

Chương 6 :

Hướng dẫn giải bài tập

1.4.1.

Chứng minh $\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C \geq \frac{(\cot A + \cot B + \cot C)^3}{9}$
và $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

1.4.2.

Xét hàm $f(x) = \sin \frac{x}{4}$ với $x \in (0; \pi)$

Chứng minh $f''(x) < 0$ và $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Cuối cùng sử dụng **Jensen**.

1.4.3.

Ta đã có : $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

và theo **AM – GM** thì : $(\sin A + \sin B + \sin C) \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \geq 9$

1.4.4

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$3 - (\cos A + \cos B + \cos C) + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

1.4.5.

Chứng minh $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2 \sin A \sin B \sin C}$

và $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$

1.4.6.

Đề ý $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} > 0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$8 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \geq 8 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \geq 8 \sin A \sin B \sin C$$

Tiếp theo dùng **AM – GM** để chứng minh tiếp.

1.4.7.

Đặt $x = \tan \frac{A}{2}$; $y = \tan \frac{B}{2}$; $z = \tan \frac{C}{2} \Rightarrow xy + yz + zx = 1$

Theo **BCS** thì : $3(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) \geq (xy + yz + zx)^2$

$$\Rightarrow x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 \geq \frac{1}{3} \quad (1)$$

Theo **AM – GM** thì :

$$\frac{xy + yz + zx}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}xyz \leq 1 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra : $1 + x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 \geq \frac{4}{3}$ và theo (2) có $\frac{4}{3} \geq 4\sqrt{3}xyz$

Dẫn đến :

$$1 + x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 \geq 4\sqrt{3}xyz$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) \geq 8\sqrt{3}xyz$$

$$\Leftrightarrow (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) + (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) \geq 8\sqrt{3}xyz$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{(1 - x^2)}{(1 + x^2)} \cdot \frac{(1 - y^2)}{(1 + y^2)} \cdot \frac{(1 - z^2)}{(1 + z^2)} \geq \sqrt{3} \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{2y}{1 + y^2} \cdot \frac{2z}{1 + z^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos A \cos B \cos C \geq \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

1.4.8.

Theo **AM – GM** chứng minh được :

$$4 \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) \geq 3 \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{3}{p} \right)$$

$$\text{và } 3\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{3}{p}\right) \geq \frac{4\sqrt[3]{3}}{S} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

1.4.9. & 1.4.10.

$$\text{Ta có : } (2m_a)^2 + (a\sqrt{3})^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow am_a \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{am_a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{m_a} \geq \frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2 + b^2 + c^2} & (1) \\ \frac{m_a}{a} \geq \frac{2\sqrt{3}m_a^2}{a^2 + b^2 + c^2} & (2) \end{cases}$$

Tương tự (1):

$$\begin{aligned} \frac{b}{m_b} &\geq \frac{2\sqrt{3}b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \frac{c}{m_c} &\geq \frac{2\sqrt{3}c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned} \Rightarrow \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$$

Tương tự (2):

$$\begin{aligned} \frac{m_b}{b} &\geq \frac{2\sqrt{3}m_b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \frac{m_c}{c} &\geq \frac{2\sqrt{3}m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned} \Rightarrow \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

1.4.11.

$$\text{Chứng minh : } m_a l_a = \frac{(p-a)(2b^2 + 2c^2 - a^2)bc}{(b+c)^2}$$

$$\text{và } (2b^2 + 2c^2 - a^2)bc \geq \frac{(b+c)^4 - a^2(b+c)^2}{4}$$

$$\Rightarrow m_a l_a \geq p(p-a)$$

Tương tự cho $m_b l_b$ và $m_c l_c$ rồi cộng các bất đẳng thức lại $\Rightarrow$ đpcm.

1.4.12.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } m_a < \frac{b+c}{2} &\Rightarrow \frac{1}{a^2 m_a} > \frac{1}{\frac{b+c}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{a^2 m_a} + \frac{1}{b^2 m_b} + \frac{1}{c^2 m_c} > \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} + \frac{a+b}{2}} \geq \frac{3}{abc} \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

1.4.13.

$$\text{Theo AM - GM thì : } (p-a)(p-b) \leq \frac{c^2}{4} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

1.4.14.

$$\text{Chứng minh : } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r} \text{ rồi dùng AM - GM.}$$

1.4.15.

Xét hàm $f(x) = \sin x \forall x \in (0; \pi)$ có $f''(x) < 0$

$$\text{Áp dụng Jensen thì : } \sin \frac{A+3B}{4} \geq \frac{\sin A + 3 \sin B}{4}$$

$$\text{Áp dụng AM - GM thì : } \frac{\sin A + 3 \sin B}{4} \geq \sqrt[4]{\sin A \sin^3 B}$$

Từ đó suy ra đpcm.

2.6.1.

$$\text{Chú ý } (\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^2 \geq 0 \text{ với O là tâm đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC.$$

2.6.2.

$$\text{Chú ý } (2\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geq 0$$

2.6.3.

$$\text{Chú ý } ((\sqrt{5}+1)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})^2 \geq 0$$

2.6.4.

Giả sử $A \geq \frac{2\pi}{3}$

Chứng minh : $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \tan \frac{A}{2} + 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right)$

Xét $f(A) = \tan \frac{A}{2} + 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \right)$

Dễ thấy : $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right)$

mà $2 \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow f(A) \geq f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 - \sqrt{3}$

2.6.5.

Dễ thấy :

$$\frac{1}{4r^2} = \frac{4p^2}{16S^2} = \frac{(a+b-c) + (b+c-a) + (c+a-b)}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} = \frac{1}{c^2 - (a-b)^2} + \frac{1}{a^2 - (b-c)^2} + \frac{1}{b^2 - (c-a)^2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

2.6.6.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b) \geq 0$$

2.6.7.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$$

2.6.8.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

2.6.9

Chứng minh $f(x) = \tan x$ tăng trên $\left(0; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} a \geq b \geq c \\ \tan \frac{A}{2} \geq \tan \frac{B}{2} \geq \tan \frac{C}{2} \end{cases}$

Tiếp theo sử dụng **Chebyshev** $\Rightarrow$ đpcm.

2.6.10.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

2.6.11.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 9abc$$

2.6.12.

Ta có : $m_a^2 = R^2(1 + 2\cos A \cos(B - C) + \cos^2 A) \leq R^2(1 + 2\cos A + \cos^2 A)$

$$\Rightarrow m_a \leq R(1 + \cos A)$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \leq 3R + R(\cos A + \cos B + \cos C) = 4R + r$$

2.6.13.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

2.6.14.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x^2 + 2x(y \cos 2C + z \cos 2B) + 2yz \cos 2A + y^2 + z^2 \geq 0$$

với $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$

Xét $\Delta' \Rightarrow \text{đpcm.}$

2.6.15.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\tan A \tan B \tan C \geq \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \tan \frac{B+C}{2} + \tan \frac{C+A}{2} + \tan \frac{A+B}{2} \quad (*)$$

Xét $f(x) = \tan x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Theo **Jensen** thì : $\tan \frac{A+B}{2} \leq \frac{\tan A + \tan B}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Chứng minh các bất đẳng thức sau rồi xét khi dấu bằng xảy ra :

$$3.3.1. \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{3}{4}$$

$$3.3.2. \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C$$

$$3.3.3. \frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin 2C} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \tan A \tan B \tan C$$

$$3.3.4. \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} \right)^2 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}$$

$$3.3.5. \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a + b + c} \leq \frac{1}{2}$$

$$3.3.6. m_a m_b m_c \geq abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$3.3.7. l_a l_b l_c \leq abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$3.3.8. bc \cot \frac{A}{2} + ca \cot \frac{B}{2} + ab \cot \frac{C}{2} \geq 12S$$

$$3.3.9. \left(1 + \frac{1}{\sin A} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin B} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin C} \right) \geq 5 + \frac{26\sqrt{3}}{9}$$

$$3.3.10. \frac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$$