

CHUYÊN ĐỀ 2. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC. NHỊ THỨC NEWTON
BÀI 3. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC.

Môn học/Hoạt động giáo dục: TOÁN 10.

Thời gian thực hiện: 2 tiết.

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức: Các bước chứng minh tính đúng đắn của một mệnh đề toán học bằng phương pháp quy nạp.

2. Năng lực: Chứng minh được tính đúng đắn của một mệnh đề toán học bằng phương pháp quy nạp.

3. Phẩm chất

- Chăm học, chăm chỉ đọc sách giáo khoa, tài liệu và thực hiện các nhiệm vụ cá nhân nhằm lĩnh hội các kiến thức trong bài phương pháp quy nạp.
- Trách nhiệm nêu các câu hỏi về vấn đề chưa hiểu.
- Có ý thức hỗ trợ, hợp tác với các thành viên trong nhóm để hoàn thành nhiệm vụ.
- Tích cực phát biểu, xây dựng bài và tham gia các hoạt động nhóm.
- Có ý thức tôn trọng ý kiến của các thành viên trong nhóm khi hợp tác

II. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU

- KHBD, SGK.
- Máy chiếu, máy tính.
- Phiếu học tập.

III. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

1. HOẠT ĐỘNG 1: MỞ ĐẦU

1. HOẠT ĐỘNG 1: MỞ ĐẦU

a) Mục tiêu:

- Biết phối hợp hoạt động nhóm
- Tạo hứng thú vào bài mới

b) Nội dung: GV hướng dẫn, tổ chức học sinh tìm tòi các quy luật của bài toán quy nạp.

H1- Thầy giáo kiểm tra bài cũ lớp 11G (có 30 học sinh), thầy gọi theo sổ điểm lần lượt 5 bạn: Hoa, Nam, Lan, Hùng, Minh. Cả 5 bạn ấy đều học bài. Thầy kết luận: “Cả lớp 11G học bài”. Thầy kết luận như vậy có hợp lý không? Nếu không thì làm thế nào để có kết luận đúng?

H2- Xét mệnh đề chứa biến $P(n)$: " $2^n > n$ " với $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Với $n = 1, 2, 3, 4$ thì $P(n)$ đúng hay sai?

2) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $P(n)$ đúng hay sai?

c) Sản phẩm:

Câu trả lời của HS

Kết quả 1:

Thầy kết luận như vậy là chưa hợp lý vì có thể các bạn từ số thứ tự 6 đến số thứ tự 35 chưa chắc đều học bài.

Để thu được kết luận đúng, thầy cần kiểm tra cả lớp (bằng cách kiểm tra 15 phút chẳng hạn).

Kết quả 2:

Với $n = 1$: $2^1 > 1$ Đúng

$n = 2$: $2^2 > 2$ Đúng

$n = 3$: $2^3 > 3$ Đúng

$n = 4$: $2^4 > 4$ Đúng

Với $n = 5$ thì mệnh đề $P(n)$ đúng hay sai? Vậy với n là số nguyên dương thì mệnh đề $P(n)$ đúng hay sai? **Ta có $Q(5)$ đúng và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $Q(n)$ cũng đúng.**

d) Tổ chức thực hiện:

*) **Chuyển giao nhiệm vụ** : GV giao câu hỏi cho từng nhóm hoàn thành trước ở nhà, làm thành file trình chiếu, cử đại diện thuyết trình.

*) **Thực hiện**: HS chia nhóm học tập phân công thực hiện.

*) **Báo cáo, thảo luận**:

- GV gọi lần lượt 3 nhóm học sinh (bốc thăm), mỗi nhóm cử đại diện lên bảng trình bày câu trả lời của mình.

- Các nhóm học sinh khác nhận xét, bổ sung để hoàn thiện câu trả lời.

*) **Đánh giá, nhận xét, tổng hợp**:

- GV đánh giá thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tổng hợp kết quả.

- Dẫn dắt vào bài mới.

2. HOẠT ĐỘNG 2: HÌNH THÀNH KIẾN THỨC MỚI

I. Phương pháp quy nạp toán học

a) **Mục tiêu**: Phát biểu và giải thích được các bước để chứng minh mệnh đề liên quan đến số tự nhiên n luôn đúng mà không thể kiểm tra trực tiếp được.

b) **Nội dung**:

Bài toán 1: Xét hai mệnh đề $P(n): "3^n < n+100"$ và $Q(n): "2^n > n"$

a) Với $n = 1, 2, 3, 4, 5$ thì $P(n); Q(n)$ đúng hay sai?

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $P(n); Q(n)$ đúng hay sai ?

1. Phương pháp quy nạp toán học (Phương pháp quy nạp)

Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên $n = k \geq 1$. (Giả thiết quy nạp)

Bước 3: Chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Bước 4: Kết luận mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

c) **Sản phẩm**:

Bài toán 1.

a) Với mệnh đề $P(n): "3^n < n+100"$

Với $n = 1: 3^1 < 1+100$ Đúng; $n = 2: 3^2 < 2+100$ Đúng

$n = 3: 3^3 < 3+100$ Đúng; $n = 4: 3^4 < 4+100$ Đúng

$n = 5: 3^5 < 5+100$ mệnh đề sai

Với mệnh đề $Q(n): "2^n > n"$

Với $n = 1: 2^1 > 1$ Đúng; $n = 2: 2^2 > 2$ Đúng

$n = 3: 2^3 > 3$ Đúng; $n = 4: 2^4 > 4$ Đúng

$n = 5: 2^5 > 5$ là mệnh đề đúng

b) vì với $n = 5$ thì $P(n)$ sai nên $P(n)$ không đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$

vì với $n = 5$ thì $Q(n)$ nên chưa kết luận được $Q(n)$ đúng hay sai $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

GV: Vậy làm thế nào để biết $Q(n)$ đúng hay sai $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta kiểm tra tiếp với các giá trị khác của n ta vẫn thấy đúng nhưng ta không thể kiểm tra $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên ta làm như sau:

Giả sử $Q(n)$ đúng $n = k \geq 5$ tức là $2^k > k$ đúng $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \geq 5$

Xét mệnh đề $Q(n)$ với $n = k + 1: 2^{k+1} > k + 1$ có $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k > k + 1$ vì $\begin{cases} 2^k > k \\ 2^k > 1 \end{cases}$ đúng.

Vậy ta có thể kết luận $Q(n): "2^n > n"$ đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Cách chứng minh trên ta gọi là quy nạp toán học hay phương pháp quy nạp (hay suy luận quy nạp)

HS: Phát biểu các bước quy nạp.

d) Tổ chức thực hiện
HĐTP1.

Chuyển giao	Trình chiếu nội dung câu hỏi 1, chia lớp thành 4 nhóm HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ, phân công các thành viên trong nhóm
Thực hiện	GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút HS: Đọc yêu cầu, trình bày nội dung câu trả lời trên bảng phụ
Báo cáo thảo luận	Nhóm 1 đại diện báo cáo sản phẩm, các nhóm còn lại kiểm tra chéo theo sơ đồ 1-2-3-4.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm ; đặt vấn đề chứng minh mệnh đề $Q(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Hướng dẫn học sinh thực hiện. Cho học sinh phát biểu nội dung phương pháp quy nạp

II. Các ví dụ áp dụng

a) Mục tiêu: Biết thực hiện các bước quy nạp, rèn kỹ năng biến đổi biểu thức toán học, phát triển tư duy logic, khả năng sáng tạo, linh hoạt.

b) Nội dung:

VD1: Cho hai số 3^n và $8n$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) So sánh hai số đó với $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Dự đoán kết quả tổng quát và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ ($p \in \mathbb{N}$) thì:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$, chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$

VD2: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ (*)

VD3: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $A_n = n^3 - n$ (*) chia hết cho 3.

c) Sản phẩm:

Ví dụ 1.

HS: a) Với $n = 1, 2$ thấy $3^n > 8n$ là mệnh đề sai

Với $n = 3, 4, 5$. thấy $3^n > 8n$ là mệnh đề đúng

Suy đoán mệnh đề $3^n > 8n$ đúng với $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^*$

GV: Hướng dẫn

CM: $3^n > 8n$ với $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^*$ (*)

* Với $n = 3$ ta có $27 > 24$

Vậy (*) đúng với $n = 3$.

* Giả sử (*) đúng với $n = k$ ($k \geq 3$), tức là $3^k > 8k$

Ta CM với $n = k + 1$ thì (*) cũng đúng, nghĩa là $3^{k+1} > 8(k + 1)$

Có VT $= 3^{k+1} = 3^k \cdot 3 = 2 \cdot 3^k + 3^k > 8k + 8 = 8(k + 1)$ vì $\begin{cases} 3^k > 8k \\ 3^k > 8 \end{cases} \forall k \geq 3; k \in \mathbb{N}^*$

Do đó (*) đúng với $n = k + 1$.

Vậy (*) đúng với mọi $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2

* Với $n = 1$ thì VT = 1 = VP

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$.

* Giả sử (*) đúng khi $n = k$ ($k \geq 1$), tức là $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ đúng

Ta CM với $n = k + 1$ thì (*) cũng đúng, nghĩa là $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$

Ta có

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+[2(k+1)-1]$$

$$=k^2+[2(k+1)-1]=k^2+2k+1$$

$$=(k+1)^2$$

Do đó (*) đúng với $n = k + 1$.

Vậy (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 3

* Với $n = 1$ ta có $A_1 = 0 : 3$

Vậy (*) đúng với $n = 1$.

* Giả sử (*) đúng với $n = k (k \geq 1)$, tức là $A_k = (k^3 - k) : 3$

Ta CM với $n = k + 1$ thì (*) cũng đúng, nghĩa là $A_{k+1} = [(k+1)^3 - (k+1)] : 3$

Thật vậy, ta có

$$A_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$$

$$= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) = A_k + 3(k^2 + k)$$

Theo giả thiết, $A_k = (k^3 - k) : 3$ và $3(k^2 + k) : 3$ nên $A_{k+1} : 3$

Do đó (*) đúng với $n = k + 1$.

Vậy (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Tổ chức thực hiện

HĐTP1:

Chuyển giao	Trình chiếu nội dung ví dụ 1, học sinh quan sát và đọc hiểu câu hỏi và trả lời
Thực hiện	HS thảo luận cá nhân 2 phút
Báo cáo thảo luận	Đại diện học sinh trả lời kết quả câu a và dự đoán ở câu b
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của cả lớp ; vấn đáp tại chỗ, hướng dẫn học sinh thực hiện các bước quy nạp, phát biểu chú ý. Yêu cầu học sinh thực hiện hoạt động thành phần 2

HĐTP2

Chuyển giao	GV : trình chiếu nội dung ví dụ 2 và ví dụ 3, chia lớp thành 4 nhóm, nhóm 1,3 là ví dụ 2 ; nhóm 2,4 làm ví dụ 3 HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ
Thực hiện	GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút HS: Hoàn thành yêu cầu vào bảng phụ
Báo cáo thảo luận	Đại diện nhóm 1,2 báo cáo kết quả nhóm 3,4 kiểm tra chéo sản phẩm của nhau
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm và củng cố bài dạy

3. HOẠT ĐỘNG 3: LUYỆN TẬP

a) **Mục tiêu:** HS biết áp dụng các kiến thức về phương pháp quy nạp toán học vào các bài tập cụ thể trong sách giáo khoa và các bài tập trắc nghiệm cụ thể.

b) **Nội dung:**

PHIẾU HỌC TẬP 1

TU LUẬN

Câu 1. Chứng minh với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $2+5+8+\dots+3n-1=\frac{n(3n+1)}{2}$.

b) n^3+11n chia hết cho 6.

Câu 2. Cho tổng $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$

a) Tính S_1, S_2, S_3 .

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng qui nạp.

TRẮC NGHIỆM

Câu 3. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n\geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng:

A. $n=p$. **B.** $n=1$. **C.** $n>p$. **D.** $n\geq p$.

Câu 4. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến đúng với mọi số tự nhiên (là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề đúng với . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k>p$. **B.** $k\geq p$. **C.** $k=p$. **D.** $k<p$.

Câu 5. Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n\geq p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- Bước 1, kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n=p$.
- Bước 2, giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n=k\geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

Trong hai bước trên:

A. Chỉ có bước 1 đúng. **B.** Chỉ có bước 2 đúng.

C. Cả hai bước đều đúng. **D.** Cả hai bước đều sai.

Câu 6. Cho $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3=\frac{1}{12}$. **B.** $S_2=\frac{2}{3}$. **C.** $S_2=\frac{1}{6}$. **D.** $S_3=\frac{1}{4}$.

Câu 7. Cho $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{n-1}{n}$. **B.** $S_n=\frac{n}{n+1}$. **C.** $S_n=\frac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{n+3}$.

Câu 8. Cho $S_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\dots+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{n}{2n+1}$. **B.** $S_n=\frac{n-1}{2n-1}$. **C.** $S_n=\frac{n}{3n-2}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{2n+5}$.

Câu 9. Cho $P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ với $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\frac{n+1}{n+2}$. **B.** $P=\frac{n-1}{2n}$. **C.** $P=\frac{n+1}{n}$. **D.** $P=\frac{n+1}{2n}$.

Câu 10. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. **B.** $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

C. $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$. **D.** $2^2+4^2+6^2+\dots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) **Sản phẩm:** Học sinh thể hiện trên bảng nhóm kết quả bài làm của mình.

ĐÁP ÁN TỰ LUẬN

Câu 1.

a) + Với $n=1$ thì VT = 2 = VP. Vậy hệ thức đúng với $n=1$.

+ Giả sử (a) đúng khi $n=k(k \geq 1)$, tức là $2+5+8+\dots+3k-1=\frac{k(3k+1)}{2}$ đúng.

Ta CM với $n=k+1$ thì (a) cũng đúng, nghĩa là $2+5+8+\dots+3(k+1)-1=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$

Ta có: $2+5+8+\dots+3(k+1)-1$

$$= 2+5+8+\dots+(3k-1)+(3k+2) = \frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2) = \frac{3k^2+7k+4}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

Do đó (a) đúng với $n=k+1$.

Vậy (a) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Đặt $P(n) = n^3 + 11n$.

- Khi $n=1$, ta có $P(1)=12:6$. Suy ra mệnh đề đúng với $n=1$.

- Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k \geq 1$, tức là: $P(k) = k^3 + 11k : 6$.

- Ta cần chứng minh mệnh đề đúng khi $n=k+1$, tức là chứng minh: $P(k+1) = (k+1)^3 + 11(k+1) : 6$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = k^3 + 3k^2 + 14k + 12 = (k^3 + 11k) + 3(k^2 + k) + 12 \\ &= P(k) + 3k(k+1) + 12 \end{aligned}$$

Mà $P(k):6$, $3k(k+1):6$ (do k và $k+1$ là 2 số tự nhiên liên tiếp nên $k(k+1):2$) và $12:6$ nên $P(k+1):6$

$\Rightarrow$ Mệnh đề đúng khi $n=k+1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học ta có mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 2.

a) HS tính S_1, S_2, S_3 .

b) CM: $S_n = \frac{n}{n+1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ (*).

* Với $n=1$ thì VT = $\frac{1}{2}$ = VP.

Vậy hệ thức đúng với $n=1$.

* Giả sử (*) đúng khi $n=k(k \geq 1)$, tức là $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ đúng.

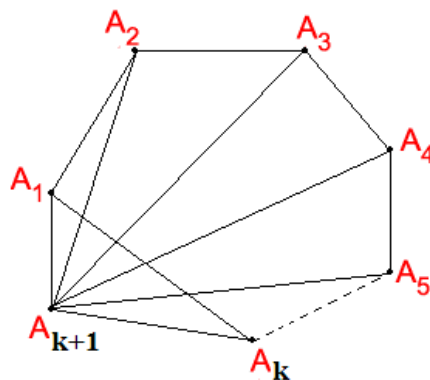
Ta CM với $n=k+1$ thì (*) cũng đúng, nghĩa là: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Do đó (*) đúng với $n=k+1$. Vậy (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Tổ chức thực hiện

Chuyển giao	GV: Chia lớp thành 4 nhóm. Phát phiếu học tập 1 HS: Nhận nhiệm vụ,
Thực hiện	GV: Điều hành, quan sát, hỗ trợ. HS: 4 nhóm tự phân công nhóm trưởng, hợp tác thảo luận thực hiện nhiệm vụ. Ghi kết quả vào bảng nhóm.



Thật vậy. Khi ta vẽ thêm đỉnh A_{k+1} thì cạnh $A_k A_1$ bây giờ trở thành đường chéo. Ngoài ra từ đỉnh A_{k+1} ta kẻ được tới $k-2$ đỉnh còn lại để có thể tạo thành đường chéo. Nên số đường chéo mới tạo thành khi ta thêm đỉnh A_{k+1} là $k-2+1=k-1$.

$$\text{Vậy ta có } C_{k+1} = C_k + k - 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

c) **Sản phẩm:** Sản phẩm trình bày của 4 nhóm học sinh.

d) **Tổ chức thực hiện**

Chuyển giao	GV: Chia lớp thành 4 nhóm. Phát phiếu học tập 2. HS: Nhận nhiệm vụ.
Thực hiện	Các nhóm HS thực hiện tìm tòi, nghiên cứu và làm bài ở nhà.
Báo cáo thảo luận	HS cử đại diện nhóm trình bày sản phẩm vào tiết sau. Các nhóm khác theo dõi, nhận xét, đưa ra ý kiến phản biện để làm rõ hơn các vấn đề.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của các nhóm học sinh, ghi nhận và tuyên dương nhóm học sinh có câu trả lời tốt nhất. - Chốt kiến thức tổng thể trong bài học. - Hướng dẫn HS về nhà tự xây dựng tổng quan kiến thức đã học bằng sơ đồ tư duy.