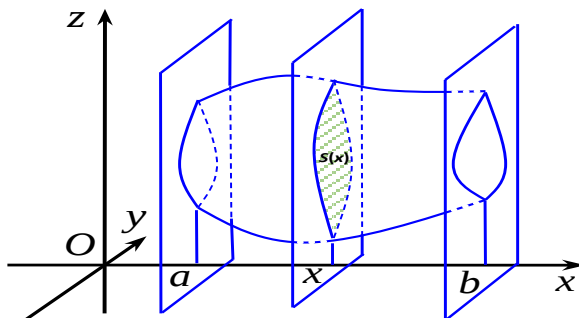


3.3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

MỨC ĐỘ 1: NHẬN BIẾT

□ Dạng 01: Câu hỏi lý thuyết

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x , ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ với $y = S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Thể tích V của vật thể đó được tính theo công thức



A. $V = \int_a^b S(x) dx.$

B. $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx.$

C. $V = \pi \int_a^b S(x) dx.$

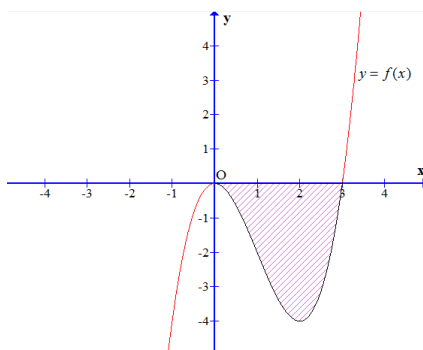
D. $V = \int_a^b S^2(x) dx.$

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa ta có: $V = \int_a^b S(x) dx$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích hình phẳng phần tô đậm được tính theo công thức nào?



A. $\int_3^1 |f(x)| dx.$

B. $\int_0^3 [-f(x)] dx.$

C. $\int_1^2 f(x) dx.$

D. $\int_1^3 f(x) dx.$

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x) \leq 0$ trên đoạn $[0; 3]$ nên $S_{hp} = \int_0^3 [-f(x)] dx.$

Câu 3. Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

B. $S = \pi \int_a^b f(x) dx.$

C. $S = \int_a^b f(x) dx.$

D. $S = \int_a^b |f(x)| dx.$

Lời giải

Chọn D

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) được tính theo công thức.

A. $S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|.$

B. $S = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

C. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

D. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

Lời giải

Chọn C

Câu 5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

A. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

B. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

C. $S = \pi \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

D. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

Lời giải

Chọn A

Câu 6. Với hàm số $f(x)$ tùy ý liên tục trên $\mathbf{R}$, $a < b$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định theo công thức

A. $S = \int_a^b |f(x)| dx.$

B. $S = \pi \int_a^b |f(x)| dx.$

C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

D. $S = \pi \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường

thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định theo công thức $S = \int_a^b |f(x)| dx.$

Câu 7. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$; $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

B. $S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|.$

C. $S = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$

D. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

Lời giải

Chọn D

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên

đoạn $[a; b]$, các đường thẳng $x = a$; $x = b$ được tính theo công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay là:

A. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx.$

B. $V = \int_a^b |f(x)| dx.$

C. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

D. $V = \int_a^b (\pi f(x))^2 dx.$

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, các đường thẳng $x = a$; $x = b$ và trục Ox là

- A.** $-\int_a^b f(x) dx$. **B.** $\int_a^b f(x) dx$. **C.** $\pi \int_a^b f(x) dx$. **D.** $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, các đường thẳng $x = a$; $x = b$ và trục Ox là: $\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx$.

□ Dạng 02: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm xác định

Câu 10. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 2$ và trục hoành bằng

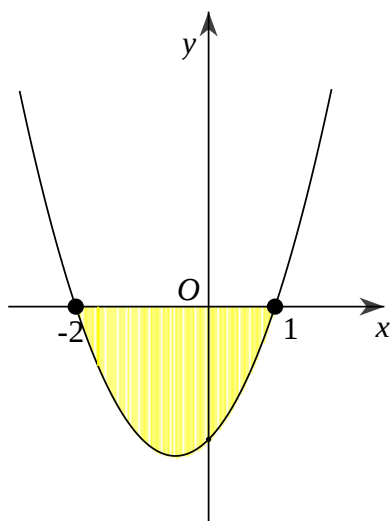
- A.** $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 9. **D.** $\frac{13}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$



Diện tích hình phẳng $S = \int_{-2}^1 |x^2 + x - 2| dx = -\int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx = \frac{9}{2}$.

Câu 11. Gọi S diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$.

A. $S = \int_0^1 (1 - x^3) dx$.

B. $S = \int_0^1 (x^3 - 1) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx$.

C. $S = \int_0^2 (x^3 - 1) dx$.

D. $S = \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = x^3 - 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu

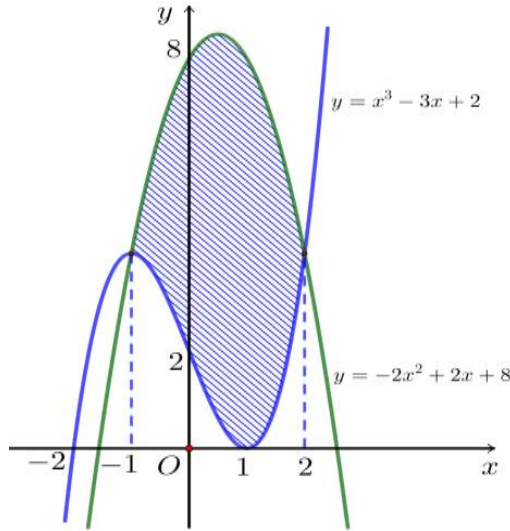
x	0	1	2
$x^3 - 1$	-	0	+

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^2 |x^3 - 1| dx = \int_0^1 |x^3 - 1| dx + \int_1^2 |x^3 - 1| dx = \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx$$

$$= \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}.$$

Câu 12. Diện tích hình phẳng phân gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?



A. $S = \int_{-1}^2 (-x^3 - 2x^2 + 5x + 6) dx.$

B. $S = \int_{-1}^2 (x^3 - 2x^2 - x + 10) dx.$

C. $S = \int_{-1}^2 (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) dx.$

D. $S = \int_{-1}^2 (x^3 + 2x^2 - x - 10) dx.$

Lời giải

Chọn A

$$S = \int_{-1}^2 [(-2x^2 + 2x + 8) - (x^3 - 3x + 2)] dx = \int_{-1}^2 (-x^3 - 2x^2 + 5x + 6) dx.$$

Câu 13. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = e^x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$ được tính theo công thức.

A. $S = \int_{-1}^1 |e^x - x| dx.$

B. $S = \int_0^1 |e^x - 1| dx.$

C. $S = \int_0^1 (e^x - x) dx.$

D. $S = \int_0^1 (x - e^x) dx.$

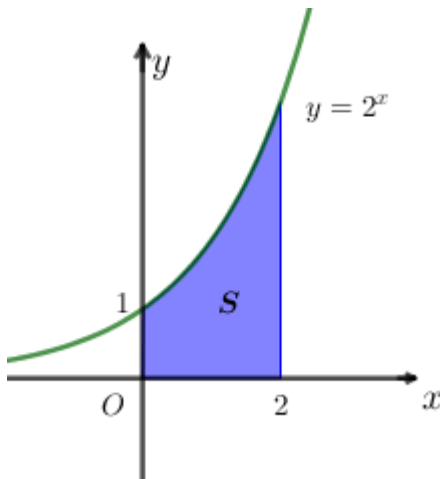
Lời giải

Chọn C

Vì trong khoảng $(0;1)$ phương trình $e^x = x$ không có nghiệm và $e^x > x, \forall x \in (0;1)$ nên

$$S = \int_0^1 |e^x - x| dx = \int_0^1 (e^x - x) dx.$$

Câu 14. Cho hàm số $y = 2^x$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Diện tích S của hình phẳng trong hình bằng



A. $S = \int_1^2 2^x dx$.

B. $S = \int_0^2 2^{2x} dx$.

C. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$.

D. $S = \int_0^2 2^x dx$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích S của hình phẳng trong hình trên bằng $S = \int_0^2 2^x dx$.

Câu 15. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{7}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$S = \int_1^2 \left| (x-2)^2 - 1 \right| dx = \frac{2}{3}.$$

Câu 16. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 3^{2x} dx$.

B. $S = \int_0^2 3^x dx$.

C. $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx$.

D. $S = \pi \int_0^2 3^x dx$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S = \int_0^2 3^x dx$

Câu 17. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$, đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục Ox là

A. $S = \int_0^\pi |\cos x| dx$. **B.** $S = \pi \int_0^\pi |\cos x| dx$. **C.** $S = \int_0^\pi \cos x dx$. **D.** $S = \int_0^\pi \cos^2 x dx$.

Lời giải

Chọn A

Lý thuyết.

Câu 18. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$. **B.** $S = \int_0^2 e^x dx$. **C.** $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. **D.** $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S = \int_0^2 |e^x| dx = \int_0^2 e^x dx$.

□ Dạng 03: Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay) hàm xác định

Câu 19. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox .

A. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$. **B.** $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.
C. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$ **D.** $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay được tính $V = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

Câu 20. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \cdot \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

A. $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$.

B. $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$.

C. $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$.

D. $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) : $\begin{cases} y = x \cdot \ln x \\ y = 0 \\ x = 1; x = 2 \end{cases}$ khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác

định bởi $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$.

Câu 21. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt).

B. $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt).

C. $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt).

D. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt).

Lời giải

Chọn D

Ta có $3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \pi \left(3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{10} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 22. Cho hàm số $y = \pi^x$ có đồ thị (C) . Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

A. $V = \pi^2 \int_2^3 \pi^x dx.$

B. $V = \pi \int_3^2 \pi^{2x} dx.$

C. $V = \pi^3 \int_2^3 \pi^x dx.$

D. $V = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx.$

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_2^3 (\pi^x)^2 dx = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx.$$

Câu 23. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi(\pi+2)}{8}.$

B. $\frac{\pi^2+1}{4}.$

C. $\frac{\pi(\pi+2)}{4}.$

D. $\frac{\pi+2}{8}.$

Lời giải

Chọn A

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi(\pi+2)}{8}.$$

Câu 24. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. $\frac{3}{2}.$

B. $\frac{2\pi}{3}.$

C. $\frac{3\pi}{2}.$

D. $3\pi.$

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành: $V = \pi \int_1^2 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{3\pi}{2}.$

Câu 25. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx.$

B. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx.$

C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx.$

D. $V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx.$

Lời giải

Chọn C

Câu 26. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi phép quay trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{\frac{x}{2}}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ bằng

A. $e^2 - 1.$

B. $\pi(e^2 - 1).$

C. $\pi(e - 1).$

D. $\pi e^2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có. $V = \pi \int_0^2 e^x dx = \pi \cdot e^x \Big|_0^2 = \pi(e^2 - 1).$

Câu 27. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 3; y = 2$; trục hoành và trục tung. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) quay quanh trục hoành bằng:

A. $V = 12\pi.$

B. $V = 24\pi.$

C. $V = 36\pi.$

D. $V = 18\pi.$

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Dựa vào công thức tính thể tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và

hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$ khi quay quanh trục Ox là: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Suy ra $V = \pi \int_0^3 (2)^2 dx = 12\pi.$

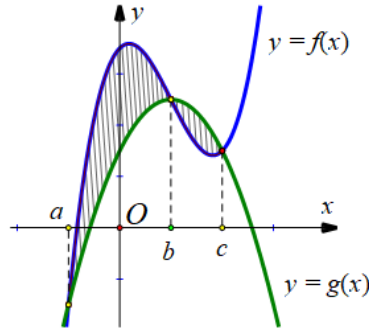
Cách 2. Khối tròn xoay sinh bởi (H) quay quanh trục hoành là khối trụ có chiều cao $h = 3$, bán kính đường tròn đáy $R = 2$ nên thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$V = \pi R^2 h = \pi 2^2 \cdot 3 = 12\pi.$

MỨC ĐỘ 2: THÔNG HIỂU

b Dạng 01: Câu hỏi lý thuyết

Câu 28. Cho hai hàm số $y = g(x)$ và $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; c]$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên được tính theo công thức



A. $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx - \int_b^c [f(x) - g(x)] dx$. **B.** $S = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx$.

C. $S = \left| \int_a^c [f(x) - g(x)] dx \right|$. **D.** $S = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx + \int_b^c [f(x) - g(x)] dx$.

Lời giải

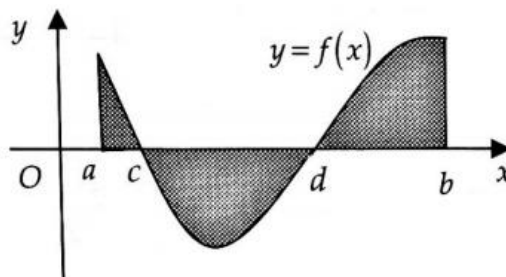
Chọn A

Dựa vào đồ thị, ta có diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số được tính theo công thức

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx + \int_b^c [g(x) - f(x)] dx.$$

Suy ra $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx - \int_b^c [f(x) - g(x)] dx$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $x = c$ và $x = d$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx$.

B. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$.

C. $S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx.$

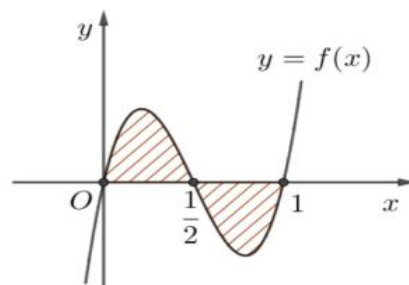
D. $S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^d |f(x)| dx + \int_d^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx.$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$ có đồ thị như hình vẽ bên, kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx.$

B. $S = -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx.$

C. $S = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx.$

D. $S = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx.$

Lời giải

Chọn D

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Dựa vào hình vẽ ta có $f(x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ và $f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right).$

Nên diện tích S giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = 0$ và $x = 1$ là

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx.$$

Câu 31. (Chuyên Bắc Giang - tháng 20/2018-2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là

A. $\frac{23}{15}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

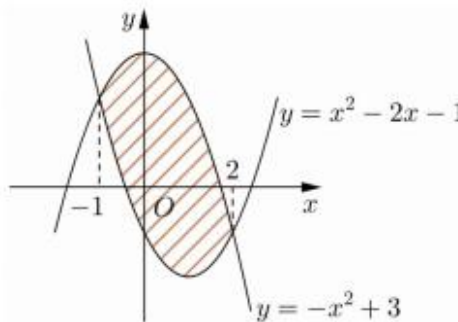
diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là:

$$S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx.$$

Nhận xét: $x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in [0; 2]$.

Nên $S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

Câu 32. (Chuyên Tự Nhiên Lần 1 - 2018-2019) Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

B. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx.$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta thấy $-x^2 + 3 \geq x^2 - 2x - 1, \forall x \in [-1; 2]$.

Vậy diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 33. (KSNLGV - THUẬN THÀNH 2 - BẮC NINH NĂM 2018 - 2019) Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x, y = 0, x = -10, x = 10$.

- A.** $S = 2000$. **B.** $S = \frac{2008}{3}$. **C.** $S = \frac{2000}{3}$. **D.** $S = 2008$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^2 - 2x$ và $(d): y = 0$ là:

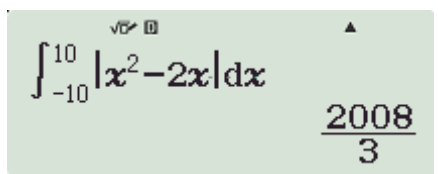
$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
VT	+	0	-	0	+

$$\begin{aligned} \text{Diện tích cần tìm: } S &= \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx = \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-10}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^{10} = \frac{1300}{3} + \frac{4}{3} + \frac{704}{3} = \frac{2008}{3}. \end{aligned}$$

Cách 2: Dùng MTCT Casio fx 580VN X



Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[c; d]$. Công thức nào sau đây là công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = c, x = d, (c < d)$ xung quanh trục Ox ?

A. $V = \pi \int_c^d f^2(x) dx.$

B. $V = \int_c^d f^2(x) dx.$

C. $V = \int_c^d |f(x)| dx.$

D. $V = \pi \int_c^d f(x) dx.$

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối tròn xoay có trong đề bài bằng: $V = \pi \int_c^d f^2(x) dx.$

b Dạng 02: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm xác định

Câu 35. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ và $y = x^2 + 3$ bằng:

A. $\frac{9}{2}.$

B. $\frac{5}{2}.$

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 + x + 1 = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -2.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\int_{-2}^1 |(2x^2 + x + 1) - (x^2 + 3)| dx = \int_{-2}^1 |x^2 + x - 2| dx = \left| \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \right|_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

Câu 36. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$, $x = 1, x = 4$ và trục hoành.

A. $S = \frac{20}{3}$

B. $S = 6$

C. $S = \frac{22}{3}$

D. $S = \frac{16}{3}$

Lời giải

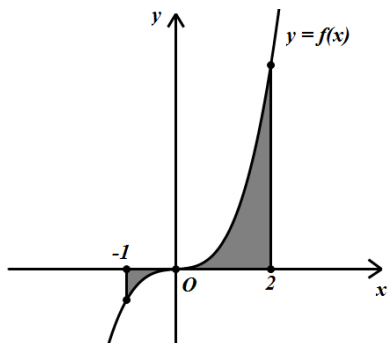
Chọn C

Ta có diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$, $x = 1, x = 4$ và trục hoành

là: $S = \int_1^4 |x^2 - 2x| dx = \int_1^2 (2x - x^2) dx + \int_2^4 (x^2 - 2x) dx.$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^4 = 4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{64}{3} - 16 - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{22}{3}$$

Câu 37. (ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA LẦN 1 THPT HẬU LỘC 2 NĂM HỌC 2018 – 2019) Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 2$ (như hình vẽ). Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = -b - a$.

B. $S = b - a$.

C. $S = b + a$.

D. $S = -b + a$.

Lời giải

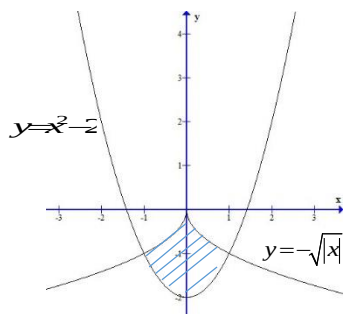
Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) < 0$ với mọi $x \in (-1; 0)$; $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0; 2)$.

$$\text{Ta có } S = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 [-f(x)] dx + \int_0^2 f(x) dx = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = b - a.$$

Vậy $S = b - a$.

Câu 38. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $2 \int_0^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

B. $2 \int_0^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

C. $2 \int_0^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

D. $2 \int_0^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy hai đồ thị cắt nhau được một hình đối xứng nên ta chỉ cần tính diện tích một nửa hình bên phải trục Oy và nhân đôi diện tích.

Xét hoành độ giao điểm của hai đồ thị với $x > 0$ là $x = 1$.

Diện tích được giới hạn bởi công thức D: $2 \int_0^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

Đáp án A và B ra âm.

Đáp án C sai công thức.

Câu 39. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x} \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. 2.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

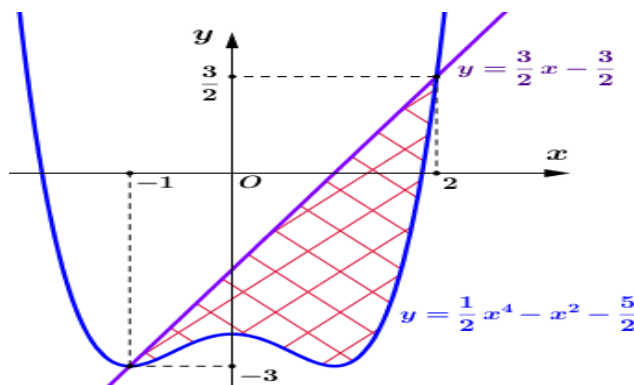
Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{x} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn là: $\int_1^e \left| \frac{1}{x} \ln x \right| dx = \left| \int_1^e \ln x d(\ln x) \right| = \left| \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^e = \frac{1}{2}$.

Câu 40. Diện tích phần hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2} x^4 - x^2 - \frac{3}{2} x - 1 \right) dx$.

B. $\int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{2} x^4 + x^2 + \frac{3}{2} x + 4 \right) dx$.

C. $\int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{2} x^4 - x^2 - \frac{3}{2} x - 4 \right) dx$.

D. $\int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{2} x^4 + x^2 + \frac{3}{2} x + 1 \right) dx$.

Lời giải

Chọn D

Từ hình vẽ ta thấy phần diện tích hình phẳng cần tính là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số: $y = f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$; $y = g(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{5}{2}$ và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 2$.

Ngoài ra ta thấy đường $y = f(x)$ nằm trên đường $y = g(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ nên ta có diện tích phần gạch chéo trên hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^2 \left[\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{5}{2} \right) \right] dx = \int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \right) dx.$$

Câu 41. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ là

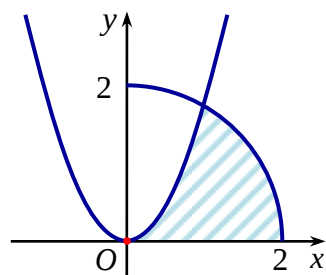
A. $S = \left| \int_{-1}^2 x^3 dx \right|$ **B.** $S = \int_{-1}^2 x^3 dx$ **C.** $S = \int_{-1}^2 -x^3 dx$ **D.** $S = \int_{-1}^2 |x^3| dx$

Lời giải

Chọn D

Theo công thức tính diện tích hình phẳng ta có $S = \int_{-1}^2 |x^3| dx$

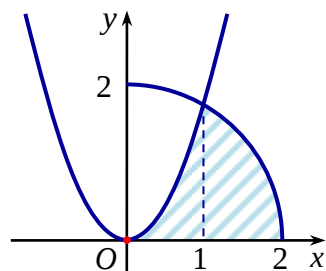
Câu 42. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = \sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) là

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2 = 3x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } 0 \leq x \leq 2 \text{)}.$$

Cách 1: Diện tích của (H) là

$$S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_0^1 + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + I \text{ với } I = \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$\text{Đặt: } x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2 \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}, x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt = (2x + \sin 2t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{\sqrt{3}}{3} + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}.$$

Cách 2: Diện tích của (H) bằng diện tích một phần tư hình tròn bán kính 2 trừ diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung tròn, parabol và trục Oy .

$$\text{Tức là } S = \pi - \int_0^1 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2) dx.$$

h Dạng 03: Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay) hàm xác định

Câu 43. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{1+2\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi}{2}(4 - \pi).$

B. $V = 2 - \frac{\pi}{2}.$

C. $V = \frac{\pi}{2}(\pi + 4).$

D. $V = \frac{\pi}{2} + 2.$

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox , hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Ta có $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin x) dx = \pi (x - 2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}(\pi + 4).$

Câu 44. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{y}$, $y = -x + 2$ và $x = 0$ quay quanh trục Ox có giá trị là kết quả nào sau đây?

A. $V = \frac{32}{15} \pi.$

B. $V = \frac{11}{6} \pi.$

C. $V = \frac{1}{3} \pi.$

D. $V = \frac{3}{2} \pi.$

Lời giải

Chọn A

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường:
$$\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y = -x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 (x \geq 0) \\ y = -x + 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$

Thể tích vật tròn xoay sinh ra khi hình (H) quay quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^1 \left((-x + 2)^2 - (x^2)^2 \right) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - 4x + 4 - x^4) dx = \frac{32}{15} \pi \text{ (đvtt)}$$

Câu 45. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V = \frac{\pi^2}{4}.$

B. $V = \frac{\pi}{4}.$

C. $V = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

D. $V = \frac{\pi \ln 2}{2}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Thể tích khối tròn xoay cần tính là } V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\pi \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Câu 46. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4}$, trục Ox , đường thẳng $x = 3$. Tính thể tích khối tròn xoay tại thành khi qua hình (H) quanh trục hoành.

A. $V = 3\pi$.

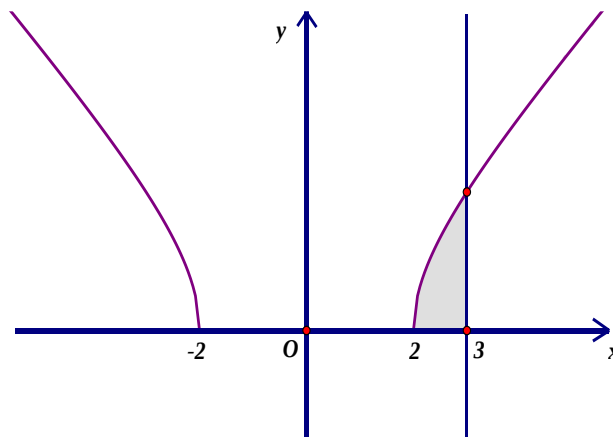
B. $V = \frac{5\pi}{3}$.

C. $V = 2\pi$.

D. $V = \frac{7\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Điều kiện: } x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Ta có: $\sqrt{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$ và $y = \sqrt{x^2 - 4}$ không xác định trên $(-2; 2)$ nên thể tích cần tính là:

$$V = \pi \int_2^3 \left(\sqrt{x^2 - 4} \right)^2 dx = \pi \int_2^3 (x^2 - 4) dx = \left[\pi \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \right]_2^3 = \pi \cdot (-3) - \pi \cdot \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{7\pi}{3}.$$

Câu 47. Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 2x$; $y = 4 - x^2$ khi nó quay quanh trục hoành là

A. $\frac{125}{3}\pi$.

B. $\frac{421}{15}\pi$.

C. 27π .

D. 30π .

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 4 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Gọi V_1 là thể tích của khối tròn xoay sinh bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 2$. Gọi V_2 là thể tích của khối tròn xoay sinh bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 0$. Khi đó thể tích của khối tròn xoay cần tìm là

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-1}^2 (4 - x^2)^2 dx - \pi \int_{-1}^0 (x^2 - 2x)^2 dx = \frac{153}{5}\pi - \frac{38}{15}\pi = \frac{421}{15}\pi.$$

Câu 48. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox .

A. $V = \frac{4}{3}$.

B. $V = \frac{4}{3}\pi$.

C. $V = \frac{16}{15}\pi$.

D. $V = \frac{16}{15}$.

Lời giải

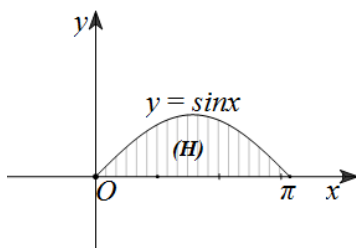
Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với trục hoành: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra do (H) quay quanh Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \cdot \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$$

Câu 49. Cho hình (H) trong hình vẽ dưới đây quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\frac{\pi^2}{2}$.

B. 2π .

C. $\frac{\pi}{2}$.

D. $2\pi^2$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Câu 50. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $x = e$ quay quanh trục Ox . Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\pi \frac{2e^3 - 1}{9}.$

B. $\pi \frac{2e^3 + 1}{9}.$

C. $\pi \frac{4e^3 + 1}{9}.$

D. $\pi \frac{4e^3 - 1}{9}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x\sqrt{\ln x} = 0 \Rightarrow x = 1$

$$V = \pi \int_1^e \left(x\sqrt{\ln x} \right)^2 dx = \pi \frac{2e^3 + 1}{9} \text{ (Bấm casio)}$$

b Dạng 04: Thể tích tính theo mặt cắt $S(x)$

Câu 51. Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$; $x = 2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x ($0 \leq x \leq 2$) ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\frac{13e^4 - 1}{4}.$

B. $2e^2.$

C. $2\pi e^2.$

D. $\frac{(13e^4 - 1)\pi}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Gọi $S(x)$ là diện tích của thiết diện, ta có $S(x) = (x+1)^2 e^{2x}.$

$$\text{Thể tích vật thể } (T) \text{ là } V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 (x+1)^2 e^{2x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (x+1)^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x+1) dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

$$V = \frac{1}{2}(x+1)^2 e^{2x} \Big|_0^2 - \int_0^2 (x+1) e^{2x} dx = \frac{9}{2}e^4 - \frac{1}{2} - \int_0^2 (x+1) e^{2x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$$

$$V = \frac{9}{2}e^4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} \Big|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x} dx = 3e^4 + \left(\frac{1}{4}e^{2x} \right) \Big|_0^2 = \frac{13e^4 - 1}{4} \text{ (đvtt)}$$

Câu 52. Cho phần vật thể Φ được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox tại $x = 0$, $x = 3$. Cắt phần vật thể Φ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x ($0 \leq x \leq 3$) ta được thiết diện là hình chữ nhật có kích thước lần lượt là x và $\sqrt{3-x}$. Thể tích phần vật thể Φ bằng

A. $\frac{12\sqrt{3}\pi}{5}$.

B. $\frac{12\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{27}{4}$.

D. $\frac{27\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có diện tích thiết diện là $S(x) = x\sqrt{3-x}$.

$$\text{Vậy thể tích phần vật thể } \Phi \text{ là: } V = \int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 x\sqrt{3-x} dx = \frac{12\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 53. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sqrt{1-x^4}$.

A. 4.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi độ dài cạnh tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sqrt{1-x^4}$ là $\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}}$

$$\text{Ta có diện tích thiết diện được cho bằng: } S(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{4}(1-x^4)$$

Thể tích vật thể cần tìm là: $V = \int_{-1}^1 S(x) \cdot dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(1-x^4) dx = \frac{2}{5}.$

Câu 54. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=\frac{\pi}{3}$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)$ ta được thiết diện là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $2x$ và $\cos x$. Thể tích vật thể B bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi+3}{6}.$ **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi-3}{3}.$ **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi-3}{6}.$ **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$

Lời giải

Chọn C

Thể tích vật thể B là $V = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi-3}{6}.$

Câu 55. Cho (T) là vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0, x=1$. Tính thể tích V của (T) biết rằng khi cắt (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x, 0 \leq x \leq 1$, ta được thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{1+x}$.

A. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$ **B.** $V = \frac{3}{2}\pi.$ **C.** $V = \frac{3}{2}.$ **D.** $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi.$

Lời giải

Chọn A

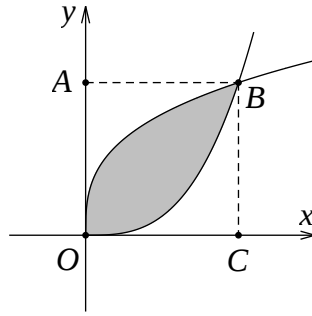
Với mỗi $x, 0 \leq x \leq 1$, ta có thiết diện là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{1+x}$ nên thiết diện có diện tích

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x+1).$$

Khi đó: $V = \int_0^1 S(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 (x+1) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{(x+1)^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$

b Dạng 06: Bài toán thực tế sử dụng diện tích hình phẳng

Câu 56. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0), A(0;1), B(1;1), C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$. Tính diện tích của phần không được tô đậm trên viên gạch men.



A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình vuông có cạnh bằng 1 là $S = 1^2 = 1$.

Gọi S_1 là diện tích phần tô đậm.

$$\text{Ta có } S_1 = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^3 \right) dx = \left(\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Vậy diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men bằng $S - S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu 57. Tính tổng $S = \frac{1}{1} \cdot C_{2017}^0 + \frac{1}{2} C_{2017}^1 + \dots + \frac{1}{k+1} C_{2017}^k + \dots + \frac{1}{2018} C_{2017}^{2017}$.

A. $\frac{2^{2018}}{2018}$.

B. $\frac{2^{2018} - 1}{2018}$.

C. $\frac{2^{2018} + 1}{2018}$.

D. $\frac{2^{2018} - 2^{2017}}{2018}$.

Lời giải

Chọn B

$$+) \text{ Ta có: } \int_0^1 (1+x)^{2017} dx = \frac{(1+x)^{2018}}{2018} \Big|_0^1 = \frac{2^{2018} - 1}{2018} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &+) \text{ Mặt khác } \int_0^1 (1+x)^{2017} dx = \int_0^1 (C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + \dots + C_{2017}^{2017} x^{2017}) dx \\ &= \left(C_{2017}^0 x + \frac{1}{2} C_{2017}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2017}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2018} C_{2017}^{2017} x^{2018} \right) \Big|_0^1 = s \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } S = \frac{2^{2018} - 1}{2018}.$$

b Dạng 08: Ứng dụng vào bài toán chuyển động

Câu 58. Một ô tô đang chạy đều với vận tốc a (m/s) thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + a$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi vận tốc ban đầu a của ô tô bằng bao nhiêu, biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô di chuyển được 40m?

A. $a = 20$.

B. $a = 25$.

C. $a = 10$.

D. $a = 40$.

Lời giải

Chọn A

Khi ô tô dừng hẳn ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + a = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a}{5}$.

Quãng đường ô tô di chuyển được kể từ khi đạp phanh đến khi dừng hẳn là

$$S = \int_0^{\frac{a}{5}} v(t) dt = 40 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{a}{5}} (-5t + a) dt = 40 \Leftrightarrow \left(-5 \cdot \frac{t^2}{2} + at \right) \Big|_0^{\frac{a}{5}} = 40$$

$$-\frac{5}{2} \cdot \frac{a^2}{25} + \frac{a^2}{5} = 40 \Leftrightarrow \frac{a^2}{10} = 40 \Leftrightarrow a = 20.$$

Câu 59. Một vận động viên đua xe F đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì anh ta tăng tốc với gia tốc $a(t) = 6t$ (m/s²), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian 10 (s) kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A. 1110m.

B. 100m.

C. 1010m.

D. 1100m.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t) dt = \int 6t dt = 3t^2 + C$$

Đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì bắt đầu tăng tốc, thời điểm bắt đầu tăng tốc là $t = 0$ nên ta có

$$v(0) = 10 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = 3t^2 + 10.$$

Quãng đường đi được trong khoảng thời gian 10 (s) kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$\int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} (3t^2 + 10) dt = 1100 (\text{m}).$$

- Câu 60.** Một chiếc ô tô đang chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 + \frac{t^2 - 4}{t + 4}$ (m/s). Quãng đường ô tô đi được từ thời điểm $t = 5$ (s) đến thời điểm $t = 10$ (s) là
- A. 10,24 m. B. 12,23 m. C. 32,8 m. D. 45,03 m.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Quãng đường ô tô đi được là: } s = \int_5^{10} \left(2 + \frac{t^2 - 4}{t + 4} \right) dt = 32,8 \text{ m.}$$

- Câu 61.** Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?
- A. 12m. B. 15m. C. 10m. D. 8m.

Lời giải

Chọn A

Lấy mốc thời gian ($t = 0$) là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t) = 0$, tức là $v(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là

$$\int_0^2 (-6t + 12) dt = \left(-3t^2 + 12t \right) \Big|_0^2 = 12 \text{ (m)}.$$

- Câu 62.** Một ô tô đang chạy với vận tốc 15 (m/s) thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a = 3t - 8$ (m/s²), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng vận tốc. Hỏi sau 10 giây tăng vận tốc, ô tô đi được bao nhiêu mét ?
- A. 246. B. 250. C. 150. D. 180.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vận tốc của ô tô sau khi tăng tốc là } v(t) = \int a(t) dt = \int (3t - 8) dt = \frac{3}{2}t^2 - 8t + C.$$

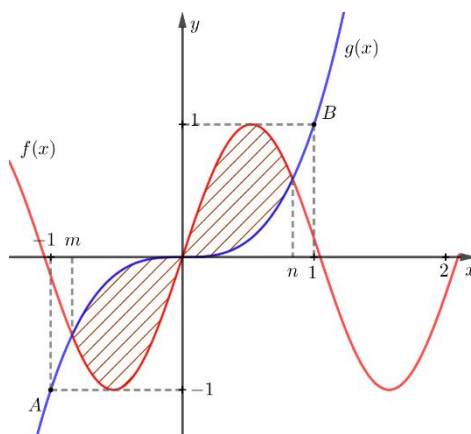
$$\text{Tại thời điểm } t = 0, \text{ ta có } v(0) = 15 \Rightarrow C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 - 8t + 15.$$

Vậy sau 10 giây tăng tốc, quãng đường ô tô đi được là

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} \left(\frac{3}{2} t^2 - 8t + 15 \right) dt = 250.$$

b Dạng 10: Diện tích khi biết dạng các đồ thị hoặc hàm ẩn

Câu 63. Trong hình dưới đây, S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số liên tục $y = f(x)$ và đồ thị của hàm số $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $S = \int_m^0 (x^3 - f(x)) dx + \int_0^n (f(x) - x^3) dx.$

B. $S = \int_m^0 (-x^3 - f(x)) dx + \int_0^n (f(x) + x^3) dx.$

C. $S = \int_m^0 (2x^3 + f(x)) dx + \int_0^n (-f(x) - 2x^3) dx.$

D. $S = \int_m^0 (-2x^3 + f(x)) dx + \int_0^n (-f(x) + 2x^3) dx$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có đồ thị của $g(x)$ qua các điểm $A(-1; -1)$, $O(0; 0)$ và $B(1; 1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

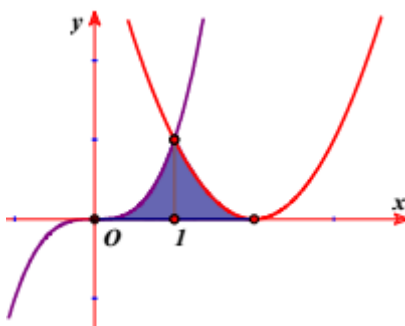
Vậy $g(x) = x^3$. Do đó:

$$S = \int_m^n |f(x) - g(x)| dx = \int_m^0 |f(x) - x^3| dx + \int_0^n |f(x) - x^3| dx$$

Từ đồ thị ta có: $f(x) < x^3, \forall x \in (m, 0)$ và $f(x) > x^3, \forall x \in (0, n)$ do đó:

$$S = \int_m^0 (x^3 - f(x)) dx + \int_0^n (f(x) - x^3) dx$$

Câu 64. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4x + 4$, đường cong $y = x^3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích S của hình (H) .



A. $S = \frac{20}{3}$.

B. $S = -\frac{11}{2}$.

C. $S = \frac{11}{2}$.

D. $S = \frac{7}{12}$.

Lời giải

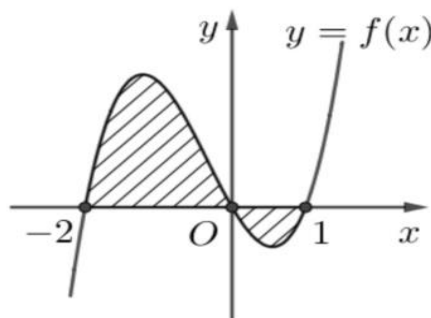
Chọn D

Parabol $y = x^2 - 4x + 4$ có đỉnh $I(2; 0)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 - 4x + 4$ và $y = x^3$ là $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có $S = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{7}{12}$.

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$ có đồ thị như hình vẽ bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành bằng



A. $S = -\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$.

C. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx.$

D. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx.$

Lời giải

Chọn B

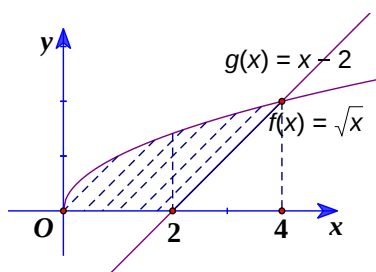
Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$

Dựa vào hình vẽ ta có $f(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$ và $f(x) < 0, \forall x \in (0; 1).$

Nên diện tích S giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và trục hoành là:

$$S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx.$$

Câu 66. Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau



A. $S = \frac{7}{3}.$

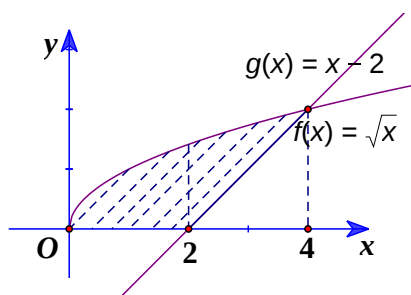
B. $S = \frac{8}{3}.$

C. $S = \frac{10}{3}.$

D. $S = \frac{11}{3}.$

Lời giải

Chọn C

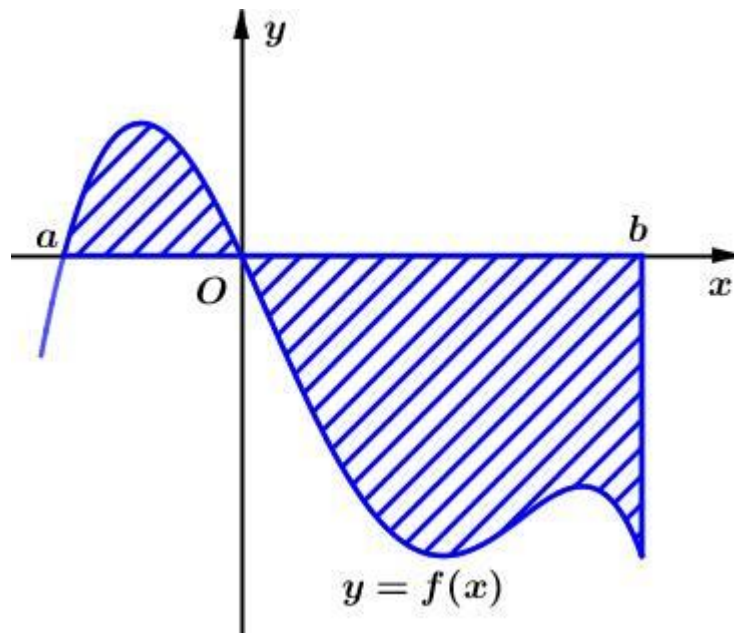


Dựa và hình vẽ, ta có hình phẳng được giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x - 2 \\ y = 0 \end{cases}.$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx = \frac{10}{3}.$$

Dạng 11: Thể tích khi biết dạng các đồ thị hoặc hàm ẩn

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và thỏa mãn $\int_a^0 f(x) dx = m, \int_0^b f(x) dx = n$. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ bên bằng



A. $n - m$.

B. $m - n$.

C. $m + n$.

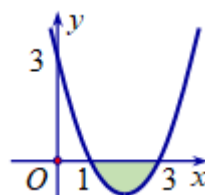
D. $m.n$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Diện tích cần tìm bằng } S = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b [-f(x)] dx = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx = m - n.$$

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox . Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx.$

B. $V = \frac{1}{3} \int_1^3 [f(x)]^2 dx.$

C. $V = \pi^2 \int_1^3 [f(x)]^2 dx.$

D. $V = \int_1^3 [f(x)]^2 dx.$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x = 1, x = 3$ nên thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox được tính theo công thức $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

b Dạng 12: Ứng dụng thực tế khác của tích phân

Câu 69. Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua mạch dao động LC lí tưởng có phương trình $i = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$

Ngoài ra $i = q'(t)$ với q là điện tích tức thời trong tụ. Tính từ lúc $t = 0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\frac{\pi}{2\omega}$ là

A. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}.$

B. $\frac{I_0}{\omega}.$

C. $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}.$

D. $0.$

Lời giải

Chọn B

Tính từ lúc $t = 0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\frac{\pi}{2\omega}$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \\ &= -\frac{I_0}{\omega} \left[\cos\left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{I_0}{\omega} \left[\cos(\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{I_0}{\omega}. \end{aligned}$$

Câu 70. Một vật chuyển động với vận tốc $10 (m/s)$ thì tăng gia tốc $a(t) = 3t + t^2 (m/s^2)$. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng gia tốc là :

A. $\frac{4300}{3} (m).$

B. $\frac{430}{3} (m).$

C. $\frac{4000}{3} (m).$

D. $\frac{400}{3} (m).$

Lời giải

Chọn A

Gọi $v(t)$ là vận tốc của vật tại thời điểm t .

$$\text{Ta có } \begin{cases} v'(t) = a(t) = 3t + t^2 \\ v(0) = 10 \end{cases} \Rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^3}{3} + 10.$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là:

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} (m).$$

MỨC ĐỘ 3: VẬN DỤNG

Dạng 02: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm xác định

Câu 71. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 - 4$, tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$ và trục Oy là

A. $S = \frac{7}{3}$.

B. $S = \frac{4}{3}$.

C. $S = 2$.

D. $S = \frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 2x.$$

$$y'(2) = 4.$$

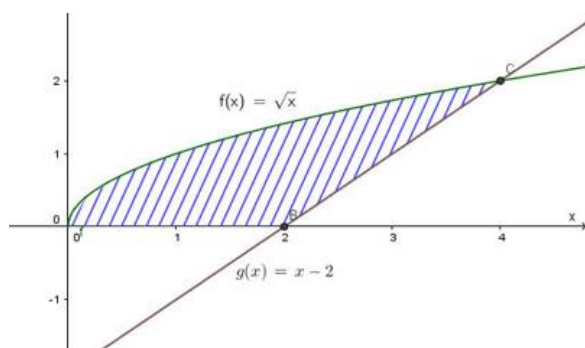
Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$

$$y = 2(x - 2) = 2x - 4.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S = \int_0^2 |x^2 - 4 - (2x - 4)| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 \right| = \frac{4}{3}.$$

Câu 72. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là:



A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{10}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \sqrt{x}, (x \geq 0); g(x) = x - 2$.

$$\text{Xét } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Xét } g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Gọi S là diện tích cần tính, dựa vào hình vẽ:

$$S = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 \left| (\sqrt{x}) - (x - 2) \right| dx = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx.$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^4 = \frac{10}{3}.$$

Câu 73. Cho S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$. Biết $S = a\sqrt{2} + b (a, b \in \mathbb{Q})$. Tính $a+b$.

A. $a+b = \frac{1}{3}$.

B. $a+b = 0$.

C. $a+b = \frac{1}{6}$.

D. $a+b = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có trục tung có phương trình là $x = 0$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$ là $S = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$.

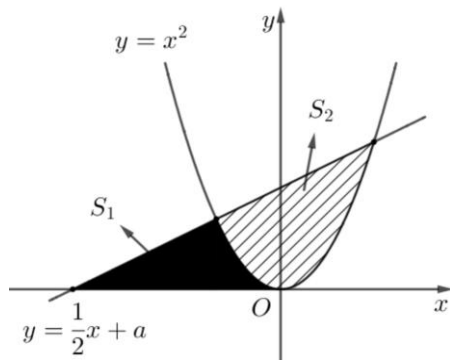
Mặt khác

$$S = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot (1+x^2)\sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}.$$

Biết $S = a\sqrt{2} + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) nên $a = \frac{2}{3}$ và $b = -\frac{1}{3}$.

Vậy $a+b = \frac{1}{3}$.

Câu 74. Cho đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + a$ và parabol $y = x^2$, với a là tham số thực. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được tô đậm và gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $(3; \frac{7}{2})$.

B. $(-\frac{1}{16}; \frac{5}{2})$.

C. $(\frac{5}{2}; 3)$.

D. $(\frac{7}{2}; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$x^2 = \frac{1}{2}x + a \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{16a+1}}{4} \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{16a+1}}{4} \end{cases} \text{ (điều kiện } a > -\frac{1}{16} \text{)}.$$

Ta có

$$S_1 = \int_{-2a}^{x_1} (\frac{1}{2}x + a) dx + \int_{x_1}^0 x^2 dx = \left(\frac{x^2}{4} + ax \right) \Big|_{-2a}^{x_1} + \frac{x^3}{3} \Big|_{x_1}^0 = \frac{1}{4} \left(\frac{1-\sqrt{16a+1}}{4} \right)^2 + a \left(\frac{1-\sqrt{16a+1}}{4} \right) + a^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1-\sqrt{16a+1}}{4} \right)^3.$$

$$S_2 = \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) = \frac{1}{3}(x_2 - x_1)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] = \frac{\sqrt{(16a+1)^3}}{48}.$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{1-\sqrt{16a+1}}{4} \right)^2 + a \left(\frac{1-\sqrt{16a+1}}{4} \right) + a^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1-\sqrt{16a+1}}{4} \right)^3 = \frac{\sqrt{(16a+1)^3}}{48}$$

$$\Rightarrow a \approx 3,684.$$

Câu 75. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = -x + 3$, $y = 1$ bằng

A. $\frac{1}{\ln 2} + 1.$

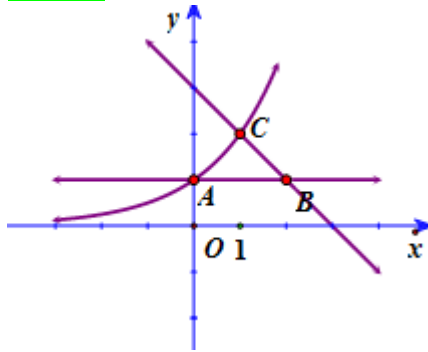
B. $\frac{1}{\ln 2} + 2.$

C. $\frac{1}{\ln 2} + 3.$

D. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn D



Hình phẳng giới hạn bởi ba đồ thị trên là tam giác cong ABC , với $A(0;1)$, $B(2;1)$, $C(1;2)$.

Dựa vào đồ thị ta có diện tích hình phẳng cần tính là

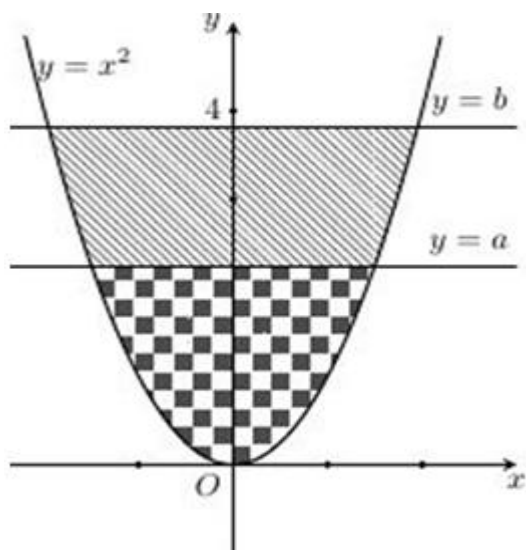
$$S = \int_0^1 (2^x - 1) dx + \int_1^2 (-x + 3 - 1) dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} - x \right) \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2.$$

$$\text{Hay } S = \frac{2}{\ln 2} - 1 - \frac{1}{\ln 2} + \left(2 - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}.$$

Câu 76. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ ($0 < a < b$) (hình vẽ).

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần chứa các ô vuông);

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và hai đường thẳng $y = b$, $y = a$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



A. $b = \sqrt[3]{3}a$.

B. $b = \sqrt[3]{6}a$.

C. $b = \sqrt[3]{2}a$.

D. $b = \sqrt[3]{4}a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(P): y = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x = -\sqrt{y} \end{cases} (y \geq 0).$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = b$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 &\Leftrightarrow S_1 = S \Leftrightarrow 2 \int_0^a \sqrt{y} dy = \int_0^b \sqrt{y} dy \\ &\Leftrightarrow \frac{4y\sqrt{y}}{3} \Big|_0^a = \frac{2y\sqrt{y}}{3} \Big|_0^b \Leftrightarrow \frac{4a\sqrt{a}}{3} = \frac{2b\sqrt{b}}{3} \Leftrightarrow b^3 = 4a^3 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4}a. \end{aligned}$$

Câu 77. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$; $y = \sin^2 x$ và đường thẳng

$x = \frac{\pi}{4}$ bằng:

A. $\frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$

B. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

C. $\frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

D. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x - \sin^2 x$ có $f'(x) = 1 - \sin 2x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$ nên phương trình $x = \sin^2 x$

có nghiệm duy nhất $x = 0$ và $f(x) = x - \sin^2 x \geq f(0) \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$; $y = \sin^2 x$ và đường thẳng $x = \frac{\pi}{4}$

$$\text{là: } S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |x - \sin^2 x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Câu 78. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 2 - x^2$ là

A. $2 \int_0^1 (1 - x^2) dx$. **B.** $2 \int_0^1 (x^2 - 1) dx$. **C.** $2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$. **D.** $2 \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$.

Lời giải

Chọn C

- Giải phương trình $x^2 = 2 - x^2$. Khi đó $x_1 = -1$; $x_2 = 1$. Đây là cận của tích phân cần tính.

- Áp dụng công thức tính diện tích: $S = \int_{-1}^1 |x^2 + x^2 - 2| dx = 2 \int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$.

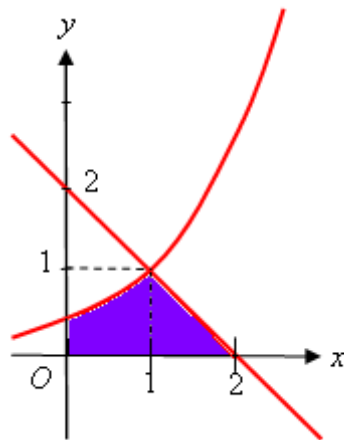
b Dạng 03: Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay) hàm xác định

Câu 79. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y = 2 - x$ với $x \geq 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V = \frac{\pi(5e^2 - 3)}{6e^2}$. **B.** $V = \frac{1}{2} + \frac{e-1}{e} \pi$. **C.** $V = \frac{1}{2} + \frac{e^2 - 1}{2e^2}$. **D.** $V = \frac{1}{3} + \frac{e^2 - 1}{2e^2}$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y = e^{x-1}$ và đường thẳng $y = 2 - x$:

$e^{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$. (Vì $y = e^{x-1}$ là hàm đồng biến và $y = 2 - x$ là hàm nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ nên phương trình có tối đa 1 nghiệm. Mặt khác $x = 1$ thỏa mãn pt nên đó là nghiệm duy nhất của pt đó).

Đường thẳng $y = 2 - x$ cắt trục hoành tại $x = 2$.

$$V = \pi \int_0^1 (e^{x-1})^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi e^{2x-2} \Big|_0^1 + \pi \left(\frac{x^3}{3} - 2x + 4 \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi(5e^2 - 1)}{6e^2}$$

Câu 80. Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 2x$; $y = 4 - x^2$ khi nó quay quanh trục hoành là

A. 27π .

B. 30π .

C. $\frac{125}{3}\pi$.

D. $\frac{421}{15}\pi$.

Lời giải

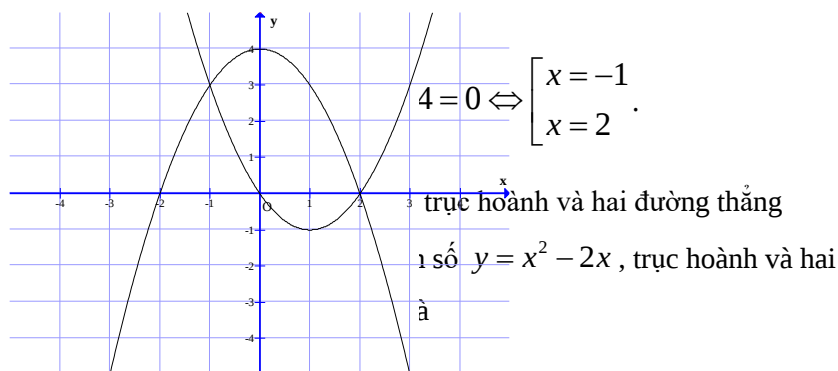
Chọn D

Xét phương trình hoành

Gọi V_1 là thể tích của kh

$x = -1$; $x = 2$. Gọi V_2 l

đường thẳng $x = -1$; $x =$



$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx - \pi \int_{-1}^2 (x^2 - 2x) dx = \frac{125}{5}\pi - \frac{21}{15}\pi = \frac{421}{15}\pi.$$

Câu 81. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ quay quanh trục Ox .

A. $\frac{10\pi}{3}$.

B. $\frac{8\pi}{3}$.

C. $\frac{8\pi^2}{3}$.

D. $\frac{64\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn B

(E) có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$. Do đó hai đỉnh thuộc trục lớn có tọa độ $A'(-2;0)$ và $(2;0)$.

$$\text{Vì } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Do đó thể tích khối tròn xoay là

$$V_{Ox} = \pi \int_{-2}^2 y^2 dx = \pi \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{8\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{Ox} = \frac{8\pi}{3} \text{ (đvtt).}$$

Câu 82. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1)$; $y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox .

A. $\frac{64\pi}{15}$.

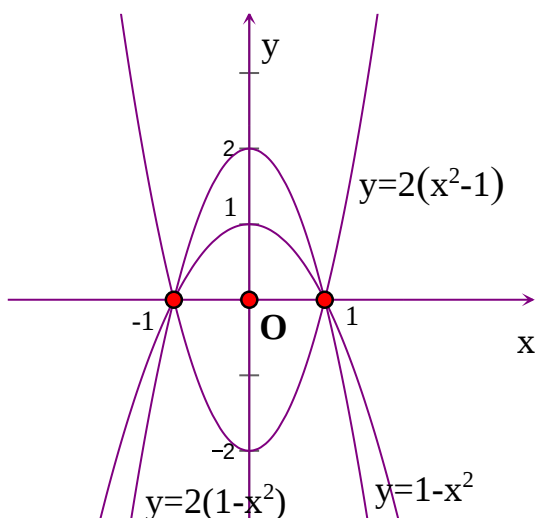
B. $\frac{32}{15}$.

C. $\frac{32\pi}{15}$.

D. $\frac{64}{15}$.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ và $y = 1 - x^2$ là $2(x^2 - 1) = 1 - x^2$
 $\Leftrightarrow x = \pm 1$.

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = 2(x^2 - 1)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y = 2(1 - x^2)$.

Ta có $2(1 - x^2) \geq 1 - x^2, \forall x \in [-1; 1]$. Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_{-1}^1 [2(x^2 - 1)]^2 dx = \frac{64\pi}{15}.$$

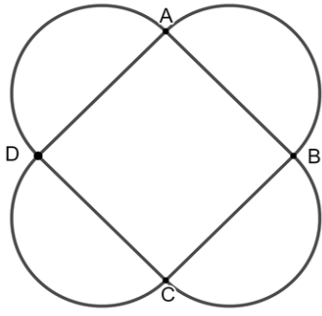
Câu 83. Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính (hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình trên khi quay quanh đường thẳng AC bằng

A. $\frac{8\pi}{3} + \pi^2$.

B. $\frac{64\pi}{3} + 8\pi^2$.

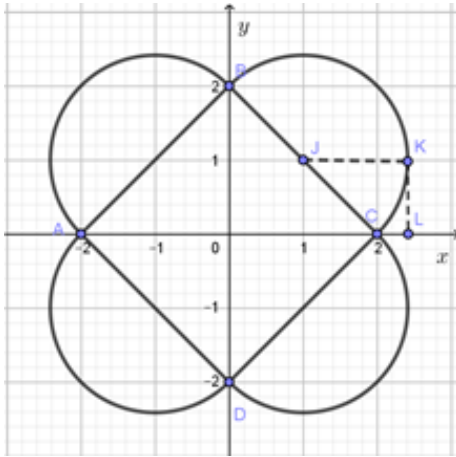
C. $\frac{32\pi}{3} + 4\pi^2$.

D. $\frac{16\pi}{3} + 2\pi^2$.



Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $J(1;1), K(\sqrt{2}+1;1), C(2;0)$.

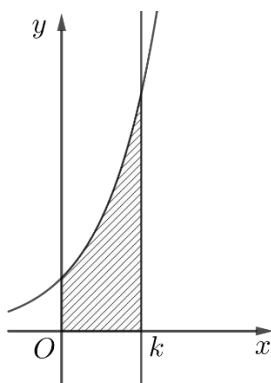
Phương trình đường tròn $J(1;1)$ bán kính $JB = \sqrt{2}$ là

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2 - (x-1)^2} + 1 = \sqrt{1 + 2x - x^2} + 1, \text{ khi } y \geq 1 \\ y = -\sqrt{2 - (x-1)^2} + 1 = -\sqrt{1 + 2x - x^2} + 1, \text{ khi } y < 1 \end{cases}.$$

Do quay hình phẳng xung quanh đường thẳng AC có thể tích gấp đôi khi quay phần hình phẳng gồm tam giác vuông OBC và nửa hình tròn tâm J bán kính JB .

$$\begin{aligned} \text{Nên thể tích khối tròn xoay } V &= 2\pi \int_0^{1+\sqrt{2}} \left(\sqrt{1+2x-x^2} + 1 \right)^2 dx - 2\pi \int_2^{1+\sqrt{2}} \left(-\sqrt{1+2x-x^2} + 1 \right)^2 dx \\ &= \frac{32\pi}{3} + 4\pi^2. \end{aligned}$$

Câu 84. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = k$ ($k > 0$). Gọi V_k là thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox . Biết rằng $V_k = 4$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?



A. $1 < k < \frac{3}{2}$.

B. $\frac{3}{2} < k < 2$.

C. $\frac{1}{2} < k < 1$.

D. $0 < k < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị suy ra $V_k = \pi \int_0^k e^{2x} dx = \frac{\pi \cdot e^{2x}}{2} \Big|_0^k = \pi \left(\frac{e^{2k}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi(e^{2k} - 1)}{2}$.

Giả thiết $V_k = 4 \Leftrightarrow \frac{\pi(e^{2k} - 1)}{2} = 4 \Leftrightarrow e^{2k} = \frac{8}{\pi} + 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi + 8}{\pi} \right) \approx 0,63 \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$.

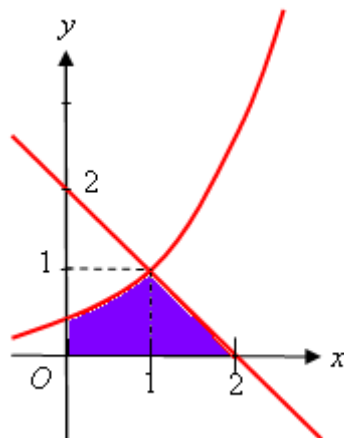
Do đó chọn đáp án C

Câu 85. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y = 2 - x$ với $x \geq 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V = \frac{1}{3} + \frac{e^2 - 1}{2e^2}$. **B.** $V = \frac{\pi(5e^2 - 3)}{6e^2}$. **C.** $V = \frac{1}{2} + \frac{e-1}{e} \pi$. **D.** $V = \frac{1}{2} + \frac{e^2 - 1}{2e^2}$.

Lời giải

Chọn



Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y = e^{x-1}$ và đường thẳng $y = 2 - x$:

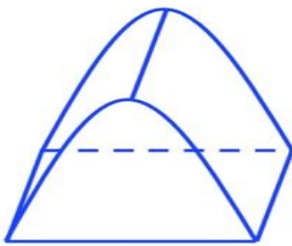
$e^{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$. (Vì $y = e^{x-1}$ là hàm đồng biến và $y = 2 - x$ là hàm nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ nên phương trình có tối đa 1 nghiệm. Mặt khác $x = 1$ thỏa mãn pt nên đó là nghiệm duy nhất của pt đó).

Đường thẳng $y = 2 - x$ cắt trục hoành tại $x = 2$.

$$V = \pi \int_0^1 (e^{x-1})^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi e^{2x-2} \Big|_0^1 + \pi \left(\frac{x^3}{3} - 2x + 4 \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi(5e^2 - 1)}{6e^2}$$

h Dạng 04: Thể tích tính theo mặt cắt S(x)

Câu 86. Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12A dự định dựng một cái lều trại có hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong trại.



A. 72 m^3 .

B. 36 m^3 .

C. $72\pi \text{ m}^3$.

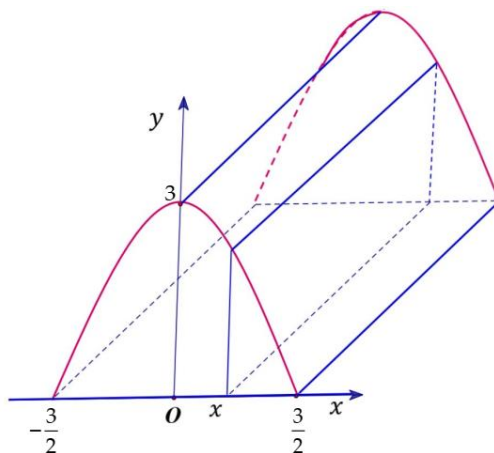
D. $36\pi \text{ m}^3$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thủy ; **Fb:** Thu Thủy

Chọn B

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Giả sử phương trình của parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$.

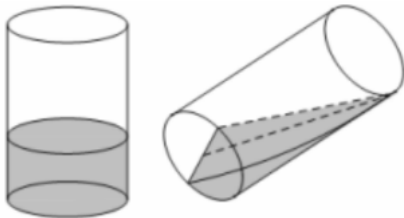
Ta có parabol có đỉnh là $(0;3)$ và đi qua điểm $\left(\frac{3}{2};0\right)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases} b=0 \\ c=3 \\ \frac{9}{4}a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-4}{3} \\ b=0 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow (P): y=\frac{-4}{3}x^2+3.$$

Cắt vật thể bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x \left(\frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$, ta thấy thiết diện thu được là một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{-4}{3}x^2+3$ mét và chiều dài bằng 6 mét. Diện tích thiết diện thu được là $6\left(\frac{-4}{3}x^2+3\right)=-8x^2+18$.

Vậy thể tích phần không gian bên trong trại là $\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}} (-8x^2+18)dx = 36 \text{ (m}^3\text{)}.$

- Câu 87.** Bạn có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc.



A. $60\pi\text{cm}^3$.

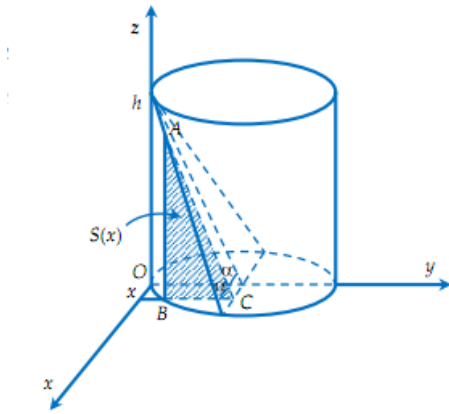
B. $15\pi\text{cm}^3$.

C. 60cm^3 .

D. 70cm^3 .

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ trên.

Gọi $S(x)$ là thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x .

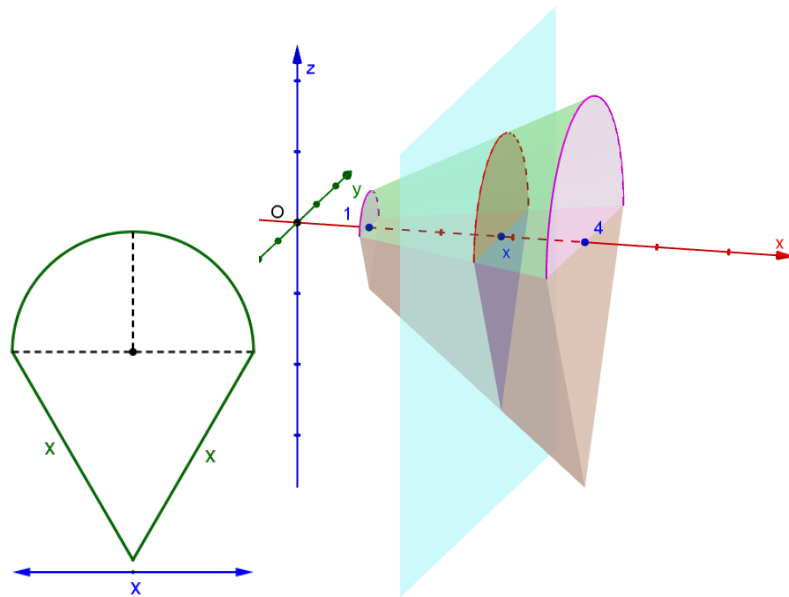
Suy ra thiết diện này là tam giác vuông ABC .

Mặt khác: $AB = BC, \tan \alpha = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha$.

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \cdot \frac{h}{R}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (3^2 - x^2) \frac{h}{R} dx = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{10}{3} = 60 (\text{cm}^3).$$

Câu 88. Cho một vật thể X được giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 1; x = 4$. Cắt vật thể bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x thì thiết diện thu được có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên dưới.



Thể tích vật thể X bằng:

A. $\frac{21(\pi+2\sqrt{3})}{8}$.

B. $\frac{4(\pi+2\sqrt{3})}{3}$.

C. $\frac{13(\pi+2\sqrt{3})}{12}$.

D. $\frac{8(\pi+2\sqrt{3})}{3}$.

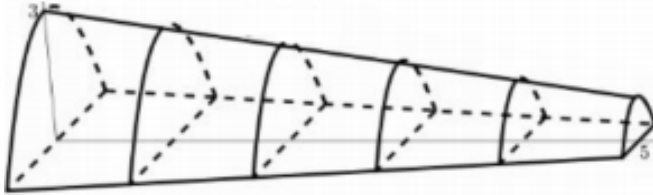
Lời giải

Chọn A

Diện tích thiết diện: $S(x) = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi+2\sqrt{3}}{8}x^2$.

Suy ra thể tích vật thể: $V = \int_1^4 S(x)dx = \int_1^4 \frac{\pi+2\sqrt{3}}{8}x^2 dx = \frac{21(\pi+2\sqrt{3})}{8} (\text{đvtt})$.

Câu 89. Cho một mô hình 3-D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên.



Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5(cm); khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao của parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x(\text{cm})$, với $x(\text{cm})$ là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 33

B. 27

C. 31

D. 29

Lời giải

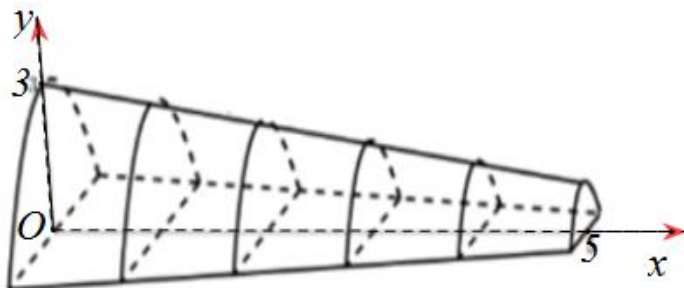
Chọn D

Thiết diện là parabol có chiều cao $h = 3 - \frac{2}{5}x(\text{cm})$,

Vậy độ dài cạnh đáy là $a = 2h = 2\left(3 - \frac{2}{5}x\right)(\text{cm})$

Khi đó, diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{2}{3}ah = \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2$.

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Ta có, thể tích không gian bên trong đường hầm mô hình là:

$$V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2 dx = \frac{260}{9} \approx 29 (cm^3).$$

b Dạng 05: Ứng dụng vào tính tổng khai triển nhị thức

Câu 90. Tính tổng $S = \frac{1}{1} \cdot C_{2017}^0 + \frac{1}{2} C_{2017}^1 + \dots + \frac{1}{k+1} C_{2017}^k + \dots + \frac{1}{2018} C_{2017}^{2017}$.

- A.** $\frac{2^{2018} + 1}{2018}$. **B.** $\frac{2^{2018} - 2^{2017}}{2018}$ **C.** $\frac{2^{2018}}{2018}$. **D.** $\frac{2^{2018} - 1}{2018}$.

Lời giải

Chọn D

$$+) \text{ Ta có: } \int_0^1 (1+x)^{2017} dx = \frac{(1+x)^{2018}}{2018} \Big|_0^1 = \frac{2^{2018} - 1}{2018} \quad (1)$$

$$+) \text{ Mặt khác } \int_0^1 (1+x)^{2017} dx = \int_0^1 (C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + \dots + C_{2017}^{2017} x^{2017}) dx$$

$$= \left(C_{2017}^0 x + \frac{1}{2} C_{2017}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2017}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2018} C_{2017}^{2017} x^{2018} \right) \Big|_0^1 = s \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } S = \frac{2^{2018} - 1}{2018}.$$

Câu 91. Giả sử số tự nhiên $n \geq 2$ thỏa mãn $C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{8192}{15}$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

- A.** $n < 6$. **B.** Không tồn tại n . **C.** $6 < n < 9$. **D.** $9 < n < 12$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (1+x)^{2n} dx = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2} C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2n}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2} C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3} C_{2n}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2^{2n+1}-1)}{2n+1} = 2C_{2n}^0 + \frac{2}{2}C_{2n}^1 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \dots + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\int_0^{-1} (1+x)^{2n} dx = \left(C_{2n}^0 x + \frac{1}{2}C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 x^3 + \dots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \right) \Big|_0^{-1}$$

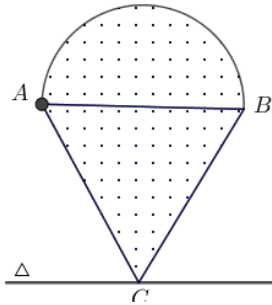
$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2n+1} = -2C_{2n}^0 + \frac{2}{2}C_{2n}^1 - \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \dots + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2), ta được:

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2 \left(C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^1}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \frac{C_{2n}^6}{7} + \dots + \frac{C_{2n}^{2n-2}}{2n-1} + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} \right) \Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = 2 \cdot \frac{8192}{15} \Leftrightarrow n \approx 6,44.$$

Vậy không có số tự nhiên n thỏa mãn.

Câu 92. Cho hình phẳng (H) gồm nửa đường tròn đường kính AB và tam giác ABC đều (như hình vẽ). Gọi Δ là đường thẳng qua C và song song với AB . Biết $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi hình (H) quay quanh trục Δ .



A. $V = 16\sqrt{3}\pi + 9\pi^2 \text{ cm}^3.$

B. $V = 16\sqrt{3}\pi + \frac{27\pi^2}{2} \text{ cm}^3.$

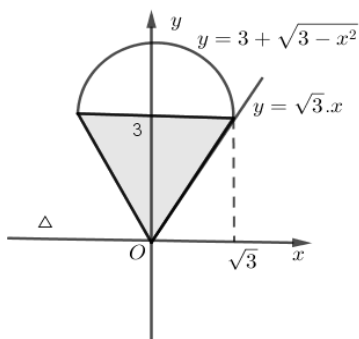
C. $V = 8\sqrt{3}\pi + 9\pi^2 \text{ cm}^3.$

D. $V = 8\sqrt{3}\pi + \frac{9\pi^2}{2} \text{ cm}^3.$

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



$$V = 2V_1 = 2\pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} \left[\left(3 + \sqrt{3-x^2} \right)^2 - 3x^2 \right] dx \right]$$

$$+) I = \left[\int_0^{\sqrt{3}} \left[\left(3 + \sqrt{3-x^2} \right)^2 - 3x^2 \right] dx \right] = \int_0^{\sqrt{3}} (12 - 4x^2) dx + 6 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx$$

$$+) A = \int_0^{\sqrt{3}} (12 - 4x^2) dx = \left(12x - \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$+) B = 6 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{3} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{3} \cos t dt$$

Đổi cận:

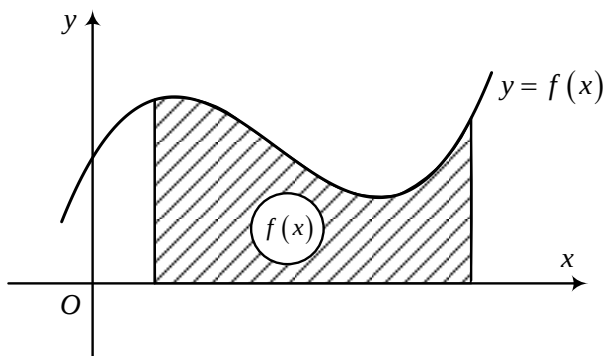
x	0	$\sqrt{3}$
t	0	$\frac{\pi}{2}$

$$\rightarrow B = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^2 t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 9 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 9 \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \left(8\sqrt{3} + \frac{9\pi}{2} \right) = 16\sqrt{3}\pi + 9\pi^2. \text{ Vậy chọn}$$

Lưu ý: Dùng tích phân để tính diện tích

$$\text{Cơ sở: } H = \{ y = f(x); y = 0; x = a; x = b \}$$



$$S(x) = \int_a^b f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Câu 93. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

- A. $\frac{35}{3}$ (km). B. 15 (km). **C. $\frac{32}{3}$ (km).** D. 12 (km).

Lời giải

Chọn C

Parabol có đỉnh $I(2;5)$ và đi qua điểm $(0;1)$ có phương trình $y = -x^2 + 4x + 1$.

Quãng đường vật đi được trong 1 giờ đầu là:

$$S_1 = \int_0^1 (-x^2 + 4x + 1) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{8}{3}$$

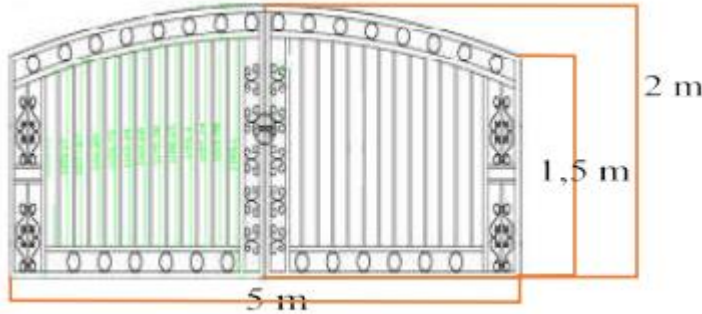
Quãng đường vật đi được trong 2 giờ sau là $S_2 = 2.4 = 8$

Vậy trong ba giờ vật đi được quãng đường là $S = S_1 + S_2 = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}$ (km)

h Dạng 06: Bài toán thực tế sử dụng diện tích hình phẳng

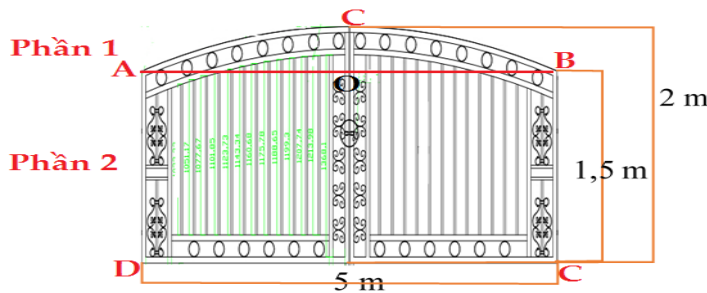
Câu 94. Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng là một parabol. Giá 1m^2 cửa sắt là 660.000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là

- A. 6500. B. $\frac{55}{6} \cdot 10^3$. C. 5600. **D. 6050.**



Lời giải

Chọn D



Từ hình vẽ ta chia cửa rào sắt thành 2 phần như sau:

$$\text{Khi đó } S = S_1 + S_2 = S_1 + 5 \cdot 1,5 = S_1 + 7,5$$

Để tính S_1 ta vận dụng kiến thức diện tích hình phẳng của tích phân.

Gắn hệ trục Oxy trong đó O trùng với trung điểm AB , $OB \subset Ox, OC \subset Oy$,

Theo đề bài ta có đường cong có dạng hình Parabol. Giả sử $(P): y = ax^2 + bx + c$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} A\left(-\frac{5}{2}; 0\right) \in (P) \\ B\left(\frac{5}{2}; 0\right) \in (P) \\ C\left(0, \frac{1}{2}\right) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + c = 0 \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Diện tích } S_2 = 2 \int_0^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{10}{6} (\text{m}^2) \Rightarrow S = \frac{55}{6} (\text{m}^2).$$

Vậy giá tiền cửa sắt là $\frac{55}{6} \times 660.000 = 6.050.000$ (đồng).

Câu 95. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là

A. 6750000 đồng.

B. 3750000 đồng.

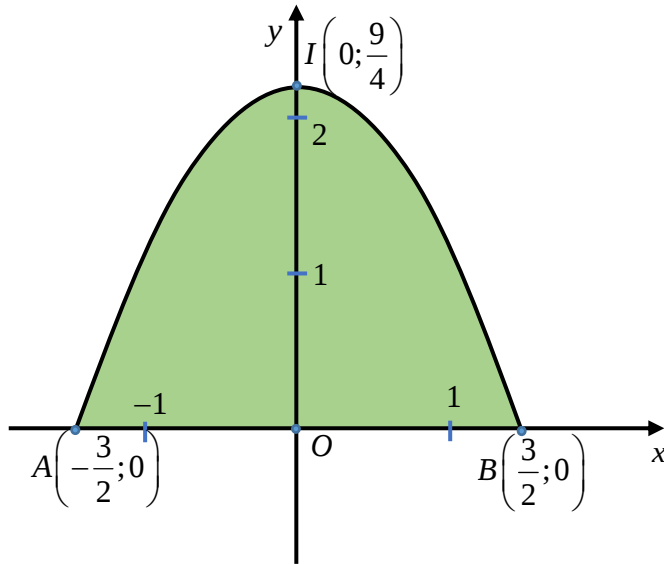
C. 12750000 đồng.

D. 33750000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

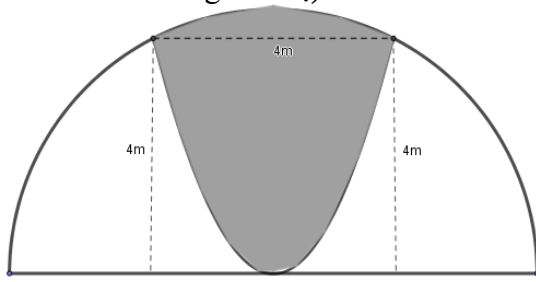
Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích của parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Bigg|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

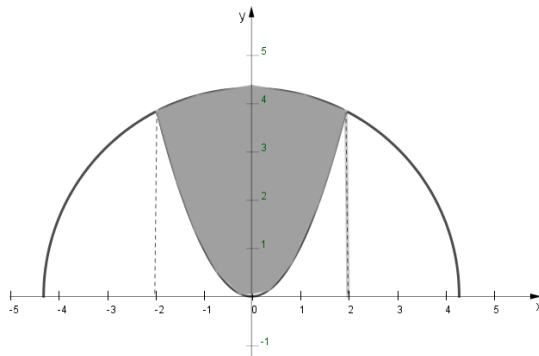
Câu 96. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người ta thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa hình tròn (phần tô đậm) và cách nhau một khoảng 4 (m). Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô đậm) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m² và 100.000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



- A. 1.948.000 (đồng). **B. 3.738.574 (đồng).** C. 3.926.990 (đồng). D. 4.115.408 (đồng)

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có Parabol có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $(2;4)$ nên có phương trình $y = x^2$.

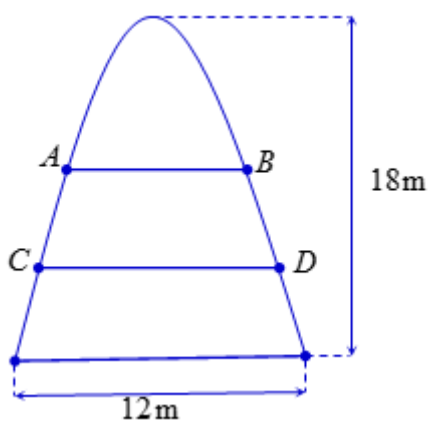
Đường tròn tâm là gốc tọa độ đi qua điểm có tọa độ $(2;4)$ nên có bán kính $R = 2\sqrt{5}$ có phương trình $x^2 + y^2 = 20$.

Gọi S là diện tích phần tô đậm. Ta có $S = \int_{-2}^2 (\sqrt{20-x^2} - x^2) dx \approx 11,9396$

Diện tích nửa hình tròn là 10π nên diện tích phần còn lại là $(10\pi - S)$

Vậy số tiền cần tìm là: $S \cdot 150.000 + (10\pi - S) \cdot 100.000 \approx 3.738.574$ (đồng).

Câu 97. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỷ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

B. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

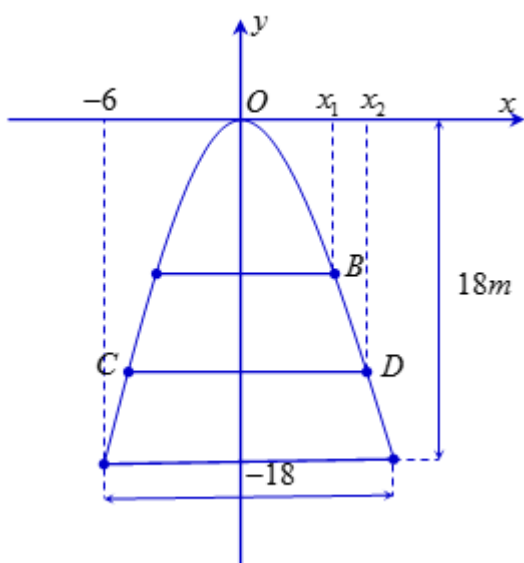
C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2 (P)$.

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra. $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

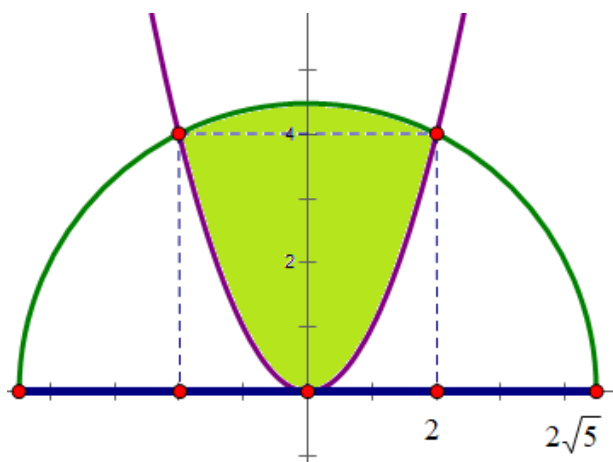
$$S_1 = 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng CD $y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x \right) \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 98. Một khuôn viên có dạng là một nửa hình tròn đường kính là $4\sqrt{5}m$. Trên đó người ta thiết kế một phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh là tâm đường tròn, hai đầu mút của parabol nằm trên đường tròn và cách nhau $4m$. Phần còn lại của khuôn viên (không tô đậm) để trồng cỏ. Biết các kích thước cho như hình vẽ và chi phí trồng cỏ là 100.000 đồng/ m^2 . Số tiền để trồng cỏ là



A. 3.895.000.

B. 1.194.000.

C. 1.948.000.

D. 2.388.000.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị nửa trên đường tròn $y = \sqrt{20 - x^2}$.

Parabol qua gốc tọa độ, nhận trục tung làm trục đối xứng nên phương trình của parabol có dạng $y = ax^2$.

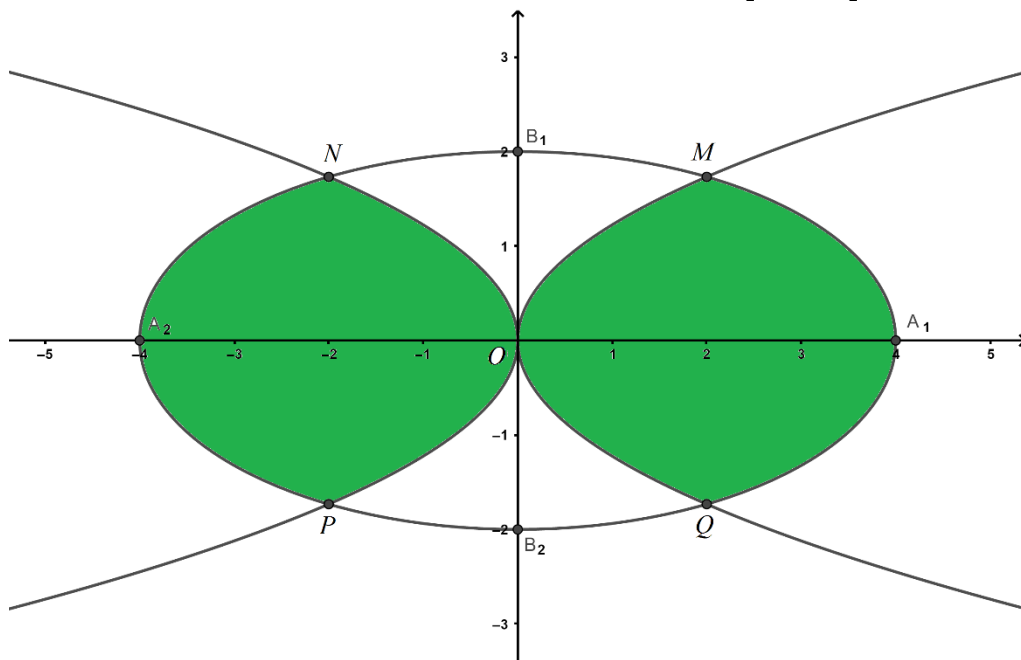
Vì (P) đi qua $(2; 4)$ nên $(P): y = x^2$.

Diện tích phần tô đậm: $\int_{-2}^2 (\sqrt{20 - x^2} - x^2) dx$.

Diện tích phần trống cỏ: $\frac{\pi(2\sqrt{5})^2}{2} - \int_{-2}^2 (\sqrt{20-x^2} - x^2) dx \approx 19,48.$

Từ đó suy ra chi phí trồng cỏ là: $19,48 \times 100.000 = 1.948.000$ đồng.

Câu 99. Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên.



Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M, N, P, Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/ m^2 và trồng rau là 50.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8$ m, $B_1B_2 = 4$ m?

A. 4.899.000 đồng. **B.** 11.742.000 đồng. **C.** 3.526.000 đồng. **D.** 7.120.000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Diện tích của hình Elip có trục trục lớn 8 và trục bé 4: $S_{(E)} = 4.2.\pi = 8\pi.$

Phương trình đường Elip: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Ta có: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)}.$

Diện tích trồng hoa: $S_{(H)} = 4 \int_{-2}^2 \sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)} dx + 4 \int_0^2 \sqrt{\frac{3x}{2}} dx.$

Diện tích trông hoa: $S_{(R)} = S_{(E)} - S_{(H)}$.

Suy ra số tiền phải chi là: $T = 50000.S_{(R)} + 600000.S_{(H)} \approx 11.742.142$ đồng.

h Dạng 07: Bài toán thực tế và ứng dụng thể tích

Câu 100. Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay, biết đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2dm và 4dm . Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay có đường sinh là đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1}$. Tính thể tích bình cắm hoa đó.

A. $\frac{15\pi}{2} dm^3$.

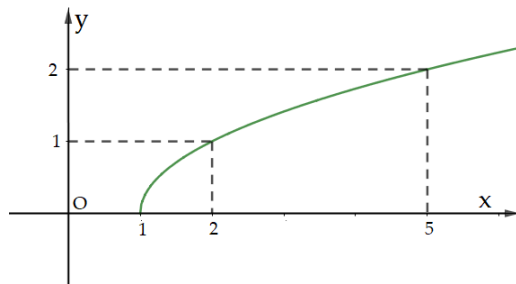
B. $\frac{15\pi}{2} dm^2$.

C. $\frac{14\pi}{3} dm^3$.

D. $8\pi dm^2$.

Lời giải

Chọn A



Vì đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2dm và 4dm nên đáy và miệng có bán kính đáy lần lượt là 1dm và 2dm .

Ta có $\sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow x=0$ và $\sqrt{x+1}=2 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy thể tích bình hoa là: $S = \pi \int_0^3 (\sqrt{x+1})^2 dx = \frac{15\pi}{2} dm^3$.

Câu 101. Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm , thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm , chiều cao thùng rượu là 1m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu ?



A. 212581 lít.

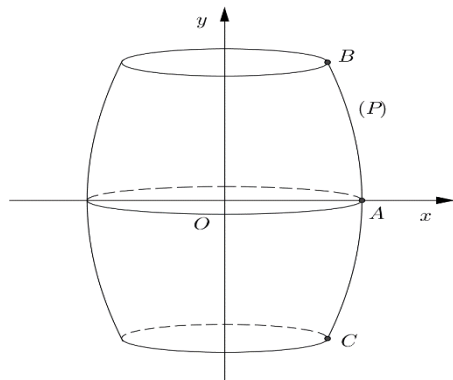
B. 212,6 lít.

C. 425,2 lít.

D. 425162 lít.

Lời giải

Chọn C



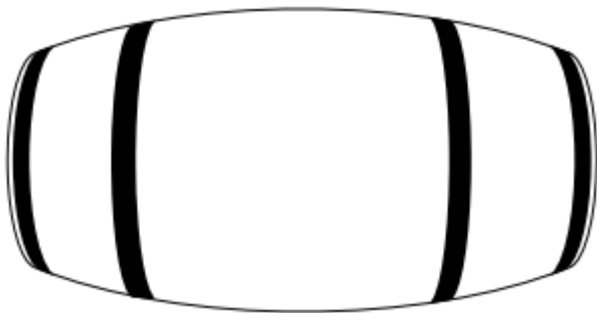
Đơn vị tính là dm .

Gọi $(P): x = ay^2 + by + c$ qua $A(4;0)$, $B(3;5)$, $C(3;-5)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow (P): x = -\frac{1}{25}y^2 + 4.$$

$$V = \pi \int_{-5}^5 \left(-\frac{1}{25}y^2 + 4 \right)^2 dy \approx 425,2 \text{ } dm^3 = 425,2(l).$$

Câu 102. (ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA LẦN 1 THPT HẬU LỘC 2 NĂM HỌC 2018 – 2019) Một thùng đựng rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay (tham khảo hình bên). Bán kính các đáy là 30 cm, khoảng cách giữa 2 đáy là 1 m, thiết diện qua trục vuông góc với trục và cách đều hai đáy có chu vi là 80π cm. Biết rằng mặt phẳng qua trục cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol. Thể tích của thùng gần với số nào sau đây?



A. 142,2 (lít).

B. 425,2 (lít).

C. 284 (lít).

D. 212,6 (lít).

Lời giải

Chọn B

+ Bán kính đáy $30\text{cm} = 3\text{dm}$.

+ Khoảng cách giữa 2 đáy là $1\text{m} = 10\text{dm}$.

+ Thiết diện qua trục vuông góc với trục hoành và cách đều hai đáy có chu vi là $80\pi\text{cm} = 8\pi\text{dm}$

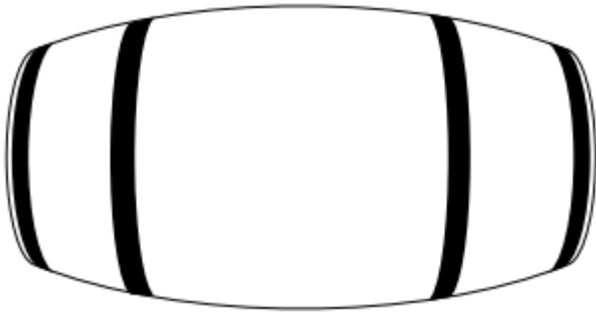
$\Rightarrow$ Bán kính $r = 4\text{ dm}$.

+ Mặt phẳng qua trục cắt cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol có đồ thị như trên

+ Phương trình parabol $y = 4 - \frac{1}{25}x^2$.

+ Thể tích của thùng $V = \pi \int_{-5}^5 \left(4 - \frac{1}{25}x^2\right) dx = \frac{406\pi}{3} \text{ dm}^3 \approx 425,2 \text{ (lít)}$.

Câu 103. (ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA LẦN 1 THPT HẬU LỘC 2 NĂM HỌC 2018 – 2019) Một thùng đựng rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay (tham khảo hình bên). Bán kính các đáy là 30 cm, khoảng cách giữa 2 đáy là 1 m, thiết diện qua trục vuông góc với trục và cách đều hai đáy có chu vi là 80π cm. Biết rằng mặt phẳng qua trục cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol. Thể tích của thùng gần với số nào sau đây?



A. 142,2 (lít).

B. 425,2 (lít).

C. 284 (lít).

D. 212,6 (lít).

Lời giải

Chọn B

+ Bán kính đáy $30\text{cm} = 3\text{dm}$.

+ Khoảng cách giữa 2 đáy là $1\text{m} = 10\text{dm}$.

+ Thiết diện qua trục vuông góc với trục hoành và cách đều hai đáy có chu vi là $80\pi\text{cm} = 8\pi\text{dm}$

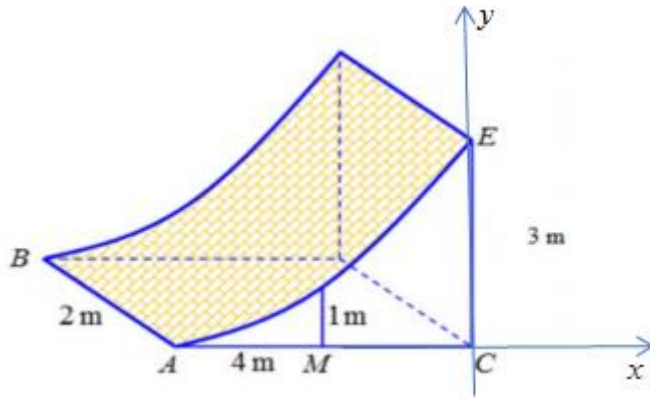
$\Rightarrow$ Bán kính $r = 4\text{ dm}$.

+ Mặt phẳng qua trục cắt cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol có đồ thị như trên

+ Phương trình parabol $y = 4 - \frac{1}{25}x^2$.

+ Thể tích của thùng $V = \pi \int_{-5}^5 \left(4 - \frac{1}{25} x^2 \right) dx = \frac{406\pi}{3} \text{ dm}^3 \approx 425,2 \text{ (lít)}.$

Câu 104. Chương ngại vật “tường cong” trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là 3 m. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2 \text{ m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC = 4 \text{ m}$, $CE = 3 \text{ m}$ và cạnh cong AE nằm trên một đường Parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao 1 m



Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.

A. 10 m^3 .

B. $9,5 \text{ m}^3$.

C. $10,5 \text{ m}^3$.

D. $9,3 \text{ m}^3$.

Lời giải

Chọn D

Gắn hệ trục tọa độ xCy như hình vẽ. Gọi N là giao điểm của đường cong AE và đường thẳng đi qua M song song với EC .

Giả sử cạnh cong AE có phương trình $y = ax^2 + bx + c$.

Cạnh AE đi qua điểm các điểm $A(-4;0)$, $E(0;3)$, $N(-2;1)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ c = 3 \\ 4a - 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{5}{4} \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow AC: y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + 3.$$

Ta có $S_{AEC} = \int_{-4}^0 \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + 3 \right) dx = \left(\frac{1}{24}x^3 + \frac{5}{8}x^2 + 3x \right) \Big|_{-4}^0 = \frac{14}{3}.$

$$V = S_{AEC} \cdot h = \frac{14}{3} \cdot 2 = \frac{28}{3} \approx 9,3.$$

Câu 105. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Đường elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm có phương trình

$$\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm \frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}.$$

$$\text{Do đó thể tích quả dưa là } V = \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Big|_{-14}^{14} = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} = \frac{8750\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

$$\text{Do đó tiền bán nước thu được là } \frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259 \text{ đồng.}$$

b Dạng 08: Ứng dụng vào bài toán chuyển động

Câu 106. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 6t$ (m/s). Đi được 10 giây, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -60$ (m/s²). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 330$ (m). **B.** $S = 350$ (m). **C.** $S = 400$ (m). **D.** $S = 300$ (m).

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } v(10) = 60.$$

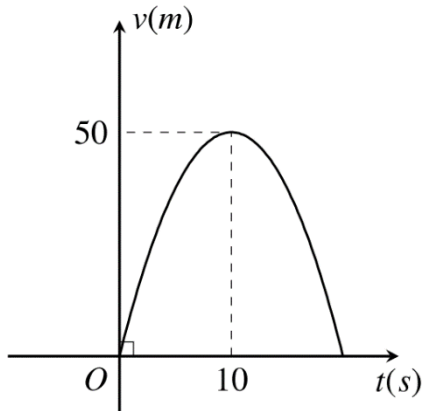
$$\text{Với } t \geq 10 \text{ thì } v(t) = \int a dt = -60t + C \text{ (m/s)}. \text{ Từ } v(10) = 60 \Rightarrow C = 660.$$

$$\text{Do đó } v(t) = \begin{cases} 6t & \text{khi } 0 \leq t < 10 \\ -60t + 660 & \text{khi } t \geq 10 \end{cases}.$$

Ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Rightarrow t = 11$.

$$\text{Vậy } S = \int_0^{11} v(t) dt = \int_0^{10} v(t) dt + \int_{10}^{11} v(t) dt = \int_0^{10} 6t dt + \int_{10}^{11} (-60t + 660) dt = 330 \text{ (m)}.$$

Câu 107. Một vật chuyển động vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì vật đó đạt đến vận tốc cao nhất và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì vật đó đi được quãng đường bao nhiêu mét?

A. $\frac{1100}{3}$ m.

B. $\frac{1000}{3}$ m.

C. 300 m.

D. $\frac{1400}{3}$ m.

Lời giải

Chọn B

Giả sử vận tốc của vật biểu diễn bởi hàm số $(P): v(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$).

Dựa vào đồ thị hàm số ta có (P) đi qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(10;50)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 100a + 10b = 50 \\ -\frac{b}{2a} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 10a + b = 5 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow (P): v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 10t.$$

Lúc bắt đầu: $t = 0$ s; lúc đạt vận tốc cao nhất: $t = 10$ s.

Vậy quãng đường vận đó đi được kể từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 10t \right) dt = \frac{1000}{3}.$$

Câu 108. Một chất điểm chuyển động trên trục Ox với tốc độ thay đổi theo thời gian $v = f(t)$ (m/s). Quãng đường

chất điểm đó chuyển động trên trục Ox từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 là $s = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$. Biết rằng

$v(t) = 30 - 5t$ (m/s), quãng đường chất điểm đó đi được từ thời điểm $t_1 = 1$ s đến thời điểm $t_2 = 2$ s bằng bao nhiêu mét?

A. 52,5m.

B. 32,5m.

C. 22,5m.

D. 42,5m.

Lời giải

Chọn C

Quãng đường chất điểm đó đi được từ thời điểm $t_1 = 1s$ đến thời điểm $t_2 = 2s$ bằng $s = \int_1^2 (30 - 5t) dt$

$$= \left(30t - \frac{5}{2}t^2 \right) \Big|_1^2 = 22,5m.$$

Câu 109. Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 3t + 2(m/s)$. Biết tại thời điểm $t = 2(s)$ thì vật đi được quãng đường là $10(m)$. Hỏi tại thời điểm $t = 30(s)$ thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

A. 1410 m.

B. 300 m.

C. 240 m.

D. 1140 m.

Lời giải

Chọn A

Quãng đường của vật theo thời gian là $S(t) = \int (3t + 2)dt = \frac{3}{2}t^2 + 2t + C$.

Vì $S(2) = 10 \Rightarrow C = 0$. Khi đó $S(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$.

Tại thời điểm $t = 30(s)$ thì $S(30) = 1410(m)$.

Câu 110. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 6t(m/s)$. Đi được 10s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -60(m/s^2)$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. 300(m).

B. 330(m).

C. 350(m).

D. 400(m).

Lời giải

Chọn B

Trong 10s, đầu tiên ô tô đi được quãng đường $\int_0^{10} v(t)dt = \int_0^{10} 6t dt = 3t^2 \Big|_0^{10} = 300(m)$

Khi đi được 10s, vận tốc ô tô đó đạt được là $v(10) = 60(m/s)$

Thời điểm vật bắt đầu phanh gấp, vật chuyển động với vận tốc: $\int -60dt = -60t + C(m)$

Khi $t = 10s$, vật đang chuyển động với vận tốc $60(m/s) \Rightarrow -60t + C = 60 \Rightarrow C = 660$

$$\text{Khi dừng hẳn } v(t) = 0 \text{ (m/s)} \Rightarrow -60t + 660 = 0 \Leftrightarrow t = 11 \text{ (s)}$$

Nên quãng đường từ lúc bắt đầu phanh gấp đến khi dừng hẳn là:

$$\int_{10}^{11} v(t) dt = \int_{10}^{11} (-60t + 660) dt = \left(-30t^2 + 660t \right) \Big|_{10}^{11} = 30 \text{ (m)}.$$

Vậy quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

$$S = 300 + 30 = 330 \text{ (m)}.$$

Câu 111. Hai người A và B ở cách nhau 180 (m) trên một đoạn đường thẳng và cùng chuyển động thẳng theo một hướng với vận tốc biến thiên theo thời gian, A chuyển động với vận tốc $v_1(t) = 6t + 5 \text{ (m/s)}$, B chuyển động với vận tốc $v_2(t) = 2at - 3 \text{ (m/s)}$ (a là hằng số), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A , B bắt đầu chuyển động. Biết rằng lúc đầu A đuổi theo B và sau 10 (giây) thì đuổi kịp. Hỏi sau 20 (giây), A cách B bao nhiêu mét?

- A.** 320 (m) . **B.** 720 (m) . **C.** 360 (m) . **D.** 380 (m) .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Quãng đường } A \text{ đi được trong } 10 \text{ (giây) là: } \int_0^{10} (6t + 5) dt = \left(3t^2 + 5t \right) \Big|_0^{10} = 350 \text{ (m)}.$$

$$\text{Quãng đường } B \text{ đi được trong } 10 \text{ (giây) là: } \int_0^{10} (2at - 3) dt = \left(at^2 - 3t \right) \Big|_0^{10} = 100a - 30 \text{ (m)}.$$

Vì lúc đầu A đuổi theo B và sau 10 (giây) thì đuổi kịp nên ta có:

$$(100a - 30) + 180 = 350 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow v_2(t) = 4t - 3 \text{ (m/s)}.$$

$$\text{Sau } 20 \text{ (giây) } A \text{ đi được: } \int_0^{20} (6t + 5) dt = \left(3t^2 + 5t \right) \Big|_0^{20} = 1300 \text{ (m)}.$$

$$\text{Sau } 20 \text{ (giây) } B \text{ đi được: } \int_0^{20} (4t - 3) dt = \left(2t^2 - 3t \right) \Big|_0^{20} = 740 \text{ (m)}.$$

$$\text{Khoảng cách giữa } A \text{ và } B \text{ sau } 20 \text{ (giây) là: } 1300 - 740 - 180 = 380 \text{ (m)}.$$

b Dạng 09: Ứng dụng tích phân vào đại số (min-max, cực trị, so sánh, đơn điệu,...)

Câu 112. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. So sánh $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$ ta được

A. $f(-2) < f(0) < f(2)$.

B. $f(0) < f(-2) < f(2)$.

C. $f(-2) < f(2) < f(0)$.

D. $f(2) < f(0) < f(-2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2-3)(x^4-1) = x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3$.

+) $I_1 = \int_{-2}^0 f'(x) dx = \int_{-2}^0 (x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3) dx = \frac{-464}{105} < 0$

$\Rightarrow f(0) - f(-2) < 0 \Rightarrow f(0) < f(-2)$.

+) $I_2 = \int_0^2 f'(x) dx = \int_0^2 (x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 3) dx = \frac{-44}{105} < 0$

$\Rightarrow f(2) - f(0) < 0 \Rightarrow f(2) < f(0)$.

Vậy $f(2) < f(0) < f(-2)$.

Câu 113. Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2019$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{2019^3 + 1}{6}$.

B. $S_{\max} = \frac{2019^3}{3}$.

C. $S_{\max} = \frac{2019^3}{6}$.

D. $S_{\max} = \frac{2019^3 - 1}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $A(a; a^2), B(b; b^2) (a < b)$.

$AB = (b-a)\sqrt{1+(a+b)^2} \geq b-a \Rightarrow b-a \leq 2019$.

Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a+b=0$.

Phương trình đường thẳng $AB: y = (a+b)x - ab$.

Ta có $S = \int_a^b |(a+b)x - ab - x^2| dx = \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx$

$= \left[\frac{1}{2}(a+b)x^2 - abx - \frac{1}{3}x^3 \right]_a^b = \frac{1}{6}(b-a)^3$.

Suy ra $S \leq \frac{2019^3}{6}$.

$$\text{Vậy } S_{\max} = \frac{2019^3}{6} \text{ khi } \begin{cases} a+b=0 \\ b-a=2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2019}{2} \\ b = \frac{2019}{2} \end{cases}.$$

Câu 114. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là

- A.** $\{\pm 1\}$. **B.** $\emptyset$. **C.** $\left\{\pm \frac{1}{2}; \pm 1\right\}$. **D.** $\left\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1\right\}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 2x^3 - 4m^2x = 2x(x^2 - 2m^2).$$

Đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Khi đó điểm cực đại là $A(0; 2)$ và đường thẳng cùng phương với trục hoành đi qua điểm cực đại là $d: y = 2$.

.

Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d và đồ thị.

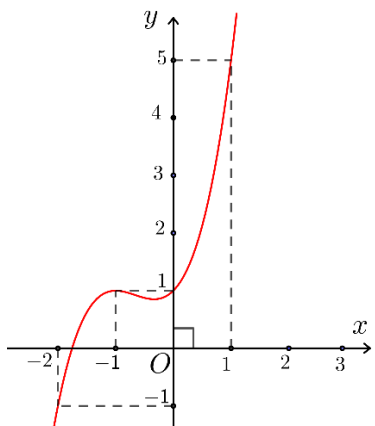
$$\text{Ta có: } \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \\ x = -2m \end{cases}$$

Do tính chất đối xứng của đồ thị nên ta có:

$$S = 2 \left| \int_0^{2m} \left(\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right) dx \right| = 2 \left| \left(\frac{x^5}{10} - \frac{2m^2x^3}{3} \right) \Big|_0^{2m} \right| = \left| \frac{64m^5}{15} \right|$$

$$\text{Theo đề ra } S = \frac{64}{15} \Leftrightarrow \left| \frac{64m^5}{15} \right| = \frac{64}{15} \Leftrightarrow |m^5| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

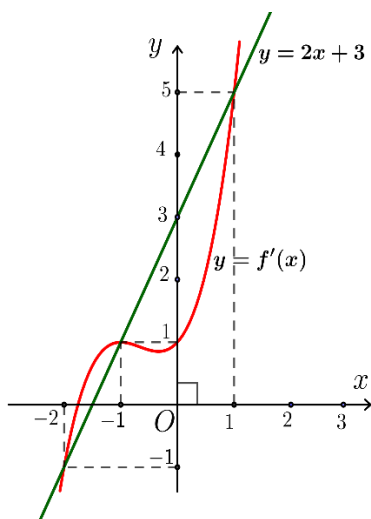
Câu 115. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị hàm số như hình dưới đây.



Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - 3x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $g(-1) > g(1)$. **B.** $g(-1) = g(1)$. **C.** $g(-1) < g(-2)$. **D.** $g(-1) = g(-2)$.

Lời giải



Chọn A

$$g(x) = f(x) - x^2 - 3x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - (2x + 3).$$

Vẽ đường thẳng $y = 2x + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại các điểm $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$

Nhìn vào đồ thị ta thấy

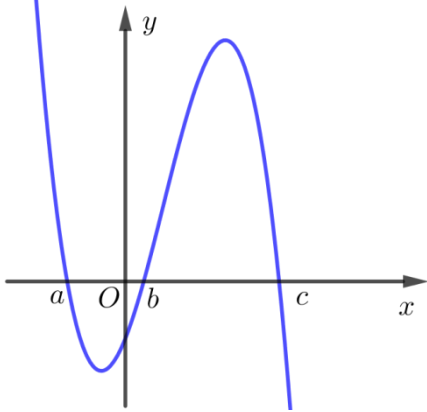
S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$, $y = 2x + 3$, $x = -2$, $x = -1$. Khi đó,

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} |f'(x) - (2x + 3)| dx = \int_{-2}^{-1} (f'(x) - (2x + 3)) dx > 0 \Rightarrow \int_{-2}^{-1} g'(x) dx > 0 \Rightarrow g(-1) > g(-2)$$

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$, $y = 2x + 3$, $x = -1$, $x = 1$. Khi đó,

$$S_2 = \int_{-1}^1 |f'(x) - (2x+3)| dx = \int_{-1}^1 ((2x+3) - f'(x)) dx > 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 g'(x) dx < 0 \Rightarrow g(-1) > g(1).$$

Câu 116. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ



(1): $f(c) > f(a) > f(b)$.

(2): $f(c) > f(b) > f(a)$.

(3): $f(a) > f(b) > f(c)$.

(4): $f(a) > f(b)$.

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

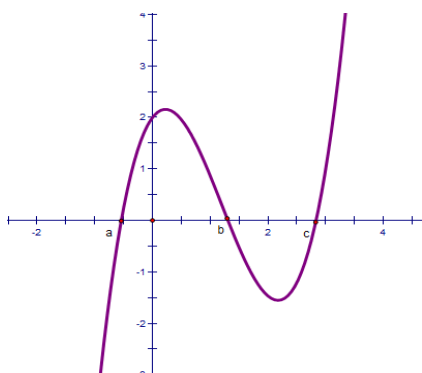
Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ và trục hoành nằm bên dưới và bên trên Ox . Khi đó

$$S_1 = \int_a^b |f'(x)| dx = -\int_a^b f'(x) dx = -f(x) \Big|_a^b = f(a) - f(b)$$

Tương tự $S_2 = f(c) - f(a)$. Quan sát đồ thị $f'(x)$ ta có $S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(c) - f(b) > f(a) - f(b)$ do đó $f(c) > f(a) > f(b)$.

Vậy (1) và (4) đúng.

Câu 117. Cho hàm số liên tục $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên cạnh. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ theo thứ tự là a, b, c . Hãy chọn khẳng định đúng



- A. $f(c) < f(a) < f(b)$. B. $f(a) < f(c) < f(b)$. C. $f(a) < f(b) < f(c)$. D. $f(c) < f(b) < f(a)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$+\infty$

Arrows in the original image indicate the function values: from $+\infty$ at $-\infty$ down to $f(a)$ at a , up to $f(b)$ at b , down to $f(c)$ at c , and up to $+\infty$ at $+\infty$.

Từ bảng biến thiên ta có $f(b) > f(a)$; $f(b) > f(c)$.

Mặt khác từ đồ thị ta có $\int_a^b f'(x) dx > \int_b^c f'(x) dx$.

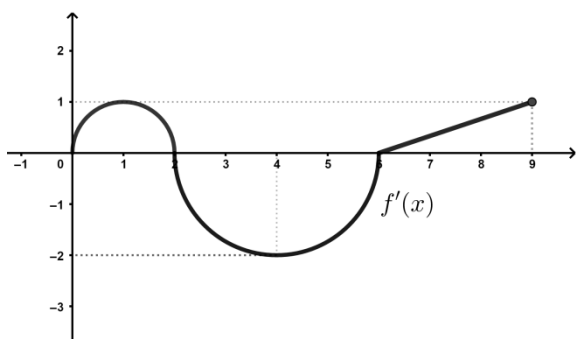
$$f(x)\Big|_a^b > f(x)\Big|_b^c \Leftrightarrow f(a) < f(c).$$

Vậy $f(b) > f(c) > f(a)$.

b Dạng 10: Diện tích khi biết dạng các đồ thị hoặc hàm ẩn

Câu 118. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 9]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(0) < f(6)$. B. $f(2) < f(9)$. C. $f(2) > f(9)$. D. $f(2) < f(6)$.



Lời giải

Chọn C

Diện tích nửa đường tròn tâm $J(4;0)$ bán kính $R = 2$ là: $-\int_2^6 f'(x)dx = -f(x)|_2^6 = f(2) - f(6) = 2\pi$

Từ ta suy ra $f(2) > f(6)$ đáp án C sai

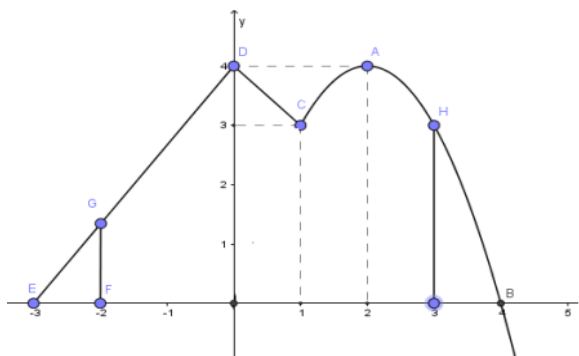
Từ và suy ra $f(0) > f(6)$ suy ra đáp án D sai

Diện tích tam giác được tạo thành bởi đoạn thẳng, trục Ox , $x = 6$, $x = 9$ là:

$$\int_6^9 f'(x)dx = f(x)|_6^9 = f(9) - f(6) = \frac{3}{2}$$

Từ và ta có $f(2) > f(9)$

Câu 119. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 3$.



A. $S = \frac{53}{3}$.

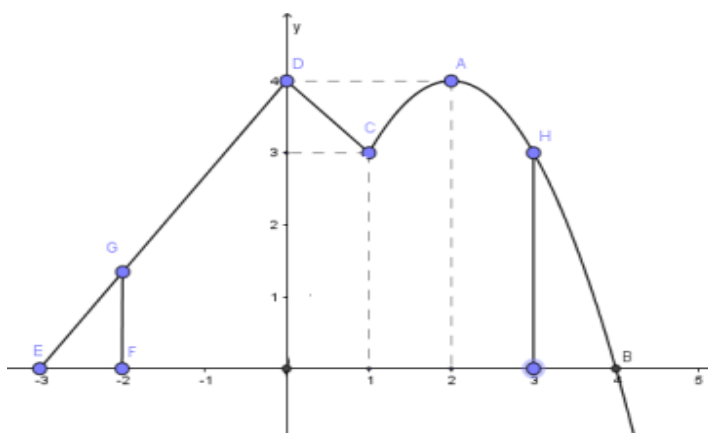
B. $S = \frac{43}{2}$.

C. $S = \frac{95}{6}$.

D. $S = \frac{97}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào đồ thị ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ_1 , Δ_2 , Parabol (P) , $x = -2$, $x = 3$.

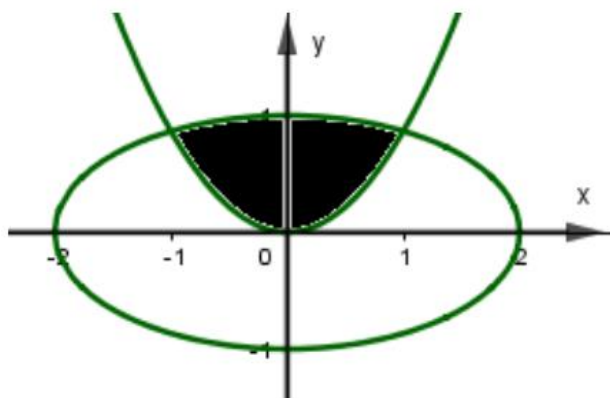
Với Δ_1 qua $E(-3;0)$, $D(0;4)$ nên có pt: $y = \frac{4}{3}x + 4$; Δ_2 qua $D(0;4)$, $C(1;3)$ nên có phương trình:

$y = -x + 4$; $(P): y = ax^2 + bx + c$ qua $C(1;3)$ và có đỉnh $A(2;4)$ nên

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ \frac{-b}{2a}=2 \\ 4a+2b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + 4x.$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{4}{3}x + 4\right) dx + \int_0^1 (-x + 4) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x) dx = \frac{97}{6}.$$

Câu 120. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường Elip có phương trình $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{2\pi + \sqrt{3}}{6}.$

B. $\frac{2\pi}{3}.$

C. $\frac{\pi + \sqrt{3}}{4}.$

D. $\frac{3\pi}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong nửa trên của Elip và Parabol là

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Suy ra diện tích hình phẳng (H) cần tính là

$$S_{(H)} = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

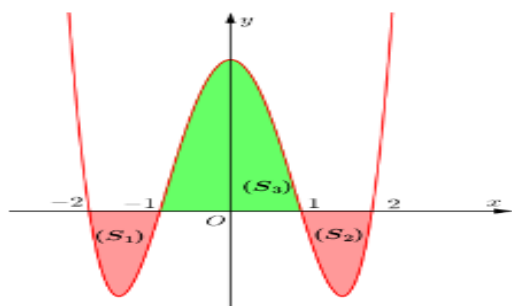
Xét $I = \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx$, đặt $x = 2 \sin t$ ta được $I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2 \cos^2 t dt$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $S_{(H)} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi + \sqrt{3}}{6}$.

Chú ý: Ta có thể bấm máy $S_{(H)} = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \right) dx$ rồi so sánh kết quả với các phương án.

Câu 121. Cho hàm $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$, biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như hình vẽ ở bên dưới và có diện tích $S_1 = S_2 = \frac{22}{15}$, $S_3 = \frac{76}{15}$. Giá trị của biểu thức $F(2) + F(1) - F(-1) - F(-2)$ bằng



A. $I = \frac{36}{5}.$

B. $I = \frac{32}{15}.$

C. $I = \frac{18}{5}.$

D. $I = -\frac{32}{15}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x) dx = -S_2 = -\frac{22}{15}.$

$F(1) - F(-1) = \int_{-1}^1 f(x) dx = S_3 = \frac{76}{15}.$

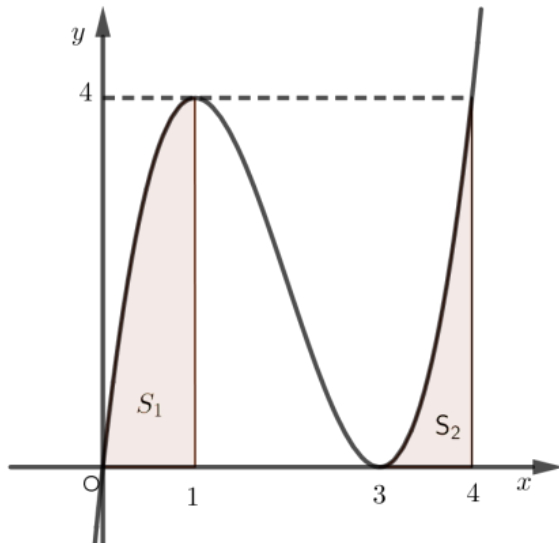
$F(-1) - F(-2) = \int_{-2}^{-1} f(x) dx = -S_1 = -\frac{22}{15}.$

Vậy có :

$F(2) - F(1) + 2[F(1) - F(-1)] + F(-1) - F(-2) = -\frac{22}{15} + 2 \cdot \frac{76}{15} - \frac{22}{15} = \frac{108}{15}$

$\Leftrightarrow F(2) + F(1) - F(-1) - F(-2) = \frac{108}{15} = \frac{36}{5}.$

Câu 122. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Gọi S_1, S_2 là diện tích các phần tô đậm như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $S_1 \cdot S_2 = \frac{55}{8}.$

B. $S_1 + S_2 = 4.$

C. $S_1 - S_2 = \frac{8}{5}.$

D. $\frac{S_1}{S_2} = 2.$

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và các điểm $(1;4)$, $(3;0)$, $(4;4)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 4 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 4 \\ 27a + 9b + 3c = 0 \\ 64a + 16b + 4c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho là: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Ta có:

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \frac{11}{4}, \quad S_2 = \int_3^4 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \frac{5}{4} \Rightarrow S_1 + S_2 = 4.$$

h Dạng 11: Thể tích khi biết dạng các đồ thị hoặc hàm ẩn

Câu 123. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+4}$, trục hoành và trục tung. Biết đường thẳng $d: ax + by - 16 = 0$ đi qua $A(0;2)$ và chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau. Giá trị $a + b$ bằng

A. 6.

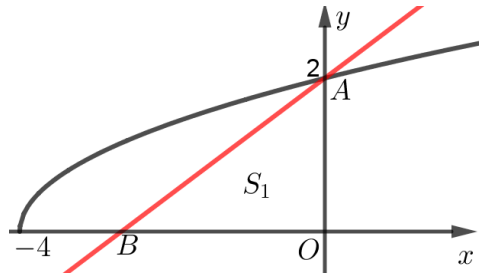
B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B



Gọi S là diện tích hình (H) suy ra $S = \int_{-4}^0 \sqrt{x+4} dx = \frac{16}{3}$.

Gọi S_1 là diện tích hình (H_1) giới hạn bởi đường thẳng d , trục tung và trục hoành.

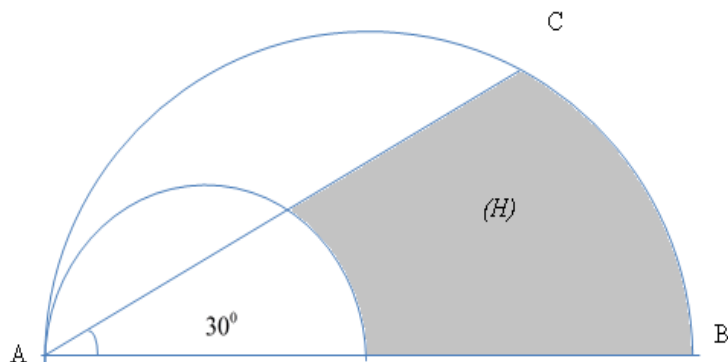
Do $d: ax + by - 16 = 0$ đi qua $A(0;2)$ suy ra $b = 8$.

Theo giả thiết thì $S_1 = \frac{S}{2} = \frac{8}{3}$ mà $S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB \Rightarrow OB = \frac{8}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{8}{3}; 0\right)$.

Do $B \in d \Rightarrow a = -6$.

Vậy $a + b = 2$.

Câu 124. (Đề thi thử Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk lần 2) Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có bán kính bằng 4 và $BAC = 30^\circ$. Diện tích hình (H) (Phần tô đậm) bằng



A. $2\pi + 3\sqrt{3}$.

B. $\frac{7\pi}{3} + 3\sqrt{3}$.

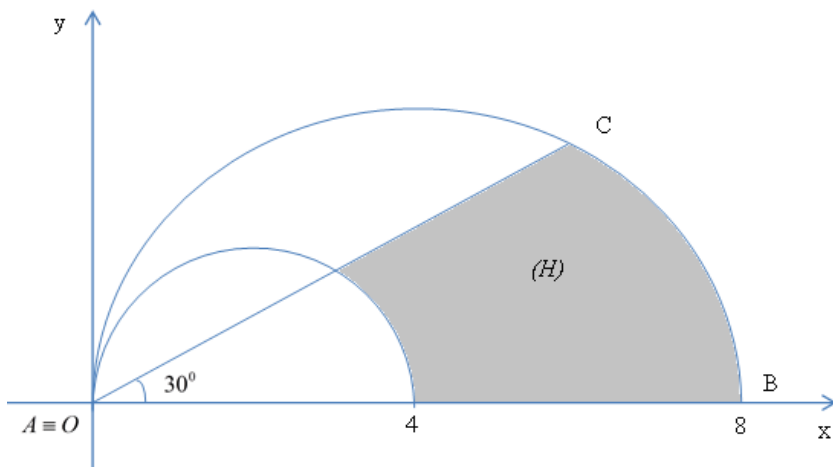
C. $2\pi + 2\sqrt{3}$.

D. $\frac{10\pi}{3} + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ sao cho AB nằm trên Ox , các nửa đường tròn nằm trong góc phần tư thứ nhất và $A(0;0)$ khi đó ta có:



Nửa đường tròn nhỏ có phương trình: $y = \sqrt{4 - (x - 2)^2}$.

Nửa đường tròn lớn có phương trình: $y = \sqrt{16 - (x - 4)^2}$.

Đường thẳng AC có phương trình $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = \sqrt{4 - (x - 2)^2}$; $y = \sqrt{16 - (x - 4)^2}$; $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ và trục Ox : $y = 0$.

Tìm cận: $\sqrt{4-(x-2)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}; \sqrt{16-(x-4)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}.$

Diện tích hình phẳng (H) cần tính là

$$S = \int_3^4 \left| \frac{1}{\sqrt{3}}x - \sqrt{4-(x-2)^2} \right| dx + \int_4^6 \left| \frac{1}{\sqrt{3}}x - 0 \right| dx + \int_6^8 \left| \sqrt{16-(x-4)^2} - 0 \right| dx$$

$$= \int_3^6 \frac{1}{\sqrt{3}}x dx - \int_3^4 \sqrt{4-(x-2)^2} dx + \int_6^8 \sqrt{16-(x-4)^2} dx = I_1 - I_2 + I_3$$

Ta có $I_1 = \int_3^6 \frac{1}{\sqrt{3}}x dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \Big|_3^6 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{36}{2} - \frac{9}{2} \right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$

Tính $I_2 = \int_3^4 \sqrt{4-(x-2)^2} dx$

Đặt $x-2 = 2\sin t$. Điều kiện $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ ta có $dx = 2\cos t dt$.

Đôi cận $x=3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; x=4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$

$$I_2 = \int_3^4 \sqrt{4-(x-2)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt$$

$$= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \left(2t + \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tính $I_3 = \int_6^8 \sqrt{16-(x-4)^2} dx$

Đặt $x-4 = 4\sin u$. Điều kiện $u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ ta có $dx = 4\cos u du$.

Đôi cận $x=6 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}; x=8 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}.$

$$I_3 = \int_6^8 \sqrt{16-(x-4)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16-16\sin^2 u} \cdot 4\cos u du = 16 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = 16 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4I_2 = 4 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$