text{ nên ta có } 36 + C = 27 \Leftrightarrow C = -9.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 9.$$

$$\text{Vậy } F(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + 3 \cdot (-3)^2 - 9 = 9.$$

Câu 88. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, biết $F(0) = 1$. Giá trị của $F(-2)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(1 + \ln 3).$

B. $1 + \frac{1}{2} \ln 3.$

C. $1 + \frac{1}{2} \ln 5.$

D. $1 + \ln 3.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C.$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 1 \Rightarrow F(-2) = 1 + \frac{1}{2} \ln 3.$$

Câu 89. Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$ và $f(4) = 0$.

A. $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{88}{3}.$

B. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{2} + 1.$

C. $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}.$

D. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int (4\sqrt{x} - x) dx = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$f(4) = 0 \Leftrightarrow \frac{8 \cdot 4 \sqrt{4}}{3} - \frac{4^2}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{40}{3}.$$

Vậy $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}$.

Câu 90. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2$.

C. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}$.

D. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f'(x)dx = \int (x + \sin x)dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + c$.

Vì $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$ nên $f(x)$ có dạng: $\int f'(x)dx$.

nên $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + c$

Ta lại có $f(0) = 1 \Leftrightarrow -1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 2$.

Vậy $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

Câu 91. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $\frac{15}{e} - 4$.

B. $\frac{10}{e}$.

C. $6 - \frac{15}{e}$.

D. $4 - \frac{10}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I = \int f(x)dx = \int e^{\sqrt[3]{x}}dx$.

Đặt $\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2dt$ khi đó $I = \int e^{\sqrt[3]{x}}dx = 3 \int e^t t^2 dt$.

Đặt $\begin{cases} t^2 = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = du \\ e^t = v \end{cases} \Rightarrow I = 3(e^t t^2 - 2 \int e^t t dt) = 3e^t t^2 - 6 \int e^t t dt$.

Tính $\int e^t t dt$.

Đặt $\begin{cases} t = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = du \\ e^t = v \end{cases} \Rightarrow \int e^t t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t$.

Vậy $\Rightarrow I = 3e^t t^2 - 6(e^t t - e^t) + C \Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2} - 6(e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}) + C$.

Theo giả thiết ta có $F(0) = 2 \Rightarrow C = -4 \Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2} - 6(e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}) - 4 \Rightarrow F(-1) = \frac{15}{e} - 4$.

b Dạng 11: Dạng toán khác liên quan nguyên hàm(cực trị, đơn điệu,so sánh,min-max ...)

Câu 92. Hàm số $F(x) = (ax+b)\sqrt{4x+1}$ (a, b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{12x}{\sqrt{4x+1}}$.

Tính $a+b$.

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F'(x) = a\sqrt{4x+1} + (ax+b) \cdot \frac{2x}{\sqrt{4x+1}} = \frac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}.$$

$$\text{Để } F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) \text{ thì } \frac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}} = \frac{12x}{\sqrt{4x+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=12 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Do đó $a+b=1$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x) = x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $\mathbb{R}$, có một nguyên hàm là hàm số $F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)e^{3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu $F'(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		-	0	-	0	+	

Dựa vào bảng trên, ta thấy hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 94. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2019^x(4-x^2)(x^2-3x+2)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2019^x(4-x^2)(x^2-3x+2)$

$$\Rightarrow F'(x) = 2019^x(4-x^2)(x^2-3x+2) = 2019^x(x-2)^2(x+2)(1-x)$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do $x = -2$, $x = 1$ là nghiệm bội 1, còn $x = 2$ là nghiệm bội 2 nên hàm số $F(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 95. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3-4x)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F'(x) = f(x) = e^{x^2}.x(x-2)(x+2)$.

$F'(x)$ đổi dấu qua các điểm $x = 0$; $x = \pm 2$ nên hàm số $F(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 2x+1$ và $f(1) = 5$. Phương trình $f(x) = 5$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính tổng $S = \log_2|x_1| + \log_2|x_2|$.

- A.** $S = 0$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x+1)dx = x^2 + x + C$.

Mà $f(1) = 5 \Leftrightarrow 1+1+C = 5 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 + x + 3$.

Xét phương trình: $f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

$$S = \log_2|x_1| + \log_2|x_2| = \log_2|1| + \log_2|-2| = 1.$$

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 2x+1$ và $f(1) = 5$. Phương trình $f(x) = 5$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính tổng $S = \log_2|x_1| + \log_2|x_2|$.

- A.** $S = 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x+1)dx = x^2 + x + C$.

Mà $f(1) = 5 \Leftrightarrow 1+1+C = 5 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 + x + 3$.

Xét phương trình: $f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

$S = \log_2 |x_1| + \log_2 |x_2| = \log_2 |1| + \log_2 |-2| = 1$.

Câu 98. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x + 2$ thỏa mãn $F(-1) = -\frac{3}{2}$. Khi đó số nghiệm nguyên của phương trình $F(x) = 2x + 1$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int (4x^3 - 3x + 2)dx = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Mà $F(-1) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{2} - 2 + C = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$.

Khi đó $F(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 \left(x^2 - \frac{3}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$.

b Dạng 12: Bài toán liên quan đến tham số (cả 2 vế)

Câu 99. Biết $\int (ax + b)e^x dx = (5 - 2x)e^x + C$, với a, b là các số thực. Tìm $S = a + b$.

A. $S = 1$.

B. $S = 9$.

C. $S = 5$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = ax + b \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = a dx \\ v = e^x \end{cases}$, ta có

$$\int (ax + b)e^x dx = (ax + b)e^x - \int a.e^x dx = (ax + b)e^x - a.e^x + C = (ax + b - a)e^x + C.$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = -2 \\ b - a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}.$

Vậy $S = a + b = -2 + 3 = 1.$

Câu 100. Cho hàm số $f(x) = x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số cực trị của hàm số

$F(x)$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = x^2(x-1)e^{3x} \Rightarrow F'(x) = x^2(x-1)e^{3x}$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)e^{3x} = 0, \text{ vì } e^{3x} > 0 (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		-	0	-	0	+	

Vậy hàm số $F(x)$ có một cực trị.

MỨC ĐỘ 3: VẬN DỤNG

Dạng 02: Nguyên hàm của hs cơ bản, gần cơ bản

Câu 101. Hàm số $F(x)$ nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x).g(x)$, biết $F(1) = 3, \int f(x)dx = x + C_1$

và $\int g(x)dx = x^2 + C_2.$

A. $F(x) = x^2 + 1.$

B. $F(x) = x^2 + 3.$

C. $F(x) = x^2 + 2.$

D. $F(x) = x^2 + 4.$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có: $f(x) = 1$ và $g(x) = 2x$ nên $f(x).g(x) = 2x.$

$F(x) = \int 2x dx = x^2 + C$. Vì $F(1) = 3 \Rightarrow C = 2$. Vậy một nguyên hàm $F(x)$ cần tìm của hàm số $f(x).g(x)$, là $F(x) = x^2 + 2$.

Câu 102. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$. **C.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} dx = 2 \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= 2 \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C \end{aligned}$$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$ với mọi $x \in (0; \pi)$.

Xét hàm số $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$ xác định và liên tục trên $(0; \pi)$.

$$F'(x) = f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$$

$$\text{Xét } F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Trên khoảng $(0; \pi)$, phương trình $F'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \frac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$F'(x)$		$+$	$-$
$F(x)$		$-\sqrt{3} + C$	

$$\max_{(0;\pi)} F(x) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + C$$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}$.

$$\text{Do đó, } F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}.$$

Khi đó, $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$. Vậy ta chọn A.

Câu 103. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x \cdot \cos 2x$ là

A. $\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x + C$. **B.** $-\cos 3x + \cos x + C$.

C. $\frac{1}{3} \cos 3x - \cos x + C$. **D.** $-\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x + C$.

Lời giải:

Chọn D

$$\text{Ta có } 2 \sin x \cdot \cos 2x = \sin 3x + \sin(-x) = \sin 3x - \sin x \Rightarrow \int (\sin 3x - \sin x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x + C.$$

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

A. $S = 1$.

B. $S = \ln 2$.

C. $S = \ln 4035$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(|x-1|) + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } f(0) = 2017, f(2) = 2018 \text{ nên } \begin{cases} f(x) = \ln(|x-1|) + 2017 & \text{khi } x < 1 \\ f(x) = \ln(|x-1|) + 2018 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } S = f(3) - f(-1) = \ln 2 + 2018 - \ln 2 - 2017 = 1.$$

Câu 105. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$.

B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.

C. $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$. **D.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

h Dạng 03: PP đổi biến số $t \equiv u(x)$ hàm xác định (ngắn gọn là vi phân)

Câu 106. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

B. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$

C. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

D. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = 2 \int \frac{dx}{x+1} - 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} = 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$$

Vì $x \in (-1; +\infty)$ nên $\int f(x) dx = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$

Câu 107. Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\frac{241}{252}.$

B. $\frac{52}{9}.$

C. $\frac{7}{9}.$

D. $\frac{23}{252}.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 3x - 2 \Rightarrow x = \frac{t+2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} dt = dx.$

Ta có: $\frac{2}{3} \int \frac{t+2}{3} \cdot t^6 dt = \frac{2}{9} \int (t^7 + 2t^6) dt = \frac{2}{9} \cdot \frac{t^8}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{36} \cdot (3x-2)^8 + \frac{4}{63} \cdot (3x-2)^7 + C.$

Suy ra $A = \frac{1}{36}, B = \frac{4}{63}, 12 \cdot \frac{1}{36} + 7 \cdot \frac{4}{63} = \frac{7}{9}.$

Câu 108. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$. Họ các nguyên hàm của hàm số $\sin x \cdot f(\cos x)$ là

A. $F(\cos x).$

B. $F(\sin x) + C.$

C. $F(\cos x) + C.$

D. $-F(\cos x) + C.$

Lời giải

Chọn D

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) \Rightarrow \int f(x) dx = F(x) + C$.

Đặt $I = \int \sin x \cdot f(\cos x) dx$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$\Rightarrow I = \int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t)(-dt) = -\int f(t) dt = -F(t) + C = -F(\cos x) + C.$$

Câu 109. (CHUYÊN ĐỀ VINH LẦN 1 2019) Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x \cot x + \ln(\sin x) + C$.

B. $x \cot x - \ln|\sin x| + C$.

C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C$.

D. $-x \cot x - \ln(\sin x) + C$.

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cdot \cot x + \int \cot x dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$= -x \cdot \cot x + \ln|\sin x| + C.$$

$$\text{Với } x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \ln|\sin x| = \ln(\sin x).$$

$$\text{Vậy } F(x) = -x \cot x + \ln(\sin x) + C.$$

Câu 110. Tính $A = \int \sin^2 x \cos^3 x dx$ ta có

A. $A = \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

B. $A = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

C. $A = \sin^3 x - \sin^5 x + C$.

D. $A = -\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó} \quad A &= \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx \\ &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cdot \cos x dx = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: Ta có } A &= \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x d(\cos x) \\ &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \quad (C \text{ là hằng số}). \end{aligned}$$

Dạng 04: PP đổi biến số $x \equiv u(t)$ hàm xác định

Câu 111. Đổi biến $x = 2 \sin t$, nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

A. $\int 2dt$. **B. $\int dt$.** C. $\int tdt$. D. $\int \frac{1}{t} dt$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2 \cos t dt}{\sqrt{4-(2 \sin t)^2}} \\ &= \int \frac{2 \cos t dt}{2 \cos t} = \int dt. \end{aligned}$$

Câu 112. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình

$F(x) = x$ có nghiệm là:

A. $x = 1$. B. $x = -1$. **C. $x = 1 - \sqrt{3}$.** D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (8-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(8-x^2) = -\sqrt{8-x^2} + C.$

Mặt khác: $F(2) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{8-2^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = 2.$

Nên $F(x) = -\sqrt{8-x^2} + 2.$

$F(x) = x \Leftrightarrow -\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{8-x^2} = 2-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 8-x^2 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ -2x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$

Câu 113. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4.$ **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$ **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x) = \int \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} dx = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$

Ta có: $F'(x) = f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}; F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ vì $x \in (0; \pi).$

Ta có: $F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4(\sqrt{3} - 1) > 0 \Rightarrow F'(x) > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right);$

$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0 \Rightarrow F'(x) < 0 \forall x \in \left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$

Do đó hàm số đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; \pi)$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ và

$\max_{x \in (0; \pi)} F(x) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}} + \cot \frac{\pi}{3} + C = \sqrt{3} \Rightarrow C = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$$

$$F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -4 + \sqrt{3}$$

Vậy A đúng.

h Dạng 05: PP nguyên hàm từng phần

Câu 114. Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$ thỏa mãn

$F\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ và $F(2020) = e^{2020}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $a \in \left(\frac{1}{2020}; 1\right)$. **B.** $a \in \left(0; \frac{1}{2020}\right]$. **C.** $a \in [1; 2020)$. **D.** $a \in [2020; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x \ln(ax) dx + \int \frac{e^x}{x} dx \quad (1)$$

• Tính $\int e^x \ln(ax) dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int e^x \ln(ax) dx = e^x \ln(ax) - \int \frac{e^x}{x} dx + C$$

• Thay vào (1), ta được $F(x) = e^x \ln(ax) + C$.

Ta có

$$\begin{cases} F\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \\ F(2020) = e^{2020} \end{cases} \hat{=} \begin{cases} e^{\frac{1}{a}} \ln 1 + C = 0 \\ e^{2020} \ln(a \cdot 2020) + C = e^{2020} \end{cases} \hat{=} \begin{cases} C = 0 \\ \ln(a \cdot 2020) = 1 \end{cases} \text{P} \quad a = \frac{e}{2020}.$$

Câu 115. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên từng khoảng của tập xác định. Biết $\tan 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot e^{2x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cdot e^{2x}$ là

- A.** $2 \tan^2 2x - 2 \tan 2x + 2$. **B.** $2 \tan^2 2x + 2 \tan 2x + C$.

C. $2\tan^2 2x - 2\tan 2x + C$.

D. $-2\tan^2 2x + 2\tan 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

Do $\tan 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot e^x$ nên ta có $f(x) \cdot e^{2x} = (\tan 2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$.

Tính $I = \int f'(x) \cdot e^{2x} dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Ta có $I = \int f'(x) \cdot e^{2x} dx = e^{2x} \cdot f(x) - 2 \int f(x) \cdot e^{2x} dx = \frac{2}{\cos^2 2x} - 2 \tan 2x + C_1$

$= 2(1 + \tan^2 2x) - 2 \tan 2x + C_1 = 2 \tan^2 2x - 2 \tan 2x + C$ với $C = C_1 + 2$.

Câu 116. Cho hai hàm số $F(x)$, $G(x)$ tách công thức MT xác định và có đạo hàm lần lượt là $F'(x)$, $G'(x)$ tách công thức MT trên $(1; +\infty)$. Biết rằng $F(x) \cdot G(x) = 2x^2 \ln(x-1)$ và $F(x) \cdot g'(x) = \frac{2x^2}{x-1}$. Họ nguyên hàm của $f(x) \cdot G(x)$ là

A. $2(x^2 - 1) \ln(x-1) - x^2 - 2x + C$.

B. $2(x^2 + 1) \ln(x-1) + x^2 - 2x + C$.

C. $2(x^2 - 1) \ln(x-1) - x^2 + 2x + C$.

D. $2(x^2 + 1) \ln(x-1) - x^2 - 2x + C$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Dùng kiến thức nguyên hàm

Ta có $\int f(x) \cdot G(x) dx = \int F'(x) \cdot G(x) dx = \int G(x) d(F(x))$.

Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Đặt $u = G(x)$, $dv = d(F(x)) \Rightarrow u' = G'(x)$, $v = F(x)$.

Khí đó: $\int G(x) d(F(x)) = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot G'(x) dx = 2x^2 \ln(x-1) - \int \frac{2x^2}{x-1} dx$.

Ta tính $I = \int \frac{2x^2}{x-1} dx = \int \left(2(x+1) + \frac{2}{x-1} \right) dx = x^2 + 2x + 2 \ln|x-1| + C$

$= x^2 + 2x + 2 \ln(x-1) + C, \forall x > 1$.

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } \int f(x).G(x)dx &= 2x^2 \ln(x-1) - (x^2 + 2x + 2\ln(x-1)) + C \\ &= 2(x^2 - 1)\ln(x-1) - x^2 - 2x + C.\end{aligned}$$

Cách 2. Dùng kiến thức tích phân + Máy tính cầm tay + Góc tiếp cận khác

Phân tích: họ nguyên hàm $f(x).G(x)$ đúng với mọi x công thức MT thuộc $(1; +\infty)$ nên sẽ đúng trên các đoạn là tập con trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } (F(x).G(x))' = F'(x).G(x) + F(x).G'(x) = f(x).G(x) + F(x).g(x).$$

$$\text{Suy ra } \int_2^3 (F(x).G(x))' dx = \int_2^3 (f(x).G(x) + F(x).g(x))dx$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 \ln(x-1)) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x^2}{x-1} dx - \int_2^3 f(x).G(x)dx = 0(1).$$

Thay lần lượt các hàm số (bỏ hằng số C) vào vị trí $f(x).G(x)$ trong công thức (1). Kiểm tra trên máy tính cầm tay. Phép thử nào cho kết quả bằng 0 thì đó là phương án đúng.

Nhận xét

- Với các bài toán tìm nguyên hàm có các biểu thức liên quan đến đạo hàm. Ta có thể khai thác theo các hướng dùng nguyên hàm từng phần (cách 1) hoặc xây dựng công thức đạo hàm kiểu $\int f'(x)dx = f(x) + C$ (Cách 2).
- Với dạng toán tìm nguyên hàm mà cho dạng công thức ở các đáp án. Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay tính thử tích phân với các cận thuộc tập xác định (cách 2).

Câu 117. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$ là

A. $\sin 2x - 2\cos^2 x + C$. **B.** $\sin 2x + 2\cos^2 x + C$.

C. $-\sin 2x + 2\cos^2 x + C$.

D. $-\sin 2x - 2\cos^2 x + C$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$ nên:

$$\Rightarrow f(x)e^{2x} = (\cos^2 x)' = -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x.$$

$$\text{Tính } I = \int f'(x)e^{2x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = f(x) \cdot e^{2x} - 2 \int f(x) e^{2x} dx = -\sin 2x - 2 \cos^2 x + C.$$

Câu 118. Biết $\int (2x \cos x - (x+2) \sin x + 2) e^{2x} dx = (ax \cos x + b \sin x + d) e^{2x} + C$ trong đó $a; b; d \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + d$.

A. $T = -1$.

B. $T = 1$.

C. $T = 2$.

D. $T = 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int (2x \cos x - (x+2) \sin x + 2) e^{2x} dx = \int (2x \cos x - 2 \sin x + 2) e^{2x} dx - \int x \sin x e^{2x} dx.$$

$$\text{Biến đổi: } I = \int (2x \cos x - 2 \sin x + 2) e^{2x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x \cos x - 2 \sin x + 2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = -2x \sin x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{Đ } I = (x \cos x - \sin x + 1) e^{2x} + \int x \sin x e^{2x} dx.$$

$$\text{Do đó } \int (2x \cos x - (x+2) \sin x + 2) e^{2x} dx = (x \cos x - \sin x + 1) e^{2x} + C.$$

$$\text{Suy ra } a = 1; b = -1; d = 1.$$

$$\text{Vậy } T = a + b + d = 1.$$

h Dạng 06: Nguyên hàm của hs phân thức hữu tỷ

Câu 119. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $3 \ln(x-1) + \frac{3}{x-1} + C$.

B. $3 \ln(x-1) - \frac{4}{x-1} + C$.

C. $3 \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + C$.

D. $3 \ln(x-1) + \frac{4}{x-1} + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x+1}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$$

Suy ra trên $(1; +\infty)$ thì $\int f(x) dx = \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{4}{(x-1)^2} dx = 3\ln(x-1) - \frac{4}{x-1} + C$.

Câu 120. Nếu $F(x) = \int \frac{1-x^{2019}}{x+x^{2020}} dx = A\ln|x| + B\ln|1+x^{2019}| + C$, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ và $A, B, C \in \mathbb{R}$, thì $\frac{A}{B}$ bằng

A. $-\frac{2019}{2}$.

B. $-\frac{2}{2019}$.

C. 1010.

D. $\frac{2019}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

$$\text{Ta có } F'(x) = \frac{A}{x} + \frac{2019B \cdot x^{2018}}{1+x^{2019}} = \frac{A(1+x^{2019}) + 2019B \cdot x^{2019}}{x+x^{2020}} = \frac{A+(A+2019B)x^{2019}}{x+x^{2020}}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{A+(A+2019B)x^{2019}}{x+x^{2020}} = \frac{1-x^{2019}}{x+x^{2020}}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ A+2019B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{-2}{2019} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \frac{A}{B} = \frac{-2019}{2}.$$

Cách 2:

$$F(x) = \int \frac{(1+x^{2019})-2x^{2019}}{x(1+x^{2019})} dx = \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{x^{2018}}{1+x^{2019}} dx$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{2019} \int \frac{d(1+x^{2019})}{1+x^{2019}} = \ln|x| - \frac{2}{2019} \ln|1+x^{2019}| + C$$

$$\text{Mà } F(x) = A\ln|x| + B\ln|1+x^{2019}| + C$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{-2}{2019} \end{cases} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{-2019}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{A}{B} = \frac{-2019}{2}.$$

Câu 121. Họ nguyên hàm $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^2+x-2} dx$ là

A. $\frac{x^2}{2} + 3\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$

B. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$

C. $\frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C.$

D. $x - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C.$

Lời giải

Chọn C

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(x + \frac{2x-5}{x^2+x-2} \right) dx = \int \left(x + \frac{2x-5}{(x+2)(x-1)} \right) dx = \int \left(x + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C.$$

Câu 122. Họ nguyên hàm $\int \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x - 2} dx$ là

A. $x - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C.$

B. $\frac{x^2}{2} + 3\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$

C. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$

D. $\frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C.$

Lời giải

Chọn D

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(x + \frac{2x-5}{x^2+x-2} \right) dx = \int \left(x + \frac{2x-5}{(x+2)(x-1)} \right) dx = \int \left(x + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C.$$

b Dạng 07: Nguyên hàm kết hợp đổi biến và từng phần hàm xđ

Câu 123. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x}.$

A. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln(\ln x) + \ln x + C.$

B. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) + C.$

C. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) + \ln x + C.$

D. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C.$

Lời giải

Chọn D

Xét $I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$. Đặt $\ln(\ln x) = u \Rightarrow \ln x = e^u \Rightarrow \frac{dx}{x} = e^u du$.

Khi đó $I = \int u \cdot e^u du = \int u d(e^u) = u \cdot e^u - \int e^u du = u \cdot e^u - e^u + C = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$.

Câu 124. Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là:

A. $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$.

B. $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$.

C. $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$.

D. $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int 3x(x + \cos x) dx = \int (3x^2 + 3x \cos x) dx = \int 3x^2 dx + 3 \int x \cos x dx$$

Đặt $I_1 = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$; $I_2 = \int x \cos x dx$.

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$I_2 = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C_2.$$

$$I = I_1 + 3I_2 = x^3 + 3x \sin x + 3 \cos x + C = x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C.$$

Câu 125. (Thi thử SGD Cần Thơ mã 121 – 2019) Cho a là số thực khác 0, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ và $F(2018) = e^{2018}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in [1; 2018)$. **B.** $a \in [2018; +\infty)$. **C.** $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$. **D.** $a \in \left(0; \frac{1}{2018}\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } F(x) = \int e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x \ln(ax) dx + \int e^x \cdot \frac{1}{x} dx = M + \int e^x \cdot \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Xét } M = \int e^x \ln(ax) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } M = \int e^x \ln(ax) dx = e^x \cdot \ln(ax) - \int e^x \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow F(x) = e^x \ln(ax) + C.$$

Vì $F\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow C = 0$ suy ra $F(x) = e^x \ln(ax)$.

Lại có $F(2018) = e^{2018} \ln(2018a) = e^{2018} \Leftrightarrow \ln(2018a) = 1$

$\Leftrightarrow 2018a = e \Leftrightarrow a = \frac{e}{2018}$. Vậy $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$.

Câu 126. Nguyên hàm của hàm số: $I = \int \cos 2x \cdot \ln(\sin x + \cos x) dx$ là

A. $F(x) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) + \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int \cos 2x \cdot \ln(\sin x + \cos x) dx = \int (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) \cdot \ln(\sin x + \cos x) dx \\ &= \int (\sin x + \cos x) \cdot \ln(\sin x + \cos x) d(\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow I = \int t \ln t dt$

Đặt: $\begin{cases} \ln t = u \\ t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = \frac{1}{2} t^2 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2 + C_1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)^2 \ln(\sin x + \cos x) - \frac{1}{4} (\sin x + \cos x)^2 + C_1 \\ &= \frac{1}{4} (1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

h Dạng 08: Nguyên hàm liên quan đến hàm ẩn

Câu 127. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$.

A. $\int f(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$

B. $\int f(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$

C. $\int f(x)\ln x dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$

D. $\int f(x)\ln x dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$

Lời giải

Chọn D

Vì $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên ta có

$$(F(x))' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2x^2}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^3} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Khi đó ta tính: $I = \int f(x)\ln x dx.$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int f(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + C = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Câu 128. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^3 + x$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = 20.$

B. $f^2(2) = 4.$

C. $f^2(2) = 14.$

D. $f^2(2) = 16.$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) \cdot f(x) = x^3 + x$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f'(x) \cdot f(x) dx = \int_0^2 (x^3 + x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) d(f(x)) = 6 \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{f^2(2) - 4}{2} = 6 \Leftrightarrow f^2(2) = 16$$

Câu 129. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2-f(x)-2019} = 0$ và $f(0) = -2019$. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $f(x) < 7$ là

- A. 44. B. 91. C. 46. D. 45.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) + 4x - 6x.e^{x^2-f(x)-2019} = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 4x = 6x.e^{x^2-f(x)-2019}$$

$$\Leftrightarrow (f'(x) + 4x)e^{f(x)+2x^2+2019} = 6x.e^{3x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)+2x^2+2019} = e^{3x^2} + C,$$

$$\text{vì } f(0) = -2019 \Rightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) < 7 \Leftrightarrow x^2 - 2019 < 7 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2026} \Rightarrow -45 \leq x \leq 45$$

Câu 130. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$, $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{147}{108}$. C. $\frac{25}{4}$. D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{1}{(x+1)^2} f(x) + \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot [f(x) + x(x+1)f'(x)]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot [x^2 + x] \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Do } f(1) = -2\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (-2\ln 2) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1 - (x+1) \cdot \ln|x+1|}{x}.$$

$$\text{Khi đó } f(2) = \frac{3 - 3 \cdot \ln 3}{2} = \frac{3}{2} + \ln \frac{1}{3\sqrt{3}}. \text{ Suy ra } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{147}{108}.$$

Câu 131. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $x^2 + 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \ln x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $[f(x) + xf'(x)] \ln^2 x$ là

A. $x(2x+2)\ln x - 2(x^2+2x) + C.$

B. $(2x+2)\ln x - 2(x^2+2x) + C.$

C. $(2x+2)\ln x + 2(x^2+2x) + C.$

D. $x(2x+2)\ln x + 2(x^2+2x) + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2 + 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$ nên ta có

$$(x^2 + 2x)' = f(x)\ln x \Leftrightarrow 2x + 2 = f(x)\ln x.$$

Tính $I = \int [f(x) + xf'(x)] \ln^2 x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = [f(x) + xf'(x)] dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2\ln x}{x} dx \\ v = xf(x) \end{cases}$$

Suy ra $I = \int [f(x) + xf'(x)] \ln^2 x dx = xf(x)\ln^2 x - 2 \int f(x)\ln x dx$

$$= x(2x+2)\ln x - 2(x^2+2x) + C.$$

Câu 132. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = \frac{-1}{e}.$

B. $f(1) = \frac{1}{e^2}.$

C. $f(1) = \frac{1}{e}.$

D. $f(1) = e^2.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$

Nhân hai vế cho e^{x^2} ta được

$$e^{x^2} f'(x) + 2x \cdot e^{x^2} \cdot f(x) = e^{x^2} e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[e^{x^2} f(x) \right]' = 1$$

$$\Leftrightarrow \int \left[e^{x^2} f(x) \right]' dx = \int dx$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} f(x) = x + C$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+C}{e^{x^2}}$$

Ta có: $f(0) = 0$ nên $f(0) = \frac{0+C}{e^0} = 0 \Leftrightarrow C = 0$

Vậy $f(1) = \frac{1}{e}$.

Câu 133. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{13}{4}$.

B. $\frac{25}{4}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}.$$

Suy ra $\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx$ hay $\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C$.

Mặt khác, ta có $f(1) = -2 \ln 2$ nên $C = -1$. Do đó $\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| - 1$.

Với $x = 2$ thì $\frac{2}{3} \cdot f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3$. Suy ra $a = \frac{3}{2}$ và $b = -\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

Câu 134. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\frac{\cos x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $[f(x) + xf'(x)]\ln^2 x$ là

A. $-\frac{1}{2}x \sin x \ln x - \cos x + C.$

B. $\frac{1}{2}x \sin x \ln x - \cos x + C.$

C. $\frac{1}{2}x \sin x \ln x + \cos x + C.$

D. $-\frac{1}{2}x \sin x \ln x + \cos x + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{\cos x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\ln x$ nên ta có

$$\left(\frac{\cos x}{2}\right)' = f(x)\ln x \Leftrightarrow -\frac{\sin x}{2} = f(x)\ln x.$$

Tính $I = \int [f(x) + xf'(x)]\ln^2 x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = [f(x) + xf'(x)] dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ v = xf(x) \end{cases}$$

Suy ra $I = \int [f(x) + xf'(x)]\ln^2 x dx = xf(x)\ln^2 x - 2 \int f(x)\ln x dx$

$$= -\frac{1}{2}x \sin x \ln x - \cos x + C.$$

Đang 09: Nguyên hàm của hs cho bởi nhiều công thức

Câu 135. (Chuyên Đại học Vinh - Lần 1 - Năm học 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x+1)e^x + C.$

B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C.$

C. $(x-1)e^x + C.$

D. $(x-2)e^x + e^x + C.$

Lời giải

Chọn A

$$f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C'.$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C' = 2$. Do đó $f(x)e^{2x} = (x+2)e^x$. Vậy:

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{2x} dx &= \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)d(e^x) = (x+2)e^x - \int e^x d(x+2) = (x+2)e^x - \int e^x dx = \\ &= (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C. \end{aligned}$$

Câu 136. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

A. 0.

B. 55.

C. 44.

D. 45.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

Vậy $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 = 44$.

Câu 137. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017} \cdot e^{2018x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2018$. Giá trị của $f(1)$ là

A. $f(1) = 2019 \cdot e^{2018}$. **B.** $f(1) = 2018 \cdot e^{-2018}$. **C.** $f(1) = 2018 \cdot e^{2018}$. **D.** $f(1) = 2019 \cdot e^{-2018}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết: $f'(x) - 2018f(x) = 2018.x^{2017}.e^{2018x}$

$$\Leftrightarrow e^{-2018x}.f'(x) - 2018.e^{-2018x}.f(x) = 2018.x^{2017}$$

$$\Leftrightarrow [e^{-2018x}.f(x)]' = (x^{2018})'$$

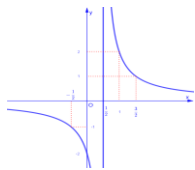
$$\Leftrightarrow e^{-2018x}.f(x) = x^{2018} + C \quad (1).$$

Thay $x = 0$ vào (1), ta được $f(0) = C \Leftrightarrow C = 2018$.

Do đó, từ (1) suy ra: $f(x) = (x^{2018} + 2018)e^{2018x}$.

Vậy $f(1) = 2019.e^{2018}$.

Câu 138. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ, biết $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. Giá trị của $P = f(-1) + f(3)$ bằng



A. $2 + \ln 15$.

B. $3 + \ln 15$.

C. $\ln 15$.

D. $4 + \ln 15$.

Lời giải

Chọn B

Ta có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ, nên hàm số $y = f'(x) = \frac{2}{2x-1}$.

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = \begin{cases} \ln(2x-1) + A, & x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + B, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do $f(1) = 2 \Rightarrow A = 2; f(0) = 1 \Rightarrow B = 1$

Suy ra $f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + 2, & x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy $P = f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$.

Câu 139. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{3}{4}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. -1 .

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Từ điều kiện bài toán ta có:

$$f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3. \text{ Ta có } \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \Rightarrow \frac{-1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C.$$

Vì $f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow C = \frac{3}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{-4}{x^4 + 3}$. Vậy, $f(1) = -1$.

Cách 2:

Từ điều kiện bài toán ta có:

$$f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3.$$

Khi đó ta có $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{15}{4}$.

Do $f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} - \frac{19}{4} = -1 \Rightarrow f(1) = -1$.

Vậy, $f(1) = -1$.

Câu 140. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = |x-1|$. Biết rằng $f(0) = 3$. Tính $f(2) + f(4)$?

A. 11.

B. 10.

C. 12.
Lời giải

D. 4.

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi } x \geq 1 \text{ thì } f(x) = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x + C_1.$$

$$\text{Khi } x < 1 \text{ thì } f(x) = -\int (x-1) dx = -\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + C_2.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } f(0) = 3 \text{ nên } C_2 = 3 \Rightarrow f(x) = -\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + 3 \text{ khi } x < 1.$$

$$\text{Mặt khác do hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x=1 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + 3\right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + C_1\right] \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 3 = \frac{1}{2} - 1 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 4.$$

$$\text{Vậy khi } x \geq 1 \text{ thì } f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4 \Rightarrow f(2) + f(4) = 12.$$

Câu 141. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = \frac{1}{e^2}$.

B. $f(1) = \frac{1}{e}$.

C. $f(1) = e^2$.

D. $f(1) = -\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) + 2x.e^{x^2}.f(x) = 1 \Leftrightarrow \left(e^{x^2}.f(x)\right)' = 1.$$

$$\text{Suy ra } \int \left(e^{x^2}.f(x)\right)' dx = \int dx \Leftrightarrow e^{x^2}.f(x) = x + C \Rightarrow f(x) = \frac{x+C}{e^{x^2}}.$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}. \text{ Vậy } f(1) = \frac{1}{e}.$$

b Dạng 10: Tìm nguyên hàm thỏa mãn ĐK cho trước

Câu 142. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết rằng $f(-3) + f(3) = 0$. Tính $T = f(2) + f(0) + f(-4)$.

A. $T = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3$.

B. $T = \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5 + 2$.

C. $T = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3 + 1$.

D. $T = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3 + 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \right] = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Do đó:

$$f(-3) + f(3) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \ln 2 + C \right) + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + C \right) = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

Như vậy: $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$.

$$f(2) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-1}{2+1} \right| = -\frac{1}{2} \ln 3;$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{0-1}{0+1} \right| = 0;$$

$$f(-4) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-4-1}{-4+1} \right| = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 3).$$

Từ đó: $T = f(2) + f(0) + f(-4) = -\frac{1}{2} \ln 3 + 0 + \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3$.

Câu 143. Hàm số $f(x) = \frac{7 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + \sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$. Giá trị $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng?

A. $\frac{3\pi}{8}$.

B. $\frac{3\pi - \ln 2}{4}$.

C. $\frac{3\pi - 11 \ln 2}{4}$.

D. $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}\text{Ta có } f(x) &= \frac{\frac{3}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{11}{2}(-\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = \frac{3}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} \\ \Rightarrow F(x) &= \int f(x) dx = \int \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} \right) dx = \frac{3}{2}x + \int \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \int \frac{1}{\cos x + \sin x} d(\cos x + \sin x) = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \ln |\cos x + \sin x| + C. \\ \text{Mà } F\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \frac{3\pi}{8} + \frac{11}{2} \ln \sqrt{2} + C = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow C = -\frac{11}{4} \ln 2 \\ \text{Do đó } F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{3\pi}{4} + C = \frac{3\pi}{4} - \frac{11}{4} \ln 2.\end{aligned}$$

Câu 144. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ mà $F(1) = \frac{1}{3}$. Giá trị của $F^2(e)$ bằng:

A. $\frac{8}{9}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Rightarrow t^2 = \ln^2 x + 1.$$

$$\Rightarrow 2t dt = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{\ln x}{x} dx = t dt.$$

$$F(x) = \int \sqrt{\ln^2 x + 1} \frac{\ln x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3} + C.$$

$$\text{Ta có } F(1) = \frac{(\sqrt{\ln^2 1 + 1})^3}{3} + C = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3}.$$

$$\Rightarrow F^2(e) = \left(\frac{(\sqrt{\ln^2 e + 1})^3}{3} \right)^2 = \frac{8}{9}.$$

Câu 145. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 2$ và $f'(x) = \cos 3x \cdot \cos x + x, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

A. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 - 4}{16}$.

B. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 + 4}{16}$.

C. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 - 4\pi + 4}{16}$.

D. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 + 4\pi}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$f(x) = \int f'(x) dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x + 2x) dx = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + x^2 + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + x^2 + 2.$$

$$\text{Vậy } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 + 4}{16}.$$

Câu 146. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (2x+3)\log_2(x+1)$. Biết rằng $f(0) = 0$ và $f(1) = a + \frac{b}{c \ln 2}$, trong đó a, b là những số nguyên, c là số nguyên dương và $c \leq 3$. Hãy tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

A. $T = 15$.

B. $T = 3$.

C. $T = 13$.

D. $T = 5$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } \int f'(x) dx = \int (2x+3)\log_2(x+1) dx = \frac{1}{\ln 2} \int (2x+3)\ln(x+1) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (2x+3) dx \end{cases} \text{ ta chọn } \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x^2 + 3x + 2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int f'(x) dx = \frac{1}{\ln 2} \left[(x^2 + 3x + 2)\ln(x+1) - \int (x+2) dx \right].$$

$$\text{Hay } f(x) = \frac{1}{\ln 2} \left[(x^2 + 3x + 2)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} - 2x \right] + C, \text{ } C \text{ là số thực nào đó.}$$

Có $f(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$. Từ đó suy ra $f(1) = 6 - \frac{5}{2\ln 2}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 6 \\ b = -5 \Rightarrow T = 3. \\ c = 2 \end{cases}$$

Câu 147. Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.

- A.** $\ln 10$. **B.** $-\frac{1}{2}\ln 10$. **C.** $-\frac{1}{4}\ln 10$. **D.** $\frac{1}{2}\ln 10$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } F(x) = \int xf'(x) dx = \int x df(x) = xf(x) - \int f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có: } \int f(x) dx &= \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= x \tan x + \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = x \tan x + \ln|\cos x| + C \Rightarrow F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } F(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \text{ do đó: } F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln|\cos x|.$$

$$\Rightarrow F(a) = af(a) - a \tan a - \ln|\cos a|$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } f(a) &= \frac{a}{\cos^2 a} = a(1 + \tan^2 a) = 10a \text{ và } \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 10 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow |\cos a| &= \frac{1}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } F(a) - 10a^2 + 3a = 10a^2 - 3a - \ln\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\right| - 10a^2 + 3a = \frac{1}{2}\ln 10.$$

Câu 148. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

- A.** $\frac{7}{3}\ln 2$. **B.** $\frac{2}{3}\ln 2 + \frac{3}{6}\ln 5$. **C.** $\frac{10}{3}\ln 2 - \frac{5}{6}\ln 5$. **D.** 0 .

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-3; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Tính $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+3} dx \\ v = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3} = -\frac{x+3}{3x} \end{cases} \text{ (Chọn } C = -\frac{1}{3} \text{)}$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx = -\frac{x+3}{3x} \ln(x+3) + \int \frac{1}{3x} dx = -\frac{x+3}{3x} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln|x| + C.$$

$$\square \text{ Xét trên khoảng } (-3; 0), \text{ ta có: } F(-2) = \frac{1}{3} \ln 2 + C_1; F(-1) = \frac{2}{3} \ln 2 + C_1$$

$\square$ Xét trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có:

$$F(1) = -\frac{4}{3} \ln 4 + C_2 = -\frac{8}{3} \ln 2 + C_2; F(2) = -\frac{5}{6} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln 2 + C_2$$

$$\text{Suy ra } F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \ln 2 + C_1 \right) + \left(-\frac{8}{3} \ln 2 + C_2 \right) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = \frac{7}{3} \ln 2.$$

$$\text{Do đó: } F(-1) + F(2) = \left(\frac{2}{3} \ln 2 + C_1 \right) + \left(-\frac{5}{6} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln 2 + C_2 \right)$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{7}{3} \ln 2 = \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$$

Cách 2: (Tận dụng máy tính)

$\square$ Xét trên khoảng $(-3; 0)$, ta có:

$$F(-1) - F(-2) = \int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx \approx 0,231 \rightarrow A(\text{lưu vào } A)(1)$$

$\square$ Xét trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có:

$$F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx \approx 0,738 \rightarrow B(\text{lưu vào } A)(2)$$

$\square$ Lấy (1) cộng (2) theo vế ta được C.

$$F(-1) + F(2) - F(-2) - F(1) = A + B \Leftrightarrow F(-1) + F(2) = A + B \approx 0,969.$$

So các phương án ta chọn phương án A;

Dạng 11: Dạng toán khác liên quan nguyên hàm (cực trị, đơn điệu, so sánh, min-max ...)

Câu 149. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $f'(x) = (6x - 3x^2) \cdot f(x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất.

- A. $\begin{cases} m > e^4 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$. B. $1 < m < e^4$. C. $\begin{cases} m > e^4 \\ m < 1 \end{cases}$. D. $1 \leq m \leq e^4$.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có $f'(x) = (6x - 3x^2) \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = (6x - 3x^2), (*)$

lấy nguyên hàm hai vế của (*), ta được $\ln f(x) = 3x^2 - x^3 + C \Leftrightarrow f(x) = e^{3x^2 - x^3 + C}$.

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow e^C = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{3x^2 - x^3} \Rightarrow f'(x) = (6x - 3x^2) \cdot e^{3x^2 - x^3}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	e^4	0	

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m > e^4 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$.

Câu 150. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và đồng thời $f^2(x) \cdot f'(x) = xe^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết $f^2(x) \cdot f'(x) = xe^x$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\int f^2(x) \cdot f'(x) dx = \int xe^x dx$.

$$\Leftrightarrow \int f^2(x) df(x) = \int xe^x dx \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{3} = (x-1)e^x + C'.$$

$$\Leftrightarrow f^3(x) = 3(x-1)e^x + C.$$

Thay $x=1$ ta được $f^3(1) = C \Leftrightarrow C=1$.

$$\text{Do đó } f(x) = \sqrt[3]{3(x-1)e^x + 1}.$$

Xét phương trình $f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3(x-1)e^x + 1} = -1 \Leftrightarrow 3(x-1)e^x + 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)e^x + 2 = 0.$$

Đặt $g(x) = 3(x-1)e^x + 2$.

Ta có: $g'(x) = 3e^x + 3(x-1)e^x = 3xe^x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$				$+\infty$
			-1		

Từ bảng biến thiên suy ra $g(x) = 0$ có hai nghiệm.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 151. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và đồng thời $f^2(x) \cdot f'(x) = xe^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết $f^2(x) \cdot f'(x) = xe^x$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\int f^2(x) \cdot f'(x) dx = \int xe^x dx$.

$$\Leftrightarrow \int f^2(x) df(x) = \int x e^x dx \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{3} = (x-1)e^x + C'.$$

$$\Leftrightarrow f^3(x) = 3(x-1)e^x + C.$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ ta được } f^3(1) = C \Leftrightarrow C=1.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \sqrt[3]{3(x-1)e^x + 1}.$$

$$\text{Xét phương trình } f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3(x-1)e^x + 1} = -1 \Leftrightarrow 3(x-1)e^x + 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)e^x + 2 = 0.$$

$$\text{Đặt } g(x) = 3(x-1)e^x + 2.$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 3e^x + 3(x-1)e^x = 3xe^x.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'		$-$	$+$
g	$+\infty$	-1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $g(x) = 0$ có hai nghiệm.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 152. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{e}{2}$.

B. $\frac{2}{e}$.

C. $\frac{1}{e}$.

D. e .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) + f'(x) = x \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = x e^x \Leftrightarrow (e^x \cdot f(x))' = x e^x.$$

$$\Rightarrow \int (e^x \cdot f(x))' dx = \int x e^x dx \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = (x-1)e^x + C$$

$$\text{Ta có } f(0) = 1 \Rightarrow 1 = -1 + C \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow e^x \cdot f(x) = (x-1)e^x + 2$$

$$\text{Vậy } e \cdot f(1) = 2 \Leftrightarrow f(1) = \frac{2}{e}$$

Câu 153. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $0 < m \leq 1$.

B. $m > e$.

C. $0 < m < e$.

D. $1 < m < e$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2 - 2x) dx \Rightarrow \ln |f(x)| = 2x - x^2 + C.$$

$$\text{Do } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } \ln f(x) = 2x - x^2 + C \Rightarrow f(x) = e^{2x - x^2 + C}.$$

$$\text{Ta có } f(0) = 1 \Leftrightarrow e^C = 1 \Leftrightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = e^{2x - x^2}.$$

Cách 1:

$$\text{Phương trình } f(x) = m \Leftrightarrow e^{2x - x^2} = m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = \ln m \\ m > 0 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Gọi } g(x) = 2x - x^2$$

Bảng biến thiên của $g(x)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

Phương trình (1) có 2 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\ln m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < e$.

$$\text{Từ } f(x) = e^{2x - x^2} \Rightarrow f'(x) = 2(1 - x)e^{2x - x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	e	0

Vậy phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < e$.

Câu 154. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3x-1}{x+2}$, $f(0) = 1$ và $f(-4) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $f(2) + f(-3)$ bằng

- A. $3 - 20\ln 2$. B. $\ln 2$. C. $10 + \ln 2$. **D. 12.**

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Ta có:

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \quad \hat{=} \quad \int \frac{3x-1}{x+2} dx = f(x) + C \quad \hat{=} \quad \int \left(3 - \frac{7}{x+2} \right) dx = f(x) + C$$

$$\hat{=} \quad f(x) = 3x - 7\ln|x+2| + C \quad \hat{=} \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 7\ln(x+2) + C_1 & \text{khi } x > -2 \\ 3x - 7\ln(-x-2) + C_2 & \text{khi } x < -2 \end{cases}$$

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-4) = 2 \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} C_1 = 1 + 7\ln 2 \\ C_2 = 14 + 7\ln 2 \end{cases} \quad \hat{=} \quad C_1 + C_2 = 15 + 14\ln 2.$$

$$\text{Khi đó: } f(2) + f(-3) = [6 - 7\ln 4 + C_1] + [-9 - 7\ln 1 + C_2] = -3 - 14\ln 2 + C_1 + C_2 = 12.$$

Cách 2

Xét

$$\begin{aligned} T = f(2) + f(-3) &= \int_0^2 f'(x) dx + \int_{-4}^{-3} f'(x) dx + f(0) + f(-4) \\ &= \int_0^2 f'(x) dx + \int_{-4}^{-3} f'(x) dx + 3 = 12. \end{aligned}$$

Dạng 12: Bài toán liên quan đến tham số (cả 2 vế)

Câu 155. Cho $F(x) = x^2(a + b \ln x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln x$. Trong đó a, b là các phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + ab + b^2$.

A. $P = \frac{5}{8}$.

B. $P = \frac{3}{16}$.

C. $P = \frac{3}{8}$.

D. $P = \frac{5}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int x \ln x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \text{ chọn } \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó ta có } \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C = x^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln x \right) + C.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = x^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln x \right). \text{ Vậy } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Do đó } P = \frac{3}{16}.$$

Cách 2

$$\text{Ta có } F'(x) = (2a + b)x + 2bx \ln x. F'(x) = f(x), \forall x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Câu 156. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x^2 e^{ax}$ ($a \neq 0$) thỏa mãn $f\left(\frac{1}{a}\right) - f(0) = 1$. Khi đó

A. $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $a \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int x^2 e^{ax} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases} \text{ Suy ra: } f(x) = \frac{1}{a} (x^2 e^{ax} - \int 2x e^{ax} dx)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } f(x) = \frac{1}{a} \left[x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} (x e^{ax} - \int e^{ax} dx) \right] = \frac{1}{a} \left[x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} \left(x e^{ax} - \frac{1}{a} e^{ax} \right) \right] + C$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{1}{a}\right) - f(0) = 1 \Rightarrow \frac{e^{-2}}{a^3} = 1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{e-2} \in \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Dạng 13: Nguyên hàm tích, thương liên quan đến các nguyên hàm cho trước

Câu 157. Nếu $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $a + b + c$ có giá trị bằng

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\begin{aligned} g(x) = f'(x) &= (2ax + b)\sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}(ax^2 + bx + c) = \frac{(2ax + b)(2x-1) + (ax^2 + bx + c)}{\sqrt{2x-1}} \\ &= \frac{5ax^2 + (3b - 2a)x + c - b}{\sqrt{2x-1}} \end{aligned}$$

Theo bài ra: $g(x) = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ nên

$$\frac{5ax^2 + (3b - 2a)x + c - b}{\sqrt{2x-1}} = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 10 \\ 3b - 2a = -7 \\ c - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $a + b + c = 2$.

Câu 158. Cho $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot \tan x$. Nguyên hàm của hàm số $\frac{\tan x}{f'(x)}$ bằng

A. $\frac{1}{8} \tan x + C$.

B. $\frac{1}{4} \tan 2x + C$.

C. $-\frac{1}{8} \tan 2x + C$.

D. $\frac{1}{4} \tan x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$F'(x) = -2 \sin 2x = -4 \sin x \cos x$$

Vì $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot \tan x$ nên:

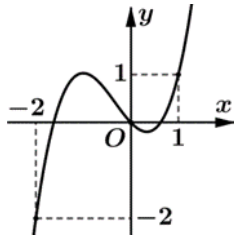
$$F'(x) = f(x) \cdot \tan x \Leftrightarrow -4 \sin x \cos x = f(x) \cdot \tan x \Leftrightarrow f(x) = -4 \cos^2 x$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = 8 \sin x \cos x$$

$$\text{Vậy } \int \frac{\tan x}{f'(x)} dx = \int \frac{\tan x}{8 \sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{8 \cos^2 x} dx = \frac{1}{8} \tan x + C$$

Câu 159. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2; 1]$. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}.$$



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $g(-2) < g(1) < g(0)$.

B. $g(0) < g(-2) < g(1)$.

C. $g(1) < g(-2) < g(0)$.

D. $g(0) < g(1) < g(-2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 1.$$

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = x$ ta có bảng biến thiên

x	-2		0		1
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$	$g(-2)$	$\nearrow$		$\searrow$	
			$g(0)$		$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $g(0) > g(-2)$ và $g(0) > g(1)$. (1)

$$\text{Mặt khác, dựa vào đồ thị ta có: } S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int_{-2}^0 |f'(x) - x| dx > \int_0^1 |f'(x) - x| dx \Leftrightarrow \int_{-2}^0 g'(x) dx > \int_0^1 -g'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow g(0) - g(-2) > -(g(1) - g(0)) \Leftrightarrow g(1) > g(-2). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $g(-2) < g(1) < g(0)$ nên chọn đáp án

C.

Câu 160. Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.

A. $-\frac{1}{4}\ln 10$.

B. $\frac{1}{2}\ln 10$.

C. $\ln 10$.

D. $-\frac{1}{2}\ln 10$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt: } I = \int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx, F(0) = 0.$$

$$\text{Ta lại có: } \int f(x)dx = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx$$

$$= x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= x \tan x + \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = x \tan x + \ln|\cos x| + C$$

$$\Rightarrow I = xf(x) - x \tan x - \ln|\cos x| + C$$

$$\Rightarrow F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln|\cos x| + C, C \text{ là một số thực nào đó.}$$

$$\text{Lại có } F(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \text{ do đó } F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln|\cos x|.$$

$$\Rightarrow F(a) = af(a) - a \tan a - \ln|\cos a|$$

Trong đó

$$f(a) = \frac{a}{\cos^2 a} = a(1 + \tan^2 a) = 10a,$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 10 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\cos a| = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Vậy } F(a) - 10a^2 + 3a = 10a^2 - 3a - \ln \frac{1}{\sqrt{10}} - 10a^2 + 3a = \frac{1}{2}\ln 10.$$

Câu 161. Cho $F(x) = (x^2 + 2x).e^x$ là một nguyên hàm của $f(x).e^{2x}$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}dx = (2+x^2)e^x + C.$

B. $\int f'(x)e^{2x}dx = (x^2-2)e^x + C.$

C. $\int f'(x)e^{2x}dx = (-x^2-2)e^x + C.$

D. $\int f'(x)e^{2x}dx = (2-x^2)e^x + C.$

Lời giải

Chọn D

Vì $F(x) = (x^2 + 2x)e^x$ là một nguyên hàm của $f(x).e^{2x}$ nên ta có:

$$F'(x) = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = f(x)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{e^x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2-2x-x^2}{e^x}$$

$$\Rightarrow f'(x)e^{2x} = (2-2x-x^2)e^x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int f'(x)e^{2x}dx = \int (2-2x-x^2)e^x dx \\ &= \int 2e^x dx - \int x^2 e^x dx - \int 2xe^x dx \end{aligned}$$

Xét $I_1 = \int x^2 e^x dx$, $I_2 = \int 2xe^x dx$.

Với $I_1 = \int x^2 e^x dx$, ta đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = x^2 e^x - \int 2xe^x dx \Rightarrow -I_1 = -x^2 e^x + I_2.$$

$$\Rightarrow I = 2e^x - x^2 e^x + C = (2-x^2)e^x + C.$$