

3.2.TÍCH PHÂN

MỨC ĐỘ 1: NHẬN BIẾT

□ **Dạng 01: Kiểm tra định nghĩa, tính chất của tích phân**

Câu 1. Cho hai số thực $a < b$ tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\square$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a).$

B. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$

C. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b).$

D. $\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a).$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\square$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x) dx = 9$, $F(0) = 3$.
Tính $F(9)$.

A. 12.

B. -12.

C. -6.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^9 f(x) dx = F(x) \Big|_0^9 = F(9) - F(0) \Leftrightarrow 9 = F(9) - 3 \Leftrightarrow F(9) = 12.$

Câu 3. Cho các hàm số thực a, b ($a < b$). Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\square$ thì

A. $\int_a^b f(x) dx = f'(b) - f'(a).$

B. $\int_a^b f'(x) dx = f(a) - f(b).$

C. $\int_a^b f(x) dx = f'(a) - f'(b).$

D. $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$

Lời giải

Chọn D

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;3]$, $f(3) = 5$ và $\int_1^3 f'(x) dx = 6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. -1 .

B. 11 .

C. 1 .

D. 10 .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^3 f'(x) dx = 6 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^3 = f(3) - f(1) = 5 - f(1) = 6 \Leftrightarrow f(1) = -1$.

Vậy $f(1) = -1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

B. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

C. $\int_a^b tf(t) dt = t \int_a^b f(t) dt$.

D. $\int_a^a kf(t) dt = 0$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Giá trị của $\int_{-1}^2 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

A. -7 .

B. 1 .

C. 5 .

D. 7 .

Lời giải

Chọn B

Áp dụng tính chất của tích phân ta có $\int_{-1}^2 [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \int_{-1}^2 f(x) dx + 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = 4 - 3 = 1$.

Câu 7. Cho $\int_1^5 h(x) dx = 4$ và $\int_1^7 h(x) dx = 10$, khi đó $\int_5^7 h(x) dx$ bằng

A. 7 .

B. 2

C. 6 .

D. 5 .

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\begin{aligned}\int_1^5 h(x)dx + \int_5^7 h(x)dx &= \int_1^7 h(x)dx \\ \Leftrightarrow \int_5^7 h(x)dx &= \int_1^7 h(x)dx - \int_1^5 h(x)dx \\ \Leftrightarrow \int_5^7 h(x)dx &= 10 - 4 = 6\end{aligned}$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in (a; b)$ **B.** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$
- C.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$ **D.** $\int_a^b kdx = k(a-b), \forall k \in R$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } \int_a^b kdx = kx \Big|_a^b = k(b-a).$$

□ Dạng 02: Tích phân cơ bản(a), kết hợp tính chất (b)

Câu 9. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_1^6 f(x)dx = 5$. Khi đó $\int_0^6 f(x)dx$ bằng

- A.** 10. **B.** -3. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^6 f(x)dx = 2 + 5 = 7.$$

Câu 10. Cho $\int_1^2 f(x)dx = -3$ và $\int_2^3 f(x)dx = 4$, khi đó tích phân $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

- A.** -12. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = -3 + 4 = 1.$$

Câu 11. Tích phân $I = \int_0^1 e^{2x}dx$ bằng

A. $\frac{e^2-1}{2}$.

B. $e + \frac{1}{2}$.

C. $e^2 - 1$.

D. $e - 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I = \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$.

Câu 12. Giá trị của tích phân $\int_0^{2021} e^x dx$ bằng

A. $\frac{e^{2022}}{2022}$.

B. $\frac{e^{2022}-1}{2022}$.

C. $e^{2021} - 1$.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

• Ta có: $\int_0^{2021} e^x dx = e^x \Big|_0^{2021} = e^{2021} - 1$.

Câu 13. Cho $\int_0^1 f(x) dx = -3$ và $\int_0^1 g(x) dx = 2$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx$ bằng:

A. 5.

B. 1.

C. -1.

D. -7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 g(x) dx = -3 + 2 \cdot 2 = 1$.

Câu 14. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ bằng.

A. $\sqrt{2} - 1$.

B. $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

C. $1 - \sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

Câu 15. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$. Tính $\int_2^4 f(y) dy$.

A. $I = -5$.

B. $I = 3$.

C. $I = -3$.

D. $I = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_{-2}^2 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-2}^2 f(y)dy = 1.$$

$$\int_{-2}^4 f(t)dt = -4 \Leftrightarrow \int_{-2}^4 f(y)dy = -4.$$

Khi đó $\int_2^4 f(y)dy = \int_{-2}^4 f(y)dy - \int_{-2}^2 f(y)dy = -4 - 1 = -5$.

Câu 16. Tích phân $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ có giá trị bằng

A. 2.

B. 1.

C. 1-e.

D. $e-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$.

□ Dạng 04: PP đổi biến t = u(x)-hàm công thức xđ (ngắn gọn là vi phân)

Câu 17. Xét $\int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x} dx$ nếu đặt $t = x^2 + 2x$ thì $\int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x} dx$ bằng

A. $\frac{1}{2} \int_1^3 e^t dt.$

B. $\int_1^2 e^t dt$.

C. $\int_1^2 (t+1)e^t dt.$

D. $\int_0^1 (t+1)e^t dt.$

Lời giải.

Chọn A

Đặt $t = x^2 + 2x \Rightarrow dt = (2x + 2)dx \Rightarrow (x + 1)dx = \frac{dt}{2}$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = 3$

$$\text{Nên } I = \frac{1}{2} \int_0^3 e^t dt$$

Câu 18. Cho $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^3} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{1-x^3}$ thì ta được I bằng

- A.** $\frac{2}{3} \int_0^1 t^2 dt$. **B.** $-\frac{2}{3} \int_0^1 t^2 dt$. **C.** $\frac{3}{2} \int_0^1 t^2 dt$. **D.** $-\frac{3}{2} \int_0^1 t^2 dt$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{1-x^3} d(x^3)$.

Nếu đặt $t = \sqrt{1-x^3} \Rightarrow x^3 = 1-t^2$.

Đổi cận: khi $x=0 \Rightarrow t=1$ và khi $x=1 \Rightarrow t=0$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_1^0 t d(1-t^2) = -\frac{1}{3} \int_0^1 t \cdot (-2t) dt = \frac{2}{3} \int_0^1 t^2 dt$.

Câu 19. Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.** $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$. **B.** $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$. **C.** $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$. **D.** $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$.

Khi $x=1 \Rightarrow u=0$; $x=2 \Rightarrow u=3$.

Do đó $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx = \int_0^3 \sqrt{u} du = 2\sqrt{3}$.

Câu 20. Xét $\int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x} dx$ nếu đặt $t = x^2 + 2x$ thì $\int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x} dx$ bằng

- A.** $\int_0^1 (t+1)e^t dt$. **B.** $\frac{1}{2} \int_1^3 e^t dt$. **C.** $\int_1^2 e^t dt$. **D.** $\int_1^2 (t+1)e^t dt$.

Lời giải.

Chọn B

Đặt $t = x^2 + 2x \Rightarrow dt = (2x+2) dx \Rightarrow (x+1) dx = \frac{dt}{2}$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=1 \Rightarrow t=3$

Nên $I = \frac{1}{2} \int_0^3 e^t dt$

Câu 21. Tích phân $I = \int_0^1 e^{x+1} dx$ bằng

- A.** $e - e^2$. **B.** $e^2 - 1$. **C.** $e^2 - e$. **D.** $e^2 + e$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_0^1 e^{x+1} dx = e^{x+1} \Big|_0^1 = e^2 - e$.

Câu 22. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ được kết quả.

- A.** $\ln 2 - \frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{6} - \ln 2$. **C.** $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2} + 4}{3}$.

Lời giải:

Chọn C

Cách làm trắc nghiệm:

Bấm máy tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ ta được kết quả lưu vào biến A ta được $A = 0.390524...$

Thử các đáp án ta thấy **đáp án là B**

Cách làm tự luận:

Đặt

$$t = \sqrt{x+1} (t > 0) \Leftrightarrow t^2 = x+1.$$

$$\Rightarrow 2t dt = dx.$$

$$\text{Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 23. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $0 < I < \frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2} < I < \frac{2}{3}$.

C. $\frac{2}{3} < I < 1$.

D. $\frac{1}{3} < I < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 1, x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I = -\int_1^{\frac{1}{2}} u^2 du = \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}.$$

Vậy $0 < I < \frac{1}{3}$.

Cách 2: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{24}.$

Vậy $0 < I < \frac{1}{3}$.

Câu 24. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \sin x dx$ bằng.

A. $e+1$.

B. e .

C. $1-e$.

D. $e-1$.

Lời giải

Chọn D

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} d(\cos x) = e^{\cos x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = e-1.$$

Câu 25. Bằng cách đổi biến số $t = 1 + \ln x$ thì tích phân $\int_1^e \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$ trở thành

A. $\int_1^4 t^2 dt$.

B. $\int_1^2 (1+t)^2 dt$.

C. $\int_1^e t^2 dt$.

D. $\int_1^2 t^2 dt$.

Lời giải

Chọn D

Với $t = 1 + \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = 2$.

Vậy $\int_1^e \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx = \int_1^2 t^2 dt$.

MỨC ĐỘ 2: THÔNG HIỂU

b Dạng 01: Kiểm tra định nghĩa, tính chất của tích phân

Câu 26. Cho hàm số có $f'(x)$ và $f''(x)$ liên tục trên $\square$. Biết $f'(2) = 4$ và $f'(-1) = -2$, tính $\int_{-1}^2 f''(x) dx$.

A. 6.

B. 2.

C. -8.

D. -6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_{-1}^2 f''(x) dx = f'(x) \Big|_{-1}^2 = f'(2) - f'(-1) = 4 - (-2) = 6$.

Câu 27. Cho $\int_0^1 \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 1.

B. -2.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2-3}{x^2+3x+2} dx &= \int_0^1 \frac{x^2+3x+2-(3x+5)}{x^2+3x+2} dx \\ &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{3x+5}{x^2+3x+2} dx = x \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= 1 - \left(2\ln|x+1| + \ln|x+2| \right) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2 - \ln 3. \end{aligned}$$

Do đó $a=1$; $b=-1$; $c=-1$.

Vậy $a+b+c=-1$.

Câu 28. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = 7$, khi đó $\int_{-1}^2 [4f(x) - g(x)]dx$ bằng

- A.** -1 . **B.** 15 . **C.** -5 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn D

$$\int_{-1}^2 [4f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^2 4f(x)dx - \int_{-1}^2 g(x)dx = 4 \int_{-1}^2 f(x)dx - \int_{-1}^2 g(x)dx = 4 \cdot 2 - 7 = 1.$$

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx$.

- A.** $\frac{13}{3}$. **B.** 4 . **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 13 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx = \int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{13}{3}.$$

Câu 30. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x|dx$ theo a .

- A.** $I = \frac{|3a^2-1|}{2}$. **B.** $I = \frac{a^2+1}{2}$. **C.** $I = \frac{a^2+2}{2}$. **D.** $I = \frac{-2a^2+1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $a > 0$ nên $I = -\int_{-1}^0 x \, dx + \int_0^a x \, dx = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1+a^2}{2}$

b Dạng 02: Tích phân cơ bản(a), kết hợp tính chất (b)

Câu 31. Cho $\int_1^5 f(x) \, dx = 10$; $\int_3^5 f(x) \, dx = 3$. Tính $\int_1^3 [3f(x) + 4x] \, dx$.

- A. 33. B. -37. C. 13. **D. 37.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^5 f(x) \, dx = \int_1^3 f(x) \, dx + \int_3^5 f(x) \, dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) \, dx = \int_1^5 f(x) \, dx - \int_3^5 f(x) \, dx = 7$.

$\int_1^3 [3f(x) + 4x] \, dx = 3 \int_1^3 f(x) \, dx + 4 \int_1^3 x \, dx = 3 \int_1^3 f(x) \, dx + 16 = 21 + 16 = 37$.

Câu 32. Biết $\int_{-1}^{11} f(x) \, dx = 18$. Tính $I = \int_0^2 x [2 + f(3x^2 - 1)] \, dx$.

- A. $I = 10$. B. $I = 5$. **C. $I = 7$.** D. $I = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_0^2 x [2 + f(3x^2 - 1)] \, dx = \int_0^2 2x \, dx + \int_0^2 x \cdot f(3x^2 - 1) \, dx = I_1 + I_2$.

+) $I_1 = \int_0^2 2x \, dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$.

+) $I_2 = \int_0^2 x \cdot f(3x^2 - 1) \, dx = \frac{1}{6} \int_0^2 f(3x^2 - 1) \, d(3x^2 - 1) = \frac{1}{6} \int_{-1}^{11} f(t) \, dt$ (với $t = 3x^2 - 1$).

$\Leftrightarrow I_2 = 3$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 7$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ biết $f(0) = \frac{4}{5}$ và $f'(x) = 2 \sin 2x \cdot \cos 3x$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$ bằng

- A. $\frac{24}{25}$.** B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{25}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 2 \sin 2x \cdot \cos 3x = \sin 5x - \sin x$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + \cos x + C.$$

Vì $f(0) = \frac{4}{5}$ nên suy ra $f(x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + \cos x$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{5} \cos 5x + \cos x \right) dx = \left(-\frac{1}{25} \sin 5x + \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{24}{25}.$$

Câu 34. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $y = x + 3$.

- A.** $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải**Chọn A**

Xét phương trình: $x^2 + 1 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$\text{Diện tích hình phẳng là: } S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \left| \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx \right| = \frac{9}{2}.$$

Câu 35. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\square$, thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 21, \int_0^{10} g(x) dx = 16,$

$$\int_3^{10} [f(x) - g(x)] dx = 2. \text{ Tính } I = \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx.$$

- A.** $I = 11$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 7$. **D.** $I = 15$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int_0^{10} [f(x) - g(x)] dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^{10} g(x) dx = 21 - 16 = 5.$$

$$\text{Mà } \int_0^{10} [f(x) - g(x)] dx = \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx + \int_3^{10} [f(x) - g(x)] dx$$

$$\Leftrightarrow 5 = I + 2 \Leftrightarrow I = 3.$$

Câu 36. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1+x}{x^2} dx$.

- A.** $I = 1 - \frac{1}{e}$. **B.** $I = 1 + \frac{1}{e}$. **C.** $I = 2 - \frac{1}{e}$. **D.** $I = 2 + \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_1^e \frac{1+x}{x^2} dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = \left(-\frac{1}{x} + \ln|x| \right) \Big|_1^e = 2 - \frac{1}{e}.$$

Câu 37. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

- A.** $I = 5 + \pi$. **B.** $I = 7$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 5 + \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 - 2.(0 - 1) = 7.$$

b Dạng 03: Tích phân của hs chứa dấu GTTĐ-hàm xđ

Câu 38. Tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = a + b\sqrt{c}$. Tính $T = a + b + c$?

- A.** $T = 6 + e$. **B.** $T = -2 + e$. **C.** $T = 8 + e$. **D.** $T = 2 + e$.

Lời giải

Chọn D

Tích phân: $I = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ \frac{1}{\sqrt{x}} dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x} dx$$

$$= 2\sqrt{e} - 2 \int_1^e x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{x} \Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 4 - 2\sqrt{e}.$$

Câu 39. Giá trị tích phân $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$ bằng

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx &= \int_{-2}^{-1} |x^2 - 1| dx + \int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^2 |x^2 - 1| dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) + \frac{4}{3} = 4. \end{aligned}$$

Câu 40. Tính $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2$. Tính $T = a^2 + b^3$.

- A.** $T = \frac{152}{27}$. **B.** $T = \frac{134}{27}$. **C.** $T = \frac{8}{3}$. **D.** $T = \frac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = -\frac{\ln x}{(x+1)} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{1}{3} \ln 2 - \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^2 = -\ln 3 + \frac{5}{3} \ln 2 = a \ln 3 + b \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } a = -1; b = \frac{5}{3} \Rightarrow a^2 + b^3 = \frac{152}{27}.$$

Câu 41. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ bằng

- A.** $I = 0$ **B.** $I = 4\sqrt{2}$. **C.** $I = 2\sqrt{2}$. **D.** $I = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = I = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \left(\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right) \\ = \sqrt{2} \left(-\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 4\sqrt{2}.$$

Câu 42. Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

A. $P = 5$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = -6$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } I = \left(\frac{-1}{x} \cdot \ln x \right) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{2} \ln 2 - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow b = 1, c = 2, a = -\frac{1}{2}. \text{ Khi đó}$$

$$P = 2 \left(\frac{-1}{2} \right) + 3 \cdot 1 + 2 = 4.$$

Câu 43. $\int_0^1 |x - 2| dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\forall x \in (0; 1)$ thì $x - 2 < 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 |x - 2| dx = \int_0^1 (2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

b Dạng 04: PP đổi biến t = u(x)-hàm công thức xđ (ngắn gọn là vi phân)

Câu 44. Xét $\int_0^2 xe^{x^2} dx$, nếu đặt $u = x^2$ thì $\int_0^2 xe^{x^2} dx$ bằng

- A. $2 \int_0^4 e^u du$. B. $\frac{1}{2} \int_0^2 e^u du$. C. $\frac{1}{2} \int_0^4 e^u du$. D. $2 \int_0^2 e^u du$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$.

Với $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 2 \Rightarrow u = 4$.

Suy ra: $\int_0^2 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du$.

Câu 45. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2019$. Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin 2x dx$ bằng

- A. $\frac{2019}{2}$. B. $-\frac{2019}{2}$. C. 4038. D. $\frac{2019}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2 \sin 2x dx \Rightarrow \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$.

Do đó $I = -\frac{1}{2} \int_1^0 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{2019}{2}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^2 f(3x+1) dx = 6$. Tính $I = \int_0^7 f(x) dx$.

- A. $I = 16$. B. $I = 18$. C. $I = 8$. D. $I = 20$.

Lời giải

Chọn D

$$A = \int_0^1 f(x) dx = 2, \quad B = \int_0^2 f(3x+1) dx = 6 \quad \text{đặt } t = 3x+1 \Rightarrow dt = 3dx.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=7 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{1}{3} \int_1^7 f(t) dt = 6 \Rightarrow \int_1^7 f(t) dt = 18 \Rightarrow \int_1^7 f(x) dx = 18.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^7 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^7 f(x) dx = 20.$$

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ và $u(x) \in [\alpha, \beta] \quad \forall x \in [a, b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng? $x = a$

A. $\int_{u(a)}^{u(b)} f[u(x)] u'(x) dx = \int_a^b f(u) du.$

B. $\int_a^b f[u(x)] u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$

C. $\int_a^b f[u(x)] u'(x) dx = \int_a^b f(x) du.$

D. $\int_a^b f[u(x)] u'(x) dx = \int_a^b f(u) du.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } u(x) = t \Rightarrow u'(x) dx = dt.$$

Đổi cận

$$\text{Khi } x = a \text{ thì } t = u(a); \text{ khi } x = b \text{ thì } t = u(b).$$

$$\text{Do đó } \int_a^b f[u(x)] u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(2017x) dx$

A. $I = 0.$

B. $I = 1.$

C. $I = \frac{1}{2017}.$

D. $I = 2017.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = 2017x \Rightarrow \frac{dt}{2017} = dx.$$

Ta có: $I = \int_0^{2017} \frac{f(t)}{2017} dt = \frac{1}{2017} \int_0^{2017} f(t) dt = \frac{1}{2017}.$

Vậy $I = \int_0^1 f(2017x) dx = \frac{1}{2017}.$

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $\int_0^{2017} f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(2017x) dx$.

- A.** $I = \frac{1}{2017}$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = 2017$. **D.** $I = 1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2017x \Rightarrow \frac{1}{2017} dt = dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2017$.

$$I = \int_0^1 f(2017x) dx = \frac{1}{2017} \int_0^{2017} f(t) dt = \frac{1}{2017} \int_0^{2017} f(x) dx = \frac{1}{2017}.$$

Câu 50. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_3^5 f(x) dx = a$, ($a \in \mathbb{R}$). Tích phân $I = \int_1^2 f(2x+1) dx$ có giá trị là

- A.** $I = 2a$. **B.** $I = \frac{1}{2}a$. **C.** $I = \frac{1}{2}a + 1$. **D.** $I = 2a + 1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 3$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

$$\Rightarrow I = \int_3^5 \frac{1}{2} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_3^5 f(x) dx = \frac{1}{2} a.$$

h Dạng 05: PP đổi biến $x \equiv u(t)$ - hàm công thức xđ

Câu 51. Cho số dương a và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int_{-a}^a f(x) dx$ bằng

- A.** a . **B.** a^2 . **C.** $2a$. **D.** $2a^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x = -t \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_a^{-a} f(-t)(-dt) = \int_{-a}^a f(-t) dt = \int_{-a}^a f(-x) dx \\ \Rightarrow 2 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-a}^a a dx \Leftrightarrow 2 \int_{-a}^a f(x) dx = 2a^2 \Leftrightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = a^2. \end{aligned}$$

Câu 52. Cho $\int_{-1}^5 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_{-1}^2 f(2x+1) dx$.

- A.** $I = \frac{5}{2}$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = -1 \Leftrightarrow t = -1 \\ x = 2 \Leftrightarrow t = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Thay vào } I \text{ ta được } I = \int_{-1}^5 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^5 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Câu 53. Nếu đặt $t = \sqrt{3\ln^2 x + 1}$ thì tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{3\ln^2 x + 1}} dx$ trở thành

- A.** $I = \frac{1}{3} \int_1^2 dt$. **B.** $I = \frac{2}{3} \int_1^{e^2} t dt$. **C.** $I = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{t} dt$. **D.** $I = \frac{1}{4} \int_1^e \frac{t-1}{t} dt$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3\ln^2 x + 1} \Rightarrow t^2 = 3\ln^2 x + 1 \Rightarrow t dt = 3 \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{3} t dt$$

x	1	e
t	1	2

Đổi cận:

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{3 \ln^2 x + 1}} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot t dt = \frac{1}{3} \int_1^2 dt.$$

Câu 54. Cho $\int_{-1}^5 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_{-1}^2 f(2x+1) dx$.

A. $I = 4$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$.

Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \Leftrightarrow t = -1 \\ x = 2 \Leftrightarrow t = 5 \end{cases}$.

Thay vào I ta được $I = \int_{-1}^5 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^5 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Câu 55. Xét $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$, nếu đặt $x = 2 \sin t$ thì $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ bằng

A. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$.

B. $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$.

C. $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt$.

D. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Do đó $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^2 t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^2 t}{2 \cos t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$.

b Dạng 06: PP tích phân từng phần-hàm xđ

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $[0; 2]$. Biết $f(2) = -3$ và $\int_0^2 xf'(x)dx = -4$. Tính

$$I = \int_0^2 f(x)dx$$

A. $I = -2$.

B. $I = 0$.

C. $I = -7$.

D. $I = -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^2 xf'(x)dx = -4$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow -4 = 2.f(2) - 0.f(0) - \int_0^2 f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow -4 = 2.(-3) - \int_0^2 f(x)dx \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = -2.$$

Câu 57. Tính tích phân $I = \int_1^2 \left(2019 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right) x^{2018} dx$.

A. $I = 2^{2019}$.

B. $I = 2^{2018}$.

C. $I = 2^{2020}$.

D. $I = 2^{2017}$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_1^2 \left(2019 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right) x^{2018} dx = 2019 \int_1^2 x^{2018} \log_2 x dx + \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 x^{2018} dx = 2019 I_1 + \frac{1}{\ln 2} I_2.$$

$$\text{Trong đó } I_2 = \int_1^2 x^{2018} dx = \frac{x^{2019}}{2019} \Big|_1^2 = \frac{2^{2019} - 1}{2019}.$$

và $I_1 = \int_1^2 x^{2018} \log_2 x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \log_2 x \\ dv = x^{2018} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x \ln 2} dx \\ v = \frac{x^{2019}}{2019} \end{cases}$.

Khi đó $I_1 = \left(\frac{x^{2019}}{2019} \cdot \log_2 x \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{2019 \ln 2} I_2 = \frac{2^{2019}}{2019} - \frac{1}{2019 \ln 2} \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2019} = \frac{2^{2019}}{2019} - \frac{2^{2019} - 1}{2019^2 \ln 2}$.

Vậy $I = 2^{2019}$.

Câu 58. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x-1) \cos x dx = \frac{m\pi\sqrt{2} + n\sqrt{2} + k}{4}$. Khi đó $m-n+k$ bằng

- A.** 11. **B.** -10. **C.** -9. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x-1) \cos x dx = \left[(2x-1) \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \left[(2x-1) \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 8}{4}.$$

$$\Rightarrow m=1, n=2, k=-8 \Rightarrow m-n+k=-9.$$

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$. Biết $f(2) = a$ và $\int_1^2 (x-1) f'(x) dx = b$. Tích phân $\int_1^2 f(x) dx$ có giá trị bằng

- A.** $-a-b$. **B.** $b-a$. **C.** $a+b$. **D.** $a-b$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $I = \int_1^2 (x-1) f'(x) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\text{Nên } I = (x-1)f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)dx \Rightarrow I = f(2) - \int_1^2 f(x)dx = a - \int_1^2 f(x)dx.$$

$$\text{Mà } I = b \Rightarrow a - \int_1^2 f(x)dx = b \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = a - b.$$

Câu 60. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$. Khi đó, giá trị của $a^2 + b$ bằng

A. 9.

B. 11.

C. 7.

D. 13.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = x \cdot \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x}.$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2.$$

$$\text{Vậy } a = 3; b = 2. \text{ Do đó: } a^2 + b = 3^2 + 2 = 11.$$

Câu 61. Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ trong đó $a \in \mathbb{Q}$; b, c là các số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau. Tính giá trị của $2a + 3b + c$.

A. 5.

B. 4.

C. -6.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \ln x \right) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

Theo đề ta có $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2$.

Do đó $2a + 3b + c = 4$.

b Dạng 08: Tích phân hàm số hữu tỷ-hàm xđ

Câu 62. Cho $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x - 2} = -\frac{a \ln b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên tố. Giá trị $a + b + c$ bằng

- A. 15. B. 7. C. 10. D. 11.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{3} (\ln|x-2| - \ln|x+1|) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \right) \Big|_0^1 = -\frac{2 \ln 2}{3}$$

Suy ra $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$. Vậy $a + b + c = 7$.

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$ và thỏa mãn $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\int_0^e f(x) dx = e$. B. $\int_0^1 f(x) dx = 1$. C. $\int_0^1 f(x) dx = e$. D. $\int_0^e f(x) dx = 1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$.

$$e = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx.$$

Câu 64. Tính $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$. Giá trị của I là

- A. $I = \frac{-2}{3} \ln 2$. B. $I = -3 \ln 2$. C. $I = \frac{1}{2} \ln 3$. D. $I = 2 \ln 3$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} \ln 4 = -\frac{2}{3} \ln 2$$

Câu 65. Tính $\int_{-1}^0 \frac{2x-1}{1-x} dx$ bằng

- A.** $\ln 2 - 2$. **B.** $\ln 2 + 2$. **C.** $-\ln 2 + 2$. **D.** $-\ln 2 - 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\int_{-1}^0 \frac{2x-1}{1-x} dx = \int_{-1}^0 \left(-2 + \frac{1}{1-x} \right) dx = \left[-2x - \ln(1-x) \right]_{-1}^0 = -2 + \ln 2.$$

Câu 66. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x+4)dx}{x^2+3x+2}$

- A.** $5\ln 2 + 2\ln 3$. **B.** $5\ln 2 - 2\ln 3$. **C.** $2\ln 5 - 2\ln 3$. **D.** $5\ln 2 - 3\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

$$I = \int_0^1 \frac{(x+4)dx}{x^2+3x+2} = \int_0^1 \frac{(x+4)dx}{(x+1)(x+2)} = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= \left(3\ln|x+1| - 2\ln|x+2| \right) \Big|_0^1$$

$$= 3\ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 = 5\ln 2 - 2\ln 3$$

Câu 67. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a - \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

- A.** 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) = x \Big|_0^1 - \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+b=3.$$

Cách 2: (dùng máy tính fx-580VN X).

+ Tính $\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx \xrightarrow{\text{Sto A}} A.$

+ Xem $a = f(x) = A + \ln x.$

+ Dùng Menu Table $f(x) = A + \ln x.$

Bắt đầu: 1.

Kết thúc: 25.

Bước: 1.



Dò và ta có kết quả: $a=1, b=2 \Rightarrow a+b=3.$

b Dạng 10: Tích phân HS chặn, lẻ- hàm xd

Câu 68. Cho $\int_0^4 f(x) dx = \frac{16}{3}.$ Tính $I = \int_0^4 \left[\frac{5}{(x+1)^2} - 3f(x) \right] dx.$

A. $I = -12.$

B. $I = 0.$

C. $I = -20.$

D. $I = 1.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I = \int_0^4 \left[\frac{5}{(x+1)^2} - 3f(x) \right] dx = \int_0^4 \frac{5}{(x+1)^2} dx - 3 \int_0^4 f(x) dx = I_1 - 16$

$$I_1 = \int_0^4 \frac{5}{(x+1)^2} dx = \frac{-5}{x+1} \Big|_0^4 = 4.$$

Vậy $I = 4 - 16 = -12$.

Câu 69. Cho $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c \ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

A. 1.

B. 64.

C. 12.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

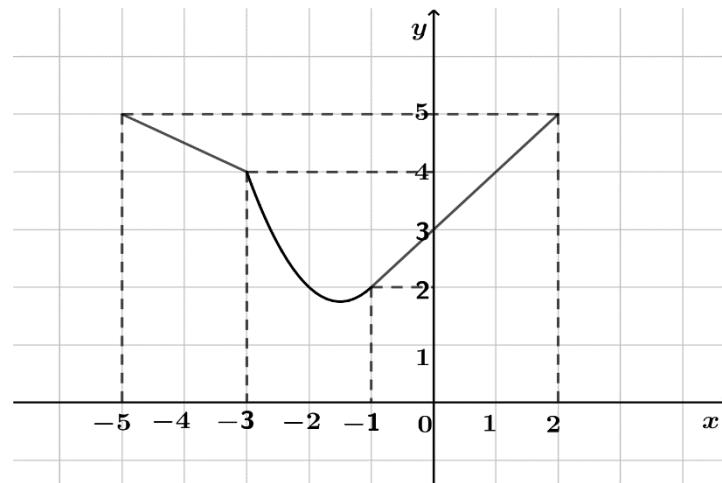
$$\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2} dx = \int_3^4 \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = (3 \ln |x-1| + 2 \ln |x-2|) \Big|_3^4 = 3 \ln 3 - \ln 2.$$

Do đó $a = 3, b = -1, c = 0$.

Vậy $2^{a-3b+c} = 64$.

h Dạng 12: Tích phân dựa vào đồ thị

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới



Biết $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [-5; 2]$ và $\int_{-3}^{-1} f(x) dx = \frac{14}{3}$. Tính $F(2) - F(-5)$.

A. $-\frac{145}{6}$.

B. $-\frac{89}{6}$.

C. $\frac{145}{6}$.

D. $\frac{89}{6}$.

Lời giải

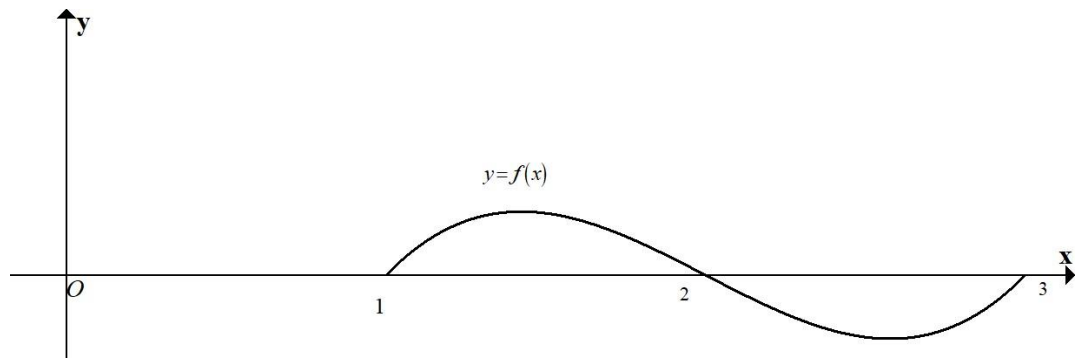
Chọn C

Trên đoạn $[-5; -3]$ ta có $f(x) = \frac{5-x}{2}$; trên đoạn $[-1; 2]$ ta có $f(x) = x + 3$.

Khi đó: $F(2) - F(-5) = \int_{-5}^2 f(x) dx$.

$$= \int_{-5}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-5}^{-3} \frac{5-x}{2} dx + \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^2 (x+3) dx = \frac{145}{6}.$$

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên $[1; 3]$ như hình vẽ, đồ thị nhận điểm $I(2; 0)$ làm tâm đối xứng.



Đặt $K = \int_1^3 f(x) dx$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $K = 0$.

B. $K = \int_1^2 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx$.

C. $K = \int_1^2 |f(x)| dx + \int_2^3 |f(x)| dx$.

D. $K = 2$.

Lời giải

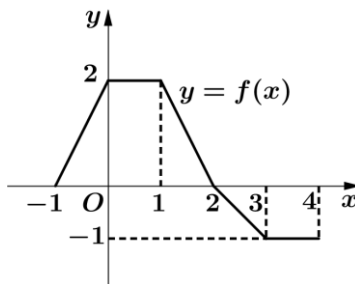
Chọn A

Ta có $K = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$.

Theo giả thiết hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên $[1; 3]$ như hình vẽ, đồ thị nhận điểm $I(2; 0)$ làm tâm đối xứng, nên $\int_1^2 f(x) dx = -\int_2^3 f(x) dx$.

Vậy $K = 0$.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1; 4]$ như hình vẽ dưới đây. Tính tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$.



A. $I = 5$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$I = \int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \frac{1}{2}(3+1)2 - \frac{1}{2}(1+2)1 = \frac{5}{2}$$

b Dạng 13: Tích phân chứa tham số (chỉ trong kết quả)

Câu 73. Cho tích phân $\int_1^2 f(x)dx = a$. Hãy tính tích phân $I = \int_0^1 xf(x^2+1)dx$ theo a .

A. $I = 2a$.

B. $I = 4a$.

C. $I = \frac{a}{4}$.

D. $I = \frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Đổi cận:

x	0	1
t	1	2

Khi đó $I = \int_0^1 xf(x^2+1)dx = \int_1^2 f(t) \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_1^2 f(t)dt = \frac{a}{2}$.

Câu 74. Nếu kết quả của $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$ được viết ở dạng $\ln \frac{a}{b}$ với a, b là các số tự nhiên và ước chung lớn nhất của a, b bằng 1. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $a + 2b = 13$.

B. $a - b > 2$.

C. $a^2 + b^2 = 41$.

D. $3a - b < 12$.

Lời giải.

Chọn B

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| \Big|_1^2 = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4} \text{ suy ra: } a=5, b=4$$

$$a - b = 1 < 2$$

Câu 75. Cho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$, $(a, b \in \mathbb{N}^*)$. Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = 5$.

B. $a + 2b = 7$.

C. $a + 2b = 8$.

D. $a + 2b = -1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \int_0^1 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) dx = \frac{2}{3} \left(\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x+1)^3} \right) \Big|_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó } a = 2, b = 3, a + 2b = 8.$$

Câu 76. Biết $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 7x + 12} = a \ln 5 + b \ln 4 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề đúng là

A. $a - b + c = 2$.

B. $a + 3b + 5c = 0$.

C. $a - 3b + 5c = -1$.

D. $a + b + c = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 7x + 12} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) dx = (\ln|x+3| - \ln|x+4|) \Big|_0^1$$

$$= \ln 4 - \ln 5 - \ln 3 + \ln 4 = 2 \ln 4 - \ln 3 - \ln 5.$$

$$\text{Vậy } a = -1; b = 2; c = -1 \Rightarrow a + 3b + 5c = 0.$$

Câu 77. Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. 2. B. 3. **C. 5.** D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = \int (1 - 2\sin 2x \cos 2x) dx = \int (1 - \sin 4x) dx = x + \frac{1}{4} \cos 4x + C.$$

$$\text{Mà } \int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C \text{ nên } \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b=5.$$

Câu 78. Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = m \ln 2 + n \ln 3 + p \ln 5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính $S = m^2 + n + p^2$.

- A. $S = 5$. B. $S = 4$. **C. $S = 3$.** **D. $S = 6$.**

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx &= \int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int_1^3 \frac{2x+4-(x+1)}{(x+1)(x+2)} dx \\ &= \int_1^3 \left[\frac{2x+4}{(x+2)(x+1)} - \frac{x+1}{(x+2)(x+1)} \right] dx \\ &= \int_1^3 \frac{2}{x+1} dx - \int_1^3 \frac{1}{x+2} dx = 2 \ln(x+1) \Big|_1^3 - \ln(x+2) \Big|_1^3 = 2 \ln 4 - 2 \ln 2 - (\ln 5 - \ln 3) \\ &= 2 \ln \left(\frac{4}{2} \right) - \ln 5 + \ln 3 = 2 \ln 2 + \ln 3 - \ln 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \\ p=-1 \end{cases} \Leftrightarrow S = 2^2 + 1 + (-1)^2 = 6. \end{aligned}$$

Câu 79. Biết $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x^2} dx = -a + b.e^{-1}$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $a+b=-6$.** B. $a+b=3$. C. $a+b=-3$. D. $a+b=6$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_1^e \frac{2 \ln x}{x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases} . \text{ Khi đó:}$$

$$I = \int_1^e \frac{2 \ln x}{x^2} dx = 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= 2 \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \right)$$

$$= 2 \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^e - \frac{1}{x} \Big|_1^e \right) = -2 \left(\frac{\ln x}{x} \Big|_1^e + \frac{1}{x} \Big|_1^e \right) = -2 \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e} - 1 \right) = 2 - \frac{4}{e} = 2 - 4.e^{-1}.$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } \int_1^e \frac{2 \ln x}{x^2} dx = -a + b.e^{-1} \text{ nên } \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow a + b = -6.$$

Câu 80. Cho $\int_1^2 (x+1)e^x dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $a + b + c$.

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \text{ ta được } du = dx, v = e^x.$$

$$\int_1^2 (x+1)e^x dx = (x+1)e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = xe^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e.$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -1, c = 0 \Rightarrow a + b + c = 1.$$

Câu 81. Biết $\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \ln \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $S = a - b$.

A. 1.

B. -2.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Big|_3^4 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{4}{3}.$$

$$S = a - b = 1.$$

b Dạng 14: Tích phân chứa tham số trong cận hoặc f(x)

Câu 82. Tìm số giá trị của tham số m để $\int_0^m (2x+1)dx = 2$.

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int_0^m (2x+1)dx = (x^2 + x) \Big|_0^m = m^2 + m = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 83. Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2)dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Theo định nghĩa tích phân ta có } I = \int_0^1 (4x - 2m^2)dx = (2x^2 - 2m^2x) \Big|_0^1 = -2m^2 + 2.$$

$$\text{Khi đó } I + 6 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2 + 6 > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 84. Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 (4ax^3 - 3a^2x^2 + 2x + 1)dx = 0$?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int_0^1 (4ax^3 - 3a^2x^2 + 2x + 1)dx = 0$$

$$\Leftrightarrow (ax^4 - a^2x^3 + x^2 + x) \Big|_0^1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - a^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2. \end{cases}$$

Câu 85. Biết rằng $\int_1^a \ln x dx = 1 + 2a$, ($a > 1$). Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a \in (6; 9)$.

B. $a \in (18; 21)$.

C. $a \in (1; 4)$.

D. $a \in (11; 14)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\text{Ta có } \int_1^a \ln x dx = a \cdot \ln a - \int_1^a dx = a \ln a - a + 1 = 1 + 2a$$

$$\Rightarrow a \ln a = 3a \Leftrightarrow \ln a = 3 \Leftrightarrow a = e^3.$$

$$\text{Vậy } a \in (18; 21).$$

Câu 86 Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k (2x-1) dx = 8 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$.

A. -3 .

B. 3 .

C. **1.**

D. -1 .

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\int_1^k (2x-1) dx = 8 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} \Leftrightarrow (x^2-x) \Big|_1^k = 8 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k = 8 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+5}+2} \Leftrightarrow k^2 - k = 2 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Câu 87. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $\int_0^1 (1-x^2)^n x dx$ theo n .

A. $I = \frac{1}{2n+1}$.

B. $I = \frac{1}{2n+2}$.

C. $I = \frac{1}{2n}$.

D. $I = \frac{1}{2n-1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta xét: $I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$.

Đặt $t = 1-x^2 \Rightarrow -\frac{1}{2} dt = x dx$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0$.

$$I = -\frac{1}{2} \int_1^0 t^n dt = \frac{1}{2} \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_1^0 = \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+2}.$$

Câu 88. Biết rằng $\int_1^a \ln x dx = 1+2a$, ($a > 1$). Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a \in (11;14)$.

B. $a \in (6;9)$.

C. $a \in (18;21)$.

D. $a \in (1;4)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Ta có $\int_1^a \ln x dx = a \ln a - \int_1^a dx = a \ln a - a + 1 = 1 + 2a$

$\Rightarrow a \ln a = 3a \Leftrightarrow \ln a = 3 \Leftrightarrow a = e^3$.

Vậy $a \in (18;21)$.

b Dạng 15: Tích phân liên quan đến phương trình hàm ẩn

Câu 89. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^1 f(2x) dx = 2$. Tích phân $\int_0^2 x f'(x) dx$ bằng ?

A. 30.

B. 36.

C. 16.

D. 28.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=2$.

Khi đó $\int_0^1 f(2x)dx = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 4.$

Xét tích phân $I = \int_0^2 xf'(x)dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}.$

$I = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2f(2) - 4 = 2.16 - 4 = 28.$

Câu 90. Cho biết $\int_{-1}^5 f(x)dx = 15.$ Giá trị của $P = \int_0^2 [f(5-3x) + 7]dx$ bằng

A. $P = 19.$

B. $P = 15.$

C. $P = 37.$

D. $P = 27.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \int_0^2 [f(5-3x) + 7]dx = \int_0^2 f(5-3x)dx + 7 \int_0^2 dx$
 $= -\frac{1}{3} \int_0^2 f(5-3x)d(5-3x) + 7x \Big|_0^2 = -\frac{1}{3} \int_5^{-1} f(t)dt + 14 = \frac{1}{3} \int_{-1}^5 f(t)dt + 14 = 5 + 14 = 19.$

Câu 91. Cho $\int_0^2 f(x)dx = 2020.$ Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(2x) - 3f(2-2x)]dx.$

A. 4040.

B. -2020.

C. 2020.

D. 1010.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int_0^1 [f(2x) - 3f(2-2x)]dx = \int_0^1 f(2x)dx - 3 \int_0^1 f(2-2x)dx = I_1 - 3I_2.$

+ Tính $I_1 = \int_0^1 f(2x)dx$

Đặt $2x = u \Rightarrow 2dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du.$

Đổi cận: $\begin{cases} x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow 2 \end{cases}$

Nên $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u)du = \frac{1}{2} \cdot 2020 = 1010.$

+ Tính $I_2 = \int_0^1 f(2-2x)dx$

Đặt $2-2x=u \Rightarrow -2dx=du \Rightarrow dx=-\frac{1}{2}du$.

Đổi cận: $\begin{cases} x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 2 \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow 0 \end{cases}$

Nên $I_2 = -\frac{1}{2} \int_2^0 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u)du = \frac{1}{2} \cdot 2020 = 1010$.

Vậy $I = I_1 - 3I_2 = 1010 - 3 \cdot 1010 = -2020$.

Câu 92. Cho $\int_1^3 f(x)dx = 4$, khi đó $\int_0^1 f(2x+1)dx$ bằng:

- A. 8. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2}$

Đổi cận:

x	0	1
t	1	3

Ta có $\int_0^1 f(2x+1)dx = \int_1^3 f(t) \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x)dx = 2$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\square$ thỏa mãn $f(0) = f(1) = 1$. Biết

$\int_0^1 e^x (f(x) + f'(x))dx = a + b$. Tính $S = a^{2017} + b^{2018}$.

- A. $S = 2$. B. $S = -1$. C. $S = 0$. D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần, ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) e^x dx &= \left(e^x f(x) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx \\ &\Rightarrow \int_0^1 (f(x) + f'(x)) \cdot e^x dx = \left(e^x f(x) \right) \Big|_0^1 = f(1)e - f(0) = e - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a = 1; b = -1 \Rightarrow S = 2.$$

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\square$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x) = x + 1, \forall x \in \square$. Tích phân $\int_0^4 f(x) dx$ bằng:

- A.** 25. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** 88.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } x = t^3 + 3t. \text{ Khi đó: } dx = (3t^2 + 3) dt.$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = 0.$$

$$x = 4 \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy: } \int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 f(t^3 + 3t) (3t^2 + 3) dt = \int_0^1 (t + 1) (3t^2 + 3) dt = \frac{25}{4}.$$

Câu 95. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$ và thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \square$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

- A.** $I = 14$. **B.** $I = 10$. **C.** $I = \frac{5}{4}$. **D.** $I = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = f(x) \text{ ta có: } t^3 + t = x \Rightarrow dx = (3t^2 + 1) dt.$$

Đổi cận:

x	0	2
t	0	1

$$I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 t(3t^2 + 1) dt = \frac{5}{4}.$$

Câu 96. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và $f(5) = 10$, $\int_0^5 x f'(x) dx = 30$. Tính $\int_0^5 f(x) dx$.

- A. 70. B. -30. C. -20. **D. 20.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$$

$$\int_0^5 x f'(x) dx = (x f(x)) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x) dx \Leftrightarrow 30 = 5 f(5) - \int_0^5 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^5 f(x) dx = 5 f(5) - 30 = 20.$$

MỨC ĐỘ 3: VẬN DỤNG

b Dạng 01: Kiểm tra định nghĩa, tính chất của tích phân

Câu 97. Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c chữ d trong dx thẳng đứng là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{5}{12}$. C. $-\frac{1}{3}$. **D. $\frac{1}{12}$.**

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2x+1-1)dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{(2x+1)^2} \right) d(2x+1)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(\ln 3 + \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{6}.$$

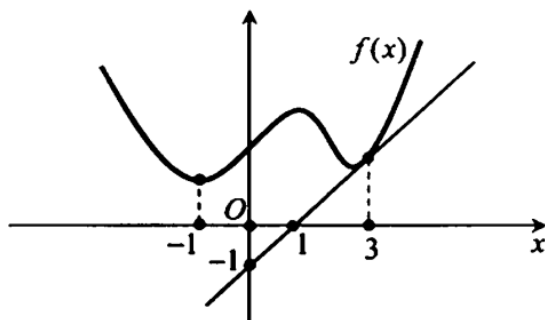
$$\text{Vậy } a+b+c = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Cách 2: Đặt } t = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}, dx = \frac{1}{2} dt$$

$$I = \int_1^3 \frac{t-1}{4t^2} dt = \left(\frac{1}{4} \ln t + \frac{1}{4t} \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{6}$$

$$\text{Vậy: } a+b+c = \frac{1}{12}$$

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ dưới. Biết đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) . Giá trị của tích phân $\int_{-1}^3 f''(x) dx$ tương ứng bằng



A. 3.

B. -2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(-1) = 0$; $f'(3)$ bằng hệ số góc của tiếp tuyến $d = \tan \alpha = \left| \frac{-1}{1} \right| = 1$.

Suy ra $\int_{-1}^3 f''(x) dx = f'(3) - f'(-1) = 1 - 0 = 1$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f'(x) dx$ bằng?

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 0.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

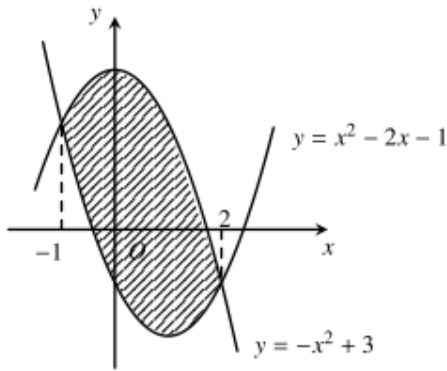
Từ đẳng thức $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 2f(0) + 3f(1) = 1 \\ 3f(0) + 2f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = -\frac{2}{5} \\ f(1) = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{3}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = 1.$$

Câu 100. Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 3$ và hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ có đồ thị như hình vẽ.

Tích phân $I = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx$ bằng với tích phân nào sau đây?



A. $I = \int_{-1}^2 |f(x)| - |g(x)| dx.$

B. $I = \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] dx.$

C. $I = \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx.$

D. $I = \int_{-1}^2 [f(x) + g(x)] dx.$

Lời giải

Chọn B

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in [-1; 2] \Rightarrow I = \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] dx$$

Câu 101. Cho hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cdot \sin(\pi x)$. Tính $f(4)$ với $x > 0$.

A. $f(4) = \frac{\pi}{2}.$

B. $f(4) = \frac{\pi}{4}.$

C. $f(4) = \frac{1}{2}.$

D. $f(4) = \frac{\pi - 1}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$ trên $[0; +\infty)$, ($F'(t) = f(t)$).

Ta có $\int_0^{x^2} f(t)dt = F(t)|_0^{x^2} = F(x^2) - F(0) = x \cdot \sin(\pi x)$.

Đạo hàm 2 vế ta được $f(x^2) \cdot 2x = 1 \cdot \sin(\pi x) + x \cdot \pi \cos(\pi x)$.

Thay $x = 2$, ta được $f(4) \cdot 4 = \sin 2\pi + 2\pi \cdot \cos 2\pi = 2\pi \Rightarrow f(4) = \frac{\pi}{2}$.

Lưu ý: $\boxed{m(x) \cdot f(x) + n(x) \cdot f'(x) = h(x)}$ với $u(x) \neq 0$

Dự đoán: $m(x) \cdot f(x) + n(x) \cdot f'(x) = [u(x) \cdot f(x)]'$

$[u(x) \cdot f(x)]' = u'(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot f'(x)$.

Lập tỉ số:

$$\frac{m(x)}{u'(x)} = \frac{n(x)}{u(x)} \Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{m(x)}{n(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{m(x)}{n(x)} dx \Leftrightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{m(x)}{n(x)} dx \Rightarrow u(x) = ?$$

• Đạo hàm ngược lại: $[u(x) \cdot f(x)]' \Rightarrow$ phương pháp giải ?

b Dạng 02: Tích phân cơ bản(a), kết hợp tính chất (b)

Câu 102. Biết tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = a\pi + \ln b$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b$

A. $S = 2$.

B. $S = \frac{3}{4}$.

C. $S = \frac{11}{4}$.

D. $S = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $5\sin x + \cos x = A(\sin x + \cos x) + B(\cos x - \sin x) = (A - B)\sin x + (A + B)\cos x$

Đồng nhất hai vế ta được $\begin{cases} A - B = 5 \\ A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \left(3x - 2 \ln |\sin x + \cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - 2 \ln \sqrt{2} = \frac{3\pi}{4} + \ln \left(\frac{1}{2} \right). \text{ Vậy } a+b = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Câu 103. Biết $\int_1^e \frac{1 - \ln x}{(x + \ln x)^2} dx = \frac{1}{ae+b}$ với $a; b \in \mathbf{Z}$. Tính $T = 2a + b^2$.

A. $T = 2$.

B. $T = 3$.

C. $T = 1$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^e \frac{1 - \ln x}{(x + \ln x)^2} dx &= \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)^2} dx = \int_1^e \frac{1}{\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)^2} d\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{1 + \frac{\ln x}{x}} \Big|_1^e = -\frac{1}{1 + \frac{1}{e}} + 1 = \frac{1}{e+1}. \text{ Do đó } a=b=1 \Rightarrow T = 2a + b^2 = 3. \end{aligned}$$

Câu 104. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[1; 3]$ và thỏa mãn $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx \text{ bằng}$$

A. $I = 7$.

B. $I = 6$.

C. $I = 8$.

D. $I = 9$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \\ \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10 \\ 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x) dx = 4 \\ \int_1^3 g(x) dx = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = 4 + 2 = 6.$$

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ và $f'(x) = \sin x \cdot \sin^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{167}{225}$.

B. $\frac{104}{225}$.

C. $-\frac{104}{225}$.

D. $\frac{121}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = \sin x \cdot \sin^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Có } \int f'(x) dx &= \int \sin x \cdot \sin^2 2x dx = \int \sin x \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \int \frac{\sin x}{2} dx - \int \frac{\sin x \cdot \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin x dx - \frac{1}{4} \int (\sin 5x - \sin 3x) dx = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{12} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{12} \cos 3x + C, \forall x \in \mathbb{R}$. Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Do đó $f(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{12} \cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{12} \cos 3x \right) dx = \left(-\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{100} \sin 5x - \frac{1}{36} \sin 3x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{104}{225}.$$

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = e + \frac{1}{4}$ và $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$. Khi đó $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{5e^2 - 7}{5}$.

B. $\frac{5e^2 + 7}{5}$.

C. $\frac{5e^2 - 2}{5}$.

D. $\frac{e^2 + 3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)) dx = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + C.$$

Mà $f(1) = e + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + e + 1 + C = e + \frac{1}{4} \Leftrightarrow C = -1$ suy ra $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - 1$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - 1 \right) dx = \left(\frac{x^5}{20} + e^x - \sin(\pi x) - x \right) \Big|_0^2 = \frac{5e^2 - 7}{5}.$$

Câu 107. Biết $\int_1^e \frac{1 - \ln x}{(x + \ln x)^2} dx = \frac{1}{ae + b}$ với $a; b \in \mathbb{Z}$. Tính $T = 2a + b^2$.

A. $T = 3$.

B. $T = 4$.

C. $T = 2$.

D. $T = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^e \frac{1 - \ln x}{(x + \ln x)^2} dx &= \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)^2} dx = \int_1^e \frac{1}{\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)^2} d\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{1 + \frac{\ln x}{x}} \bigg|_1^e = -\frac{1}{1 + \frac{1}{e}} + 1 = \frac{1}{e + 1}. \text{ Do đó } a = b = 1 \Rightarrow T = 2a + b^2 = 3. \end{aligned}$$

h Dạng 03: Tích phân của hs chứa dấu GTTĐ-hàm xđ

Câu 108. (THPT Hậu Lộc -Thanh Hoá lần 2 -18-19) Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$. Khi đó, giá trị của $a^2 + b$ bằng

A. 11.

B. 7.

C. 13.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= x \tan x \bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln |\cos x| \bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2 \Rightarrow a = 3; b = 2. \text{ Vậy } a^2 + b = 11. \end{aligned}$$

Câu 109. Biết tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{ae^2 + b}{4}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $a + b$.

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$I = \int_1^e x \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} \ln x = u \\ x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = du \\ \frac{x^2}{2} = v \end{cases}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow a + b = 2.$$

Câu 110. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_1^5 f(x) dx = -8$. Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^2 f(|2x - 3|) dx.$$

A. $I = -6$.

B. $I = -8$.

C. $I = -2$.

D. $I = -4$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 f(|2x - 3|) dx = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} f(|2x - 3|) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(|2x - 3|) dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} f(3 - 2x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(2x - 3) dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{\frac{3}{2}} f(3 - 2x) d(3 - 2x) + \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{2}}^2 f(2x - 3) d(2x - 3) \\ &= -\frac{1}{2} \int_5^0 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f(s) ds \quad (t = 3 - 2x, s = 2x - 3) = \frac{1}{2} \int_0^5 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_1^5 f(x) dx = -2. \end{aligned}$$

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x - 1|) dx$.

A. $I = 4$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = 6$.

D. $I = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Có } I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|)dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)dx = I_1 + I_2$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)dx. \text{ Đặt } u = 1-2x \Rightarrow du = -2dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 3 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{-1}{2} \int_3^0 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^3 f(u)du = 3$$

$$\text{Tính } I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)dx. \text{ Đặt } u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u)du = 1$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = 4.$$

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và $\int_0^2 f(x)dx = 1; \int_0^4 f(x)dx = 3$. Tính $\int_{-1}^1 f(|3x-1|)dx$.

- A. 2. B. $\frac{4}{3}$. C. 1. D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(|3x-1|)dx &= \int_{-1}^{1/3} f(1-3x)dx + \int_{1/3}^1 f(3x-1)dx. \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^{1/3} f(1-3x)d(1-3x) + \frac{1}{3} \int_{1/3}^1 f(3x-1)d(3x-1). \\ &= -\frac{1}{3} \int_4^0 f(t)dt + \frac{1}{3} \int_0^2 f(t)dt = -\frac{1}{3}(-3) + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Câu 113. (Chuyên Tự Nhiên Lần 1 - 2018-2019) Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên a, b, c sao cho

$$\int_2^3 (4x+2) \ln x dx = a + b \ln 2 + c \ln 3. \text{ Giá trị của } a + b + c \text{ bằng}$$

- A. -5. B. 19. C. -19. D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ (4x+2)dx = dv \Rightarrow 2x^2 + 2x = v \end{cases}$$

Khi

đó

$$\int_2^3 (4x+2) \ln x dx = \ln x \cdot (2x^2 + 2x) \Big|_2^3 - 2 \int_2^3 (x+1) dx = 24 \ln 3 - 12 \ln 2 - 2 \cdot \frac{7}{2} = -7 - 12 \ln 2 + 24 \ln 3.$$

$$\text{Vậy } a = -7; b = -12; c = 24 \Rightarrow a + b + c = 5.$$

b Dạng 04: PP đổi biến t ≡ u(x)-hàm công thức xđ (ngắn gọn là vi phân)

Câu 114. Giá trị của tích phân $\int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100)dx$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 100.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Tính } I = \int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100)dx.$$

$$\text{Đặt } t = 100 - x \Rightarrow dx = -dt.$$

Đổi cận: Khi $x = 0$ thì $t = 100$; khi $x = 100$ thì $t = 0$.

Do $x(x-1)\dots(x-100) = (100-t)(99-t)\dots(1-t)(-t) = -t(t-1)\dots(t-99)(t-100)$ nên

$$I = \int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100)dx = - \int_{100}^0 t(t-1)\dots(t-100)dt = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

Câu 115. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$.
Tính $f(2)$.

A. 20.

B. 10.

C. 15.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Với mọi $x \in [1; 2]$, ta có: $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 2x^3 + 3x^2$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 2x + 3$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Vi: } \frac{f(1)}{1} = 1^2 + 3 \cdot 1 + C \Leftrightarrow 4 = 4 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó: } \frac{f(2)}{2} = 2^2 + 3 \cdot 2 + 0 \Leftrightarrow f(2) = 20.$$

Câu 116. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-6; 6]$; biết $\int_{-3}^0 f(-x) dx = 4$ và $\int_1^2 f(-3x) dx = 4$. Tính

$$\int_0^6 f(x) dx.$$

A. $I = 0$.

B. $I = -8$.

C. $I = 6$.

D. $I = 16$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét tích phân } \int_{-3}^0 f(-x) dx = 4.$$

$$\text{Đặt } x = -t \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Đổi cận: khi } x = -3 \text{ thì } t = 3; \text{ khi } x = 0 \text{ thì } t = 0 \text{ do đó } \int_{-3}^0 f(-x) dx = -\int_3^0 f(t) dt = \int_0^3 f(t) dt.$$

$$\Rightarrow \int_0^3 f(t) dt = 4 \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = 4$$

$$\text{Do hàm số } y = f(x) \text{ là hàm số lẻ nên } f(-3x) = -f(3x).$$

$$\text{Do đó } \int_1^2 f(-3x) dx = -\int_1^2 f(3x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(3x) dx = -4.$$

$$\text{Xét } \int_1^2 f(3x) dx = -4. \text{ Đặt } t = 3x \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 1 \text{ thì } t = 3; \text{ khi } x = 2 \text{ thì } t = 6 \text{ do đó } \int_1^2 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_3^6 f(t) dt = -4$$

$$\Rightarrow \int_3^6 f(t) dt = -12 \Rightarrow \int_3^6 f(x) dx = -12.$$

$$\text{Do đó } \int_0^6 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = 4 - 12 = -8.$$

Câu 117. Cho biết $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx = \frac{a}{3} + b\sqrt{3}$ với a, b là các số nguyên. Giá trị biểu thức $\frac{1}{2^b} + \log_2 a$ bằng

- A. -1. B. $\frac{7}{2}$. C. 8. D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx = \int_1^e \sqrt{\ln x + 3} d(\ln x + 3) = \frac{2}{3} \sqrt{(\ln x + 3)^3} \Big|_1^e = \frac{2}{3} (8 - 3\sqrt{3}) = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}.$$

Do đó: $a = 16, b = -2$.

$$\text{Vậy } \frac{1}{2^b} + \log_2 a = \frac{1}{2^{-2}} + \log_2 16 = 8.$$

Câu 118. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 x + 1} + \sqrt{\sin^2 x + 1}} dx = \frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{6} + c}{6}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = |a| + |b| + |c|$?

- A. $P = 12$. B. $P = 14$. C. $P = 36$. D. $P = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 x + 1} + \sqrt{\sin^2 x + 1}} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sqrt{3 + \cos 2x} + \sqrt{3 - \cos 2x}} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2 \sin 2x dx$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$$

$$\begin{aligned} I &= -\sqrt{2} \int_1^0 \frac{t}{\sqrt{3+t} + \sqrt{3-t}} dt = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{3+t} + \sqrt{3-t}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 (\sqrt{3+t} - \sqrt{3-t}) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{2}{3} (\sqrt{3+t})^3 + \frac{2}{3} (\sqrt{3-t})^3 \right]_0^1 = \frac{16\sqrt{2} - 12\sqrt{6} + 8}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = 16; b = -12; c = 8 \Rightarrow P = 36.$$

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 0$ và $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x + 4}, \forall x \in (2; +\infty)$. Khi đó $\int_3^{e+2} f(x) dx = ae + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tích $a.b$ bằng

A. -2.

B. 24.

C. 8.

D. -24.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Ta có: $f(x) = \int \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{2x}{(x-2)^2} dx = I$

Đặt $t = x - 2 \Rightarrow dt = dx$

$$I = \int \frac{2(t+2)}{t^2} dt = 2 \ln|t| - \frac{4}{t} + C.$$

Với $x = 3 \Rightarrow t = 1$ nên có $f(1) = 0 \Rightarrow C = 4$

Đổi cận: $x = 3 \Rightarrow t = 1$

$x = e + 2 \Rightarrow t = e$

Vậy $\int_3^{e+2} f(x) dx = \int_1^e \left(2 \ln|t| - \frac{4}{t} + 4 \right) dt = 4e - 6$. Suy ra $a = 4; b = -6$.

Cách 2. $f(x) = \int \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{2(x-2)+4}{(x-2)^2} dx = \int \frac{2}{x-2} dx + 4 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx$

$$= 2 \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + C$$

$f(3) = 0 \Rightarrow C = 4$. Vậy $f(x) = 2 \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + 4$

$\int_3^{e+2} f(x) dx = \int_3^{e+2} \left(2 \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + 4 \right) dx = 4e - 6$. Suy ra $a = 4; b = -6$.

Câu 120. Biết $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P = a + 2b + c - 7$.

A. $-\frac{1}{9}$.

B. $\frac{86}{27}$.

C. -2.

D. $\frac{67}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = \int_1^2 x \left(3x + \sqrt{9x^2 - 1} \right) dx = \int_1^2 \left(3x^2 - x\sqrt{9x^2 - 1} \right) dx$

$$= \int_1^2 3x^2 dx - \int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx = x^3 \Big|_1^2 + \int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx = 7 - \int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx.$$

Tính $\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx$.

Đặt $\sqrt{9x^2-1} = t \Rightarrow 9x^2-1 = t^2 \Rightarrow xdx = \frac{tdt}{9}$.

Khi $x=1$ thì $t=2\sqrt{2}$; khi $x=2$ thì $t=\sqrt{35}$.

Khi đó $\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx = \int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} t \frac{tdt}{9} = \frac{t^3}{27} \Big|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} = \frac{35}{27}\sqrt{35} - \frac{16}{27}\sqrt{2}$.

Vậy $\int_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}} dx = 7 - \frac{35}{27}\sqrt{35} + \frac{16}{27}\sqrt{2} \Rightarrow a=7, b=\frac{16}{27}, c=-\frac{35}{27}$.

Vậy $P = a + 2b + c - 7 = 7 + \frac{32}{27} - \frac{35}{27} - 7 = -\frac{1}{9}$.

Cách 2: $\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx = \frac{1}{18} \int_1^2 (9x^2-1)^{\frac{1}{2}} d(9x^2-1) = \frac{1}{27} (9x^2-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{35\sqrt{35}}{27} - \frac{16\sqrt{2}}{27}$

$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}} dx = 7 - \frac{35}{27}\sqrt{35} + \frac{16}{27}\sqrt{2} \Rightarrow a=7, b=\frac{16}{27}, c=-\frac{35}{27}$.

Vậy $P = a + 2b + c - 7 = 7 + \frac{32}{27} - \frac{35}{27} - 7 = -\frac{1}{9}$.

Câu 121. (Thi thử SGD Cần Thơ mã 121 – 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$x + [f(x)]^3 + 2f(x) = 1$, với $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-2}^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{7}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x + [f(x)]^3 + 2f(x) = 1$.

$\Leftrightarrow [f(x)]^3 + 2f(x) = 1 - x$.

Đặt $t = f(x)$

Suy ra $t^3 + 2t = 1 - x$.

$\Rightarrow -[3t^2 + 2]dt = dx$. (1)

Với $x = -2 \Rightarrow t^3 + 2t = 3 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $x = 1 \Rightarrow t^3 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Từ (1) ta có $\int_{-2}^1 f(x)dx = -\int_1^0 [3t^2 + 2]t \cdot dt = \int_0^1 [3t^2 + 2]t dt.$

$$= \left(\frac{3}{4}t^4 + t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{4}. \text{ Vậy } \int_{-2}^1 f(x)dx = \frac{7}{4}.$$

h Dạng 05: PP đổi biến $x = u(t)$ - hàm công thức x

Câu 122. Biết $\int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx - \frac{5\pi}{6} = \frac{5(a-\sqrt{b})}{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a + 2b$.

A. $T = 7$.

B. $T = 5$.

C. $T = 8$.

D. $T = 6$.

Lời giải

Chọn C

Xét $I = \int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx.$

Đặt $x = 5 \cos t, t \in [0; \pi].$

Ta có $dx = -5 \sin t dt.$

Với $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}; x = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}.$

$$\text{Vậy } I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{5+5\cos t}{5-5\cos t}} \cdot 5 \sin t dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\cos^2 \frac{t}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}}} \cdot 5 \sin t dt = 5 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2} dt = 5 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \frac{t}{2} dt$$

$$= 5 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t) dt = 5(t + \sin t) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{6} + \frac{10-5\sqrt{3}}{2}.$$

$$I - \frac{5\pi}{6} = \frac{10-5\sqrt{3}}{2} = \frac{5(2-\sqrt{3})}{2}.$$

Do đó $a = 2; b = 3$. Vậy $T = 8$.

Câu 123. Biết $\int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx - \frac{5\pi}{6} = \frac{5(a-\sqrt{b})}{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a + 2b$.

A. $T = 7$.

B. $T = 5$.

C. $T = 8$.

D. $T = 6$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = 5 \cos 2t \Rightarrow dx = -10 \sin 2t dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$. Khi đó

$$\int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx = -10 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{5(1+\cos 2t)}{5(1-\cos 2t)}} \sin 2t dt = 10 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sin t} \sin 2t dt = 20 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 10 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t) dt$$

$$= \frac{5\pi}{6} + \frac{5(1-\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx - \frac{5\pi}{6} = \frac{5(1-\sqrt{3})}{2}. \text{ Suy ra } \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow T = a+2b = 7.$$

Câu 124. Cho tích phân $I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{14-x^2 - \frac{1}{x^2}} dx = \frac{a\pi}{b} + c\sqrt{3} + d$, trong đó $(a, b, c, d \in \mathbb{Z})$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $S = a + b + c + d$.

A. $S = 11$.

B. $S = 3$.

C. $S = 7$.

D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{14-x^2 - \frac{1}{x^2}} dx = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{16 - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = 4 \sin t \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = 4 \cos t dt, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Đổi cận: Với } x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; \text{ với } x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos t \cdot \sqrt{16 - (4 \sin t)^2} dt = 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = (8x + 4 \sin 2t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} - 4$$

$$\text{Mà } I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{14-x^2 - \frac{1}{x^2}} dx = \frac{a\pi}{b} + c\sqrt{3} + d \Rightarrow a = 2, b = 3, c = 2, d = -4.$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c + d = 3.$$

Câu 125. Cho tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{(x^2+1)\ln x + 1}{x \ln x} dx = \frac{ae^4 + be^2}{2} + c + d \ln 2$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b + c + d$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_e^{e^2} \frac{(x^2 + 1) \ln x + 1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{x^2 \ln x + \ln x + 1}{x \ln x} dx$$

$$= \int_e^{e^2} \frac{x^2 \ln x}{x \ln x} dx + \int_e^{e^2} \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx = A + B.$$

$$+ A = \int_e^{e^2} \frac{x^2 \ln x}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_e^{e^2} = \frac{1}{2} (e^4 - e^2).$$

$$+ B = \int_e^{e^2} \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx$$

$$\text{Đặt } t = x \ln x \Rightarrow dt = (\ln x + 1) dx$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = e \Rightarrow t = e \\ x = e^2 \Rightarrow t = 2e^2 \end{cases}.$$

$$B = \int_e^{2e^2} \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_e^{2e^2} = 1 + \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } I = A + B = \frac{e^4 - e^2}{2} + 1 + \ln 2.$$

$$\text{Do đó } a = 1, b = -1, c = 1, d = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 2.$$

Câu 126. Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 1$. Tính $I = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos x f(\sin x) dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = 1$.

C. $I = -1$.

D. $I = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 1 \hat{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) d(2x) = 1 \hat{=} \int_0^1 f(t) dt = 2.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x. \text{ Ta có: } dt = d(\sin x) = \cos x dx, \sin 0 = 0 \text{ và } \sin \frac{p}{2} = 1.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos x f(\sin x) dx = \int_0^1 f(t) dt = 2.$$

Câu 127. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \, dx$.

A. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

C. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, suy ra $dx = \cos t \, dt$.

Đổi cận:

x	0	$\frac{1}{2}$
t	0	$\frac{\pi}{6}$

Khi đó, ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Dạng 06: PP tích phân từng phần-hàm xđ

Câu 128. Cho $I = \int_0^1 \left(x + \sqrt{x^2+15} \right) dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $a + b + c$.

A. 1.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + \sqrt{x^2+15} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+15}} \right) dx \\ v = x \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = x \left(x + \sqrt{x^2+15} \right) \Bigg|_0^1 - \int_0^1 x \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+15}} \right) dx$$

$$= 5 - \int_0^1 \left(x + \sqrt{x^2 + 15} - \frac{15}{\sqrt{x^2 + 15}} \right) dx$$

$$= 5 - \int_0^1 \left(x + \sqrt{x^2 + 15} \right) dx + \int_0^1 \frac{15}{\sqrt{x^2 + 15}} dx = 5 - I + J.$$

Suy ra: $I = \frac{5}{2} + \frac{J}{2}.$

Tính $J = \int_0^1 \frac{15}{\sqrt{x^2 + 15}} dx = 15 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 15} \right) \Big|_0^1$

$$= 15 \ln 5 - 15 \ln \sqrt{15} = 15 \ln 5 - \frac{15}{2} \ln 3 - \frac{15}{2} \ln 5 = -\frac{15}{2} \ln 3 + \frac{15}{2} \ln 5.$$

Vậy $I = \frac{5}{2} - \frac{15}{4} \ln 3 + \frac{15}{4} \ln 5.$

Do đó $a = \frac{5}{2}; b = -\frac{15}{4}; c = \frac{15}{4}.$

Vậy $a + b + c = \frac{5}{2}.$

Câu 129. Kết quả của tích phân $I = \int_0^1 x \ln(2 + x^2) dx$ được viết ở dạng $I = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Hỏi tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

A. 2.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}.$

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = \ln(2 + x^2) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{2 + x^2} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$

$$I = \frac{x^2}{2} \ln(2 + x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2x}{2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 3 - \int_0^1 \frac{x^3}{2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 3 - \int_0^1 \left(x - \frac{2x}{2 + x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln 3 - \left[\frac{x^2}{2} - \ln(2 + x^2) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Ta có $a = \frac{3}{2}, b = -1, c = -\frac{1}{2} \Rightarrow a + b + c = \frac{3}{2} + (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Câu 130. Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

A. $P = 4$.

B. $P = -6$.

C. $P = 5$.

D. $P = 6$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$. Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $dv = \frac{1}{x^2} dx$ chọn $v = -\frac{1}{x}$.

Theo công thức tích phân từng phần ta được

$$I = \left(-\frac{1}{x} \ln x \right) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{\ln 2}{2} + 0 \right) - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Từ giả thiết suy ra $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ và $c = 2$.

$$\text{Vậy } P = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 3 \cdot 1 + 2 = 4.$$

Câu 131. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x^2}$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f'(x)x^4e^{2x}$.

A. $xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

B. $xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

C. $2xe^{2x} + e^{2x} + C$.

D. $2xe^{2x} - e^{2x} + C$.

Lời giải

Chọn A

Do $\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x^2}$ nên $\frac{f(x)}{x^2} = \left(\frac{1}{3x^3} \right)' = -\frac{1}{x^4} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x^3}$.

$$\text{Ta có: } I = \int f'(x)x^4e^{2x} dx = 2 \int xe^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}. \text{ Ta được: } I = xe^{2x} - \int e^{2x} dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Câu 132. Gọi x_1, x_2 lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} t \ln t dt$. Tính $S = x_1 + x_2$.

A. $\ln 2$.

B. $-\ln 2$.

C. 0 .

D. $\ln 2e$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } g'(t) = t \ln t. \text{ Ta có } f(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} t \ln t dt = g(e^{2x}) - g(e^x)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= (e^{2x})' \cdot g'(e^{2x}) - (e^x)' \cdot g'(e^x) = 2e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot \ln e^{2x} - e^x \cdot e^x \cdot \ln e^x \\ &= 4xe^{4x} - xe^{2x} = xe^{2x}(4e^{2x} - 1). \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\ln 2 \end{cases}.$$

$$x_1 + x_2 = -\ln 2.$$

$$\text{Có thể dùng TPTP để tính } f(x) = x \cdot e^{4x} - \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} (e^{4x} - e^{2x}) \Rightarrow f'(x) = 4xe^{4x} - xe^{2x}$$

Câu 133. Cho $I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I < m$ là khoảng $(a; b)$. Tính

$$P = a - 3b.$$

A. $P = -4$.

B. $P = -1$.

C. $P = -3$.

D. $P = -2$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}.$$

$$I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx = \frac{(2x-1)e^{2x}}{2} \Big|_0^m - \int_0^m e^{2x} dx = \frac{(2m-1)e^{2m}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^m = me^m - e^{2m} + 1$$

$$I < m \Leftrightarrow me^{2m} - e^{2m} + 1 < m \Leftrightarrow (m-1)(e^{2m} - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Suy ra $a = 0, b = 1 \Rightarrow a - 3b = -3$.

b Dạng 07: Kết hợp đổi biến và từng phần tính tích phân-hàm xđ

Câu 134. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^5 f(x) dx = 4$, $f(5) = 3$, $f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 x^3 f'(x^2 + 1) dx$

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$.

$x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$. Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_2^5 (t-1) f'(t) dt$.

Đặt $u = t - 1 \Rightarrow du = dt$; $dv = f'(t) dt$, chọn $v = f(t)$.

$$I = \frac{1}{2} (t-1) f(t) \Big|_2^5 - \frac{1}{2} \int_2^5 f(t) dt = \frac{1}{2} (4f(5) - f(2)) - 2 = 3.$$

Câu 135. Cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^1 f(2x) dx = 6$. Tính $I = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx$ ta được kết quả

A. $I = 20$.

B. $I = 10$.

C. $I = 4$.

D. $I = 14$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_0^1 f(2x) dx = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = 6 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 12.$$

$$\text{Xét } I = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = x f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2f(2) - 12 = 20.$$

Câu 136. Biết rằng $\int_0^{\pi^2} (\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) dx = a + b\pi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $a + b$.

A. -4.

B. -2.

C. 2.

D. π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi^2} (\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) dx = \int_0^{\pi} 2t (\sin t + \cos t) dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2t \\ dv = (\sin t + \cos t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = \sin t - \cos t \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = 2t(\sin t - \cos t) \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} (\sin t - \cos t) dt = 2\pi + 2(\cos t + \sin t) \Big|_0^{\pi} = -4 + 2\pi.$$

Câu 137. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^2 f(3x-6) dx = 3$, $f(-3) = 2$. Giá trị của

$$\int_{-3}^0 xf'(x) dx \text{ bằng}$$

A. 6.

B. -3.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 3x - 6 \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt.$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow t = -3.$$

$$\text{với } x = 2 \Rightarrow t = 0.$$

$$\text{Khi đó, } \int_1^2 f(3x-6) dx = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-3}^0 f(t) dt = 3 \Leftrightarrow \int_{-3}^0 f(t) dt = 9.$$

$$\text{Xét } I = \int_{-3}^0 xf'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

Khi đó, $I = x.f(x)\Big|_{-3}^0 - \int_{-3}^0 f(x)dx = 0.f(0) - (-3)f(-3) - 9 = 3.2 - 9 = -3$.

Câu 138. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(4) = 8$ và $\int_0^4 f(x)dx = 6$.
Tính $I = \int_0^2 x f'(2x)dx$.

- A. 2. B. 10. C. 5. **D. $\frac{13}{2}$.**

Lời giải

Chọn D

$$+ I = \int_0^2 x f'(2x)dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{f(2x)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 x f'(2x)dx = \left[x \cdot \frac{f(2x)}{2} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{f(2x)}{2} dx = 8 - \frac{1}{2} \int_0^2 f(2x)dx.$$

$$+ \text{Tính } J = \int_0^2 f(2x)dx$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx.$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow t = 4$$

$$J = \int_0^2 f(2x)dx = \int_0^4 f(t) \frac{dt}{2} = 3$$

$$\text{Vậy } I = 8 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{13}{2}.$$

Câu 139. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ 2019) Cho $f(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ trên $\mathbb{R}$, thỏa

mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} xg(x)dx = \frac{1}{2}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = a + b\pi$, trong đó a, b là các số hữu tỉ. Tính $P = a + 4b$.

- A. $P = -\frac{7}{4}$. B. $P = \frac{5}{2}$. **C. $P = \frac{1}{2}$.** D. $P = -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = g(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xg(x) dx = xf(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} xg(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}; b = \frac{1}{4} \Rightarrow P = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

b Dạng 08: Tích phân hàm số hữu tỷ-hàm xđ

Câu 140. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với $\forall x \in [0;1]$. Tính

giá trị $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) \cdot f(1-x) + f(x) = 1 + f(x) \Rightarrow \frac{1}{f(1-x)+1} = \frac{f(x)}{1+f(x)}$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Đặt } t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt. \text{ Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0.$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_1^0 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(1-x)} = \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^1 dx = 1 \text{ hay } 2I = 1. \text{ Vậy } I = \frac{1}{2}.$$

Câu 141. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\square$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x), \forall x \in \square$. Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính

tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 3$.

D. $I = 5$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Ta có: } 3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3f(x) dx = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x), \forall x \in \square.$$

$$\text{Đặt } 2x = t \Rightarrow d(2x) = dt, \text{ với } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 2.$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx, \forall x \in \square \text{ (do hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } \square).$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \square \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \square.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \int_1^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \square.$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 5, \forall x \in \square.$$

Câu 142. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$, thỏa mãn $f(4-x) = f(x), \forall x \in [1; 3]$ và

$$\int_1^3 xf(x) dx = -2. \text{ Giá trị } 2 \int_1^3 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. -1 .

B. -2 .

C. 1 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_1^3 xf(x) dx = \int_1^3 tf(t) dt = -2.$$

$$\text{Đặt } t = 4 - x \Rightarrow dt = -dx.$$

$$\text{Đổi cận } t = 1 \Rightarrow x = 3; t = 3 \Rightarrow x = 1.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 tf(t) dt = - \int_3^1 (4-x) f(4-x) dx = \int_1^3 (4-x) f(4-x) dx = \int_1^3 (4-x) f(x) dx \\ &= \int_1^3 4f(x) dx - \int_1^3 xf(x) dx = 4 \int_1^3 f(x) dx - I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2I = 4 \int_1^3 f(x) dx \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx = I = -2.$$

$$\text{Vậy } 2 \int_1^3 f(x) dx = -2.$$

Câu 143. Cho hàm số $f(x) = \int_1^x (3+t) dt$. Biết rằng $\int_{-2}^0 \frac{dx}{f(x)} = -\frac{a}{b} \ln 3$, trong đó a, b là những số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T = a + b$ bằng

A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) = \int_1^x (3+t) dt = [3t + \frac{1}{2}t^2]_1^x = (3x + \frac{1}{2}x^2) - (3 + \frac{1}{2}) = x^2 + 2x - 3$$

$$\text{Suy ra } I = \int_{-2}^0 \frac{dx}{f(x)} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right] dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \Big|_{-2}^0 = -\frac{1}{2} \ln 3.$$

$$\text{Do đó } a = 1, b = 2 \Rightarrow T = a + b = 3.$$

Câu 144. Cho $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b^2 - c^3$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_2^3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \Big|_2^3 = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{3}{4} = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$$

$$\text{Suy ra } a = 4, b = -1, c = -1. \text{ Vậy } a + b^2 - c^3 = 6.$$

Câu 145. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(mx) = nf(x) + p, \forall x \in \mathbb{R} (m \neq 0)$. Biết rằng

$$\int_0^1 f(x) dx = q (q \neq 0). \text{ Tính tích phân } I = \int_1^m f(x) dx.$$

A. $nmq + mp - q$.

B. $nq + mp - q$.

C. $nmq - mp - q$.

D. $nmq + mp + q$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } n = \frac{n}{q} \cdot q = \frac{n}{q} \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{n}{q} f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(mx) - p}{q} dx = \int_0^1 \frac{f(mx)}{q} dx - \int_0^1 \frac{p}{q} dx, \forall x \in \square.$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{mq} \int_0^1 f(mx) d(mx) - \frac{p}{q} x \Big|_0^1 = \frac{1}{mq} \int_0^1 f(mx) d(mx) - \frac{p}{q}, \forall x \in \square.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(mx) d(mx) = \left(n + \frac{p}{q} \right) \cdot mq, \forall x \in \square.$$

Đặt $mx = t \Rightarrow d(mx) = dt$, với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = m$.

$$\int_0^1 f(mx) d(mx) = \left(n + \frac{p}{q} \right) \cdot mq, \forall x \in \square.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^m f(t) dt = \int_0^m f(x) dx = \left(n + \frac{p}{q} \right) \cdot mq, \forall x \in \square \text{ (do hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } \square).$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^m f(x) dx = \left(n + \frac{p}{q} \right) \cdot mq, \forall x \in \square.$$

$$\Leftrightarrow q + \int_1^m f(x) dx = \left(n + \frac{p}{q} \right) \cdot mq, \forall x \in \square.$$

$$\Leftrightarrow \int_1^m f(x) dx = \left(n + \frac{p}{q} \right) \cdot mq - q = nmq + mp - q, \forall x \in \square.$$

$$\Leftrightarrow \int_1^m f(x) dx = nmq + mp - q, \forall x \in \square.$$

b Dạng 09: Tích phân đặc biệt-hàm xđ

Câu 146. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 5$ và $2xf'(x) + f(x) = 6x$ với mọi $x > 0$. Tính $\int_4^9 f(x) dx$.

A. 136.

B. 21.

C. 71.

D. 59.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2xf'(x) + f(x) = 6x \Rightarrow \sqrt{x} \cdot f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) = 3\sqrt{x}.$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} \cdot f(x) \right)' = 3\sqrt{x} \Rightarrow \int \left(\sqrt{x} \cdot f(x) \right)' dx = 3 \int \sqrt{x} dx \Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = 2x\sqrt{x} + C \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Mặt khác $f(1) = 5 \Rightarrow 2 + C = 5 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Khi đó $\int_4^9 f(x) dx = \int_4^9 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = 71$.

Câu 147. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1; \forall x \in R$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

- A.** $\frac{\pi^2 + 4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2\cos^2 x + 1) dx = \int (2 + \cos 2x) dx = 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Theo bài: $f(0) = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \sin 0 + C = 4 \Leftrightarrow C = 4$. Suy ra $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + 4$.

Vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2x + \frac{1}{2} \sin 2x + 4 \right) dx = \left(x^2 - \frac{\cos 2x}{4} + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi^2}{16} + \pi \right) - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}.$$

Câu 148. Biết $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P = 2a + b$.

- A.** $P = 12$. **B.** $P = 8$. **C.** $P = 10$. **D.** $P = 6$.

Lời giải

Chọn B

Xét tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$.

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$.

Khi $x = 0$ thì $t = \pi$.

Khi $x = \pi$ thì $t = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin^{2018}(\pi - t)}{\sin^{2018}(\pi - t) + \cos^{2018}(\pi - t)} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \end{aligned}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx - I.$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx.$$

$$\text{Xét tích phân } J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du.$$

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{2} \text{ thì } u = 0.$$

$$\text{Khi } x = \pi \text{ thì } u = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Nên } J = - \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} \left(\frac{\pi}{2} - u \right)}{\sin^{2018} \left(\frac{\pi}{2} - u \right) + \cos^{2018} \left(\frac{\pi}{2} - u \right)} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx.$$

Vì hàm số $f(x) = \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}$ là hàm số chẵn nên:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Như vậy $a = 2$, $b = 4$. Do đó $P = 2a + b = 2 \cdot 2 + 4 = 8$.

Câu 149. Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx$.

A. $I = \frac{1}{5}$.

B. $I = \frac{5}{7}$.

C. $I = \frac{7}{5}$.

D. $I = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx = \int_{-1}^0 \frac{x^4}{2^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx.$$

$$\text{Ta tính } A = \int_{-1}^0 \frac{x^4}{2^x + 1} dx.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$, đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$A = \int_0^1 \frac{t^4}{2^{-t} + 1} dt = \int_0^1 \frac{2^t t^4}{2^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{2^x x^4}{2^x + 1} dx.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 \frac{2^x x^4}{2^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Câu 150. Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx$.

A. $I = \frac{1}{5}.$

B. $I = \frac{5}{7}.$

C. $I = \frac{7}{5}.$

D. $I = 5.$

Lời giải

Chọn A

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx = \int_{-1}^0 \frac{x^4}{2^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx.$$

$$\text{Ta tính } A = \int_{-1}^0 \frac{x^4}{2^x + 1} dx.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$, đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = 1$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$A = \int_0^1 \frac{t^4}{2^{-t} + 1} dt = \int_0^1 \frac{2^t t^4}{2^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{2^x x^4}{2^x + 1} dx.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 \frac{2^x x^4}{2^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

b Dạng 10: Tích phân HS chẵn, lẻ hàm xđ

Câu 151. Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{12}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^1 \frac{x dx}{(2x+1)^2} &= \int_0^1 \frac{1}{2(2x+1)} dx - \int_0^1 \frac{1}{2(2x+1)^2} dx = \frac{1}{4} \ln|2x+1| \Big|_0^1 + \frac{1}{4(2x+1)} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6} + 0 \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 3 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đây ta suy ra : } a = -\frac{1}{6}; b = 0; c = \frac{1}{4}. \text{ Giá trị } a + b + c = \frac{1}{12}$$

Câu 152. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và $\int_1^2 f(-2x) dx = 4$. Tính

$$I = \int_0^4 f(x) dx.$$

A. $I = -6$.

B. $I = 6$.

C. $I = 10$.

D. $I = -10$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Sử dụng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} f(ax) dx$ và tính chất $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ với $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a; a]$.

Áp dụng, ta có:

$$\bullet 4 = \int_1^2 f(-2x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{-4} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^{-2} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-4}^{-2} f(x) dx = 8.$$

$$\bullet 2 = \int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$$

$$\text{Suy ra. } 0 = \int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 = 8 + \left(\int_{-2}^2 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx \right) + I \Leftrightarrow 0 = 8 + (0 - 2) + I \Leftrightarrow I = -6.$$

Cách 2: Xét tích phân $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$.

$$\text{Đặt } -x = t \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Đổi cận: khi } x = -2 \text{ thì } t = 2; \text{ khi } x = 0 \text{ thì } t = 0 \text{ do đó } \int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2.$$

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x)$.

$$\text{Do đó } \int_1^2 f(-2x) dx = -\int_1^2 f(2x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x) dx = -4.$$

$$\text{Xét } \int_1^2 f(2x) dx.$$

$$\text{Đặt } 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Đổi cận: khi } x = 1 \text{ thì } t = 2; \text{ khi } x = 2 \text{ thì } t = 4 \text{ do đó } \int_1^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = -4$$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(t) dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -8.$$

$$\text{Do } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 - 8 = -6.$$

Câu 153. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 2018$ và $g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x) + g(-x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$

A. $I = 1008$.

B. $I = \frac{1009}{2}$.

C. $I = 4036$.

D. $I = 2018$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = \int_{-1}^1 f(x)g(-x) dx.$$

$$2I = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx + \int_{-1}^1 f(x)g(-x) dx = \int_{-1}^1 f(x)[g(x) + g(-x)] dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = 2018.$$

Câu 154. Biết $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Giá trị của abc bằng

A. -12 .

B. 16 .

C. -8 .

D. -10 .

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} \right) dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} \right) dx = \left(x - \ln|x+1| + 2\ln|x+3| \right) \Big|_0^2$$

$$= 2 - 3\ln 3 + 2\ln 5. \text{ Vậy } a = 2, b = -3, c = 2, \text{ do đó } abc = -12.$$

Câu 155. Cho $\int_1^3 f(x) dx = 3$, biết $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\square$ và $\int_1^3 g(x) dx = 4$, khi đó $\int_1^3 [4f(-x) - g(x)] dx$ bằng

- A.** 16. **B.** 8. **C.** -16. **D.** -8.

Lời giải

Chọn C

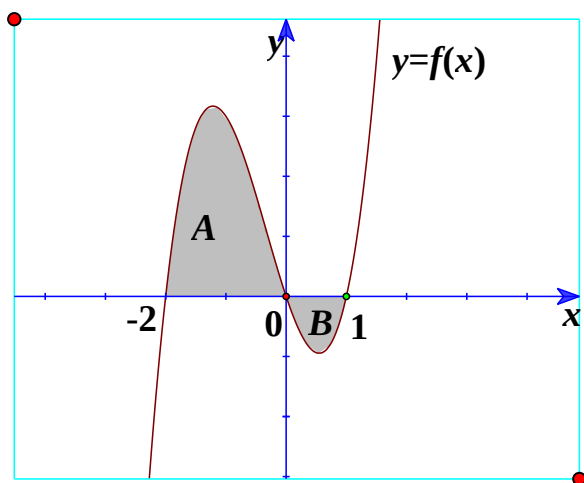
Vì $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\square$ nên: $f(-x) = -f(x) (\forall x \in \square) \Leftrightarrow \int_1^3 f(-x) dx = -\int_1^3 f(x) dx = -3$.

$$\text{Vậy } \int_1^3 [4f(-x) - g(x)] dx = 4 \int_1^3 f(-x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 4 \cdot (-3) - 4 = -16.$$

b Dạng 12: Tích phân dựa vào đồ thị

Câu 156. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 12 và 2. Giá trị của

$$I = \int_{-1}^{-\frac{2}{5}} f(5x+3) dx \text{ bằng.}$$



- A.** 2. **B.** $\frac{14}{5}$. **C.** 14. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có $A = \int_{-2}^0 f(x) dx = 12$; $B = \int_0^1 -f(x) dx = 2$.

Xét $I = \int_{-1}^{-\frac{2}{5}} f(5x+3) dx$.

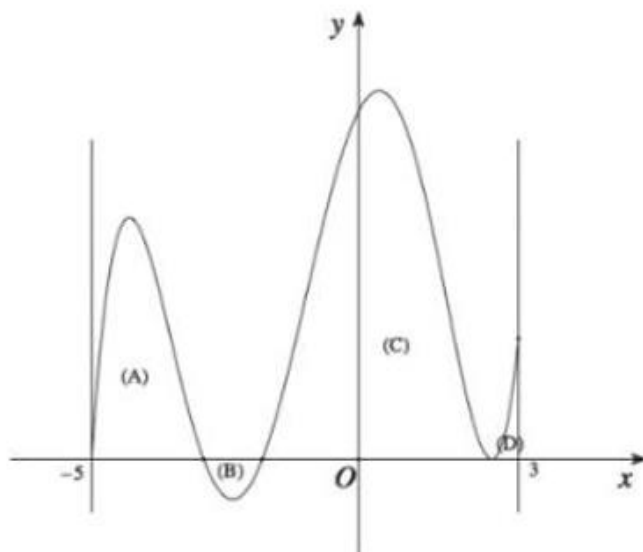
Đặt $t = 5x + 3$. Ta có $x = -1 \Rightarrow t = -2$, $x = -\frac{2}{5} \Rightarrow t = 1$ và $dx = \frac{1}{5} dt$.

Khi đó $I = \int_{-2}^1 f(t) \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int_{-2}^1 f(x) dx$.

Từ giả thiết ta thấy $A - B = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx = 12 - 2 = 10$.

Suy ra $I = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$.

Câu 157. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Biết diện tích các hình phẳng (A), (B), (C), (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng 6 ; 3 ; 12 ; 2 . Tích phân $\int_{-3}^1 [2f(2x+1)+1] dx$ bằng

A. 25 .

B. 17 .

C. 21 .

D. 27 .

Lời giải

Chọn C

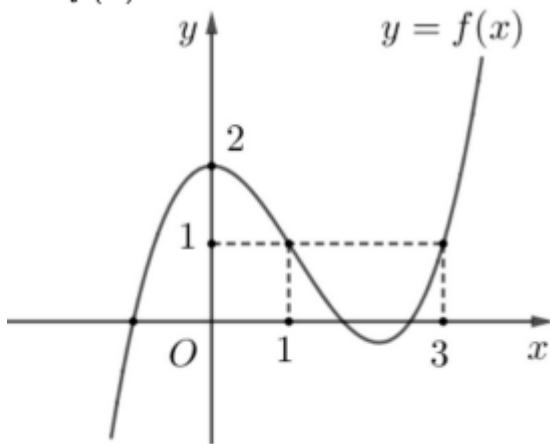
Ta có $I = \int_{-3}^1 [2f(2x+1)+1]dx = \int_{-3}^1 2f(2x+1)dx + \int_{-3}^1 dx.$

□ Từ đồ thị, ta có $\int_{-3}^1 2f(2x+1)dx = \int_{-5}^3 f(t)dt = 6-3+12+2=17.$

□ $\int_{-3}^1 dx = x|_{-3}^1 = 4.$

Vậy $I = 17+4=21.$

Câu 158. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Khi đó: $\int_0^1 xf(x)f'(x)dx$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right).$

B. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$

C. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right).$

D. $\left(0; \frac{1}{2}\right).$

Lời giải

Chọn C

Tích phân từng phần ta có: $\int_0^1 xf(x)f'(x)dx = \int_0^1 xd(f^2(x)) = \frac{x}{2}f^2(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx.$

Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[0; 1]$ ta thấy $2 - x \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [0; 1](1).$

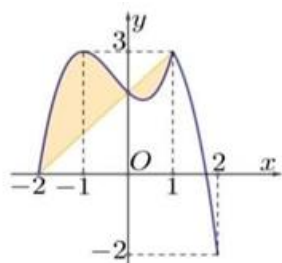
Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = 2 - x$ đi qua hai điểm $(0; 2); (1; 1)$

Vì dấu bằng ở (1) không xảy ra $\forall x \in [0; 1].$

Suy ra $\int_0^1 (2-x)^2 dx < \int_0^1 f^2(x)dx < \int_0^1 2^2 dx \Rightarrow \frac{7}{3} < \int_0^1 f^2(x)dx < 4 \Rightarrow \int_0^1 xf(x)f'(x)dx \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$

Câu 159. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích của miền tô đậm bằng $\frac{37}{12}$ và

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{14}{3}. \text{ Tính giá trị của } I = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx.$$



A. $\frac{3}{8}$.

B. $\frac{12}{25}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{25}{12}$.

Lời giải

Chọn D

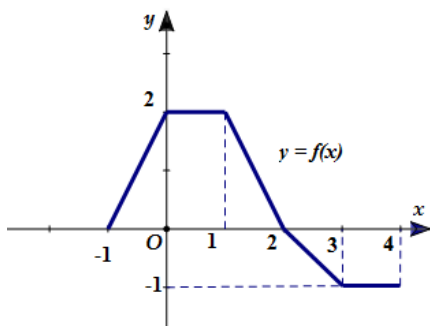
$$\text{Ta có } \frac{37}{12} = \int_{-2}^1 |f(x) - (x + 2)| dx = \int_{-2}^0 (f(x) - x - 2) dx - \int_0^1 (f(x) - x - 2) dx$$

$$= \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} = \frac{31}{6} - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{25}{12}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_1^e f(\ln x) d(\ln x) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{25}{12}.$$

Câu 160. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1; 4]$ như hình vẽ dưới.



$$\text{Tính tích phân } I = \int_{-1}^4 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = 3$.

C. $I = 5$.

D. $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi S_1 là diện tích của hình thang giới hạn bởi phần trên đồ thị hàm số $f(x)$ với trục hoành.

Gọi S_2 là diện tích của hình thang giới hạn bởi phần dưới đồ thị hàm số $f(x)$ với trục hoành.

$$\text{Với } S_1 = \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{(1+3) \cdot 2}{2} = 4, \quad S_2 = -\int_2^4 f(x) dx = \frac{(1+2) \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ta có: } I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx - \left(-\int_2^4 f(x) dx \right) = S_1 - S_2 = \frac{5}{2}.$$

b Dạng 13: Tích phân chứa tham số (chỉ trong kết quả)

Câu 161. Biết rằng $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + a$. Khi đó a bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

Khi đó :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos t |\cos t| dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2 + 2 \cos 2t) dt = (2t + \sin 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

Câu 162. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$. Tính $T = a + b + c$

A. 18.

B. 12.

C. 46.

D. 24.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Rightarrow du = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \Rightarrow 2du = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}} dx.$$

Khi đó

$$I = 2 \int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{du}{u^2} = -\frac{2}{u} \Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) = -2 \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} \right) = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2.$$

$$\text{Vậy } a=32, b=12, c=2 \Rightarrow T=46.$$

Câu 163. Cho $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c}$ với a, b, m là các số nguyên dương và là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a+b}{c}$.

A. $S = \frac{2}{3}$.

B. $S = \frac{5}{6}$.

C. $S = \frac{1}{2}$.

D. $S = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Tính } I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + \ln x = u \\ \frac{1}{(x+1)^2} dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{x} dx = du \\ -\frac{1}{x+1} = v \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} (x + \ln x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1+x}{x} \cdot \frac{1}{x+1} dx = -\frac{1}{3} (2 + \ln 2) + \frac{1}{2} + \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{3} (2 + \ln 2) + \frac{1}{2} + \ln |x| \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}$$

$$\text{Vậy } a=2; b=3; c=6 \Rightarrow S = \frac{a+b}{c} = \frac{5}{6}.$$

Câu 164. Cho tích phân $\int_0^1 \frac{x^2+x+2}{x^2+3x+2} dx = a + b \ln 2 - c \ln 3$; trong đó a, b, c là những số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng

A. 9.

B. 11.

C. 12.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \frac{x^2+x+2}{x^2+3x+2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{(x+1)(x+2)}\right) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+2}\right) dx.$$

$$I = (x + 2\ln|x+1| - 4\ln|x+2|)|_0^1 = 1 + 6\ln 2 - 4\ln 3 = a + b\ln 2 - c\ln 3.$$

$$\text{Suy ra } a = 1; b = 6; c = 4 \Rightarrow T = a + b + c = 11.$$

Câu 165. Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 5.

B. 9.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx \Leftrightarrow dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x+3)}} \right)$$

$$\Leftrightarrow dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{(x+1)(x+3)}} \right) dx \Leftrightarrow \frac{2dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}.$$

$$\text{Khi } x = 0 \text{ thì } t = 1 + \sqrt{3}; \text{ khi } x = 1 \text{ thì } t = 2 + \sqrt{2}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2 \int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = 2\ln|t| \Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} = 2\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=5.$$

Câu 166. Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = a + \frac{\pi^2}{b} + \frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $M = a - b + c$.

A. $M = -35$.

B. $M = 41$.

C. $M = -37$.

D. $M = 35$.

Lời giải

Chọn D

Ta có
$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = I + J$$

Xét $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx$. Đặt $t = -x$ (C_m); Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Suy ra
$$I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \frac{-t \cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t} (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-t \cos t}{\sqrt{1+t^2}-t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x \cos x}{\sqrt{1+x^2}-x} dx.$$

Khi đó
$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x \cos x}{\sqrt{1+x^2}-x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos x \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} -2x^2 \cos x dx.$$

u	dv
$-2x^2$	$\cos x$
$-4x$	$\sin x$
-4	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \left(-2x^2 \sin x - 4x \cos x + 4 \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 + \frac{\pi^2}{-36} + \frac{\pi\sqrt{3}}{-3}.$$

Khi đó $a = 2$; $b = -36$; $c = -3$.

Vậy $M = a - b + c = 35$.

Câu 167. Biết rằng kết quả tích phân $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Khi đó giá trị $T = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

A. $T = 11$.

B. $T = 9$.

C. $T = 10$.

D. $T = 8$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + 9) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2 + 9} dx \\ v = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} = \frac{x^2 + 9}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \left(\left(\frac{x^2 + 9}{2} \right) \cdot \ln(x^2 + 9) \right) \Big|_0^4 - \int_0^4 x dx = \frac{25}{2} \ln 25 - \frac{9}{2} \ln 9 - \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8.$$

Suy ra $a = 25$, $b = -9$, $c = -8$. Vậy $T = a + b + c = 8$.

Câu 168. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = a\sqrt{e} + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a.b$

A. $P = -8$.

B. $P = 8$.

C. $P = -4$.

D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn A

Xét tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2t dt$

Với $x = 1 \Rightarrow t = 1$, với $x = e \Rightarrow t = \sqrt{e}$

Khi đó $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln t^2}{t} 2t dt = 4 \int_1^{\sqrt{e}} \ln t dt = 4M$, với $M = \int_1^{\sqrt{e}} \ln t dt$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = t \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } M = \int_1^{\sqrt{e}} \ln t dt = t \ln t \Big|_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} 1 dt = \sqrt{e} \ln \sqrt{e} - (\sqrt{e} - 1) = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{e}$$

Vậy $I = 4M = 4 \left(1 - \frac{\sqrt{e}}{2} \right) = 4 - 2\sqrt{e}$. Suy ra $a = -2$; $b = 4$. Vậy $P = ab = -8$.

Dạng 14: Tích phân chứa tham số trong cận hoặc f(x)

Câu 169. Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x) = M \cdot \sin \pi x + N \cdot \cos \pi x$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{\pi}. \text{ Giá trị của } f'\left(\frac{1}{4}\right) \text{ bằng}$$

A. $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.

B. $-\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(1) = 3 \Leftrightarrow M \cdot \sin \pi + N \cdot \cos \pi = 3 \Leftrightarrow N = -3$.

Mặt khác $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} (M \cdot \sin \pi x - 3 \cdot \cos \pi x) dx = -\frac{1}{\pi}$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{M}{\pi} \cos \pi x - \frac{3}{\pi} \sin \pi x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{3}{\pi} + \frac{M}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow M = 2$.

Vậy $f(x) = 2 \sin \pi x - 3 \cos \pi x$ nên $f'(x) = 2\pi \cos \pi x + 3\pi \sin \pi x \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.

Câu 170. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\square$ thỏa mãn $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \square$

, biết rằng tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = -\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = 8a - 3b$.

A. $T = 1$.

B. $T = 0$.

C. $T = 16$.

D. $T = -16$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x). (1)$

Thay x bằng $1-x$, ta được : $5f(1-x) - 7f(x) = 3(x^2 - 1). (2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $-24f(x) = 36x^2 - 30x - 21 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

$I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \int_0^1 x \cdot \left(-3x + \frac{5}{4} \right) dx = -\frac{3}{8}$.

Vậy : $a = 3; b = 8 \Rightarrow T = 8a - 3b = 0$.

Câu 171. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \geq 1 \\ x^2+b, & x < 1 \end{cases}$ với a, b là các tham số thực. Biết rằng $f(x)$ liên tục và có đạo hàm

trên $\square$, tính $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{1}{3}$.

B. $I = \frac{26}{3}$

C. $I = \frac{19}{3}$.

D. $I = \frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

* Vì $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại $x = 1$.

* Vì $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a.1 + 1 = 1^2 + b \Leftrightarrow a = b$.

* Vì $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(ax+1) - (a+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2+b) - (a+1)}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} a = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \Leftrightarrow a = 2.$$

Với $a = b = 2$ ta có $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x^2+2, & x < 1 \end{cases}$.

$$* I = \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2+2) dx + \int_1^2 (2x+1) dx = \frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3}.$$

Cách 2:

x	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	x^2+b	$ax+1$	

Do $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên $1^2 + b = a.1 + 1 \Leftrightarrow b = a$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$2x$	a	

Do $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ nên $2.1 = a \Leftrightarrow 2 = a$.

Với $a = b = 2$ ta có $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x^2+2, & x < 1 \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2)dx + \int_1^2 (2x + 1)dx = \frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3}$.

Câu 172. Xác định số thực dương m để tích phân $\int_0^m (x - x^2)dx$ có giá trị lớn nhất.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$

Lời giải

Chọn A

$$P = \int_0^m (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^m = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3}.$$

$$\text{Đặt } f(m) = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3} \Rightarrow f'(m) = m - m^2 \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 1$$

Lập bảng biến thiên

m	0	1	$+\infty$
$f'(m)$		0	-
$f(m)$		$\frac{1}{6}$	
	$-\infty$		$-\infty$

Vậy $f(m)$ đạt GTLN tại $m = 1$.

Câu 173. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x - 3)dx \leq 4$?

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^a (2x - 3)dx = \left(x^2 - 3x \right) \Big|_0^a = a^2 - 3a.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^a (2x - 3)dx \leq 4 \Leftrightarrow a^2 - 3a \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 4$$

Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.

Câu 174. Cho $I = \int_0^2 (2x^2 - x - m)dx$ và $J = \int_0^1 (x^2 - 2mx)dx$. Tìm điều kiện của m để $I \leq J$.

A. $m \geq 0$.

B. $m \geq 2$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 (2x^2 - x - m) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - mx \right) \Big|_0^2 = \frac{10}{3} - 2m.$$

$$J = \int_0^1 (x^2 - 2mx) dx = \left(\frac{x^3}{3} - mx^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - m.$$

$$\text{Do đó } I \leq J \Leftrightarrow \frac{10}{3} - 2m \leq \frac{1}{3} - m \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Dạng 15: Tích phân liên quan đến phương trình hàm ẩn

Câu 175. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{21}{4}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } (f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (8x^2 + 4) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 4xf'(x) dx = \frac{20}{3} \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - \int_0^1 4xf'(x) dx + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \text{ vì } \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C \text{ vì } f(1) = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}.$$

Câu 176. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 16, \int_0^1 f(2x) dx = 2$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x) dx$ bằng

A. 30.

B. 28.

C. 36.

D. 16.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}, \text{ ta có } \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 4 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 4.$$

$$\int_0^2 xf'(x) dx = \int_0^2 x d(f(x)) = xf(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2f(2) - 4 = 28.$$

$$\text{⌘ Chú ý: Ta có thể tính nhanh } \int_0^1 f(2x) dx = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 4.$$

Cách tính $\int_0^2 xf'(x) dx$ ở trên là viết tắt của phương pháp từng phần với $u = x, dv = f'(x) dx$

Câu 177. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và thỏa mãn $\int_0^1 (2x+1) f'(x) dx = 10, 3f(1) - f(0) = 12$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 1$.

B. $I = -1$.

C. $I = -2$

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx, dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x).$$

$$\text{Ta có } 10 = \int_0^1 (2x+1) f'(x) dx = \left[(2x+1) f(x) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 f(x) dx = 3f(1) - f(0) - 2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{12-10}{2} = 1.$$

Câu 178. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\square$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 1$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 3$.

C. $I = 4$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3. \text{ Đặt } \tan x = t \Rightarrow dt = d \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (t^2 + 1) dx.$$

$$\text{Vậy } K = \int_0^1 f(t) \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \int_0^1 f(x) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = 3.$$

Lại có $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left[f(x) - \frac{1}{x^2+1} f(x) \right] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} f(x) dx.$

Vậy suy ra $I = \int_0^1 f(x) dx = 4.$

Câu 179. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$.

A. $I = 20$.

B. $I = 7$.

C. $I = 13$.

D. $I = 12$.

Lời giải

Chọn B

+ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} f(2x) \end{cases}.$

Khi đó ta có $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx = \frac{1}{2} x f(2x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{2} J.$

+ Tính $J = \int_0^1 f(2x) dx$:

Đặt $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$, khi đó $J = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$

Vậy $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{2} J = 8 - 1 = 7.$

Câu 180. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = f(0) = 1$, $f'(0) = 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = 2018.$

B. $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = 1.$

C. $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = -2018.$

D. $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = -1.$

Lời giải

Chọn C

Xét $I = \int_0^1 f''(x)(1-x) dx = \int_0^1 (1-x) d(f'(x))$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1 - x \\ dv = d(f'(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = f'(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow I = (1-x)f'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x) dx = [(1-1)f'(1) - f'(0)] + f(x) \Big|_0^1 = -f'(0) + [f(1) - f(0)]$$

$$= -2018 + (1-1) = -2018.$$

Câu 181. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_1^2 f(x-1)dx = 3$ và $f(1) = 4$. Tích phân

$$\int_0^1 x^3 f'(x^2) dx.$$

A. 1.

B. -1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{cases} \text{ ta có: } \int_0^1 x^3 f'(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t f'(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 t d[f(t)] = \frac{1}{2} \left[t f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right] = \frac{1}{2} \left[f(1) - \int_0^1 f(x) dx \right]$$

Lại có:

$$\int_1^2 f(x-1) dx = \int_1^2 f(x-1) d(x-1) \xrightarrow{u=x-1} \int_1^2 f(x-1) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx = 3$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 x^3 f'(x^2) dx = \frac{1}{2} (4-3) = \frac{1}{2}.$$