

CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC MỨC ĐỘ 3

Dạng 03: Xác định các yếu tố của số phức (phần thực, ảo, mô đun, liên hợp,...) qua các phép toán

- Câu 1.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = \sqrt{2}|z - 1 + i|$. Mô đun của z bằng:
A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó: $|z - 2 + 2i| = \sqrt{2}|z - 1 + i| \Leftrightarrow$
 $|a + bi - 2 + 2i| = \sqrt{2}|a + bi - 1 + i|$
 $\Leftrightarrow |a - 2 + (b + 2)i| = \sqrt{2}|a - 1 + (b + 1)i| \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b + 2)^2 = 2[(a - 1)^2 + (b + 1)^2]$
 $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$. Vậy: $z = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$

- Câu 2.** Cho hai số phức z_1, z_2 . Tìm mệnh đề đúng?

- A.** $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. **B.** $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$.
C. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. **D.** $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z_1 = a + bi, z_2 = c + di (a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} +) & \begin{cases} |z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \\ ||z_1| - |z_2|| = |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}| \end{cases} \quad \text{P} \quad |z_1 - z_2| \neq ||z_1| - |z_2|| \text{ nên phương án A sai.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +) & \begin{cases} |z_1 + z_2| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \\ |z_1| + |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \end{cases} \quad \text{P} \quad |z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2| \text{ nên phương án B sai.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +) & \begin{cases} |z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \\ |z_1| - |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \end{cases} \quad \text{P} \quad |z_1 - z_2| \neq |z_1| - |z_2| \text{ nên phương án C sai.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +) & \begin{cases} |z_1 z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \end{cases} \quad \text{P} \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ nên phương án D đúng.} \end{aligned}$$

D đúng.

- Câu 3.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$.

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

Khi đó $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0 \Leftrightarrow a + bi + i - \sqrt{a^2 + b^2}(1 + i) = 0$.

$$\Leftrightarrow (a - \sqrt{a^2 + b^2}) + (b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b = 0 \\ a = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Vậy có một số phức thỏa mãn.

- Câu 4.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1} = 2-i$. Mô đun của số phức $w=1+z+z^2$ bằng
- A. $\sqrt{2}$. B. 13. C. 2. D. $\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$

$$\Rightarrow \bar{z} = a-bi$$

$$\text{Ta có } \frac{5(\bar{z}+i)}{z+1} = 2-i \Leftrightarrow 5(\bar{z}+i) = (2-i)(z+1) \Leftrightarrow 5a + (5-5b)i = 2a+b+2+(-a+2b-1)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 2a+b+2 \\ 5-5b = -a+2b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=2 \\ a-7b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } z = 1+i \Rightarrow w = 1+z+z^2 = 2+3i. \text{ Vậy } |w| = |2+3i| = \sqrt{13}$$

- Câu 5.** Cho z là số phức có mô-đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô đun của số phức w là
- A. 1. B. 2017. C. 2015. D. 0.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có } \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Rightarrow (z+w)^2 = zw \Leftrightarrow w^2 + wz + z^2 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{-z \pm z\sqrt{3}i}{2}.$$

$$\bullet \text{ Với } w = \frac{-z - z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \frac{|-z - z\sqrt{3}i|}{2} = |z| \cdot \frac{|1+i\sqrt{3}|}{2} = |z| = 2017.$$

$$\bullet \text{ Với } w = \frac{-z + z\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow |w| = \frac{|-z + z\sqrt{3}i|}{2} = |z| \cdot \frac{|1-i\sqrt{3}|}{2} = |z| = 2017.$$

- Câu 6.** Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z}+i) - (2-i)z = 3+10i$. Mô đun của z bằng
- A. 5. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{3}$. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } z = x+yi \text{ (} x, y \in \mathbb{R} \text{)} \Rightarrow \bar{z} = x-yi.$$

$$\text{Ta có } 3(\bar{z}+i) - (2-i)z = 3+10i \Leftrightarrow 3(x-yi) - (2-i)(x+yi) = 3+7i$$

$$\Leftrightarrow x-y+(x-5y)i = 3+7i \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x-5y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } z = 2-i.$$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{5}.$$

- Câu 7.** Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z}+i) - (2-i)z = 3+10i$. Mô đun của z bằng
- A. 3. B. 5. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } z = x+yi \text{ (} x, y \in \mathbb{R} \text{)} \Rightarrow \bar{z} = x-yi.$$

$$\text{Ta có } 3(\bar{z}+i) - (2-i)z = 3+10i \Leftrightarrow 3(x-yi) - (2-i)(x+yi) = 3+7i$$

$$\Leftrightarrow x - y + (x - 5y)i = 3 + 7i \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x - 5y = 7 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Suy ra $z = 2 - i$.

Vậy $|z| = \sqrt{5}$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. **B.** $|z| > 2$. **C.** $|z| < \frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow (1 + 2i)|z|z + 2z - iz = \sqrt{10} \Leftrightarrow z[|z| + 2 + (2|z| - 1)i] = \sqrt{10}.$$

$$\text{Lấy mô-đun hai vế ta được: } |z||z| + 2 + (2|z| - 1)i = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z|\sqrt{(|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2} = 10$$

Đặt $t = |z|$, ĐK $t \geq 0$

Phương trình trên trở thành:

$$t\sqrt{(t + 2)^2 + (2t - 1)^2} = 10 \Leftrightarrow t^2(t^2 + 4t + 4 + 4t^2 - 4t + 1) = 10$$

$$\Leftrightarrow t^2(5t^2 + 5) = 10 \Leftrightarrow t^4 + t^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 1 \\ t^2 = -1 (L) \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \text{ (vì } t \geq 0).$$

Vậy $|z| = 1$.

Vậy chọn đáp án **D**

b Dạng 04: Tìm số phức thỏa mãn đk cho trước

Câu 9. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\frac{z^2 - z + 4}{z^2 + z + 4}$ là số thực và $|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 4$.

- A.** 8 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 4

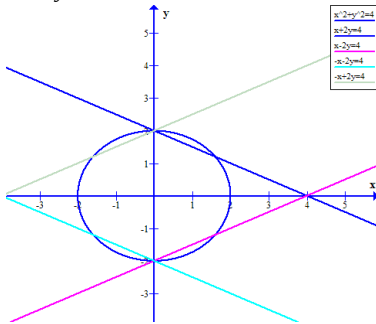
Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Nếu $y = 0 \Rightarrow |x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$.

Nếu $y \neq 0$



$$\text{Vì } \frac{z^2 - z + 4}{z^2 + z + 4} \text{ là số thực nên đặt } \frac{z^2 - z + 4}{z^2 + z + 4} = k \Leftrightarrow (k - 1)z^2 + (k + 1)z + 4(k - 1) = 0.$$

$$\text{Ta có } |z|^2 = z_1 z_2 = \frac{c}{a} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

$$\text{Vì } |z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |x| + 2|y| = 4.$$

Biểu diễn đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ và đường thẳng $|x| + 2|y| = 4$ trên cùng hệ trục Oxy . Nhận thấy chúng cắt nhau tại 6 điểm. Vậy có tất cả 8 số phức thoả ycbt.

- Câu 10.** Cho số phức z thỏa mãn $z + 44 = (1 - 2i)|z| + (3z - 1)i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $8 < |z| \leq 10$. **B.** $10 < |z| \leq 12$. **C.** $12 < |z| \leq 14$. **D.** $7 < |z| \leq 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$z + 44 = (1 - 2i)|z| + (3z - 1)i \Leftrightarrow z + 44 = |z| - 2|z|i + 3iz - i \Leftrightarrow (1 - 3i)z = (|z| - 44) - (2|z| + 1)i \quad (*)$$

Lấy môđun 2 vế của $(*)$ ta được

$$\begin{aligned} |(1 - 3i)z| &= \left| (|z| - 44) - (2|z| + 1)i \right| \Leftrightarrow \sqrt{10}|z| = \sqrt{(|z| - 44)^2 + (2|z| + 1)^2} \\ \Leftrightarrow 10|z|^2 &= (|z| - 44)^2 + (2|z| + 1)^2 \Leftrightarrow 5|z|^2 + 84|z| - 1937 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 13 \\ |z| = -\frac{149}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $|z| \geq 0 \Rightarrow |z| = 13$.

- Câu 11.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$?
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = a + bi$ ta được

$$|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$$

$$\Leftrightarrow |a + bi - 1|^2 + |a + bi - a + bi|i + (a + bi + a - bi)i^{2019} = 1 \quad (\text{ta có } i^{2019} = i^{2016+3} = (i^4)^{504} \cdot i^3 = -i).$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 + 2|b|i - 2ai = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + b^2 + 2|b|i - 2ai = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 0 \\ 2|b| - 2a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 0 \\ a \geq 0 \\ b^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + a^2 = 0 \\ a \geq 0 \\ b^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0 \\ a = 1, \begin{cases} b = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Suy ra có ba số phức thỏa mãn phương trình $z_1 = 0, z_2 = 1 + i, z_3 = 1 - i$.

- Câu 12.** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $3z + \bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$?
A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } 3z + \bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z| \Leftrightarrow 3(a + bi) + (a - bi) = (2 + i\sqrt{3})\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 2\sqrt{a^2 + b^2} \\ 2b = \sqrt{3}\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, b \geq 0 \\ 16a^2 = 4(a^2 + b^2) \\ 4b^2 = 3(a^2 + b^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, b \geq 0 \\ 3a^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, b \geq 0 \\ b = a\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy có vô số số phức dạng $z = a + \sqrt{3} \cdot a \cdot i, a \geq 0$ thỏa mãn.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

- A.** $w = -1 + 7i$. **B.** $w = -4 + 8i$. **C.** $w = -3 + 8i$. **D.** $w = 1 + 3i$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases} |z| = 5 \\ |z + 3| = |z + 3 - 10i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ (a + 3)^2 + b^2 = (a + 3)^2 + (b - 10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Vậy $z = 5i$; $w = z - 4 + 3i = 1 + 3i$.

Câu 14. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

- A.** $S = \frac{7}{3}$. **B.** $S = -5$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - i\sqrt{a^2 + b^2} = 0$

$$\Leftrightarrow a + 1 + (b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

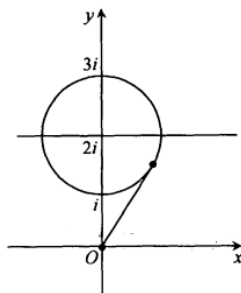
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \geq -3 \\ (b + 3)^2 = 1 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = -5.$$

Câu 15. Hỏi có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai hệ thức: $|z^2 \bar{z} - 3z| = 2$ và $|z - 2i| = 1$?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $|z - 2i| = 1$ như hình vẽ nên $1 \leq |z| \leq 3$

Mặt khác: $|z^2 \bar{z} - 3z| = 2 \Leftrightarrow |z(z \cdot \bar{z} - 3)| = 2 \Leftrightarrow |z|(|z|^2 - 3) = 2 \Leftrightarrow |(|z|^3 - 3|z|)| = 2 (*)$

Đặt: $t = |z|, \Rightarrow 1 \leq t \leq 3$ thì (*) $\Leftrightarrow |(t^3 - 3t)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

* Trường hợp 1: $t = 1$ ta thấy trên hình vẽ có một số phức.

* Trường hợp 2: $t = 2$ ta thấy trên hình vẽ có hai số phức.

Vậy: có tất cả ba số phức z thỏa mãn đề bài. Chọn đáp án **D**

Câu 16. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a-b=0$

$\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \Leftrightarrow a^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b+1)^2 \Leftrightarrow b=1$

Suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$. Vậy $z = 1 + i$

Vậy có 1 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b Dạng 05: Ứng dụng số phức vào bài toán tính tổng đại số

Câu 17. Cho biết $f(x) = (1+x+2x^2)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4038}x^{4038}$. Xét hai tổng các hệ số: $S_1 = a_0 - a_2 + a_4 - \dots - a_{4038}$ và $S_2 = a_1 - a_3 + a_5 - \dots + a_{4037}$. Khi đó giá trị của $S_1 + S_2$ bằng

A. 2^{2019} . B. -2^{1011} . C. 2^{1010} . D. -2^{2019} .

Lời giải

Chọn C

$f(x) = (1+x+2x^2)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4038}x^{4038} (1)$

Cho biết $f(x) = (1+x+2x^2)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4038}x^{4038}$

Thay $x = i$ vào (1), ta được $(1+i+2i^2)^{2019} = a_0 + a_1i + a_2i^2 + \dots + a_{4038}i^{4038} \Leftrightarrow (-1+i)^{2019} = (a_0 - a_2 + a_4 - \dots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)$

$\Rightarrow S_1 + iS_2 = (-1+i)^{2019} = (-1+i)^{2018} \cdot (-1+i) = [(1-i)^2]^{1009}(-1+i) = -2^{1009}i(-1+i) = 2^{1009} + 2^{1009}i$

$\Rightarrow S_1 = S_2 = 2^{1009} \Rightarrow S_1 + S_2 = 2^{1010}$

Câu 18. Giá trị của biểu thức $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100}$ bằng

A. -2^{50} . B. 2^{100} . C. 2^{50} . D. -2^{100} .

Lời giải

Chọn A

$(1+i)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k i^k = \left(\sum_{k=0}^{50} (-1)^k C_{100}^{2k} \right) + i \left(\sum_{k=0}^{49} (-1)^k C_{100}^{2k+1} \right)$

Mặt khác:

$(1+i)^{100} = \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]^{100} = (\sqrt{2})^{100} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{100} = 2^{50} (\cos 25\pi + i \sin 25\pi)$
 $= 2^{50} (\cos \pi + i \sin \pi) = 2^{50} (-1 + 0) = -2^{50}$

Do đó $\sum_{k=0}^{50} (-1)^k C_{100}^{2k} = C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - C_{100}^6 + \dots - C_{100}^{98} + C_{100}^{100} = -2^{50}$

Câu 19. Khai triển của biểu thức $(x^2 + x + 1)^{2018}$ được viết thành $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{4034} + a_{4036}$ bằng:

A. 2^{1009} . B. -1 . C. -2^{1009} . D. 0 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $(x^2 + x + 1)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4036}x^{4036}$.

Cho $x = i$ ta được $(i^2 + i + 1)^{2018} = a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + a_4 + a_5i - a_6 - \dots + a_{4036}$.

Hay $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{4034} + a_{4036} = (-1 + i + 1)^{2018} = -1$.

Dạng 07: Tính giá trị của biểu thức theo các số phức thỏa mãn đk về phép toán

Câu 20. Cho số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Tính $T = (z - 2)^2 + (4 - z)^2$

A. 1. B. 4. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(x + yi)^3 = 18 + 26i$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = 18 + 26i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases}$$

Suy ra $13(x^3 - 3xy^2) = 9(3x^2y - y^3)$

$$\Leftrightarrow 13x^3 - 39xy^2 - 27x^2y + 9y^3 = 0$$

Nhận thấy $y = 0$ không thỏa, đặt $t = \frac{x}{y}$ ta được

$$13t^3 - 27t^2 - 39t + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{6}{13} - \frac{5\sqrt{3}}{13} \\ t = \frac{5\sqrt{3}}{13} - \frac{6}{13} \end{cases}$$

Chọn $t = 3$ khi đó $\frac{x}{y} = 3$, suy ra chọn $z = 3 + i$.

Suy ra $T = (1 + i)^2 + (1 - i)^2 = 0$.

Câu 21. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + w| = \sqrt{17}$, $|z + 2w| = \sqrt{58}$ và $|z - 2w| = 5\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \bar{z}.w + z.\bar{w}$ bằng

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z|^2 = z.\bar{z}$, $\overline{az_1 + bz_2} = \bar{a}\bar{z_1} + \bar{b}\bar{z_2}$ nên

$$|z + 2w| = \sqrt{58} \Leftrightarrow |z + 2w|^2 = 58 \Leftrightarrow (z + 2w)(\bar{z} + 2\bar{w}) = 58$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + 2\bar{z}.w + 2z.\bar{w} + 4|w|^2 = 58 \Leftrightarrow |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 58.$$

$$\text{Tương tự } |z - 2w| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 2w|^2 = 50 \Leftrightarrow |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 58 \\ |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50 \end{cases} \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2.$$

Câu 22. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| > 0$. Tính $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4$.

A. -1 .

B. $1+i$.

C. 1 .

D. $1-i$.

Lời giải.

Chọn A

$$\text{Ta có } |z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1| \\ |z_1| = |z_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = z_1 \overline{z_1} \\ z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} \\ z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} = z_1 \overline{z_1} \\ z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} \end{cases}.$$

Ta có:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 = \left(\frac{z_1 + z_2}{z_2 z_1}\right)^2 - 2 = \left(\frac{z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}}{z_2 z_1}\right)^2 - 2 = \left(\frac{z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}}{z_1 z_1}\right)^2 - 2 = \left(\frac{z_1 \overline{z_1}}{z_1 z_1}\right)^2 - 2 = -1.$$

$$\text{Từ đó: } A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4 = \left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right]^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1.$$

Câu 23. Cho số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $z^3 = 1$. Tính $M = (z^{2019} + z^{2018} - z)(z^{2019} - z^{2018} + z)$

A. $M = 4$.

B. $M = -1$.

C. $M = 1$.

D. $M = -4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$M = (z^{2019} + z^{2018} - z)(z^{2019} - z^{2018} + z) = \left[(z^3)^{673} + (z^3)^{672} \cdot z^2 - z\right] \cdot \left[(z^3)^{673} - (z^3)^{672} \cdot z^2 + z\right]$$

$$\text{Theo bài } z^3 = 1 \text{ nên } M = (1 + z^2 - z)(1 - z^2 + z).$$

$$\text{Mặt khác, } z^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow z^2 + z + 1 = 0 \text{ (do } z \neq 1).$$

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} z^2 + 1 = -z \\ z + 1 = -z^2 \end{cases} \Rightarrow M = (-z - z)(-z^2 - z^2) = 4z^3 = 4.$$

Câu 24. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 4, |z_2| = 6$ và $|z_1 + z_2| = 10$. Giá trị của $\frac{|z_1 - z_2|}{2}$ là

A. 3 .

B. 1 .

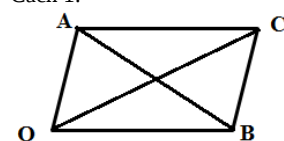
C. 0 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn B

Cách 1:



Gọi A là điểm biểu diễn của z_1 , suy ra $OA = 4$

Gọi B là điểm biểu diễn của z_2 , suy ra $OB = 6$

Gọi C là điểm biểu diễn của $z_1 + z_2$, suy ra $OC = 10$

Do $ABCD$ là hình bình hành, ta có:

$$AB = |z_1 - z_2| \Rightarrow \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \frac{AB}{2}$$

$$AB^2 + OC^2 = 2(OA^2 + OB^2) \Leftrightarrow AB^2 = 2(16 + 36) - 100 \Leftrightarrow AB^2 = 4 \Rightarrow AB = 2$$

$$\text{Vậy } \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \frac{AB}{2} = 1$$

Cách 2:

$$10^2 = |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} \quad (1)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2} \quad (2)$$

$$\text{Lấy (1) + (2): } |z_1 - z_2|^2 + 100 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 104 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 4 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 2.$$

$$\text{Vậy } \frac{|z_1 - z_2|}{2} = 1.$$

Câu 25. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 + z_2| = 3$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. một giá trị khác

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Sử dụng công thức hình bình hành

$$2(z_1^2 + z_2^2) = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 \Rightarrow 2(1 + 4) = |z_1 - z_2|^2 + 9 \Rightarrow |z_1 - z_2| = 1.$$

Cách 2:

Giả sử $z_1 = a_1 + b_1i$ ($a_1; b_1 \in \mathbb{R}$), $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_2; b_2 \in \mathbb{R}$).

$$\text{Theo bài ra ta có: } \begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 2 \\ |z_1 + z_2| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 4 \\ 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 4 \end{cases}.$$

Khi đó, ta có:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) - (2a_1a_2 + 2b_1b_2)} = 1.$$

$$\text{Vậy } |z_1 - z_2| = 1.$$

b Dạng 08: Dạng khác liên quan đến phép toán số phức

Câu 26. Cho số phức $z = 1 + i$. Biết rằng tồn tại các số phức $z_1 = a + 5i, z_2 = b$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}, b > 1$)

thỏa mãn $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính $b - a$.

A. $b - a = 3\sqrt{3}$.

B. $b - a = 2\sqrt{3}$.

C. $b - a = 4\sqrt{3}$.

D. $b - a = 5\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2| \Rightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + 4^2 = (b-1)^2 + 1 \\ (b-a)^2 + 25 = 3[(1-a)^2 + 16] \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Cách 1: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - (1-a)^2 = 15 \\ (b-1)^2 + 2(b-1)(1-a) + (1-a)^2 = 3(1-a)^2 + \frac{23}{15}[(b-1)^2 - (1-a)^2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - (1-a)^2 = 15 \\ 8(b-1)^2 - 2(b-1)(1-a) + 7(1-a)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - (1-a)^2 = 15 \\ b-1 = \frac{1}{4}(1-a) \\ b-1 = \frac{7}{2}(1-a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{7\sqrt{3}}{3} + 1 \end{cases} \Rightarrow b - a = 3\sqrt{3}.$$

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = a-1 \\ v = b-1 \end{cases}$ ta có hpt: $\begin{cases} v^2 - u^2 = 15 \\ v^2 + 2uv + u^2 = 23 \end{cases}$ (Hệ đẳng cấp quen thuộc).

- Câu 27.** Biết $2^n (C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$, với C_n^k là các số tổ hợp chập k của n và $i^2 = -1$. Đặt $T_{k+1} = i^k C_n^k$, giá trị của T_8 bằng
A. $-120i$. **B.** $-330i$. **C.** $-8i$. **D.** $-36i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$2^n (C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$$

$$\Leftrightarrow 2^n (C_n^0 + iC_n^1 + i^2 C_n^2 + i^3 C_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$$

$$\Leftrightarrow 2^n (1+i)^n = 2^{15} i (*)$$

Ta có $(1+i)^2 = 2i$ nên nếu $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, thì $(1+i)^n = (1+i)^{2k+1} = 2^k i^k (1+i)$ nên không thỏa mãn (*).

Xét $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, thì $(1+i)^n = (1+i)^{2k} = 2^k i^k$, nên:

$$(*) \Leftrightarrow 2^{2k} \cdot 2^k i^k = 2^{15} i \Leftrightarrow 2^{3k} i^k = 2^{15} i \Rightarrow k = 5 \Rightarrow n = 10.$$

Từ đó ta có $T_8 = i^7 C_8^7 = -8i$.

- Câu 28.** Biết rằng $a; b$ là các số thực thỏa mãn $a+bi = (1+\sqrt{3}i)^{2017}$. Giá trị của $a+b$ bằng:
A. $(\sqrt{3}-1).8^{671}$. **B.** $(1+\sqrt{3}).8^{671}$. **C.** $(\sqrt{3}-1).8^{672}$. **D.** $(1+\sqrt{3}).8^{672}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$1+\sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{3}i)^{2017} = 2^{2017} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2017} = 2^{2017} \left(\cos \frac{2017\pi}{3} + i \sin \frac{2017\pi}{3} \right)$$

$$= 2^{2016} \cdot 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 8^{672} (1+\sqrt{3}i) = 8^{672} + 8^{672} \sqrt{3}i.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 8^{672} \\ b = 8^{672} \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b = (1+\sqrt{3})8^{672}.$$

Chọn D

- Câu 29.** Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $(2+3i)|z| = \frac{\sqrt{26}}{z} + 3 - 2i$. Tính $|z|^4 + |z|^2$.
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (2+3i)|z| = \frac{\sqrt{26}}{z} + 3 - 2i \Rightarrow (2+3i)|z| - 3 + 2i = \frac{\sqrt{26}}{z}.$$

$$\hat{U} \quad (2|z|-3)+(3|z|+2)i = \frac{\sqrt{26}}{\bar{z}} \hat{U} \quad \sqrt{(2|z|-3)^2 + (3|z|+2)^2} = \frac{26}{|\bar{z}|^2} = \frac{26}{|z|^2}$$

$$\hat{U} \quad 13|z|^2 + 13 = \frac{26}{|z|^2} \hat{U} \quad |z|^4 + |z|^2 = 2.$$

BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

b Dạng 01: Biểu diễn số phức qua các phép toán

Câu 30. Trong mặt phẳng phức các điểm A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z_3 . Biết tam giác ABC đều và nội tiếp đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$. Hãy xác định số phức $w = z_1 + z_2 + z_3$.

A. $w = 9 + 12i$. **B.** $w = 12 - 9i$. **C.** $w = 4 - 3i$. **D.** $w = 3 + 4i$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i, z_3 = a_3 + b_3i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$)

Vậy ta có tọa độ các điểm A,B,C trong mặt phẳng phức sẽ là: $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_3, b_3)$. Suy ra tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right)$$

Vì tam giác ABC đều nên trọng tâm trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác hay trọng tâm G của ABC có tọa độ là $G(3;4)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 3 \\ \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 12 \end{cases}$$

Vậy $w = z_1 + z_2 + z_3 = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i = 9 + 12i$

Câu 31. Trong mặt phẳng Oxy, gọi M là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 4i$ và M' là điểm biểu diễn của số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Diện tích của tam giác OMM' bằng

A. $\frac{15}{2}$. **B.** $\frac{25}{4}$. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$+ z = 3 - 4i \Rightarrow M(3; -4).$$

$$+ z' = \frac{1+i}{2}z = \frac{1+i}{2} \cdot (3-4i) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow M'\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$+ OM = 5; OM' = \frac{5\sqrt{2}}{2}; MM' = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

+ Do $OM'^2 + MM'^2 = OM^2$ nên tam giác OMM' vuông tại M' .

$$+ S_{OMM'} = \frac{1}{2} OM' \cdot MM' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25}{4}.$$

Câu 32. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1| = |z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A. đường thẳng. **B.** đường tròn. **C.** parabol. **D.** hypebol.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow z + \bar{z} = 2x$.

Bài ra ta có $2|x - 1 + yi| = |2x + 2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |2x + 2|$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 4x.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1| = |z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một parabol.

Câu 33. Trong mặt phẳng phức các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z_3 . Biết tam giác ABC đều và nội tiếp đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$. Hãy xác định số phức $w = z_1 + z_2 + z_3$.

A. $w = 12 - 9i$. **B.** $w = 4 - 3i$. **C.** $w = 3 + 4i$. **D.** $w = 9 + 12i$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i, z_3 = a_3 + b_3i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$)

Vậy ta có tọa độ các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức sẽ là: $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2), C(a_3, b_3)$. Suy ra tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right)$$

Vì tam giác ABC đều nên trọng tâm trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác hay trọng tâm G của ABC có tọa độ là $G(3; 4)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 3 \\ \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 12 \end{cases}.$$

Vậy $w = z_1 + z_2 + z_3 = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i = 9 + 12i$

b Dạng 02: Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z độc lập

Câu 34. Hình (3) là tập hợp những điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn các điều kiện sau: $|z - 2i| - |\bar{z} + 1| \geq 0, |2 + z| \geq |i - z|$ và $\left| \frac{z+i}{z-2i} \right| \geq 1$. Tính diện tích hình (3).

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có: $|z - 2i| - |\bar{z} + 1| \geq 0$

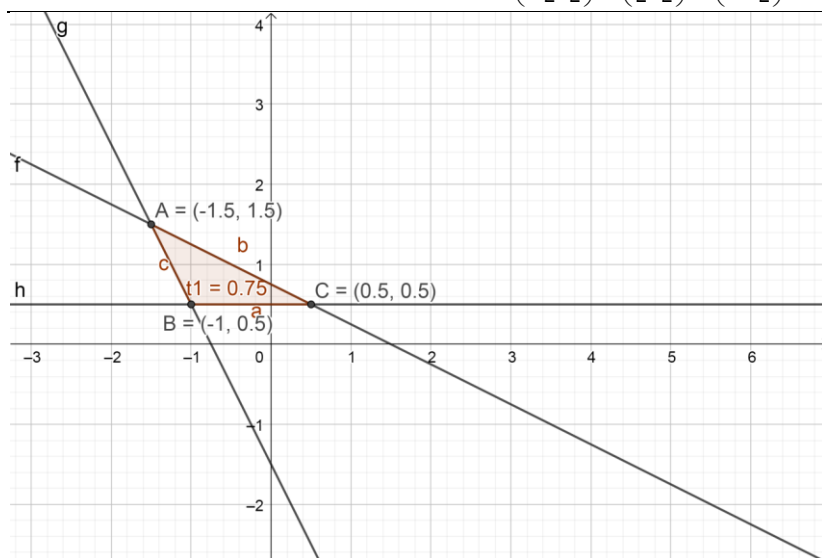
$$\Leftrightarrow |x + (y-2)i| \geq |(x+1) - yi| \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 \geq (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow 2x + 4y - 3 \leq 0 \quad (1).$$

Tương tự:

$$|2 + z| \geq |i - z| \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 \geq 0 \quad (2)$$

$$\left| \frac{z+i}{z-2i} \right| \geq 1 \Leftrightarrow |z+i| \geq |z-2i| \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có hình (3) là tam giác ABC có $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), C\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.



Vậy diện tích hình (3) là $\frac{3}{4}$.

Câu 35. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1$

- A.** Đường thẳng $y = -x$. **B.** Trục hoành trừ điểm $(0; -1)$.
C. Trục tung. **D.** Đường thẳng $y = x$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$. Điều kiện: $z \neq -i$.

Ta có $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-i|=|z+i| \Leftrightarrow |x+yi-i|=|x+yi+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|x+(y+1)i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1 = x^2+y^2+2y+1 \Leftrightarrow 4y=0 \Leftrightarrow y=0.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là trục hoành trừ điểm $(0; -1)$.

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn hai điều kiện: $|z-3-4i| \leq 2$ và $|z+\bar{z}| \leq |z-\bar{z}|$. Số phần tử của tập S là

- A.** 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

Tác giả: hoangthihonghanh3ln@gmail.com

Chọn D

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) là số phức thỏa mãn bài toán.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2} \leq 2 \\ |2a| \leq |2b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2+(b-4)^2 \leq 4 \\ |a| \leq |b| \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq a \leq 5 \\ 2 \leq b \leq 6 \\ a \leq b \end{cases}$$

Bảng giá trị thỏa mãn

a	1	2			3				4	
b	4	3	4	5	3	4	5	6	4	5

Vậy tập S có tất cả 10 phần tử.

- Câu 37.** Hình phẳng giới hạn bởi tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=10$ có diện tích bằng
- A. 25π . B. 12π . C. 20π . D. 15π .

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Gọi $A(3; 0)$, $B(-3; 0)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = 3$ và $z_2 = -3$. Khi đó $AB = 6$.

$$|z-3|+|z+3|=10 \Leftrightarrow MA+MB=10 > AB.$$

Do đó quỹ tích của điểm M là đường Elip có bán trục lớn $a = 5$, nửa tiêu cự $c = 3$ và bán trục nhỏ là $b = 4$.

Vậy diện tích hình Elip là $S = \pi ab = 20\pi$.

Dạng 03: Tìm tâm, bán kính của đường tròn biểu diễn số phức z độc lập

- Câu 38.** Cho số phức z thỏa $|z-2i| = |1-2i|$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn. Hãy xác định tọa độ tâm I của đường tròn đó.
- A. $I(0; -2)$. B. $I(-2; 0)$. C. $I(2; 0)$. D. $I(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi số phức $z = x + yi$; ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó ta có

$$|z-2i| = |1-2i| \Leftrightarrow |x+(y-2)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |x-0+(y-2)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |x-0+(y-2)i| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn tâm $I(0; 2)$.

- Câu 39.** Biết rằng quỹ tích điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức $z \cdot \bar{z} + (z + \bar{z}) = 3$ là đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính R . Giá trị của biểu thức $T = a + b - R$ bằng
- A. -1 . B. -3 . C. 2 . D. 0 .

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + y \cdot i$ với x, y là số thực.

$$\text{Thay vào hệ thức ta được } z \cdot \bar{z} + (z + \bar{z}) = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (x + y \cdot i + x - y \cdot i) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4. \text{ Suy ra điểm biểu diễn số phức } z \text{ là đường tròn có tâm } I(-1; 0) \text{ và có bán kính } R = 2.$$

$$\text{Suy ra } T = a + b - R = -1 + 0 - 2 = -3.$$

- Câu 40.** Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (4 - 3i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.
- A. $r = 20$. B. $r = 5$. C. $r = 2\sqrt{5}$. D. $r = 10$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) ta có:

$$\begin{aligned} w = 3 - 2i + (4 - 3i)z &\Leftrightarrow w - (3 - 2i) = (4 - 3i)z \Leftrightarrow |w - (3 - 2i)| = |(4 - 3i)z| \\ \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 2)i| &= |4 - 3i||z| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \cdot 2 \\ \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= 100. \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (4 - 3i)z$ là một đường tròn có tâm $I(3; -2)$, bán kính $r = 10$.

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $|(2 + i)z + 8 - i| = 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức là một đường tròn tâm I có tọa độ là

- A.** $I(-3; 2)$. **B.** $I(-8; 1)$. **C.** $I(8; -1)$. **D.** $I(3; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } |(2 + i)z + 8 - i| = 5 \Leftrightarrow \left| z + \frac{8 - i}{2 + i} \right| = \frac{5}{|2 + i|} \Leftrightarrow |z + 3 - 2i| = \sqrt{5}$$

Giả sử số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } |z + 3 - 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-3; 2)$, bán kính: $R = \sqrt{5}$

b Dạng 04: Tập hợp điểm biểu diễn của số phức w theo quỹ tích của z

Câu 42. Cho $z \in \mathbb{C}$, $|z - 2 + 3i| = 5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = i\bar{z} + 12 - i$ là một đường tròn có bán kính R . Bán kính R là

- A.** $\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** 5 .

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$ & $w = x' + y'i$ với $\{x; y; x'; y'\} \in \mathbb{R}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} |z - 2 + 3i| &= \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (-y - 3)^2} = |x - yi - 2 - 3i| = |\bar{z} - 2 - 3i| \\ \Rightarrow |\bar{z} - 2 - 3i| &= 5(*). \end{aligned}$$

Ta lại có $w = i\bar{z} + 12 - i \Rightarrow \bar{z} = \frac{w - 12 + i}{i}$ thay vào (*) ta được:

$$\left| \frac{w - 12 + i}{i} - 2 - 3i \right| = 5 \Leftrightarrow \left| \frac{w - 12 + i - 2i + 3}{i} \right| = 5 \Leftrightarrow \frac{|w - 9 - i|}{|i|} = 5$$

$$\Leftrightarrow |w - 9 - i| = 5 \Leftrightarrow |x' + y'i - 9 - i| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x' - 9)^2 + (y' - 1)^2} = 5 \Leftrightarrow (x' - 9)^2 + (y' - 1)^2 = 25$$

Suy ra quỹ tích điểm của số phức w là đường tròn có bán kính $R = 5$.

Vậy bán kính cần tìm là $R = 5$.

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = 1$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w thỏa mãn $w = \frac{z + 2 + 3i}{1 + iz}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- A.** $2\sqrt{5}$. **B.** 20 . **C.** 1 . **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } w = \frac{z+2+3i}{1+iz} \Leftrightarrow z(1-iw) = w-2-3i \Leftrightarrow z = \frac{w-2-3i}{1-iw}.$$

$$\text{Suy ra } |z-i|=1 \Leftrightarrow \left| \frac{w-2-3i}{1-iw} - i \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{-2-4i}{1-iw} \right| = 1 \Leftrightarrow |1-iw| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |w+i| = 2\sqrt{5} \quad (1)$$

$$\text{Giả sử } w = x+yi, \text{ với } x, y \in \mathbf{R} \text{ ta có } (1) \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 20.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn có bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 3 - i$ là

A. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$. **B.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$.

C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$. **D.** $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } w = x' + iy'. \text{ Ta có: } w = 2z + 3 - i \Rightarrow |w - 3 + i| = |2z| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2.$$

$$\text{Khi đó ta được } (x' - 3)^2 + (y' + 1)^2 = 4$$

hay tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có phương trình

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z-i|=1$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn của

số phức w thỏa mãn $w = \frac{z+2+3i}{1+iz}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 20. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } w = \frac{z+2+3i}{1+iz} \Leftrightarrow z(1-iw) = w-2-3i \Leftrightarrow z = \frac{w-2-3i}{1-iw}.$$

$$\text{Suy ra } |z-i|=1 \Leftrightarrow \left| \frac{w-2-3i}{1-iw} - i \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{-2-4i}{1-iw} \right| = 1 \Leftrightarrow |1-iw| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |w+i| = 2\sqrt{5} \quad (1)$$

$$\text{Giả sử } w = x+yi, \text{ với } x, y \in \mathbf{R} \text{ ta có } (1) \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 20.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn có bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Dạng 05: Tìm tâm, bán kính của đường tròn biểu diễn số phức w theo quỹ tích z

Câu 46. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i|=5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = iz + 1 - i$ là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $r = 4$. **B.** $r = 5$. **C.** $r = 22$. **D.** $r = 20$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } w = x+yi, (x, y \in \mathbf{R}).$$

$$\text{Ta có: } w = iz + 1 - i \Leftrightarrow x+yi = iz + 1 - i \Leftrightarrow z = (y+1) + (1-x)i.$$

$$\text{Mà } |z-i|=5 \Leftrightarrow |y+1-xi|=5 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 5^2.$$

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = \bar{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $I(-1;0)$. **B.** $I(1;0)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(0;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|\bar{z}| = |z| = 3$.

Từ $w = \bar{z} + i \Rightarrow w - i = \bar{z} \Rightarrow |w - i| = |\bar{z}| \Rightarrow |w - i| = 3$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(0;1)$.

Câu 48. Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1-i)(z+1) - i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R . Tổng $a+b+R$ bằng

A. 3.

B. 7.

C. 1.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Đặt $w = a + bi$ với điều kiện $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $w = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow a + bi = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow a + (b+1)i = (1-i)z + 1 - i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{a-1+(b+2)i}{1-i} = \frac{[(a-1)+(b+2)i](1+i)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{a-b-3+(a+b+1)i}{2}.$$

$$\text{Vì } |z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(a-b-3)^2}{4} + \frac{(a+b+1)^2}{4}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-b-3)^2 + (a+b+1)^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a + 4b - 11 = 0.$$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 4$.

Từ đó suy ra $a=1, b=-2, R=4 \Rightarrow a+b+R=1+(-2)+4=3$.

Cách 2: Đặt $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $w = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow w + i = (1-i)(z+1) \Leftrightarrow w + i = (1-i)z + 1 - i$

$$\Leftrightarrow w - 1 + 2i = (1-i)z.$$

$$\text{Lấy môđun hai vế ta được } |w-1+2i| = |(1-i)z| \Leftrightarrow |x+yi-1+2i| = |1-i||z|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 4$.

Từ đó suy ra $a=1, b=-2, R=4 \Rightarrow a+b+R=1+(-2)+4=3$.

Câu 49. Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn của các số phức $w = \frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{26}$.

B. 26.

C. 34.

D. $\sqrt{34}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } w = \frac{4+iz}{1+z} \Rightarrow w(1+z) = 4+iz \Leftrightarrow z(w-i) = 4-w \Rightarrow \sqrt{2}|w-i| = |4-w|$$

$$\text{Đặt } w = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\text{Ta có } \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 - 2y + 1) = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 34$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của các số phức w là đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$

b Dạng 06: Tính giá trị của biểu thức theo các số phức thỏa mãn đk về các quỹ tích

Câu 50. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Xét số phức $z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi$.

Tìm $|b|$

A. $|b| = \frac{3}{8}$.

B. $|b| = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

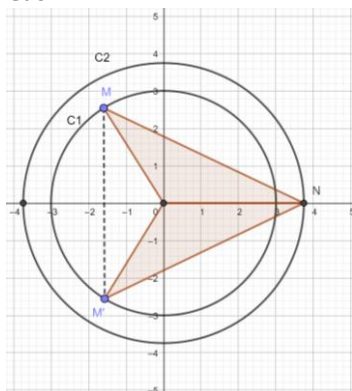
C. $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

D. $|b| = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1



Giả sử $z_1 = x_1 + y_1i \leftrightarrow M(x_1; y_1)$ và $z_2 = x_2 + y_2i \leftrightarrow N(x_2; y_2)$

Theo giả thiết ta có: $OM = 3, ON = 4, MN = \sqrt{37}$

Suy ra: tập hợp các điểm biểu diễn z_1 là đường tròn (C_1) có tâm $O, R_1 = 3$

tập hợp các điểm biểu diễn z_2 là đường tròn (C_2) có tâm $O, R_2 = 4$

Xét tam giác OMN có $\cos(\angle MON) = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2 \cdot OM \cdot ON} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle MON = 120^\circ$ (không đổi)

Suy ra M là ảnh của N qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự $V_{\left(O, \frac{3}{4}\right)}$ và phép quay $Q_{\left(O, 120^\circ\right)}$ hoặc phép quay $Q_{\left(O, -120^\circ\right)}$

Như vậy ứng với mỗi điểm N ta có 2 điểm M đối xứng nhau qua ON thỏa yêu cầu bài toán

Không mất tính tổng quát của bài toán ta chọn $N(4; 0)$ khi đó M, M' đối xứng qua Ox

$$\forall \begin{cases} \angle MON = 120^\circ \\ \angle NOy = 90^\circ \end{cases} \text{ suy ra } \angle yOM = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} x_M = -OM \cdot \sin 30^\circ = -\frac{3}{2} \\ y_M = OM \cdot \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và } M'\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Khi đó } z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, z_2 = 4 \text{ suy ra } z = \frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

$$\text{Và } z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i, z_2 = 4 \text{ suy ra } z = \frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

$$\text{Vậy } |b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Cách 2

$$|z_1| = 3 \quad (1)$$

Ta có: $|z_2| = 4 \quad (2)$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{37} \quad (3)$$

Mặt khác $z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi \Rightarrow z_1 = z \cdot z_2 \quad (4)$

Thay (4) vào (1) và (3) ta được:
$$\begin{cases} |z| \cdot |z_2| = 3 \\ |z-1| \cdot |z_2| = \sqrt{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \frac{3}{4} \\ |z-1| = \frac{\sqrt{37}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{9}{16} \\ (a-1)^2 + b^2 = \frac{37}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 1 = \frac{28}{16} \\ b^2 = \frac{9}{16} - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ b^2 = \frac{27}{64} \end{cases} \Rightarrow |b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Câu 51. Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Mà $z = m + 3 + (m^2 - 1)i \Rightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = m \\ y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong $(C): y = x^2 - 6x + 8$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox . $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

Diện tích giới hạn bởi (C) và trục hoành là:

$$S = \int_2^4 |x^2 - 6x + 8| dx = - \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx = - \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right) \Big|_2^4 = \frac{4}{3}$$

Câu 52. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6$ và $|z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1 và iz_2 . Biết $\angle MON = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.

A. $24\sqrt{3}$.

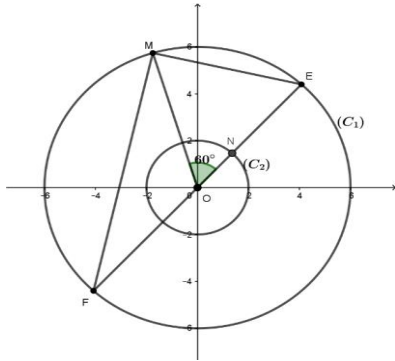
B. 18.

C. $T = 36\sqrt{2}$.

D. $T = 36\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và iz_2 , gọi E, F lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $3iz_2$ và $-3iz_2$.

Theo bài ra ta có:

$|z_1| = 6$ nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R = 6$, gọi là đường tròn (C_1) ; $|z_2| = 2 \Rightarrow |iz_2| = |i| \cdot |z_2| = 2$ do đó tập hợp các điểm N biểu diễn số phức iz_2 thuộc đường tròn tâm O , bán kính $r = 2$, gọi là đường tròn (C_2) .

Lại thấy: $|3iz_2| = 6$ và $|-3iz_2| = 6$ suy ra các điểm E, F thuộc đường tròn (C_1) .

Hơn nữa $3iz_2$ và $-3iz_2$ là các số phức đối nên EF là một đường kính của (C_1) .

Mặt khác: $\overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{ON}$ nên N nằm giữa O và $E \Rightarrow \angle MOE = 60^\circ$, suy ra tam giác MOE là tam giác đều cạnh bằng 6 và tam giác MEF vuông tại M .

- Khi đó: $T = |z_1^2 + 9z_2^2| = |z_1^2 - (3iz_2)^2| = |z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2| = ME \cdot MF$.

- Nhận thấy: $ME \cdot MF = 2S_{\triangle MEF} = 4 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$. Vậy $T = 36\sqrt{3}$.

Câu 53. Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Mà } z = m + 3 + (m^2 - 1)i \Rightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = m \\ y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong $(C): y = x^2 - 6x + 8$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox . $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

Diện tích giới hạn bởi (C) và trục hoành là:

$$S = \int_2^4 |x^2 - 6x + 8| dx = - \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx = - \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right) \Big|_2^4 = \frac{4}{3}$$

b Dạng 07: Bài tập tổng hợp khác

Câu 54. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ, I là trung điểm MN , O là gốc tọa độ. Mệnh đề nào sau đây luôn đúng?

- A. $|z_1 + z_2| = OI$. B. $|z_1 - z_2| = OM + ON$.
 C. $|z_1 + z_2| = 2OI$. D. $|z_1 - z_2| = 2(OM + ON)$.

Lời giải

Chọn C

Vì M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ và 3 điểm O, M, N không thẳng hàng.

Nên ta có $|z_1 - z_2| = |\overline{OM} - \overline{ON}| = |\overline{NM}| = NM$ loại đáp án $|z_1 - z_2| = 2(OM + ON)$ và $|z_1 - z_2| = OM + ON$

Mặt khác $|z_1 + z_2| = |\overline{OM} + \overline{ON}| = |2\overline{OI}| = 2|\overline{OI}| = 2OI$ loại đáp án $|z_1 + z_2| = OI$.

Câu 55. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.

- A. $M + m = 48$. B. $M + m = 50$. C. $M + m = 41$. D. $M + m = 63$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Ta có phương trình đường tròn $(C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9$.

Mặt khác $F = 4a + 3b - 1 = 4(a-4) + 3(b-3) + 24 \Leftrightarrow F - 24 = 4(a-4) + 3(b-3)$.

Ta có $[4(a-4) + 3(b-3)]^2 \leq (4^2 + 3^2)[(a-4)^2 + (b-3)^2] = 25 \cdot 9 = 225$.

$\Rightarrow -15 \leq 4(a-4) + 3(b-3) \leq 15 \Leftrightarrow -15 \leq F - 24 \leq 15 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$.

Khi đó $M = 39$, $m = 9$.

Vậy $M + m = 48$.

Cách 2. Ta có $F = 4a + 3b - 1 \Rightarrow a = \frac{F+1-3b}{4}$

$(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{F+1-3b}{4} - 4\right)^2 + b^2 - 6b + 9 = 9$

$\Leftrightarrow 25b^2 - 2(3F+3)b + F^2 + 225 = 0$

$\Delta' = (3F+3)^2 - 25F^2 - 5625$

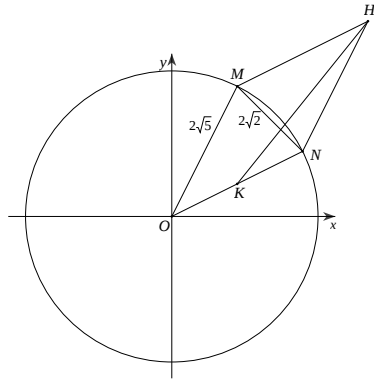
$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -16F^2 + 18F - 5625 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$.

Câu 56. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = 2\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn hai số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết $MN = 2\sqrt{2}$. Gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OMHN$ và K là trung điểm của ON . Tính $l = KH$

- A. $l = \sqrt{5}$. B. $l = 3\sqrt{2}$. C. $l = 6\sqrt{2}$. D. $l = \sqrt{41}$.

Lời giải

Chọn D



Xét tam giác OMN ta có $\cos \angle MON = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \frac{4}{5}$.

Vì $\angle MON + \angle ONH = 180^\circ$ nên $\cos \angle ONH = -\frac{4}{5}$.

Xét tam giác HNK có

$$HK = \sqrt{NH^2 + NK^2 - 2NH \cdot NK \cdot \cos \angle KNH} = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{1}{2}ON\right)^2 - 2OM \cdot \frac{1}{2}ON \cdot \cos \angle ONH} = \sqrt{41}.$$

Câu 57. Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức z và $(1+i)z$. Tính mô đun của số phức z biết tam giác OAB có diện tích bằng 32.

- A. $|z| = 2$. B. $|z| = 8$. C. $|z| = 4$. D. $|z| = 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $A(a; b)$ biểu diễn z và $B(a-b; a+b)$ biểu diễn $(1+i)z$.

Tam giác OAB có $OA = |z|$, $OB = |z|\sqrt{2}$, $AB = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Suy ra tam giác OAB vuông cân tại A .

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot AB \Leftrightarrow \frac{1}{2}|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z| = 8.$$

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

b Dạng 02: Tính toán biểu thức nghiệm

Câu 58. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Giá trị của $P = |z_1^{2019} + z_2^{2019}|$ là

- A. $P = 2\sqrt{3}$. B. $P = 4038$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ có hai nghiệm phức là $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$

Cách 1:

Vì z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ nên $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Lại có:

$$z_1^2 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)^2 = \frac{1}{4}(-2 + 2\sqrt{3}i) = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) = z_2.$$

$$z_2^2 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i)^2 = \frac{1}{4}(-2 - 2\sqrt{3}i) = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i) = z_1.$$

$$\text{Suy ra } z_1^4 = (z_1^2)^2 = z_2^2 = z_1 \Rightarrow z_1^{2016} = \left((z_1^4)^4\right)^{126} = z_1^{126} = z_2^{63} = z_2 \cdot z_2^2 \cdot z_2^{60} = z_1 \cdot z_2 \cdot z_1^{15} = z_1^{15} \\ = (z_1^4)^3 \cdot z_1^3 = z_1^3 \cdot z_2^3 = 1.$$

$$\text{Tương tự } z_2^{2016} = 1.$$

$$\text{Vậy } z_1^{2019} + z_2^{2019} = z_1^{2016} \cdot z_1^3 + z_2^{2016} \cdot z_2^3 = z_1^3 + z_2^3 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_1 = 1 + 1 = 2.$$

$$\text{Suy ra } P = |z_1^{2019} + z_2^{2019}| = 2.$$

Cách 2:

Ta có:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Áp dụng công thức Moivre ta được:

$$z_1^{2019} = \cos\left(2019 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(2019 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(1346\pi) + i \sin(1346\pi) = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$z_2^{2019} = \cos\left(2019 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(2019 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) = \cos(2692\pi) + i \sin(2692\pi) = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$$

$$\text{Vậy } P = |z_1^{2019} + z_2^{2019}| = |1 + 1| = 2.$$

Cách 3:

$$\text{Ta có } z_1^2 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)^2 = \frac{1}{4}(-2 + 2\sqrt{3}i) = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) = z_2.$$

$$\text{Suy ra } z_1^3 = z_1^2 \cdot z_1 = z_2 \cdot z_1 = 1.$$

$$\text{Do đó } z_1^{2019} = (z_1^3)^{673} = 1^{673} = 1. \text{ Tương tự } z_2^{2019} = 1.$$

$$\text{Vậy } P = |z_1^{2019} + z_2^{2019}| = 2.$$

Cách 4:

$$\text{Chú ý 2 hằng đẳng thức: } (1 + \sqrt{3}i)^3 = 1 + 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3}i)^2 + 3\sqrt{3}i^3 = -8.$$

$$(1 - \sqrt{3}i)^3 = 1 - 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3}i)^2 - 3\sqrt{3}i^3 = -8.$$

$$\text{Do đó } z_1^3 = -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}i)^3 = -\frac{1}{8} \cdot (-8) = 1; \quad z_2^3 = -\frac{1}{8}(1 - \sqrt{3}i)^3 = -\frac{1}{8} \cdot (-8) = 1$$

$$\text{Vậy } P = |z_1^{2019} + z_2^{2019}| = 2.$$

Cách 5:

$$\text{Ta có } z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Do z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$ nên z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $z^3 - 1 = 0$. Suy ra: $z_1^3 = z_2^3 = 1$.

$$\text{Do đó } z_1^{2019} = (z_1^3)^{673} = 1^{673} = 1. \text{ Tương tự } z_2^{2019} = 1.$$

$$\text{Vậy } P = |z_1^{2019} + z_2^{2019}| = 2.$$

Câu 59. Gọi z là một nghiệm của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $M = z^{2019} + z^{2018} + \frac{1}{z^{2019}} + \frac{1}{z^{2018}} + 5$ bằng

- A.** 2. **B.** 7. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ có hai nghiệm $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Chọn $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

Áp dụng công thức Moivre: $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, ta được:

$$z^{2019} = \cos \frac{2019\pi}{3} + i \sin \frac{2019\pi}{3} = -1 \Rightarrow \frac{1}{z^{2019}} = -1.$$

$$z^{2018} = \cos \frac{2018\pi}{3} + i \sin \frac{2018\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^{2018}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Do đó, } M = -1 - 1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} + 5 = 2.$$

Vậy $M = 2$.

Câu 60. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2 + bz + c = 0$, $(a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, b^2 - 4ac < 0)$. Đặt $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $P = \frac{2c}{a}$. **B.** $P = \frac{4c}{a}$. **C.** $P = \frac{c}{2a}$. **D.** $P = \frac{c}{a}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ nên $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

$$\text{Do đó } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } z_1 - z_2 = \frac{i\sqrt{4ac - b^2}}{a}$$

$$\text{Suy ra } P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{a^2} = \frac{4c}{a}.$$

Câu 61. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $\frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} = 4$. Khi đó $|z_1 + z_2|$ bằng

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$\frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} = -4 \Leftrightarrow \left(\frac{|z|^2}{z}\right)^2 + \bar{z} = -4 \Leftrightarrow \left(\frac{z\bar{z}}{z}\right)^2 + \bar{z} = -4 \Leftrightarrow \bar{z}^2 + \bar{z} + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \\ \bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i \\ z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}. \text{ Vậy } |z_1 + z_2| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i + -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \right| = |-1| = 1.$$

Đang 03: Định lý Viet và ứng dụng

Câu 62. Kí hiệu n là số các giá trị của tham số a sao cho phương trình $z^2 + az + 3 = 0$

(với ẩn là z), có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -5$. Tìm n .

- A.** $n = 2$. **B.** $n = 3$. **C.** $n = 0$. **D.** $n = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + 3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = -5 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn $\Rightarrow n = 2$.

Câu 63. Cho số phức $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và $\bar{z}$ làm nghiệm là

- A.** $2z^2 + z + 2 = 0$. **B.** $z^2 - z + 1 = 0$. **C.** $z^2 + z + 1 = 0$. **D.** $z^2 - z + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \bar{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \begin{cases} S = z + \bar{z} = -1 \\ P = z\bar{z} = 1 \end{cases}.$$

Theo Vi-et ta có z và $\bar{z}$ là nghiệm của phương trình $z^2 - Sz + P = 0 \Rightarrow z^2 + z + 1 = 0$.

Câu 64. Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tổng $S = a + b$ bằng

- A.** $\frac{5}{9}$. **B.** $-\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Vì $a, b \in \mathbb{R}$ và phương trình $z^2 + az + b = 0$ có hai nghiệm là

$$z_1 = w + i, \quad z_2 = 2w - 1 \text{ nên } z_1 = \bar{z}_2 \Leftrightarrow w + i = \overline{2w - 1} \Leftrightarrow x + yi + i = \overline{2(x + yi) - 1}$$

$$\Leftrightarrow x + (y+1)i = (2x-1) - 2yi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x-1 \\ y+1 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow w = 1 - \frac{1}{3}i \Rightarrow \begin{cases} z_1 = w + i = 1 + \frac{2}{3}i \\ z_2 = 2w - 1 = 1 - \frac{2}{3}i \end{cases}.$$

$$\text{Theo định lý Viet: } \begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = -a \\ 1 + \frac{4}{9} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{13}{9} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = a + b = -\frac{5}{9}.$$

b Dạng 04: Phương trình quy về bậc hai, phương trình bậc cao

Câu 65. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

- A.** 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } z^4 = |z| \Leftrightarrow |z|^4 = |z| \Leftrightarrow |z|(|z|^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}.$$

+) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

+) $|z| = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 \\ z = i \\ z = -i \end{cases}$.

$\Rightarrow S$ có 5 phần tử.

Câu 66. Cho số phức z và w thỏa mãn $z + w = 4 - i$ và $z^3 + w^3 = 7 + 28i$. Tổng phần ảo của z và w bằng

A. - 4.

B. 4.

C. 1.

D. - 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$z^3 + w^3 = 7 + 28i \Leftrightarrow (z + w)^3 - 3zw(z + w) = 7 + 28i \Leftrightarrow (4 - i)^3 - 3zw(4 - i) = 7 + 28i$$

$$\Leftrightarrow zw = \frac{(4 - i)^3 - 7 - 28i}{3(4 - i)} \Leftrightarrow zw = 5 - 5i.$$

Khi đó, z và w là nghiệm của phương trình: $t^2 - (4 - i)t + 5 - 5i = 0$.

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm của phương trình $t^2 - (4 - i)t + 5 - 5i = 0$; theo hệ thức Viet ta có $t_1 + t_2 = 4 - i$.

Phần ảo của tổng z và w bằng phần ảo của tổng $t_1 + t_2$ là - 1.

Câu 67. Tính tổng phần thực của các số phức z là nghiệm của phương trình $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$ trên tập số phức.

A. $2\sqrt{5}$.

B. 2.

C. $-2\sqrt{3}$.

D. -4.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $z = 0$ không là nghiệm của phương trình.

$$\text{Chia cả 2 vế của phương trình cho } z^2 \text{ ta được: } z^2 - 2z - 1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + \frac{1}{z} = -1 \\ z + \frac{1}{z} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + z + 1 = 0 \\ z^2 - 3z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Vậy tổng phần thực của các nghiệm là: $(-1) + 3 = 2$.

Câu 68. Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z + w}$. Khi đó $\left|\frac{z}{w}\right|$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z + w} \Leftrightarrow \frac{w + 3z}{zw} = \frac{6}{z + w} \Leftrightarrow (w + 3z)(z + w) = 6zw \Leftrightarrow 3z^2 - 2zw + w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2 - 2\frac{z}{w} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{w} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3} i \Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

MAX MIN MODULE

Commented [WU1]: Môn: DS12

Chuyên đề: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

Dạng toán: Phương trình quy về bậc hai, phương trình bậc cao

- Câu 69.** Xét các số phức z, w thỏa mãn $w = iz$ và $|(1+i)z + 2 - 2i| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|z - w|$ bằng
- A.** $3\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết:

$$|(1+i)z + 2 - 2i| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \geq |(1+i)z| - |2 - 2i| \Leftrightarrow \sqrt{2} \geq \sqrt{2}|z| - 2\sqrt{2} \Rightarrow |z| \leq 3.$$

$$\text{Lại có: } |z - w| = |z - iz| = |z| \cdot |1 - i| = \sqrt{2} \cdot |z| \leq 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy: } |z - w|_{\max} = 3\sqrt{2}.$$

- Câu 70.** Trong các số phức thỏa mãn: $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là
- A.** $-\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

Lời giải

Chọn A

+ Gọi số phức cần tìm là $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$+ |z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$$

$$\Rightarrow |a + bi - 1 + i| = |a - bi + 1 - 2i|$$

$$\Leftrightarrow |a - 1 + (b + 1)i| = |a + 1 - (b + 2)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{(a + 1)^2 + (b + 2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a + 2b + 3 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{4a + 3}{2} = -2a - \frac{3}{2}$$

$$+ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \left(2a + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5a^2 + 6a + \frac{9}{4}} = \sqrt{5\left(a^2 + \frac{6}{5}a + \frac{9}{25}\right) + \frac{9}{20}}$$

$$= \sqrt{5\left(a + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{20}} \geq \sqrt{\frac{9}{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$|z| \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{3\sqrt{5}}{10} \text{ khi } a = -\frac{3}{5} \Rightarrow b = -\frac{3}{10}.$$

- Câu 71.** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

- A.** $P = 4\sqrt{6}$. **B.** $P = 2\sqrt{26}$. **C.** $P = 5 + 3\sqrt{5}$. **D.** $P = 32 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } \begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases} (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i \\ z_1 - z_2 = a - c + (b - d)i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c + (b + d)i = 8 + 6i \\ \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = 2 \end{cases}$$

Commented [WU2]: Môn: DS12
Chuyên đề: MAX MIN MODULE
Dạng toán: Sử dụng Module và liên hợp để giải toán số phức

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = |8+6i| \Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)^2 + (b+d)^2 = 100 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2 = 104 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 52$$

$$\text{Mặt khác } P = |z_1| + |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \stackrel{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} = \sqrt{2 \cdot 52} = 2\sqrt{26}.$$

Câu 72. Cho số phức z có phần thực bằng $\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $\left| \frac{1}{z} - i \right|$ bằng

- A. 1. B. 2. **C. $\sqrt{2}$.** D. $1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z = \sqrt{2} + yi, y \in \mathbb{R}$.

Khi

đó

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z} - i \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2} + yi} - i \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2 + y^2} - \frac{2 + y + y^2}{2 + y^2} i \right| = \sqrt{\frac{2}{2 + y^2} + \frac{(2 + y + y^2)^2}{(2 + y^2)^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1 + 2y}{2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(y) = 1 + \frac{1 + 2y}{2 + y^2}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$f'(y) = \frac{-2y^2 - 2y + 4}{2 + y^2}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

y	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(y)$	1	$\searrow$	$\frac{11}{18}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\max f(y) = f(1) = 2$ và $\max \sqrt{f(y)} = \sqrt{2}$.

Câu 73. Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$, tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

- A. $5 + 3\sqrt{5}$. B. $34 + 3\sqrt{2}$. **C. $4\sqrt{6}$.** D. $2\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có: $|z_1 + z_2| = |8 + 6i| = 10$.

$$\text{Suy ra } 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 100 + 4 = 104.$$

$$\text{Ta có: } P = |z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = \sqrt{26} \\ z_1 + z_2 = 8 + 6i \text{ (hệ này có nghiệm)} \\ |z_1 - z_2| = 2 \end{cases}$$

Vậy $\max P = 2\sqrt{26}$.

Cách 2: Gọi $z_1 = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$, $z_2 = c + di$, $(c, d \in \mathbb{R})$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a + c = 8 & (1) \\ b + d = 6 & (2) \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + c)^2 + (b + d)^2 = 100 \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 52$$

Ta có $P = |z_1| + |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ ta có:

$$P^2 \leq 2(a^2 + b^2) + 2(c^2 + d^2) = 104 \Leftrightarrow P \leq 2\sqrt{26}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $2\sqrt{26}$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} a + c = 8 \\ b + d = 6 \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ c = 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

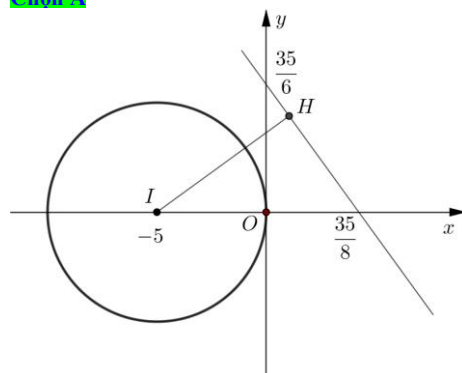
b Dạng 02: Min-Max liên quan đến quỹ tích là đường thẳng

Câu 74. Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5; |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$ là

A. $P_{\min} = \frac{5}{2}$. B. $P_{\min} = 5$. C. $P_{\min} = 3$. D. $P_{\min} = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $z_1 = x_1 + y_1i$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{R}$) và $z_2 = x_2 + y_2i$ ($x_2, y_2 \in \mathbb{R}$).

Khi đó $z_1; z_2$ tương ứng được biểu diễn bởi hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Do $|z_1 + 5| = 5$ nên $IA = 5$ với $I(-5; 0)$, hay A thuộc đường tròn $(I; 5)$.

Do $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$ nên $MB = NB$ với $M(-1; 3), N(3; 6)$ hay B thuộc trung trực của MN .

Trung điểm của MN có tọa độ $\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{3+6}{2}\right) = (1; \frac{9}{2})$ và $\overline{MN} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ nên phương trình đường trung trực của

MN là $(D): 4(x - 1) + 3(y - \frac{9}{2}) = 0$ hay $4x + 3y - \frac{35}{2} = 0$.

$$\text{Ta có: } d(I, D) = \frac{|4(-5) + 3(0) - \frac{35}{2}|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Do } P = |z_1 - z_2| = AB \text{ nên } P_{\min} = AB_{\min} = d(I, D) - 5 = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}.$$

Câu 75. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2 - i| - |z - 2 + i| = 2\sqrt{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- A.** $|z|_{\min} = \sqrt{5}$. **B.** $|z|_{\min} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $|z|_{\min} = \sqrt{13}$. **D.** $|z|_{\min} = 2\sqrt{5}$.

Lời giải

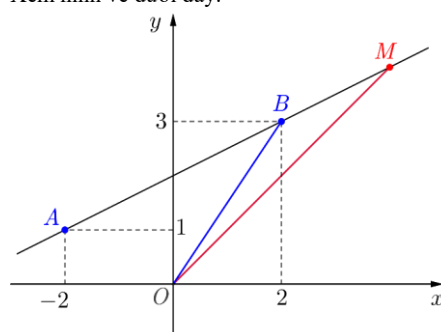
Chọn C

Đặt M là điểm biểu diễn số phức z .

Lấy hai điểm cố định $A(-2; 1), B(2; 3) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.

Khi đó $|z + 2 - i| - |z - 2 + i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow MA - MB = AB$. Suy ra M thuộc tia đối của tia BA .

Xem hình vẽ dưới đây:



Ta có $|z| = OM$. Vậy $|z|_{\min}$ khi OM nhỏ nhất. Mà $OM_{\min} = OB = \sqrt{13}$ nên $|z|_{\min} = \sqrt{13}$.

Câu 76. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và biểu thức $|iz + 2 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm phần ảo của số phức z .

- A.** $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-4)^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2} \Leftrightarrow a = 4 - b.$$

$$|iz + 2 - i| = \sqrt{(2-b)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{(2-b)^2 + (3-b)^2} = \sqrt{2b^2 - 10b + 13}$$

$$= \sqrt{2\left(b - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|iz+2-i|$ là $\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $b = \frac{5}{2}$; $a = \frac{3}{2}$.

Câu 77. Với các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của z

- A.** $\max|z|=5$. **B.** $\max|z|=4$. **C.** $\max|z|=7$. **D.** $\max|z|=6$.

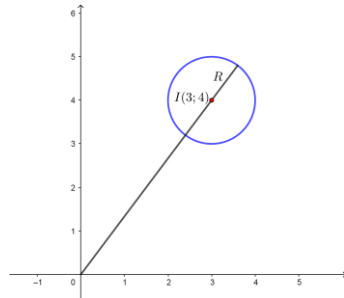
Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z-3-4i|=1 \Leftrightarrow |x+yi-3-4i|=1 \Leftrightarrow |(x-3)+(y-4)i|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=1$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$.



Khi đó $\max|z| = OI + R = \sqrt{3^2+4^2} + 1 = 6$.

Câu 78. Cho số phức $z = a + bi$ với a, b là hai số thực thỏa mãn $a - 2b = 1$. Tính $|z|$ khi biểu thức $|z+1+4i| + |z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.** $\sqrt{\frac{1}{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(a;b)$ biểu diễn số phức z , $A(-1;-4), B(2;5)$.

Do $|z+1+4i| + |z-2-5i|$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất thì M thuộc đoạn thẳng AB .

Phương trình đường thẳng AB là $3x - y - 1 = 0$. Do đó, $3a - b - 1 = 0$ với $-1 \leq a \leq 2$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a - 2b = 1 \\ 3a - b = 1 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$.

Từ đó ta tính được $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Dạng 03: Min-Max liên quan đến quỹ tích là đường tròn

Câu 79. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-\sqrt{3}-i| \leq 3$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là số phức có môđun lớn nhất, nhỏ nhất. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ bằng

- A.** 6. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có: $|z-\sqrt{3}-i| \leq 3 \Leftrightarrow (a-\sqrt{3})^2 + (b-1)^2 \leq 9$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là hình tròn (C) tâm $I(\sqrt{3}; 1)$, bán kính $R = 3$.

Các điểm biểu diễn của z_1 và z_2 tương ứng là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C) .

Khi đó $|z_1 - z_2|$ bằng đường kính của (C) .

Suy ra $|z_1 - z_2| = 6$.

Câu 80. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$, với z_1 có phần ảo dương. Biết số phức z thỏa mãn $2|z - z_1| \leq |z - z_2|$, phần thực nhỏ nhất của z là

- A. 6. B. - 2. C. 1. D. 9.

Lời giải

Chọn B

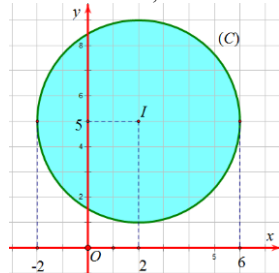
Ta có $z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 + 3i$ hoặc $z_2 = 2 - 3i$.

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbf{R}$.

Theo giả thiết, $2|z - z_1| \leq |z - z_2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$

$$\Leftrightarrow 4[(x-2)^2 + (y-3)^2] \leq (x-2)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 16.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền trong của hình tròn (C) có tâm $I(2; 5)$, bán kính $R = 4$, kể cả hình tròn đó.



Do đó, phần thực nhỏ nhất của z là $x_{\min} = -2$.

Câu 81. Cho số phức z thỏa mãn $|iz - 2i + 1| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$. Tính $M + m$.

- A. $2\sqrt{5}$. B. 2. C. 6. D. $1 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $|iz - 2i + 1| = 1 \Leftrightarrow |z - 2 - i| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - 2 + i| = 1 \Leftrightarrow |(\bar{z} + 1 + i) - 3| = 1$ (1).

Đặt $w = \bar{z} + 1 + i$, từ (1) ta được $|w - 3| = 1$ (2).

Gọi $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbf{R}$), khi đó (2) trở thành $(x-3)^2 + y^2 = 1$.

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3; 0)$, bán kính $R = 1$.

Khi đó: $M = |w|_{\max} = OI + R = 4$ và $m = |w|_{\min} = |OI - R| = 2$.

Kết luận: $M + m = 6$.

Câu 82. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$, $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$.

- A. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M_1, M_2 lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức z_1, z_2 .

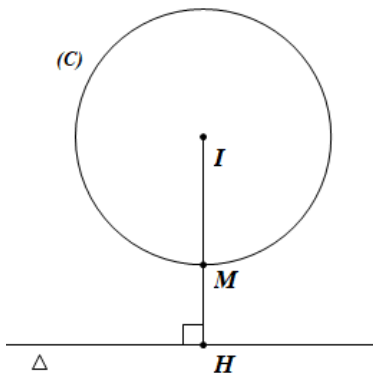
Ta có

M_1 thuộc đường tròn $(C): (x+5)^2 + y^2 = 25$.

M_2 thuộc đường thẳng $\Delta: 8x + 6y - 35 = 0$.

$M_1 M_2 = |z_1 - z_2|$.

□ (C) và Δ không có điểm chung vì $d(I, \Delta) = \frac{15}{2} > 5 = R$.



Dựa vào hình minh họa, ta suy ra $|z_1 - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi chỉ khi $M_1 \equiv M$ và $M_2 \equiv H$.

Do đó, $|z_1 - z_2|_{\min} = MH = d(I, \Delta) - R = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$.

Câu 83. Cho $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, thỏa $|z_1 - 2 - 5i| = 3$, $|z_2 + 1 + 2i| = |z_2 + i|$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1 - z_2 + 1 - 3i|$ là

- A.** $\frac{7\sqrt{2}-6}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{2}+6}{2}$. **C.** $\frac{7\sqrt{2}+6}{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{2}-6}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + 1 - 3i$.

Gọi N là điểm biểu diễn của số phức z_2 .

Như vậy $P = |z_1 - z_2 + 1 - 3i| = |(z_1 + 1 - 3i) - z_2| = |w - z_2| = MN$.

Theo giả thiết $|z_1 - 2 - 5i| = 3 \Leftrightarrow |(z_1 + 1 - 3i) - 3 - 2i| = 3 \Leftrightarrow |w - 3 - 2i| = 3$.

Do đó tập hợp các điểm M là đường tròn tâm $I(3; 2), R = 3$.

Giả sử $z_2 = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$, có

$$|z_2 + 1 + 2i| = |z_2 + i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow x + y + 2 = 0.$$

Do đó tập hợp các điểm N là đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$.

Để giá trị biểu thức P nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN = d(I; \Delta) - R = \frac{7\sqrt{2}}{2} - 3 = \frac{7\sqrt{2}-6}{2}$.

b Dạng 04: Min-Max liên quan đến quỹ tích là đường elip

Câu 84. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2| + |z+2| = 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M + m$.

- A. $M + m = 1$. B. $M + m = 4$. C. $M + m = \frac{17}{2}$. D. $M + m = 8$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$, $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$ biểu diễn cho số phức $z, -2, 2$.

Ta có $MF_1 + MF_2 = 5 \Rightarrow M$ chạy trên Elip có trục lớn $2a = 5$, trục nhỏ $2b = 2\sqrt{\frac{25}{4} - 4} = 3$.

Mà $|z| = OM$. Do đó giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $M = \frac{5}{2}$; $m = \frac{3}{2}$.

Suy ra $M + m = 4$.

Câu 85. Gọi S là tập hợp các số phức thỏa $|z - 3| + |z + 3| = 10$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S có mô đun nhỏ nhất. Giá trị biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2$ là

- A. -16 . B. 32 . C. -32 . D. 16 .

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z , $F_1(3; 0)$ và $F_2(-3; 0)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức $3 + 0i$ và $-3 + 0i$.

Ta có $|z - 3| + |z + 3| = 10 \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 10$.

Vậy tập hợp điểm M là (E) có phương trình: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Khi đó z_1, z_2 là hai số phức có mô đun nhỏ nhất khi z_1, z_2 có điểm biểu diễn là hai đỉnh của (E) nằm trên trục tung, suy ra $z_1 = 0 + 4i$; $z_2 = 0 - 4i$.

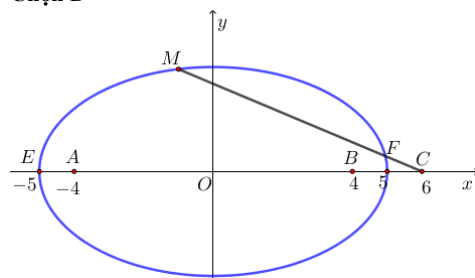
Vậy ta có $P = z_1^2 + z_2^2 = -16 + (-16) = -32$.

Câu 86. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z + 4| + |z - 4| = 10$ và $|z - 6|$ lớn nhất. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 11$. B. $S = -3$. C. $S = 5$. D. $S = -5$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $A(-4; 0)$, $B(4; 0)$, $C(6; 0)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1 = -4$, $z_2 = 4$, $z_3 = 6$.

Khi đó ta có $|z + 4| + |z - 4| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10$ suy ra tập hợp điểm M là (E) nhận A, B là các tiêu điểm, độ dài trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$, tiêu cự $2c = 8 \Rightarrow c = 4$, $b = 3$

$\Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của $|z - 6| = MC$, khi đó $MC_{\max} = EF + FC = 11$, khi đó $M \equiv E$ với $E(-5; 0)$, $F(5; 0) \Rightarrow z = -5$. Vậy $S = a + b = -5$.

Câu 87. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| + |z + 2 - i| = 8$. Giá trị nhỏ nhất m của $|2z + 1 + 2i|$ là

A. $m = \sqrt{39}$.

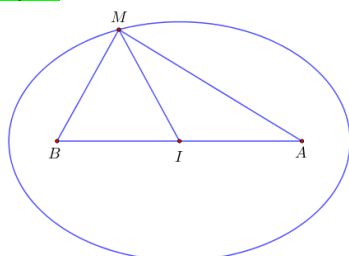
B. $m = 9$.

C. $m = 8$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $A(1; -3)$, $B(-2; 1)$, $AB = 5$.

$|z - 1 + 3i| + |z + 2 - i| = 8 \Leftrightarrow AM + BM = 8$, tập hợp điểm M là Elip có phương trình

$$\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{39} = 1. \text{ Đặt } P = |2z + 1 + 2i| \Leftrightarrow P = 2 \left| z + \frac{1}{2} + i \right|, \text{ gọi } I \text{ là trung điểm } AB \text{ thì } I\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$$

$$\Rightarrow P = 2 \left| z + \frac{1}{2} + i \right| = 2IM = IM.$$

Ta tìm điểm M trên (E) sao cho IM có độ dài nhỏ nhất.

$$IM \text{ nhỏ nhất khi } IM \text{ bằng độ dài nửa trục bé, } IM = \frac{\sqrt{39}}{2} \Rightarrow P_{\min} = \sqrt{39}.$$

Câu 88. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của z . Tính $M + m$.

A. 4.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, ta có điểm biểu diễn số phức là $N(x; y)$.

Đặt $F_1(-2; 0)$; $F_2(2; 0)$ ta có $F_1F_2 = 4 = 2c \Rightarrow c = 2$

$$\text{Mặt khác } |z - 2| + |z + 2| = 5 \Rightarrow NF_1 + NF_2 = 5 = 2a \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 5$ là Elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với

$$\text{tiêu điểm là } F_1(-2; 0); F_2(2; 0) \text{ và } a = \frac{5}{2}, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } M = a = \frac{5}{2}; m = b = \frac{3}{2}. \text{ Từ đó } M + m = 4.$$

1D	2C	3A	4D	5B	6B	7C	8A	9A	10C	11D	12C	13D	14B	15A
16B	17C	18A	19B	20D	21C	22A	23A	24B	25B	26A	27C	28D	29B	30A
31B	32C	33D	34A	35B	36D	37C	38C	39B	40D	41A	42D	43A	44C	45B
46B	47C	48A	49D	50C	51A	52D	53B	54C	55A	56D	57B	58C	59A	60B
61D	62A	63C	64B	65A	66D	67B	68C	69A	70A	71B	72C	73D	74A	75C
76B	77D	78A	79A	80B	81C	82D	83A	84B	85C	86D	87A	88A		