

Phân dạng
32
CHỦ ĐỀ
QUAN TRỌNG

LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

MÔN **TOÁN**

TỔNG QUAN CẤU TRÚC

Với mỗi chủ đề, các em sẽ được ôn lại kiến thức nền tảng phục vụ cho từng dạng bài toán khác nhau. Hướng dẫn sử dụng máy tính Casio cho các bài tập tự luyện.

Sau mỗi chủ đề là hệ thống các bài tập tự luyện từ cơ bản đến nâng cao giúp các em học sinh tăng tốc độ làm bài sau mỗi phần kiến thức.

A KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khái niệm

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền D là M nếu với mọi giá trị $x_0 \in D$ thì $f(x_0) \leq M$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền D là m nếu với mọi giá trị $x_0 \in D$ thì $f(x_0) \geq m$.

Quy ước: GTLN, GTNN là viết tắt của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

2. Quy tắc tìm GTLN, GTNN

Bước 1: Tìm các giá trị biên trên miền D (là các giá trị làm cho $f'(x) = 0$ và các cận của D).

Bước 2: Tính giá trị của $f(x)$ tại các điểm xét hạn.

Bước 3: So sánh các giá trị này để tìm GTLN, GTNN.

3. Tìm GTLN, GTNN bằng máy tính Casio

Sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start và End là và nhập $\frac{b-a}{n}$ với $D = [a, b]$.

Quan sát bảng giá trị $F(x)$ để tìm GTLN, GTNN xuất hiện trên màn hình máy tính.

C BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Toán Vinh, 2017)
Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2x - 1$ trên đoạn $[-1, 2]$ lần lượt là M và m . Khi đó, giá trị của $M + m$ là
A. -2 B. 0
C. -20 D. Một số lớn hơn 00

Câu 2 (Hàng Hải Phòng, 2017)
Hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ đạt giá trị lớn nhất tại x_1 . Tích $x_1 x_2$ bằng
A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

Câu 3 (Chuyên Toán Vinh, 2017)
Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + 3 + \frac{1}{x+2}$ trên khoảng $[-4, -2)$.
A. $\max y = 5$ B. $\max y = 6$
C. $\max y = 4$ D. $\max y = 7$

Câu 4 (Chuyên Toán Vinh, 2017)
Hàm số $f(x) = x + \sqrt{x-1}$ có tập giá trị là
A. $[-1, 1]$ B. $[\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$ C. $[\frac{1}{2}, 1]$ D. $[-1, \sqrt{2}]$

Câu 5 (Chuyên Toán Vinh, 2017)
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ bằng
A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. 3 D. 1

Câu 6 (Hàng Hải Phòng, 2017)
Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{x-1}$ trên đoạn $[1, 2]$.
A. $\min y = 2$ B. $\min y = x$
C. $\min y = \frac{5}{2}$ D. $\min y = x$

D BẢNG ĐÁP ÁN

1B	2B	3B	4B	5C	6B	7C	8C	9C	10B
11B	12A	13D	14D	15A	16A	17D	18C	19B	20C
21A	22A	23D	24D	25D	26C	27C	28D	29C	30C
31B	32D	33B	34C	35D	36C	37A	38D	39A	40C
41B	42A	43D	44C	45C	46C	47D	48C	49A	50B

Ví dụ cụ thể bám sát phần lý thuyết. Đặc biệt, mỗi ví dụ đều có phần phân tích, bình luận, ghi chú giúp các em nhận biết nhanh, hiểu rõ từng dạng bài và ghi nhớ kiến thức quan trọng.

Bảng đáp án ở cuối mỗi chủ đề sẽ giúp các em tự kiểm tra và đánh giá khả năng rèn luyện của bản thân.

CHỦ ĐỀ 1: Bí quyết tìm GTLN, GTNN của hàm số

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khái niệm

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền D là M nếu với mọi giá trị $x_0 \in D$ thì $f(x_0) \leq M$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền D là m nếu với mọi giá $x_0 \in D$ thì $f(x_0) \geq m$.

Quy ước: GTLN, GTNN là viết tắt của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

2. Quy tắc tìm GTLN, GTNN

Bước 1: Tìm các giá trị tới hạn trên miền D (là các giá trị làm cho $f'(x) = 0$ và các cận của D)

Bước 2: Tính giá trị của $f(x)$ tại các điểm tới hạn.

Bước 3: So sánh các giá trị này để tìm GTLN, GTNN.

3. Tìm GTLN, GTNN bằng máy tính Casio

Sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start a End b và Step $\frac{b-a}{19}$ với $D = [a; b]$

Quan sát bảng giá trị $F(x)$ để tìm GTLN, GTNN xuất hiện trên màn hình máy tính.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 (Chuyên HN Amsterdam):

Gọi các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất $y = x^4 - 2x^2 - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt tại M và m . Khi đó giá trị $M.m$ là:

A. -2

B. 46

C. -23

D. 48

Giải

Cách 1: Tự luận

$$\text{Tính } y' = 4x^3 - 4x \text{ và } y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vì nghiệm $0 \in [-1; 2]$ nên nghiệm 0 nhận. Tính $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(2) = 23$

Ta có: $M = \max\{f(-1); f(0); f(2)\} = 23$ và

$m = \min\{f(-1); f(0); f(2)\} = -1$

Vậy $M.m = -23$

=> **Chọn C**

Cách 2: Casio và Vinacal

- Sử dụng tính năng MODE 7 cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ với thiết lập Start -1 End 2 và Step $\frac{3}{19}$

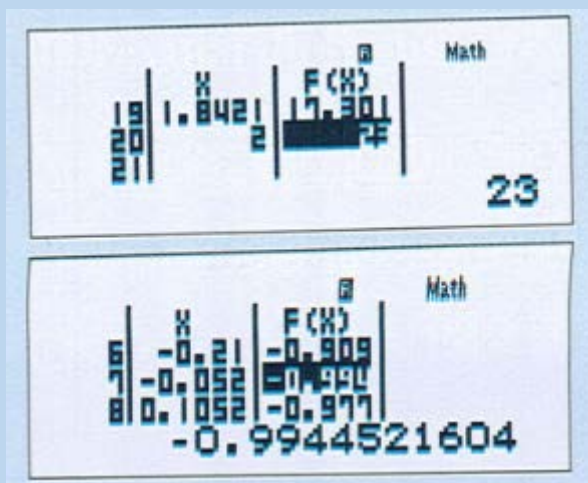


Quan sát bảng giá trị ta thấy GTLN là 23 đạt được khi $x = 2$ và GTNN ≈ -1 đạt được khi $x \approx -0.052$. Vậy $M.m \approx -23$

=> **Chọn C**

Phân tích

2 cách trên đều rất tuyệt vời. Khi học ở nhà thì nên chọn cách 1 để rèn luyện kiến thức nhưng khi đi thi thì nên chọn cách số 2 để tính nhanh.



Ví dụ 2 (Chuyên Khoa học tự nhiên HN)

Hàm số $f(x) = x \sqrt{1-x^2}$ có tập giá trị là:

A. $[-1;1]$

B. $[1;\sqrt{2}]$

C. $[0;1]$

D. $[-1;\sqrt{2}]$

Giải

Cách 1: Tự luận

- Tìm tập xác định: $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Tính $y' = 1 - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\text{và } y' = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^2} - x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 = x^4 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vì nghiệm $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1;1]$ nên cả 2 nghiệm $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ đều nhận.

Tính $f(-1) = -1, f(1) = 1, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $\max\left\{f(-1); f(1); f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} = 1$ và $\min\left\{f(-1); f(1); f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} = -1$

Vậy $-1 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow$ Tập giá trị của $f(x)$ là $[-1;1]$

$\Rightarrow$ Chọn D

Cách 2: Casio và Vinacal

- Sử dụng tính năng MODE 7 cho hàm số $f(x) = x \sqrt{1-x^2}$ với thiết lập Start -1 End 1 Step $\frac{2}{19}$



Quan sát bảng giá trị ta thấy GTLN là $\approx 1.41 \approx \sqrt{2}$ đạt được khi $x \approx 0.68$ và GTNN = -1 đạt được khi $x = -1$. Vậy $-1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$

=> **Chọn D**

Phân tích

Tập giá trị của hàm số thường được kí hiệu là chữ P là tập hợp tất cả các giá trị của y khi x thay đổi.
 Vậy $y_{\min} \leq P \leq P_{\max}$

Bình luận

Việc tìm được điều kiện của $x \in [-1; 1]$ là điều rất quan trọng trong bài toán tìm GTLN, GTNN

x	f(x)
-1	-1
-0.894	-0.448
-0.789	-0.175
0.5789	1.3943
0.6842	1.4032
0.7894	1.4032
	1.413495077

Ví dụ 3 (Chuyên Sư phạm HN)

Tìm GTLN của hàm số $f(x) = \sin x - \cos 2x$ trên $[0; \pi]$

A. $\max_{[0; \pi]} = \frac{5}{4}$

B. $\max_{[0; \pi]} = 1$

C. $\max_{[0; \pi]} = 2$

D. $\max_{[0; \pi]} = \frac{9}{8}$

Giải

Cách 1: Tự luận

Việc tính đạo hàm và xét dấu đạo hàm của hàm lượng giác $\sin x, \cos 2x$ là việc làm khó khăn. Vì vậy để đơn giản ta tiến hành đặt ẩn phụ. Đặt $t = \sin x$, khi đó $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2t^2$. Tiến hành đổi cận $x \in [0; \pi] \rightarrow t \in [0; 1]$

- Thay vào hàm ta được: $f(t) = 1 + t - 2t^2$ trên miền $[0; 1]$.

Tính $y' = 1 - 4t$ và $y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$

Vì nghiệm $\frac{1}{4} \in [0; 1]$ nên nghiệm này thỏa mãn.

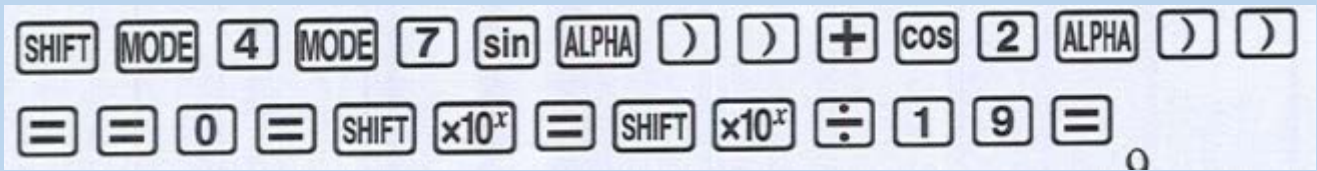
$f(0) = 1, f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}, f(1) = 0$

Vậy GTLN của f đạt được là $\frac{9}{8}$ và dấu = xảy ra khi $x = \frac{1}{4}$

=> **Chọn D**

Cách 2: Casio và Vinacal

Sử dụng tính năng MODE 7 cho hàm $f(x) = \sin x - \cos 2x$ với thiết lập Start 0 End π Step $\frac{\pi}{19}$



Quan sát bảng giá trị ta thấy GTLN là $\approx 1.1138 \approx \frac{9}{8}$ đạt được khi $x \approx 0.33$

=> Chọn D

Phân tích

Khi tìm GTLN, GTNN của hàm lượng giác ta phải chuyển máy tính về chế độ Radian



Khi tiến hành đổi biến ta phải đổi cả miền giá trị của biến bằng cách khảo sát hàm $t = f(x) = \sin x$ với chức năng MODE 7



Ta thấy rõ ràng $t = \sin x$ có giá trị xuất phát từ 0 tăng lên 1 rồi lại giảm về 0 $\Rightarrow t \in [0;1]$

The image shows four screenshots of a calculator screen displaying the MODE 7 table of values for the function $f(x) = \sin(x) - \cos(2x)$. The table has columns for X and F(X). The first screenshot shows the first three rows of the table. The second screenshot shows the next three rows. The third screenshot shows the next three rows. The fourth screenshot shows the last three rows of the table.

	X	F(X)
2	0.1653	1.1104
3	0.3306	1.1138
4	0.496	1.0228
1.113839979		
18	2.8108	0.3246
19	2.9762	0.1645
20	3.1415	0
10	1.4881	0.9965
11	1.6534	0.9965
12	1.8188	0.9694
0.996584493		
1	0	0
2	0.1653	0.1645
3	0.3306	0.3246
0		

Bình luận

Việc làm này là cần thiết bởi nếu đổi cận thông thường

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow t = \sin 0 = 0 \\ x=\pi \rightarrow t = \sin \pi = 0 \end{cases}$$

Sẽ không tìm được miền giá trị chính xác của ẩn phụ. Đây cũng là cái hay của bài toán này.

Ví dụ 4 (Chuyên Lê Hồng Phong)

Tìm tất cả các giá trị của m để GTNN của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0

A. $m = 4$

B. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$

C. $m = 6$

D. $m = 0$

Giải

Cách 1: Tự luận

- Tính $y' = 3x^2 - 6x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Vì nghiệm $x = 0 \in [-1;1]$ nên ta nhận nghiệm $x = 0$

- Xét $y' \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$ và $y' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$. Ta thấy qua nghiệm $x = 0$ dấu của y' đổi từ dương

qua âm nên $x = 0$ là cực đại của hàm số $f(0)$ là GTLN của hàm số trên khoảng $[-1;1]$

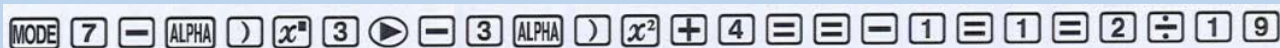
Vậy GTNN của hàm số trên $[-1;1]$ là $f(-1) = -2 + m$ hoặc $f(1) = -4 + m$. Vì $-4 + m$ luôn nhỏ hơn $-2 + m$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số phải là $-4 + m$

Ta cho $-4 + m = 0$ sẽ tìm được $m = 4$

=> Chọn A

Cách 2

Thử lần lượt các giá trị ở đáp án rồi tìm GTNN tương ứng. Đáp án nào cho GTNN là 0 thì đáp án đó đúng và ta tìm được khi $m = 4$ thì GTNN là 0 thỏa mãn.



=> Chọn A

Phân tích

Nếu ta làm 2 trường hợp

$$\begin{cases} -2 + m = 0 \\ -4 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$$

thì chọn D thì là sai. Cái tinh tế của bài toán này là việc so sánh $-4 + m$ luôn nhỏ hơn $-2 + m$



Ví dụ 5 (Thukhoa.edu.vn): Hàm số $y = |x^3 - 2x^2 - x - 2|$ có giá trị lớn nhất trên $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ bằng:

A. 0

B. 1

C. 3

D. 2

=> Chọn D

Ví dụ 6 (THPT Vân Canh): Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là:

A. 2 và $\frac{11}{3}$

B. $2\sqrt{2}$ và 3

C. 2 và 3

D. $2\sqrt{2}$ và $\frac{11}{3}$

=> Chọn D

Ví dụ 7 (THPT Tam Quan):

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2; 2]$ là:

A. $\min y = -e$ khi $x = -1$; $\max y = e^2$ khi $x = 2$

B. $\min y = -3$ khi $x = 0$; $\max y = 3e$ khi $x = 2$

C. $\min y = -2e$ khi $x = -1$; $\max y = e^2$ khi $x = 2$

D. $\min y = -2e$ khi $x = -1$; $\max y = 3$ khi $x = 0$

=> Chọn C

Ví dụ 8 (THPT Nguyễn Du):

Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $y \leq 0, x^2 + x = y + 12$. GTLN và GTNN của biểu thức $K = xy - 2y - 4$ lần lượt bằng:

A. 10; -6

B. 5; -3

C. 20; -12

D. 8; -5

=> Chọn C

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Amsterdam - 2018):

Gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là M và m . Khi đó, giá trị $M.m$ là:

A. -2

B. 46

C. -23

D. Một số lớn hơn 46

Câu 2 (PTDTNT THCS&THPT An Lão - 2018):

Hàm số $y = 4\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x + x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại x_1, x_2 . Tích $x_1 x_2$ bằng:

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

Câu 3 (Chuyên Hạ Long - 2018):

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4; -2)$

A. $\max y = 5$
 $[-4; -2)$

B. $\max y = 6$
 $[-4; -2)$

C. $\max y = 4$
 $[-4; -2)$

D. $\max y = 7$
 $[-4; -2)$

Câu 4 (Chuyên KHTN - 2018):

Hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ có tập giá trị là

- A. $[-1;1]$ B. $[1;\sqrt{2}]$ C. $[0;1]$ D. $[-1;\sqrt{2}]$

Câu 5 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018):

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$

- A. $\max y = 11$ B. $\max y = 6$ C. $\max y = 15$ D. $\max y = 10$
 $[-1;2]$ $[-1;2]$ $[-1;2]$ $[-1;2]$

Câu 6 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018):

Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0

- A. $m = 4$ B. $m = 2$ C. $m = 6$ D. $m = 0$

Câu 7 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018):

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ trên đoạn $[-1;3]$

- A. $\max y = 2\sqrt{3}$ B. $\max y = 2\sqrt{2}$ C. $\max y = 2$ D. $\max y = 3\sqrt{2}$
 $[-1;3]$ $[-1;3]$ $[-1;3]$ $[-1;3]$

Câu 8 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018):

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ trên đoạn $[1;5]$ lần lượt là

- A. 2 và 0 B. 4 và 0 C. 3 và 0 D. 0 và -2

Câu 9 (Chuyên Thái Bình - 2018):

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. 3 D. 11

Câu 10 (THPT Hà Trung - 2018):

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x.e^x$ trên đoạn $[1;2]$

- A. $\max y = 2e^2$ B. $\max y = e^2$ C. $\max y = \frac{e}{2}$ D. $\max y = e$
 $x \in [1;2]$ $x \in [1;2]$ $x \in [1;2]$ $x \in [1;2]$

Câu 11 (THPT Lục Ngạn Số 1 - 2018):

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- A. -1 B. 1 C. 3 D. 7

Câu 12 (THPT Lục Ngạn Số 1 - 2018):

Hàm số $y = |3x^3 - 4x - 1|$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ bằng

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 13 (THPT Lý Tự Trọng):

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^3 x - \frac{9}{2}\cos^2 x + 3\cos x + \frac{1}{2}$ là:

- A. 1 B. -24 C. -12 D. -9

Câu 14 (THPT Minh Hà):

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2-6x}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$.

Tính $M^2 + m^2$

A. 20

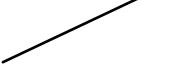
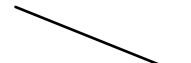
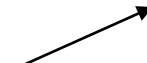
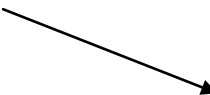
B. 36

C. 4

D. 16

Câu 15 (PTDTNT Vân Canh):

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$			2			1		
									$-\infty$
							2		

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $M(0;1)$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số

B. $x_0 = -1$ được gọi là điểm cực đại của hàm số

C. $f(\pm 1) = 2$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số

D. $f(1) = 2$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số

Câu 16 (THPT Công nghiệp):

Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^2 - x - 1$$

A. $\min P = -5$

B. $\min P = 5$

C. $\min P = \frac{7}{3}$

D. $\min P = \frac{115}{3}$

Câu 17 (THPT Nghĩa Hưng C):

Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

A. $\sqrt{2}$

B. 0

C. 2

D. 1

Câu 18 (THPT Tam Quan):

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = e^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

A. $\min y = -e$ khi $x=1$; $\max y = e^2$ khi $x=2$
 $[-2; 2]$ $[-2; 2]$

B. $\min y = -3$ khi $x=0$; $\max y = 3e$ khi $x=2$
 $[-2; 2]$ $[-2; 2]$

C. $\min y = -2e$ khi $x=1$; $\max y = e^2$ khi $x=2$
 $[-2; 2]$ $[-2; 2]$

D. $\min y = -2e$ khi $x=1$; $\max y = 3$ khi $x=0$
 $[-2; 2]$ $[-2; 2]$

Câu 19 (THPT Trần Quang Diệu):

Hàm số $y = \cos 2x - 2\cos x + 2$ có giá trị nhỏ nhất là:

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. -1

Câu 20 (THPT Yên Lạc):

Cho hàm số: $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$. GTLN của hàm số bằng

- A. 1 B. $\frac{2}{11}$ C. 2 D. 4

Câu 21 (THPT Tiên Du):

Tìm m để hàm số $y = \frac{mx - 4}{x + m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên $[-2; 6]$

- A. $m = 26$ B. $m = \frac{4}{5}$
C. $m = 34$ D. $m = \frac{6}{7}$

Câu 22 (THPT Triệu Sơn):

Tìm m để hàm số $y = \frac{mx}{x^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$

- A. $m < 0$ B. $m = 2$
C. $m > 0$ D. $m = -2$

Câu 23 (THPT Kim Liên):

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - e^{2x}$ trên đoạn $[0; 1]$.

- A. $\max_{[0;1]} y = 2e$ B. $\max_{[0;1]} y = e^2 - 1$
C. $\max_{[0;1]} y = e^2$ D. $\max_{[0;1]} y = 1$

Câu 24 (Chuyên KHTN):

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x} - 2x^2}{\sqrt{x} + 1}$. Khi đó giá trị của $M - m$ là

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

Câu 25 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh):

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- A. $m = \min_D f(x)$ nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$
B. $m = \min_D f(x)$ nếu $f(x) > m$ với mọi x thuộc D
C. $M = \max_D f(x)$ thì $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$

D. Nếu $M = \max_D f(x)$ thì $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D

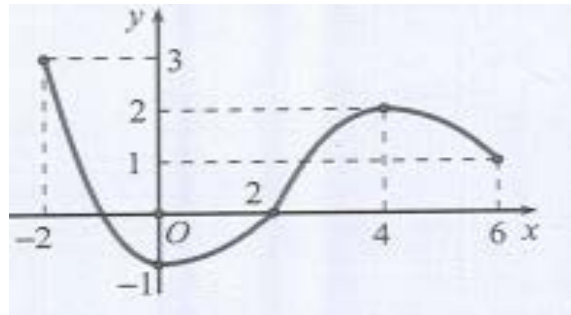
Câu 26 (Chuyên Lương Văn Chánh):

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của m để bất phương trình $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x \geq m$ luôn thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$

- A. -3 B. -1 C. 0 D. 1

Câu 27 (THPT Quốc học Huế):

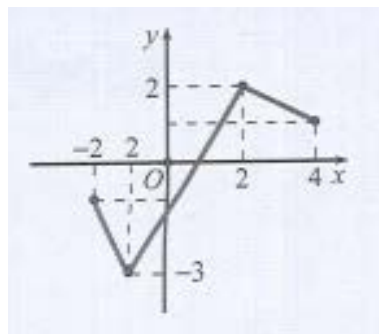
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



- A. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-2)$ B. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(2)$
 C. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(6)$ D. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-1)$

Câu 28 (THPT Quốc học Huế).

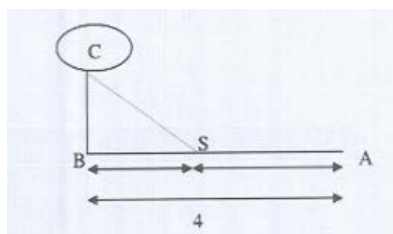
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-2; 4]$ như hình vẽ. Tìm $\max_{[-2; 4]} |f(x)|$



- A. 2 B. $|f(0)|$ C. 3 D. 1

Câu 29 (PTDTNT An Lão):

Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km. Khoảng cách từ B đến A là 4km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất?



A. $\frac{15}{4}$ km

B. $\frac{13}{4}$ km

C. $\frac{10}{4}$ km

D. $\frac{19}{4}$ km

Câu 30 (GV Phạm Kim Chung):

Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cánh tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân đó được cho bởi công thức $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4}$ ($0 \leq t \leq 24$). Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân là lớn nhất?

A. 12 giờ

B. 8 giờ

C. 6 giờ

D. 2 giờ

Câu 31 (THPT Lạc Hồng):

Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quảng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (phút), hàm số đó là $s = 6t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

A. $t = 6s$

B. $t = 4s$

C. $t = 2s$

D. $t = 3s$

Câu 32 (THPT Lục Ngạn 3):

Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó $x > 0$ (miligam) là liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng

A. 20mg

B. 30mg

C. 15mg

D. Đáp án khác

Câu 33 (PTDTNT Vân Canh):

Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 200km. Vận tốc của dòng nước là $8km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong 1 giờ được cho bởi công thức: $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun). Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A. 12km/h

B. 9km/h

C. 6km/h

D. 15km/h

Câu 34 (THPT Nguyễn Du):

Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $y \leq 0, x^2 + x = y + 12$. GTLN và GTNN của biểu thức $K = xy - 2y - 47$ lần lượt bằng:

A. 10; -6

B. 5; -3

C. 20; -12

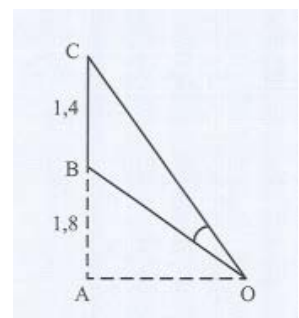
D. 8; -5

Câu 35 (THPT Nguyễn Trường Tộ):

Một màn ảnh chữ nhật cao 1,4 mét được đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó? ($\angle BOC$ gọi là **góc nhìn**.)

A. $AO = 2,4m$

B. $AO = 2m$



C. $AO = 2,6m$

D. $AO = 3m$

Câu 36 (THPT Phú Cát 2):

Một người thợ xây cần xây một bể chứa $108m^3$ nước có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông và không có nắp. Hỏi chiều dài, chiều rộng và chiều cao của lòng bể bằng bao nhiêu để số viên gạch dùng xây bể là ít nhất? Biết thành bể và đáy bể đều được xây bằng gạch, độ dày thành bể và đáy bể là như nhau, các viên gạch có kích thước như nhau và số viên gạch trên một đơn vị diện tích là bằng nhau.

A. 4m, 3m, 9m

B. 6m, 6m, 3m

C. 9m, 6m, 2m

D. 12m, 3m, 3m

Câu 37 (THPT Yên Lạc):

Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

A. 2.225.000

B. 2.100.000

C. 2.200.000

D. 2.250.000

Câu 38 (Sở GD-ĐT Tp HCM):

Công ty X muốn thiết kế các hộp chứa sản phẩm dạng hình trụ có nắp với dung tích bằng $100(cm^3)$, bán kính đáy $x(cm)$, chiều cao $h(cm)$ (xem hình bên). Khi thiết kế, công ty X luôn đặt mục tiêu sao cho vật liệu làm vỏ hộp là ít nhất, nghĩa là diện tích toàn phần hình trụ là nhỏ nhất. Khi đó, kích thước của x và h gần bằng số nào nhất trong các số dưới đây để công ty X tiết kiệm được vật liệu nhất?

A. $h \approx 6,476(cm)$ và $x \approx 2,217(cm)$

B. $h \approx 4,128(cm)$ và $x \approx 2,747(cm)$

C. $h \approx 5,031(cm)$ và $x \approx 2,515(cm)$

D. $h \approx 3,261(cm)$ và $x \approx 3,124(cm)$

Câu 39 (THPT Vĩnh Thanh):

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

A. $\max y = 1$

B. $\max y = 2$

C. $\max y = -1$

D. $\max y = \frac{3}{2}$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1C	2D	3D	4D	5C	6A	7B	8A	9A	10D
11B	12A	13D	14A	15C	16C	17A	18C	19C	20C
21C	22C	23B	24D	25B	26B	27C	28C	29B	30D
31B	32A	33A	34C	35A	36B	37D	38C	39A	

CHỦ ĐỀ 2: BÍ QUYẾT TÌM KHOẢNG ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khái niệm

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên miền D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$ và ngược lại.

2. Điều kiện để hàm số đồng biến, nghịch biến

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow y' > 0$ và nghịch biến $\Leftrightarrow y' < 0$

Chú ý : Hàm phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ bị vi phạm ở lân cận vậy điều kiện chỉ còn : $\begin{cases} y' > 0 \\ y' < 0 \end{cases}$

3. Dấu của tam thức bậc 2

Cho tam thức bậc 2 : $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Nếu $\Delta \leq 0$ thì dấu của tam thức luôn cùng dấu với a . Nếu $\Delta > 0$ thì dấu của tam thức tuân theo quy luật “trong trái ngoài cùng” có nghĩa là trong khoảng 2 nghiệm ($x_1; x_2$) thì dấu của tam thức cùng dấu với a và ngược lại.

4. Các bước tìm tham số m để hàm số đồng biến nghịch biến trên một miền

Bước 1 : Tính đạo hàm y' , thiết lập bất phương trình đạo hàm $y' \geq 0$ nếu hàm số đồng biến và $y' \leq 0$ nếu hàm số nghịch biến.

Bước 2 : Cô lập m và bất phương trình đạo hàm về 1 trong 2 dạng : $m \geq g(x)$ hoặc $m \leq g(x)$

Bước 3 : Biện luận nếu $m \geq g(x)$ trên miền D có nghĩa là $m \geq g(\max)$ trên miền D .

$m \leq g(x)$ có nghĩa là $m \leq g(\min)$ trên miền D .

5. Tìm khoảng đồng biến nghịch biến bằng Casio

Ta sử dụng chức năng   để xét dấu của đạo hàm y' .

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: (THPT Chuyên Thái Bình) Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ B. $\log_{\frac{1}{2}} x$ C. $\log_{\frac{\pi}{4}} (2x^2 + 1)$ D. $\left(\frac{2}{e}\right)^x$

Giải

Mẹo giải nhanh

Hàm số lũy thừa $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$. Xét cơ số $\frac{\pi}{3} \approx 1.047 > 1 \Rightarrow A$ sai.

Tiếp tục xét: $\frac{2}{e} \approx 0.3757 < 1$ thỏa mãn $0 < \frac{2}{e} < 1$

$\Rightarrow$ Chọn D

Mở rộng

Với đáp số B ta có tập xác định của hàm $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ là $(0; +\infty)$ nên không thể nghịch biến hay đồng biến

trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Đáp số B sai

Với đáp án C có tập xác định là $\mathbb{R}$ tuy nhiên khi xét đạo hàm:

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(2x^2+1)\ln\frac{\pi}{4}} \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \Rightarrow x \in (0; +\infty) \text{ không thỏa mãn } x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Đáp số C sai

Bình luận

Chỉ với việc xét hàm lũy thừa và 2 đáp án A, D đã tìm được đáp số nên việc xét đáp số B, C là không cần thiết vì đáp số chỉ có một.

Ví dụ 2: (Báo Toán Học Tuổi Trẻ) Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định khi giá trị của m là :

A. $m \leq 1$

B. $m \geq 3$

C. $-1 \leq m \leq 3$

D. $m < 3$

Giải

Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc 2

Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên bài toán được hiểu rằng tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

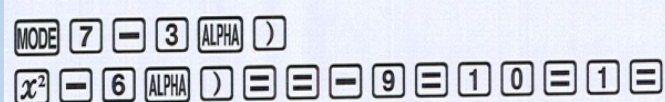
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \Leftrightarrow 9 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$$

$\Rightarrow$ Chọn B

Tự luận kết Casio và Vinacal

Xét $3x^2 + 6x + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3x^2 - 6x = g(x)$. Ta hiểu $m \geq g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ có nghĩa là $m \geq g(\max)$.

Thiết lập: Start t - 9 End 10 Step 1



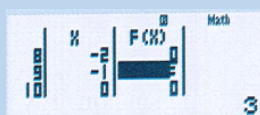
Ta thu được giá trị lớn nhất là 3 đạt được khi $x = -1 \Rightarrow m \geq 3$

$\Rightarrow$ Chọn B.

Bình luận

Với $x \in \mathbb{R}$ thì ta thường chọn Start -9 End 10 Step 1 hoặc Start -4 End 5 Step 0.5

So sánh 2 cách làm thì ta thấy tương đương nếu xét trong ví dụ này, tuy nhiên ví dụ cho hàm $f(x)$ càng phức tạp và y' không tính được Δ thì cách kết hợp tỏ ra có ưu thế hơn.



Ví dụ 3: (THPT Sơn Tây) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq 0$

B. $m < 0$

C. $m \leq 2$

D. $m \geq 1$

Giải

Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc 2

$$\text{Tính } y' = mx^2 - 2mx + 2m - 1$$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx + 2m - 1 < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta y' \leq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m(2m - 1) \leq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - m^2 \leq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \Leftrightarrow m < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hoặc trường hợp 2 : $m = 0$ và $y' \leq 0$. Xét $m = 0$ thì $y' = -1 < 0$ là đúng $\Rightarrow m = 0$ (2) thỏa mãn.

Kết hợp (1) và (2)

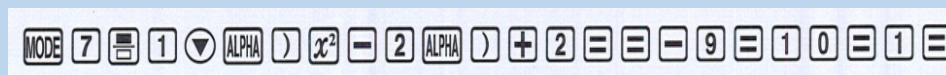
$\Rightarrow$ **Chọn A**

Tự luận kết Casio và Vinacal

Xét $y' \leq 0 \Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 2) \leq 1$ (3). Vì đại lượng $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ luôn > 0 nên khi chia cả 2 vế của bất phương trình cho đại lượng $x^2 - 2x + 2$ thì dấu của bất phương trình không đổi chiều.

Bất phương trình (3) $\Leftrightarrow m \leq \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \Rightarrow m \leq g(\min)$. Để tìm max của $g(x)$ ta lại sử dụng chức năng

MODE 7 với Start-9 End 10 Step 1



Ta thu được GTNN là $\approx 0,03 \approx 0 \Rightarrow m \leq 0 \Rightarrow$ **Chọn A**

Bình luận

Theo cách giải tự luận các bạn thường bỏ quên trường hợp số 2 khi $m = 0$ thì hàm bậc 3 với đồ thị là đường cong suy biến thành hàm bậc nhất $y = -x - 2$ có đồ thị là đường thẳng. Đường thẳng này có hệ số góc $a = -1 < 0$ cho nên hàm $y = -x - 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.



Ví dụ 4: (Đề minh họa BGD-ĐT) Tìm m sao cho $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$

B. $m < 2$

C. $1 \leq m \leq 2$

D. $m \geq 2$

Giải

Đạo hàm liên quan đến $\tan x$ rất khó xử lý nên ta sẽ tiến hành đặt ẩn phụ $y = \tan x$ để đưa hàm lượng giác phức tạp ban đầu về hàm $y = \frac{t - 2}{t - m}$ đơn giản hơn. Tuy nhiên khi đặt ẩn phụ ta cũng phải đổi cận:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = \tan 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow t \in (0; 1)$$

Tính $y' = \frac{-m+2}{(t-m)^2}$. Để hàm số đồng biến thì $y' > 0 \Leftrightarrow -m+2 > 0 \Leftrightarrow m < 2$ (1)

Xét điều kiện của hàm số là $t \neq 1$. Vậy để hàm đồng biến trên cả khoảng $(0;1)$ thì giá trị vô định $m \notin (0;1)$ (2).

Kết hợp (1) và (2) ta được $\begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 2 \\ m \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Chọn A.

Bình luận

Vấn đề khó nhất của bài này là việc phải cho giá trị vô định $x = m$ không được thuộc miền đang xét $(0;1)$. Phần lớn học sinh mắc phải sai lầm này và thường làm đến (1) thì dừng lại và chọn đáp án là B

Ví dụ 5: (Đề thi THPT QG) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$

đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 5

B. 3

C. 0

D. 4

Giải

$y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$. Để hàm số đồng biến thì $y' \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + \frac{1}{x^6} + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \frac{1}{x^6} = g(x)$

Ta hiểu $y' \geq g(x)$ với mọi giá trị x thuộc khoảng $(0; +\infty)$ có nghĩa là $y \geq g(\max)$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Để tính $g(\max)$ ta sử dụng MODE 7 với Start 0 End 9 Step 0.5



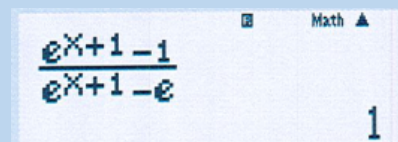
Quan sát bảng giá trị ta thấy $g(\max) = -4$ khi $x = 1 \Rightarrow m \geq -4$.

Vì m nguyên âm nên $m = -4; -3; -2; -1 \Rightarrow$ có 4 giá trị m thỏa mãn.

$\Rightarrow$ Chọn D

Bình luận

Vì hàm $g(x)$ phức tạp nên ta ưu tiên sử dụng phương pháp Casio Vinacal là chính. Khi x tiến tới $+\infty$ thì ta thường chọn End là 9 hoặc 19 thì bước nhảy Step sẽ đẹp.



Ví dụ 6: (Chuyên KHTN HN) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m - 6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-5; -2)$ là :

A. $m \leq -9$

B. $m \geq 1$

C. $(-\infty; -9]$

D. $[-9; -6]$

$\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 7: (THPT Việt Đức HN) Tìm m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6(m - 2)x + 3$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3

A. $m > 6$

B. $m \in (0;6)$

C. $m < 0$

D. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 6 \end{cases}$

=> Chọn D

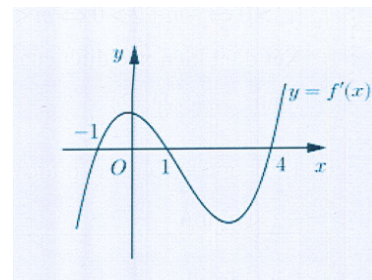
Ví dụ 8: (Đề minh họa BGD-ĐT) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(1;3)$

B. $(2; +\infty)$

C. $(-2;1)$

D. $(-\infty; -2)$



=> Chọn C

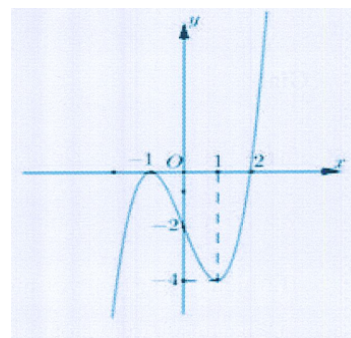
Ví dụ 9: (Chuyên Thái Bình 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$, mệnh đề nào sau đây sai.

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$



=> Chọn C

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

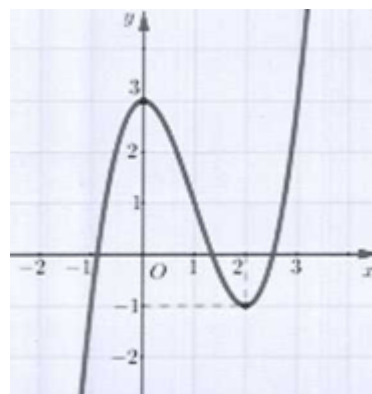
Câu 1 (Chuyên Amsterdam - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$

C. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 2

D. $\min_{x \in [0;4]} f(x) = -1$,



Câu 2 (Chuyên Lê Quý Đôn - 2018). Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ đồng biến trên mỗi khoảng:

A. $(-1;3)$ và $(3; +\infty)$

B. $(-\infty; -1)$ và $(1;3)$

C. $(-\infty;3)$ và $(3; +\infty)$

D. $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$

Câu 3 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hàm số $y = \sin x - \cos x + \sqrt{3}x$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$

B. Hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$

C. Hàm số là hàm lẻ

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

Câu 4 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				-3				$+\infty$
			-4			-4			

Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hàm số có hai điểm cực tiểu, một điểm cực đại
- B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -4
- C. Hàm số đồng biến trên (1; 2)
- D. Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng

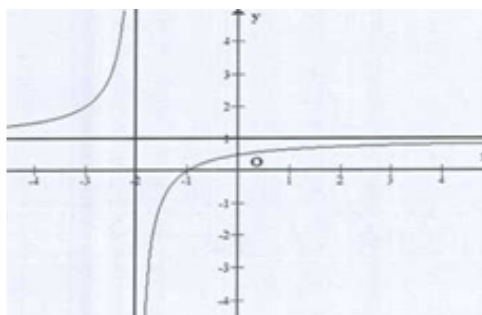
Câu 5 (Chuyên Thái Bình - 2018). Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 7$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. (0;1)
- B. (0; $+\infty$)
- C. (-1;0)
- D. ($-\infty$;0)

Câu 6 (THPT DTNT Bình Định - 2018). Hàm số nào sau đây đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

- A. $y = \frac{x-1}{x-2}$
- B. $y = \frac{x-1}{x+2}$
- C. $y = \frac{2x-1}{x-2}$
- D. $y = \frac{2x+5}{x+2}$

Câu 7 (THPT Hà Trung - 2018). Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = -2$
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2, +\infty)$
- C. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $M(0; -1)$
- D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2, +\infty)$

Câu 8 (THPT Hòa Bình - 2018). Hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 2$ nghịch biến trên mỗi khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$
- B. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$
- C. $(\sqrt{2}; +\infty)$
- D. $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$

Câu 9 (THPT Minh Hà - 2018). Hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \log_2 2016$ đồng biến trên khoảng:

- A. (-2; 2)
- B. (2; $+\infty$)
- C. (0; 2)
- D. (0; $+\infty$)

Câu 10 (PTDTNT Vân Canh - 2018). Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

$$y = \frac{2x+1}{x+1}(I); y = -x^4 + x^2 - 2(II); y = x^3 - 3x - 5(III)$$

A. I và II

B. Chỉ I

C. I và III

D. II và III

Câu 11 (THPT Nghĩa Hưng C - 2018). Hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$

A. luôn luôn đồng biến nếu $|m| > 1$

B. luôn luôn đồng biến với mọi m

C. luôn luôn đồng biến nếu $m \neq 0$

D. đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 12 (THPT Tiên Du - 2018). Cho $f(x) = x^2 e^{-x}$. Phương trình $f'(x) \geq 0$ có tập nghiệm là:

A. $[-2; 2]$

B. $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

C. $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

D. $[0; 2]$

Câu 13 (THPT Việt Đức - 2018). Cho hàm số $y = \sin x - x$. Hàm số này:

A. Đồng biến trên $\mathbb{R}$

B. Đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

C. Chỉ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

D. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 14 (THPT Yên Lạc - 2018). Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $-2 < m < 1$

B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$

C. $-2 \leq m \leq 1$

D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$

Câu 15 (THPT Trần Hưng Đạo - 2018). Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^4 + x^2 + 2017$

B. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2017$

C. $y = \sin x - x$.

D. $y = \cot x$

Câu 16 (THPT Trần Hưng Đạo - 2018). Hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ luôn nghịch biến trên tập xác định với m thỏa mãn:

A. $m < 2$

B. $\frac{1}{2} \leq m \leq 2$

C. $m \geq 2$

D. $m \leq \frac{1}{2}$

Câu 17 (Chuyên Nguyễn Trãi - 2018). Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Với mọi $x_1 > x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

B. Với mọi $x_1; x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

C. Với mọi $x_1; x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

D. Với mọi $x_1 < x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Câu 18 (THPT Đức Thọ - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên tập $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên:

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 8]$ bằng -2

B. Phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi $m > -2$

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 19 (THPT Nguyễn Quang Diệu - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (2m - 1)x - (3m + 2) \cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-3 \leq m \leq -\frac{1}{5}$

B. $-3 < m < -\frac{1}{5}$

C. $m < -3$

D. $m \geq -\frac{1}{5}$

Câu 20 (THPT Cẩm Bình - 2018). Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$ thì hàm số $y = f(x+2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-3; 0)$

B. $(-2; 4)$

C. $(-1; 2)$

D. $(1; 4)$

Câu 21 (THPT Đoàn Thượng - 2018). Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

C. Đồ thị của hàm số luôn có tâm đối xứng

D. Hàm số luôn có cực trị

Câu 22 (Chuyên Lương Văn Chánh - 2018). Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ nhận điểm $A(1; 3)$ làm tâm đối xứng.

A. $m = 3$

B. $m = 5$

C. $m = 2$

D. $m = 4$

Câu 23 (Thi THPTQG - 2018). Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. 5

B. 4

C. Vô số

D. 3

Câu 24 (Sở GD-ĐT Hải Dương - 2018). Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

A. $y = \frac{x+1}{x+2}$

B. $y = \frac{x+3}{2+x}$

C. $y = \frac{x-1}{2x+1}$

D. $y = \frac{x+1}{x-2}$

Câu 25 (Sở GD-ĐT Bình Phước - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị
- B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$
- C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$
- D. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành

Câu 26 (Chuyên Amsterdam - 2018). Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

- A. $m \geq \frac{1}{2}$
- B. $m < \frac{1}{2}$
- C. $m \leq 0$
- D. $m \geq 0$

Câu 27 (Chuyên Hạ Long - 2018). Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$

- A. $m \geq \frac{5}{2}$
- B. $m \leq \frac{5}{2}$
- C. $m \leq \frac{5}{4}$
- D. $m \geq \frac{5}{4}$

Câu 28 (THPT Hàm Rồng - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

- A. $m \leq 0$
- B. $1 \leq m < 2$
- C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$
- D. $m > 2$

Câu 29 (THPT Hòa Bình - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{e^x - m - 2}{e^x - m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln \frac{1}{4}; 0\right)$

- A. $m \in [-1; 2]$
- B. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$
- C. $m \in (1; 2)$
- D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup [1; 2)$

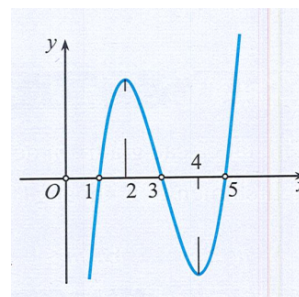
Câu 30 (THPT Kiến An - 2018). Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + 2$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

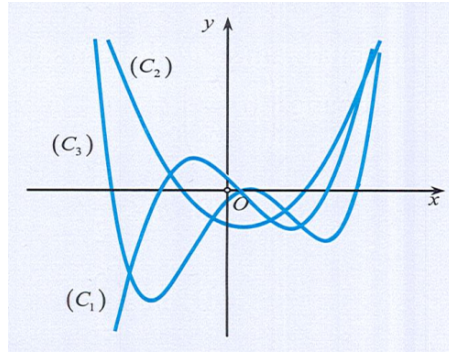
- A. $m \geq 3$
- B. $m \leq 0$
- C. $m \geq 4$

Câu 31 (THPT Lê Lợi - 2018). Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{mx - 4}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $m \in (-\infty; -2)$
- B. $(-2; 0)$
- C. $(2; +\infty)$
- D. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Câu 32 (THPT Chu Văn An - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ lần lượt là các đường cong nào trong hình vẽ bên?





A. $(C_3), (C_1), (C_2)$

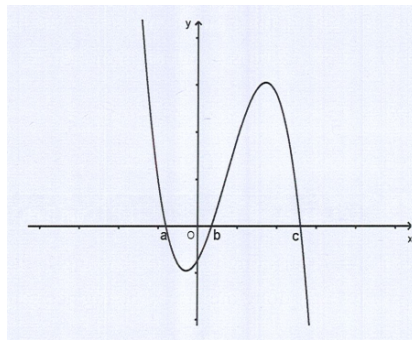
B. $(C_1), (C_2), (C_3)$

C. $(C_3), (C_2), (C_1)$

D. $(C_1), (C_3), (C_2)$

Câu 33 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(c) > f(a) > f(b)$

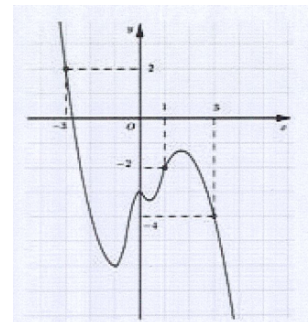
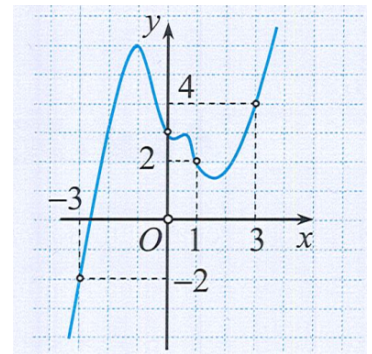
B.

$f(c) > f(b) > f(a)$

C. $f(a) > f(b) > f(c)$

D.

$f(b) > f(a) > f(c)$



Câu 34 (THPT Kiến An - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(3) > g(-3) > g(1)$

B. $g(-3) > g(3) > g(1)$

C. $g(1) > g(-3) > g(3)$

D. $g(1) > g(3) > g(-3)$

Câu 35 (Thi THPTQG - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(1) < g(3) < g(-3)$

B. $g(1) < g(-3) < g(3)$

C. $g(3) = g(-3) < g(1)$

D. $g(3) = g(-3) > g(1)$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1B	2D	3D	4D	5A	6B	7B	8A	9B	10B
11B	12D	13D	14D	15C	16D	17D	18D	19A	20A
21D	22B	23D	24B	25B	26A	27C	28C	29D	30B
31A	32A	33A	34D	35A					

CHỦ ĐỀ 3: BÍ QUYẾT TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Dấu hiệu xuất hiện cực đại, cực tiểu

Hàm số f liên tục trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .

2. Hoành độ điểm cực trị (cực đại và cực tiểu) là nghiệm của phương trình $y' = 0$

3. Lệnh Casio tính đạo hàm

4. Một số khái niệm dễ gây nhầm lẫn

Trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ điểm cực trị có tọa độ là $M(x_0; y_0)$ thì người ta nói: Hàm số đạt cực trị tại x_0 và giá trị cực trị của hàm số là y_0

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 (Chuyên KHTN HN): Cho hàm số $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$. Hàm số đạt cực tiểu tại

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 0$.

D. $x = -2$.

Giải

Cách 1: Tự luận

$$\begin{aligned} \text{Tính } y' &= (x-5)' \cdot \sqrt[3]{x^2} + (x-5) \cdot \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \sqrt[3]{x^2} + (x-5) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{3x+2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow 5(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ \text{Xét } y' &> 0 \Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

Vậy $y'(2) = 0$ và y' đổi dấu từ âm sang dương qua giá trị $x = 2$

$\Rightarrow x = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Cách 2: Casio và Vinacal

Để kiểm tra đáp án A ta đi tính $y'(1)$ và thấy $y'(1) = -1.66(6)$. Ta chỉ quan tâm đến tính chất $y'(1) \neq 0$ nên $x = 1$ không phải là điểm cực tiểu của hàm số.

$\Rightarrow$ Đáp án A sai



Tiếp tục kiểm tra đáp số B ta thấy $y'(2) = 0$.

Điều này có nghĩa là $x = 2$ là điểm cực trị của hàm số. Ta tiếp tục đi xác minh xem $x = 2$ có phải là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số hay không?

Nếu đúng là điểm cực tiểu thì y' phải đổi dấu từ - sang +.

Thật vậy $y'(1.9) < 0$ và $y'(2.1) > 0$ tức là y' đổi dấu từ - sang + qua giá trị $x = 2$.

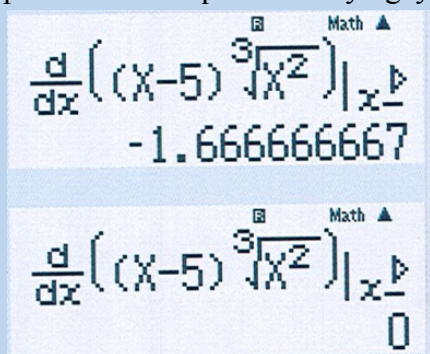
⇒ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

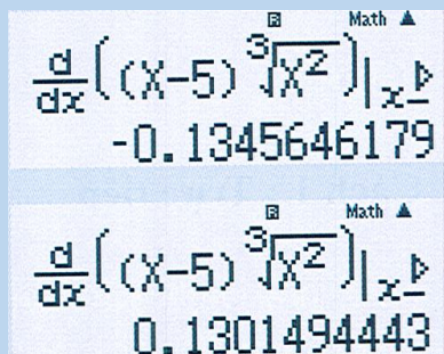
⇒ **Chọn B**

Bình luận

Nếu $x = x_0$ là cực trị của hàm số thì điều kiện cần là $y'(x_0) = 0$ hoặc không xác định
⇒ $y'(-1) = 1.66(6)$ không thỏa mãn tính chất trên ⇒ $x = 1$ không phải là điểm cực trị của hàm số thì đương nhiên không phải là điểm cực tiểu của hàm số.

Để kiểm tra xem y' đổi dấu qua $x = x_0$ như thế nào ta $y'(x_0 - 0.1)$ và $y'(x_0 + 0.1)$ là 2 giá trị bên trái và bên phải của x_0 là quan sát thấy ngay.


$$\frac{d}{dx} \left((x-5) \sqrt[3]{x^2} \right) \Big|_{x=-1} = -1.666666667$$


$$\frac{d}{dx} \left((x-5) \sqrt[3]{x^2} \right) \Big|_{x=1} = -0.1345646179$$

Ví dụ 2 (THPT chuyên Thái Bình): Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - \sqrt{2})x^2(x+2)^2$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Giải

Xét phương trình $y' = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{2})x^2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 = 0 \\ (x+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt[4]{2} \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta thấy $y' = 0$ có 4 nghiệm, tuy nhiên trong đó có 1 nghiệm bậc chẵn là $x = 0$ thì y' không đổi dấu qua nghiệm này.

⇒ y' đổi dấu qua 3 nghiệm bậc lẻ $x = -\sqrt[4]{2}, x = \sqrt[4]{2}, x = -2$ ⇒ Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm.

⇒ **Chọn C**

Bình luận

Ta nhớ “Số điểm cực trị là số nghiệm bậc lẻ của phương trình $y' = 0$ ”

Ví dụ 3 (THPT Anhtan): Gọi $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là hai điểm cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Tính giá trị biểu thức $P = 3x_2 + 2x_1$.

A. $P = -1$.

B. $P = 0$.

C. $P = 1$.

D. $P = 2$.

Giải

$$y' = 4x^3 - 4x$$

Tính và $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

$$y'' = 12x^2 - 4. \quad \begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) = 8 > 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) = 8 > 0 \end{cases}$$

Tính Ta thấy $\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại ± 1 .

$$\text{Vì } x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow P = 3x_2 + 2x_1 = 1$$

$\Rightarrow$ Chọn C

Bình luận

Ta cũng có thể lập trực xét dấu của biểu thức y' và thấy y' đổi dấu từ âm sang dương qua 2 giá trị $x = -1$ và $x = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ là 2 điểm cực tiểu của hàm số.

Ví dụ 4: (THPT chuyên Bắc Ninh): Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có 2 điểm cực trị A và B. Đường thẳng nào dưới đây thuộc đường thẳng AB

- A. $M(1; -10)$ B. $N(-1; 10)$ C. $P(1; 0)$ D. $Q(0; -1)$

Giải

Cách 1: Trực tiếp

Để làm cách trực tiếp này ta sẽ đi tìm 2 điểm cực trị A và B sau đó viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A và B

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 \quad \text{và} \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{cases} \quad \begin{matrix} A(-1; 6) \\ B(3; -26) \end{matrix}$$

Tính Ta thu được 2 điểm cực trị

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}(4; -32)$ là vecto chỉ phương $\Rightarrow$ nhận $\vec{n}(32; 4): (8; 1)$ là vecto pháp tuyến.

$$\text{Vậy phương trình } AB: 8(x - x_A) + 1(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow 8(x + 1) + y - 6 = 0 \Leftrightarrow 8x + y + 2 = 0$$

Ta thấy với điểm $M(1; -10)$ thỏa mãn phương trình $AB \Rightarrow M \in AB \Rightarrow$ **Chọn A.**

Cách 2: Gián tiếp

Ta biết: Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm bậc 3 có dạng $y = g(x)$ với $g(x)$ là phần dư của phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$

$$\text{Tính } f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f(x) = A.f'(x) + g(x) \quad \text{ta được:} \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)f'(x) - 8x - 2$$

$$\Rightarrow \text{phương trình AB: } y = -8x - 2$$

Ta thấy với điểm $M(1; -10)$ thỏa mãn phương trình AB.

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Bình luận

Ta so sánh 2 cách trên thì thấy là tương đương. Tuy nhiên ta chú ý, trong các bài toán viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị mà chứa tham số m thì ta ưu tiên cách thứ 2.

Ví dụ 5 (THPT Đồng Đa): Cho hàm số $y = -x^3 + (2m + 1)x^2 - (m^2 - 1)x - 5$ với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về 2 phía của trục tung.

$$m > 1.$$

$$m = 2.$$

$$-1 < m < 1$$

$$\begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$$

A.

B.

C.

D.

Giải

Cách 1: Tự luận

Gọi x_1, x_2 là 2 cực trị của hàm số. Khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $y' = 0$.

Để phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2(2m+1)x - (m^2 - 1) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\Leftrightarrow \Delta' y' = (2m+1)^2 - (m^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 4m + 2 > 0 \Leftrightarrow \text{đúng với mọi } m$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Để 2 cực trị nằm về 2 phía của trục tung thì 2 cực trị x_1, x_2 trái dấu

$$\Leftrightarrow x_1, x_2 < 0 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1 \Rightarrow \text{Chọn C.}$$

Cách 2: Casio và Vinacal

Thử với giá trị $m = 2$ khi đó $y = -x^3 + 5x^2 - 3x - 5$ và $y' = -3x^2 + 10x - 3$

Ta thu được 2 giá trị $x_1 = 3; x_2 = \frac{1}{3}$ là 2 giá trị cùng dấu tức là 2 cực trị nằm về cùng 1 phía với trục tung.

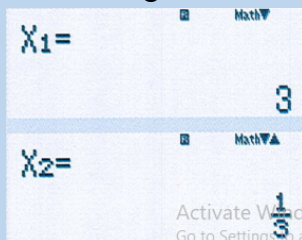
$\Rightarrow m = 2$ sai $\Rightarrow$ Đáp số nào chứa $m = 2$ thì đáp số đó sai $\Rightarrow A, B$ sai.

Thử $m = 0$ thì ta thấy được 2 nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{3}$ trái dấu

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Bình luận

Nếu đề bài hỏi 2 cực trị nằm về 2 phía của trục tung thì x_1, x_2 cùng dấu $\Leftrightarrow x_1, x_2 > 0 \Leftrightarrow P > 0$



Ví dụ 6 (THPT Việt Đức): Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ đối xứng nhau qua đường thẳng nào sau đây:

A. $y = x - 1.$

B. $y = 2x - 1.$

C. $3x - 6y - 13 = 0.$

D. $x - 2y - 3 = 0.$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Ví dụ 7 (Sở GD-DT TP.HCM): Với giá trị $k \in \mathbb{Z}$ nào thì hàm số: $y = kx^3 + (4k - 5)x^2 + 2017$ có 3 cực trị:

A. $k = 1.$

B. $k = 2.$

C. $k = 3.$

D. $k = 4.$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Ví dụ 8 (THPT chuyên Bắc Ninh): Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 1 tam giác vuông cân.

$$m = -\sqrt[3]{3}$$

$$m = -1$$

$$C. \begin{cases} m = -1 \\ m = -\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} m = -\sqrt[3]{3} \\ m = 1 \end{cases}$$

A.

B.

⇒ Chọn B

Ví dụ 9 (Sở GD – ĐT Hưng Yên) : Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành tam giác có diện tích bằng 4?

$$A. m = \sqrt[5]{16}.$$

$$B. m = 16.$$

$$C. m = \sqrt[3]{16}.$$

$$D. m = -\sqrt[3]{16}.$$

⇒ Chọn A

Ví dụ 10 (Chuyên ĐHSP HN) : Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

$$A. \sqrt{2}.$$

$$B. 1.$$

$$C. \sqrt{2} - 1.$$

$$D. \sqrt{2} + 1.$$

⇒ Chọn C.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Amsterdam-2018) . Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		0	3	0		0		$+\infty$

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$

C. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

D. Hàm số đồng biến trên $(0; 3)$

Câu 2 (Chuyên Amsterdam-2018) . Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	$2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 2$	

A. Hàm số có tiệm cận đứng là $y = 1$

B. Hàm số không có cực trị

C. Hàm số có tiệm cận ngang là $x = 2$

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 3 (THPT Số 3 An Nhơn- 2018). Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m-1)x - 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Với mọi $m < 1$ thì hàm số có hai điểm cực trị
- B. Hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu
- C. Với mọi $m \neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu
- D. Với mọi $m > 1$ thì hàm số có cực trị

Câu 4 (Chuyên Hạ Long - 2018). Hàm số nào trong các hàm số sau đây không có cực trị?

- A. $y = |x|$
- B. $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$
- C. $y = x^4 + x^2 - 2$
- D. $y = 3x^2 + 2x - 1$

Câu 5 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

- A. -1
- B. 1
- C. -3
- D. 3

Câu 6 (Chuyên Hạ Long - 2018). Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

- A. $2x + 3y + 9 = 0$
- B. $2x + 3y - 6 = 0$
- C. $2x - 3y + 9 = 0$
- D. $-2x + 3y + 6 = 0$

Câu 7 (Chuyên KHTN - 2018). Cho hàm số f có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)^2(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số f là

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

Câu 8 (THPT Lục Ngạn 3 - 2018). Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp trùng với gốc tọa độ O.

- A. $m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- B. $m = 1$ hoặc $m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
- C. $m = 1$ hoặc $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- D. $m = 0$ hoặc $m = 1$

Câu 9 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\searrow$	-1	$\nearrow$ $+\infty$

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1
- B. Hàm số có đúng một cực trị
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Câu 10 (Chuyên Lê Quý Đôn - 2018). Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$ (m là tham số). Giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ là

A. $m = 1$ B. $m = 0$ C. $m = 2$ D. $m = 3$

Câu 11 (Chuyên Thái Bình - 2018). Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ là

A. -3 B. $(1; -3)$

C. -7 D. $(-1; -7)$

Câu 12 (THPT Hà Trung - 2018). Tính khoảng cách d giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$

A. $d = 2\sqrt{2}$ B. $d = \sqrt{3}$

C. $d = \sqrt{2}$ D. $d = 1$

Câu 13 (THPT Hậu Lộc 1 - 2018). Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có mấy điểm cực trị ?

A. 1 B. 3 C. 0 D. 2

Câu 14 (THPT Hoài Ân - 2018). Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 17$. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng

A. 5 B. -8 C. -5 D. 8

Câu 15 (THPT Hùng Vương - 2018). Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi

A. $m = 0$ B. $m \neq 0$

C. $m > 0$ D. $m < 0$

Câu 16 (THPT Hùng Vương - 2018). Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{4x^2 + x - 5}{x + 2}$

A. $y = 4x + 1$ B. $y = x - 5$

C. $y = 4x - 5$ D. $y = 8x + 1$

Câu 17 (THPT Kiến An - 2018). Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị.

A. $y = -x^4 - x^2 + 1$ B. $y = x^4 + 2x^2 - 1$

C. $y = 2x^4 + 4x^2 + 1$ D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$

Câu 18 (THPT Ngô Gia Tự - 2018). Hàm số $y = x^3 - 2x$ hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại (y_{CD}) và giá trị cực tiểu (y_{CT}) là

A. $y_{CT} = 2y_{CD}$ B. $y_{CT} = \frac{3}{2}y_{CD}$

C. $y_{CT} = -y_{CD}$ D. $2y_{CT} = y_{CD}$

Câu 19 (THPT Ngô Gia Tự - 2018). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. Hỏi diện tích tam giác ABC là bao nhiêu?

A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. 1 D. 4

Câu 20 (THPT Ngô Gia Tự - 2018). Hàm số nào sau đây không có điểm cực tiểu?

A. $y = \sin x$ B. $y = x^3 + x^2 - x + 3$

C. $y = -x^4 + x$ D. $y = |x - 1|$

Câu 21 (THPT Nguyễn Hữu Quang - 2018). Hàm số nào sau đây có 2 cực đại?

A. $y = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 3$

$y = -x^4 - 2x^2 + 3$

B.

C. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 3$

$y = 2x^4 + 2x^2 - 3$

D.

Câu 22 (THPT Nguyễn Trường Tộ - 2018). Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ (C). Đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là

A. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$x - 2y - 3 = 0$

B.

C. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$y = x + 3$

D.

Câu 23 (THPT Phú Cát 3 - 2018). Hàm số $y = x - \sin 2x$ đạt cực đại tại:

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

Câu 24 (THPT Việt Đức - 2018). Trong các hàm số sau, hàm số nào có cực đại, cực tiểu và $x_{CT} < x_{CD}$?

A. $y = x^3 + 2x^2 + 8x + 2$

B. $y = -x^3 - 3x - 2$

C. $y = x^3 - 9x^2 - 3x + 5$

D. $y = -x^3 + 9x^2 + 3x + 2$

Câu 25 (THPT Việt Đức - 2018). Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có một cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y = \frac{4x^2 + x - 5}{x + 2}$

$y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

B.

C. $y = \frac{2x - 1}{x}$

$y = -x^4 - x^2 + 5$

D.

Câu 26 (THPT Việt Đức - 2018). Hàm số $y = \sin 2x - x - 3$. Hàm số này

A. Nhận điểm $x = \frac{-\pi}{6}$ làm điểm cực đại

B. Nhận điểm $x = \frac{\pi}{2}$ làm điểm cực tiểu

C. Nhận điểm $x = \frac{-\pi}{6}$ làm điểm cực tiểu

D. Nhận điểm $x = \frac{-\pi}{2}$ làm điểm cực đại

Câu 27 (THPT Việt Đức - 2018). Hàm số $y = |x|^3 - x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2

B. 1

C. 3

D. Không có điểm cực trị nào

Câu 28 (THPT Yên Lạc - 2018). Cho hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có 3 điểm cực trị.

A. $1 < m < 2$

B. $-1 < m < 0$

C. $m > 1$

D. $0 < m < 1$

Câu 29 (THPT Xuân Trường - 2018). Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m$ đạt cực đại tại $x = 1$?

- A. $m = -1$ B. $m = -2$
C. $m = 2$ D. $m = 1$

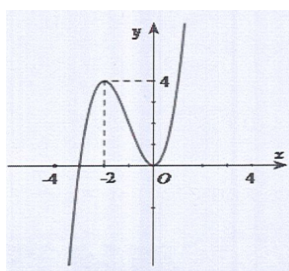
Câu 30 (THPT Xuân Trường - 2018). Giá trị m để hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m - 1)x - 1$ không có cực trị là

- A. $m \leq 0 \vee m \geq \frac{1}{4}$ B. $m < 0 \vee m \geq \frac{1}{4}$
C. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ D. $0 < m \leq \frac{1}{4}$

Câu 31 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh - 2018). Hàm số $y = |x^2 + 5x + 4|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1 B. 3 C. 0 D. 2

Câu 32 (Chuyên KHTN - 2018). Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có dạng như bên: Hỏi đồ thị hàm số $y = |x^3 + 3x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

Câu 33 (THPT Trung Giã - 2018). Biết $M(1; -6)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$. Tìm tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đó.

- A. $N(-2; 11)$. B. $N(-2; 21)$.
C. $N(2; 6)$. D. $N(2; 21)$.

Câu 34 (Chuyên Hưng Yên - 2018). Cho hàm số $f(x) = x + m + \frac{n}{x+1}$ (Với m, n là các tham số thực). Tìm m, n để hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $f(-2) = -2$

- A. Không tồn tại giá trị của m, n . B. $m = -1; n = 1$
C. $m = n = 1$ D. $m = n = -2$

Câu 35 (THPT Trần Hưng Đạo - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 - 3x^2 + (6 - 3m)x$ đạt cực trị tại điểm $x = 1$.

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ B. $m \in \mathbb{R}$
C. $m = 0$ D. $m \neq 1$

Câu 36 (THPT Số 477 - 2018). Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + m - 1}{2x + 1}$. Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất khi m bằng

- A. 0 B. 1 C. -1 D. $\frac{1}{2}$

Câu 37 (THPT Nguyễn Khuyến - 2018). Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - 3(C_m)$, với m là tham số. Xác định tất cả giá trị của m để cho đồ thị hàm số (C_m) có điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía với trục tung?

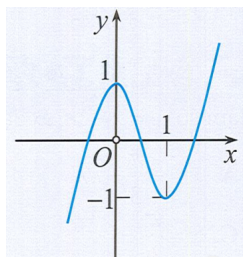
- A. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$
 $m \neq 1$
 C.

- $0 < m < 2$
 B.
 D. $-\frac{1}{2} < m < 1$

Câu 38 (Thi THPTQG - 2018). Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

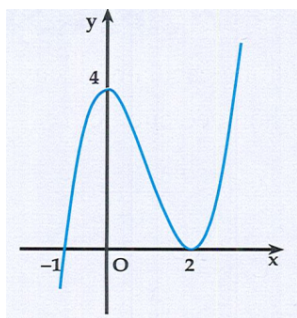
- A. $S = 9$ B. $S = \frac{10}{3}$ C. $S = 5$ D. $S = 10$

Câu 39 (Sở GD – DT TPMCH- 2018). Biết rằng hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phát biểu nào sau đây là phát biểu đúng?



- A. Đồ thị hàm số $y = |4x^3 - 6x^2 + 1|$ có 5 cực trị
 B. Đồ thị hàm số $y = |4x^3 - 6x^2 + 1|$ có 2 cực trị
 C. Đồ thị hàm số $y = |4x^3 - 6x^2 + 1|$ có 3 cực trị
 D. Đồ thị hàm số $y = |4x^3 - 6x^2 + 1|$ có 1 cực trị

Câu 40 (Chuyên Lê Hồng Phong 2018). Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(|x| - 1)$

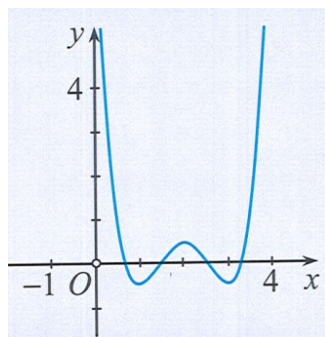


- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 41 (Chuyên Lam Sơn - 2018). Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Biết hàm số có hai điểm cực trị là $x = 0, x = 2$ và $f(0) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$

- A. $P = 5$. B. $P = -1$. C. $P = -5$. D. $P = 0$.

Câu 42 (Sở GD – DT Hải Dương – 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x-1)|$



A. 7

B. 5

C. 3

D. 9

Câu 43 (Sở GD – ĐT Hải Dương – 2018). Cho hàm số $y = a \sin x + b \cos x + x$ ($0 < x < 2\pi$) đạt cực trị tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \pi$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b\sqrt{3}$.

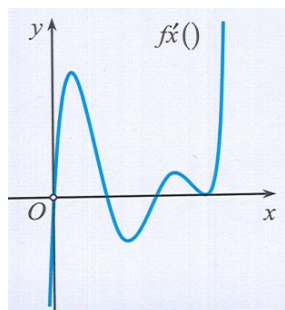
A. $T = 3\sqrt{3} + 1$

B. $T = 2\sqrt{3}$

C. $T = 2$

D. $T = 4$

Câu 44 (Chuyên Thái Nguyên - 2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 45 (Chuyên Sơn La - 2018). Cho hàm số $y = |x|^3 - mx + 5$ ($m > 0$) tham số. Hỏi hàm số đã cho có thể có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4

B. 2

C. 1

D. 3

Câu 46 (THPT Xuân Trường - 2018). Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m-2)x^2 + (4m-8)x + m+1$. Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2$ thì

A. $\frac{3}{2} < m < 2$

B. $m < 2 \vee m > 6$

C. $m < \frac{3}{2}$

D. $2 < m < 6$

Câu 47 (THPT Hà Huy Tập - 2018). Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm này cùng với gốc O tạo thành một tứ giác nội tiếp được?

A. $m = \sqrt[3]{3}$

B. $m = \pm 1$

C. $m = -1$

D. $m = 1$

Câu 48 (THPT Nguyễn Đình Chiểu - 2018). Tìm tất cả các giá trị tham số m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1-m$ là ba đỉnh của một tam giác vuông.

A. $m = \frac{2}{3}$

B. $m = \frac{1}{3}$

C. $m = -1$

D. $m = \sqrt[3]{3}$

Câu 49 (THPT Phú Cát 1 - 2018). Các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}mx^2$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều là

A. $m = \frac{2}{3}\sqrt[3]{6}$

B. $m = \sqrt[3]{6}$

C. $m = \frac{3}{2}\sqrt[3]{6}$

D. $m = 2\sqrt[3]{6}$

Câu 50 (THPT Yên Lạc - 2018). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m$ có 3 điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là các đỉnh của một hình thoi (với O là gốc tọa độ).

A. $m = -1$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m = 3$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1B	2B	3B	4B	5C	6B	7C	8C	9C	10B
11B	12A	13D	14D	15A	16A	17D	18C	19B	20C
21A	22A	23D	24D	25D	26C	27C	28D	29C	30C
31B	32D	33B	34C	35D	36C	37A	38D	39A	40C
41B	42A	43D	44C	45C	46C	47D	48C	49A	50B

CHỦ ĐỀ 4: BÍ QUYẾT TÌM TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khái niệm

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số là một đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ và có phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với $k = f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

2. Tính chất hình học của hệ số góc

Tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, có hệ số góc $k = f'(x_0)$ đồng thời $k = \tan \alpha$ với α là góc tạo bởi tiếp tuyến và chiều dương của trục hoành Ox .

Để tiếp tuyến // với đường thẳng Δ thì điều kiện là $k = k_\Delta$

Để tiếp tuyến $\perp$ với đường thẳng Δ thì điều kiện là $k \cdot k_\Delta = -1$

3. Tính hệ số góc bằng máy tính Casio Vinacal

Để tính hệ số góc bằng máy tính Casio Vinacal ta sử dụng chức năng



B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 (THPT Lục Ngạn): Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{x} - \ln x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

A. $\frac{1}{2} - \ln 2$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $-\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

Giải

Ta hiểu: hệ số góc của tiếp tuyến tại x , có giá trị đúng bằng giá trị đạo hàm tại x_0

Để tính đạo hàm tại x , ta dùng máy tính Casio với chức năng



Vậy hệ số góc của tiếp tuyến $k = -0,25 = -\frac{1}{4}$

=> Chọn B

Mở rộng

Hệ số góc còn có giá trị $k = \tan \alpha$ với α là góc tạo bởi tiếp tuyến và chiều dương của Ox . Ví dụ đề bài hỏi tìm tiếp tuyến sao cho tiếp tuyến song song với phân giác của góc phần tư thứ nhất thì khi đó tiếp tuyến tạo với chiều dương của Ox một góc $45^\circ \Rightarrow k = \tan 45^\circ = 1$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x} - \ln(x)\right)\bigg|_{x=2} = -0.25$$

Ví dụ 2 (Báo Toán Tuổi Trẻ): Phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ là

A. $y = -x + \frac{11}{3}$

B. $y = -x - \frac{1}{3}$

C. $y = x + \frac{11}{3}$

D. $y = x + \frac{1}{3}$

Giải

Ta hiểu : Điểm uốn của đồ thị hàm bậc 3 thường được kí hiệu là $I(x_0; y_0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình $y''=0$

Tính $y'=x^2-4x+3$ và $y''=2x-4$. Giải phương trình

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$\Rightarrow \text{hệ số góc } k = y'(2) = -1 \text{ và } y_0 = \frac{5}{3}$$

Thế vào phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0) + y_0$, ta được :

$$y = -1(x-2) + \frac{5}{3} \Leftrightarrow y = -x + \frac{11}{3}$$

$\Rightarrow$ Chọn A

Mở rộng

Điểm uốn của đồ thị hàm bậc 3 cũng là tâm đối xứng. Cho nên khi đề bài hỏi viết phương trình tiếp tuyến tại tâm đối xứng của đồ thị thì ta vẫn viết phương trình tiếp tuyến tại $I(x_0; y_0)$

Ví dụ 3 (THPT Chuyên Bắc Ninh): Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ đã cho tại giao điểm của chúng. Hỏi góc giữa hai tiếp tuyến trên bằng bao nhiêu?

A. 60°

B. 45°

C. 30°

D. 90°

Giải

Giải Tự luận kết hợp Casio Vinacal

Giải phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng qy tính hệ số góc của tiếp tuyến 1 và lưu vào A



Ta được $k_1 = A$ từ đó ta tìm được góc tạo bởi tiếp tuyến 1 và chiều dương trục hoành là $\approx -35^\circ$



Tương tự như vậy ta tính được góc tạo bởi tiếp tuyến 2 và chiều dương trục hoành là $\approx 55^\circ$



Vậy ta thấy góc giữa 2 tiếp tuyến là $55 - (-35) = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Chọn D

Bình luận

Qua ví dụ trên ta thấy cách kết hợp tự luận và Casio Vinacal tỏ ra có ưu thế vượt trội so với cách thuần tự luận. Nếu làm theo cách thuần tự luận ta phải viết 2 phương trình tiếp tuyến ra và tìm 2 vecto pháp tuyến là $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ từ đó phát hiện tính chất $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow$ hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)\Big|_{x=1} = -0.7071067812$$

Ans→A

$$-0.7071067812$$

$$\tan^{-1}(A)$$

$$-35.26438968$$

Ans→B

$$1.414213562$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{x=1} = 1.414213562$$

$$\tan^{-1}(B)$$

$$54.73561032$$

Ví dụ 4 (Chuyên Quốc Học Huế): Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;0)$?

A. 4

B. 1

C. 3

D. 2

Giải

Tính $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ và $y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0$ thế vào phương trình tiếp tuyến ta được: $y = (3x_0^2 - 6x_0 + 2)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0$ (1). Để tiếp tuyến (1) đi qua $A(-1;0)$ thì tọa độ A phải thỏa mãn phương trình tiếp tuyến $\Leftrightarrow 0 = (3x_0^2 - 6x_0 + 2)(-1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0$.

$$\Leftrightarrow -2x^3 + 6x_0 - 2 = 0$$

Giải phương trình bậc 3 trên bằng máy tính Casio với chức năng MODE 5 4

MODE 5 4 - 2 = 0 = 6 = - 2 = = = =

Ta thấy phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt x_0

$\Rightarrow$ Có 3 tiếp tuyến thỏa mãn

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Bình luận

Với mỗi x_0 phân biệt khi thay vào phương trình (1) sẽ thu được 1 tiếp tuyến. Vậy có bao nhiêu x_0 thì sẽ bấy nhiêu tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;0)$.

$$X_1 = -1.879385242$$

$$X_3 = 0.3472963553$$

$$X_2 = 1.532088886$$

Ví dụ 5 (THPT Đồng Đa): Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu cặp điểm thuộc đồ thị mà tiếp tuyến của đồ thị tại chúng là hai đường thẳng song song với nhau?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Vô số cặp điểm

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Ví dụ 6 (Chuyên KHTN HN): Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ biết tiếp tuyến cắt trục tung và trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân là:

- A. $y = -x - 2$ B. $y = x+2$ C. $y = x-2$ D. $y = -x+2$

=> Chọn A

Ví dụ 7 (THPT Chuyên Thái Bình): Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ hai điểm A(2;4) và B(-4;-2) đến tiếp tuyến của (C) tại M là bằng nhau.

- A. M(0;1) B. $M\left(1; \frac{3}{2}\right), M\left(2; \frac{5}{2}\right)$ C. $M\left(1; \frac{3}{2}\right)$ D. M(0;1), M(-2,3), $M\left(1; \frac{3}{2}\right)$

=> Chọn D

Ví dụ 8 (THPT Nguyễn Du): Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $y \leq 0$, $x^2 + x = y + 12$. GTLN và GTNN của biểu thức $K = xy + x + 2y + 17$ lần lượt bằng :

- A. 10;-6 B. 5;-3 C. 20;-12 D. 8;-5

=> Chọn C

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Amsterdam - 2018). Giả sử tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 18x + 1$ song song với đường thẳng (d): $12x - y = 0$ có dạng là $y = ax + b$. Khi đó tổng của a+b là.

- A. 15 B. -27 C. 12 D. 12

Câu 2 (Chuyên Amsterdam - 2018). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 6x^2 - 5$ tại điểm cực tiểu của nó

- A. $y = 5$ B. $y = -5$ C. $y = 0$ D. $y = x + 5$

Câu 3 (PTDNT THCS&THPT An Lão - 2018). Gọi $M \in (C)$: $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Hãy tính diện tích tam giác OAB.

- A. $\frac{121}{6}$ B. $\frac{119}{6}$ C. $\frac{123}{6}$ D. $\frac{125}{6}$

Câu 4 (Chuyên Hạ Long - 2018). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- A. $y = -2x+1$ B. $y = 3x-2$ C. $y = 2x+1$ D. $y = -3x-2$

Câu 5 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

- A. $y = -6x+3$ B. $y = 6x+3$ C. $y = 6x-3$ D. $y = 6x$

Câu 6 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

- A. $y - 16 = -9(x - 3)$ B. $y + 16 = -9(x + 3)$
C. $y - 16 = -9(x + 3)$ D. $y = -9x - 27$

Câu 7 (THPT Lê Quý Đôn - 2018). Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến với đồ thị (C) đi qua điểm J(-1;-2) là

A. 3

B. 4

C. 1

D. 2

Câu 8 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành có phương trình là

A. $y = 3x$ B. $y = 3x-3$ C. $y = x-3$ D. $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

Câu 9 (THPT Hùng Vương - 2018). Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

A. -3

B. 3

C. -4

D. 0

Câu 10 (THPT Lê Quý Đôn - 2018). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ với đồ thị (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) tại M (1;0) ?

A. $y = -x$ B. $y = 2x$ C. $y = -x+1$ D. $y = 2x-2$

Câu 11 (THPT Mỹ Thọ - 2018). Tìm M trên (H): $y = \frac{x+1}{x-3}$, sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với (d): $y = x+2017$?

A. (1;-1) hoặc (2;-3)

B. (5;3) hoặc (2;-3)

C. (5;3) hoặc (1;-1)

D. (1;-1) hoặc (4;5)

Câu 12 (THPT Nguyễn Du - 2018). Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng (d): $y = -3x + 15$

A. $y = -3x+11$ và $y = -3x-1$ B. $y = -3x+11$ C. $y = -3x-1$ D. $y = 3x+11$

Câu 13 (THPT Nguyễn Du - 2018). Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến với (C) song song với đường thẳng $y = 9x + 10$?

A. 1

B. 3

C. 4

D. 2

Câu 14 (THPT Yên Lạc - 2018). Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 8x^2 + 1$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục hoành:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 15 (THPT Yên Lạc - 2018). Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m+1$. Xác định m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị với trục hoành song song với đường thẳng (Δ): $y = -12x+4$

A. $m = 1$ B. $m = 3$ C. $m = \pm 2$ D. $m = 0$

Câu 16 (THPT Xuân Trường - 2018). Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ tại điểm $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ có phương trình là

A. $2x + 2y = 3$ B. $2x - 2y = -1$ C. $2x + 2y = -3$ D. $2x - 2y = 1$

Câu 17 (Chuyên Quốc học Huế - 2018). Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{2x+1}$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau.

- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.**

A. $m = 2$
C. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$

B. $m = -2$
D. Không có giá trị của m

A. $a = 2, b = 2, c = 0$
B. $a = c = 0, b = 2$
C. $a = b = 0, c = 2$
D. $a = 2, b = c = 0$

A. 1 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

A. $y = \frac{7}{3}x$

B. $y = -x + \frac{7}{3}$

C. $y = x - \frac{7}{3}$

D. $y = -x - \frac{7}{3}$

A. 17 **B.** 0 **C.** 34 **D.** $\frac{17}{5}$

A. $y = -9x + 11$. **B.** $y = -9x + 16$.

C. $y = -9x - 11$. **D.** $y = -9x - 16$.

Trang 6

A. $\begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$

Câu 25 (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - 2018). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại M (2;5) cắt hai đường tiệm cận tại E và F. Khi đó độ dài EF bằng

A. $2\sqrt{13}$

B. $\sqrt{13}$

C. $\sqrt{10}$

D. $2\sqrt{10}$

Câu 26 (Chuyên Lê Thánh Tông - 2018). Cho đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $x=2$ cắt đồ thị (C) tại điểm N (khác M). Tìm tọa độ điểm N.

A. N(1;0)

B. N(0;1)

C. N(3;4)

D. N(-1;-4)

Câu 27 (Chuyên Amsterdam HN - 2018). Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C). Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm thuộc (C) có hoành độ bằng 1. Với giá trị nào của tham số m thì (Δ) vuông góc với đường thẳng (d): $y = \frac{1}{4}x - 2016$?

A. $m = -1$

B. $m = 0$

C. $m = 1$

D. $m = 2$

Câu 28 (Chuyên Amsterdam HN - 2018). Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn $OA = 4OB$ là

A. $-\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{4}$ hoặc $\frac{1}{4}$

D. 1

Câu 29 (THPT Nguyễn Du - 2018). (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Tìm giá trị của m để parabol có phương trình $y = -\frac{3}{4}x^2 + 4 - m^2$ tiếp xúc với (C).

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = -1$

D. $m = 2$

Câu 30 (THPT Yên Lạc - 2018). Tập tất cả các giá trị của tham số m để qua điểm M (2; m) kẻ được ba tiếp tuyến phân biệt đến đồ thị hàm $y = x^3 - 3x^2$ là

A. $m \in (4;5)$

B. $m \in (-2;3)$

C. $m \in (-5;-4)$

D. $m \in (-5;4)$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1A	2B	3A	4B	5C	6C	7C	8D	9A	10C
11C	12A	13D	14C	15C	16A	17C	18B	19D	20B
21D	22C	23C	24A	25D	26D	27C	28B	29B	30C

CHỦ ĐỀ 5 BÍ QUYẾT TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Tiệm cận đứng :

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng nếu :

+) Điều kiện cần: x_0 là nghiệm của phương trình mẫu số $= 0$

+) Điều kiện đủ: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ (chỉ cần một trong hai thỏa mãn là đủ)

2. Tiệm cận ngang :

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$

3. Tiệm cận xiên :

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

4. Lệnh Casio :

Ứng dụng kỹ thuật dùng CALC tính giới hạn

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: (Đề minh họa BGD-ĐT)

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

A. $\begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

B. $x = -3$

C. $\begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

D. $x = 2$

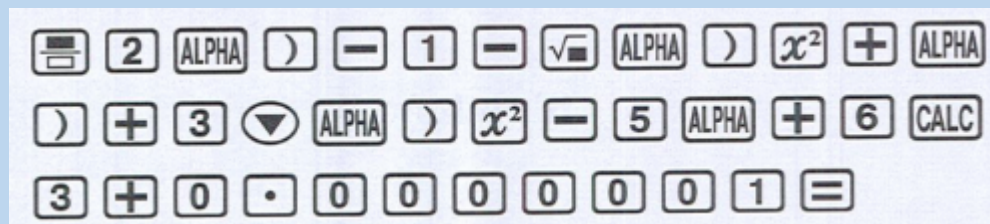
Giải

Tự luận kết hợp Casio Vinacal

Bước 1: ta hiểu $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì điều kiện cần là x_0 là nghiệm của phương trình mẫu số $= 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

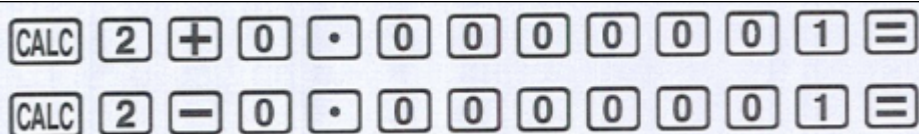
Bước 2: Không phải mọi nghiệm x_0 là nghiệm của phương trình mẫu số $= 0$ đều có $x = x_0$ là tiệm cận đứng mà còn phải thỏa mãn điều kiện đủ là: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$.

Để kiểm tra tính chất này ta sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC



Ta thấy : $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \approx 11270167 \approx +\infty \Rightarrow x = 3$ thỏa mãn điều kiện đủ $\Rightarrow x = 3$ là tiệm cận đứng

Tiếp tục kiểm tra điều kiện đủ của $x = 2$



Ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \approx -1.16 \neq \infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \approx -1.16 \neq \infty \Rightarrow x = 2$ không thỏa mãn điều kiện đủ $\Rightarrow x = 2$

là một tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = 3$

$\Rightarrow$ Chọn D

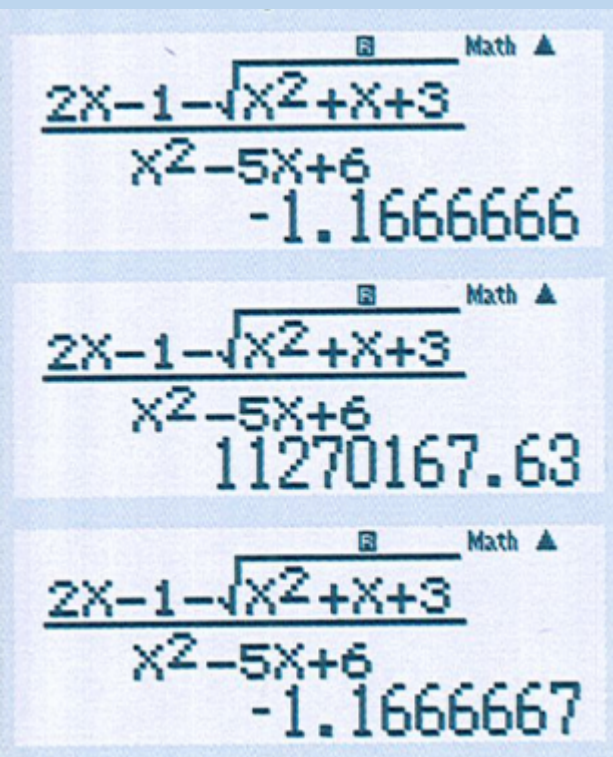
Bình luận

Đề thi bây giờ thường bẫy chỗ này. Ta nhắc lại : không phải mọi nghiệm x_0 của phương trình mẫu số đều phát sinh tiệm cận đứng $x = x_0$ mà còn cần thỏa mãn điều kiện đủ nữa là : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ hoặc

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty.$$

Trong chủ đề này, cách kết hợp giữa tự luận và Casio Vinacal là cách tối ưu để giải toán chứ không phải cách thuận tự luận hoặc thuần Casio.

Để tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ta sử dụng lệnh CALC với giá trị $X = x_0 + 0.000001$ và để tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ta sử dụng lệnh CALC với giá trị $X = x_0 - 0.000001$



Ví dụ 2 : (Chuyên Biên Hòa)

Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang :

A. 0

B. 3

C. 2

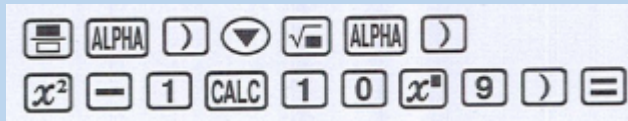
D. 1

Giải

Tự luận kết hợp Casio Vinacal

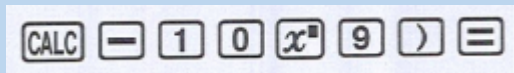
Ta hiểu : $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

Dùng máy tính Casio với chức năng CALC để tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



Ta được : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$

Dùng máy tính Casio với chức năng CALC để tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:



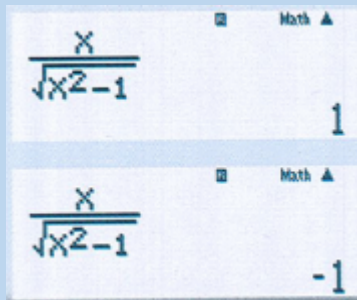
Ta được : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang $y = \pm 1$

$\Rightarrow$ Chọn C

Bình luận

Để tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ta dùng lệnh CALC với $x = 10^9$ và để tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ta dùng lệnh CALC với $x = -10^9$



Ví dụ 3: (THPT Chuyên Thái Bình)

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{\sqrt{2x + 1} - x}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận?

A. 1

B. 4

C. 3

D. 2

Giải

Ta hiểu : Số tiệm cận của đồ thị hàm số là số tiệm cận đứng + số tiệm cận ngang.

Đầu tiên ta đi tìm tiệm cận đứng:

Bước 1 giải phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$$

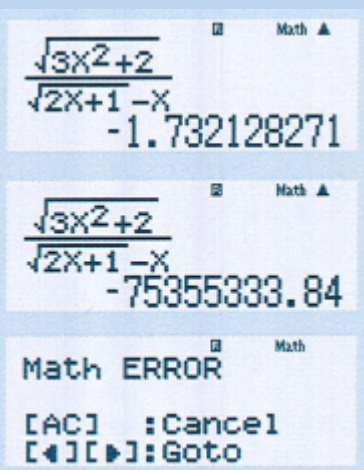
$\sqrt{}$ 3 ALPHA $\frac{\square}{\square}$ x^2 + 2 ∇ $\div R$
 $\sqrt{}$ 2 ALPHA $\frac{\square}{\square}$ + 1 $\blacktriangleright$ - ALPHA $\frac{\square}{\square}$
 CALC 1 + $\sqrt{}$ 2 $\frac{\square}{\square}$ + 0 $\cdot$ 0 0 0 0 0 0 0 1 =

3 ALPHA x^2 + 2 2 ALPHA + 1 - ALPHA

CALC 1 + 2 + 0 $\cdot$ 0 0 0 0 0 0 1 =

⇒ Chọn D

Về sau chúng ta sẽ làm quen với khái niệm nâng cao là tiệm cận xiên, tuy nhiên tiệm cận xiên chỉ xuất hiện trên hàm bậc 2 trên bậc nhất. Còn trong những bài thường gặp, cứ nhắc đến yêu cầu tìm số tiệm cận thì ta hiểu đó là tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.



Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9}$ có đồ thị (C) trong đó a, b là các hằng số dương thỏa mãn $ab = 4$. Biết rằng (C) có đường tiệm cận ngang $y = c$ và có đúng một đường tiệm cận đứng. Tính tổng $T = 3a + b - 24c$:

A. $T = 11$

B. $T = 4$

C. $T = -11$

D. $T = 7$

Giải

Với hàm phân thức bậc 2 trên bậc 2 thì ta có công thức tìm nhanh tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = c$ với c là thương số của phép chia hệ số x^2 trên tử chia hệ số x^2 dưới mẫu

$$\Rightarrow c = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{a}{4} \text{ là tiệm cận ngang}$$

Xét phương trình $4x^2 + bx + 9 = 0$ (1). Để đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng thì phương trình (1) có nghiệm kép hoặc có 2 nghiệm phân biệt nhưng 1 nghiệm được giản ước với nghiệm trên tử

Xét trường hợp I : phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow b^2 - 4.4.9 = 0 \Leftrightarrow b = 12$ Kết hợp điều kiện

$$ab = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{a}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Vậy } T = 3a + b - 24c = 1 + 12 - 2 = 11$$

 $\Rightarrow$ Chọn A

Chỉ cần trường hợp I đã tìm được giá trị của T nên ta không cần xét trường hợp II mà có thể chọn luôn đáp số đúng là A

Bình luận

Chỉ cần trường hợp I đã tìm được giá trị của T nên ta không cần xét trường hợp II mà có thể chọn luôn đáp số đúng là A

Ví dụ 5: (THPT Hàn Thuyên)

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số (C) : $y = mx - \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ có tiệm cận ngang?

A. 2

B. 3

C. 1

D. 4

 $\Rightarrow$ Chọn A**Ví dụ 6: (THPT chuyên Bắc Cạn)**

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có 3 tiệm đường tiệm cận

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

D. $m > 2$

 $\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 7: (THPT chuyên Lê Hồng Phong)

Tìm tất cả giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 1}}{x + 2}$ có 3 tiệm cận

A. $0 < m < \frac{1}{3}$

B. $0 < m \leq \frac{1}{2}$

C. $m \leq 0$

D. $m \geq \frac{1}{2}$

⇒ Chọn B

Ví dụ 3: (THPT Chuyên KHTN)

Đường tiệm cận xiên của hàm số $y = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng?

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. $\frac{1}{4}$

D. 1

⇒ Chọn C

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG**Câu 1 (Chuyên Amsterdam - 2018).**

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x^2+x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 2 (Chuyên Amsterdam - 2018).

Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 3 (THPT An Lão - 2018).

Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$

C. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = -1$ và $x = 3$

Câu 4 (THPT Số 1 An Nhơn - 2018).

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2016}{\sqrt{x^2-2016}}$ là

A. $y = 1$; và $y = -1$

B. $y = 1$

C. $y = -\sqrt{2016}$

D. $y = \sqrt{2016}$

Câu 5 (THPT Số 2 An Nhơn - 2018).

Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng
- B. Trục hoành và trục tung là hai tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho
- C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$
- D. Hàm số đã cho có tập xác định là $D = (0, +\infty)$

Câu 6 (Chuyên KHTN - 2018).

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng

- A. $\frac{1}{2}$
- B. 2
- C. $\frac{1}{4}$
- D. 1

Câu 7 (Chuyên KHTN - 2018).

Đồ thị hàm số $y = \frac{3x - 1}{2x + 1}$ có tâm đối xứng là điểm

- A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$
- B. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$
- C. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$
- D. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Câu 8 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018).

Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 1}$

- A. $x = \pm 1$
- B. $x = -1$
- C. $x = 1$
- D. $x = 2$

Câu 9 (PTDTNT Vân Canh - 2018).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên các khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$. Với giả thiết đó, hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$
- B. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$
- C. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$
- D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$

Câu 10 (THPT Nguyễn Đình Chiểu - 2018).

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

Câu 11 (THPT Tăng bặt Hồ - 2018).

Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang
- B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang
- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$ và $y = -3$
- D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$ và $x = -3$

Câu 12 (THPT Việt Đức - 2018).

Cho đường cong $(C) : y = \frac{3x-1}{x+2}$. Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 đường tiệm cận của (C) bằng 6?

- A. 4 B. 2 C. 0 D. 6

Câu 13 (THPT Yên Lạc - 2018).

Cho hàm số: $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

- A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$ B. $\begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ m < \frac{1}{5} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$

Câu 14 (THPT Yên Lạc - 2018).

Cho hàm số: $y = \frac{(m+1)x+2}{x-n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Khi đó tổng $m+n$ bằng

- A. 1 B. 0 C. -1 D. 2

Câu 15 (THPT Trần Hưng Đạo -2018).

Cho hàm số: $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-9}$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \pm 3$
B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận
D. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang

Câu 16 (Chuyên Quốc học Huế - 2018).

Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C) . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các tiệm cận của (C)

- A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. 3 D. $2\sqrt{3}$

Câu 17 (THPT Kim Liên - 2018).

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục Oy .

- A. Đáp án khác B. $m < 0$ C. $m > 0$ D. $m \neq 0$

Câu 18 (THPT Trần Phú - 2018).

Cho hàm số: $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị của m để (C) không có tiệm cận đứng

- A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = 0$ hoặc $m = 1$

Câu 19 (Chuyên Lương Văn Chánh - 2018).

Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

- A. $x = -3$ và $x = -2$ B. $x = -3$ C. $x = 3$ và $x = 2$ D. $x = 3$

Câu 20 (THPT Phan Đình Phùng - 2018).

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x}-m}{x-1}$ có đúng hai đường tiệm cận.

- A. $(-\infty; +\infty) \setminus \{1\}$ B. $(-\infty; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$ C. $(-\infty; +\infty)$ D. $(-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$

Câu 21 (Chuyên ĐHSPT - 2018).

Tìm tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

- A. $\{0\}$ B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
C. $\emptyset$ D. $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$

Câu 22 (Chuyên ĐHSPT - 2018).

Đồ thị hàm số $y = \frac{(2m+1)x+3}{x+1}$ có đường tiệm cận đi qua điểm $A(-2;7)$ khi và chỉ khi

- A. $m = 3$ B. $m = 1$ C. $m = -3$ D. $m = -1$

Câu 23 (THPT Cẩm Bình - 2018).

Tổng tất cả các giá trị nguyên $m \in (-10;10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2-2x+m}{x^2-m}$ có hai tiệm cận đứng là

- A. 45 B. 44 C. 42 D. 43

Câu 24 (THPT Đoàn Thượng - 2018).

Cho hàm số $y = \frac{4mx+3m}{x-2}$. Với giá trị nào của m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 2016

- A. $m = 1008$ B. $m = \pm 504$ C. $m = \pm 252$ D. $m = \pm 1008$

Câu 25 (Chuyên Lương Văn Chánh - 2018).

Tìm tất cả các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$

- A. $y = 1$ và $y = -1$ B. $y = 1$
C. $y = -1$ D. Không có tiệm cận ngang

Câu 26 (Chuyên Phan Bội Châu - 2018).

Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y = \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là:

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Câu 27 (Đề Minh Họa - 2018).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	2	0	$+\infty$
y'		+		
y				

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Câu 28 (Sở GD-ĐT Bình Dương - 2018).

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{m\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ có đường thẳng $y = -2$ là một đường tiệm cận ngang.

A. $m \in \{-2; 2\}$ B. $m \in \{-1; 1\}$ C. $m \in \{2\}$ D. $m \in \{1; -2\}$ **Câu 29 (Sở GD-ĐT Bình Phước - 2018).**

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+3}$ có đồ thị là (C) . Gọi M là giao điểm của (C) với trục hoành. Khi đó tích các khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) bằng

A. 4

B. 6

C. 8

D. 2

Câu 30 (THPT Thanh Thủy - 2018).

Với điều kiện nào sau đây của tham số m dưới đây, đồ thị $(C_m): y = \frac{x-2}{x^2-3x+m^2}$ chỉ có 1 tiệm cận đứng?

A. $m \in \{-1; -\infty\}$ B. $m = \sqrt{2}$ C. Không có giá trị m D. $\forall m$ **Câu 31 (THPT Kim Liên - 2018).**

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng

A. $m \neq 1$ và $m \neq -8$ B. $m > -1$ và $m \neq 8$ C. $m = 1$ và $m = -8$ D. $m < 1$ và $m \neq -8$ **Câu 32 (THPT Cao Nguyên -2018).**

Để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{\sqrt{(1-m)x^2+3x-1}}$ có tiệm cận ngang thì điều kiện của m là

A. $m > 1$ B. $m \neq 1$ C. $m < 1$ D. $0 < m < 1$ **Câu 33 (THPT Cao Nguyên -2018).**

Cho hàm số $y = \frac{-x^2+4x+3}{x-2}$ có đồ thị (C) . Tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đồ thị (C) đến các đường tiệm cận của nó bằng.

A. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

Câu 34 (Chuyên Phan Bội Châu - 2018).

Tìm giá trị của tham số m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+m-1}$ đi qua điểm $A(5;2)$.

- A. $m = -4$ B. $m = -1$ C. $m = 6$ D. $m = 4$

Câu 35 (THPT Chu Văn An - 2018).

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \log x$.

Tìm khẳng định đúng?

- A. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng
B. Đồ thị (C) có tiệm cận ngang
C. Đồ thị (C) cắt trục tung
D. Đồ thị (C) không cắt trục hoành

Câu 36 (Chuyên Ngoại Ngữ - 2018).

Cho hàm số $y = \sqrt{mx^2 + 2x} - x$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang.

- A. $m = 1$ B. $m \in \{-2; 2\}$ C. $m \in \{-1; 1\}$ D. $m > 0$

Câu 37 (Chuyên Võ Nguyên Giáp - 2018).

Biết các đường tiệm cận của đường cong $(C): y = \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5}$ cắt trục Oy tạo thành một đa giác

(H) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 25
B. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 8
C. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 4
D. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10

Câu 38 (Chuyên Lương Thế Vinh - 2018).

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}}$ là:

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 39 (THPT Quảng Xương - 2018).

Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-1}{x^2+2mx-m}$ có ba đường tiệm cận là

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{1}{3}\right\}$ B. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$
C. $m \in (-1; 0) \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ D. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Câu 40 (Chuyên Amsterdam HN - 2018).

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1C	2C	3A	4A	5B	6C	7D	8A	9C	10C
11C	12A	13A	14D	15C	16A	17C	18D	19D	20A
21A	22A	23B	24C	25B	26A	27B	28A	29D	30B
31D	32C	33B	34A	35D	36A	37D	38C	39D	40D

CHỦ ĐỀ 6: BÍ QUYẾT TÌM SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Phương pháp đồ thị tìm số nghiệm của phương trình

Cho phương trình $f(x) = g(x)$ (1), số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Chú ý: Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành.

2. Bài toán tìm nghiệm của phương trình chứa tham số.

Ta tiến hành cô lập m và đưa phương trình ban đầu về dạng $f(x) = m$ (2) khi đó số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Chú ý: Đường thẳng $y = m$ có tính chất song song với trục hoành và đi qua điểm có tọa độ $(0; m)$.

3. Điều kiện tiếp xúc của 2 đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tại $x = x_0$ là:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

4. Lệnh casio

Để tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm ta dùng lệnh SHIFT SOLVE.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: (Chuyên Thái Bình 2018). Tìm tập hợp các giá trị m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại 2 điểm phân biệt.

A. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}) \cup (5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$

B. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}] \cup [5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$

C. $\begin{cases} x > 5 + 2\sqrt{6} \\ x < 5 - 2\sqrt{6} \end{cases}$

D. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{3}) \cup (5 + 2\sqrt{3}; +\infty)$

Giải:

Cách 1: Tự luận

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+1}{x-2} = -2x + m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (-2x+m)(x-2) & (1) \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (2): $2x^2 - (m+3)x + 2m+1 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m + 1 > 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 + 2\sqrt{5} \\ m < 5 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án đúng là A.

Cách 2: Casio và Vinacal

Để giải phương trình (2) ta dùng máy tính Casio với chức năng MODE 5 3

Chọn $m = 5 + 2\sqrt{6}$ ta chỉ thu được 1 nghiệm $\Rightarrow m = 5 + 2\sqrt{6}$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp số B sai

MODE 5 3 2 = - 5 - 2 $\sqrt{6}$) - 3 = 1 0 + 4 $\sqrt{6}$) + 1 = =

Chọn $m = 9$ ta thấy phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ Không có giao điểm. Vì 9 là một giá trị thuộc đáp số D $\Rightarrow$ Đáp số D sai $\Rightarrow$ **Chọn A**

MODE 5 3 2 = - 1 2 = 1 9 = = =

Bình luận

Vì đề bài hỏi tập hợp các giá trị m nên nếu phải lựa chọn giữa đáp số A và C thì ta luôn chọn đáp số A vì A biểu diễn ở dạng tập hợp.

$X = \frac{4 + \sqrt{6}}{2}$
 $X_2 = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Ví dụ 2: (Chuyên Vĩnh Phúc). Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C). Gọi d là đường thẳng đi qua $A(3; 20)$ và có hệ số góc. Tìm m để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

A. $m < \frac{15}{4}, m \neq 24$

B. $m \geq \frac{15}{4}$

C. $m > \frac{15}{4}, m \neq 24$

D. $m < \frac{15}{4}$

Giải

Cách 1: Tự luận

Phương trình đường thẳng $d: y = m(x - 3) + 20 \Leftrightarrow y = mx - 3m + 20$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x + 2 = mx - 3m + 20$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x - 18 = mx - 3m \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6) = m(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ x^2 + 3x + 6 - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (1) có 3 nghiệm phân biệt thì (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 15 > 0 \\ 24 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{15}{4}, m \neq 24$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án đúng là C.**

Cách 2: Casio và Vinacal

Phương trình hoành độ giao điểm $\Leftrightarrow x^3 - (m + 3)x + 3m - 18 = 0$ (2)

Thử với $m = 3$ (là một số $< \frac{15}{4}$) ta được phương trình $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Giải phương trình này bằng máy tính Casio với chức năng MODE 5 4 ta được 1 nghiệm thực $\Rightarrow d$ cắt (C) tại 1 điểm $\Rightarrow$ Đáp số chứa $m = 3$ sai $\Rightarrow$ A và D sai.

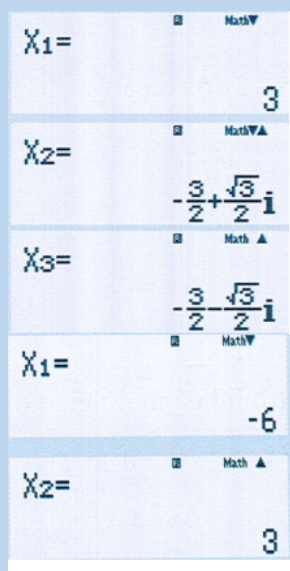
MODE 5 4 1 = 0 = - 6 = - 9 = = = =

Thử với $m = 24$ ta được phương trình $x^3 - 27x + 54 = 0$. Ta được 2 nghiệm thực $\Rightarrow d$ cắt (C) tại 2 điểm $\Rightarrow$ Đáp số chứa $m = 24$ sai $\Rightarrow$ B sai $\Rightarrow$ **Chọn C.**

MODE 5 4 1 = 0 = - 27 = 54 = = = =

Bình luận:

Bí quyết giải phương trình bậc 3 đó là phân tích thành nhân tử $(x - x_0)(Ax + By + C)$ gồm có 1 bậc nhất, và 1 bậc 2. Tuy nhiên việc khó khăn là làm sao tìm được nghiệm x_0 thì ta chỉ cần nhớ nghiệm x_0 sẽ làm cho m bị triệt tiêu $\Leftrightarrow mx - 3m = 0 \Leftrightarrow x = 3$.



Ví dụ 3: (Chuyên KHTN HN 2018). Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$

cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

A. 7.

B. 6.

C. 1.

D. 2.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x+1} = x + m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = (x+m)(x+1) \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m-1)x + m+1 = 0 \quad (1) \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt thì (1) có 2 nghiệm phân biệt khác

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6,46 \\ m < -0,46 \end{cases} \quad (2)$$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_A + x_B = 1 - m \\ x_A x_B = 1 + m \end{cases}$$

$$\text{Đề } AB \leq 4 \Leftrightarrow AB^2 \leq 16 \Leftrightarrow (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \leq 16 \Leftrightarrow (x_A - x_B)^2 + (x_A + m - x_B - m)^2 \leq 16$$

$$(x_A - x_B)^2 \leq 8 \Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B \leq 8 \Leftrightarrow (1 - m)^2 - 4(1 + m) \leq 8 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 11 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{5} \Leftrightarrow -1,47 \leq m \leq 7,47 \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3) ta được $m = 7; m = -1 \Rightarrow$ Có 2 giá trị m thỏa mãn

$\Rightarrow$ Chọn D

Bình luận

Khi giải phương trình (1) lỗi thường xuyên xảy ra là học sinh quên mất điều kiện $x \neq -1 \Leftrightarrow g(-1) \neq 0$ và cách vận dụng Vi-ét để xử lý các đại lượng liên quan đến nghiệm x_A, x_B .

Ví dụ 4: (Chuyên Bắc Ninh 2018). Tìm m để $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $m \in (-\infty; 0]$

B. $m \in \mathbb{R}$

C. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$

D. $m \in (-2; +\infty)$

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = mx - m \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 1) = m(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 - m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(1; 1)$. Để $AB = BC$ thì B là trung điểm của A, C

$$\text{Với } x_A, x_C \text{ là nghiệm của phương trình (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 2x_B = 2 \quad (2) \\ y_A + y_C = 2y_B = 2 \quad (3) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm x_A, x_C thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow 2 + m > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

$$\text{Điều kiện (2) luôn đúng vì theo định lý Vi-ét: } x_A + x_C = -\frac{b}{a} = 2$$

$$\text{Điều kiện (3)} \Leftrightarrow mx_A - m + 1 + mx_C - m + 1 = 2 \Leftrightarrow m(x_A + x_C) - 2m = 0 \text{ luôn đúng vì } x_A + x_C = 2.$$

Vậy tổng kết các điều kiện thì $m > -2$.

$\Rightarrow$ Chọn D.

Bình luận

Vì sao ta biết $(1; 1)$ là tọa độ của điểm B ? Vì $(1; 1)$ là tọa độ của điểm uốn của đồ thị hàm bậc 3, mà điểm uốn là tâm đối xứng nên điểm $B(1; 1)$ phải ở giữa (trung điểm) của A, C

Ví dụ 5: (THPT Anhtan 2018). Tìm m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $1 \leq m \leq 2$

B. $m > 1$

C. $m < 2$

D. $1 < m < 2$

$\Rightarrow$ Chọn D.

Ví dụ 6: (THPT Đồng Đa 2018). Cho hàm số $y = x^4 - 2(2m-1)x^2 + 4m^2$ (1). Các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 6$ là:

A. $m = \frac{1}{4}$

B. $m > -\frac{1}{2}$

C. $m > -\frac{1}{4}$

D. $m \geq -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Chọn A.

Ví dụ 7: (Chuyên Sư phạm 2018). Tìm tập hợp các giá trị của tham số m thì đường thẳng $y = -2x + m$ tiếp xúc với đồ thị $y = \frac{x+1}{x-1}$.

A. $m \in \{7; -1\}$

B. $m = 6$

C. $m \in \{6; -1\}$

D. $m = -1$

$\Rightarrow$ Chọn A.

Ví dụ 8: (Chuyên Sư phạm 2018). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + x^2 + x = m(x^2 + 1)^2$ có nghiệm thuộc $[0; 1]$:

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $0 \leq m \leq \frac{3}{4}$.

$\Rightarrow$ Chọn D.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Amsterdam - 2018). Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số nào dưới đây nằm trên đường thẳng $(d): y = x$?

A. $y = \frac{2x-1}{x+3}$

B. $y = \frac{x+4}{x-1}$

C. $y = \frac{2x+1}{x+2}$

D. $y = \frac{1}{x+3}$

Câu 2 (THPT Số 1 An Nhơn - 2018). Đồ thị hàm số $y = \frac{4x-1}{x+4}$ cắt đường thẳng $y = -x + 4$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tọa độ điểm C là trung điểm của AB là

A. $C(-2; 6)$

B. $C(2; -6)$

C. $C(0; 4)$

D. $C(4; 0)$

Câu 3 (Chuyên Hạ Long - 2018). Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt x_A, x_B . Hãy tính tổng $x_A + x_B$

A. $x_A + x_B = 2$

B. $x_A + x_B = 1$

C. $x_A + x_B = 5$

D. $x_A + x_B = 3$

Câu 4 (Chuyên Hạ Long - 2018). Tìm các giá trị thực của m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m - 4 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

A. $4 < m < 8$

B. $m < 0$

C. $0 \leq m \leq 4$

D. $-8 < m < -4$

Câu 5 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Xác định số giao điểm của hai đường cong $(C): y = x^3 - x^2 - 2x + 3$ và $(P): y = x^2 - x + 1$.

A. 0

B. 3

C. 2

D. 1

Câu 6 (Chuyên Thái Bình - 2018). Đồ thị của hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y = \frac{x-1}{x-2}$

B. $y = \frac{3x+1}{x+2}$

C. $y = \frac{-x-3}{3x-2}$

D. $y = \frac{3x+4}{x-2}$

Câu 7 (THPT Đồng Quan - 2018). Cho hàm số $y = -x^4 - 2x^2 - 1$. Số giao điểm của hàm số với trục Ox bằng

A. 1

B. 2

C. 0

D. 4

Câu 8 (THPT Kiến An - 2018). Dựa vào bảng biến thiên sau, tìm m để phương trình $f(x) = 2m + 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

X	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

A. $0 < m < 1$

B. $0 < m < 2$

C. $-1 < m < 0$

D. $-1 < m < 1$

Câu 9 (THPT Kiến An - 2018). Biết đường thẳng $y = 2x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 4$ tại điểm duy nhất (x_0, y_0) . Tìm $x_0 + y_0$.

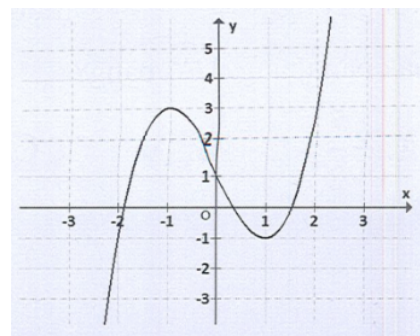
A. 6

B. 2

C. 10

D. 8

Câu 10 (THPT Lạc Hồng - 2018). Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.



A. $-1 < m < 3$

B. $-2 < m < 2$

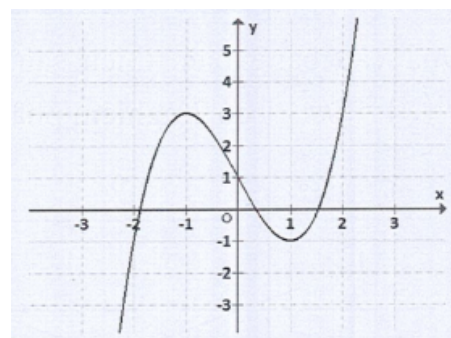
C. $-2 \leq m < 2$

D. $-2 < m < 3$

Câu 11 (THPT Mỹ Tho - 2018). Xét phương trình $x^3 + 3x^2 = m$. Chọn 1 câu đúng.

A. Với $m = 5$, phương trình có 3 nghiệm.B. Với $m = -1$, phương trình có hai nghiệm.C. Với $m = 4$, phương trình có 3 nghiệm phân biệt.D. Với $m = 2$, phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 12 (THPT Ngô Gia Tự - 2018). Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Hỏi phương trình $|f(x)| = m$ có hai nghiệm phân biệt khi m nhận giá trị bằng bao nhiêu?



A. $m > 2$

B. $m \geq 2$

C. $m = 0$

D. $m = -2$

Câu 13 (THPT Nguyễn Đình Chiểu - 2018). Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 1$. Khẳng định nào sau là khẳng định đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$
- B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và đạt cực đại tại $x = 5$
- C. Hàm số đồng biến trong khoảng $(1; 5)$
- D. Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Câu 14 (THPT Phú Cát 2 - 2018). Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng?

- A. $-\frac{5}{2}$
- B. 1
- C. 2
- D. $\frac{5}{2}$

Câu 15 (THPT Tiên Du - 2018). Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{2}$

- A. $0 < m < 2$
- B. $-2 < m < 2$
- C. $\frac{9}{8} < m < 2$
- D. $-2 \leq m \leq 2$

Câu 16 (THPT Việt Đức - 2018). Đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 2$ khi

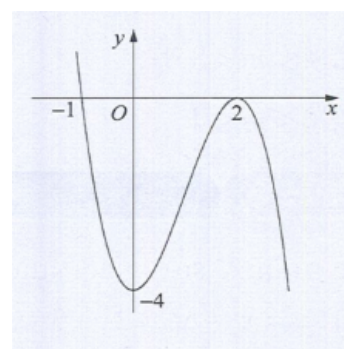
- A. $m > 4$
- B. $-4 < m < 0$
- C. $0 \leq m \leq 4$
- D. $0 < m < 4$

Câu 17 (THPT Kim Liên - 2018). Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$ và đường thẳng $d : y = x - m$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt?

- A. $-5 < m < -1$
- B. $m < -5$ hoặc $m > -1$
- C. $m > -1$
- D. $m < -5$

Câu 18 (THPT Trần Phú - 2018). Đồ thị hình bên là của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Tìm tất cả giá trị m để phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt? Chọn một khẳng định đúng.

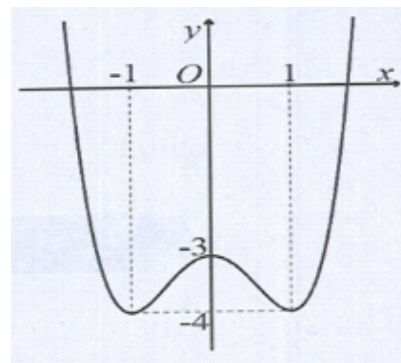


- A. $m = 4$ hoặc $m = 0$
- B. $m = 4$
- C. $0 < m < 4$
- D. $m = 0$

Câu 19 (THPT Hà Huy Tập - 2018). Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 1$, có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $d : y = mx + m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

- A. $\begin{cases} m < -\frac{5}{4} \\ m \neq -1 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} m < \frac{5}{4} \\ m \neq -1 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} m > \frac{5}{4} \\ m \neq -1 \end{cases}$
- D. $\begin{cases} m > -\frac{5}{4} \\ m \neq -1 \end{cases}$

Câu 20 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt

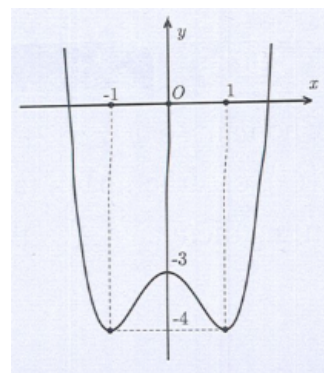


- A. $m > 4; m = 0$
- B. $3 < m < 4$
- C. $0 < m < 3$
- D. $-4 < m < 0$

Câu 21 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018). Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Gọi d là đường thẳng đi qua $A(3; 20)$ và hệ số góc m . Giá trị của m để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt

- A. $m < \frac{15}{4}, m \neq 24$
- B. $m \geq \frac{15}{4}$
- C. $m > \frac{15}{4}, m \neq 24$
- D. $m < \frac{15}{4}$

Câu 22 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - m + 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.



- A. $-3 < m < -2$
- B. $-4 < m < -3$
- C. $-3 \leq m \leq -2$
- D. $-4 \leq m \leq -3$

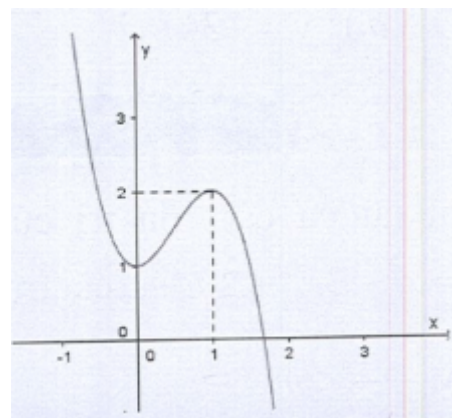
Câu 23 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh - 2018). Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 0$ là

- A. 6
- B. 7
- C. 9
- D. 3

Câu 24 (THPT Lang Giang - 2018). Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt là

- A. $2 < m < 3$
- B. $2 < m < 4$
- C. $m = 3$
- D. $0 < m < 3$

Câu 25 (THPT Giao Thủy - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(|x|) = m$ có hai nghiệm phân biệt.



- A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$
- B. $(-\infty; 1)$
- C. $(-\infty; 1) \cup \{2\}$
- D. $(2; +\infty)$

Câu 26 (THPT Phan Bội Châu - 2018). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = 3x + 1$ và đồ thị $y = x^3 - 3mx + 3$ có duy nhất một điểm chung

- A. $m \in \mathbb{R}$
- B. $m \leq 0$
- C. $m < 0$
- D. $m \leq 3$

Câu 27 (Chuyên Lương Văn Chánh - 2018). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m$ và đồ thị hàm số $y = 2x - 2$ có ba điểm chung phân biệt.

- A. $m < 2$ B. $m > 2$ C. $m < 3$ D. $m > 3$

Câu 28 (THPT Ngô Gia Tự - 2018). Điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 6x + 2m$ cắt trục hoành tại ít nhất hai điểm phân biệt là

- A. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$ B. $m = \pm 2$ C. $-2 < m < 2$ D. $-2 \leq m \leq 2$

Câu 29 (TT BDVH 218 Lý Tự Trọng - 2018). Đồ thị của các hàm số $y = x^3 + x^2 - 3x - 2$ và $y = x^2 - x - 1$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt M, N, P . Tìm bán kính R của đường tròn đi qua 3 điểm M, N, P .

- A. $R = 1$ B. $R = \frac{3}{2}$ C. $R = 2$ D. $R = \frac{5}{2}$

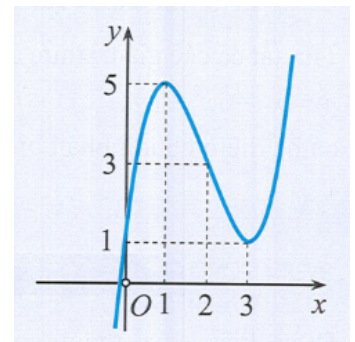
Câu 30 (TT BDVH 218 Lý Tự Trọng - 2018). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(0; -2)$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB .

- A. $(d): y = -x - 2$ B. $(d): y = -2x - 2$ C. $(d): y = -3x - 2$ D. $(d): y = -4x - 2$

Câu 31 (TT Diệu Hiền - 2018). Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- A. $-\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$ B. $-\frac{5}{2} < m < -\frac{1}{2}$ C. $0 < m < 4$ D. $-4 < m < 0$

Câu 32 (Sở GD-ĐT TP HCM - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt đều có hoành độ lớn hơn 2.



- A. $1 \leq m \leq 3$ B. $1 < m < 3$
C. $1 < m \leq 3$ D. $1 \leq m < 3$

Câu 33 (Sở GD-ĐT TP HCM - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3$ cắt đường thẳng $d: y = 2m - 7$ tại bốn điểm phân biệt

- A. $-3 < m < 5$ B. $-6 < m < 10$ C. $m = 5$ D. $m > -3$

Câu 34 (THPT TH Cao Nguyên - 2018). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = -3x + m$. Tìm m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt thuộc nhánh phải của (C) .

- A. $m > 11$ B. $m < -1$ C. $m < -1$ hoặc $m > 11$ D. $m > 5$

Câu 35 (THPT Chu Văn An - 2018). Tìm số giao điểm n của đồ thị hàm số $y = x^2|x^2 - 3|$ và đường thẳng $y = 2$.

- A. $n = 6$ B. $n = 8$ C. $n = 2$ D. $n = 4$

Câu 36 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hàm số $y = f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

- A. 3 B. 5 C. 6 D. 4

Câu 37 (THPT Quảng Xương - 2018). Tất cả các giá trị $m \in \mathbb{R}$ để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1-m)x^2 + m^2 - 3$ không cắt trục hoành là

- A. $m < 2$ B. $m \geq \sqrt{3}$ C. $m > \sqrt{3}$ D. $m > 2$

Câu 38 (Chuyên Amsterdam HN - 2018). Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có đồ thị (C). Để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm A, B, C sao cho B là trung điểm của AC thì giá trị tham số m là

- A. $m = -2$ B. $m = 0$ C. $m = -4$ D. $-4 < m < 0$

Câu 39 (THPT Quang Trung - 2018). Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$, (C). Tập tất cả các giá trị của tham số m

để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc $\widehat{AOB}$ nhọn là

- A. $m < 5$ B. $m > 0$ C. $m > 5$ D. $m < 0$

Câu 40 (THPT Xuân Trường - 2018). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$. Với giá trị nào của m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

- A. $m = 11$ B. $m = 2$ C. $m = 1$ D. $m = 12$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1B	2A	3C	4D	5B	6D	7C	8D	9C	10B
11D	12A	13D	14B	15C	16A	17B	18A	19D	20A
21C	22A	23B	24A	25C	26C	27C	28D	29B	30D
31A	32B	33A	34A	35A	36A	35C	38A	39C	40A

CHỦ ĐỀ 7: BÍ QUYẾT NHẬN DIỆN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Nhận diện đồ thị hàm bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Đồ thị hàm số có dạng chữ N nếu $a > 0$ và có dạng chữ N ngược nếu $a < 0$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow \Delta y' > 0$ khi đó hoành độ điểm cực trị là x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ và không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta y' \leq 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; d)$. Nếu điểm A nằm trên trục hoành $\Leftrightarrow d > 0$ và nếu điểm A nằm dưới trục hoành $\Leftrightarrow d < 0$

Đồ thị hàm số có cực đại trước cực tiểu $\Leftrightarrow a > 0$ và cực đại trước cực tiểu $\Leftrightarrow a < 0$

2. Nhận diện đồ thị hàm bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Đồ thị hàm số có dạng chữ W nếu $a > 0$ và có dạng chữ M nếu $a < 0$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$ và có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab > 0$

Đồ thị hàm số có 2 cực tiểu 1 cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ và có 2 cực đại 1 cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $A(0; c)$. Nếu điểm A nằm trên trục hoành $\Leftrightarrow c > 0$ và nếu điểm A nằm dưới trục hoành thì $c < 0$

3. Nhận diện đồ thị hàm bậc nhất trên bậc nhất

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A\left(0; \frac{b}{d}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$ và có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$

Đồ thị có 2 nhánh đối xứng nhau qua tâm đối xứng $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định nếu $ad - bc > 0$ và nghịch biến trên tập xác định nếu $ad - bc < 0$

4. Nhận biết hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối $y = |f(x)|$

Ta giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành của đồ thị hàm $y = f(x)$ và xóa phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành đồng thời lấy đối xứng của phần đồ thị này lên trên trục hoành

5. Nhận biết hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối $y = f(|x|)$

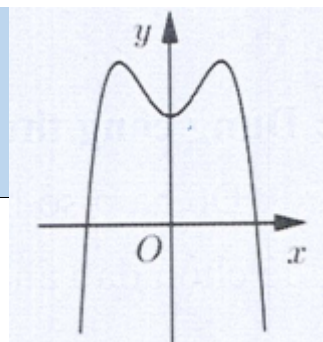
Ta giữ nguyên phần đồ thị phía bên phải trục tung của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và xóa phần đồ thị nằm phía bên trái trục tung sau đó lấy đối xứng của phần đồ thị bên phải trục tung sang bên trái trục tung.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Tìm các hệ số của hàm số thông qua đồ thị cho trước

Ví dụ 1 (Đề minh họa BGD-ĐT 2018): Đường cong hình bên là đồ thị hàm số nào sau đây?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$



$$\text{MODE } 5 \ 4 \ - \ 4 \ = \ 0 \ = \ 4 \ = \ 0 \ = \ = \ = \ =$$

$$C. y = \frac{x+1}{x-2}$$

Giải

Cách 1 : Tự luận

Đồ thị hàm số có dạng chữ M nên phải là đồ thị của hàm bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ với hệ số $a < 0 \Rightarrow$ Đáp số C sai và đáp số đúng chỉ có thể là A hoặc D

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ đổi dấu 3 lần $\Leftrightarrow$ phương trình bậc 3 của $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Với đáp số A ta có $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$

$\Rightarrow$ Chọn A

Cách 2 : Dùng công thức giải nhanh

Công thức: Để hàm bậc 4 trùng phương có 3 cực trị thì $ab < 0$

Áp dụng để chọn đáp án A hoặc D thì ta chọn luôn đáp án A vì $a.b = (-1).2 = -2 < 0$

Mở rộng

Đáp án D là sai vì $a.b = (-1).(-3) = 3 > 0$ vậy theo công thức giải nhanh nếu $ab > 0$ thì đồ thị hàm bậc 4 trùng phương chỉ có 1 điểm cực trị duy nhất

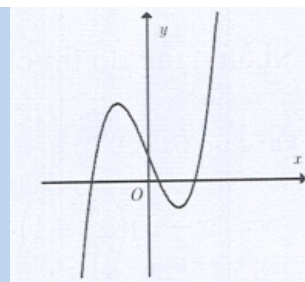
Ví dụ 2 (Chuyên Bắc Ninh 2018): Đường cong hình bên là đồ thị hàm số trong các đáp án A, B, C, D. Tìm đáp án đúng.

A. $y = x^4 - x^2 + 1$

B. $y = -x^3 + 3x + 1$

C. $y = x^3 - 3x + 1$

D. $y = x^3 + 4x - 1$



Giải

Cách 1 : Tự luận

Đồ thị hàm có dạng chữ N thì phải là đồ thị của hàm bậc 3 $\Rightarrow$ Đáp án A sai

Đồ thị hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực đại trước cực tiểu

$\Leftrightarrow$ hệ số của $a > 0 \Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là C hoặc D

Lại thấy đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ đổi dấu 2 lần $\Leftrightarrow$ phương trình bậc 2 của $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Với đáp số C ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$$\text{MODE } 5 \ 3 \ 3 \ = \ 0 \ = \ - \ 3 \ = \ = \ =$$

$\Rightarrow$ Chọn C

Cách 2 : Dùng công thức giải nhanh

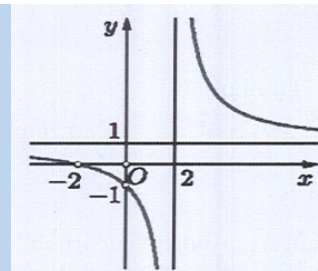
Công thức : Để hàm số bậc 3 có 2 cực trị thì $b^2 - 3ac > 0$

Áp dụng để chọn đáp án C hoặc D thì ta chọn luôn đáp án C vì $b^2 - 3ac = 0^2 - 3.1.(-3) = 9 > 0$

Mở rộng

Đáp án D là sai vì $b^2 - 3ac = 0^2 - 3.1.4 = -12 < 0$ vậy theo công thức giải nhanh nếu $b^2 - 3ac < 0$ thì đồ thị hàm bậc 3 không có cực trị.

Ví dụ 3 (Chuyên Thái Bình 2018): Cho hàm số $y = \frac{x-a}{bx+c}$ có đồ thị như hình



vẽ. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

A. $P = -3$

B. $P = 1$

C. $P = 5$

D. $P = 2$

Giải

Cách 1: Tự luận

Đồ thị có tiệm cận ngang $y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 1$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2 \Leftrightarrow -\frac{c}{b} = 2 \Leftrightarrow c = -2b \Leftrightarrow c = -2$

Để tìm a ta sẽ xem đồ thị đi qua điểm nào. Quan sát hình vẽ ta chọn điểm dễ dàng nhất là $A(-2; 0)$.

Thay vào hàm số ta có : $0 = \frac{-2-a}{bx+c} \Leftrightarrow -2-a = 0 \Leftrightarrow a = -2$

Vậy $a = -2; b = 1; c = -2 \Rightarrow$ Tổng $T = a + b + c = -3$

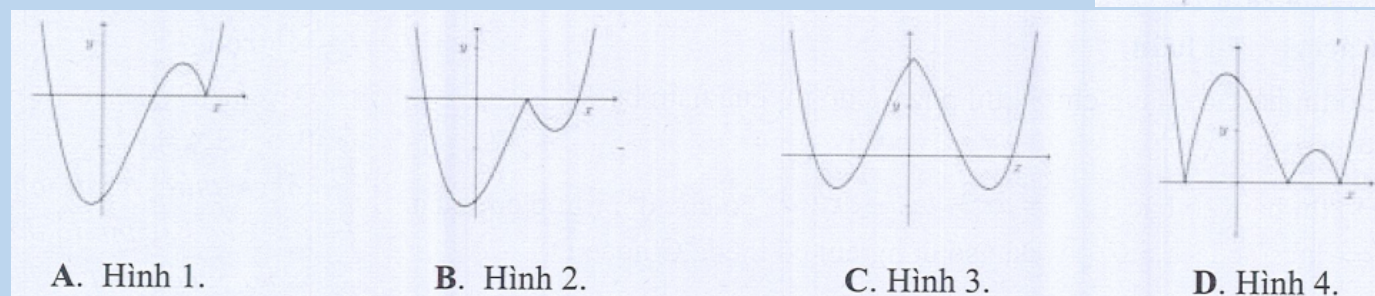
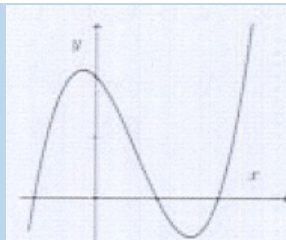
$\Rightarrow$ Chọn A

Bình luận

Đề bài còn cho dữ kiện đồ thị đi qua điểm $B(0; -1)$ thay vào hàm số thì vẫn tìm được a tuy nhiên ta thường chọn điểm A thì tính toán dễ dàng hơn.

Dạng 2: Nhận dạng đồ thị chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 4 (Đề tham khảo Bộ GD&ĐT): Hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



A. Hình 1.

B. Hình 2.

C. Hình 3.

D. Hình 4.

Giải

Đặt $y = f(x) = (x-2)(x^2-1)$ và $g(x) = |x-2|(x^2-1)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đều cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $x = 2, x = \pm 1 \Rightarrow$ Đáp số C sai

Xét dấu $|x-2|$ ta được 2 trường hợp

Trường hợp 1 với $x \geq 2$ thì $x-2 \geq 0$ khi đó $|x-2| = x-2$ và $y = |x-2|(x^2-1) = (x-2)(x^2-1)$ có nghĩa là phần đồ thị nằm phía bên phải giá trị $x = 2$ sẽ giữ nguyên. $\Rightarrow$ Cả 4 đáp án đều đúng

Trường hợp 2 với $x < 2$ thì $x-2 < 0$ khi đó $y = |x-2|(x^2-1) = -(x-2)(x^2-1)$ có nghĩa là giá trị hàm số $y = f(x)$ đối nhau với giá trị đồ thị $y = f(x)$ tức là đồ thị $y = f(x)$ và đồ thị $y = g(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành Ox

$\Rightarrow$ Chọn A

Mở rộng

Đáp án B sai vì đây là đồ thị hàm số $y = (x-2)|x^2-1|$

Đáp án D sai vì đây là đồ thị hàm số $y = |(x-2)(x^2-1)|$

Dạng 3: Nhận diện đồ thị hàm số dựa vào hệ số của biến x

Ví dụ 5 (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - Lần 2): Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình 10. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Giải

Đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng chữ M $\Rightarrow$ hệ số $a > 0 \Rightarrow$ Đáp án đúng chỉ có thể là A hoặc D.

Vì đồ thị có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ theo công thức giải nhanh thì $a.b < 0 \Leftrightarrow b < 0 \Rightarrow$ Cả A và D đều thỏa mãn nên ta tiếp tục phải tìm thêm dấu hiệu thứ 3.

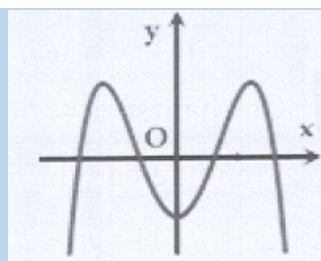
Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; c)$, quan sát hình vẽ ta thấy điểm này nằm phía dưới của trục hoành $\Rightarrow$ giá trị $c < 0$

$\Rightarrow$ Chọn D

Bình luận

Nếu đồ thị có dạng chữ W thì $a > 0$

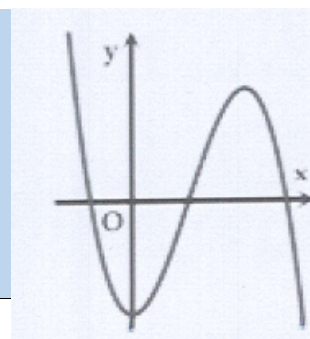
Nếu điểm $A(0; c)$ nằm phía trên trục hoành thì $c > 0$, điểm A nằm trên trục hoành thì $c = 0$



Ví dụ 6 (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - Lần 2): Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình 4. Tìm khẳng định đúng.

A. $\begin{cases} a, d > 0; b < 0 \\ c = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a, d < 0; b > 0 \\ c = 0 \end{cases}$



$$\text{C. } \begin{cases} a, b, d < 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} a, d < 0; b > 0 \\ \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

=> Chọn C

Ví dụ 7 (Chuyên ĐH Vinh, lần 1): Hình 14 là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

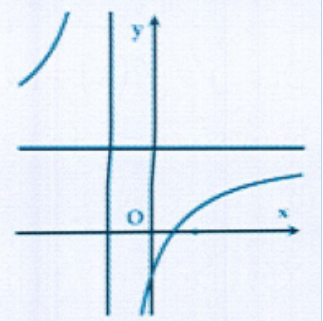
A. $ad > 0, ab < 0$.

B. $bd < 0, ab > 0$.

C. $ab < 0, ad < 0$.

D. $bd > 0, ad > 0$.

=> Chọn A



Hình 14

Ví dụ 8 (chuyên Thái Bình): Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ a, b, c như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây có thể xảy ra?

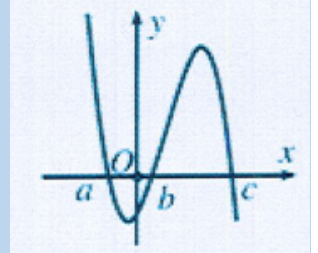
A. $f(a) > f(b) > f(c)$.

B. $f(b) > f(a) > f(c)$.

C. $f(c) > f(a) > f(b)$.

D. $f(c) > f(b) > f(a)$.

=> Chọn C



Ví dụ 9 (Thi THPT QG năm 2017): Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

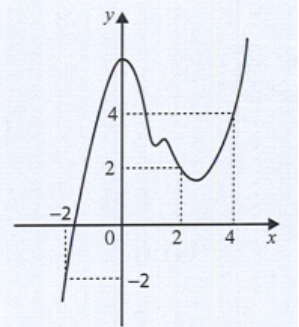
A. $h(4) = h(-2) > h(2)$

B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.

C. $h(2) > h(4) > h(-2)$.

D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.

=> Chọn C



C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Amsterdam - 2018). Đồ thị bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = x^2 + 2x - 3$

B. $y = x^3 + 3x^2 - 3$

C. $y = x^4 + 2x^2 - 3$

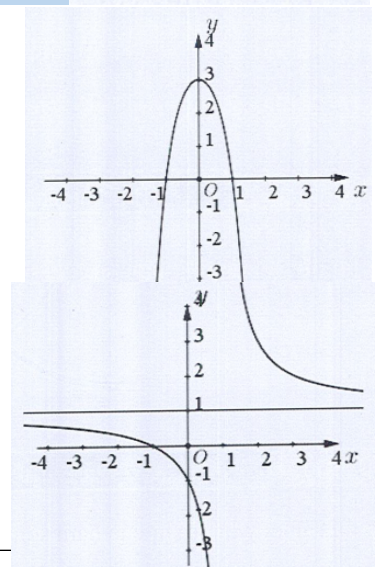
D. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

Câu 2 (THPT Số 3 An Nhơn-2018).

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = \frac{2x+1}{2x-2}$

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$



$$C. y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$D. y = \frac{-x}{1-x}$$

Câu 3 (Chuyên Hạ Long - 2018).

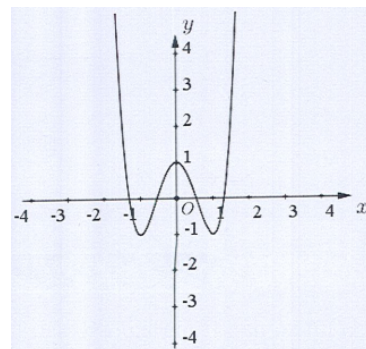
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

$$A. y = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$B. y = 2x^4 - 4x^2 + 1$$

$$C. y = -x^3 + 3x^2 + 1$$

$$D. y = -2x^4 + 4x^2 + 1$$



Câu 4 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018).

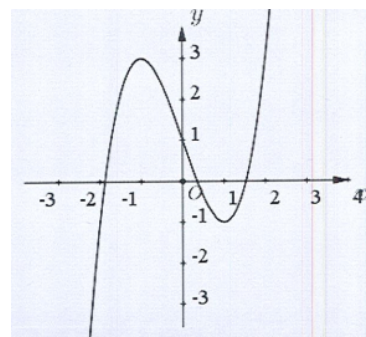
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

$$A. y = -x^3 - 3x^2 - 1$$

$$B. y = x^3 - 3x + 1$$

$$C. y = x^3 - 3x - 1$$

$$D. y = -x^3 + 3x^2 + 1$$



Câu 5 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018).

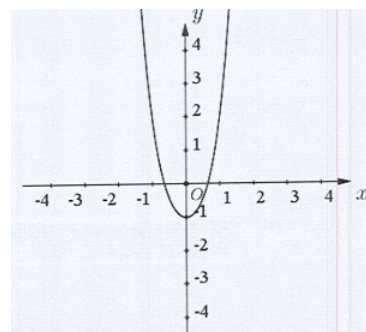
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

$$A. y = x^3 - 3x^2 - 1$$

$$B. y = x^4 + 2x^2 - 1$$

$$C. y = x^2 - 1$$

$$D. y = x^4 - 2x^2 - 1$$



Câu 6 (THPT Hòa Bình-2018).

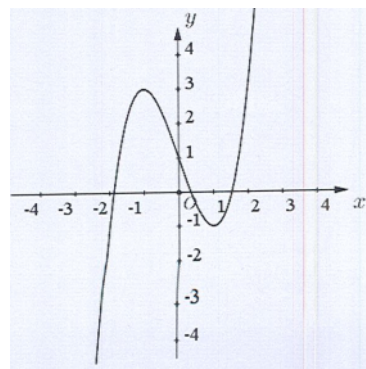
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

$$A. y = -x^3 + 3x + 1$$

$$B. y = x^3 - 3x + 1$$

$$C. y = x^3 - 3x^2 - 1$$

$$D. y = x^3 + 3x + 1$$



Câu 7 (THPT Hùng Vương -2018).

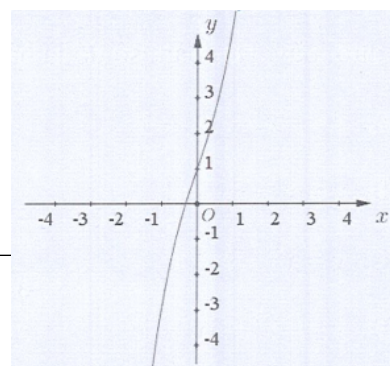
Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên

$$A. y = x^3 + 3x + 1$$

$$B. y = x^3 - 3x + 1$$

$$C. y = -x^3 - 3x + 1$$

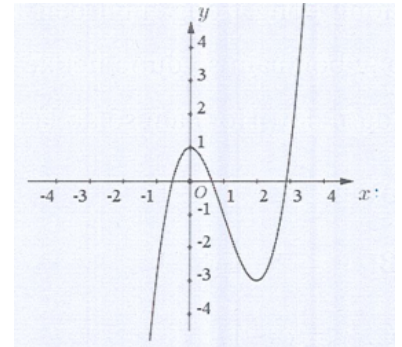
$$D. y = -x^3 + 3x + 1$$



Câu 8 (THPT Lê Quý Đôn-2018).

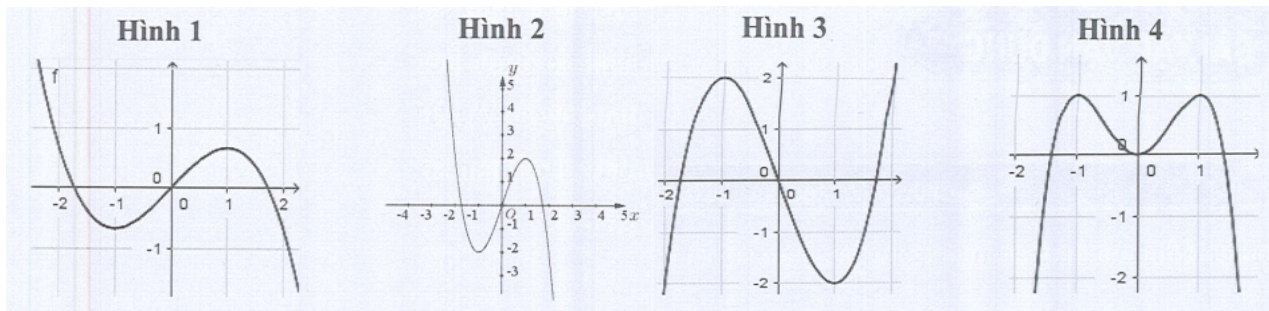
Đồ thị hình bên là của hàm số:

- A. $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1$ B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$
C. $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$ D. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$



Câu 9 (THPT Minh Hà - 2018).

Nhận biết hàm số $y = -x^3 + 3x$ có đồ thị nào trong các hình dưới đây?

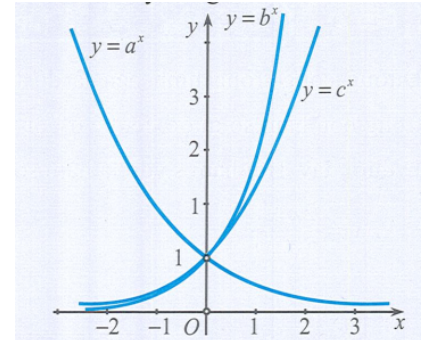


- A. Hình 2 B. Hình 4 C. Hình 3 D. Hình 1

Câu 10 (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Lần 1 - 2018).

Cho đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ như hình vẽ dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?

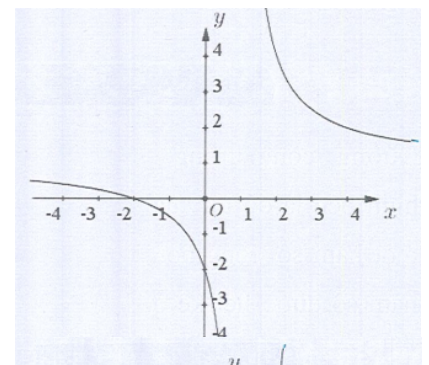
- A. $c > b > a$ B. $b > a > c$
C. $c > a > b$ D. $b > c > a$



Câu 11 (THPT Phan Bội Châu - 2018).

Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào?

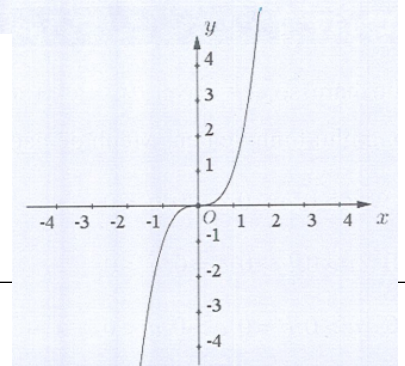
- A. $y = \frac{x+1}{x-1}$ B. $y = \frac{2x+1}{x-1}$
C. $y = \frac{x+2}{x-1}$ D. $y = \frac{x+2}{1-x}$



Câu 12 (THPT Phan Bội Châu - 2018).

Hàm số nào trong hàm số sau đây có đồ thị phù hợp với hình vẽ bên?

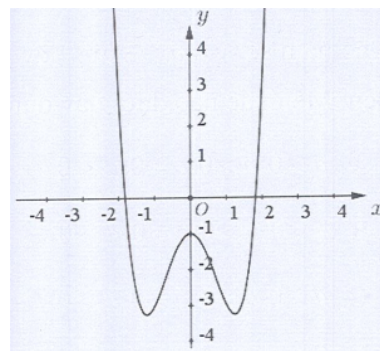
- A. $y = x^3$ B. $y = x^4$
C. $y = x^{\frac{1}{5}}$ D. $y = \sqrt{x}$



Câu 13 (THPT Tuy Phước 3 năm - 2018).

Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như sau. Xác định dấu của a ; b ; c .

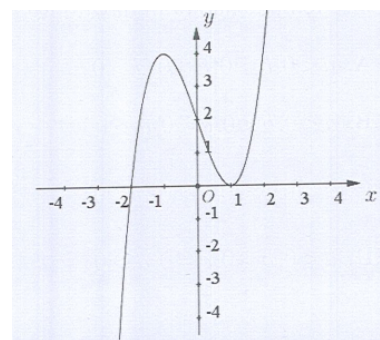
- A. $a > 0, b < 0, c < 0$ B. $a > 0, b < 0, c > 0$
C. $a > 0, b > 0, c > 0$ D. $a < 0, b > 0, c < 0$



Câu 14 (Sở GD&ĐT Bà Rịa Vũng Tàu - 2018).

Đường cong hình bên (Hình 1) là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 3x + 2$ B. $y = x^3 + 4x - 5$
C. $y = x^3 - 3x + 2$ D. $y = -x^3 - 3x + 2$

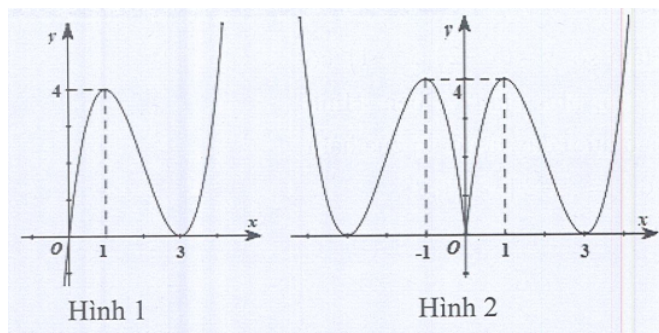


Câu 15 (THPT Hai Bà Trưng - 2018).

Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1.

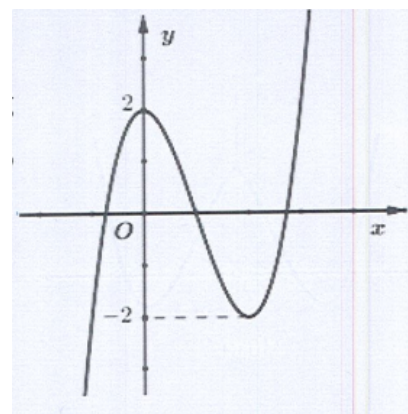
Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

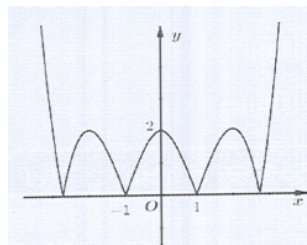
- A. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$
B. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$
C. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$
D. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$



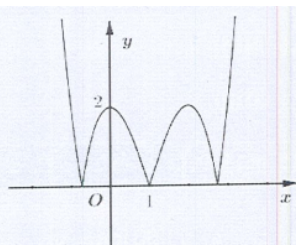
Câu 16 (THPT TH Cao Nguyên - 2018).

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Đồ thị trong phương án nào sau đây là đồ thị hàm số $y = |f(x)|$?

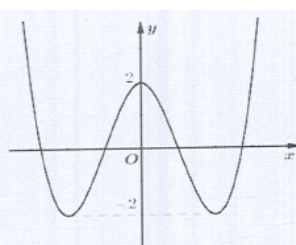




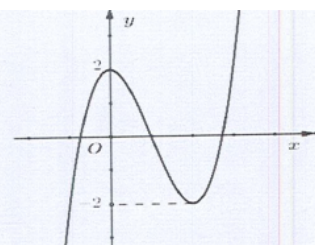
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1.

B. Hình 2.

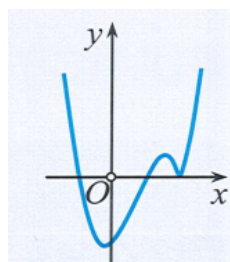
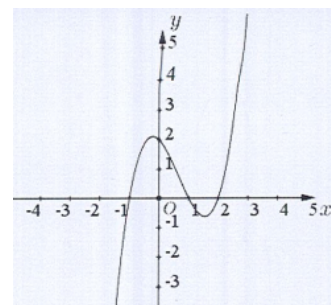
C. Hình 3.

D. Hình 4.

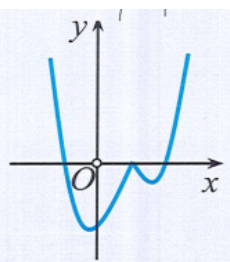
Câu 17 (Đề Minh Họa - 2018).

Hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

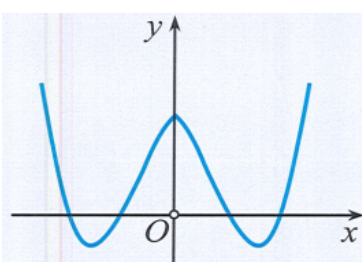
Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm $y = |x-2|(x^2-1)$?



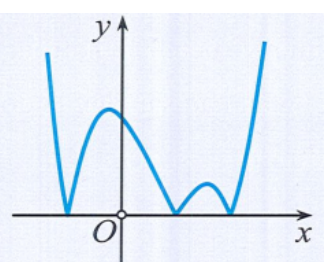
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1.

B. Hình 2.

C. Hình 3.

D. Hình 4.

Câu 18 (Sở GD-ĐT Bình Phước - 2018).

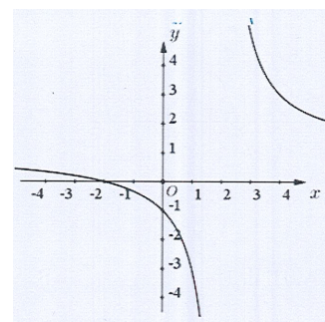
Tìm a, b, c để hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

A. $a = 2; b = -2; c = -1$

B. $a = 1; b = 1; c = -1$

C. $a = 1; b = 2; c = 1$

D. $a = 1; b = -2; c = 1$



Câu 19 (THPT Đặng Thúc Hứa -2018).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

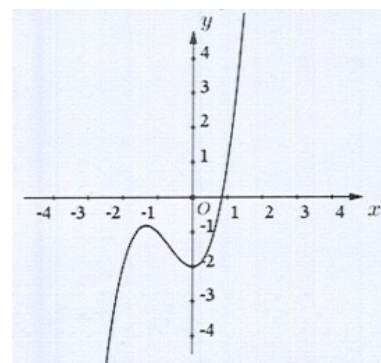
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b = 0, c < 0, d < 0$

B. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$

C. $a > 0, b = 0, c > 0, d < 0$

D. $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$



Câu 20 (THPT Hà Huy Tập -2018).

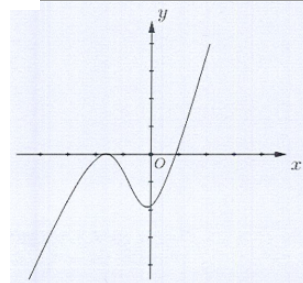
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$

B. $a > 0, b > 0, c = 0, d > 0$

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$

D. $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$



Câu 21 (THPT Hà Huy Tập - 2018).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

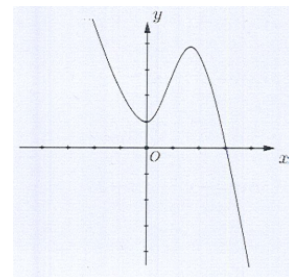
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$



Câu 22 (Đề minh họa - 2018).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

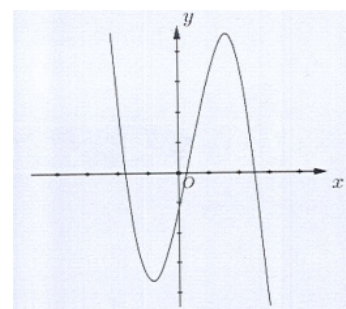
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$



Câu 23 (Chuyên Thái Bình - 2018).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

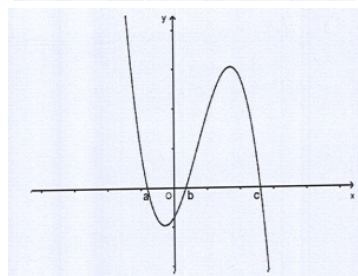
Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c) > f(a) > f(b)$

B. $f(c) > f(b) > f(a)$

C. $f(a) > f(b) > f(c)$

D. $f(b) > f(a) > f(c)$



Câu 24 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018).

Cho 3 hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f'(x)$, $y = h(x) = g'(x)$ có đồ thị là 3

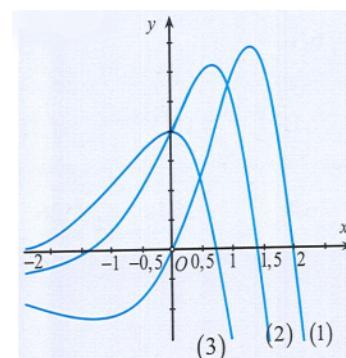
đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > h(-1) > f(-1)$

B. $h(-1) > g(-1) > f(-1)$

C. $h(-1) > f(-1) > g(-1)$

D. $f(-1) > g(-1) > h(-1)$



Câu 25 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018).

Cho 3 hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f'(x)$, $y = h(x) = g'(x)$ có đồ thị là 3

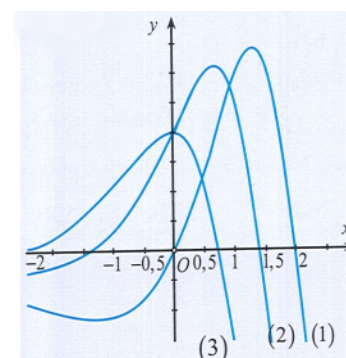
đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > h(-1) > f(-1)$

B. $h(-1) > g(-1) > f(-1)$

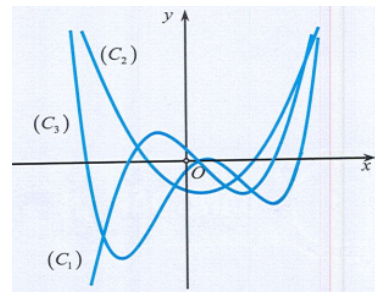
C. $h(-1) > f(-1) > g(-1)$

D. $f(-1) > g(-1) > h(-1)$



Câu 26 (THPT Chu Văn An - 2018).

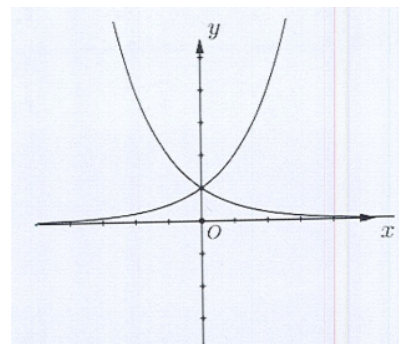
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ lần lượt là các đường cong nào trong hình vẽ bên?



- A. $(C_3), (C_1), (C_2)$ B. $(C_1), (C_2), (C_3)$
C. $(C_3), (C_2), (C_1)$ D. $(C_1), (C_3), (C_2)$

Câu 27 (Đề Thi THPTQG - Mã đề 103 - 2018).

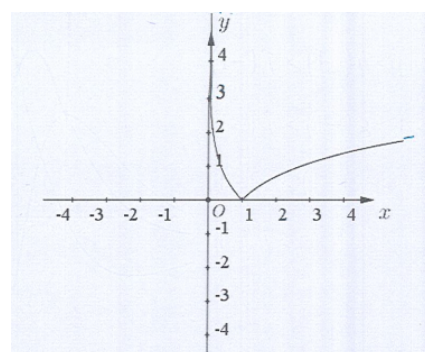
Cho hai hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ với a, b là 2 số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $0 < a < b < 1$ B. $0 < b < 1 < a$
C. $0 < a < 1 < b$ D. $0 < b < a < 1$

Câu 28 (sở GD-ĐT Tp Hồ Chí Minh - Cụm 2 - 2018).

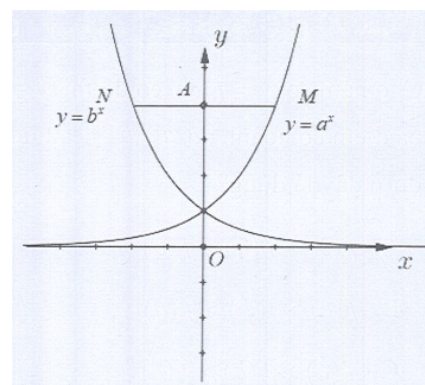
Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = \ln|x+1| - \ln 2$ B. $y = \ln|x|$
C. $y = |\ln(x+1)| - \ln 2$ D. $y = |\ln x|$

Câu 29 (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 4 - 2018).

Cho các số thực a, b khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đường $y = a^x$, $y = b^x$, trục tung lần lượt tại M, N và A thì $AN = 2AM$ (hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $a^2 = b$ B. $b = 2a$
C. $ab^2 = 1$ D. $ab = \frac{1}{2}$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2C	3B	4B	5B	6B	7A	8B	9A	10D
11C	12A	13A	14D	15A	16D	17A	18D	19B	20A
21A	22A	23A	24B	25B	26A	27B	28D	29C	30

CHỦ ĐỀ 8: CASIO GIẢI NHANH CHƯƠNG HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Casio tìm Min Max: Dùng lệnh Mode 7 của máy tính Casio để tính nhanh đáp số mà không cần biết cách làm.

Phương pháp: Gồm 2 bước:

Bước 1: Để tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên miền $[a;b]$ ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (Lập bảng giá trị) Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để Step đẹp).

Bước 2: Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max, giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min.

2. Casio tìm khoảng đồng biến nghịch biến: Dùng chức năng lập bảng giá trị MODE 7. Quan sát bảng kết quả nhận được, khoảng nào làm cho hàm số luôn tăng thì là khoảng đồng biến, khoảng nào làm cho hàm số luôn giảm thì là khoảng nghịch biến.

Chú ý: Trong bài toán chứa tham số ta tính đạo hàm rồi tiến hành cô lập m và đưa về dạng $m \geq f(x)$ hoặc $m \leq f(x)$. Tìm Min, Max của hàm số $f(x)$ rồi kết luận.

3. Casio tìm điểm cực trị hàm số: Dùng lệnh để kiểm tra cực trị. Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ + sang – thì hàm số đạt cực đại tại x_0 và nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ – sang + thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

4. Casio tìm giới hạn: Dùng chức năng CALC với một số quy ước

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow x = 10^9$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow x = -10^9$$

$$x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$$

$$x \rightarrow x_0^- \Rightarrow x = x_0 - 10^{-6}$$

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$$

5. Casio tìm sự tương giao: Ta tiến hành cô lập m và đưa phương trình ban đầu về dạng $f(x) = m$ (2) khi đó số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Chú ý: Đường thẳng $y = m$ có tính chất song song với trục hoành và đi qua điểm có tọa độ $(0; m)$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 (Thi thử Chuyên Hạ Long – Quảng Ninh – Lần 1 – 2017)

Hàm số $y = |3 \cos x - 4 \sin x + 8|$ với $x \in [0; 2\pi]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó tổng $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$

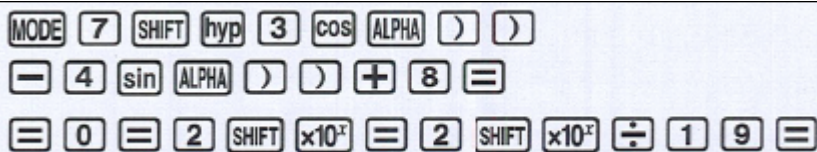
B. $7\sqrt{3}$

C. $8\sqrt{3}$

D. 16

Giải

Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 0 End 2π Step $\frac{2\pi - 0}{19}$



Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(5.2911) = 12.989 \approx 13 = M$

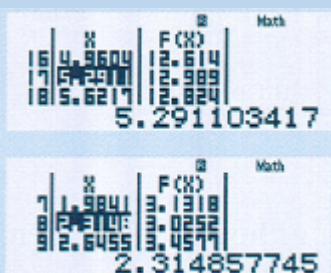
Ta thấy giá trị nhỏ nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(2.314) = 3.0252 \approx 3 = m$

Vậy $M + m \approx 16$

$\Rightarrow$ Chọn D

Chú ý:

Để tính toán các bài toán liên quan đến lượng giác ta chuyển máy tính về chế độ Radian



Ví dụ 2 (KSCL Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – 2017)

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2mx+1}{m-x}$ trên đoạn $[2; 3]$ là $-\frac{1}{3}$ khi m nhận giá trị bằng

A. -5

B. 1

C. 0

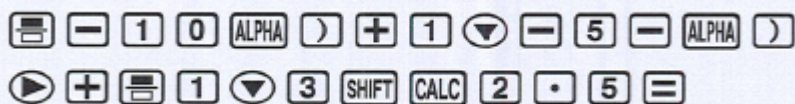
D. -2

Giải

Ta hiểu nếu giá trị nhỏ nhất của $y = -\frac{1}{3}$ trên đoạn $[2; 3]$ có nghĩa là phương trình $y + \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 3]$.

Thử nghiệm đáp án A với $m = -5$ ta thiết lập $\frac{-10x+1}{-5-x} + \frac{1}{3} = 0$

Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE



Ta thấy khi $y = \frac{1}{3}$ thì $x = -0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $[2; 3]$

Vậy đáp án A sai.

Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m = 0$ khi đó y có dạng $\frac{1}{-x}$

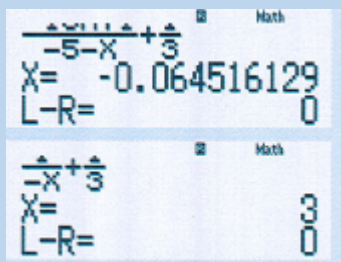


Ta thấy khi $y = \frac{1}{3}$ thì $x = 3$ là giá trị thuộc đoạn $[2; 3]$

⇒ Chọn C

Chú ý:

Ta có thể sử dụng máy tính Casio theo VDI với chức năng MODE 7



Ví dụ 3 (Thi thử chuyên Thái Bình – Lần 3 – 2017)

Bạn A có một đoạn dây dài 20m. Bạn chia đoạn dây thành 2 phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m$

B. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m$

C. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m$

D. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m$

Giải

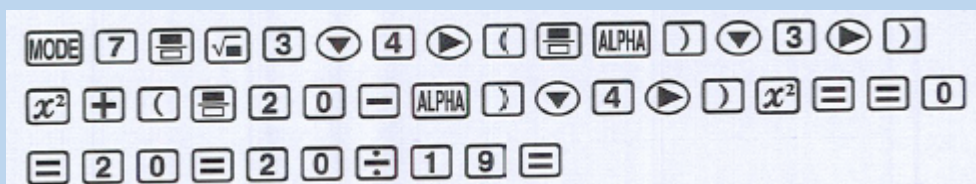
Gọi hai đầu đoạn dây là M, N và điểm I chia đoạn MN thành 2 phần. Đặt $x = MI$ và uốn đoạn này thành

tam giác đều IEM cạnh $\frac{x}{3} \Rightarrow S_{IEM} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x}{3} \right)^2$

Đoạn còn lại IN uốn thành hình vuông $IPQN$ cạnh $\frac{20-x}{4} \Rightarrow S_{IPQN} = \left(\frac{20-x}{4} \right)^2$

Đặt tổng diện tích $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x}{3} \right)^2 + \left(\frac{20-x}{4} \right)^2$

Ta sử dụng MODE 7 với Start 0 End 20 Step 20/19 để dò GTNN



Giá trị nhỏ nhất xuất hiện là ≈ 10.88 đạt được khi $x \approx 11.57 \approx \frac{180}{9+4\sqrt{3}}$

⇒ Chọn B

Chú ý:

Để làm bài toán cực trị dạng thực tế này ta thường làm theo 2 bước:

Bước 1: Đặt đại lượng đề bài yêu cầu tìm là x

Bước 2: Dựa vào đề bài thiết lập hàm số tìm GTLN – GTNN

Bước 3: Sử dụng thủ thuật Casio tìm nhanh GTLN – GTNN

	X	F(X)
11	10.526	10.94
12	10.547	10.882
13	12.631	11.07
	11.57894737	

Ví dụ 4 (Chuyên KHTN – 2017)

Cho các số x, y thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất: $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$

A. 11

B. 6

C. 2

D. 3

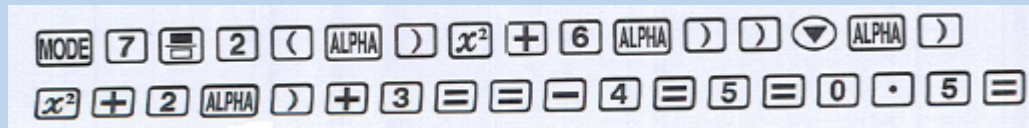
Giải

Nếu thế $x^2 + y^2 = 1$ ta được: $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2}$

Nếu $y = 0 \Rightarrow P = 2$. Nếu $y \neq 0$ ta đặt $t = \frac{x}{y}$ khi đó

$$P = f(t) = \frac{2(t^2 + 6t)}{t^2 + 2t + 3}$$

Dùng lệnh MODE 7 với Start -4 End 5 Step 0.5 ta được



Ta thấy GTLN xuất hiện là 3 khi $x = 3$

$\Rightarrow$ Chọn D

Chú ý

Ngoài cách dùng MODE 7 ta có thể dùng lệnh dò SHIFT SOLVE

Nếu đáp án A đúng thì phương trình $P = 0 \Leftrightarrow \frac{2(t^2 + 6t)}{t^2 + 2t + 3} = 0$ có nghiệm

	X	F(X)
14	2.5	2.9824
15	3.5	2.9887
		3

Ví dụ 5: (Thi thử Báo Toán Học Tuổi Trẻ - Lần 4 – 2017)

Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định khi giá trị của m là

A. $m \leq 1$

B. $m \geq 3$

C. $1 \leq m \leq 3$

D. $m < 3$

Giải

Để giải các bài toán liên quan đến tham số m thì ta phải cô lập m .

Hàm số đồng biến

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3x^2 - 6x = f(x)$$

Vậy để hàm số y đồng biến trên tập xác định thì $m \geq f(x)$ hay $m \geq f(\max)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

Để tìm Giá trị lớn nhất của $f(x)$ ta vẫn dùng chức năng MODE 7 nhưng theo cách dùng của kỹ thuật Casio tìm min max

MODE 7 = 3 ALPHA) x^2 = 6 ALPHA) = = = 9
= 1 0 = 1 =

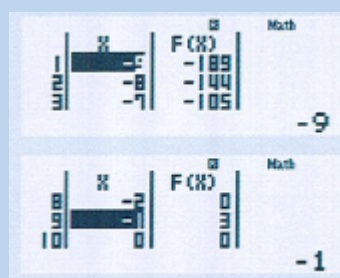
Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 3 khi $x = -1$

Vậy $m \geq 3$

$\Rightarrow$ Chọn A

Bình luận

Kiến thức (*) áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc 2: “Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\Delta \leq 0$ thì dấu của tam thức bậc 2 luôn cùng dấu với a ”



Ví dụ 6 (Thi thử Báo Toán Học Tuổi Trẻ - Lần 3 – 2017)

Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \sin x - \cos x + 2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \geq 2017$

B. $m < 0$

C. $m \geq \frac{1}{2017}$

D. $m \geq -\frac{1}{2017}$

Giải

Tính đạo hàm $y' = \cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m$

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-\sin x - \cos x}{2017\sqrt{2}} = f(x)$$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m \geq f(x)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay $m \geq f(\max)$

Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số ta lại sử dụng chức năng MODE 7. Vì hàm $f(x)$ là hàm lượng giác mà hàm lượng giác $\sin x, \cos x$ thì tuần hoàn với chu kỳ 2π vậy ta sẽ thiết lập Start 0 End 2π Step $\frac{2\pi}{19}$

SHIFT MODE 4 MODE 7 = = sin ALPHA)) = cos ALPHA)) ∇ 2 0 1 7 $\sqrt{\square}$ 2 = = 0 = 2 SHIFT $\times 10^x$ = 2 SHIFT $\times 10^{-x}$ $\div$ 1 9 =

Quan sát bảng giá trị của $F(X)$ ta thấy $f(\max) = f(3.9683) \approx 5.10^{-4}$

Đây là 1 giá trị $\approx \frac{1}{2017}$ vậy $m \geq \frac{1}{2017}$

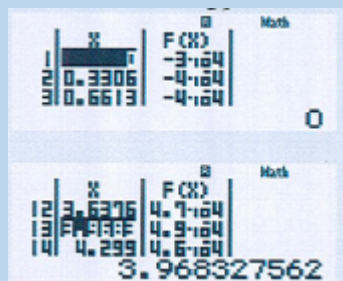
⇒ **Chọn C**

Bình luận

Vì chu kì của hàm $\sin x$, $\cos x$ là 2π nên ngoài thiết lập Start 0 End 2π thì ta có thể thiết lập Start $-\pi$ End $-\pi$.

Nếu chỉ xuất hiện hàm $\tan x$, $\cot x$ mà hai hàm này tuần hoàn theo chu kì π thì ta có thể thiết lập Start 0

End π Step $\frac{\pi}{19}$



Ví dụ 7 (Thi thử Chuyên KHTN – HN – Lần 2 – 2017)

Cho hàm số $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

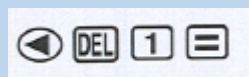
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

D. Hàm số không có cực tiểu

Giải

Để kiểm tra đáp án A ta tính đạo hàm của y tại $x = 1$ (tiếp tục màn hình Casio đang dùng)



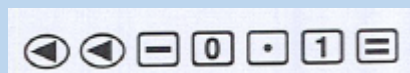
Ta thấy đạo hàm $y'(1) \neq 0$ vậy đáp số A sai

Tương tự với đáp án B (tiếp tục màn hình Casio đang dùng)



Ta thấy $y'(2) = 0$. Đây là điều kiện cần để $x = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số y

Kiểm tra $y'(2-0.1) = -0.1345... < 0$



Kiểm tra $y'(2+0.1) = 0.1301... > 0$

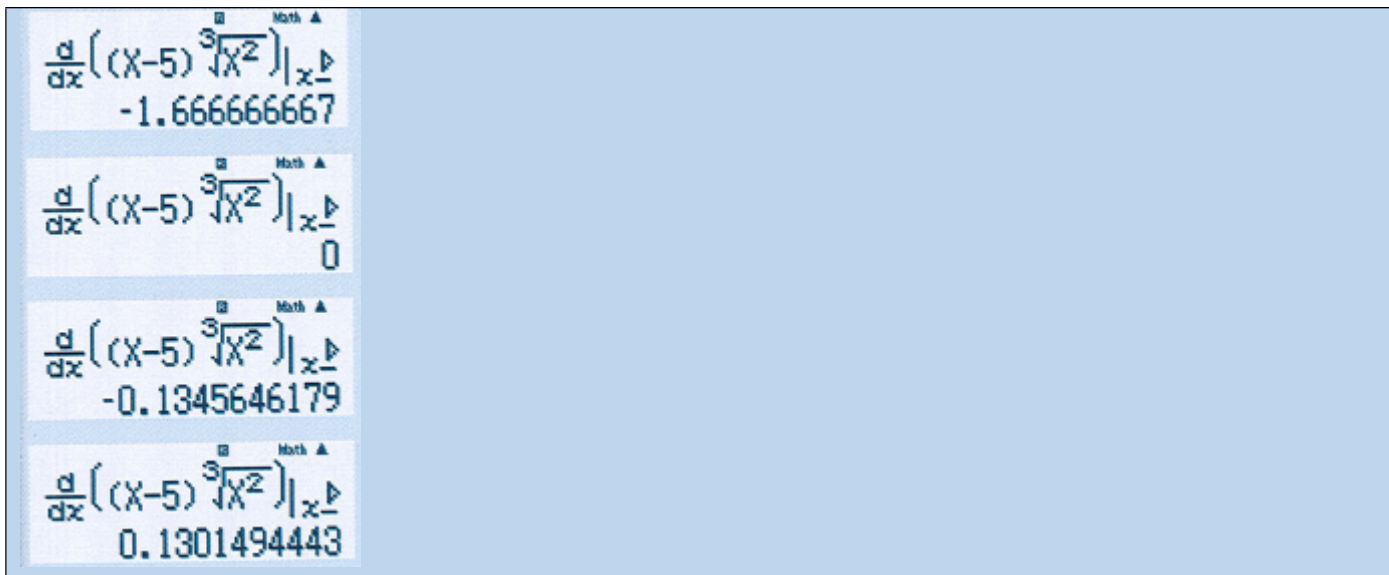


Tóm lại $f'(2) = 0$ và dấu của y' đổi từ $-$ sang $+$ vậy hàm số y đạt cực tiểu tại $x = 2$

⇒ **Chọn B**

Bình luận

Trong các bài toán tính đạo hàm phức tạp thì cách Casio càng tỏ ra có hiệu quả vì tránh được nhầm lẫn khi tính đạo hàm và xét dấu của đạo hàm.



Ví dụ 8 (KSCL Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – 2017)

Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 + 5$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$ B. $m = 2$ C. $m = 1$ D. $m = 0$

⇒ Chọn B

Ví dụ 9 (Thi thử THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Lần 1 – 2017)

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{x+4} - 2}$ bằng

- A. 1 B. 8 C. 2 D. 4

⇒ Chọn B

Ví dụ 10 (Thi thử Chuyên Amsterdam – Lần 1 – 2017)

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ bằng

- A. 1 B. -1 C. 0 D. $+\infty$

⇒ Chọn A

Ví dụ 11 Tính giới hạn : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7}$

- A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

⇒ Chọn A

Ví dụ 12 Kết quả giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2.5^n}$ là

A. $-\frac{25}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. 1

D. $-\frac{5}{2}$

⇒ Chọn A

Ví dụ 13 Tính giới hạn: $\lim \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

⇒ Chọn C

Ví dụ 14 (Thi thử Chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang – Lần 1 – 2017)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A. $m > 12$

B. $m < -12$

C. $m < 0$

D. Không có m thỏa mãn

⇒ Chọn B

Ví dụ 15 (Thi thử Chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang – Lần 1 – 2017)

Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị là (C) . Biết đường thẳng $y = -4x + 3$ tiếp xúc với (C) tại điểm

A và cắt (C) tại điểm B. Tìm tung độ của điểm B.

A. 1

B. 15

C. -3

D. -1

⇒ Chọn B

CHỦ ĐỀ 9: BÍ QUYẾT GIẢI NHANH PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khái niệm : Nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ được kí hiệu x_0 là giá trị sao cho $f(x_0) = 0$

Quy ước viết tắt trong chủ đề: PT có nghĩa là phương trình

2. Tìm nghiệm bằng máy tính Casio Vinacal

Sử dụng chức năng CALC r hoặc chức năng SHIFT SOLVE qr

3. Tìm số nghiệm bằng máy tính Casio Vinacal

Sử dụng chức năng MODE 7. Ta hiểu nếu $f(a).f(b) \leq 0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $(a;b)$

Phương trình có bao nhiêu khoảng $(a;b)$ thì có bấy nhiêu nghiệm.

4. Một số công thức Logarit thường gặp

$$(1) \left(a^m\right)^n = a^{m.n} \quad (2) a^m . a^n = a^{m+n} \quad (3) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(4) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (5) a^m . b^m = (a.b)^m \quad (6) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Đặt ẩn phụ nếu có các đại lượng chung $a^{f(x)}, a^{2f(x)}, a^{-f(x)} \dots$

Ví dụ 1: (THPT chuyên Thái Bình- 2018) Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình sau

A. -5

B. 5

C. $\frac{4}{27}$

D. $-\frac{4}{27}$

Giải

Cách 1: Tự luận

Đặt $t = 3^x \Rightarrow 3^{2x} = t^2$.

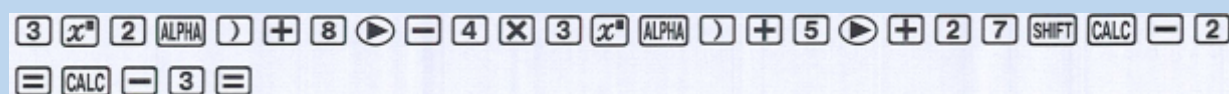
Khi đó PT $\Leftrightarrow 3^8.t^2 - 4.3^5.t + 27 = 0 \Leftrightarrow 6561t^2 - 972t + 27 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{9} \\ t = \frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^{-2} \\ 3^x = 3^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -5$$

=> Chọn A

Cách 2: Casio và Vinacal

Dò 1 nghiệm bằng chức năng SHIFT SOLVE của máy tính Casio Vinacal



Vậy ta thu được 1 nghiệm là $x = -2$. Để tổng các nghiệm là đáp số A thì $x_1 + x_2 = -5 \Leftrightarrow x_2 = -5 - x_1 = -3$

Để thử nghiệm $x = -3$ đúng không ta sử dụng chức năng CALC

Ta thấy $x = -3$ thì $F(X) = 0 \Rightarrow x = -3$ là nghiệm

=> **Chọn A**

Chú ý: Đáp số B là sai vì $x_2 = 5 - x_1 = 7$ không phải là nghiệm của vế trái $F(X)$.

Mở rộng

Nếu đặt $3^x = t$ thì $3^{3x} = t^3, e^{-x} = \frac{1}{t}, 3^{\frac{x}{2}} = \sqrt{t} \dots$

$3^{2x+8} - 4 \times 3^{\frac{x}{2}} + 5 + 27 = 0$
 $3^x = t$
 $3^{2x+8} = t^{2x+8} = t^8$
 $3^{\frac{x}{2}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t}$
 $t^8 - 4\sqrt{t} + 5 + 27 = 0$
 $t^8 - 4\sqrt{t} + 32 = 0$
 $t = 1$
 $x = 0$

Ví dụ 2: (THPT Chuyên KHTN – 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + (2m^2 - 5) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 1

B. 5

C. 2

D. 4

Giải

Đặt $t = 2^x$ khi đó PT(1) $\Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m^2 - 5 = 0$ (2). Ta thấy $t \in \mathbb{R}$ thì $x \in (0; +\infty)$

Để PT $4^x - m2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có 2 nghiệm x phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm t phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - m^2 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}$$

Vì m nguyên $\Rightarrow m = 1$

=> **Chọn A**

Mở rộng

Để PT (1) có 2 nghiệm dương thì PT (2) có 2 nghiệm phân biệt > 0 và ngược lại

Dạng 2: Đặt ẩn phụ dạng liên hợp nghịch đảo nếu xuất hiện đại lượng $a - b$ và $a + b$.

Ví dụ 3: (THPT Lê Hồng Phong – Nam Định – Lần 1 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x - 2m = 0$ có nghiệm.

A. $m \in (-\infty; 1)$.

B. $m \in (2; +\infty)$.

C. $m \in [1; +\infty)$.

D. $m = 1$

Giải

Cách 1: Tự luận

Phương trình có 2 đại lượng dạng liên hợp: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ và $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

Ta thấy $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = 1$

Đặt $t = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$ thì $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = \frac{1}{t}$. Khi đó PT $\Leftrightarrow \frac{1}{t} + t - 2m = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2mt + 1 = 0 \quad (1)$$

Để phương trình ban đầu có nghiệm thì PT (1) có nghiệm $t > 0$

$$\text{TH 1: (1) có 2 nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

TH 2: (1) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow 1 < 0$ (vô lí)

Vậy $m \geq 1$

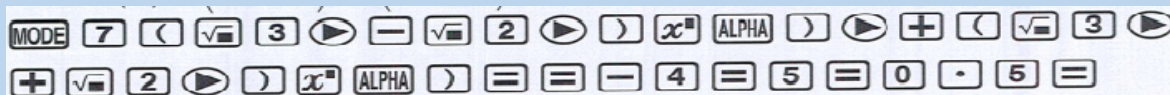
=> Chọn C

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Cô si

$$\frac{1}{t} + t - 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{\frac{1}{t} \cdot t} = 2 \Rightarrow m \geq 1$$

Cách 3: Casio Vinacal

Đặt $f(x) = (3 - \sqrt{2})^x + (3 + \sqrt{2})^x$. Khảo sát hàm $f(x)$:



Ta thấy $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow 2m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$

Bình luận

Trong 2 cơ sở xuất hiện, ta luôn đặt t theo cơ sở có giá trị > 1 là $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$



Ví dụ 4: (THPT Nguyễn Huệ - Huế - Lần 1 - 2017) Phương trình $(3 + \sqrt{5})^x + (3 - \sqrt{5})^x = 3 \cdot 2^x$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Tính $A = x_1^2 + x_2^2$

A. 9

B. 13

C. 1

D. 2

Giải

$$\text{Phương trình } \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^x = 3$$

$$\text{Ta thấy } \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^x = 1^x = 1.$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = t \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$$

$$\text{Phương trình ban đầu} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\text{TH 1: } t = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 1$$

$$\text{TH 2: } t = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1$$

$$\text{Vậy } A = x_1^2 + x_2^2 = 2$$

=> Chọn D

Bình luận

Nếu $(a-b)^x (a+b)^x = k^x$ thì tiến hành chia cả 2 vế cho k^x để đưa về dạng liên hợp nghịch đảo.

Dạng 3: Logarit hóa nếu có phương trình dạng $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Ví dụ 5: (Sở GD-ĐT Tp Hồ Chí Minh – Cụm 2 – 2017) Phương trình $8^{\frac{x}{x+2}} = 36 \cdot 3^{2-x}$ Có tổng 2 nghiệm là:

A. $-2 - \log_2 3$

B. $-2 + \log_3 2$

C. $2 - \log_2 3$

D. $2 - \log_3 2$

Giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 8^{\frac{x}{x+2}} > 9 \cdot 4 \cdot 3^{2-x} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}-2} = 3^{2-x+2} \Leftrightarrow 3^{\frac{x-4}{x+2}} = 2^{4-x}$$

$$\text{Logarit 2 vế theo cơ số 3 ta được: } \log_3 3^{\frac{x-4}{x+2}} = \log_3 2^{4-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} = (4-x) \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow (x-4) \left(\frac{1}{x+2} + \log_3 2 \right) = 0$$

$$\text{TH 1: } x-4=0 \Leftrightarrow x=4$$

$$\text{TH 2: } \frac{1}{x+2} + \log_3 2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = -\frac{1}{\log_3 2} \Leftrightarrow x = -2 - \log_2 3$$

Vậy tổng 2 nghiệm là $2 - \log_2 3$

=> Chọn C

Bình luận

Ta có 2 phương án: hoặc là logarit theo cơ số 2, hoặc là logarit theo cơ số 3 thì ta luôn chọn logarit theo cơ số mũ phức tạp hơn là 3.

Dạng 4: Đưa về cùng cơ số nếu cơ số là lũy thừa của nhau.

Ví dụ 6: (THPT Chuyên Thái Bình – Lần 4 năm 2017) Tính tích t của tất cả các nghiệm của phương trình $(3+2\sqrt{2})^{x^2-x-2} = (3-2\sqrt{2})^{x^2-2}$

A. $t = \frac{1}{2}$

B. $t = -2$.

C. $t = -1$.

D. $t = 1$.

Giải

Biến đổi: $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 1$

$$\Leftrightarrow (3-2\sqrt{2}) = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})} = (3+2\sqrt{2})^{-1}$$

Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow (3+2\sqrt{2})^{x^2-x-2} = (3+2\sqrt{2})^{2-x^2}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 4 = 0$$

Theo định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

=>Chọn A

Mở rộng

Nếu xuất hiện $t = \sqrt{2} - 1$

thì $7 + 5\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^3 = (\sqrt{2} - 1)^{-3} = t^3$

Dạng 5: Phương trình dạng đồng bậc 2 nếu có dạng $a^{2u} + (ab)^u + b^{2u}$.

Ví dụ 7: (THPT Chu Văn An – Hà Nội – Lần 2 – 2017) Tính tổng bình phương T tất cả các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$.

A. $T = 4$

B. $T = 3$.

C. $T = \frac{13}{4}$.

D. $T = \frac{1}{4}$.

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow 4.3^{2x} - 13.3^x.2^x + 9.4^{2x} = 0$.

Trong đó 3 có vai trò là a , 2 có vai trò là b và x có vai trò là u .

Chia cả 2 vế cho 2^x ta được: $3.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ khi đó: $(1) \Leftrightarrow 4t^2 - 13t + 9 = 0$

TH 1: $t = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = 2$

TH 2: $t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy tổng 2 nghiệm là $2^2 + 0^2 = 4$

=>Chọn A

Bình luận

Phương pháp giải phương trình đẳng cấp (đồng bậc) 2 là chia cả 2 vế cho b^{2u}

Dạng 6: Phương pháp hàm số được sử dụng nếu phương trình có dạng $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Ví dụ 8: (THPT Chuyên KHTN – Hà Nội – Lần 2 – 2017) Phương trình $4^{x^2} - 2^{(x+1)^2} = 2x + 1 - x^2$ có bao nhiêu nghiệm dương.

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

Giải

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2^{2x^2} - 2^{(x+1)^2} = (x+1)^2 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2} + 2x^2 = 2^{(x+1)^2} + (x+1)^2 \Leftrightarrow f(2x^2) = f\left[(x+1)^2\right]$$

Xét hàm đại diện $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên hàm $f(t)$ đơn điệu trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ PT (1) có nghiệm duy nhất: $2x^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

Vậy phương trình ban đầu có 1 nghiệm dương duy nhất

=>Chọn B

Bình luận

Phương trình chứa 2 loại hàm là hàm mũ 4^x và hàm đa thức $2 + 2x - x^2$ là dấu hiệu để ta tách đối xứng và sử dụng phương pháp hàm số.

Ví dụ 9: (THPT Chuyên Thái Bình – Lần 3 năm 2017) Hỏi phương trình $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 4^x = 6 \cdot 5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1

B. 4

C. 2

D. 3

Giải

$$\text{Chia cả 2 vế cho } 5^x : 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x = 6$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x - 6 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } f(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x - 6$$

$$\text{Xét đạo hàm } f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln\left(\frac{2}{5}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\left(\frac{3}{5}\right) + 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

Vì các đại lượng $\left(\frac{2}{5}\right)^x, \left(\frac{3}{5}\right)^x, \left(\frac{4}{5}\right)^x$ đều > 0 và $\ln\left(\frac{2}{5}\right), \ln\left(\frac{3}{5}\right), \ln\left(\frac{4}{5}\right)$ đều $< 0 \Rightarrow f'(x)$ luôn ≤ 0 với

mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tối đa tại 1 điểm $\Rightarrow f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm
 $\Rightarrow$ Chọn A

Kinh nghiệm

Phương trình mũ mà các số hạng để có cơ số < 1 hoặc cùng có cơ số > 1 thì thường sử dụng phương pháp hàm số để xử lý và phương trình chỉ có 1 nghiệm duy nhất.

Dạng 7: Sử dụng định lý Rô.

Ví dụ 10: (THPT Chuyên KHTN – Hà Nội – Lần 2 năm 2017) Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)^2 \cdot 2^x = 2x(x^2-1) + 4(2^{x-1} - x^2)$ bằng

- A. 4 B. 5 C. 2 D. 3

Giải

Thu gọn PT : $(x^2 - 2x + 1) \cdot 2^x = 2x^3 - 2x + 2 \cdot 2^x - 4x^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) \cdot 2^x = 2x^3 - 4x^2 - 2x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 1)(2^x - 2x) = 0$$

$$\text{TH 1: } x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

TH 2: $2^x - 2x = 0$. Đặt $f(x) = 2^x - 2x$ và $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2$ và $f''(x) = 2^x \ln^2 x$

Ta thấy $y'' = 2^x \ln^2 x$ luôn > 0 với mọi $x \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm

Lại thấy $x = 1, x = 2$ là 2 nghiệm $\Rightarrow$ Tổng các nghiệm của phương trình là 4

$\Rightarrow$ Chọn A

Kinh nghiệm

Định lý Rô: Nếu $f''(x)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (THPT Hàn Thuyên - 2018). Với giá trị nào của a thì phương trình sau có nghiệm duy nhất $2^{ax^2-4x-2a} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4}$?

- A. $a \geq 0$ B. $\forall a \in \mathbb{R}$ C. $a = 0$ D. không tồn tại a

Câu 2 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$ là

- A. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ B. $S = \{2\}$ C. $S = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$ D. $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$

Câu 3 (THPT Hàn Thuyên - 2018). Tìm x để đẳng thức sau luôn đúng:

$$\log_5(x^2 - 2x - 3) = \log_5(x+1) + \log_5|x-3| \quad (1)$$

A. $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

B. $x > 3$

C. $\begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$

D. $x > -1$

Câu 4 (Chuyên ĐH Vinh – 2018). Gọi a là một nghiệm của phương trình:

$$(26 + 15\sqrt{3})^x + 2(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 - \sqrt{3})^x = 1. \text{ Khi đó giá trị của biểu thức nào sau đây đúng?}$$

A. $a^2 + a = 2$

B. $\sin^2 a + \cos a = 1$

C. $2 + \cos a = 2$

D. $3^a + 2a = 5$

Câu 5 (Sở GD&ĐT Bắc Giang - 2018). Phương trình $m.9^{x^2-2x} - (2m+1).6^{x^2-2x} + m.4^{x^2-2x} = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$ với giá trị của tham số m thuộc

A. $(-\infty; 0]$

B. $(-\infty; 6]$

C. $[6; +\infty)$

D. $[0; +\infty)$

Câu 6 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh - 2018). Gọi $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $8^{x+1} + 8.(0,5)^{3x} + 3.2^{x+3} = 125 - 24.(0,5)^x$. Tính giá trị $P = 3x_1 - 6x_2$.

A. 8

B. -10

C. 11

D. -9

Câu 7 (THPT Chuyên Bến Tre - 2018). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4^x - 3.2^x + 2 - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$.

A. $(0; +\infty)$

B. $\left[-\frac{1}{4}; 8\right)$

C. $\left[-\frac{1}{4}; 6\right)$

D. $\left[-\frac{1}{4}; 2\right)$

Câu 8 (Sở GD&ĐT Điện Biên - 2018). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 8x^2 + 5 - 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-\frac{11}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$

B. $m \leq \frac{5}{2}$

C. $m \geq -\frac{11}{2}$

D. $-\frac{11}{2} < m < \frac{5}{2}$

Câu 9 (Chuyên Biên Hòa - 2018). Tìm m để phương trình sau có đúng 3 nghiệm phân biệt $9^{x^2} - 2.3^{x^2+1} + 3m - 1 = 0$

A. $m = \frac{10}{3}$

B. $2 < m < \frac{10}{3}$

C. $m = 2$

D. $m < 2$

Câu 10 (THPT Võ Nguyên Giáp - 2018). Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $(4^x - 8)^3 + (2^x - 64)^3 = (4^x + 2^x - 72)^3$ bằng

A. 4

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{21}{2}$

D. 3

Câu 11 (Chuyên Thái Bình - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\log_3(1 - x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x + m - 4) = 0$.

A. $\frac{-1}{4} < m < 0$

B. $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$

C. $5 < m < \frac{21}{4}$

D. $\frac{-1}{4} \leq m \leq 2$

Câu 12 (Chuyên Thái Bình - 2018). Hỏi phương trình $3.2^x + 4.3^x + 5.4^x = 6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2

B. 4

C. 1

D. 3

Câu 13 (THPT Quảng Xương 1 - 2018). Cho phương trình $4.5^{\log(100x^2)} + 25.4^{\log(10x)} = 20.10^{1+\log x}$ Gọi a và b lần lượt là 2 nghiệm của phương trình. Khi đó tích ab bằng

- A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{100}$ D. $\frac{1}{10}$

Câu 14 (THPT Nguyễn Huệ - 2018). Phương trình $(3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x = 3.2^x$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $A = x_1^2 + x_2^2$.

- A. 9 B. 13 C. 1 D. 2

Câu 15 (Chuyên Quốc Học Huế - 2018). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $4^x + (4m-1).2^x + 3m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

- A. Không tồn tại m B. $m = \pm 1$ C. $m = -1$ D. $m = 1$

Câu 16 (Chuyên Lê Quý Đôn - 2018). Biết rằng phương trình $2^{\frac{x}{x-1}} = 3^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 Tính giá trị biểu thức $P = 3^{x_1+x_2}$

- A. 9 B. 5 C. 1 D. 6

Câu 17 (Sở GD&ĐT – TP.HCM - 2018). Tính tổng các nghiệm của phương trình $2^{\log(x^2-6x+9)} = 3^{2\log_x \sqrt{x}-1}$

- A. 9 B. 6 C. 8 D. 3

Câu 18 (THPT Lương Thế Vinh - 2018). Số giá trị nguyên của m để phương trình $(m+1).16^x - 2(2m-3).4^x + 6m+5 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu là

- A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

Câu 19 (Đề Thi THPTQG – 2018 – Mã đề 110). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \in (-\infty; 1)$ B. $m \in (0; 1]$ C. $m \in (0; 1)$ D. $m \in (0; +\infty)$

Câu 20 (Sở GD&ĐT – TP.HCM- Cụm 5 - 2018). Phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{5}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Câu 21 (THPT Lê Lợi – Lần 3 - 2018). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $7^x + 3 = m.\sqrt{49^x + 1}$ có đúng một nghiệm là

- A. $(1; 3) \cup \{\sqrt{10}\}$ B. $\{\sqrt{10}\}$ C. $(1; 3]$ D. $(1; 3] \cup \{\sqrt{10}\}$

Câu 22 (THPT Chuyên Biên Hòa – Lần 3 - 2018). Cho phương trình $4^{2x} - 10.4^x + 16 = 0$. Tính tổng các nghiệm của phương trình đó.

- A. 16 B. $\frac{7}{2}$ C. 2 D. 10

Câu 23 (Sở GD-ĐT Tp Hồ Chí Minh - CỤM 7 - 2018). Phương trình $(0.2)^{x+2} = (\sqrt{5})^{4x-4}$ tương đương với phương trình

- A. $5^{-x+2} = 5^{2x-2}$ B. $5^{-x-2} = 5^{2x-2}$ C. $5^{-x-2} = 5^{2x-4}$ D. $5^{-x+2} = 5^{2x-4}$

Câu 24 (Sở GD-ĐT Hà Tĩnh - 2018). Tích các nghiệm của phương trình $4^{x^2-x-1} + 2^{x^2-x} = 3$ bằng

- A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

Câu 25 (Chuyên ĐHSPTN – Lần 2 - 2018). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $9^{1-x} + 2(m-1)3^{1-x} + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

- A. $m > 1$ B. $m < -1$ C. $m < 0$ D. $-1 < m < 0$

Câu 26 (Chuyên Phan Bội Châu – Lần 3 - 2018). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $5^{\sqrt{x+2}-x} - 5m = 0$ có nghiệm thực

- A. $(0; 5^4\sqrt{5}]$ B. $[5^4\sqrt{5}; +\infty)$ C. $(0; +\infty)$ D. $[0; 5^4\sqrt{5}]$

Câu 27 (THPT Chuyên Thái Bình – Lần 4 - 2018). Tính tích t của tất cả các nghiệm của phương trình $(3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} = (3-2\sqrt{2})^{x^3-2}$.

- A. $t = 0$ B. $t = -2$ C. $t = -1$ D. $t = 1$

Câu 28 (THPT Chuyên Lê Thánh Tông – Lần - 2018). Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $4^{x-1} - 3 \cdot 2^x + 7 = 0$. Tính S .

- A. $S = \log_2 7$ B. $S = 12$ C. $S = 28$ D. $S = \log_2 28$

Câu 29 (THPT Chuyên Lam Sơn – Lần 1 - 2018). Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26$. Tính $S = x_1 + x_2$

- A. $S = 2$ B. $S = 1$ C. $S = 3$ D. $S = 4$

Câu 30 (THPT Chuyên Lam Sơn – Lần 1 - 2018). Biết $\frac{x^{a^2}}{x^{b^2}} = x^{16}$ ($x > 1$) và $a + b = 2$. Tính giá trị của biểu thức $M = a - b$.

- A. 18 B. 14 C. 8 D. 16

Câu 31 (THPT Chuyên Biên Hòa – Lần 2 - 2018). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x + (2-m)2^x + 5 - m = 0$ có nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

- A. $m \in [4; +\infty)$ B. $m \in \left[4; \frac{13}{3}\right)$ C. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ D. $m \in \left(\frac{25}{6}; \frac{13}{3}\right)$

Câu 32 (THPT Quảng Xương – Lần 3 - 2018). Phương trình $2 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^x + 3 = 0$ có tất cả các nghiệm thực là

- A. $x = -1, x = \log_2 3$ B. $x = \log_2 3$ C. $x = -1$ D. $x = 1, x = \log_2 3$

Câu 33 (THPT Quảng Xương – Lần 3 - 2018). Phương trình $4^{x^2} - 2^{(x+1)^2} = 2x + 1 - x^2$ có bao nhiêu nghiệm dương.

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 0

Câu 34 (THPT Chuyên KHTN – Lần 2 - 2018). Phương trình $(x-1).2^x = x+1$ có bao nhiêu nghiệm thực.

- A. 1 B. 0 C. 3 D. 2

Câu 35 (THPT Chuyên KHTN – Lần 2 - 2018). Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)^2 .2^x = 2x(x^2-1) + 4(2^{x-1} - x^2)$ bằng:

- A. 4 B. 5 C. 2 D. 3

Câu 36 (THPT Chuyên KHTN – Lần 1 - 2018). Phương trình $\log_2 x . \log_4 x . \log_6 x = \log_2 x . \log_4 x + \log_4 x . \log_6 x + \log_2 x . \log_6 x$ có tập nghiệm là

- A. $\{1\}$ B. $\{2; 4; 6\}$ C. $\{1; 12\}$ D. $\{1; 48\}$

Câu 37 (THPT Hà Huy Tập – Lần 2 - 2018). Tập tất cả các giá trị m để phương trình $4^x + m.2^{x+1} + m^2 - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 > 3$ là

- A. $m < 0$ B. $m > 3$ C. $m < -3$ D. $\begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases}$

Câu 38 (THPT Chuyên Hưng Yên – Lần 2 - 2018). Biết phương trình $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1}$ có nghiệm là a . Tính giá trị biểu thức $P = a + \frac{1}{2} \log_{\frac{9}{2}} 2$.

- A. $P = \frac{1}{2}$ B. $P = 1 - \log_{\frac{9}{2}} 2$ C. $P = 1$ D. $P = 1 - \frac{1}{2} \log_{\frac{9}{2}} 2$

Câu 39 (THPT Phú Xuyên A – Lần 1 - 2018). Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} = \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2}$ là

- A. $\left\{\frac{8}{5}\right\}$ B. $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ C. $\{4\}$ D. $\{2\}$

Câu 40 (Sở GD&ĐT Hải Phòng – Lần 2 - 2018). Phương trình

$\ln(x^2 + x + 1) - \ln(2x^2 + 1) = x^2 - x$ có tổng bình phương các nghiệm bằng

- A. 5 B. 1 C. 9 D. 25

Câu 41 (THPT Chuyên Lào Cai – Lần 1 - 2018). Cho phương trình

$\log_3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} + x^2 + 1 = 3x$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

- A. 5 B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. 2

Câu 42 (Sở GD&ĐT Bắc Giang – Lần 1 - 2018). Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $(3^x)^{x-1} = 64$ thì giá trị của S bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. -6 C. -3 D. 1

Câu 43 (TT Diệu Hiền – Tháng 03 - 2018). Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $4^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0$ là

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 1

Câu 44 (Chuyên KHTN – Lần 4 - 2018). Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+1} + 3m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $(-\infty; 1)$ B. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ C. $[2; +\infty)$ D. $(2; +\infty)$

Câu 45 (THPT An Lão – Lần 2 - 2018). Cho hàm số $f(x) = e^{x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $x_1 \cdot x_2$.

- A. $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4}$ B. $x_1 \cdot x_2 = 1$ C. $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}$ D. $x_1 \cdot x_2 = 0$

Câu 46 (TT Diệu Hiền – Tháng 09 - 2018). Tìm m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

- A. $m > 0$ B. $m \in \emptyset$ C. $1 < m < 3$ D. $m = 4$

Câu 47 (THPT Trần Hưng Đạo – Lần 3 - 2018). Giải phương trình

$$x^2 \cdot 5^{x-1} - (3^x - 3 \cdot 5^{x-1})x + 2 \cdot 5^{x-1} - 3^x = 0.$$

- A. $x = 1, x = 2$ B. $x = 0, x = 1$ C. $x = \pm 1$ D. $x = \pm 2$

Câu 48 (THPT Lạng Giang – Lần 3 - 2018). Phương trình $3^x \cdot 5^{x-1} = 7$ có nghiệm là

- A. $\log_{15} 35$ B. $\log_{21} 5$ C. $\log_{21} 35$ D. $\log_{15} 21$

Câu 49 (THPT Trần Hưng Đạo – Lần 1 - 2018). Kí hiệu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $3^{x^2-4} = \pi^{\log_{\pi} 243}$. Tính giá trị của biểu thức $M = x_1 \cdot x_2$.

- A. $M = 9$ B. $M = -25$ C. $M = -3$ D. $M = -9$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2A	3D	4B	5C	6D	7C	8D	9C	10C
11C	12C	13B	14D	15C	16D	17B	18A	19C	20A
21D	22C	23B	24A	25C	26A	27A	28D	29D	30C
31B	32A	33B	34D	35B	36D	35C	38B	39A	40B
41B	42D	43A	44D	45D	46D	47C	48A	49D	

CHỦ ĐỀ 10: BÍ QUYẾT GIẢI NHANH PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khái niệm:

Nghiệm của phương trình $f(x)=0$ được kí hiệu là x_0 là giá trị sao cho $f(x_0)=0$. Quy ước viết tắt trong chủ đề: PT có nghĩa là phương trình.

2. Tìm nghiệm bằng máy tính Casio Vinacal

Sử dụng chức năng CALC r hoặc chức năng SHIFT SOLVE qr

3. Tìm số nghiệm bằng máy tính Casio Vinacal

Sử dụng chức năng MODE 7. Ta hiểu nếu $f(a).f(b) \leq 0$ thì phương trình có nghiệm thuộc $(a;b)$

4. Một số công thức Logarit thường gặp

$$(1) \log_a x^m = m \cdot \log_a |x|$$

$$(2) \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_{|a|} x$$

$$(3) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} (0 < b \neq 1)$$

$$(4) \log_a x = t \Leftrightarrow x = a^t$$

$$(5) a^{\log_a x} = x$$

$$(6) \log_a x = \frac{1}{\log_x a} (x \neq 1)$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Đưa về cùng cơ số nếu đưa được các cơ số về một cơ số cơ bản 2, 3, 5

Ví dụ 1: (THPT Lương Đắc Bằng – 2017)

Phương trình $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ có hai nghiệm x_1, x_2 , khi đó $|x_1 - x_2|$ là

A. $8 + 2\sqrt{6}$

B. 8

C. $2\sqrt{6}$

D. $4\sqrt{6}$

Giải

Phương trình $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ có TXĐ: $D = (-4; 4) \setminus \{-1\}$.

Khi đó, PT $\Leftrightarrow \log_{2^2} (x+1)^2 + 2 = \log_{\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}} (4-x)^{\frac{1}{2}} + \log_{2^3} (4+x)^3$

$$\Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (4-x) + \log_2 (4+x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{16-x^2}{|x+1|} = 2 \Leftrightarrow \frac{16-x^2}{|x+1|} = 4 \Leftrightarrow 16-x^2 = 4|x+1|.$$

$$x+1 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4. PT \Leftrightarrow 16-x^2 = 4x+4 \Leftrightarrow x^2+4x-12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-6 \end{cases} \Rightarrow x=2$$

TH1:

$$TH2: x+1 < 0 \Rightarrow -4 < x < -1.$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $16-x^2 = -4x-4$

$$\Leftrightarrow x^2-4x-20=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2\sqrt{6} \\ x=2-2\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow x=2-2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = 2\sqrt{6}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Chú ý:

$\log_a x^2 = 2 \log_a |x|$ và học sinh thường biến đổi sai lầm thành $\log_a x^2 = 2 \log_a x$ sẽ bị thiếu mất một nghiệm x

Ví dụ 2: (Đề minh họa THPT – 2018)

Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$ bằng

A. $\frac{82}{9}$

B. $\frac{80}{9}$

C. 9

D. 0

Giải

Cách 1: Tự luận

Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $\log_9 x = \log_{3^2} x = \frac{1}{2} \log_3 x$. Tương tự: $\log_{27} x = \frac{1}{3} \log_3 x$, $\log_{81} x = \frac{1}{4} \log_3 x$

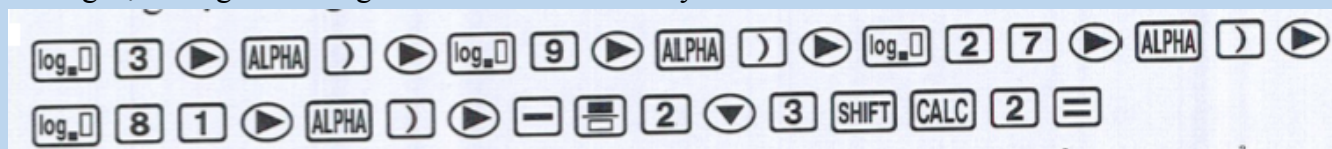
Thế vào PT (1) ta được: $\frac{1}{24} \log_3^4 x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_3^4 x = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9, x = \frac{1}{9}$

Vậy PT (1) có hai nghiệm và tổng hai nghiệm là $9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$

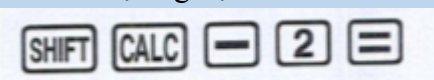
$\Rightarrow$ **Chọn A**

Cách 2: Casio và Vinacal

Dò 1 nghiệm bằng chức năng SHIFT SOLVE của máy tính Casio Vinacal



Ta thu được nghiệm thứ nhất là 9. Tiếp tục SHIFT SOLVE lần thứ 2 để tìm nghiệm thứ 2



Ta thu được nghiệm thứ hai là 0,1(1). Vậy tổng hai nghiệm là $9 + 0,1(1) \approx \frac{82}{9}$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Kinh nghiệm

Với 2 lần SHIFT SOLVE ta thường SOLVE FOR X là 2 và -2 thì sẽ thu được kết quả thuận lợi hơn.

Ví dụ 3: (THPT Kim Liên – 2018)

Tìm n biết $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_{2^2} x} + \frac{1}{\log_{2^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{2^n} x} = \frac{465}{\log_2 x}$ luôn đúng với mọi $x > 0, x \neq 1$.

A. $n = 31$

B. $n \in \emptyset$

C. $n = 30$

D. $n = -31$

Giải

Điều kiện: $\log_2 x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \neq \log_2 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Với $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ thì $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_{2^2} x} + \frac{1}{\log_{2^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{2^n} x}$

$$= \log_x 2 + \log_x 2^2 + \log_x 2^3 + \dots + \log_x 2^n$$

$$= \log_x (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \dots 2^n) = 465 \log_x 2 = \log_x 2^{465} \Rightarrow 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \dots 2^n = 2^{465}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n = 465 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(n+1) = 465$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 930 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 30 \\ n = -31 \end{cases} \Rightarrow n = 30$$

$\Rightarrow$ Chọn C.

Bình luận

Khi sử dụng công thức $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ thì cần đảm bảo $x \neq 1$ và $a \neq 1$, Ta thường biện luận để $x \neq 1$ hoặc không biện luận được thì phải chia trường hợp $x = 1$ hoặc $x \neq 1$

Ví dụ 4: (Chuyên ĐHSPT HN – 2018)

Tính nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) = -2$ bằng

- A. 1 B. 0 C. 5 D. $\log_6 5$

$\Rightarrow$ Chọn B

Ví dụ 5: (Sở GD&ĐT Hải Dương – 2017)

Phương trình $\log_2 (5 - 2^x) = 2 - x$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $P = x_1 + x_2 + x_1 x_2$.

- A. 2 B. 11 C. 3 D. 9

$\Rightarrow$ Chọn A

Ví dụ 6: (THPT Chuyên Thái Nguyên – 2017)

Cho phương trình: $\log_{3+2\sqrt{2}} (x+m-1) + \log_{3-2\sqrt{2}} (mx+x^2) = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm thực duy nhất.

- A. $m = 1$ B. $\begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$ C. $-3 < m < 1$ D. $m > 1$

$\Rightarrow$ Chọn D

Dạng 2: Đặt ẩn phụ nếu các số hạng chứa các thành phần giống nhau

Ví dụ 1: (Sở GD&ĐT Bình Phước – 2017)

Tìm nghiệm của phương trình $3 - \log_2 (5^x + 2) = 2 \log_{(5^x+2)} 2$.

- A. $x = \log_2 5$ B. $x = 2$ C. $x = \log_5 2$ D. $x = 1, x = 2$

Giải

Ta thấy $\log_{5^x+2} 2 = \frac{1}{\log_2(5^x+2)}$ nên nếu đặt $\log_2(5^x+2) = t$ thì $\log_{5^x+2} 2 = \frac{1}{t}$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 3-t = \frac{2}{t} \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$

Với $t=1 \Rightarrow \log_2(5^x+2) = 1 \Leftrightarrow 5^x+2 = 2 \Leftrightarrow 5^x = 0$ (vô nghiệm)

Với $t=2 \Rightarrow \log_2(5^x+2) = 2 \Leftrightarrow 5^x+2 = 4 \Leftrightarrow 5^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_5 2$

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Tổng kết

Nếu đặt $t = \log_a x$ thì $\log_x a = \frac{1}{t}$ với $0 < x \neq 1$

Ví dụ 8: (THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa – Lần 1 – 2017)

Giải phương trình $\log_2(2^x-1) \cdot \log_4(2^{x+1}-2) = 1$. Ta có nghiệm

A. $x = \log_2 3$ và $x = \log_2 5$

B. $x = 1; x = -2$

C. $x = \log_2 3$ và $x = \log_2 \frac{5}{4}$

D. $x = 1$

Giải

Ta thấy: $\log_4(2^{x+1}-2) = \log_{2^2}(2^{x+1}-2) = \frac{1}{2} \log_2(2^{x+1}-2)$

Lại thấy: $2^{x+1}-2 = 2(2^x-1)$

$\Rightarrow \log_2(2^{x+1}-2) = \log_2 2 + \log_2(2^x-1) = 1 + \log_2(2^x-1)$

Đặt $t = \log_2(2^x-1)$ khi đó phương trình ban đầu

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t(1+t) = 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x-1=1 \\ 2^x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x=2 \Leftrightarrow x=1$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Phân tích

Ta thấy cơ số 4 có thể đưa về cơ số 2 và $2^{x+1}-2$ cũng đưa được về 2^x-1 nên đặt ẩn phụ $t = \log_2(2^x-1)$

Ví dụ 9: (Sở GD&ĐT Hải Dương – 2017)

Tìm m để phương trình $\log_{\sqrt{3}}^2 x - m \log_{\sqrt{3}} x + 9 = 0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1.

A. $m = -4$

B. $m = \pm 6$

C. $m = -6$

D. Không tồn tại m

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Ví dụ 10: (Chuyên ĐHSPT HN – 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^8} + a + 1 = 0$

A. $a = 1$

B. $a < -1$

C. Không tồn tại a

D. $a < 1$

⇒ **Chọn B**

Dạng 3: Phương pháp Logarit hóa 2 vế

Ví dụ 11: (Sở GD&ĐT TP HCM – Cụm 8 – 2018)

Các nghiệm của phương trình $x = 2^{\log_3^2 x}$ có thuộc khoảng nào?

A. $(-5; -3)$

B. $(-4; 1)$

C. $(1; 2)$

D. $(-1; 6)$

Giải

Điều kiện: $x > 0$. Logarit hóa 2 vế theo cơ số 3 ta được: $\log_3 x = \log_3 2^{\log_3^2 x}$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = \log_3^2 x \cdot \log_3 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x \cdot \log_3 2 - \log_3 x = 0$$

$$\text{TH1: } \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{TH2: } \log_3 x \cdot \log_3 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{1}{\log_3 2} \Rightarrow x = 3^{\log_2 3}$$

Vậy các nghiệm của phương trình thuộc $(-1; 6)$

⇒ **Chọn D**

Bình luận

Logarit hóa 2 vế được thực hiện nếu xuất hiện số hạng dạng $a^{\log_b x}$

Ví dụ 12: (THPT Chuyên Bắc Giang – Lần 1 – 2017)

Biết rằng phương trình $(x-2)^{\log_2[4(x-2)]} = 4 \cdot (x-2)^3$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Tính $2x_1 - x_2$.

A. 1

B. 3

C. -5

D. -1

Giải

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Logarit hóa 2 vế theo cơ số 2: $\log_2 (x-2)^{\log_2[4(x-2)]} = \log_2 [4(x-2)^3]$

$$\Leftrightarrow \log_2 [4(x-2)] \cdot \log_2 (x-2) = \log_2 [4(x-2)^3] \quad (1)$$

Nếu đặt $t = \log_2 (x-2)$

cho dễ nhìn thì $\log_2 [4(x-2)] = \log_2 4 + \log_2 (x-2) = 2 + t$

$$\text{và } \log_2 [4(x-2)^3] = 2 + 3t$$

$$\Leftrightarrow (2+t)t = 2+3t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (x-2) = -1 \\ \log_2 (x-2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{1}{2} \\ x-2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 6 \end{cases}$$

Khi đó (1)

$$\text{Vì } x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 2 \cdot \frac{5}{2} - 6 = -1$$

⇒ **Chọn D**

Bình luận

Ta thấy $(x-2)^{\log_2[4(x-2)]}$ vẫn là dạng $a^{\log_b x}$ nên ta tiến hành logarit hóa 2 vế

Dạng 4: Phương pháp phân tích nhân tử nếu phương trình có các số hạng uv, u, v

Ví dụ 13: (Sở GD&ĐT Bà Rịa Vũng Tàu – Lần 1 – 2017)

Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_5 x + \log_3 x = 1 + \log_3 x \cdot \log_5 x$ bằng

A. 64

B. 34

C. 8

D. 2

Giải

$$PT \Leftrightarrow \log_3 x \cdot \log_5 x - \log_3 x - \log_5 x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x (\log_5 x - 1) - (\log_5 x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 1)(\log_5 x - 1) = 0$$

$$TH1: \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3^1 = 3$$

$$TH2: \log_5 x = 1 \Leftrightarrow x = 5^1 = 5$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm là: $3^2 + 5^2 = 34$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Bình luận

Nếu coi $u = \log_3 x$ và $v = \log_5 x$ thì $\log_3 x \cdot \log_5 x = uv \Rightarrow$ Chắc chắn dùng phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 14: (Sở GD&ĐT Hải Phòng – Lần 2 – 2017)

Phương trình $\ln(x^2 + x + 1) - \ln(2x^2 + 1) = x^2 - x$ có tổng lập phương các nghiệm bằng

A. 5

B. 1

C. 9

D. 25

Giải

$$PT \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) - \ln(2x^2 + 1) = (2x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = \ln(2x^2 + 1) + (2x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 + x + 1) = f(2x^2 + 1)$$

Xét hàm đại diện: $f(t) = \ln t + t$ với t đại diện cho $x^2 + x + 1$ và $2x^2 + 1$

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \\ 2x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow t > 0$$

Tính $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0$ trên miền $(0; +\infty) \Rightarrow f(x^2 + x + 1) = f(2x^2 + 1)$ có nghiệm duy nhất trên miền $(0; +\infty) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1$

Vậy tổng lập phương các nghiệm là: $0^3 + 1^3 = 1$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Bình luận

Ta thấy xuất hiện 2 hàm với 2 tính chất khác nhau là hàm logarit $\ln(x^2 + x + 1)$ và hàm đa thức $x^2 - x$ thì rõ ràng ta tách đối xứng.

Ví dụ 15 : (THPT Chuyên Lào Cai – Lần 1 – 2017)

Cho phương trình $\log_3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} + x^2 + 1 = 3x$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 3

B. 5

C. $\sqrt{5}$

D. 2

$\Rightarrow$ **Chọn A**

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

- Câu 1 (Sở GD&ĐT Bắc Giang - 2018).** Tích các nghiệm của phương trình $\log_3 x = \frac{\log_x 3x}{1 - \log_x 9}$ bằng
A. 3 B. 1 C. 9 D. 27
- Câu 2 (Sở GD&ĐT Bắc Giang - 2018).** Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để $\log_2(x^2 - 2x + 5) - m \log_{x^2 - 2x + 5} 2 = 5$ có hai nghiệm phân biệt là nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4$.
A. $\left(-\frac{25}{4}; -6\right]$ B. $\left(-\frac{25}{4}; -6\right)$ C. $\left(-\frac{25}{4}; +\infty\right)$ D. $\left[-\frac{25}{4}; -6\right]$
- Câu 3 (THPT Hàn Thuyên - 2018).**
Tìm x để đẳng thức sau luôn đúng: $\log_5(x^2 - 2x - 3) = \log_5(x+1) + \log_5|x-3|$
A. $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ B. $x > 3$ C. $\begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$ D. $x > -1$
- Câu 4 (Chuyên Hưng Yên - 2018).** Phương trình $\log_2(x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$ có bao nhiêu nghiệm?
A. Vô nghiệm B. 2 nghiệm C. Vô số nghiệm D. 1 nghiệm
- Câu 5 (Sở GD&ĐT TP.HCM - 2018).** Phương trình $\log_5(x+10) = \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{1}{5}$ có nghiệm $x = a$. Khi đó đường thẳng $y = ax + 1$ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây
A. $(4; -1)$ B. $(2; 3)$ C. $(-1; -14)$ D. $(-3; 5)$
- Câu 6 (Sở GD&ĐT TPHCM - 2018).** Cho $\log_3 a = \log_4 b = \log_{12} c = \log_{13}(a+b+c)$. Hỏi $\log_{abc} 144$ thuộc tập hợp nào sau đây?
A. $\left\{\frac{7}{8}; \frac{8}{9}; \frac{9}{10}\right\}$ B. $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right\}$ C. $\left\{\frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}\right\}$ D. $\{1; 2; 3\}$
- Câu 7 (THPT Lương Thế Vinh - Lần 1 - 2018).**
Phương trình $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$ có hai nghiệm x_1, x_2 , khi đó $|x_1 - x_2|$ là
A. $8 + 2\sqrt{6}$ B. 8 C. $2\sqrt{6}$ D. $4\sqrt{6}$
- Câu 8 (Đề Thi THPTQG - 2018).** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$
A. $S = \{4\}$ B. $S = \{3\}$ C. $S = \{-2\}$ D. $S = \{1\}$
- Câu 9 (Sở GD - ĐT Tp Hồ Chí Minh - CỤM 5 - 2018).** Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\log^2 x + \log_3 x \cdot \log 27 - 4 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log x_1 + \log x_2$.
A. $A = 3$ B. $A = -3$ C. $A = -2$ D. $A = 4$
- Câu 10 (Sở GD-ĐT Tp Hồ Chí Minh - CỤM 5 - 2018).** Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho $\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$
A. 2017 B. 2019 C. 2016 D. 2018
- Câu 11 (THPT Lê Lợi - Lần 3 - 2018).** Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1$
A. 2 B. -6 C. 12 D. 5

Câu 12 (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 4 - 2018). Biết rằng phương trình $\log_3^2 x = \log_3 \left(\frac{x^4}{3} \right)$ có hai nghiệm là a, b. Khi đó a.b bằng

- A. 64 B. 9 C. 8 D. 81

Câu 13 (Sở GD-ĐT Hải Dương - 2018). Tìm m để phương trình: $\log_{\sqrt{3}}^2 x - m \log_{\sqrt{3}} x + 9 = 0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1.

- A. $m = -4$ B. $m = \pm 6$ C. $m = -6$ D. Không tồn tại m

Câu 14 (Sở GD-ĐT Tp Hồ Chí Minh – Cụm 8 - 2018). Tập nghiệm của phương trình

- A. $\mathbb{R}$ B. $[0; +\infty)$ C. $(0; +\infty)$ D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Câu 15 (Sở GD-ĐT Tp Hồ Chí Minh – Cụm 8 - 2018). Tập nghiệm của phương trình $\frac{x^2 + x}{\ln(x-1)} = 0$ là

- A. $\{0; -1\}$ B. $\emptyset$ C. $\{-1\}$ D. $\{0\}$

Câu 16 (Đề Minh Họa – Lần 3 – BGD - 2018). Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2 \log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 2017 B. 4014 C. 2018 D. 4015

Câu 17 (Sở GD-ĐT Bình Phước - 2018). Cho phương trình $\log_4 x \cdot \log_2(4x) + \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{x^3}{2} \right) = 0$. Nếu đặt $t = \log_2 x$ ta được phương trình nào sau đây?

- A. $t^2 + 14t - 4 = 0$ B. $t^2 + 11t - 3 = 0$ C. $t^2 + 14t - 2 = 0$ D. $t^2 + 11t - 2 = 0$

Câu 18 (THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm – Lần 1 - 2018). Phương trình $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$ có tổng các nghiệm bằng:

- A. 3 B. 84 C. 81 D. 78

Câu 19 (THPT TH Cao Nguyên – Lần 1 - 2018). Số nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 4 \log_3(3x) + 7 = 0$ là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 20 (THPT Chu Văn An – Lần 2 - 2018). Hỏi phương trình $2 \log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2017\pi)$?

- A. 1009 nghiệm B. 1008 nghiệm C. 2017 nghiệm D. 2018 nghiệm

Câu 21 (THPT Thanh Chương – Lần 1 - 2018). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\log_2(5^{-x} + 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^{-x} + 2) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; +\infty)$

- A. $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ B. $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$ C. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ D. $(0; 2)$

Câu 22 (Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Lần 2 - 2018). Tìm tập hợp tất cả các tham số thực m để phương trình sau có nghiệm thực trong đoạn $\left[\frac{5}{4}; 4\right]$:

- A. $m < -3$ B. $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$
C. $m > \frac{7}{3}$ D. $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = 3 \ln \frac{a}{b} - \frac{5}{6}$

Câu 23 (Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Lần 2 - 2018). Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(\log_2 x) = 1$.

A. $x = 8$

B. $x = 6$

C. $x = 9$

D. $x = 2$

Câu 24 (THPT Chuyên Tuyên Quang – Lần 1 - 2018). Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 5 = 0$ có nghiệm trên đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$

A. $m \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

B. $[-2; +\infty)$

C. $m \in (-\infty; 0)$

D. $m \in [-2; 0]$

Câu 25 (THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Lần 1 - 2018). Cho a, b, x là các số thực dương. Biết $\log_3 x = 2 \log_{\sqrt{3}} a + \log_{\frac{1}{3}} b$. Tính x theo a và b .

$x = 4a - b$

A.

B. $x = \frac{a^4}{b}$

$x = a^4 - b$

C.

D. $x = \frac{a}{b}$

Câu 26 (Chuyên Lê Quý Đôn – Lần 1 - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $2 \log_2 |x| + \log_2 |x+3| = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (0; 2)$

B. $m \in \{0; 2\}$

C. $m \in (-\infty; 2)$

D. $m \in \{2\}$

Câu 27 (THPT Chuyên KHTN – Lần 2 - 2018). Số nghiệm thực của phương trình $2 \log_2 (x-3) = 2 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3-2x}$ là

A. 2

B. 0

C. 1

D. 3

Câu 28 (THPT Chuyên KHTN – Lần 2 - 2018). Phương trình $\log_2 (x^3 - 2x) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1}$ có bao nhiêu nghiệm

A. 3

B. 0

C. 1

D. 2

Câu 29 (THPT Chuyên KHTN – Lần 1 - 2018).

Phương trình $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_6 x = \log_2 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_6 x + \log_2 x \cdot \log_6 x$ có tập nghiệm là

A. $\{1\}$

B. $\{2; 4; 6\}$

C. $\{1; 12\}$

D. $\{1; 48\}$

Câu 30 (THPT Chuyên KHTN – Lần 1 - 2018). Nếu $\log_2 (\log_8 x) = \log_8 (\log_2 x)$ thì $(\log_2 x)^2$ bằng

A. 3

B. $3\sqrt{3}$

C. 27

D. 3^{-1}

Câu 31 (THPT Hà Huy Tập – Lần 2 - 2018). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$

$m \in (-\infty; 0]$

A.

B. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

C. $m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$

D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$

Câu 32 (THPT Phú Xuyên A – Lần 1 - 2018). Tích các nghiệm của phương trình $\log_x (125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$ là

A. $\frac{7}{125}$

B. 630

C. $\frac{630}{625}$

D. $\frac{1}{125}$

Câu 33 (Sở GD&ĐT Hải Phòng – Lần 2 - 2018). Phương trình $\ln(x^2 + x + 1) - \ln(2x^2 + 1) = x^2 - x$ có tổng bình phương các nghiệm bằng

A. 5

B. 1

C. 9

D. 25

Câu 34 (THPT Chuyên Lào Cai – Lần 1 - 2018). Cho phương trình $\log_3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} + x^2 + 1 = 3x$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 5

B. 3

C. $\sqrt{5}$

D. 2

- Câu 35 (THPT Chuyên Bắc Giang – Lần 1 - 2018).** Biết rằng phương trình $(x-2)^{\log_2[4(x-2)]} = 4 \cdot (x-2)^3$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Tính $2x_1 - x_2$
- A. 1 B. 3 C. -5 D. -1
- Câu 36 (THPT Chuyên ĐH KHTN – Lần 1 - 2018).** Tìm m để phương trình $m \ln(1-x) - \ln x = m$ có nghiệm $x \in (0;1)$
- A. $m \in (0; +\infty)$ B. $m \in (1; e)$ C. $m \in (-\infty; 0)$ D. $m \in (-\infty; -1)$
- Câu 37 (TT Diệu Hiền – Tháng 10 – 2018).** Hệ phương trình $\begin{cases} x+y=6 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$ có nghiệm là
- A. (1;5) và (5;1) B. (3;3) và (4;2) C. (4;2) và (2;4) D. (2;4) và (5;1)
- Câu 38 (TT BDVH 28 Lý Tự Trọng – Lần 1 - 2018).** Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_{x+1}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- Câu 39 (THPT Trần Hưng Đạo – Lần 1 – 2018).** Kí hiệu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $3^{x^2-4} = \pi^{\log_x 243}$. Tính giá trị của biểu thức $M = x_1 x_2$.
- A. $M = 9$ B. $M = -25$ C. $M = -3$ D. $M = -9$
- Câu 40 (THPT Cẩm Bình – Lần 1 - 2018).** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{3}; 3^{\sqrt{3}}\right]$?
- A. Vô số B. 1 C. 2 D. 3
- Câu 41 (THPT Chuyên Phan Bội Châu – Lần 1 - 2018).** Phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(2^x + 1) + \log_3(4^x + 5) = 1$ có tập nghiệm là tập nào sau đây ?
- A. $\{1; 2\}$ B. $\left\{3; \frac{1}{9}\right\}$ C. $\left\{\frac{1}{3}; 9\right\}$ D. $\{0; 1\}$
- Câu 42 (THPT Chuyên Phan Bội Châu – Lần 1 - 2018).** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_5(25^x - \log_5 m) = x$ có nghiệm duy nhất.
- A. $m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ B. $m = 1$ C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \end{cases}$ D. $m \geq 1$
- Câu 43 (THPT Công Nghiệp Hòa Bình – Lần 1 - 2018).** Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có hai nghiệm phân biệt $x \in [1; 8]$
- A. $2 < m < 3$ B. $2 \leq m \leq 6$ C. $2 < m \leq 3$ D. $3 \leq m \leq 6$
- Câu 44 (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 1 - 2018).** Số nghiệm của phương trình $\log_3|x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5(x^2 - \sqrt{2}x + 2)$ là
- A. 3 B. 2 C. 1 D. 4
- Câu 45 (THPT Chuyên KHTN – Lần 3 - 2018).** Tìm m để phương trình $m \ln(1-x) - \ln x = m$ có nghiệm $x \in (0;1)$
- A. $m \in (0; +\infty)$ B. $m \in (1; e)$ C. $m \in (-\infty; 0)$ D. $m \in (-\infty; -1)$
- Câu 46 (THPT Chuyên KHTN – Lần 3 - 2018).** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^{\sqrt{2x+1}} - 3^{x+1} \leq x^2 - 2x$ là

- A. $[0; +\infty)$ B. $[0; 2]$ C. $[2; +\infty)$ D. $[2; +\infty) \cup \{0\}$

Câu 47 (Chuyên Lê Quý Đôn – Lần 1 - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $2\log_2|x| + \log_2|x+3| = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \in (0; 2)$ B. $m \in \{0; 2\}$ C. $m \in (-\infty; 2)$ D. $m \in \{2\}$

Câu 48 (THPT Chuyên Thái Bình – Lần 3 - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0$$

- A. $\frac{-1}{4} < m < 0$ B. $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$ C. $5 < m < \frac{21}{4}$ D. $\frac{-1}{4} \leq m \leq 2$

Câu 49 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh – Lần 1 - 2018). Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2\log_4(x-3) + \log_4(x-5)^2 = 0$

- A. 8 B. $8 + \sqrt{2}$ C. $8 - \sqrt{2}$ D. $4 + \sqrt{2}$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2B	3B	4D	5C	6B	7C	8A	9B	10C
11A	12D	13C	14C	15B	16C	17A	18B	19C	20A
21D	22B	23A	24D	25B	26D	27B	28D	29D	30C
31D	32B	33B	34D	35B	36A	37C	38B	39D	40C
41D	42C	43C	44B	45A	46D	47D	48C	49B	

CHỦ ĐỀ 11. BÍ QUYẾT GIẢI NHANH BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Phương trình thường dùng

Để giải bất phương trình thì sử dụng các phương pháp, các dấu hiệu giống như giải phương trình mũ - phương trình logarit là đưa về cùng cơ số, đặt ẩn phụ, logarit hóa 2 vế, phân tích nhân tử, hàm số, đánh giá ...

2. Vai trò của cơ số trong bài bất phương trình

Nếu cơ số > 1 thì bất phương trình giữ nguyên chiều $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ và $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$. Nếu cơ số $0 < a < 1$ thì bất phương trình đổi chiều $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ và $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

3. Lược đồ con rắn

Bước 1: Chuyển bài toán bất phương trình về bài toán xét dấu bằng cách chuyển hết các số hạng về vế trái. Khi đó bất phương trình sẽ có dạng vế trái ≥ 0 hoặc vế trái ≤ 0

Bước 2: Sử dụng CALC tìm các giá trị tới hạn của (làm cho vế trái $= 0$ hoặc không xác định). Dấu của bất phương trình có trong các khoảng tới hạn là không đổi. Dùng CALC lấy một giá trị đại diện để xét dấu.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Đưa về cùng cơ số nếu xuất hiện cơ số là lũy thừa của 2, 3, 5 ...

Ví dụ 1 (THPT Chuyên ĐHSPT HN – 2017): Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$

A. $(1; 2)$ B. $(2; +\infty)$ C. $[2; +\infty)$ D. $(1; 2]$

Giải

Cách 1: Tự luận

Điều kiện: $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

Vì $\frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow \text{BPT} \Leftrightarrow 3^{-\sqrt{x+2}} > 3^{-x} \quad (1)$

Vì cơ số $3 > 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -\sqrt{x+2} > -x \Leftrightarrow x > \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > x+2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \text{ hoặc } x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

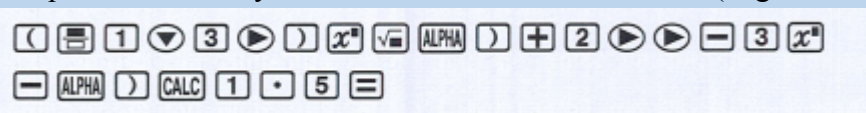
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(2; +\infty)$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Cách 2: Casio Vinacal

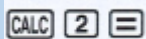
Đưa BPT về dạng xét dấu $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} - 3^{-x} > 0$

Nhập vế trái vào máy tính Casio rồi CALC với $X = 1.5$ (là giá trị thuộc đáp án A và D)



Ta thu được kết quả mang dấu $-$ trái với dấu của $(1) \Rightarrow$ Đáp án chứa 1.5 là sai $\Rightarrow$ A, D sai

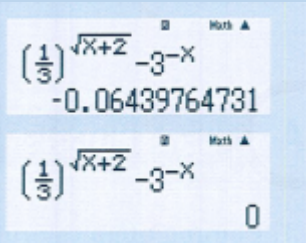
Tiếp tục CALC với $X = 2$



Ta thu được giá trị về trái $=0$ không thỏa mãn (1) $\Rightarrow$ Đáp số chứa 2 là sai $\Rightarrow$ C sai
 $\Rightarrow$ **Chọn B**

Mở rộng

$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{27}, 81, 243, \dots$ $\Rightarrow$ đều đưa được về cơ số 3 Dùng phương pháp đưa về cùng cơ số
 Nếu cơ số >1 thì BPT giữ nguyên chiều và <1 nếu BPT ngược chiều



Ví dụ 2 (THPT Chuyên Thái Bình – 2018): Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1

B. 2

C. 4

D. 3

Giải

Cách 1: Tự luận

Điều kiện: $\begin{cases} x+7 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1 (*)$

BPT $\Leftrightarrow \log_{2^2}(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(x+7) > \log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+7} > \log_2(x+1) (1)$

Vì cơ số $2 > 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sqrt{x+7} > x+1 \Leftrightarrow x+7 > x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow x^2+x-6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$

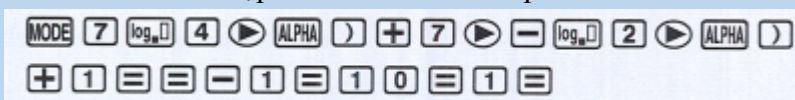
Kết hợp điều kiện (*) ta thấy nghiệm BPT là $-1 < x < 2$

$\Rightarrow$ có 2 nghiệm nguyên là $x=0, x=1$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Cách 2: Casio Vinacal

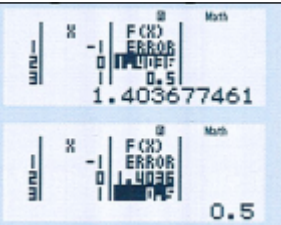
Vì đáp Số không cho khoảng nghiệm cụ thể nên ta tiến hành dò nghiệm trên một khoảng với chức năng MODE 7 và thiết lập Start -1 End 10 Step 1



Ta thấy có 2 giá trị $x=0, x=1$ làm cho $F(x)$ mang giá trị dương (>0) $\Rightarrow$ Có 2 giá trị nguyên thỏa mãn
 $\Rightarrow$ **Chọn B**

Mở rộng

Để dò khoảng nghiệm mà đề bài chưa cho ta tìm tập xác định, dự đoán khoảng nghiệm và dò khoảng nghiệm bằng chức năng MODE 7



Ví dụ 3 (THPT Phan Đình Phùng – Lần 1 – 2017): Bất phương trình $(\sqrt{3}-1)^{x+1} < (4-2\sqrt{3})^{x-1}$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-\infty; +\infty)$ B. $S = (-\infty; 3]$ C. $S = (3; +\infty)$ D. $S = (-\infty; 3)$

=> Chọn D

Ví dụ 4 (THPT Hải Phòng – 2017): Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(\log_3|x-3|) \geq 0$

- A. Vô số B. 7 C. 4 D. 6

=> Chọn C

Dạng 2: Đặt ẩn phụ

Ví dụ 5 (THPT Lê Lợi – 2017): Giải bất phương trình $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$ ta được tập nghiệm $S = [a; b]$. Khi đó giá trị của a.b là

- A. 1 B. 2 C. 12 D. $\frac{3}{2}$

Giải

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_6 x$

Khi đó $x = 6^t$ và phương trình $\Leftrightarrow 6^{t^2} \leq 6 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \log_6 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq x \leq 6 \Rightarrow S = \left[\frac{1}{6}; 6 \right] \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow a.b = 1$$

=> Chọn A

Phân tích

Ta nhận thấy đề bài chỉ có 1 đại lượng chứa logarit duy nhất là $\log_6 x$ nên ta đặt đại lượng này là $t = \log_6 x$

Ví dụ 6 (Chuyên Lê Quý Đôn – 2017): Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3.4^x - 5.6^x + 2.9^x < 0$

- A. $(-\infty; 0)$ B. $\left(\frac{2}{5}; 1\right)$ C. $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ D. $(0; 1)$

Giải

Bất phương trình

$$3.4^x - 5.6^x + 2.9^x < 0 \Leftrightarrow 3.(2^x)^2 - 5.2^x.3^x + 2.(3^x)^2 < 0$$

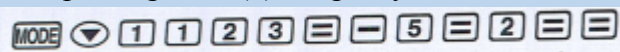
Chia cả 2 vế cho 3^{2x} (là đại lượng > 0) ta được:

$$\Leftrightarrow 3.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 - 5.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 < 0 \quad (1)$$

$$t = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad (1) \Leftrightarrow 3.t^2 - 5.t + 2 < 0 \quad (2)$$

Đặt khi đó

Giải phương trình (2) bằng máy tính Casio



Ta thu được $\frac{2}{3} < t < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^1 < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^0$

Vì cơ số $\frac{2}{3} < 1$ nên $(3) \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$\Rightarrow$ Chọn D

Bình luận

Coi $2^x = u, 3^x = v$ ta thu được phương trình đẳng cấp bậc 2: $u^2 + uv + v^2$ và được giải bằng cách chia cả 2 vế cho v^2 rồi đặt ẩn phụ $t = \frac{u}{v}$

Ví dụ 7 (THPT Hàm Rồng – 2017): Các giá trị của tham số a để bất phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq a.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm thực là

A. $a \in [4; +\infty)$

B. $a \in (-2; +\infty)$

C. $a \in (-\infty; 4]$

D. $a \in (-\infty; 4)$

Giải

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1$, bất phương trình trở thành

$$2^t + 3^{1-t} \geq a.3^t \Leftrightarrow a \leq \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2t} = f(t)$$

BPT đã cho có nghiệm thực khi $a \leq f(t)$ có nghiệm $t \in [0; 1]$.

$$a \leq \text{Max}_{t \in [0; 1]} f(t)$$

Tức là

$$f'(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t \ln\left(\frac{2}{3}\right) + 6\left(\frac{1}{3}\right)^{2t} \ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0, \forall t \in [0; 1]$$

$$\Rightarrow \text{Max}_{t \in [0; 1]} f(t) = f(0) = 4$$

Vậy $a \leq 4$

$\Rightarrow$ Chọn C

Chú ý

Nếu đề bài hỏi bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $t \in [0; 1]$ thì $a \leq f(\min)$

Phân tích

Hệ thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ là luôn đúng với mọi x cho nên nếu đặt $t = \sin^2 x$ hoặc $t = \cos^2 x$ thì số hạng còn lại sẽ là $1 - t^2$ rõ ràng ta sẽ đặt ẩn phụ

Ví dụ 8 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh – Lần 1 – 2017): Tập nghiệm của bất phương trình

$$\frac{16 \log_2 x}{\log_2 x^2 + 3} - \frac{3 \log_2 x^2}{\log_2 x + 1} < 0$$

$$(0;1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

A.

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$$

B.

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; \sqrt{2})$$

C.

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

D.

$\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 9 (THPT Chu Văn An – Lần 2 – 2017): Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (1; 64)$

A. $m < 0$

B. $m \leq 0$

C. $m \geq 0$

D. $m > 0$

$\Rightarrow$ Chọn C

Dạng 3: Một số dạng toán bất phương trình khác

Ví dụ 10 (Chuyên Thái Bình – 2017): giải bất phương trình $2^{x^2-4} \geq 5^{x-2}$

$$A. x \in (-\infty; -2) \cup (\log_2 5; +\infty)$$

$$B. x \in (-\infty; -2] \cup (\log_2 5; +\infty)$$

$$C. x \in (-\infty; \log_2 5 - 2) \cup (2; +\infty)$$

$$D. x \in (-\infty; \log_2 5 - 2] \cup [2; +\infty)$$

Giải

Logarit hóa 2 vế theo cơ số 2 là một cơ số > 1 ta được

$$\log_2 (2^{x^2-4}) \geq \log_2 (5^{x-2}) \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq (x - 2) \log_2 5$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2 - \log_2 5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \log_2 5 - 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Chọn D

Phân tích

Trong phương pháp logarit hóa 2 vế, nếu cơ số chọn là cơ số > 1 thì bất phương trình không đổi chiều còn cơ số < 1 thì bất phương trình đổi chiều

Ví dụ 11 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – 2017): Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$

A. 6

B. 4

C. 3

D. 5

Giải

Tách đối xứng, bất phương trình ban đầu

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2-15x+100} + x^2 - 15x + 100 < 2^{x^2+10x-50} + x^2 + 10x - 50$$

Nếu coi $u = x^2 - 15x + 100$ và $v = x^2 + 10x - 50$ thì bất phương trình

$$\Leftrightarrow f(u) < f(v) \quad (1)$$

Xét hàm số đại diện $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ với mọi $t \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Vậy } f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} \text{ nên } x = \{11; 12; 13; 14\}$$

$\Rightarrow$ Chọn B

Phân tích

Bất phương trình chứa 2 hàm với 2 tính chất (hàm lũy thừa, hàm đa thức) thì ưu tiên tách đối xứng và sử dụng phương pháp hàm số

Ví dụ 12 (Thi HSG tỉnh Ninh Bình – 2017): Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2.2^x + 3.3^x - 6^x + 1 > 0$.

- A. $S = (2; +\infty)$ B. $S = (0; 2)$ C. $S = \mathbb{R}$ D. $S = (-\infty; 2)$

Giải

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow 2.2^x + 3.3^x + 1 > 6^x \Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{6}\right)^x + 3.\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 1$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } f(x) = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x \quad (1) \Leftrightarrow f(x) > f(2) \quad (2)$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^x \ln\left(\frac{1}{6}\right) < 0 \quad \text{với mọi } x$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow x < 2$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Dấu hiệu

Một bất phương trình có 3 cơ số đều > 1 hoặc đều < 1 thì ta sử dụng phương pháp hàm số

Ví dụ 13 (Sở GD&ĐT Bắc Giang – 2017): Tìm tập hợp các giá trị thực của m sao cho bất phương trình

$$\log_2 x + m \geq \frac{1}{2}x^2 \quad x \in [1; 3]$$

có nghiệm

- A. $\left[\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}; +\infty\right)$ B. $\left[\frac{9}{2} - \log_2 3; +\infty\right)$
C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{2} \log_2 (\ln 2); +\infty\right)$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Ví dụ 14 (THPT Nguyễn Khuyến – 2017): Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn điều kiện

$$3 \log_3 (1 + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}) > 2 \log_2 \sqrt{a}. \quad \text{Tìm phân nguyên của } \log_2 (2017a)$$

- A. 14 B. 22 C. 16 D. 19

$\Rightarrow$ **Chọn B**

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Sở GD&ĐT Tp HCM - 2018). Giải bất phương trình $(2, 5)^{5x-7} > \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$

- A. $x \geq 1$ B. $x > 1$ C. $x < 1$ D. $x = 1$

Câu 2 (THPTTH Cao Nguyên -2018). Tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x - 10.3^x + 3 \leq 0$ có dạng

$S = [a; b]$. Khi đó tính giá trị của $b - a$

- A. $b - a = 2$ B. $b - a = \frac{3}{2}$ C. $b - a = \frac{5}{2}$ D. $b - a = 1$

Câu 3 (Sở GD&ĐT Bình Dương - 2018). Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{2}+1)^{x^2+x} \geq (\sqrt{2}-1)^2$ là tập nào trong các tập sau

- A. $[-2;1]$ B. $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$ C. $(-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$ D. $\mathbb{R}$

Câu 4 (THPT Thanh Thủy -2018). Tập nghiệm của bất phương trình $9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 \geq 0$ là

- A. $[0;1]$ B. $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$
C. $(-\infty;-2] \cup [-1;0] \cup [1;+\infty)$ D. $[-2;-1] \cup [1;+\infty)$

Câu 5 (THPT Kim Liên-2018). Tìm tập nghiệm T của bất phương trình $\log x^2 > \log(4x-4)$.

- A. $T = (2;+\infty)$ B. $T = (1;+\infty)$ C. $T = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ D. $T = (1;+\infty) \setminus \{2\}$

Câu 6 (THPT Chuyên Phan Bội Châu - 2018). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $(\sqrt{3}-1)^{x+1} > 4-2\sqrt{3}$

- A. $S = [1;+\infty)$ B. $S = (1;+\infty)$ C. $S = (-\infty;1]$ D. $S = (-\infty;1)$

Câu 7 (THPT Quốc Học Huế - 2018). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{4-x} - x + 1 \geq 0$.

- A. $S = (-\infty;1]$ B. $S = (-\infty;3)$ C. $S = (-\infty;3]$ D. $S = [3;+\infty)$

Câu 8 (THTT Số 478-2018). Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x}$ là

- A. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ C. $(-1;0)$ D. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Câu 9 (THPT Phú Xuyên A-2018). Tập nghiệm của bất phương trình $(2^x - 4)(x^2 - 2x - 3) < 0$ là

- A. $(-\infty;-1) \cup (2;3)$ B. $(-\infty;1) \cup (2;3)$ C. $(2;3)$ D. $(-\infty;-2) \cup (2;3)$

Câu 10 (THPT Chuyên Lào Cai-2018). Bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 3

Câu 11 (Chuyên ĐHSPT-2018). Tập hợp nghiệm của bất phương trình $3^{3x-2} + \frac{1}{27^x} \leq \frac{2}{3}$ là

- A. $(0;1)$ B. $(1;2)$ C. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ D. $(2;3)$

Câu 12 (TT Diệu Hiền-2018). Gọi S_1 là tập nghiệm của bất phương trình $2.2^x + 3.3^x - 6^x + 1 < 0$. Gọi S_2 là tập nghiệm của bất phương trình $2^{-x} < 4$. Gọi S_3 là tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 0$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng khi nói về mối quan hệ giữa các tập nghiệm S_1, S_2, S_3

- A. $S_1 \subset S_2 \subset S_3$ B. $S_1 \subset S_3 \subset S_2$ C. $S_3 \subset S_1 \subset S_2$ D. $S_3 \subset S_2 \subset S_1$

Câu 13 (THPT Chuyên ĐH Vinh-2018). Nghiệm của bất phương trình $e^x + e^{-x} < \frac{5}{2}$ là

- A. $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 2$ B. $\frac{1}{2} < x < 2$

- C. $-\ln 2 < x < \ln 2$ D. $x < -\ln 2$ hoặc $x > \ln 2$

Câu 14 (THPT Chuyên Quang Trung - 2018). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $3^x.5^{x^2} < 1$

- A. $S = (-\log_5 3; 0]$ B. $S = [\log_5 3; 0)$ C. $S = (-\log_5 3; 0)$ D. $S = (\log_5 3; 0)$

Câu 15 (TT Diệu Hiền - 2018). Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $9^x - 2(m+1) \cdot 3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi số thực x .

- A. $m \leq -\frac{3}{2}$ B. $m \in (-5 - 2\sqrt{3}; -5 + 2\sqrt{3})$
 C. $m \neq 2$ D. Không tồn tại m

Câu 16 (THPT Bắc Yên Thành - 2018). Nghiệm của bất phương trình $81 \cdot 9^x - 30 \cdot 3^x + 1 < 0$ là

- A. $1 < x < 3$ B. $-3 < x < -1$ C. $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}$ D. $2 < x < 3$

Câu 17 (THPT Cẩm Bình - 2018). Tổng của tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\frac{1}{3^x + 5} \leq \frac{1}{3^{x+1} - 1}$$

- A. 4 B. 0 C. 2 D. 1

Câu 18 (THPT Chuyên Phan Bội Châu - 2018). Số nghiệm không âm của bất phương trình

$$\sqrt{15 \cdot 2^{x+1} + 1} \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 19 (THPT Phan Đình Phùng - 2018). Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình $2^{-|x|} > \frac{1}{8}$

- A. $x > 3$ hoặc $x < -3$ B. $-3 < x < 3$
 C. $x < -3$ D. $x > 3$

Câu 20 (THPT Chuyên KHTN-2018). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{\sqrt{2x+1}} - 3^{x+1} \leq x^2 - 2x$ là

- A. $[0; +\infty)$ B. $[0; 2]$ C. $[2; +\infty)$ D. $[2; +\infty) \cup \{0\}$

Câu 21 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh - 2018). Giải bất phương trình $2^{\frac{4x-1}{2x+1}} > 2^{\frac{2-2x}{2x+1}} + 1$

- A. $\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$ B. $-\frac{1}{2} < x < 1$ C. $x > 1$ D. $x < -\frac{1}{2}$

Câu 22 (THPT Ninh Giang-2018). Tìm điều kiện xác định của bất phương trình

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2x+1} - 6 \log_{\frac{1}{5}} (3-x) - 12 \log_8 (x-1)^3 > 0.$$

- A. $1 < x < 3$ B. $\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Câu 23 (Sở GD&ĐT Phú Thọ - 2018). Biết bất phương trình $\log_5 (5^x - 1) \cdot \log_{25} (5^{x+1} - 5) \leq 1$ có tập nghiệm là đoạn $[a; b]$. Tính $a + b$

- A. $a + b = -1 + \log_5 156$ B. $a + b = 2 + \log_5 156$
 C. $a + b = -2 + \log_5 156$ D. $a + b = -2 + \log_5 26$

Câu 24 (THPT TH Cao Nguyên - 2018). Tìm m để bất phương trình $\sqrt{\log_2 x + 2m - 1} \geq \log_4 x$ có nghiệm.

- A. $m \leq -1$ B. $m \in \mathbb{R}$ C. $m \geq 0$ D. $m \geq -1$

Câu 25 (Sở GD&ĐT TP HCM - 2018). Có bao nhiêu số nguyên a là nghiệm bất phương trình $\log_{0,5} a \leq \log_{0,5} a^2$?

A. 2

B. 0

C. Vô số

D. 1

Câu 26 (Sở GD&ĐT Bình Phước - 2018). Bất phương trình $\ln(2x + 3) \geq \ln(2017 - 4x)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 169

B. 168

C. 170

D. Vô số

Câu 27 (Sở GD&ĐT Bình Phước - 2018). Với m là tham số thực dương khác 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$. Biết $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

A. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$ B. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right]$ C. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$ D. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$

Câu 28 (THPT Kim Liên - Lần 2-2018). Tìm tập hợp X gồm tất cả các giá trị của tham số thực m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $X = [2; 3]$ B. $X = [3; 5]$ C. $X = (2; 3]$ D. $X = (3; 5]$

Câu 29 (THPT Chuyên Thái Nguyên - 2018). Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $(2^{x^2-4} - 1) \cdot \ln x^2 < 0$

A. $[1; 2]$ B. $\{1; 2\}$ C. $(1; 2)$ D. $(-2; -1) \cup (1; 2)$

Câu 30 (Sở GD&ĐT Hà Tĩnh - 2018). Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(\sqrt{x^2 - x + 4} + 1) + 2 \log_5(x^2 - x + 5) < 3$ là $(a; b)$. Khi đó $\frac{a+2b}{b}$ bằng

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Câu 31 (Chuyên ĐHSPTN - 2018). Tìm tập hợp nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2 + 1) < \log_{\frac{\pi}{4}}(2x + 4)$

A. $S = (-2; -1)$ B. $S = (-2; +\infty)$ C. $S = (3; +\infty) \cup (-2; -1)$ D. $S = (3; +\infty)$

Câu 32 (Chuyên Chu Văn An-2018). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{\log(x^2 - 1)}{\log(1 - x)} \leq 1$

A. $S = (-2; -1)$ B. $S = [-2; -1)$ C. $S = [-2; 1)$ D. $S = [-2; -1]$

Câu 33 (THPT Quốc Học Quy Nhơn - 2018). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{2}{e}}(\log_3|x - 3|) \geq 0$.

A. $S = [0; 2] \cup [4; 6]$ B. $S = [0; 6]$ C. $S = [0; 2) \cup (4; 6]$ D. $S = (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$

Câu 34 (THPT Chuyên Lê Thánh Tông - 2018). Bất phương trình $\log_2 x + \log_3 x > 1$ có nghiệm là

A. $x > 3^{\log_2 6}$ B. $x > 2^{\log_3 6}$ C. $x > 6$ D. $x > 3^{\log_6 2}$

Câu 35 (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp - 2018). Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x + 2) + 2 \cdot \log_{(5^x+2)} 2 > 3$ có tập nghiệm là $S = (\log_a b; +\infty)$ với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = 2a + 3b$

A. $P = 16$ B. $P = 7$ C. $P = 11$ D. $P = 18$

Câu 36 (THPT Chuyên KHTN-2018). Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \frac{2x+1}{x-1}\right) > 0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; -2)$ B. $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$ C. $(4; +\infty)$ D. $(-2; -1) \cup (1; 4)$

Câu 37 (THPT Hà Huy Tập-2018). Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 > \ln(4x - 4)$

- A. $S = (2; +\infty)$ B. $S = (1; +\infty)$ C. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ D. $S = (1; +\infty) \setminus \{2\}$

Câu 38 (TT Diệu Hiền -2018). Tập nghiệm của bất phương trình $\ln[(x-1)(x-2)(x-3)+1] > 0$ là

- A. $(1; 2) \cup (3; +\infty)$ B. $(-\infty; 1) \cap (2; 3)$ C. $(1; 2) \cap (3; +\infty)$ D. $(-\infty; 1) \cup (2; 3)$

Câu 39 (Chuyên KHTN-2018). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}x > \log_2(x^2 - x) - 1$.

- A. $S = (2; +\infty)$ B. $S = (1; 2)$ C. $S = (0; 2)$ D. $S = (1; 2]$

Câu 40 (THPT Chuyên Quang Trung - 2018). Tìm m để bất phương trình

$$1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m) \text{ thỏa mãn với mọi } x \in \mathbb{R}$$

- A. $-1 < m \leq 0$ B. $-1 < m < 0$ C. $2 < m \leq 3$ D. $2 < m < 3$

Câu 41 (THPT Chuyên Quang Trung - 2018). Trong tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$. Giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$ là

- A. $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$ B. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ và $\sqrt{10} + \sqrt{2}$
C. $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$ và $(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$ D. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$

Câu 42 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}-1}(x^2 - 2x + 1) > 0$.

- A. Vô số B. 0 C. 2 D. 1

Câu 43 (TT Diệu Hiền - 2018). Bất phương trình $\log_4 x - \log_x 4 \leq \frac{3}{2}$ có mấy nghiệm nguyên trên đoạn $[1; 25]$?

- A. 17 B. 15 C. 16 D. 14

Câu 44 (TT Diệu Hiền-2018). Tìm m để phương trình: $(m+3)16^x + (2m-1)4^x + m+1 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu

- A. $-3 < m < -\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4} < m < -\frac{1}{2}$ C. $-1 < m < -\frac{3}{4}$ D. Không tồn tại m

Câu 45 (TT Diệu Hiền-2018). Nghiệm của bất phương trình: $\log_2(\sqrt{3x+1}+6) - 1 \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x})$ là:

- A. $x \leq 1$ B. $x \leq \frac{369}{49}$ C. $x \geq \frac{369}{49}$ D. $1 \leq x \leq \frac{369}{49}$

Câu 46 (THPT Trần Hưng Đạo - 2018). Bất phương trình $3\log_3(x-1) + \log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1) \leq 3$ có tập nghiệm là

- A. $(1; 2]$ B. $[1; 2]$ C. $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right]$

Câu 47 (THPT Chuyên Phan Bội Châu - 2018). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3 \cdot 2^x - 2) < 2x$ là

- A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ B. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ C. $\left(\log_2 \frac{2}{3}; 0\right) \cup (1; +\infty)$ D. $(1; 2)$

Câu 48 (THTT Số 477 - 2018). Số nghiệm thực nguyên của bất phương trình $\log(2x^2 - 11x + 15) \leq 1$ là

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 49 (THTT Số 477 – 03 - 2018). Bất phương trình $\max\left\{\log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x\right\} < 3$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; 27)$ B. $(8; 27)$ C. $\left(\frac{1}{8}; 27\right)$ D. $(27; +\infty)$

Câu 50 (THPT Chuyên Hùng Vương - 2018). Với m là tham số thực dương khác 1. Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$. Biết rằng $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình.

A. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$ B. $S = (-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right]$ C. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$ D. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1B	2A	3D	4C	5D	6D	7C	8D	9A	10D
11C	12B	13C	14C	15A	16B	17D	18D	19B	20D
21A	22A	23C	24C	25D	26A	27A	28C	29D	30C
31C	32B	33C	34D	35A	36B	35D	38A	39B	40C
41C	42B	43B	44C	45D	46A	47A	48B	49C	50C

CHỦ ĐỀ 12. BÍ QUYẾT TÍNH NHANH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC MŨ - LOGARIT

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Cách tính tự luận:

Coi các biểu thức điều kiện là các phương trình nhỏ. Sử dụng các công thức mũ – logarit và các phép biến đổi tương đương đối với các biểu thức điều kiện. Sau khi tìm ra giá trị của ẩn thì thế vào đáp số để tìm đáp số đúng.

2. Cách sử dụng máy tính Casio Vinacal:

Chọn các giá trị ẩn a, b hoặc x, y một cách khéo léo dựa vào biểu thức điều kiện. Từ đó thế vào đáp án và tìm đáp án hợp lý nhất.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: (Đề minh họa THPT Quốc gia – Năm 2017)

Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b

A. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$ B. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$ C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$ D. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Giải

Cách tự luận:

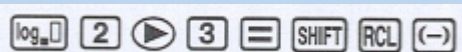
Ta có $a = \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1}{a}$ và $\log_3 5 = \frac{1}{b}$

$$\text{Vậy } \log_6 45 = \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (3^2 \cdot 5)}{\log_3 (3 \cdot 2)} = \frac{2 \cdot \log_3 5}{1 + \log_3 2} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{a+2ab}{ab+b}$$

$\Rightarrow$ Chọn C

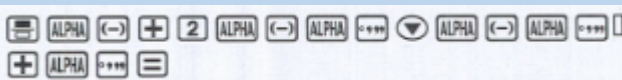
Cách Casio Vinacal

Tính giá trị $\log_2 3$ và lưu vào phím A



Tiếp theo tính giá trị của $\log_5 3$ rồi lưu vào phím B

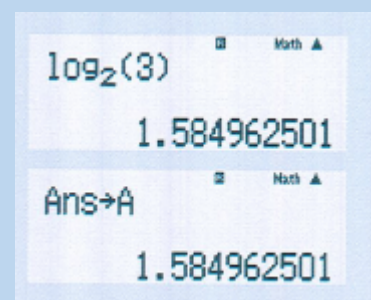
Sau đó ta tính giá trị của biểu thức $\log_6 45 = 2.12$ đây chính là kết quả của đáp án C

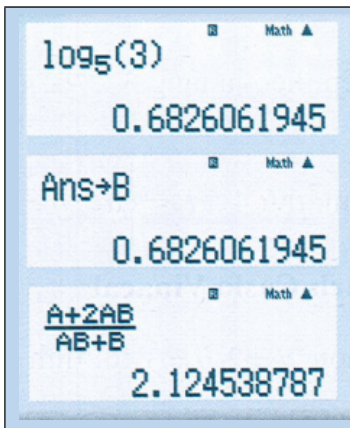


$\Rightarrow$ Chọn C

Chú ý

Công thức: $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ và $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ với $(b, x > 0, \neq 1)$





Ví dụ 2: (Báo Toán học Tuổi trẻ – Năm 2017)

Rút gọn biểu thức $\frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ (với $a > 0$) được kết quả:

A. a^4 .

B. a .

C. a^5 .

D. a^3 .

Giải

Cách tự luận:

Ta rút gọn tử số $a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}} = a^{\sqrt{3}+1+(2-\sqrt{3})} = a^3$

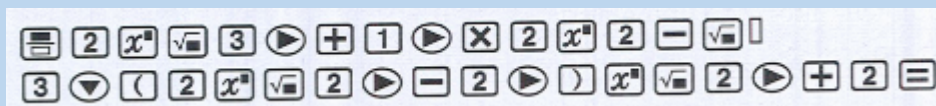
Tiếp tục rút gọn mẫu số $(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2} = a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = a^{2-4} = a^{-2}$

Vậy phân thức trở thành $\frac{a^3}{a^{-2}} = a^{3-(-2)} = a^5$

⇒ **Chọn C**

Cách Casio Vinacal

Chọn $a = 2$ chẳng hạn. Dùng máy tính Casio tính giá trị biểu thức

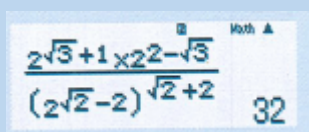


Ta thu được giá trị 32 và nhận thấy $32 = a^5$

⇒ **Chọn C**

Chú ý

Vì a là cơ số nên ta chọn số nào cũng được nhưng nên thỏa mãn $a > 0, a \neq 1$



Ví dụ 3: (Sở GD-ĐT TP HCM – Cụm 2 – năm 2017)

Cho biểu thức $P = \left\{ a^{\frac{1}{3}} \left[a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}} \left(a^2 b^2 \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^6$ với a, b là các số dương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P = \frac{\sqrt{a}}{ab^3}$.

B. $P = b^3 \sqrt{a}$.

C. $P = \frac{\sqrt{a}}{b^3}$.

D. $P = \frac{b^3 \sqrt{a}}{a}$.

Giải

Cách tự luận: Tiến hành đơn giản hóa biểu thức theo từng tầng

Tầng 1 (trong cùng): $P = \left\{ a^{\frac{1}{3}} \left[a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{4}{3}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^6$

Sau đó đến tầng 2: $P = \left\{ a^{\frac{1}{3}} \left[a^{\frac{5}{6}} b \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^6$

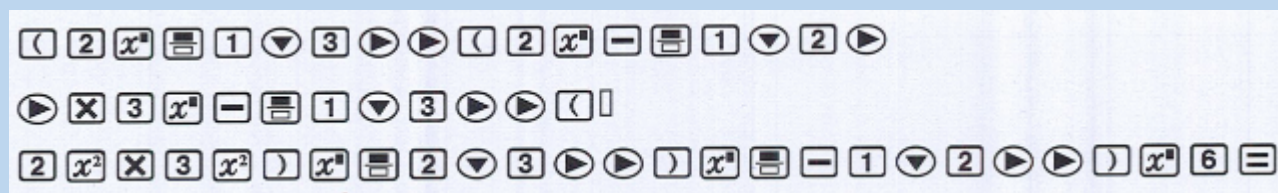
Tiếp theo là tầng 3: $P = \left\{ a^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{5}{12}} b^{-\frac{1}{2}} \right\}^6$

Tầng thứ 4: $P = \left\{ a^{\frac{1}{12}} b^{-\frac{1}{2}} \right\}^6$ và tầng cuối cùng $P = a^{\frac{1}{2}} b^{-3} = \frac{1}{\sqrt{ab^3}} = \frac{\sqrt{a}}{ab^3}$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Cách Casio Vinacal

Chọn $a = 2, b = 3$ rồi tính giá trị biểu thức. Ta thu được $P \approx 0.026$

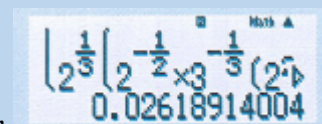


Đây là giá trị của $\frac{\sqrt{a}}{ab^3}$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Chú ý

Hết sức cẩn thận khi tính toán và bấm máy vì biểu thức rất dài và dễ nhầm



Ví dụ 4 (Đề thi THPTQG – Năm 2017 – Mã đề 103)

Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2 \log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = 4$.

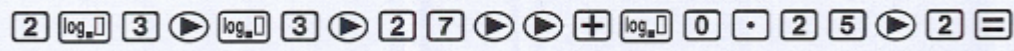
C. $I = 0$.

D. $I = \frac{3}{2}$.

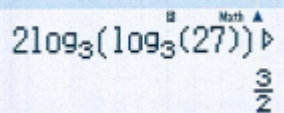
Giải

Từ $\log_3 a = 2 \Rightarrow a = 3^2 = 9$ và $\log_2 b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Tìm được a, b rồi ta sẽ thay vào biểu thức I để tính giá trị



$\Rightarrow$ Chọn D



Ví dụ 5 (Đề thi THPTQG – Năm 2017 – Mã đề 110)

Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$

Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12} (x + 3y)}$

A. $M = \frac{1}{2}$.

B. $M = \frac{1}{3}$.

C. $M = \frac{1}{4}$.

D. $M = 1$.

Giải

Cách tự luận

Ta có $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y$

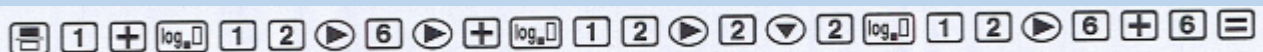
Khi đó $M = \frac{\log_{12} 12 + \log_{12} 3y + \log_{12} y}{2 \log_{12} 6y} = \frac{\log_{12} 36y^2}{\log_{12} (6y)^2} = 1$

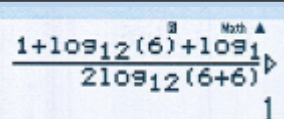
$\Rightarrow$ Chọn D

Cách Casio Vinacal

Chọn 1 giá trị của y chẳng hạn như $y = 2$. Khi đó ta có: $x^2 - 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Để tính giá trị biểu thức M ta dùng máy tính Casio và thu được $M = 1$





Ví dụ 6 (Sở GD-ĐT TP HCM – cụm 7 – năm 2017)

Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đó biểu thức $A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$

Tích $a.b$ có giá trị bằng

A. 10.

B. -8.

C. 8.

D. -10.

⇒ Chọn D

Ví dụ 7 (THPT Chuyên Thái Nguyên – Lần 2 – Năm 2017)

Cho $a > 0, b > 0, a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{4}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tính tổng $a + b$.

A. 16.

B. 12.

C. 10.

D. 18.

⇒ Chọn D.

Ví dụ 8 (Chuyên Khoa học tự nhiên – năm 2017)

Cho $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16} (x + y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ là

A. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

⇒ Chọn B.

Ví dụ 9 (THPT TH Cao Nguyên – Lần 1 – Năm 2017)

Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Giá trị của tổng $S = ab + bc + ca$ bằng

A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

⇒ Chọn D.

Ví dụ 10 (Chuyên Hà Tĩnh – Năm 2017)

Cho $a^{\log_3 7} = 27; b^{\log_7 11} = 49; c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính giá trị biểu thức $S = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$

A. $S = 33$.

B. $S = 469$.

C. $S = 489$.

D. $S = 3141$.

⇒ Chọn B.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Thi THPTQG - 2018)

Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a (b^2 c^3)$

A. $P = 108$.

B. $P = 13$.

C. $P = 31$.

D. $P = 30$.

Câu 2 (Thi THPTQG - 2018)

Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12} (x + 3y)}$

A. $M = \frac{1}{2}$.

B. $M = \frac{1}{3}$.

C. $M = \frac{1}{4}$.

D. $M = 1$.

Câu 3 (Thi THPTQG - 2018)

Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2\log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$

A. $I = \frac{5}{4}$.

B. $I = 4$.

C. $I = 0$.

D. $I = \frac{3}{2}$.

Câu 4 (Thi THPTQG - 2018)

Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

B. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$

C. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$

D. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$

Câu 5 (Sở GD&ĐT TP HCM - 2018)

Cho $\log_{ab} a = 4$. Tính $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

A. $\frac{17}{6}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{15}{2}$.

D. $\frac{13}{3}$.

Câu 6 (Sở GD&ĐT TP HCM - 2018)

Cho $\log_3 a = \log_4 b = \log_{12} c = \log_{13} (a+b+c)$. Hỏi $\log_{abc} 144$ thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $\left\{\frac{7}{8}; \frac{8}{9}; \frac{9}{10}\right\}$

B. $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right\}$

C. $\left\{\frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}\right\}$

D. $\{1; 2; 3\}$

Câu 7 (Sở GD&ĐT TP HCM - 2018)

Cho a, b là các số thực dương, $a \neq 1$

Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2\log b}{\log a} - 1}$

A. $P = |\log_a b|$

B. $P = |\log_a b - 1|$

C. $P = |\log_a b + 1|$

D. $P = |\log_b a|$

Câu 8 (Sở GD&ĐT TP HCM - 2018)

Cho biểu thức $P = \left\{ a^{\frac{1}{3}} \left[a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}} (a^2 b^2)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^6$ với a, b là các số dương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P = \frac{\sqrt{a}}{ab^3}$.

B. $P = b^3 \sqrt{a}$.

C. $P = \frac{\sqrt{a}}{b^3}$.

D. $P = \frac{b^3 \sqrt{a}}{a}$.

Câu 9 (THPT Lê Lợi - 2018)

Biết rằng $\log_{42} 2 = 1 + m \log_{42} 3 + n \log_{42} 7$ với m, n là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m.n = -2$.

B. $m.n = 1$.

C. $m.n = -1$.

D. $m.n = 2$.

Câu 10 (Chuyên ĐH Vinh - 2018)

Cho các số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thỏa mãn $2^x = 3^y$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $xy > 0$. B. $\frac{x}{y} = \log_2 3$. C. $4^x = 6^y$. D. $2^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{1}{x}}$.

Câu 11 (Sở GD&ĐT Hải Dương – 2018)

Cho $m = \log_a \left(\sqrt[3]{ab} \right)$, với $a > 1, b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m = 1$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

Câu 12 (Đề Minh họa - 2018)

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(7 + 4\sqrt{3} \right)^{2017} \left(4\sqrt{3} - 7 \right)^{2016}$.

- A. $P = 1$. B. $P = 7 - 4\sqrt{3}$. C. $7 + 4\sqrt{3}$. D. $P = \left(7 + 4\sqrt{3} \right)^{2016}$.

Câu 13 (Sở GD&ĐT Bình Phước – 2018).

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (a + b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Câu 14 (THPT Nguyễn Huệ - 2018)

Cho $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} b$. Tìm x .

- A. $a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{5}}$. B. $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}}$. C. $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}}$. D. $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{5}}}$.

Câu 15 (Chuyên Thái Nguyên - 2018)

Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \right)^{-1}$

- A. $P = x$ B. $P = 2x$ C. $P = x + 1$ D. $P = x - 1$

Câu 16 (Chuyên Thái Nguyên - 2018)

Cho $a > 0, b > 0, a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{4}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tính tổng $a + b$.

- A. 16. B. 12. C. 10. D. 18.

Câu 17 (Chuyên Thái Nguyên - 2018)

Cho a, b là các số thực dương, $b \neq 1$ thỏa mãn $a^{\frac{13}{7}} < a^{\frac{15}{8}}$ và $\log_b (\sqrt{2} + \sqrt{5}) > \log_b (2 + \sqrt{3})$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $0 < a < 1, b > 1$. B. $a > 1, b > 1$. C. $a > 1, 0 < b < 1$. D. $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

Câu 18 (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - 2018)

Nếu $\log_8 3 = p$ và $\log_3 5 = q$, thế thì $\log 5$ bằng

- A. $\frac{1+3pq}{p+q}$ B. $\frac{3pq}{1+3pq}$ C. p^2+q^2 D. $\frac{3p+q}{5}$

Câu 19 (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - 2018)

Nếu $\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8, \frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243, x, y$ là các số thực, thế thì xy bằng:

- A. 6. B. $\frac{12}{5}$. C. 12. D. 4.

Câu 20 (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm – 2018)

Cho $x, y > 0, x, y \neq 1, \log_y x + \log_x y = \frac{10}{3}$ và $xy = 144$, thế thì $\frac{x+y}{2} = ?$

- A. 24. B. 30. C. $12\sqrt{2}$. D. $13\sqrt{3}$.

Câu 21 (THPT TH Cao Nguyên - 2018)

Cho các số dương a, b, c . Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{2017} \frac{a}{b} + \log_{2017} \frac{b}{c} + \log_{2017} \frac{c}{a}$

- A. 0. B. -1. C. 1. D. 2017.

Câu 22 (THPT TH Cao Nguyên - 2018)

Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Giá trị của tổng $S = ab + bc + ca$ bằng

- A. 5. B. 3. C. 1. D. 0

Câu 23 (Chuyên Bến Tre - 2018)

Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = x^{\frac{7}{6}}$ B. $P = x$ C. $P = x^{\frac{11}{6}}$ D. $P = x^{\frac{5}{6}}$

Câu 24 (Chuyên Bến Tre - 2018)

Cho $\log 3 = a$. Tính $\log 9000$ theo a

- A. $6a$. B. $a^2 + 3$ C. $3a^2$ D. $2a + 3$

Câu 25 (Chuyên KHTN - 2018)

Kí hiệu $f(x) = \left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$

Giá trị của $f(f(2017))$ bằng

- A. 2000 B. 1500 C. 2017 D. 1017

Câu 26 (Chuyên KHTN - 2018)

Với $a, b > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + ab = 1$, giá trị nhỏ nhất của $P = a^4 + b^4$ bằng

- A. $(\sqrt{2}+1)^4$ B. $2(\sqrt{2}-1)^4$ C. $(\sqrt{2}-1)^4$ D. $2(\sqrt{2}+1)^4$

Câu 27 (Chuyên Phan Bội Châu – 2018)

Cho $\log_3 5 = a, \log_3 6 = b, \log_3 22 = c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_3 \left(\frac{270}{121} \right) = a + 3b - 2c$

B. $\log_3 \left(\frac{270}{121} \right) = a + 3b + 2c$

C. $\log_3 \left(\frac{270}{121} \right) = a - 3b + 2c$

D. $\log_3 \left(\frac{270}{121} \right) = a - 3b - 2c$

Câu 28 (Chuyên Phan Bội Châu - 2018)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}, z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x = 10^{\frac{1}{1+\ln z}}$

B. $x = 10^{\frac{1}{1-\ln z}}$

C. $x = 10^{\frac{1}{1+\log z}}$

D. $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$

Câu 29 (THPT Quốc học Quy Nhơn - 2018)

Cho hàm số $f(x) = \ln 2017 - \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2017)$.

A. $S = \frac{4035}{2018}$

B. $S = 2017$

C. $S = \frac{2016}{2017}$

D. $S = \frac{2017}{2018}$

Câu 30 (THPT Quốc học Quy Nhơn - 2018)

Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$

Tính tổng $T = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$

A. $T = 2016$

B. $T = 2017$

C. $T = \frac{2016}{2017}$

D. $T = 1008$

Câu 31 (Chuyên Ngoại ngữ - 2018)

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-3)}$

A. $D = (3; +\infty)$

B. $D = (3; 4]$

C. $D = [4; +\infty)$

D. $D = (0; 4]$

Câu 32 (Chuyên Ngoại ngữ - 2018)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3}$. Tính tỉ số $T = \frac{a}{b}$

A. $T = \frac{5}{4}$

B. $T = \frac{2}{3}$

C. $T = \frac{3}{2}$

D. $T = \frac{4}{5}$

Câu 33 (Chuyên Lê Khiết - 2018)

Cho hàm số $f(x) = 3^{x^2} \cdot 4^x$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x \log_3 2 > 2$

B. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 \ln 3 + x \ln 4 > 2 \ln 3$

C. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 \log_2 3 + 2x > 2 \log_2 3$

D. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 \log 3 + x \log 4 > \log 9$

Câu 34 (Chuyên Lam Sơn - 2018)

Cho x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Tính giá trị biểu thức $M = xy + yz + zx$

A. $M = 3$.

B. $M = 6$.

C. $M = 0$.

D. $M = 1$.

Câu 35 (Chuyên Biên Hòa - 2018)

Cho hàm số $y = \log_3(3^x + x)$, biết $y'(1) = \frac{a}{4} + \frac{1}{b \ln 3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $a + b$

A. 2.

B. 7.

C. 4.

D. 1.

Câu 36 (Sở GD&ĐT Nam Định - 2018)

Cho hàm số $f(x) = 2^{x^2+a}$ và $f'(1) = 2 \ln 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 1$.

B. $-2 < a < 0$.

C. $0 < a < 1$.

D. $a < -2$.

Câu 37 (THPT Quốc học Huế - 2018)

Trong hệ thập phân, số 2016^{2017} có bao nhiêu chữ số?

A. 2017.

B. 2018.

C. 6666.

D. 6665.

Câu 38 (Chuyên Võ Nguyên Giáp - 2018)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy = 10^{3a}, yz = 10^{2b}, zx = 10^c; (a, b, c \in \mathbb{R})$.

Tính $P = \log x + \log y + \log z$

A. $P = \frac{3a + 2b + c}{2}$

B. $P = 3a + 2b + c$

C. $P = 6abc$

D. $P = 3abc$

Câu 39 (Chuyên Sơn La - 2018)

Biểu thức $P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P = \frac{3}{2}$.

B. $P = -\frac{5}{2}$.

C. $P = 2$.

D. $P = -2$.

Câu 40 (Chuyên Lương Thế Vinh - 2018)

Cho biết $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 5$. Khi đó giá trị của biểu thức $P = a \log_{\sqrt[3]{2}} a^2 + \log_3 b^3 \cdot \log_2 4^a$ bằng

A. $30a$.

B. $20a$.

C. $5a$.

D. $\frac{10}{3}a$.

Câu 41 (THPT Quảng Xương - 2018)

Cho $a, b \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn: $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{2} + a \cdot \log_2 3 + b \cdot \log_2 5$. Khi đó tổng $a + b$ có giá trị bằng

A. 5.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Câu 42 (Chuyên KHTN - 2018)

Nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab là

- A. 2^9 B. 2^{18} C. 8 D. 2

Câu 43 (Sở GD&ĐT Bắc Giang - 2018)

Cho $a \in \left[\frac{1}{9}; 3\right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$9\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$. Khi đó giá trị của $A = 5m + 2M$ là

- A. 4. B. 5. C. 8. D. 6.

Câu 44 (Sở GD&ĐT Quảng Ninh - 2018)

Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + f\left(\frac{3}{2015}\right) + \dots + f\left(\frac{2013}{2015}\right) + f\left(\frac{2014}{2015}\right)$$

- A. 2014 B. 2015 C. 1008 D. 1007

Câu 45 (Sở GD&ĐT Vũng Tàu - 2018)

Cho các số thực x, y, z, t, a, b, c thỏa mãn $\frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t$ và $xy = z^2 t^2$. Tính giá trị $P = a + b - 2c$

- A. 4. B. $\frac{1}{2}$. C. -2. D. 2.

Câu 46 (Chuyên Hùng Vương - 2018)

Cho a, b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2 b - 8\log_b(a\sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \log_a(a\sqrt[3]{ab}) + 2017.$$

- A. $P = 2019$. B. $P = 2020$. C. $P = 2017$. D. $P = 2016$.

Câu 47 (THPT Phan Bội Châu - 2018)

Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2}(a^{10}b^2) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$ (Với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$).

- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = \sqrt{2}$.

Câu 48 (THPT Quảng Xương - 2018)

Đặt $a = \ln 2$ và $b = \ln 3$. Biểu diễn $S = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{71}{72}$ theo a và b :

- A. $S = -3a - 2b$. B. $S = -3a + 2b$. C. $S = 3a + 2b$. D. $S = 3a - 2b$.

Câu 49

Cho hàm số $f(x) = 2^{x^2+1}$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2^{-x^2-1} \cdot f'(x) - 2x \ln 2 + 2$

- A. 1. B. 2. C. -2. D. 3.

Câu 50 (THPT Quy Nhơn - 2018)

Đạo hàm của hàm số $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ bằng

A. $\frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

B. $e^x + e^{-x}$

C. $\frac{e^x}{(e^x - e^{-x})^2}$

D. $\frac{-5}{(e^x - e^{-x})^2}$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1B	2D	3D	4C	5C	6A	7A	8A	9B	10C
11A	12C	13B	14C	15A	16D	17B	18B	19D	20D
21A	22D	23B	24D	25C	26B	27A	28D	29D	30D
31B	32C	33D	34C	35B	36B	37C	38A	39D	40A
41C	42A	43D	44D	45D	46A	47B	48A	49B	50A

CHỦ ĐỀ 13: BÍ QUYẾT GIẢI NHANH BÀI TOÁN LÃI SUẤT VÀ BÀI TOÁN THỰC TẾ

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Các dạng toán lãi suất ngân hàng

Dạng 1: Lãi đơn

Gửi A đồng với lãi đơn $r\%$ / kì hạn thì số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn là : $S_n = A(1 + n.r)$

Dạng 2: Lãi kép

Gửi A đồng với lãi kép $r\%$ / kì hạn thì số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn là : $S_n = A(1 + r\%)^n$

Dạng 3: Lãi kép gửi theo định kỳ - gửi đầu tháng

Đầu mỗi tháng khách hàng gửi A đồng với lãi kép $r\%$ /tháng thì sau n tháng thu được:

$$S_n = A(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Chú ý : Nếu cuối mỗi tháng gửi A đồng thì $S_n = A \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Dạng 4: Vay đầu kì - trả góp

Vay A đồng với lãi suất kép hàng tháng $r\%$. Hỏi phải trả hàng tháng bao nhiêu tiền để sau n tháng thì hết nợ.

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Dạng 5: Gửi ngân hàng - rút hàng tháng

Gửi A đồng với lãi kép $r\%$ /tháng (kỳ hạn 1 tháng). Mỗi tháng rút ra X đồng vào ngày ngân hàng tính lãi. Hỏi sau n tháng số tiền còn bao nhiêu?

$$B_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

2. Các bài toán thực tế

Dạng 1: Bài toán tăng lương

Một người được lãnh lương khởi điểm A đồng / tháng. Cứ sau k tháng thì được tăng lương lên $r\%$ / tháng.

Hỏi sau kn tháng người đó lãnh được tổng cộng là: $S_{kn} = A.k \cdot \frac{(1+r)^{\frac{n}{k}} - 1}{r}$

Dạng 2: Bài toán tăng trưởng dân số

Dân số thế giới hàng năm có dạng $P(t) = P(0) \cdot e^{k.t}$ trong đó P(0) tại thời điểm được chọn làm mốc, $y = f$ là dân số sau t năm và m là hệ số được xác định theo từng khoảng thời gian.

Dạng 3: Bài toán tăng chất phóng xạ

Tại thời điểm đầu, chất phóng xạ có khối lượng m_0 thì công thức để tính khối lượng chất phóng xạ còn lại là : $m(t) = m_0 \cdot e^{-k.t}$ với k là hằng số phóng xạ.

Chu kì bán rã là khoảng thời gian mà chất phóng xạ còn một nửa lượng ban đầu và được tính bằng công

thức: $T = \frac{\ln 2}{k}$

Dạng 4 : Tìm số chữ số của 1 số tự nhiên

Quy luật: 10^1 có 2 chữ số, 10^2 có 3 chữ số ... 10^k có k+1 chữ số

Vậy muốn biết một lũy thừa A có bao nhiêu chữ số ta đặt $A = 10^k \Leftrightarrow k = \log A$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: (THPT Nho Quan A-2017)

Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4% năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

Giải

Lãi suất 8.4% / năm $\Rightarrow r = 8.4\%$

Gọi số năm cần tìm là n thì tổng số tiền thu được gồm cả gốc và lãi là $S = A(1 + 8.4\%)^n$ với A là số tiền gốc ban đầu

Theo yêu cầu bài toán số tiền thu được gấp 2 lần số tiền gốc:

$$\Leftrightarrow 2A = A(1 + 8\%)^n \Leftrightarrow 2 = (1 + 8\%)^n \Leftrightarrow n = \log_{1.084} 2 = 8,59 \approx 9$$

$\Rightarrow$ Chọn D

Chú ý:

Lãi suất được nhập vào vốn thì rõ ràng đây là bài toán lãi kép và có công thức $S = A(1 + r)^n$

Ví dụ 2: (THPT Hậu Lộc 2-2017)

Lãi suất tiền gửi tiết kiệm của ngân hàng thời gian vừa qua liên tục thay đổi. Ông A gửi số tiền ban đầu là 10 triệu đồng với lãi suất 0,5%/tháng, chưa đầy nửa năm thì lãi suất tăng lên 1%/tháng trong vòng một quý (3 tháng) và sau đó lãi suất lại thay đổi xuống còn 0,8%/tháng. Ông A tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được 10937826,46912 đồng (chưa làm tròn). Hỏi ông A đã gửi tổng là bao nhiêu tháng? (Biết rằng kỳ hạn là một tháng, lãi suất nếu có thay đổi chỉ thay đổi sau khi hết tháng và trong quá trình gửi ông A không rút đồng nào, tiền lãi của mỗi tháng được cộng vào tiền gốc của tháng sau).

A. 12 tháng

B. 13 tháng

C. 9 tháng

D. 10 tháng

Giải

Số tiền gốc và lãi sau n tháng đầu tiên là: $A(1 + r)^n = 10.1,005^n$ ($n < 6$) (n là số tháng gửi với lãi suất 0,5% /tháng)

Số tiền gốc và lãi sau 3 tháng tiếp theo là: $10.1,005^n \cdot (1 + 0,01)^3$

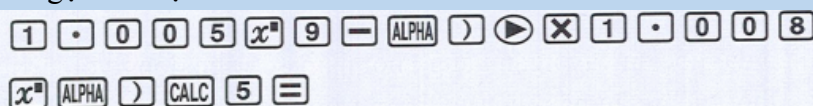
Số tiền gốc và lãi sau m tháng cuối cùng là: $10.1,005^n \cdot 1,01^3 \cdot 1,008^m$

Khi đó $10.1,005^n \cdot 1,01^3 \cdot 1,008^m = 10,93782646912$ (triệu đồng)

(với $m = \min\{f(-1)\}$)

$$1,005^n \cdot 1,0008^m = \frac{10,93782646912}{10.1,01^3} = 1,06161466$$

Rút gọn ta được $1,0005^n \cdot 1,0008^m - 1,061614661 = 0$ (1)



$\Rightarrow n = 4, m = 5$ và $m + n + 3 = 12$

$\Rightarrow$ Chọn A

Bình luận

Một bài toán không khó về nhận biết dạng bài mà rất khó về cách tính toán, cụ thể là m và n ta có thể dùng chức năng CALC của máy tính thử từng đáp án kết hợp với điều kiện $n < 6$

$$1.005^9 \times 1.008^9 = 1.061614661$$

Ví dụ 3: (THPT Võ Nguyên Giáp - 2017)

Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 3.000.000 đồng / tháng. Cứ 3 năm, lương của anh Hưng lại được tăng thêm 7% . Hỏi sau 36 năm làm việc, anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng)?

- A. 1.287.968.000 đồng B. 1.931.953.000 đồng, C. M.m ≈ -23 đồng D. 3.219.921.000 đồng.

Giải

Số tiền anh Hưng sẽ nhận được bằng:

$$S = 3.36 \cdot (1,07)^0 + 3.36 \cdot (1,07)^1 + 3.36 \cdot (1,07)^2 + \dots + 3.36 \cdot (1,07)^{11}$$

$$\Rightarrow S = 3.36 \cdot \frac{1 - (1,07)^{12}}{1 - 1,07} = 1.931,953 \text{ triệu đồng} = 1.931.953.000 \text{ đồng}$$

=> Chọn B

Phân tích

Lương khởi điểm A đồng (3 triệu đồng) sau kì hạn k tháng (36 tháng) lại tăng thêm r (7%) thì rõ ràng bài

toán tăng lương với công thức
$$S_{kn} = A \cdot k \cdot \frac{(1+r)^k - 1}{r}$$

Ví dụ 4: (Chuyên Trần Phú - 2017)

Một bác nông dân vừa bán một con trâu được số tiền là 20.000.000 (đồng). Do chưa cần dùng đến số tiền nên bác nông dân mang toàn bộ số tiền đó đi gửi tiết kiệm ngân hàng loại kì hạn 6 tháng với lãi suất kép là 8,4% một năm. Hỏi sau 5 năm 8 tháng bác nông dân nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi (làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết rằng bác nông dân đó không rút vốn cũng như lãi trong tất cả các định kì trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kì hạn 0,01% một ngày (1 tháng tính 30 ngày)

- A. 31635925 B. 32833110 C. 33083311 D. 30803311

Giải

Trong 5 năm 8 tháng có 11 kì hạn và 60 ngày

Lãi suất 8,4% /năm thì có nghĩa là 4,2% / kì hạn 6 tháng

Số tiền bác nông dân rút được sau 11 kì hạn là $P_1 = 20.000.000(1 + 4.2\%)^{11} = 31446687.45$ đồng

Vì bác nông dân không rút vốn cũng như lãi trong tất cả các kì hạn nên được thưởng thêm một loại lãi suất không kì hạn.

Tổng số tiền bác nông dân rút được là $S = P(1 + 0,01\%)^{60} = 31635925$ đồng

=> Chọn A

Phân tích

Trong bài toán này ta có 2 hướng để đặt ẩn phụ . Hướng 1 đặt $t = \ln x$ khi đó tích phân hệ quả sẽ có mẫu số là $(t+2)^2$. Hướng 2 đặt $t = \ln x + 2$ thì phương trình hệ quả sẽ có mẫu số là t^2 và ta sẽ mẫu số đẹp hơn để dễ tính toán hơn.

Ví dụ 5: (THPT Tiên Du-2017)

Một sinh viên X trong thời gian học 4 năm đại học đã vay ngân hàng mỗi năm 10 triệu đồng với lãi suất bằng 3%/năm (thủ tục vay một năm 1 lần vào thời điểm đầu năm học). Khi ra trường X thất nghiệp chưa trả được tiền cho ngân hàng nhưng phải chịu lãi suất 8%/năm. Sau một năm thất nghiệp, sinh viên X cũng tìm được việc làm và bắt đầu trả nợ. Tính tổng số tiền sinh viên X trả nợ ngân hàng trong 4 năm đại học và 1 năm thất nghiệp

- A. 46.538.667 đồng B. 43.091.358 đồng C. 48.621.980 đồng D. 45.188.656 đồng

Giải

Sau năm 1 số tiền sinh viên nợ ngân hàng là: $10(1 + 3\%) = 10.3$ (triệu đồng)

Sau năm 2 số tiền sinh viên nợ ngân hàng là:

$$10(1 + 3\%) + 10.3(1 + 3\%) = 20.909 \text{ (triệu đồng)}$$

Sau năm 3 số tiền sinh viên nợ ngân hàng là:

$$10(1 + 3\%) + 20.909(1 + 3\%) = 31.83627 \text{ (triệu đồng)}$$

Sau năm 4 số tiền sinh viên nợ ngân hàng là:

$$10(1 + 3\%) + 31.83627(1 + 3\%) = 42.091 \text{ (triệu đồng)}$$

Sau năm 5 số tiền sinh viên nợ ngân hàng là: $43.091 + 43.091(1 + 8\%)$

$$= 46.538 \text{ (triệu đồng)}$$

=> **Chọn**

Phương pháp

Nếu đề bài cho ít năm ta có thể tính trực tiếp từng năm một mà không cần dùng tới công thức tổng quát.

$$S_n = A(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Cụ thể bài này ta sử dụng công thức gửi hàng tháng (vào đầu tháng)

Ví dụ 6: (THPT Quảng Xương 1 - 2017)

Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. số tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

- A. 232518 đồng . B. 309604 đồng . C. 215456 đồng. D. 232289 đồng.

Giải

Vậy sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:

$$s = 3000000 \left[(1+3\%)^4 + (1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%) \right] = 12927407,43$$

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là 12.927.407,43 đồng, số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm .

Ta có công thức:

$$\Rightarrow T = \frac{N(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} = \frac{12927407,4(1+0,0025)^{60} \cdot 0,0025}{(1+0,0025)^{60} - 1} = 232289$$

=> **Chọn D**

Bình luận

Bài toán hay, tổng hợp từ bài toán 3 (gửi định kì, gửi đầu tháng) và bài toán 4 (trả góp hàng tháng) . Nếu biết chia tách ra thì bài toán trên thành 2 bài toán rất đơn giản.

Ví dụ 7: Một người gửi tiết kiệm 700 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% / tháng theo hình thức lãi kép. Kể từ lúc gửi, cứ sau 1 tháng anh ta lại rút ra 10 triệu để chi tiêu (tháng cuối cùng nếu tài khoản không đủ 10 triệu thì rút hết). Hỏi sau thời gian bao lâu kể từ ngày gửi tiền, tài khoản tiền gửi

của người đó về 0 đồng? (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình người đó gửi tiết kiệm)

A. 86 tháng

B. 87 tháng.

C. 88 tháng

D. 85 tháng.

Giải

Sau tháng thứ nhất, số tiền còn lại là $u_1 = A(1+r) - m$ triệu đồng.

Sau tháng thứ 2, số tiền còn lại là $u_2 = (A(1+r) - m)(1+r) - m = A.(1+r)^2 - m.(1+r) - m$

Sau tháng thứ 3, số tiền còn lại là:

$$u_3 = (A(1+r)^2 - m(1+r) - m)(1+r) - m = A.(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m$$

Sau tháng thứ n, số tiền còn lại là:

$$u_n = A(1+r)^n - m[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1] (*)$$

$$= A(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1}$$

$$u_n = 700.1,005^n + 10. \frac{1-1,005^n}{0,005} = 0 \text{ triệu đồng.}$$

$$\Leftrightarrow 700.1,005^n + 2000(1-1,005^n) = 0 \Leftrightarrow n = 86,37 \Rightarrow \text{cần 87 tháng để rút hết tiền}$$

=> Chọn B

Bình luận

Gửi A đồng (700 triệu đồng) vào ngân hàng và mỗi tháng rút a đồng (10 triệu đồng) thì rõ ràng là bài toán

$$\text{rút tiền hàng tháng với công thức } B_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Ví dụ 8: (THPT Thị xã Quảng Trị - 2017)

Sau một thời gian làm việc, chị An có số vốn là 450 triệu đồng. Chị An chia số tiền thành hai phần và gửi ở hai ngân hàng Agribank và Sacombank theo phương thức lãi kép. số tiền ở phần thứ nhất chị An gửi ở ngân hàng Agribank với lãi suất 2,1 % một quý trong thời gian 18 tháng, số tiền ở phần thứ hai chị An gửi ở ngân hàng Sacombank với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 10 tháng. Tổng số tiền lãi thu được ở hai ngân hàng là 50,01059203 triệu đồng. Hỏi số tiền chị An đã gửi ở mỗi ngân hàng Agribank và Sacombank là bao nhiêu?

A. 280 triệu và 170 triệu

B. 170 triệu và 280 triệu

C. 200 triệu và 250 triệu

D. 250 triệu và 200 triệu.

Giải

Gọi x, y (triệu đồng) lần lượt là số tiền mà chị An gửi vào ngân hàng Agribank và Sacombank.

Số tiền lãi mà chị An nhận được khi gửi tiền vào ngân hàng Agribank là $t_1 = x(1+2,1\%)^6 - x$ triệu

Số tiền lãi mà chị An nhận được khi gửi tiền vào ngân hàng Sacombank là $t_2 = y(1+0,73\%)^{10} - y$ triệu

Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 450 \\ x(1+2,1\%)^6 + y(1+0,73\%)^{10} = 500,010592 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 280 \\ y = 170 \end{cases}$$

=> Chọn A

Bình luận

Một bài toán thực tế hay, đề bài cho số tiền ban đầu chia thành 2 số tiền nhỏ hơn thì ta đặt 2 số tiền nhỏ hơn là x, y sau đó thiết lập 2 phương trình (hệ phương trình) để tìm x, y

Ví dụ 9: (Sở GD&ĐT Bắc Giang - 2017)

Anh An vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua nhà với lãi suất là 0,5% / tháng. Nếu cuối tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh An trả 5,5 triệu đồng thì sau bao lâu anh An trả hết số tiền trên? Biết rằng số tiền tháng cuối anh An phải trả nhỏ hơn 5,5 triệu đồng và lãi suất không thay đổi

A. 64 tháng

B. 65 tháng.

C. 62 tháng

D. 63 tháng

Giải

$$a = \frac{A.r.(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Áp dụng công thức trả góp với A là số tiền vay, r là lãi suất hàng tháng, a là số tiền cần trả hàng tháng và n là số tháng cần để trả hết nợ.

$$5,5 = \frac{300.0,5\%.(1+0,5\%)^n}{(1+0,5\%)^n - 1} \Rightarrow n = 63,85 \Rightarrow$$

Suy ra Cần 64 tháng để trả hết nợ

=> Chọn A**Phân tích**

$$a = \frac{A.r.(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Vay đầu kì 300 triệu trả hàng tháng 5.5 triệu rõ ràng là bài toán trả góp với công thức

Ví dụ 10: (THPT Ninh Giang-2017)

Ông B đến siêu thị điện máy để mua một cái laptop với giá 16,5 triệu đồng theo hình thức trả góp với lãi suất 1,5% / tháng. Để mua trả góp ông B phải trả trước 20% số tiền, số tiền còn lại ông sẽ trả dần trong thời gian 8 tháng kể từ ngày mua, mỗi lần trả cách nhau 1 tháng, số tiền mỗi tháng ông B phải trả là như nhau và tiền lãi được tính theo nợ gốc còn lại ở cuối mỗi tháng. Hỏi, nếu ông B mua theo hình thức trả góp như trên thì số tiền phải trả nhiều hơn so với giá niêm yết là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không đổi trong thời gian ông B hoàn nợ. (làm tròn đến hàng nghìn)

A. 1.628.000 đồng

B. 2.125.000 đồng

C. 907.000 đồng

D. 906.000 đồng.

=> Chọn D**Ví dụ 11:** (Sở GD&ĐT Bắc Ninh)

Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép để mua xe với lãi suất 0,8%/ tháng và hợp đồng thỏa thuận là trả 2 triệu đồng mỗi tháng. Sau một năm mức lãi suất của ngân hàng được điều chỉnh lên 1,2%/tháng và người vay muốn nhanh chóng trả hết món nợ nên đã thỏa thuận trả 4 triệu đồng trên một tháng (trừ tháng cuối). Hỏi phải mất bao nhiêu lâu thì người đó mới trả hết nợ

A. 35 tháng

B. 36 tháng

C. 25 tháng

D. 37 tháng

=> Chọn D**Ví dụ 12:** (Sở GD&ĐT TP. HCM - 2017)

Ông A vay ngân hàng T (triệu đồng) với lãi suất 12% / năm. Ông A thỏa thuận với ngân hàng cách thức trả nợ như sau: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng. Nhưng cuối tháng thứ ba kể từ lúc vay ông A mới hoàn nợ lần thứ nhất, cuối tháng thứ tư ông A hoàn nợ lần thứ hai, cuối tháng thứ năm ông A hoàn nợ lần thứ ba (hoàn hết nợ). Biết rằng số tiền hoàn nợ lần thứ hai gấp đôi số tiền hoàn nợ lần thứ nhất và số tiền hoàn nợ lần thứ ba bằng tổng số tiền hoàn nợ của hai lần trước. Tính số tiền ông A hoàn nợ ngân hàng lần thứ nhất.

A. $\frac{T(1+0,01)^5}{(2,01)^2 + 2}$

B. $\frac{T(1+0,01)^5}{(1,01)^2 + 5}$

C. $\frac{T(1+0,01)^5}{6}$

D. $\frac{T\left(1+\frac{5}{100}\right)}{6}$

=> Chọn A

Ví dụ 13: (Sở- GD&ĐT Bắc Ninh - 2017)

Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, s là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

- A. $3.10^5(1+0,5)^5(m^3)$ B. (1.424.300;1.424.400) C. $3.10^5(1+0,5)^4(m^3)$
D. (1.424.100;1.424.200)

=> Chọn C

Ví dụ 14: (Chuyên Lê Quý Đôn - 2017)

Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn được tính theo công thức $s = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 150 con và sau 5 giờ có 450 con, tìm số lượng vi khuẩn sau 10 giờ tăng trưởng

- A. 900 B. x = 0 C. 1050 D. 1200

=> Chọn B

Ví dụ 15: (Chuyên Hà Giang - 2017)

Một khu rừng ở tỉnh Hà Giang có trữ lượng gỗ là $3.10^5(m^3)$. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 5% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

- A. $3.10^5(1+0,5)^5(m^3)$ B. $3.10^5(1+0,05)^5(m^3)$ C. $3.10^5(1+0,05)^4(m^3)$ D. $3.10^5(1+0,5)^4(m^3)$

=> Chọn B

Ví dụ 16: (Sở GD&ĐT Điện Biên - 2017)

Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ t với số lượng là F (t), nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(t) = \frac{1000}{2t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày và bệnh nhân có cứu chữa được không?

- A. 5434 và không cứu được B. 1500 và cứu được
C. 283 và cứu được D. 3717 và cứu được

=> Chọn D

Ví dụ 17: (THPT Hàm Rồng - 2017)

Cho biết chu kỳ bán hủy của chất phóng xạ Plutôni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $y = e^x$ (x, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, s là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi sau bao nhiêu năm thì 10 gam Pu^{239} chỉ còn 1 gam gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 76753 B. 82235 C. 80934 D. 80922

=> Chọn D

Ví dụ 18: (Chuyên Quốc Học Huế - 2017)

$$Q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}} \right)$$

Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng nạp được tính theo công thức $Q(t)$ khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Nếu điện thoại nạp pin từ lúc cạn pin (tức là dung lượng pin lúc bắt đầu nạp là $x = 0$) thì bao lâu sau sẽ nạp được 90% (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $t \approx 1,54h$ B. $t = 1,2h$ C. $t = 1h$ D. $t \approx 1,34h$
=> Chọn A

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (THPT Lê Quý Đôn-2018). Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỷ lệ tăng dân số năm đó là 1,7 %. Cho biết sự tăng dân số được tính theo công thức $S = A.e^{r \cdot N}$ (Trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, s là số dân sau N năm, r là tỷ lệ tăng dân số hằng năm). Hỏi cứ tăng dân số với tỷ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 150 triệu người?

- A. 2032 B. 2020 C. 2039 D. 2045

Câu 2 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018). Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó rút được là

- A. $100 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ B. $101 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ C. $100 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ D. $101 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$

Câu 3 (Sở GD&ĐT Phú Thọ-2018). Ông Anh muốn mua một chiếc ô tô trị giá 700 triệu đồng nhưng ông chỉ có 500 triệu đồng và muốn vay ngân hàng 200 triệu đồng theo phương thức trả góp (trả tiền vào cuối tháng) với lãi suất 0,75%/ tháng. Hỏi hàng tháng, ông Anh phải trả số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) để sau đúng hai năm thì trả hết nợ ngân hàng?

- A. 9136000 đồng B. 9971000 đồng C. 9137000 đồng D. 9970000 đồng

Câu 4 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép -12 trên tháng. Sau hai năm 3 tháng (tháng thứ 28) người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Hỏi người đó được rút về bao nhiêu tiền?

- A. $101 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng B. $100 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng
C. $100 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ triệu đồng D. $101 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ triệu đồng

Câu 5 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018). Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó rút được là

- A. $100 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ B. $101 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ C. $100 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ D. $101 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$

Câu 6 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018). Số lượng của loại vi khuẩn X trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 3^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn X có sau t phút. Biết rằng sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn X là 20 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn X là 540 nghìn con?

- A. 81 phút B. 6 phút C. 12 phút D. 9 phút

Câu 7 (THPT Võ Nguyên Giáp - 2018). Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn được tính theo công thức $f(x) = A.e^{rx}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), x (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần?

- A. $5 \cdot \ln 20$ (giờ) B. $5 \cdot \ln 10$ (giờ) C. $10 \cdot \log_5 10$ (giờ) D. $10 \cdot \log_5 20$ (giờ)

Câu 8 (Chuyên Thái Bình - 2018). Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây trong khu rừng đó là 4% mỗi năm. Sau 5 năm khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ ?

- A. $4.10^5 \cdot 1,14^5 \text{ (m}^3\text{)}$ B. $4.10^5 \cdot (1 + 0,04^5) \text{ (m}^3\text{)}$ C. $4.10^5 \cdot 0,04^5 \text{ (m}^3\text{)}$ D. $4.10^5 \cdot 1,04^5 \text{ (m}^3\text{)}$

Câu 9 (Chuyên Thái Bình - 2018). Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 4 năm diện tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu phần diện tích hiện nay ?

- A. $1 - \left(\frac{x}{100}\right)^4$ B. 100% C. $1 - \frac{4x}{100}$ D. $\left(1 - \frac{x}{100}\right)^4$

Câu 10 (Chuyên Lam Sơn - 2018). Một tỉnh A đưa ra quyết định về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2015 - 2021 (6 năm) là 10,6% so với số lượng hiện có năm 2015. Theo phương thức ra 2 vào 1 (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước được 2 người thì được tuyển dụng 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hằng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hằng năm (làm tròn đến 0,01%).

- A. 1,13% B. 2,02% C. 1,85% D. 1,72%

Câu 11 (THPT Hoàng Hóa-2018). Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi

công thức: $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

- A. 2378 năm B. 2300 năm C. 2387 năm D. 2400 năm

Câu 12 (THPT Quảng Xương 1-2018). Theo số liệu của Tổng cục thống kê, năm 2016 dân số Việt Nam ước tính khoảng 94.444.200 người. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,07%. Cho biết sự tăng dân số được tính theo công thức $S = A \cdot e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người:

- A. 2040 B. 2037 C. 2038 D. 2039

Câu 13 (THPT Quảng Xương 3-2018). Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại X không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ đủ cho 100 ngày. Nhưng thực tế, kể từ ngày thứ hai trở đi lượng tiêu thụ thức ăn của trang trại tăng thêm 4% so với ngày trước đó. Hỏi lượng thức ăn dự trữ của trang trại X thực tế chỉ đủ cho bao nhiêu ngày?

- A. 42 ngày B. 41 ngày C. 39 ngày D. 40 ngày

Câu 14 (THPT Triệu Sơn 1 -2018). Lãi suất tiền gửi tiết kiệm của một số ngân hàng trong thời gian vừa qua liên tục thay đổi. Ông A gửi tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền ban đầu là 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% tháng chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên 1,15% tháng trong nửa năm tiếp theo và ông A tiếp tục gửi; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn 0,9% tháng, ông A tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa, khi rút tiền ông A thu được cả vốn lẫn lãi là 5 747 478,359 đồng (chưa làm tròn). Khi đó tổng số tháng mà ông A gửi là

- A. 15 tháng B. 14 tháng C. 13 tháng D. 16 tháng

Câu 15 (sở GD&ĐT Thanh Hóa-2018). Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ radi Ra^{226} là 1602 năm (tức là một lượng Ra^{226} sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $s = A \cdot e^{rt}$ trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), M là thời gian phân hủy, s là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5gam Ra^{226} sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?

- A. 0,886 (gam) B. $y = x^4 + 2x$ C. 0,795 (gam) D. 0,923 (gam)

Câu 16 (THPT Nguyễn Huệ-2018). Lãi suất gửi tiền tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác An gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% / tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9% / tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6% / tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác An không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi đó là lãi kép). Sau một năm gửi tiền, bác An rút được số tiền là bao nhiêu? (biết trong khoảng thời gian này bác An không rút tiền ra)

- A. 5436521,164 đồng B. 5436566,169 đồng C. 5452733,453 đồng D. 5452771,729 đồng

Câu 17 (THPT Hải Bà Trưng-2018). Một người lần đầu gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 3% của một quý và lãi từng quý sẽ được nhập vào vốn (hình thức lãi kép). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai sẽ gần với kết quả nào sau đây?

- A. 232 triệu B. 262 triệu C. 313 triệu D. 219 triệu

Câu 18 (THPT Nguyễn Bình Khiêm - 2018). Anh Bình mua một chiếc điện thoại giá 9 triệu đồng theo hình thức trả trước 30% và phần còn lại trả góp hàng tháng với lãi suất 0,9% /tháng. Biết rằng anh Bình muốn trả nợ cửa hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày mua, anh Bình bắt đầu trả nợ, hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền trả nợ ở mỗi lần như nhau. Hỏi, sau 12 tháng anh Bình muốn trả hết nợ thì hàng tháng anh Bình phải trả cho cửa hàng bao nhiêu tiền (làm tròn đến ngàn đồng)? Biết lãi suất không thay đổi trong thời gian anh Bình trả nợ.

- A. 556000 đồng B. 795000 đồng C. 604000 đồng D. 880000 đồng

Câu 19 (THPT Nguyễn Bình Khiêm - 2018). Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ là 300 con. Hỏi sau 15 giờ có bao nhiêu con vi khuẩn.

- A. 900 con B. 2700 con C. 600 con D. 1800 con

Câu 20 (THPT Lê Quý Đôn-2018). Khi ánh sáng đi qua môi trường (chẳng hạn như không khí, nước, sương mù...), cường độ sẽ giảm dần theo quãng đường truyền x, theo công thức $I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}$ trong đó I_0 là cường độ của ánh sáng khi bắt đầu truyền vào môi trường và μ là hệ số hấp thụ của môi trường đó. Biết rằng nước biển có hệ số hấp thụ $\mu = 1,4$ và người ta tính được rằng khi đi từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m thì cường độ ánh sáng giảm $1 \cdot 10^{10}$ lần. số nguyên nào sau đây gần với l nhất?

- A. 8 B. 10 C. 9 D. 90

Câu 21 (Thi THPTQG-2018). Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15 % so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả 5 năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

- A. Năm 2022 B. Năm 2021 C. Năm 2020 D. Năm 2023

Câu 22 (Sở GD-ĐT TP HCM - 2018). Dân số thế giới được tính theo công thức $s = Ae^{nr}$, trong đó A là dân số của năm làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng dân số Việt Nam vào thời điểm giữa năm 2016 là 90,5 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là 1,06% năm. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi thì sau bao nhiêu năm dân số Việt Nam có khoảng 100 triệu người?

- A. 8,5 B. 9,4 C. 12,2 D. 15

Câu 23 (Sở GD-ĐT TP HCM - 2018). Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi P(t) là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì P(t) được tính theo công thức

$P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} (\%)$. Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là -1. Niên đại của công trình kiến trúc đó gần với số nào sau đây nhất? (Giả sử khoảng thời gian từ lúc thu hoạch gỗ cho đến khi xây dựng công trình đó là không đáng kể)

- A. 1756 năm B. 3574 năm C. 2067 năm D. 1851 năm

Câu 24 (Chuyên Lê Hồng Phong- 2018). Một người vay ngân hàng 1.000.000.000 (một tỉ) đồng và trả góp trong 60 tháng. Biết rằng lãi suất vay là 0,6% /1 tháng và không đổi trong suốt thời gian vay. Người đó vay vào ngày 1/1/2017 và bắt đầu trả góp vào ngày 1/2/2017. Hỏi người đó phải trả mỗi tháng một số tiền không đổi là bao nhiêu (làm tròn đến hàng ngàn)?

- A. 13.813.000(đồng) B. 19.896.000 (đồng) C. 13.896.000 (đồng) D. 17.865.000 (đồng)

Câu 25 (THPT Lê Lợi-2018). Hiện tại hệ thống các cửa hàng điện thoại của Thế giới di động đang bán Iphone 7 64GB với giá 18 790 000 đồng. Người mua có thể chọn 03 hình thức mua điện thoại. Hình thức 1 trả tiền ngay lập tức 18 790 000 đồng. Hình thức 2 trả trước 50% còn lại 50% chia đều cho 08 tháng, mỗi tháng tiền phí bảo hiểm 64 500đồng/tháng. Hình thức 3 trả trước 30%, số tiền còn lại chia đều cho 12 tháng, tiền bảo hiểm 75 500 đồng/tháng. Nếu lãi suất ở hình thức 3 là 1,37%/tháng, thì tổng số tiền hàng tháng khách hàng phải trả là (làm tròn đến 500 đồng)

- A. 1 276 500 đồng B. 1 352 000 đồng C. 1 276 000 đồng D. 1 351 500 đồng

Câu 26 (THPTTH Cao Nguyên-2018). Ông Năm gửi 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng, số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở hai ngân hàng là 27507768,13 đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền ông Năm lần lượt gửi ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

- A. 180 triệu và 140 triệu B. 140 triệu và 180 triệu C. 120 triệu và 200 triệu D. 200 triệu và 120 triệu

Câu 27 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Trong môi trường nuôi cấy ổn định người ta nhận thấy rằng: cứ sau đúng 5 ngày số lượng loài của vi khuẩn A tăng lên gấp đôi, còn sau đúng 10 ngày số lượng loài của vi khuẩn B tăng lên gấp ba. Giả sử ban đầu có 100 con vi khuẩn A và 200 con vi khuẩn B, hỏi sau bao nhiêu ngày nuôi cấy trong môi trường đó thì số lượng hai loài bằng nhau, biết rằng tốc độ tăng trưởng của mỗi loài ở mọi thời điểm là như nhau?

- A. $\frac{10x \log_3 2}{2}$ ngày B. $\frac{5x \log_8 2}{3}$ ngày C. $\frac{10x \log_4 2}{3}$ ngày D. $\frac{5x \log_4 2}{3}$ ngày

Câu 28 (Chuyên Hưng Yên - 2018). Số nguyên tố dạng $M_p = 2^p - 1$, trong đó p là một số nguyên tố, được gọi là số nguyên tố Mec-xen (M.Mersenne, 1588 - 1648, người Pháp), số $M_{6972593}$ được phát hiện năm 1999. Hỏi rằng nếu viết số đó trong hệ thập phân thì có bao nhiêu chữ số?

- A. 6972592 chữ số B. 2098961 chữ số C. 6972593 chữ số D. 2098960 chữ số

Câu 29 (THPT Thanh Thủy-2018). Một người gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép như sau: Mỗi tháng người này tiết kiệm một số tiền cố định là X đồng rồi gửi vào ngân hàng theo kì hạn một tháng với lãi suất 0,8% /tháng. Tìm X để sau ba năm kể từ ngày gửi lần đầu tiên người đó có được tổng số tiền là 500 triệu đồng.

- A. $X = \frac{4 \cdot 10^6}{1,008^{37} - 1}$ B. $X = \frac{4 \cdot 10^6}{1 - 0,008^{37}}$ C. $X = \frac{4 \cdot 10^6}{1,008(1,008^{36} - 1)}$ D. $X = \frac{4 \cdot 10^6}{1,008^{36} - 1}$

Câu 30 (THPT Nguyễn Huệ - 2018). Lãi suất gửi tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác An gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% / tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9% / tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6% / tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác An không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi đó là lãi kép). Sau một năm gửi tiền, bác An rút được số tiền là bao nhiêu? (biết trong khoảng thời gian này bác An không rút tiền ra)

- A. 5436521,164 đồng B. 5436566,169 đồng C. 5452733,453 đồng D. 5452771,729 đồng

Câu 31 (THPT Kim Liên-2018). Tính đến 31/12/2015 diện tích rừng trồng ở nước ta là 3 886 337 ha. Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng trồng của nước ta tăng 6,1% diện tích hiện có. Hỏi sau ba năm diện tích rừng trồng ở nước ta là bao nhiêu ha?(Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

- A. 4 123 404 ha B. 4 641 802 ha C. 4 834 603 ha D. 4 600 000 ha

Câu 32 (Chuyên ĐHSP-2018). Chuyện kể rằng: Ngày xưa, có ông vua hứa sẽ thưởng cho một vị quan món quà mà vị quan được chọn. Vị quan tâu: “Hạ thần chỉ xin Bệ Hạ thưởng cho một số hạt thóc thôi ạ! Cụ thể như sau: Bàn cờ vua có 64 ô thì với ô thứ nhất xin nhận 1 hạt, ô thứ 2 thì gấp đôi ô đầu, ô thứ 3 thì

lại gấp đôi ô thứ 2, ... ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước”. Giá trị nhỏ nhất của n để tổng số hạt thóc mà vị quan từ n ô đầu tiên (từ ô thứ nhất đến ô thứ n) lớn hơn 1 triệu là

- A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

Câu 33 (Chuyên Phan Bội Châu - 2018). Ông Quang cho ông Tèo vay 1 tỉ đồng với lãi suất hàng tháng là 0,5% theo hình thức tiền lãi hàng tháng được cộng vào tiền gốc cho tháng kế tiếp. Sau 2 năm, ông Tèo trả cho ông Quang cả gốc lẫn lãi. Hỏi số tiền ông Tèo cần trả là bao nhiêu đồng? (Lấy làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 3.225.100.000 B. 1.121.552.000 C. 1.127.160.000 D. 1.120.000.000

Câu 34 (THPT Chu Văn An-2018). Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0 \cdot (1 - e^{-t\sqrt{2}})$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $t \approx 1,65$ giờ B. $t \approx 1,61$ giờ C. $t \approx 1,63$ giờ D. $t \approx 1,50$ giờ

Câu 35 (Chuyên Tuyên Quang - 2018). Ông A vay ngân hàng 220 triệu đồng và trả góp trong vòng 1 năm với lãi suất 1,15% mỗi tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, ông sẽ hoàn nợ cho ngân hàng với số tiền hoàn nợ mỗi tháng là như nhau, hỏi mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng, biết lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

- A. $\frac{220 \cdot (1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{(1,0115)^{12} - 1}$ triệu đồng B. $\frac{220 \cdot (1,0115)^{12}}{(1,0115)^{12} - 1}$ triệu đồng
C. $\frac{55 \cdot (1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{3}$ triệu đồng D. $\frac{220 \cdot (1,0115)^{12}}{3}$ triệu đồng

Câu 36 (Chuyên Thái Bình - 2018). Biết chu kỳ bán rã của chất phóng xạ plutoni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân rã thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân rã được tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân rã hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân rã, S là lượng còn lại sau thời gian phân rã t . Hỏi 10 gam Pu^{239} sau khoảng bao nhiêu năm phân rã sẽ còn 1 gam? Biết r được làm tròn đến hàng phần triệu.

- A. 82230 (năm) B. 82232 (năm) C. 82238 (năm) D. 82235 (năm)

Câu 37 (Chuyên Ngoại Ngữ - 2018). Một người muốn có 2 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách mỗi năm gửi vào ngân hàng số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi), số tiền được làm tròn đến đơn vị nghìn đồng?

- A. 252.436.000 B. 272.631.000 C. 252.435.000 D. 272.630.000

Câu 38 (Chuyên Lê Khiết - 2018). Bác B gửi tiết kiệm số tiền ban đầu là 50 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,72% tháng. Sau một năm bác B rút cả vốn lẫn lãi và gửi theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 0,78% tháng. Sau khi gửi đúng một kỳ hạn 6 tháng do gia đình có việc bác gửi thêm 3 tháng nữa thì phải rút tiền trước hạn cả gốc lẫn lãi được số tiền là 57.694.945,55 đồng (chưa làm tròn). Biết rằng khi rút tiền trước hạn lãi suất được tính theo lãi suất không kỳ hạn, tức tính theo hàng tháng. Trong số 3 tháng bác gửi thêm lãi suất là

- A. 0,55% B. 0,3% C. 0,4% D. 0,5%

Câu 39 (Chuyên Biên Hòa - 2018). Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau một năm, tổng số tiền (bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra) anh Hùng có là bao nhiêu?

- A. 172 triệu B. 72 triệu C. 167,3042 triệu D. 104,907 triệu

Câu 40 (THPT Quốc học Huế -2018). Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải kinh phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân

hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 4%. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

- A. 46794000 đồng B. 44163000 đồng C. 42465000 đồng D. 41600000 đồng

Câu 41 (Chuyên Võ Nguyên Giáp - 2018). Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm 4.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm, lương của anh Hưng lại được tăng thêm 7%. Hỏi sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

- A. 1.287.968.000 đồng B. 1.931.953.000 đồng C. 2.575.937.000 đồng D. 3.219.921.000 đồng

Câu 42 (THTT Số 478 - 2018). Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,8%/ tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là bao nhiêu?

- A. 38.400.000 đồng B. 10.451.777 đồng C. 76.800.000 đồng D. 39.200.000 đồng

Câu 43 (THPT Phú Xuyên-2018). Một người đem gửi tiền tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 1% một tháng. Biết rằng cứ sau mỗi quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì người đó nhận lại được số tiền bao gồm cả vốn lẫn lãi gấp ba lần số tiền ban đầu?

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

Câu 44 (số GD&ĐT Hải Phòng-2018). Một người vay ngân hàng một tỷ đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất người đó trả 40 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,65% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu người đó trả hết số tiền trên?

- A. 29 tháng B. 27 tháng C. 26 tháng D. 28 tháng

Câu 45 (số GD&ĐT Bắc Giang - 2018). Thang đo Richtơ được Charles Francis đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị Richtơ. Công thức tính độ chấn động như sau: $M_L = \log A - \log A_0$, M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa được đo bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn. Hỏi theo thang độ Richtơ, cùng với một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một trận động đất 7 độ Richtơ sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richtơ?

- A. 2 B. 20 C. 100 D. $10^{\frac{5}{7}}$

Câu 46 (THPTTiền Lãng -2018). Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, ông An đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 800 triệu đồng với lãi suất $x\%$ / năm, điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, ông An đã thanh toán hợp đồng ngân hàng với số tiền là 1 058 triệu đồng. Hỏi lãi suất trong hợp đồng giữa ông An và ngân hàng là bao nhiêu?

- A. 13% năm B. 14% năm C. 12% năm D. 15% năm

Câu 47 (THPT Phan Đình Phùng -2018). Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) tại độ cao A (đo bằng mét) so với mực nước biển, tính theo công thức $P = P_0 \cdot e^{xl}$, trong đó $P_0 = 760\text{mmHg}$ là áp suất không khí ở mức nước biển, l là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 mét thì áp suất không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất ở đỉnh Fansipan cao mét là bao nhiêu?

- A. 22,24mmHg B. 519,58mmHg C. 517,94mmHg D. 530,23mmHg

Câu 48 (THPTHai Bà Trưng-2018). Một người lần đầu gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 3% của một quý và lãi từng quý sẽ được nhập vào vốn (hình thức lãi kép). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai sẽ gần với kết quả nào sau đây?

- A. 232 triệu B. 262 triệu C. 313 triệu D. 219 triệu

Câu 49 (THPT Lạng Giang 1-2018). Một lon nước soda 80°F được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại 32°F . Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t) = 32 + 48 \cdot (0.9)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là 50°F ?

- A. 1,56 B. 9,3 C. 2 D. 4

Câu 50 (Chuyên Phan Bội Châu- 2018). Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log \frac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A = 3$ (Ben) và 8; -5 (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

- A. 3,59 (Ben) B. 3,06 (Ben) C. 3,69 (Ben) D. 4 (Ben)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1-C	2-B	3-C	4-A	5-B	6-B	7-C	8-D	9-D	10-C
11-A	12-D	13-B	14-D	15-A	16-C	17-A	18-A	19-B	20-C
21-B	22-B	23-D	24-B	25-D	26-B	27-C	28-D	29-C	30-C
31-B	32-C	33-C	34-C	35-A	36-D	37-A	38-C	39-C	40-B
41-C	42-D	43-C	44-D	45-C	46-D	47-D	48-A	49-D	50-C

CHỦ ĐỀ 14: CASIO GIẢI NHANH MŨ - LOGARIT

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Casio giải phương trình mũ - logarit

Bước 1: Chuyển PT về dạng vế trái = 0. Vậy nghiệm của PT sẽ là giá trị của x làm cho vế trái = 0

Bước 2: Sử dụng chức năng CALC hoặc MODE 7 hoặc SHIFT SOLVE để kiểm tra xem nghiệm. Một giá trị được gọi là nghiệm nếu thay giá trị đó vào vế trái thì được kết quả là 0

Bước 3: Tổng hợp kết quả và chọn đáp án đúng nhất

***Đánh giá chung:** Sử dụng CALC sẽ hiệu quả nhất trong 3 cách

Chú ý: Nhập giá trị $\log_a b$ vào máy tính Casio thì ta nhập $\log a : \log b$ hoặc $\log(b,a)$

2. Tìm số nghiệm của phương trình Mũ – Logarit:

Để tìm hết được số nghiệm của 1 phương trình ta sử dụng lệnh dò nghiệm SHIFT SOLVE kết hợp phép khử nghiệm

Bước 1: Chuyển PT về dạng vế trái = 0

Bước 2: Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE dò nghiệm

Bước 3: Khử nghiệm đã tìm được và tiếp tục sử dụng SHIFT SOLVE để dò nghiệm.

3. Casio tìm nghiệm của bất phương trình Mũ – Logarit

Bước 1: Chuyển bài toán bất phương trình về bài toán xét dấu bằng cách chuyển hết các số hạng về vế trái. Khi đó bất phương trình sẽ có dạng vế trái ≥ 0 hoặc vế trái ≤ 0

Bước 2: Sử dụng chức năng CALC của máy tính Casio để xét dấu các khoảng nghiệm từ đó rút ra đáp số đúng nhất của bài toán.

CALC theo chiều thuận: Nếu bất phương trình có nghiệm tập nghiệm là khoảng $(a;b)$ thì bất phương trình đúng với mọi giá trị thuộc khoảng $(a;b)$

Chú ý: Nếu khoảng $(a;b)$ và $(c;d)$ cùng thỏa mãn mà $(a;b) \subset (c;d)$ thì (c,d) là đáp án chính xác

4. Casio giải các bài toán chứa tham số Mũ – Logarit

Bước 1: Cô lập m đưa về dạng $m \geq g(x)$ hoặc $m \leq g(x)$

Bước 2: Đưa bài toán ban đầu về bài toán giải phương trình, bất phương trình đã học

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: (Chuyên Khoa học Tự Nhiên – 2018)

Phương trình $\log_2 x \log_4 x \log_6 x = \log_2 x \log_4 x + \log_4 x \log_6 x + \log_6 x \log_2 x$ có tập nghiệm là

A. $\{1\}$

B. $\{2;4;6\}$

C. $\{1;12\}$

D. $\{1;48\}$

Giải

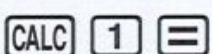
Chuyển phương trình về dạng:

$$\log_2 x \log_4 x \log_6 x - \log_2 x \log_4 x - \log_4 x \log_6 x - \log_6 x \log_2 x = 0$$

Nhập vế trái vào máy tính Casio và nhấn nút = để lưu phương trình vào máy



Sử dụng chức năng CALC để kiểm tra xem 1 có phải là nghiệm không. Kết quả cho $x = 1$ là nghiệm



Vậy 1 là nghiệm.

Ta tiếp tục kiểm tra giá trị 12 có phải là nghiệm không.

Đây là một kết quả khác 0 vậy 12 không phải là nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án C sai

CALC **1** **2** **=**

Tiếp tục kiểm tra giá trị 48 có phải là nghiệm không

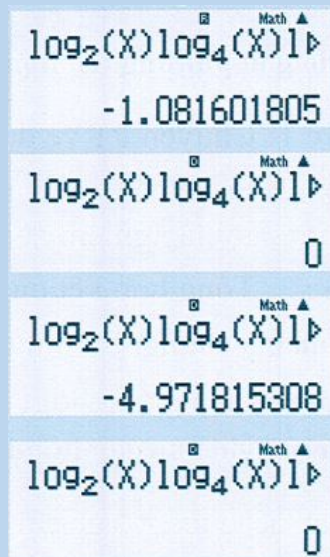
CALC **4** **8** **=**

Vậy 48 là nghiệm chứng tỏ D là đáp án chính xác.

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Bình luận

Nếu đáp án cho rõ ràng nghiệm là số cụ thể, có thể nhập vào máy tính để kiểm tra thì ta ưu tiên sử dụng chức năng CALC



Ví dụ 2: (THPT Liên Hà – Đông Anh – 2018)

Tập nghiệm của phương trình $3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2-m}{x-m}} = 15$ (m là tham số) là

- A. $\{2; m \log_3 5\}$ B. $\{2; m + \log_3 5\}$ C. $\{2\}$ D. $\{2; m - \log_3 5\}$

Giải

Đề bài không cho điều kiện ràng buộc của m nên ta chọn một giá trị m bất kì.

Ví dụ $m = 5$ Phương trình trở thành:

$$3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2-5}{x-5}} = 15 \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-7}{x-5}} - 15 = 0$$

Nhập phương trình vào máy tính Casio

3 **x[^]** **ALPHA** **)** **=** **1** **▶** **x** **5** **x[^]** **=** **2** **ALPHA** **)**
= **2** **=** **5** **▼**
ALPHA **)** **=** **5** **▶** **▶** **=** **1** **5**

Đáp án nào cũng có 2 nên không cần kiểm tra. Kiểm tra nghiệm $x = m \log_3 5 = 5 \log_3 5$

CALC **5** **x** **(** **log** **5** **)** **÷** **log** **3** **)** **)** **=**

Ra một kết quả khác 0 $\Rightarrow$ Đáp án A sai

Tương tự tra nghiệm $x = m - \log_3 5 = 5 - \log_3 5$

CALC **5** **-** **log** **5** **)** **÷** **log** **3** **)** **=**

Ra kết quả bằng 0 vậy

=> **Chọn D**

Bình luận

Nếu đề bài cho tham số m thì ta có thể chọn giá trị đặc trưng của m để đưa bài toán về dạng xác định như VD1 rồi tiếp tục CALC

Math
 $3^{x-1} \times 5^{\frac{2x-2-5}{x-5}} - 15$

Math **▲**
 $3^{x-1} \times 5^{\frac{2x-2-5}{x-5}} - 15$
207771.3033

Math **▲**
 $3^{x-1} \times 5^{\frac{2x-2-5}{x-5}} - 15$
0

Ví dụ 3: (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai – 2018)

Gọi x_1 và x_2 là 2 nghiệm của phương trình $5^{2x+1} - 8.5^x + 1 = 0$. Khi đó

- A. $x_1 + x_2 = 1$ B. $x_1 + x_2 = -2$ C. $x_1 + x_2 = 2$ D. $x_1 + x_2 = -1$

Giải

Cách 1: CASIO SHOLVE + CALC

Nhập về trái vào máy tính Casio. Rồi nhấn phím = để lưu lại phương trình =

5 **$x^{\square}$** **2** **ALPHA** **)** **+** **1** **▶** **-** **8** **$\times$** **5** **$x^{\square}$** **ALPHA** **)** **▶** **+** **1**

Dò 1 nghiệm của phương trình bằng chức năng SHIFT SOLVE

SHIFT **CALC** **1** **=**

Ta được 1 nghiệm và lưu nghiệm này vào biến A rồi coi đây là nghiệm x_1

SHIFT **RCL** **(-)**

Nếu đáp án là $x_1 + x_2 = 1$ đúng là $x_2 = 1 - A$ phải là nghiệm.

Ta gọi lại phương trình ban đầu rồi CALC với giá trị $1 - A$

▲ **CALC** **1** **-** **ALPHA** **(-)** **=**

Kết quả ra khác 0 vậy $1 - A$ không phải là nghiệm hay đáp án A sai.

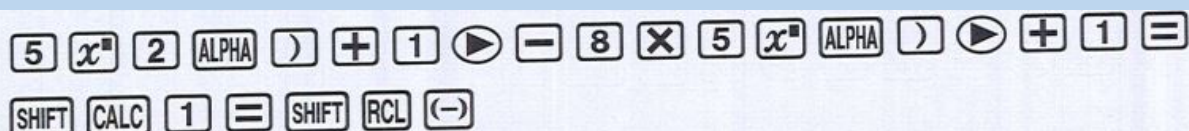
Tương tự như vậy ta CALC với giá trị x_2 của đáp án B, C, D. Cuối cùng ta thấy giá trị $-1 - A$ là nghiệm.

=> **Chọn D**

CALC **-** **1** **-** **ALPHA** **(-)** **=**

Cách 2: CASIO 2 LẦN SHIFT SOLVE

Nhập vế trái vào máy tính Casio. Nhấn nút để lưu vế trái rồi SHIFT SOLVE tìm nghiệm thứ nhất và lưu vào A.



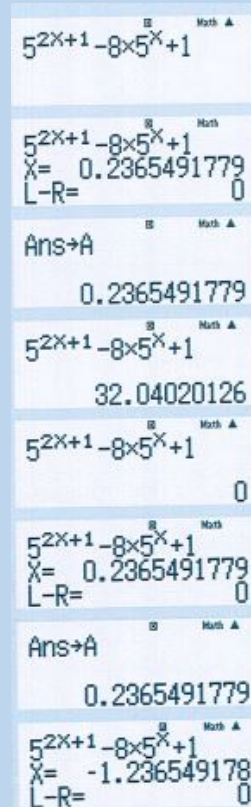
Gọi lại vế trái. SHIFT SOLVE một lần nữa để tìm nghiệm thứ hai và lưu vào B



Ta có $A + B = -1$

Bình luận

Trong 2 cách thì thường ưu tiên sử dụng cách thứ nhất nếu quan hệ giữa x_1 và x_2 có tính chất đối xứng ví dụ như $x_1 x_2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 = 3 \dots$



Ví dụ 4: (Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang – 2018)

Phương trình $9^x - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Giá trị $A = 2x_1 + 3x_2$

A. $4 \log_3 2$

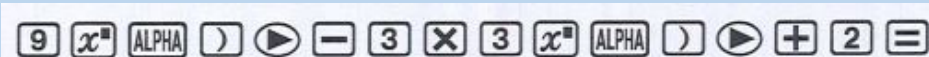
B. 1

C. $3 \log_3 2$

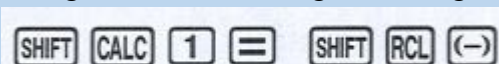
D. $2 \log_2 3$

Giải

Nhập vế trái vào máy tính Casio rồi nhấn nút để lưu phương trình



Dò nghiệm thứ nhất bằng chức năng SHIFT SOLVE và lưu nghiệm này vào phím A



Tiếp tục dò nghiệm thứ hai bằng chức năng SHIFT SOLVE



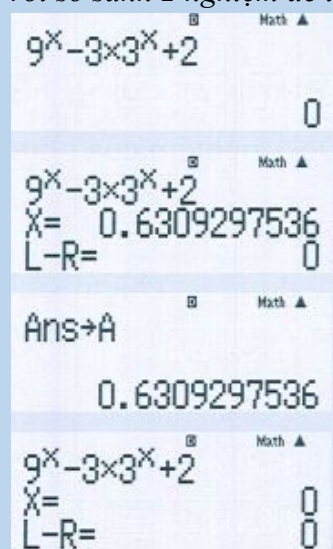
Ta được 1 nghiệm nữa là 0. Vì $0 < A$ nên $x_1 = 0, x_2 = A$

$$2x_1 + 3x_2 = 2.0 + 3.A \approx 1.8927 = 3 \log_3 2$$

=> **Chọn C**

Bình luận

Nếu quan hệ giữa x_1, x_2 không đối xứng ví dụ như $2x_1 + 3x_2$ thì ta chỉ có thể sử dụng 2 lần SHIFT SOLVE rồi so sánh 2 nghiệm để tìm ra x_1, x_2 cụ thể



Ví dụ 5: (THPT Nhân Chính – Hà Nội – 2018)

Số nghiệm của phương trình $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{3x}{x-1}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x$ là

A. 2 nghiệm

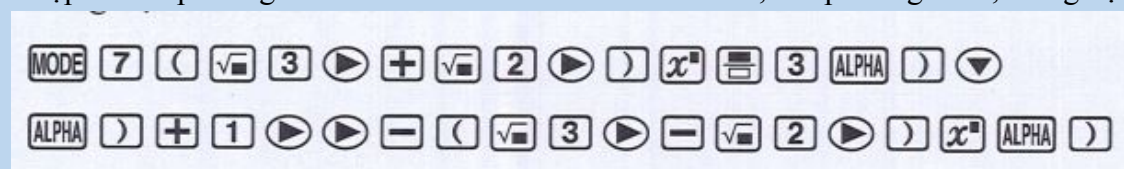
B. 3 nghiệm

C. 1 nghiệm

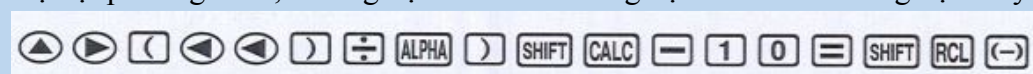
D. không có

Giải

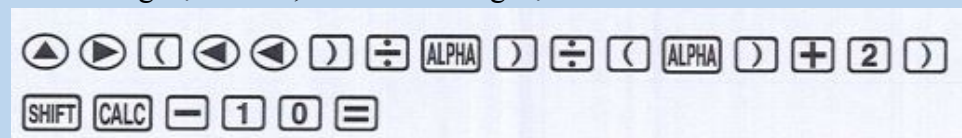
Nhập về trái phương trình: $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{3x}{x-1}} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 0$, lưu phương trình, dò nghiệm thứ nhất:



Gọi lại phương trình, khử nghiệm $x = 0$ rồi dò nghiệm thứ hai. Lưu nghiệm này vào biến A



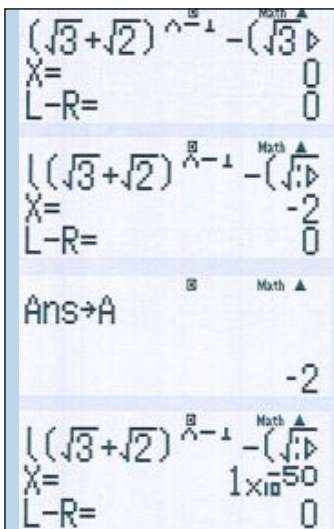
Khử hai nghiệm $x = 0$; $x = A$ rồi dò nghiệm thứ ba.



=> Phương trình có 2 nghiệm => **Chọn A**

Chú ý

Ta hiểu $10^{-50} = 0$ tức là máy tính không dò thêm được nghiệm nào khác 0



Ví dụ 6: (THPT Thái Bình – Lần 3 – 2018)

Số nghiệm của phương trình $3.2^x + 4.3^x + 5.4^x = 6.5^x$ là

A.3

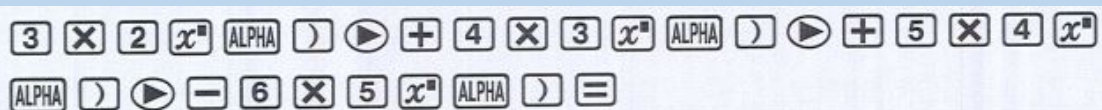
B.2

C.1

D.0

Giải

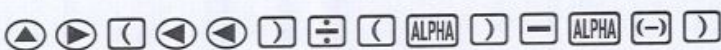
Nhập vế trái của phương trình $3.2^x + 4.3^x + 5.4^x - 6.5^x = 0$ vào máy tính Casio rồi nhấn nút =



Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE để tìm được nghiệm thứ nhất rồi lưu nghiệm này vào A:



Để nghiệm $x = 0$ không xuất hiện ở lần dò nghiệm SHIFT SOLVE tiếp theo ta chia phương trình $F(X)$ cho nhân tử $(x - A)$



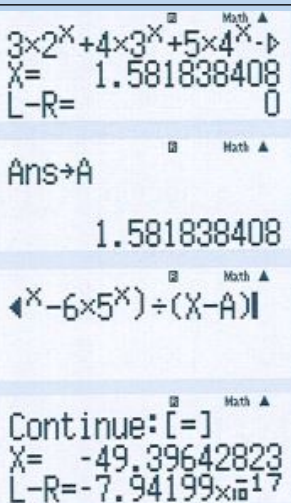
Tiếp tục SHIFT SOLVE lần thứ hai:

$qr = 1 =$

$R \neq 0$ ta hiểu $x = -49.39...$ có sai số $-7.9... \Rightarrow x = -49.39...$ không phải nghiệm.

$\Rightarrow$ Phương trình chỉ có 1 nghiệm duy nhất $x = A$

$\Rightarrow$ **Chọn C**



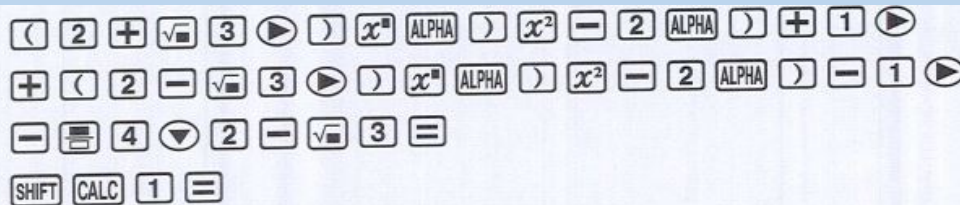
Ví dụ 7: (Chuyên Lam Sơn – 2018)

Số nghiệm của bất phương trình $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x+1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}} \quad (1)$ là

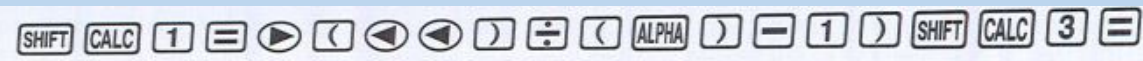
A. 0 B. 2 C. 3 D. 5

Giải

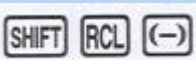
Nhập về trái phương trình $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} - \frac{4}{2-\sqrt{3}} = 0$ vào máy tính Casio, nhấn nút = để lưu phương trình lại và dò nghiệm thứ nhất.



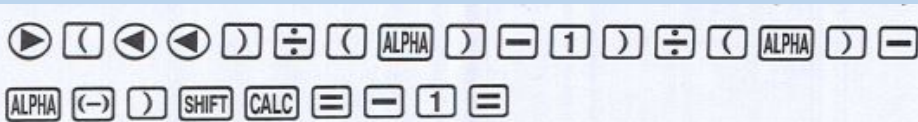
Khử nghiệm $x = 1$ rồi dò nghiệm thứ hai



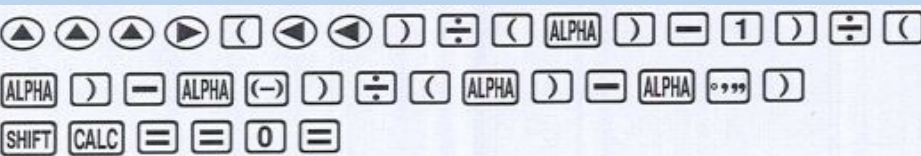
Lưu biến thứ hai này vào A



Khử nghiệm $x = 1$; $x = A$ rồi dò nghiệm thứ ba. Lưu nghiệm này vào B

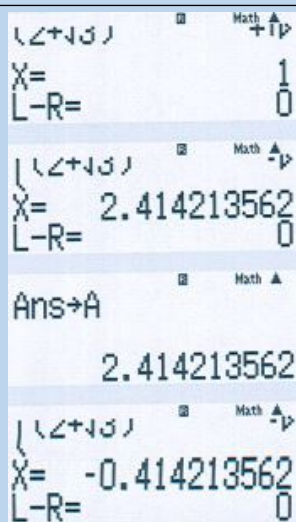


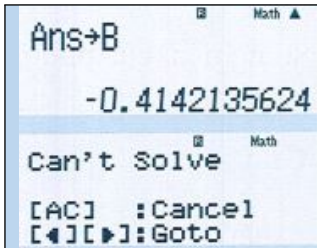
Khử nghiệm $x = 1$; $x = A$; $x = B$ rồi dò nghiệm thứ tư.



Hết nghiệm $\Rightarrow$ Phương trình (1) có 3 nghiệm

$\Rightarrow$ Chọn C





Ví dụ 8: (Chuyên Khoa Học Tự Nhiên – 2018)

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_3 \frac{2x+1}{x-1} \right) > 0$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; -2)$ B. $(4; +\infty)$
C. $(-2; 1) \cup (1; 4)$ D. $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$

=> Chọn D

Ví dụ 9: (Thi HSG tỉnh Ninh Bình – 2018)

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x - 6^x + 1 > 0$?

- A. $S = (2; +\infty)$ B. $S = (0; 2)$ C. $S = \mathbb{R}$ D. $(-\infty; 2)$

=> Chọn D

Ví dụ 10: (Chuyên KHTN – Lần 2 – 2018)

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2 x - \log_2 (x-2) = m$ có nghiệm?

- A. $1 \leq m < +\infty$ B. $1 < m < +\infty$ C. $0 \leq m < +\infty$ D. $0 < m < +\infty$

=> Chọn D

Ví dụ 11: (Thi thử chuyên KHTN – Lần 2 – 2018)

Tìm tham số m để phương trình $\ln x = mx^4$ có đúng một nghiệm?

- A. $m = \frac{1}{4e}$ B. $m = \frac{1}{4e^4}$ C. $\frac{e^4}{4}$ D. $\frac{4}{\sqrt[4]{e}}$

=> Chọn A

Ví dụ 12: (THPT Lục Ngạn – Bắc Giang – 2018)

Tìm m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$?

- A. $-1 \leq m \leq \frac{1}{4}$ B. $m < \frac{1}{4}$ C. $0 < m \leq \frac{1}{4}$ D. $m \leq \frac{1}{4}$

=> Chọn D

Ví dụ 13: (Chuyên Amsterdam – HN – 2018)

Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\log_{\frac{1}{2}} |x-2| - \log_{\frac{2}{3}} (x+1) = m$ có 3 nghiệm phân biệt?

- A. $m > 3$ B. $m < 2$ C. $m > 0$ D. $m = 2$

=> Chọn A

Ví dụ 14: (THPT Chu Văn An – HN – 2018)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 3^{x+2} + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu

- A. $m < 0$ B. $0 < m < 8$ C. $m \in \left(0; \frac{81}{4} \right)$ D. Không tồn tại m

=> Chọn C

CHỦ ĐỀ 15: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ TÌM NHANH

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Ý nghĩa của phương pháp đặt ẩn phụ: Đưa 1 tích phân phức tạp (không có công thức trong bảng nguyên hàm) trở về một tích phân đơn giản (có công thức trong bảng nguyên hàm).

2. Công thức đổi vi phân (công thức đổi đuôi): $t = u(x) \Rightarrow t' dt = u'(x) dx$

3. Giá trị bất biến của tích phân: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt$

4. Phương pháp chung:

- ♦ **Bước 1:** Xác định thành phần ẩn phụ và tiến hành đặt ẩn phụ
- ♦ **Bước 2:** Tiến hành đổi vi phân và đổi cận
- ♦ **Bước 3:** Lắp các thành phần tìm được vào tích phân ban đầu để tạo tích phân mới

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Xuất hiện căn thức thì đặt t căn thức

Ví dụ 1 (Chuyên ĐH Vinh): Cho tích phân $I = \int_0^4 \frac{1}{3 + \sqrt{2x+1}} dx = a + b \ln \frac{2}{3}$ với a, b là các số nguyên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b = 3$ B. $a - b = 3$ C. $a - b = 5$ D. $a + b = 5$

Giải

Cách 1: Đặt ẩn phụ

Vì xuất hiện căn thức nên ta đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1$

Tiến hành đổi vi phân (đổi đuôi) $(t^2)' dt = (2x+1)' dx \Rightarrow 2t dt = 2 dx \Rightarrow t dt = dx$

Tiến hành đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 4 \rightarrow t = 3 \end{cases}$

Khi đó ta tích phân mới $I = \int_1^3 \frac{t dt}{3+t} = \int_1^3 \left(1 - \frac{3}{t+3}\right) dt = (t - 3 \ln|t+3|) \Big|_1^3 = 2 - 3 \ln \frac{2}{3}$

Vậy $a = 2, b = 3 \Rightarrow a + b = 5$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Cách 2: Casio

Tính giá trị tích phân I và lưu giá trị này vào phím A

$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{y}$ 1 $\frac{1}{z}$ 3 $+$ $\sqrt{\square}$ 2 ALPHA $\frac{1}{x}$ $+$ 1 $\frac{1}{y}$ 0 $\frac{1}{z}$ 4 $=$ SHIFT

RCL $(-)$

Với đáp án A ta thu được hệ phương trình :

$$\begin{cases} a + \ln\left(\frac{2}{3}\right).b = A \\ a + b = 3 \end{cases}$$

Sử dụng chức năng MODE 5 1 giải hệ phương trình

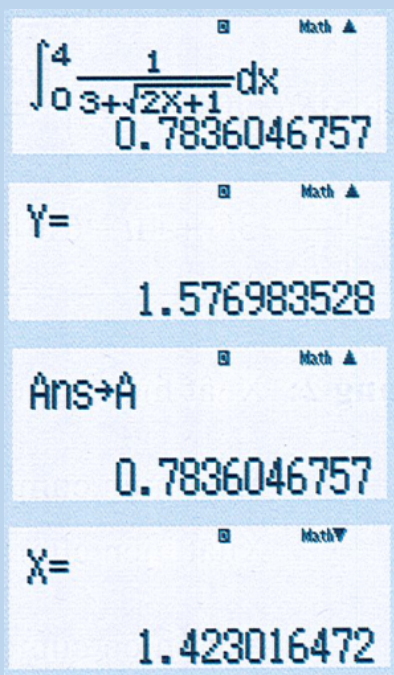
MODE 5 1 1 $=$ ln 2 $\div$ 3 $)$ $=$ ALPHA $(-)$ $=$ 1 $=$ 1 $=$
 3 $=$ $=$ $=$

Ta thu được $a \approx 1.4, b \approx 1.57$ là 2 giá trị không nguyên $\Rightarrow$ A sai

Tương tự làm như vậy, ở đáp số D ta thu được $a = 2, b = 3$ thỏa mãn.

Phân tích

Nếu tích phân xuất hiện căn thức $\sqrt{2x+1}$ thì ta nghĩ đến “đặt căn thức là ẩn phụ $t = \sqrt{2x+1}$ ” để đưa tích phân I ban đầu về tích phân mới đơn giản hơn.



Ví dụ 2 (Chuyên Biên Hòa):

Tích phân $I = \int_0^3 \frac{x}{2+\sqrt{x+1}} dx$ có giá trị $\frac{14}{a} - 12 \ln \frac{4}{b}$ với a, b là các số nguyên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a - b = 1$

B. $2a - b = 3$

C. $3a + b = 2$

D. $3a + b = -3$

Giải

Cách 1: Đặt ẩn phụ loại 1

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1$

Tiến hành đổi vi phân (đổi đuôi) $(t^2)' dt = (x+1)' dx \Rightarrow 2t dt = dx$

Tiến hành đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=3 \rightarrow t=2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta được } I &= \int_1^2 \frac{(t^2-1) \cdot 2t dt}{t+2} = 2 \int_1^2 \left(\frac{t^3-t}{t+2} \right) dt = 2 \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2} \right) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6 \ln|t+2| \right) \Big|_1^2 = \frac{14}{3} - 12 \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $a=3, b=3 \Rightarrow 2a-b=3$.

$\Rightarrow$ Chọn B

Cách 2: Đặt ẩn phụ loại 2

$$\text{Đặt } t = 2 + \sqrt{x+1} \Rightarrow t-2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 4t + 3$$

Tiến hành đổi vi phân: $dx = (2t-4)dt$

Tiến hành đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=3 \\ x=3 \rightarrow t=4 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta được } I &= \int_3^4 \frac{(t^2-4t+3) \cdot (2t-4) dt}{t} = 2 \int_3^4 \frac{t^3 - 6t^2 + 11t - 6}{t} dt = 2 \int_3^4 \left(t^2 - 6t + 11 - \frac{6}{t} \right) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 11t - 6 \ln|t| \right) \Big|_3^4 = \frac{14}{3} - 12 \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Bình luận

Ta thấy trong cách 1, việc chia tử số cho $t+2$ là một công việc khó khăn. Tuy nhiên trong cách 2, việc chia tử số cho t là một công việc đơn giản hơn rất nhiều. Do đó ta rút kinh nghiệm: “Nếu mẫu số chứa căn thức thì đặt cả mẫu số là t ”

Dạng 2: Xuất hiện cụm $\cos x dx$ thì đặt $t = \sin x$

Xuất hiện cụm $\sin x dx$ thì đặt $t = \cos x$

Xuất hiện cụm $\frac{1}{\cos^2 x} dx$ thì đặt $t = \tan x$

Xuất hiện cụm $\frac{1}{\sin^2 x} dx$ thì đặt $t = \cot x$

Ví dụ 3 (Chuyên Thái Nguyên): Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin^2 x) - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ với a, b là các số hữu tỉ,

$c > 0$. Tính tổng $S = a + b + c$?

A. $S = 4$

B. $S = 3$

C. $S = 0$

D. $S = 1$

Giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t' dt = (\sin x)' dx \Rightarrow dt = \cos x dx$

Tiến hành đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$

Khi đó ta tích phân mới $I = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 5t + 6} = \int_0^1 \left(\frac{dt}{(t-2)(t-3)} \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dx$

$$= \left(\ln |t-3| - \ln |t-2| \right) \Big|_0^1 = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3}$$

Vậy $a = 1, b = 0, c = 3 \Rightarrow a + b + c = 4$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Phân tích

Tích phân chứa cụm $\cos x dx$ thì đương nhiên ta chọn ẩn phụ $t = \sin x$

Bình luận

Hệ quả của phép đặt ẩn phụ đối với các hàm lượng giác ta thường thu được tích phân hệ quả là 1 tích phân hàm phân thức hữu tỉ.

Ví dụ 4 (Chuyên Biên Hòa): Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Tính $F(0)$

A. $F(0) = 4 - 6 \ln 2$

B. $F(0) = -4 - 6 \ln 2$

C. $F(0) = -4 + 6 \ln 2$

D. $F(0) = 4 + 6 \ln 2$

Giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2 \sin 2x dx \Rightarrow 2 \sin 2x dx = -dt$

$$\text{Lại có: } 1 + \cos^2 x = 1 + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{3 + \cos 2x}{2} = \frac{t + 3}{2}$$

$$\text{Khi đó } I = \int \frac{t - dt}{t+3} = -2 \int \frac{t}{t+3} dt = -2 \int \left(1 - \frac{3}{t+3} \right) dt = -2(t - 3 \ln |t+3|) + C$$

$$\text{Tiến hành đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = -1 \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ với ẩn } x \Rightarrow F(-1) = 0 \text{ ẩn } t \Rightarrow 2 + 6 \ln 2 + C = 0 \Rightarrow C = -2 - 6 \ln 2$$

$$\text{Vậy } F(0) \text{ với ẩn } x \text{ là } F(1) \text{ với ẩn } t \text{ và } -2 + 6 \ln 4 - 2 - 6 \ln 2 = -4 + 6 \ln 2$$

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Phân tích

Trong tích phân chứa cả dấu hiệu “ $\cos 2x dx$ ” thì đặt $t = \sin 2x$ ” và “ $\sin 2x dx$ ” thì đặt $t = \cos 2x$ ”. Do đó để trả lời câu hỏi đặt t là cái gì thì ta phải đi xem xét các thành phần còn lại trong tích phân. Và ta thấy $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ là lý do quyết định việc đặt ẩn phụ.

Dạng 3: Xuất hiện cụm $\ln x$ và $\frac{1}{x} dx$ thì đặt $t = \ln x$

Ví dụ 5 (THPT An Nhơn): Tích phân $I = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 2 + b$ với a, b là các số nguyên.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $2a + b = 1$ **B.** $a^2 + b^2 = 4$ **C.** $a - b = 1$ **D.** $ab = 2$

Giải

$$\text{Đặt } t = \ln x + 2 \Rightarrow t' dt = (\ln x + 2)' dx \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Tiến hành đổi cận } \begin{cases} x = \frac{1}{e} \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó tích phân mới } I = \int_1^2 \frac{t-2}{t^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt$$

$$= \left(\ln t + \frac{2}{t} \right) \Big|_1^2 = -1 + \ln 2$$

$$\text{Vậy } a = 1, b = -1 \Rightarrow 2a + b = 1$$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Phân tích

Trong bài toán này ta có 2 hướng để đặt ẩn phụ. Hướng 1 đặt $t = \ln x$ khi đó tích phân hệ quả sẽ có mẫu số là $(t+2)^2$. Hướng 1 đặt $t = \ln x + 2$ thì phương trình hệ quả sẽ có mẫu số là t^2 và ta sẽ ưu tiên mẫu số đẹp hơn để dễ tính toán hơn.

Ví dụ 6 (THPT Công Nghiệp): Biết rằng $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x \ln x}}{x} dx = \frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương

và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $P = a - b$?

A. -11

B. -18

C. -19

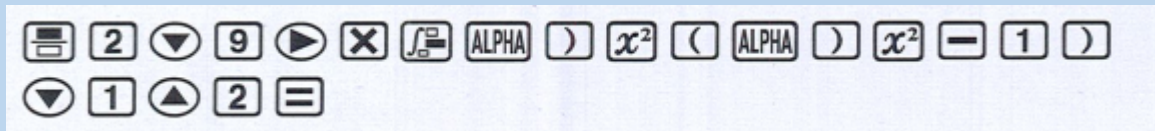
D. -22

Giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+3\ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{3}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{2t dt}{3}$$

$$\text{Tiến hành đổi cận } \begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=3 \rightarrow t=2 \end{cases}$$

$$\text{Ta thu được } I = \int_1^2 t \cdot \frac{t^2-1}{3} \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{9} \int_1^2 t^2 (t^2-1) dt = \frac{116}{135}$$



$$\text{Vậy } a=116, b=135 \Rightarrow a-b=-19$$

$\Rightarrow$ Chọn C

Phân tích

Bài toán này có 2 dấu hiệu đặt ẩn phụ. Thứ nhất “xuất hiện căn thức đặt căn thức là t ”. Thứ hai, “xuất hiện $\frac{1}{x} dx$ đặt $t = \ln x$ ”. Ta có nhận xét dấu hiệu 1 bao hàm cả dấu hiệu 2 nên ta đi theo dấu hiệu 1.

A screenshot of a scientific calculator interface. The display shows the integral expression $\frac{2}{9} \times \int_1^2 x^2 (x^2-1) dx$ and the result $\frac{116}{135}$.

Dạng 4: Xuất hiện e^x thì đặt $t = e^x$ hoặc 1 cụm chứa e^x

Xuất hiện a^x thì đặt $t = a^x$ hoặc 1 cụm chứa a^x

Ví dụ 7 (Sở GD-ĐT tp.HCM): Biết $I = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 3 \ln a - \ln b$ với a, b là các số nguyên. Tính

giá trị biểu thức $P = ab$?

A. $P = 6$

B. $P = 10$

C. $P = 12$

D. $P = 8$

Giải

$$\text{Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$\text{Tiến hành đổi cận } \begin{cases} x = \ln 3 \rightarrow t = 3 \\ x = \ln 6 \rightarrow t = 6 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có tích phân mới } I = \int_3^6 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^6 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^6 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \ln \frac{x-2}{x-1} \Big|_3^6 = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{1}{2} = 3 \ln 2 - \ln 5.$$

$$\text{Vậy } a = 2, b = 5 \Rightarrow ab = 10$$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Ví dụ 8 (Chuyên KHTN Hà Nội): Giá trị $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x}$ bằng bao nhiêu?

A. -1

B. 1

C. e

D. 0

Giải

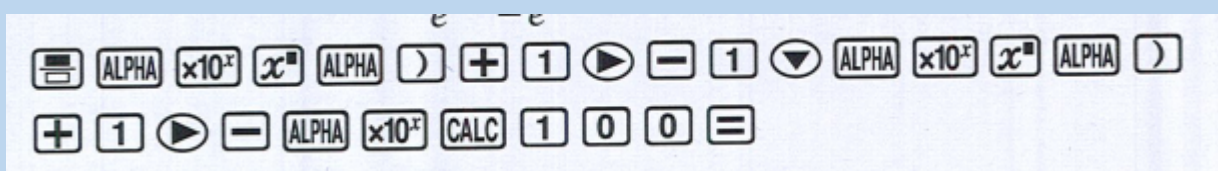
$$\text{Ta hiểu } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x} = \int_n^{n+1} \frac{e^x dx}{(1+e^x)e^x}. \text{ Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$$

$$\text{Khi đó tích phân mới } I = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \ln \frac{t-1}{t} + C = \frac{e^x - 1}{e^x} + C$$

$$\text{Vậy } \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x} = \ln \frac{e^x - 1}{e^x} \Big|_n^{n+1} = \ln \frac{e^{n+1} - 1}{e^{n+1}} - \ln \frac{e^n - 1}{e^n}$$

$$= \ln \frac{(e^{n+1} - 1)e^n}{(e^n - 1)e^{n+1}} = \ln \frac{e^{n+1}}{e^{n+1} - e}$$

Để tính giới hạn của $\frac{e^{n+1}}{e^{n+1}-e}$ khi $n \rightarrow +\infty$ ta có thể sử dụng máy tính Casio:



$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{e^{n+1}-1}{e^n-e} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 1) = 0$$

Vậy $a=5, b=2 \Rightarrow ab=10$

$\Rightarrow$ Chọn D

Phân tích

Đây là bài toán khó, phối hợp nhiều dạng một cách khéo léo. Có nhiều tình huống mới xảy ra. Ví dụ như tình huống muốn đặt ẩn phụ được nhưng không đổi được cận từ cận $x=n$ sang cận t . Khi đó ta phải đổi nguyên hàm từ t quay trở lại x rồi mới lắp cận x .

Dạng 5: Tích phân chứa $x^2 + a^2$ thì đặt $x = a \cdot \tan t$ ($a > 0$)

Ví dụ 9 (THPT Đức Thọ - HT): Khi đổi biến $x = \sqrt{3} \tan t$, tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3}$ trở thành tích phân nào?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} dt$

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} t dt$

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$

Giải

Đặt $x = \sqrt{3} \tan t \Rightarrow x' dx = (\sqrt{3} \tan t)' dt \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt$

Tiến hành đổi cận $\left[\begin{array}{l} x=0 \rightarrow \tan t=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow \tan t=\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{array} \right.$

Ta thu được:
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt}{3 \tan^2 t + 3} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt}{\frac{3}{\cos^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$$

⇒ **Chọn B**

Phân tích

Chú ý việc từ x tìm ra t vì $\tan t = 0$ sinh ra rất nhiều giá trị t thỏa mãn và ta thường lấy các giá trị cận thuộc khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Ví dụ 10 (THPT Trần Hương Đạo - ND): Biết $I = \int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{2}{3}(a-\sqrt{b})$, với a, b là các số

dương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = 2b$

B. $a < b$

C. $a = b$

D. $a = 3b$

Giải

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$

Đổi cận
$$\begin{cases} x = 1 \rightarrow \tan t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = \sqrt{3} \rightarrow \tan t = \sqrt{3} \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Khi đó:
$$I = \int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan t \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^4 t} dt$$

Đặt $u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t dt$

Khi đó:
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^4 t} dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-dt}{t^4} = \frac{1}{3t^3} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \left(8 - 2\sqrt{2} \right) = \frac{2}{3} (4 - \sqrt{2})$$

Vậy $a = 4, b = 2 \Rightarrow a = 2b$

⇒ **Chọn A**

Phân tích

Ta hiểu $x^2+1 = x^2+1^2$ với $a=1$ vậy ta đặt $x=1.\tan t$ cho dù cụm x^2+1 có ở trong căn hay ngoài căn thì vẫn làm được. Ngoài cách đặt ẩn phụ này ra ta còn thấy tích phân chứa thêm dấu hiệu “chứa căn” do

đó ta có thể đặt “ t là căn thức”

Dạng 6: Tích phân chứa $a^2 - x^2$ thì đặt $x = a \cdot \sin t$ ($a > 0$)

Tích phân chứa $x^2 - a^2$ thì đặt $x = \frac{a}{\cos t}$ ($a > 0$)

Ví dụ 11 (Chuyên Vĩnh Phúc): Cho $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ có giá trị $= \frac{a\pi}{b}$. Tính tổng $P = a + b$.

A. $P = 5$

B. $P = -1$

C. $P = 2$

D. $P = -3$

Giải

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow x' dx = (2 \sin t)' dt \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$

Tiến hành đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow \sin t = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 2 \rightarrow \sin t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Thay vào tích phân ban đầu: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2 \cos 2t) dt = (2x + \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Vậy $a = 4, b = 2 \Rightarrow a = 2b$

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Bình luận

Chú ý việc từ x tìm ra t vì $\sin t = 0$ sinh ra rất nhiều giá trị t thỏa mãn và ta thường lấy các giá trị cận thuộc khoảng $[0; \pi]$

Tương tự việc từ x tìm ra t vì $\cos t = 0$ sinh ra rất nhiều giá trị t thỏa mãn và ta thường lấy các giá trị cận thuộc khoảng $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Ví dụ 12 (THPT Đào Duy Từ): Biết $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{\pi}{a} + \frac{b}{c}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị

biểu thức $P = a + b + c$.

A. $P = 5$

B. $P = 3$

C. $P = 8$

D. $P = 2$

Giải

Đặt $x = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow \sin t = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Khi đó: $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin^2 t}{\sqrt{2-2 \sin^2 t}} \cdot \sqrt{2} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt = \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Vậy $a = 4, b = -1, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 5$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Dạng 7: Đặt ẩn phụ kết hợp tính chất bất biến của tích phân:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(v) dv$$

Ví dụ 13 (Chuyên Bến Tre): Cho $I = \int f(x) dx = 27$. Tính $\int_{-3}^0 f(-3x) dx$.

A. $I = 27$

B. $I = -3$

C. $I = 9$

D. $I = 3$

Giải

Đặt $x = -3t \Rightarrow x' dx = (-3t)' dt \Rightarrow dx = -3tdt$

Tiến hành đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow -3t = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 9 \rightarrow -3t = 9 \rightarrow t = -3 \end{cases}$

Ta thu được: $I = \int_0^{-3} f(-3t) \cdot -3dt = \int_0^{-3} f(-3t) dt = 3 \int_{-3}^0 f(-3t) dt$

$= 3 \int_{-3}^0 f(-3x) dx = 27 \Rightarrow \int_{-3}^0 f(-3x) dx = 9$

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Bình luận

$$\int_{-3}^0 f(-3t)dt = \int_{-3}^0 (-3x)dx \text{ thực ra về bản chất có nghĩa là "giá trị tích phân không phụ thuộc vào kí hiệu}$$

của biến mà chỉ phụ thuộc vào giá trị của hàm"

Ví dụ 14 (THPT Đặng Thúc Hứa): Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và $\int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx = 4$.

Tính giá trị tích phân: $I = \int_1^2 x.f(x)dx$.

A. $I = 8$

B. $I = 4$

C. $I = 16$

D. $I = 2$

Giải

Đặt $\sqrt{x+1} = t \Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=3 \rightarrow t=2 \end{cases}$

Khi đó: $I = \int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx = \int_1^2 f(t).2tdt = 2 \int_1^2 t.f(t)dt = 2 \int_1^2 x.f(x)dx = 4$

Vậy $2I = 4 \Rightarrow I = 2$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Ví dụ 15 (Sở GD-ĐT Bắc Giang): Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 4$ và

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Tính $I = \int_0^3 f(x)dx$

A. $I = 2$

B. $I = 6$

C. $I = 4$

D. $I = 10$

Giải

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=9 \rightarrow t=3 \end{cases}$

Khi đó: $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int_1^3 \frac{f(t)}{t}.2tdt = 2 \int_1^3 f(t)dt = 2 \int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = 2$

Tiếp tục đặt $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$.

$$\text{Đổi cận} \begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 2$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 2 = 4$$

$\Rightarrow$ Chọn C

Phân tích

Đây là một bài toán hay kết hợp nhiều dấu hiệu và dễ làm học sinh mất phương hướng. Tuy nhiên nếu ta kiên định tư duy thì sẽ nhìn ra vấn đề: Từ $f(\sqrt{x})$ chuyển về $f(x)$ thì đặt $\sqrt{x} = t$ để được $f(t)$ và từ $f(t)$ lại chuyển về $f(x)$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{1}{e}$

C. $I = 1$

D. $I = e$

Câu 2: Cho $I = \int x(1-x^2)^{10} dx$. Đặt $u = 1-x^2$, khi đó viết I theo u và du ta được

A. $I = \int 2u^{10} du$

B. $I = -2 \int u^{10} du$

C. $I = -\frac{1}{2} \int u^{10} du$

D. $I = \frac{1}{2} \int u^{10} du$

Câu 3: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$ và $u = \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \int_0^1 u^2 du$

B. $I = 2 \int_0^1 u du$

C. $I = \int_{-1}^0 u^2 du$

D. $I = -\int_0^1 u^2 du$

Câu 4: Cho $I = \int_1^2 x\sqrt{4-x^2} dx$ và $t = 4-x^2$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $I = \sqrt{3}$

B. $I = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}}$

C. $I = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dt$

D. $I = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}}$

Câu 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ trên khoảng $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$. Thỏa mãn

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln\sqrt{2}$ B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$ C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln 2$ D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\ln 2$

Câu 6: Cho $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx = a \ln 2 + b \ln 3$. Khi đó giá trị của $a.b$ là

- A. 2 B. -2 C. -4 D. 3

Câu 7: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$

- A. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 + 2$ B. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 + 2$ C. $F(0) = -\frac{2}{3}\ln 2 - 2$ D. $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 2 - 2$

Câu 8: Biết $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5} dx = a + b \ln 2$ với a, b là số nguyên. Tính $S = a + b$

- A. $S = 3$ B. $S = -3$ C. $S = 5$ D. $S = 7$

Câu 9: Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 1)^9 dx$.

- A. $-\frac{1}{20}(x^2 + 1)^{10} + C$ B. $\frac{1}{20}(x^2 + 1)^{10} + C$ C. $\frac{1}{10}(x^2 + 1)^{10} + C$ D. $(x^2 + 1)^{10} + C$

Câu 10: Nguyên hàm của hàm số: $y = \cos^2 x \cdot \sin x$ là:

- A. $\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ B. $\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ C. $-\cos^3 x + C$ D. $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Câu 11: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$.

- A. $I = 0$ B. $I = 1$ C. $I = \frac{1}{3}$ D. $I = \frac{\pi^3}{24}$

Câu 12: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

- A. $I = \frac{1}{6}$ B. $I = \frac{1}{8}$ C. $I = \frac{1}{3}$ D. $I = \frac{1}{4}$

Câu 13: Kết quả phép tính tích phân $\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ có dạng $I = a \ln 3 + b \ln 5$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó $a^2 + ab + 3b^2$ có giá trị là

- A. 4 B. 5 C. 1 D. 0

Câu 14: Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$ B. $I = 2 \int_1^2 \sqrt{u} du$ C. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$ D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

- A. $I = -6$ B. $I = 0$ C. $I = -2$ D. $I = 6$

Câu 16: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ và $F(e) = 3$. Tính $F(e^2)$.

- A. $F(e^2) = 3 + 2 \ln 2$ B. $F(e^2) = 3 + \ln 2$ C. $F(e^2) = 1 + \ln 3$ D. $F(e^2) = 3 - \ln 2$

Câu 17: Biết $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{2}{3}(a - \sqrt{b})$, với a, b là số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = 2b$ B. $a < b$ C. $a = b$ D. $a = 3b$

Câu 18: Biết $\int_1^2 x\sqrt{x+1}dx = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = \frac{4}{3}$ B. $S = \frac{13}{15}$ C. $S = -\frac{8}{15}$ D. $S = -\frac{1}{15}$

Câu 19: Tính $\int_1^2 \frac{x^2 + 2 \ln x}{x} dx$. Kết quả là

- A. $\frac{3}{2} + \ln^2 2$ B. $\frac{3}{2} - \ln^2 2$ C. $\frac{1}{2} + \ln^2 2$ D. $\frac{3}{2} + \ln 2$

Câu 20: Giả sử $\int_1^2 \frac{4 \ln x + 1}{x} dx = a \ln^2 2 + b\sqrt{2} \ln 2$, với a, b là số hữu tỉ. Khi đó tổng $4a + b$ bằng

- A. 3 B. 5 C. 7 D. 9

Câu 21: Cho tích phân $I = \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{b} + c$, $b, c \in \mathbb{Z}; b \neq 0$. Tính $b + c$.

- A. 5 B. 8 C. 7 D. 6

Câu 22: Xét $I = \int x^3 (4x^4 - 3)^5 dx$.

Bằng cách đặt $4 = 4x^4 - 3$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$ B. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$ C. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$ D. $I = \int u^5 du$

Câu 23: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có tổng các nghiệm bằng

- A. $1 + \sqrt{3}$ B. 2 C. 1 D. $1 - \sqrt{3}$

Câu 24: Tìm nguyên hàm $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$. Kết quả là

- A. $\frac{\sqrt{1 + \sin^2 x}}{2} + C$ B. $\sqrt{1 + \sin^2 x} + C$ C. $-\sqrt{1 + \sin^2 x} + C$ D. $2\sqrt{1 + \sin^2 x} + C$

Câu 25: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \frac{\ln x}{x}$ và $F(1) = \frac{1}{3}$. Tính $[F(e)]^2$.

- A. $[F(e)]^2 = \frac{8}{3}$ B. $[F(e)]^2 = \frac{8}{9}$ C. $[F(e)]^2 = \frac{1}{3}$ D. $[F(e)]^2 = \frac{1}{9}$

Câu 26: Với cách đổi biến $u = \sqrt{1 + 3 \ln x}$ thì tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + 3 \ln x}} dx$ trở thành:

- A. $\frac{2}{3} \int_1^2 (u^2 - 1) du$ B. $\frac{2}{9} \int_1^2 (u^2 - 1) du$ C. $2 \int_1^2 (u^2 - 1) du$ D. $\frac{2}{9} \int_1^2 \frac{u^2 - 1}{u} du$

Câu 27: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Tính $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

- A. $I = 1$ B. $I = 2$ C. $I = 4$ D. $I = \frac{1}{2}$

Câu 28: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1; 1]$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$. Kết quả $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} dx$ bằng:

- A. $I = 1$ B. $I = 3$ C. $I = 2$ D. $I = 4$

Câu 29: Cho m là số thực dương thỏa mãn $\int_0^m \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{3}{16}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m \in \left(3; \frac{7}{2}\right)$ B. $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ C. $m \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$ D. $m \in \left(\frac{7}{2}; 5\right)$

Câu 30: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$ bằng

- A. $S = 2$ B. $S = -2$ C. $S = 0$ D. $S = 1$

Câu 31: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{3x^4}{2x^4 + 6} + C.$ B. $\int f(x)dx = \ln(x^4 + 1) + C.$
C. $\int f(x)dx = x^3 \ln(x^4 + 1) + C.$ D. $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + C.$

Câu 32: Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt > 0$ (ẩn x) là

- A. $(-\infty; 0)$ B. $(-\infty; +\infty)$ C. $(-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$ D. $(0; +\infty)$

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và $\int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx = 4$. Tính $\int_1^2 x.f(x)dx$.

- A. $I = 8$ B. $I = 4$ C. $I = 16$ D. $I = 2$

Câu 34: Nếu đặt $t = x + \sqrt{x^2 + 16}$ thì tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$ trở thành:

- A. $I = \int_4^8 \frac{dt}{t}$ B. $I = \int_4^8 t dt$ C. $I = \int_4^5 \frac{dt}{t}$ D. $I = \int_4^5 t dt$

Câu 35: Cho số thực m thỏa mãn $\int_0^e \frac{1+m \ln t}{t} dt = 0$, các giá trị tìm được của m thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

- A. $-5 \leq m \leq 0$ B. $m \geq -1$ C. $-6 < m < -4$ D. $m < -2$

Câu 36: Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 0 < .$ Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx$.

- A. $I = 5$ B. $I = 9$ C. $I = 3$ D. $I = 2$

Câu 37: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $y(1) = 1$ và $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3}$. Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(\sin x)dx.$$

- A. $I = \frac{4}{3}$ B. $I = \frac{2}{3}$ C. $I = \frac{1}{3}$ D. $I = -\frac{2}{3}$

Câu 38: Nếu $\int_0^1 xf(x)dx = 4$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin 4x dx$ bằng:

- A. 2 B. 6 C. y D. 4

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^2 f(x)dx = 3$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x|)dx$.

- A. 3 B. 6 C. $\frac{3}{2}$ D. 0

Câu 40: Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^1 xf'(2x)dx$.

- A. 13 B. 12 C. 20 D. 7

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

- A. $I = -6$ B. $I = 0$ C. $I = -2$ D. $I = 6$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 \cdot f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- A. $I = 6$ B. $I = 2$ C. $I = 3$ D. $I = 1$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int_0^1 f(x)dx = 1$ B. $\int_0^1 f(x)dx = e$ C. $\int_0^e f(x)dx = 1$ D. $\int_0^e f(x)dx = e$

Câu 45: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x)dx = 8$ và

$\int_1^3 f(-2x)dx = 3$. Tính $I = \int_{-1}^6 f(x)dx$. bằng:

A. $I = 11$

B. $I = 5$

C. $I = 2$

D. $I = 14$

Câu 46: Cho biết $\int_{-1}^5 f(x)dx = 15$. Tính giá trị của $P = \int_0^2 [f(5-3x) + 7]dx$.

A. $P = 15$

B. $P = 37$

C. $P = 27$

D. $P = 19$

Câu 47: Trong các tích phân sau, tích phân nào không có cùng giá trị với $I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$.

A. $\frac{1}{2} \int_1^2 t \sqrt{t-1} dt$

B. $\frac{1}{2} \int_1^4 t \sqrt{t-1} dt$

C. $\int_1^{\sqrt{3}} (t^2 + 1)t^2 dt$

D. $\int_1^{\sqrt{3}} (x^2 + 1)x^2 dx$

Câu 48: Cho $\int_1^2 f(x)dx = a$. Tính $I = \int_0^1 xf(x^2 + 1)dx$ theo a .

A. $I = 2a$

B. $I = 4a$

C. $I = \frac{a}{2}$

D. $I = \frac{a}{4}$

Câu 49: Biết $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7} dx = a \ln \sqrt{12} + b \ln \sqrt{7}$, với a, b là các số nguyên. Tính tổng $a + b$ bằng

A. -1

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 0

Câu 50: Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1)x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x)dx$ bằng

A. 2

B. 1

C. -1

D. 4

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1A	2C	3A	4B	5B	6B	7B	8B	9B	10A
11C	12C	13B	14C	15D	16B	17A	18A	19A	20D
21B	22C	23D	24D	25B	26B	27C	28A	29B	30C
31D	32C	33D	34A	35A	36C	37A	38D	39A	40A
41D	42D	43A	44B	45D	46D	47A	48C	49D	50D

CHỦ ĐỀ 16
PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN
VÀ CÁC DẠNG LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Công thức: $\int_a^b uv' dx = u.v \Big|_a^b - \int_a^b u' v dx$

- **Dấu hiệu sử dụng:** tích phân chứa 2 hàm với 2 tính chất khác nhau thì sử dụng phương pháp tích phân từng phần
- **Ý nghĩa:** Đưa tích phân 2 thành phần phức tạp trở về tích phân 1 thành phần cơ bản

2. Phân biệt các hàm thường gặp:

- + Hàm đa thức: $a.x^3 + bx^2 + cx + d, ax^2 + bx + c, \dots$
- + Hàm lượng giác: $\sin ax, \cos ax, \tan ax, \dots$
- + Hàm logarit: $\log_a x, \ln x, \log x, \dots$
- + Hàm siêu việt: $e^x, a^x, \dots$

3. Cách chọn thành phần u : Sao cho u' suy biến (mất tính chất hàm)

- Chú ý : Nếu cả 2 thành phần u, v đều là hàm tuần hoàn $\Rightarrow$ Đây là tích phân lặp
- Khẩu quyết thứ tự ưu tiên của u : Nhất lô – Nhì đa – Tam lượng – tứ mũ

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1 : Hàm đa thức + Hàm siêu việt $\Rightarrow$ chọn u là đa thức

Ví dụ 1: (Sở GD-ĐT TP HCM) .

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = x.e^{\frac{x}{2}}$ và $f(0) = -1$. Tính $F(4)$.

- A. $F(4) = 3$ B. $F(4) = \frac{7}{4}e^2 - \frac{3}{4}$ C. $F(4) = 4e^2 + 3$ D. $F(4) = 4e^2 - 3$

Giải

Cách 1: Tích phân từng phần

Tìm $\int f(x) dx$ ta được $\int x. \left(2e^{\frac{x}{2}}\right)' dx = x.2e^{\frac{x}{2}} dx - \int 2e^{\frac{x}{2}} dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C$

Từ dữ kiện $F(0) = -1 \Rightarrow -4 + C = -1 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow F(x) = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + 3$.

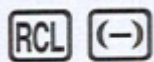
Tính $F(4) = 8e^2 - 4e^2 + 3 = 4e^2 + 3$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Cách 2: Casio

Ta thấy: $I = \int_0^4 x.e^{\frac{x}{2}} dx = F(4) - F(0)$

Tính giá trị tích phân I và lưu vào phím A

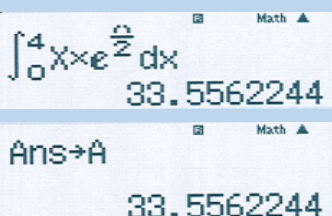


Khi đó ta hiểu $A = F(4) - F(0) \Rightarrow F(4) = A + F(0) \approx 32.55 = 4e^2 + 3$

=> Chọn D

Phân tích

Ta nhận thấy tích phân chứa hàm x có tính chất là hàm đa thức và hàm $e^{\frac{x}{2}}$ có tính chất là hàm siêu việt vậy rõ ràng “tích phân chứa 2 hàm với 2 tính chất” và ta sẽ chọn phương pháp tích phân từng phần để xử lý.



Ví dụ 2: (Chuyên Sơn La)

Tích phân $\int (x+3)e^{-2x} dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$.

Khi đó tổng $m^2 + n^2$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 10

B. 65

C. 5

D. 41

Giải

Tiếp tục coi $u = x+3$ và $v' = e^{-2x}$

Ta được : $\int (x+3)e^{-2x} dx = \int (x+3) \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right)' dx = \frac{(x+3).e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \frac{(x+3).e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right) + C$

Tiến hành rút gọn $F(x)$ ta thu được: $-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+7) + C$

Vậy $m = 4, n = 7 \Rightarrow m^2 + n^2 = 65$.

=> Chọn B.

Bình luận

Chú ý thành phần e^{-2x} là thành phần v' chứ không phải là v , đây là lỗi mà học sinh thường xuyên mắc phải. Khi $v' = e^{-2x}$ thì ta hiểu v là nguyên hàm của v' và $v = \frac{e^{-2x}}{-2}$.

Ví dụ 3: (Chuyên Quốc Học Huế) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x) = (x^2 - 1)e^{x^3 - 3x}$ biết rằng đồ thị hàm số $F(x)$ có điểm cực tiểu nằm trên trục hoành.

A. $F(x) = \frac{e^{x^3-3x+2}-1}{3e^2}$ B. $F(x) = e^{x^3-3x} - e^2$ C. $F(x) = \frac{e^{x^3-3x} - e^2}{3}$ D. $F(x) = \frac{e^{x^3-3x} - 1}{3}$

Giải

Ta thấy nguyên hàm chứa e^u thì sẽ tiến hành đặt ẩn phụ $t = u$.

$$\text{Đặt } t = x^3 - 3x \Rightarrow dt = 3(x^2 - 1)dx$$

$$\text{Khi đó } \int (x^2 - 1)e^{x^3-3x} dx = \int e^t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{e^t}{3} + C = \frac{e^{x^3-3x}}{3} + C$$

$$\text{Đến hàm số } y = F(x) \text{ có dạng } y = \frac{e^{x^3-3x}}{3} + C \text{ có } y' = (x^2 - 1)e^{x^3-3x} \text{ và } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Lập bảng}$$

biến thiên và ta thấy $x_{CT} = 1$.

Điểm cực tiểu nằm trên trục hoành tức là

$$y_{CT} = 0 \Leftrightarrow y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-2}}{3} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{e^{-2}}{3} \Rightarrow y = \frac{e^{x^3-3x}}{3} - \frac{e^{-2}}{3}$$

$\Rightarrow$ Chọn A

Bình luận

Một bài toán “Giải tích phân từng phần”, 2 hàm với 2 tính chất khác nhau ta vẫn có thể tính hành đặt ẩn phụ được chứ không nhất thiết phải tích phân từng phần. Trong trường hợp đặt ẩn phụ sẽ nhanh hơn rất nhiều.

Dạng 2: Hàm đa thức + hàm lượng giác $\Rightarrow$ Chọn u là hàm đa thức

Ví dụ 4: (Sở GD-ĐT Hà Tĩnh)

Giá trị tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ được biểu diễn dưới dạng $a\pi^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó tích ab bằng:

A. 0 B. $-\frac{1}{32}$ C. $-\frac{1}{16}$ D. $-\frac{1}{64}$

Giải

$$\text{Hạ bậc } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)' dx = \frac{x \sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{\cos 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Lại có: } I_1 = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}. \text{ Vậy } I = \frac{1}{8} \pi^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{8}; b = -\frac{1}{2} \Rightarrow ab = -\frac{1}{32}$$

$\Rightarrow$ Chọn B

Phân tích

Trong VD4 chú ý tại sao phải hạ bậc cho $\cos^2 x$ vì chỉ có hàm lượng giác bậc nhất $\cos 2x$ mới tìm được

nguyên hàm $v = \frac{\sin 2x}{2}$ còn $\cos^2 x$ thì không tìm được nguyên hàm.

Ví dụ 5: (Chuyên Lam Sơn)

Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{a} + \frac{\ln 4}{b}$. Tính $P = a + b$

A. $P = 2$

B. $P = 6$

C. $P = 0$

D. $P = 8$

Giải

Cách 1: Tích phân từng phần

$$\text{Ta hiểu: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot (\tan x)' dx = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\pi}{4} - I_1$$

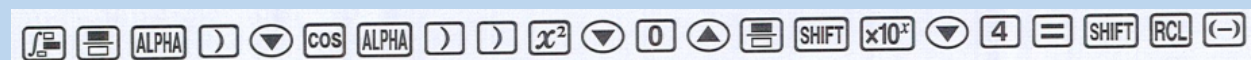
$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow I_1 = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-dt}{t} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = -\ln 4^{\frac{1}{4}} = \frac{\ln 4}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 4}{4}. \text{ Vậy } a = 4; b = -4$$

=> Chọn C

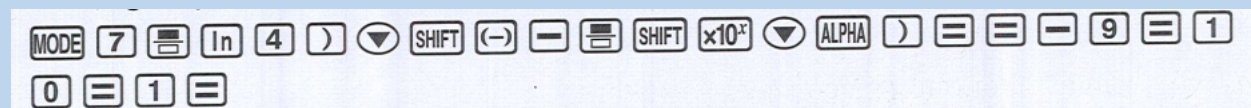
Cách 2: Casio

Tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ rồi lưu vào phím A

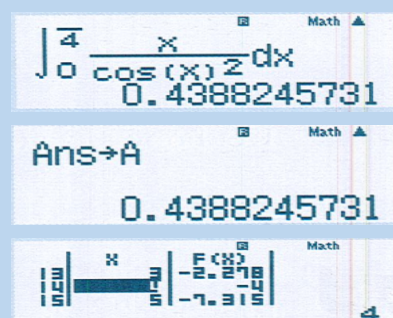


$$\text{Khi đó ta thu được: } A = \frac{\pi}{a} + \frac{\ln 4}{b} \Rightarrow \frac{\ln 4}{b} = A - \frac{\pi}{a} \Rightarrow b = \frac{\ln 4}{A - \frac{\pi}{a}}$$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng Mode 7 để tìm a



Ta thu được $X = a = 4; F(X) = b = -4 \Rightarrow a + b = 0$



Ví dụ 6: (Chuyên KHTN HN)

Nguyên hàm $\int \frac{x^2 \sin x}{\cos^3 x} dx$ bằng

A. $\frac{x^2}{2 \cos^2 x} + x \tan x + \ln |\cos x| + C$

B. $\frac{x^2}{2 \cos^2 x} - x \tan x + \ln |\cos x| + C$

C. $\frac{x^2}{2 \cos^2 x} + x \tan x - \ln |\cos x| + C$

D. $\frac{x^2}{2 \cos^2 x} - x \tan x - \ln |\cos x| + C$

Giải

$$\text{Ta hiểu: } \int \frac{x^2 \sin x}{\cos^3 x} dx = \int x^2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int x^2 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int x^2 \left(\frac{\tan^2 x}{2} \right)' dx$$

$$= \frac{x^2 \tan^2 x}{2} - \int x \tan^2 x dx = \frac{x^2 \tan^2 x}{2} - \int x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= \frac{x^2 \tan^2 x}{2} + \frac{x^2}{2} - \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{x^2}{2 \cos^2 x} - I_1 (1)$$

I_1 tiếp tục có 2 hàm với 2 tính chất khác nhau $\Rightarrow$ Tiếp tục sử dụng tích phân từng phần lần thứ 2

$$I_1 = \int x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot (\tan x)' dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C (2)$$

$$\text{Kết hợp (1) và (2) ta được: } \int \frac{x^2 \sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{x^2}{2 \cos^2 x} - x \tan x - \ln |\cos x| + C$$

$\Rightarrow$ Chọn D

Bình luận

Đây là bài toán khó, ta sử dụng tích phân từng phần nhưng phải sử dụng 2 lần thì hàm đa thức x^2 mới suy biến hết. Vậy ta có tổng kết “tích phân chứa hàm đa thức bậc bao nhiêu thì phải tích phân từng phần từng đó lần”

Dạng 3: Hàm đa thức + hàm logarit $\Rightarrow$ Chọn u là hàm logarit

Ví dụ 7: (Chuyên Võ Nguyên Giáp)

Biết $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x^2} dx = -a + b e^{-1}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a + b = 3$

B. $a + b = -3$

C. $a + b = 6$

D. $a + b = -6$

Giải

Ta chọn $u = 2 \ln x$ và $v' = \frac{1}{x^2}$ khi đó:

$$\int_1^e \frac{2 \ln x}{x^2} dx = \int_1^e 2 \ln x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_1^e 2 \ln x \left(-\frac{1}{x} \right)' dx = 2 \ln x \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^e + \int_1^e \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{2}{e} + \left(-\frac{2}{x} \right) \Big|_1^e = \frac{-4}{e} + 2$$

Vậy $a = -2, b = -4 \Rightarrow a + b = -6$

=> Chọn D

Bình luận

ta nhớ: Nhất lô – Nhì đa – Tam lượng – Tứ mũ. Vậy trong tích phân xuất hiện lô (loga-rit) và đa (đa thức) thì ta ưu tiên logarit $2\ln x$ được chọn là thành phần u.

Ví dụ 8: (THPT Hai Bà Trưng 2)

Đặt $I_k = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx$ với k nguyên dương. Ta có $I_k < e - 2$ khi:

A. $k \in \{1; 2\}$

B. $k \in \{2; 3\}$

C. $k \in \{4; 1\}$

D. $k \in \{3; 4\}$

Giải

Khai triển theo đúng công thức tích phân từng phần:

$$I_k = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx = \int_1^e \ln \frac{k}{x} \cdot 1 dx = \int_1^e \ln \frac{k}{x} \cdot (x)' dx = x \cdot \ln \frac{k}{x} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{\frac{k}{x}} \left(\frac{k}{x} \right)' \cdot x dx = e(\ln k - 1) - \ln k - \int_1^e (-1) \cdot dx$$

$$= (e-1)\ln k - e + x \Big|_1^e = (e-1)\ln k - e + 1 - 1 = (e-1)\ln k - 1$$

$$\text{Để } I_k < e - 2 \Rightarrow (e-1)\ln k - 1 < e - 2 \Rightarrow (e-1)(\ln k - 1) < 0$$

$$\Rightarrow \ln k - 1 < 0 \Rightarrow \ln k < 1 = \ln e \Rightarrow k < e$$

$$\text{Vì } k \text{ nguyên dương} \Rightarrow k = 1; k = 2$$

=> Chọn A

Bình luận

Một bài toán cực ảo, nhìn thì có vẻ một thành phần logarit $\ln \frac{k}{n}$ nhưng thực ra lại là 2 thành phần logarit

và đa thức vì $\ln \frac{k}{n} = \ln \frac{k}{n} \cdot 1$. Hơn nữa 1 là hệ số tự do nhìn có vẻ không phải hàm đa thức nhưng thực ra vẫn là hàm đa thức vì $1 = 1 \cdot x^0$

Ví dụ 9: (THPT Quang Trung)

Kết quả của tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx$ là

A. $\frac{e^2}{2}$

B. $\frac{1}{2} + \frac{e^2}{4}$

C. $\frac{3}{4} + \frac{e^2}{4}$

D. $\frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}$

Giải

$$\text{Tách tích phân: } I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = I_1 + I_2$$

Tính I_1 bằng tích phân từng phần:

Câu 7 (Chuyên KHTN HN - 2018). Biết $F(x) = (ax + b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x + 3)e^x$.

Khi đó $a + b$ là

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Câu 8 (THPT Hà Huy Tập - 2018). Nguyên hàm của hàm số $y = e^x \cdot \cos x$ là

A. $\int e^x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

B. $\int e^x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

C. $\int e^x \cdot \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) + C$

D. $\int e^x \cdot \cos x dx = -\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

Câu 9 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Cho tích phân $I = \int_1^e x \ln^2 x dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e + \int_1^e x \ln x dx$

B. $I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \ln x dx$

C. $I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx$

D. $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \ln x dx$

Câu 10 (Sở GD-ĐT Hải Dương - 2018). Ta có tích phân $I = 4 \int_1^e x(1 + \ln x) dx = a \cdot e^2 + b$; với a, b là các số

nguyên. Tính $M = ab + 4(a + b)$

A. $M = -5$

B. $M = -2$

C. $M = 5$

D. $M = -6$

Câu 11 (Sở GD-ĐT TP HCM - 2018). Cho $\int_0^1 \ln(x+1) dx = a + \ln b, (a, b \in \mathbb{Z})$. Tính $(a+3)^b$

A. 25

B. $\frac{1}{7}$

C. 16

D. $\frac{1}{9}$

Câu 12 (Đề Minh Họa - 2018). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$.

Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = -12$

B. $I = 8$

C. $m = 1$

D. $I = -8$

Câu 13 (Chuyên Phan Bội Châu - 2018). Biết rằng $I = \int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}} dx = \frac{a}{b} e^2$, với a, b là các số thực thỏa

mãn $a - b = -2$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 10$

B. $S = 5$

C. $S = 4$

D. $S = 7$

Câu 14 (Chuyên Thái Nguyên - 2018). Tính giá trị của $K = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$.

A. $K = \ln 2 - \frac{1}{4}$

B. $K = \ln 2 - \frac{1}{2}$

C. $K = \ln 2 + \frac{1}{2}$

D. $K = -\ln 2 + \frac{1}{2}$

Câu 15 (Sở GD-ĐT Hà Tĩnh - 2018). Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos^2 x dx$ được biểu diễn dưới dạng $a \cdot \pi^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó tích $a \cdot b$ bằng

- A. 0 B. $-\frac{1}{32}$ C. $-\frac{1}{16}$ D. $-\frac{1}{64}$

Câu 16 (Chuyên Lê Quý Đôn - 2018). Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx = a + b\pi$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a + 2b$

- A. $S = 0$ B. $S = 1$ C. $S = \frac{1}{2}$ D. $S = \frac{3}{8}$

Câu 17 (THPT Hà Huy Tập - 2018) Kết quả của phép tính tích phân $\int_0^1 \ln(2x+1) dx$ được biểu diễn dạng $a \cdot \ln 3 + b$, khi đó giá trị của tích ab^3 bằng

- A. 3 B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $-\frac{3}{2}$

Câu 18 (Chuyên ĐHSP HN - 2018). Tập hợp nghiệm của phương trình $\int_0^x \sin 2t dt = 0$ (ẩn x) là

- A. $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) B. $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) C. $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) D. $k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Câu 19 (Chuyên KHTN HN - 2018). Với các số nguyên a, b thỏa mãn $\int_1^2 (2x+1) \ln x dx = a + \frac{3}{2} + \ln b$.

Tính tổng $P = a + b$

- A. $P = 27$ B. $P = 28$ C. $P = 60$ D. $P = 61$

Câu 20 (THPTQG năm 2017 – Mã đề 110). Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$ B. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$
C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$ D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$

Câu 21 (THPTQG năm 2017 – Mã đề 103). Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$.

Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$ B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$
C. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$ D. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

Câu 22 (THPT Chuyên Lê Thánh Tông – Lần 1). Cho hàm số $y = \int x \sin 2x dx$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{24}$ B. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$ C. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ D. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Câu 23 (Tạp chí Toán Học Tuổi Trẻ - 2018). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1; e]$, biết

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1, f(e) = 1. \text{ Ta có } I = \int_1^e f'(x) \ln x dx \text{ bằng}$$

- A. $I = 4$ B. $I = 3$ C. $I = 1$ D. $I = 0$

Câu 24 (Sở GD-ĐT Hải Dương - 2018). Ta có tích phân $I = 4 \int_1^e x(1 + \ln x) dx = ae^2 + b$, với a, b là các số nguyên. Tính $M = ab + 4(a + b)$.

- A. $M = -5$ B. $M = -2$ C. $M = 5$ D. $M = -6$

Câu 25 (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp Lần 1 - 2018). Biết $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x^2} dx = -a + be^{-1}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $a + b = 3$ B. $a + b = -3$ C. $a + b = 6$ D. $a + b = -6$

Câu 26 (THPT Quảng Xương – Lần 3 - 2018). Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + x) \cos 2x dx = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b} (a, b \in \mathbb{Z}^*)$

Giá trị của tích ab bằng

- A. 32 B. 2 C. 3 D. 12

Câu 27 (THPT Chuyên KHTN – Lần 1 - 2018). Nếu $\int_0^a xe^x dx = 1$ thì giá trị của a bằng

- A. 0 B. 1 C. 2 D. e

Câu 28 (THPT Tiên Lãng – Lần 1 - 2018). Kết quả tích phân $I = \int_0^1 (2x + 3)e^x dx$ được viết dưới dạng

$I = ae + b$, với a, b là các số hữu tỉ. Tìm khẳng định đúng.

- A. $a - b = 2$ B. $a^3 + b^3 = 28$ C. $ab = 3$ D. $a + 2b = 1$

Câu 29 (THPT Lạng Giang 1 – Lần 3 - 2018). Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = a\pi + b \ln 2$, với a, b là các số

thực. Tính $16a - 8b$.

- A. 4 B. 5 C. 2 D. 3

Câu 30 (THPT Lê Hồng Phong – Lần 1 - 2018). Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$. Kết quả là

- A. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$ B. $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}$ C. $\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}$ D. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1B	2D	3D	4C	5A	6B	7B	8A	9D	10C
11C	12D	13A	14B	15D	16A	17D	18A	19C	20C
21B	22C	23D	24C	25D	26A	27B	28D	29A	30D

CHỦ ĐỀ 17: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (1) \text{ (Dạng 1)}$$

■ **Quy ước:** Trong bài học này ta gọi đường thẳng $x = a$ là cận thứ nhất, $x = b$ là cận thứ hai.

■ **Chú ý:** Khi đề bài không cho hai cận thì hai cận sẽ có dạng $x = x_1, x = x_2$ là hai nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm.

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x = f(y), x = g(y)$ và hai cận $y = a, y = b$ được tính theo công thức:

$$S = \int_a^b |f(y) - g(y)| dy \quad (2) \text{ (Dạng 2)}$$

3. Tổng hợp phương pháp (gồm 3 bước)

■ **Bước 1:** Xác định rõ hai hàm $y = f(x), y = g(x)$ hoặc $x = f(y), x = g(y)$

■ **Bước 2:** Xác định rõ 2 cận $x = a, x = b$ hoặc $y = a, y = b$

■ **Bước 3:** Lắp vào công thức (1) hoặc (2) rồi sử dụng máy tính casio

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường hai cận

Ví dụ 1 (Chuyên Thái Nguyên): Gọi S là số đo diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = 2x^2 + 3x + 1$ và $y = x^2 - x - 2$. Tính $\cos\left(\frac{\pi}{S}\right)$.

A. 0

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Giải

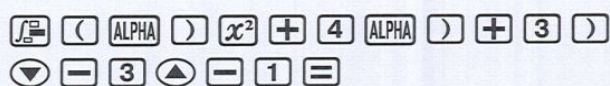
Ta hiểu $y = f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ và $y = g(x) = x^2 - x - 2$

Tìm 2 cận $x = a, x = b$ bằng phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^2 + 3x + 1 = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Sau khi có đầy đủ thông số $f(x), g(x), a, b$ ta lắp vào công thức:

$$S = \left| \int_{-3}^{-1} [(2x^2 + 3x + 1) - (x^2 - x - 2)] dx \right| = \left| \int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3) dx \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$



$$\text{Vậy } S = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{S}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Phân tích

Chú ý đầu tiên khi bài toán không cho hình phẳng giới hạn bởi 2 cận a, b thì ta tìm 2 cận bằng cách tìm

nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm.

Chú ý thứ hai là giá trị:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\int_{-3}^1 (x^2 + 4x + 3) dx = -\frac{4}{3}$$

Ví dụ 2 (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm): Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, trục hoành và đường thẳng $x = 3$ là:

A. 3

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 2

Giải

Trục hoành có phương trình là $y = 0$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

Trong 3 cận này ta phải chọn lựa xem cận nào hợp với đường thẳng $x = 3$ để tạo thành miền phẳng. Đó là cận $x = 2$

Do đó diện tích hình phẳng là: $S = \left| \int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \right| = \frac{4}{3}$

$$\int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{4}{3}$$

⇒ Chọn C

Bình luận

Việc xác định xem cận nào lấy cận nào không? Cận nào hợp với cận đã cho tạo thành miền phẳng khép kín cũng là một công tác rất quan trọng cấu tạo nên bài tích phân tính diện tích.

$$\int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{9}{4}$$

Ví dụ 3 (vn.math): Đường thẳng $y = c$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$ và đường thẳng $y = x$ thành hai phần bằng nhau. Tìm c

A. $\sqrt[3]{16}$

B. $\sqrt[3]{9}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{3}$

Giải

Tiến hành tìm cận: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$$y = x^2 \quad y = 4 \quad S = \left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right| = \frac{32}{3}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi và là:

$$\int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = \frac{32}{3}$$

$$y = x^2 \quad y = c \quad S_1 = \frac{S}{2} = \frac{16}{3}$$

Vậy diện tích giới hạn bởi

và

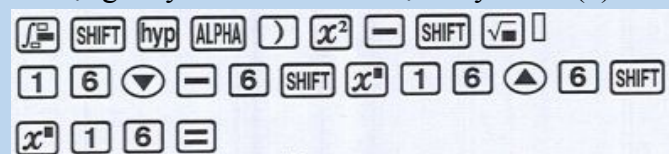
là

Tiến hành tìm cận: $x^2 = c \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{c}$

$$S_1 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \left| \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (x^2 - c) dx \right| = \frac{16}{3} \quad (*)$$

Khi đó

Sử dụng máy tính Casio lần lượt thay c vào (*) xem giá trị nào thỏa mãn.

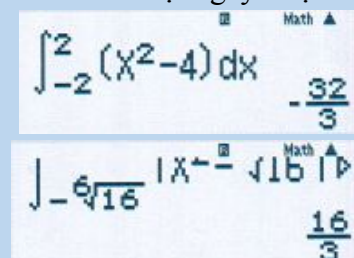


Ta thấy ngay $S_1 = \frac{16}{3}$ thỏa mãn (*)

$\Rightarrow$ Chọn A

Bình luận

Ta có thể loại ngay được 2 đáp án C và D vì c phải thuộc khoảng từ 0 đến 2.



Dạng 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường 3 cận

Ví dụ 4 (Chuyên Quốc Học Huế): Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$, trục hoành, $x = 2$, $x = 4$ là

A. $\frac{5}{3}$

B. 3

C. $\frac{2}{3}$

D. 2

Giải

Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm để tìm cận.

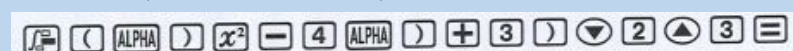
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta thấy nghiệm $x = 3$ thuộc miền giới hạn của $x = 2$, $x = 4$ vậy ta coi $x = 3$ là một cận.

Khi đó phần hình phẳng cần tìm được chia thành 2 phần hình phẳng nhỏ. Phần thứ nhất nằm giữa 2 cận $x = 2$, $x = 3$ ta gọi là S_1 và phần thứ 2 nằm giữa 2 cận $x = 3$, $x = 4$ ta gọi là S_2

$$S_1 = \left| \int_2^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

Tính



$$S_2 = \left| \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{4}{3}$$

Tính



$$S = S_1 + S_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là

⇒ **Chọn D**

Phân tích

Với 3 cận tìm được ta phải chia thành 2 hình phẳng nhỏ và tính từng hình phẳng một.

Tuyệt đối không tính chung $\int_2^4 f(x) dx$ thì sẽ dẫn đến kết quả sai lầm là $\frac{2}{3}$. Ngoài ra còn xuất hiện 1 sai lầm thường xảy ra khi đề bài cho 2 cận $x=2; x=4$ các bạn thường lười tìm cận thứ 3

$$\int_2^4 (x^2 - 4x + 3) dx = -\frac{2}{3}$$

$$\int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 5 (THPT Tam Quan): Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x$, và $y = x + \sin x$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là

A. 4

B. 8

C. 0

D. 1

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x + \sin x = x \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

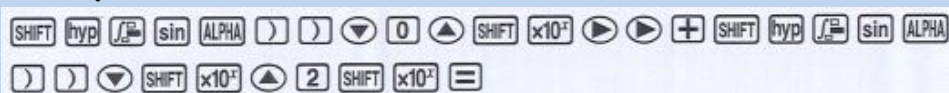
$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=0 \\ k=1 \Rightarrow x=\pi \\ k=2 \Rightarrow x=2\pi \end{cases}$$

Với

$$S = S_1 + S_2 = \left| \int_0^\pi \sin x dx \right| + \left| \int_\pi^{2\pi} \sin x dx \right| = 4$$

Vậy

⇒ **Chọn A**



Dạng 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 3 đường 3 cận

Ví dụ 6 (Sở GD-ĐT Bình Phước): Cho Parabol $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến với Parabol tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$ lần lượt là $y = -2x + 4$ và $y = 4x - 11$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi 3 đường trên.

A. 0

B. $\frac{9}{8}$

C. $\frac{9}{4}$

D. 3

Giải

Ta hiểu tiếp tuyến $y = -2x + 4$ tiếp xúc Parabol tại điểm $x = 1 \Rightarrow x = 1$ là cận thứ nhất.

Tương tự $x = 4$ là cận thứ 2 tạo bởi tiếp tuyến $y = 4x - 11$ và Parabol

Để cẩn thận ta thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của 2 tiếp tuyến để tìm cận thứ 3. Ta có:

$$-2x + 4 = 4x - 11 \Leftrightarrow x = \frac{15}{6}$$

$$x = 1; x = \frac{15}{6}; x = 4$$

Với 3 cận ta sẽ chia thành 2 khoảng cận $\left[1; \frac{15}{6}\right]$ và $\left[\frac{15}{6}; 4\right]$ tương ứng với 2 hình phẳng S_1 và S_2 .

$$S_1 = \left| \int_1^{\frac{15}{6}} [(x^2 - 4x + 4) - (-2x + 4)] dx \right| = \frac{9}{8}$$

Tính

$$S_2 = \left| \int_{\frac{15}{6}}^4 [(x^2 - 4x + 4) - (-2x + 4)] dx \right| = \frac{9}{8}$$

Tính

$$S = S_1 + S_2 = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$$

Vậy tổng diện tích

⇒ **Chọn C**

Phân tích

Việc chọn 2 hàm trong 3 hàm cho từng khoảng cận là việc rất khó khăn. Ta có thể xử lý bằng cách vẽ phác họa đồ thị các hàm và quan sát hoặc ta có thể lập luận như sau: Cận ngoài cùng bên trái là cận $x = 1$ chỉ chứa $y = -2x + 4$ và Parabol (không chứa $y = 4x - 11$) nên diện tích hình phẳng được tạo nên bởi 2 đường này.

Ví dụ 7 (Chuyên KHTN Huế): Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường gấp khúc $y = 4 - |x|$, trục hoành và hai đường thẳng lần lượt $x = -1$, $x = 1$ là

A. 0

B. 16

C. 4

D. 8

Giải

Đường gấp khúc $y = 4 - |x|$ thực chất là 2 đường thẳng $y = 4 - x$ tương ứng với $x \geq 0$ (phần nằm bên phải trục tung) và $y = 4 + x$ tương ứng với $x < 0$ (phần nằm bên trái trục tung). Hai đường thẳng này giao nhau tại điểm $M(0; 4)$.

Vậy cận thứ 3 là $x = 0$ thuộc miền cận ban đầu $[-1; 1]$

$$S = S_1 + S_2 = \left| \int_{-1}^0 (4 + x) dx \right| + \left| \int_0^1 (4 - x) dx \right| = 8$$

Vậy

⇒ **Chọn D**

Dạng 4: Diện tích hình phẳng chứa 1 đường cong có 2 nhánh

Ví dụ 8 (ThukhoA.edu.vn): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Elip $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$.

A. π B. 3π C. $\frac{9\pi}{5}$ D. $\frac{7\pi}{3}$

Giải

Cách 1: Ứng dụng tích phân

Ta biến đổi hàm số đã cho về dạng $y = f(x)$ và $y = g(x)$:

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 9(1 - x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow y = f(x) \\ y = -3\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow y = g(x) \end{cases}$$

Vậy đường cong ban đầu ta đã biến đổi về dạng $y = f(x)$ và $y = g(x)$

Tiến hành tìm cận: $3\sqrt{1 - x^2} = -3\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$S = \left| \int_{-1}^1 (3\sqrt{1 - x^2} - (-3\sqrt{1 - x^2})) dx \right| = \left| \int_{-1}^1 (6\sqrt{1 - x^2}) dx \right| \approx 9.42 = 3\pi$$

Vậy diện tích (E):

$\Rightarrow$ **Chọn B**



Cách 2: Sử dụng công thức tính nhanh

Ta có diện tích Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$ với $2a$ là độ dài trục lớn và $2b$ là độ dài trục nhỏ.

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \pi ab = 3\pi$$

Áp dụng

Bình luận

Để tách đường cong thành 2 nhánh thì ta tiến hành

Bước 1: Cô lập y^2 và đưa về dạng $y^2 = A$ khi đó $y = \pm\sqrt{A}$

Chú ý Elip luôn có dạng $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ cho nên khi ứng dụng vào bài toán ta sẽ được $a^2 = 1$ và $b^2 = 9$

Ví dụ 9 (Chuyên Sơn La): Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ và S_2 là diện tích của hình thoi có các đỉnh là đỉnh của Elip đó. Tính tỉ số giữa S_1 và S_2

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{\pi}$ B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{\pi}$ C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{3}$ D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{2}$

Giải

Công thức của Elip có dạng

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \pi ab = 3\pi$$

Tọa độ các đỉnh của Elip là $A(-a;0), B(0;b), C(a;0), D(0;-b)$ tương ứng là $A(-3;0), B(0;1), C(3;0), D(0;-1)$. Đây là hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo là $AC = 2a = 6$ và $BD = 2b = 2$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 6 \cdot 2 = 6$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

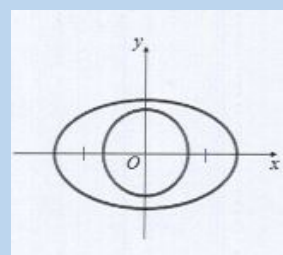
Tính tỉ số
 $\Rightarrow$ **Chọn D**

Bình luận

Ngoài tọa độ 4 đỉnh $ABCD$ như giới thiệu trong bài thì Elip còn 2 điểm đặc biệt nữa là 2 tiêu cự $F_1(-c;0)$ và $F_2(c;0)$ với $c^2 = a^2 - b^2$

Ví dụ 10 (Chuyên Sư phạm HN): Người ta cần trồng hoa tại phần đất nằm phía

ngoài đường tròn tâm gốc tọa độ, bán kính bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ và phía trong của Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{2}$ và trục nhỏ bằng 2 như hình vẽ. Trong mỗi đơn vị diện tích cần bón $(2\sqrt{2}-1)\pi$ kg phân bón. Hỏi tổng số phân bón cần sử dụng để



trồng hoa là?

A. 30 kg

B. 40 kg

C. 50 kg

D. 45 kg

Giải

Diện tích hình tròn là $S_1 = \pi r^2 = \frac{\pi}{2}$

Diện tích Elip là: $S_2 = \pi ab = \pi \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{2} = \pi\sqrt{2}$

Diện tích trồng hoa là $S = S_2 - S_1 = \pi\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(2\sqrt{2}-1)}{2}$

Tổng số phân bón cần tìm là $\frac{\pi(2\sqrt{2}-1)}{2} \cdot \frac{100}{(2\sqrt{2}-1)\pi} = 50(kg)$

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Bình luận

Ngoài cách tính nhanh cho diện tích Elip và đường tròn thì ta có thể thực tập cách tách 1 đường cong thành 2 nhánh.

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$$

Ví dụ như bài này có Elip:

Dạng 5: Diện tích hình phẳng dạng đảo trục

Cho hàm $x = f(y)$, $x = g(y)$ và hai cận $y = a$, $y = b$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường trên là:

$$S = \left| \int_a^b (f(y) - g(y)) dy \right|$$

Ví dụ 11 (Sách bài tập nâng cao): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = y^{\frac{2}{3}}$, đường cong $x + y^4 = 2$, trục hoành

A. $\frac{6}{5}$

B. $\frac{8}{5}$

C. $\frac{5}{5}$

D. $\frac{7}{4}$

Giải

Ta coi $x = y^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = f(y)$

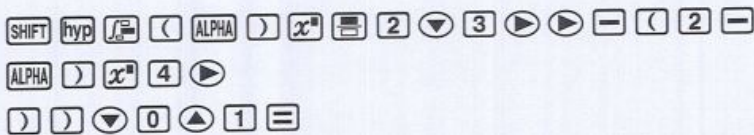
Lại có $x + y^4 = 2 \Rightarrow x = 2 - y^4 \Leftrightarrow x = g(y)$

Trục hoành có phương trình $y = 0$

Giải phương trình tung độ giao điểm: $y^{\frac{2}{3}} = 2 - y^4 \Rightarrow y = 1$

Khi đó diện tích hình phẳng: $S = \left| \int_0^1 (y^{\frac{2}{3}} - (2 - y^4)) dy \right| \approx \frac{6}{5}$

$\Rightarrow$ **Chọn A**



Bình luận

Việc tách hàm thành $y = f(x)$ và $y = g(x)$ khó khăn ta có thể tách hàm thành dạng $x = f(y)$ và $x = g(y)$ rồi áp dụng công thức tương tự như đã học.

Ví dụ 12 (Báo THPT): Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y^2 = 4x$, và đường thẳng $x = 1$ bằng S. Giá trị của S là

A. 1

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{8}{3}$

D. 16

Giải

Cách 1: Cách đảo trục

Ta có $y^2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow x = f(y)$

Lại có $x = 1 \Leftrightarrow x = g(y) \Leftrightarrow x = g(y)$

Giải phương trình tung độ giao điểm: $\frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \end{cases}$

$$S = \left| \int_{-2}^2 \left(\frac{y^2}{4} - 1 \right) dy \right| = \frac{8}{3}$$

Khi đó diện tích hình phẳng:

⇒ **Chọn C**



Cách 2: Cách thông thường

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{4x} \\ y = -\sqrt{4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Ta có

Giải phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4x} = -\sqrt{4x} \Leftrightarrow \sqrt{4x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$S = \left| \int_0^1 (\sqrt{4x} - (-\sqrt{4x})) dx \right| = \left| \int_0^1 (2\sqrt{4x}) dx \right| \approx 2.67 = \frac{8}{3}$$

Khi đó diện tích hình phẳng:



Bình luận

Qua 2 cách giải trên cho bạn đọc 1 cách nhìn toàn diện giữa cách làm thông thường và cách đảo trục. Các bạn tự so sánh và rút ra kinh nghiệm của riêng mình.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$.

A. $\frac{23}{15}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{4}{3}$

Câu 2 (Chuyên Biên Hòa - 2018). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và trục Ox .

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{4}{3}\pi$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{4}{3}$

Câu 3 (THPT TH Cao Nguyên - 2018). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$ bằng

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{7}{2}$

C. 3

D. $\frac{9}{2}$

Câu 4 (Sở GD-ĐT Hải Dương - 2018). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2$;

$$y = \frac{x^2}{27}; y = \frac{27}{x}$$

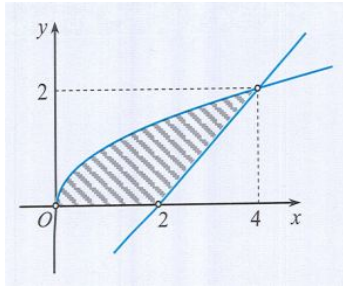
$S = 234$

$S = 27\ln 3$

C. $S = \frac{26}{3}$

D. $S = 27\ln 3 - \frac{26}{3}$

Câu 5 (Sở GD-ĐT Tp HCM - 2018). Diện tích hình phẳng trong hình vẽ bên là



A. $\frac{22}{3}$

B. 2

C. $\frac{16}{3}$

D. $\frac{10}{3}$

Câu 6 (Đề Minh Họa - 2018). Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục $x = -1, x = 2$

hoành và hai đường thẳng

(như hình vẽ bên). Đặt

$$a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx, \text{ mệnh đề}$$

nào sau đây đúng?

A. $S = b - a$

B. $S = b + a$

C. $S = -b + a$

D. $S = -b - a$

Câu 7 (Sở GD-ĐT Bình Dương). Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e^2$.

A. $S = e + 1$

B. $S = 1$

C. $S = e^2 - 1$

D. $S = e^2 + 1$

Câu 8 (Chuyên KHTN HN - 2018). Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2 - x$, trục hoành trong miền $x \geq 0$ bằng

A. 2

B. $\frac{7}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{5}{6}$

Câu 9 (THPT Thanh Thủy - 2018). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ bằng

A. $e^2 + \frac{2}{e} + 2$

B. $e^2 - \frac{2}{e} + 2$

C. $e^2 - \frac{1}{e} + 2$

D. $e^2 + \frac{1}{e} + 2$

Câu 10 (THPT Phan Đình Phùng - 2018). Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị $y = 3e^x$, $y = 4 - x$ và trục tung.

A. $S = \frac{9}{2} + \frac{2}{\ln 3}$

B. $S = \frac{9}{2} + \frac{3}{\ln 3}$

C. $S = \frac{7}{2} - \frac{3}{\ln 3}$

D. $S = \frac{7}{2} - \frac{2}{\ln 3}$

Câu 11 (THPT Vĩnh Thạnh - 2018). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ và đồ thị hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$.

A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

Câu 12 (THPT Tam Quan - 2018). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình: $y = x + \sin x$ và $y = x$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là

A. 4

B. -4

C. 0

D. 1

Câu 13 (Chuyên ĐHSPT HN - 2018). Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2, y \geq 0$ và parabol $y = x^2$ bằng

A. $\frac{\pi}{2} - 1$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

Câu 14 (Chuyên Thái Nguyên - 2018). Gọi S là số đo diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị
 $y = 2x^2 + 3x + 1, y = x^2 - x - 2$
 hàm số $\cos\left(\frac{\pi}{S}\right)$. Tính

- A. 0 B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 15 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018). Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi
 Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = x$ xoay quanh trục Ox bằng

- A. $\pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx$ B. $\pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_0^1 x^4 dx$
 C. $\pi \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx$ D. $\pi \int_0^1 (x^2 - x) dx$

Câu 16 (Sở GD-ĐT TP HCM - 2018). Tìm diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = x^2$,
 tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$ và trục hoành.

- A. $S = \frac{8}{3}$ B. $S = \frac{2}{3}$ C. $S = \frac{4}{3}$ D. $S = \frac{1}{3}$

Câu 17 (Sở GD&ĐT Bình Phước - 2018). Cho Parabol $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến với Parabol
 tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$ lần lượt là $y = 2x + 4$ và $y = 4x - 11$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi 3
 đường nói trên.

- A. 0 B. $\frac{9}{8}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{9}{2}$

Câu 18 (Chuyên Sơn La - 2018). Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ và
 S_2 là diện tích của hình thoi có các đỉnh là đỉnh của elip đó. Tính tỉ số giữa S_1 và S_2

- A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{\pi}$ B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{\pi}$ C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{3}$ D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{2}$

Câu 19 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y = 0$,
 $x = k$ ($k > 1$). Tìm k để diện tích hình phẳng (H) bằng 1.

- A. $k = 2$ B. $k = e^3$ C. $k = e^2$ D. $k = e$

Câu 20 (THPT Kim Liên - 2018). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = ax^3$ ($a > 0$), trục
 hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = k$ ($k > 0$) bằng $\frac{15a}{4}$. Tìm k .

- A. $k = 1$ B. $k = \frac{1}{4}$ C. $k = \frac{1}{2}$ D. $k = 2$

Câu 21 (THPT Phú Cát 2 - 2018). Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính
 thành 2 phần. Tỉ số diện tích của chúng thuộc khoảng nào: $2\sqrt{2}$

- A. $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$

C. $\left(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right)$

D. $\left(\frac{7}{10}; \frac{4}{5}\right)$

Câu 22 (THPT Phan Đình Phùng - 2018). Cho hình phẳng $y = k$, $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp trong hình vẽ bên.

A. $k = \sqrt[3]{4}$

B. $k = \sqrt[3]{2} - 1$

C. $k = \frac{1}{2}$

D. $k = \sqrt[3]{4} - 1$

Câu 23 (Sở GD-ĐT TP HCM - 2018). Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 4$. thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích và như hình vẽ bên dưới. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

A. $k = \ln \frac{8}{3}$

B. $k = \ln 2$

C. $k = \ln 3$

D. $k = \frac{2}{3} \ln 4$

Câu 24 (Sở GD-ĐT TP HCM - 2018). Gọi (H) là hình phẳng bởi đồ thị (P) của hàm số $y = 6x - x^2$ và trục hoành. Hai thẳng $y = m$, $y = n$ chia hình (H) thành ba phần có diện tích nhau. Tính $P = (9 - m)^3 + (9 - n)^3$

A. $P = 405$

B. $P = 409$

C. $P = 407$

D. $P = 403$

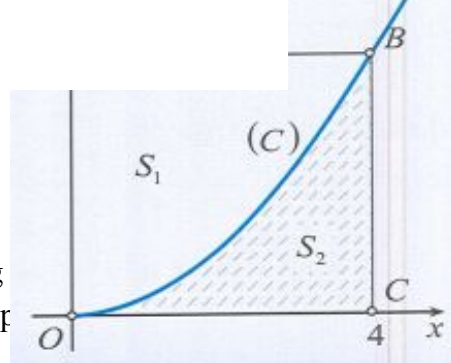
Câu 25 (Chuyên Lương Thế Vinh - 2018). Hình vuông $OABC$ có bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của phần không bị gạch và phần bị gạch

hình vẽ). Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$

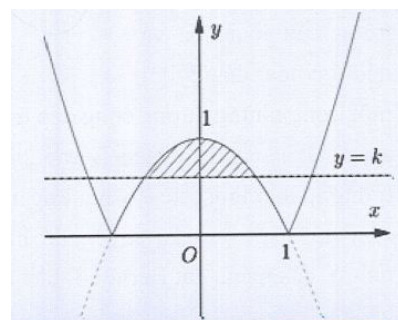
A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$

B. $\frac{S_1}{S_2} = 2$

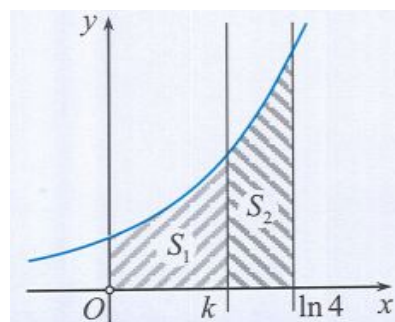
C. $\frac{S_1}{S_2} = 1$



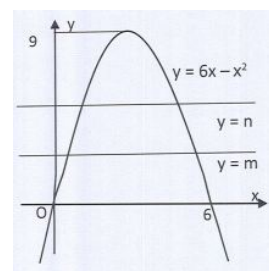
$2 - 1$ và
c kẻ sọc



(H)
Đường
là S_1, S_2



giới hạn
đường
bằng



cạnh
(như

D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$



Câu 26 (Chuyên Hưng Yên - 2018). Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hóa có dạng hình parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao $8m$ và rộng $8m$.

A. $\frac{128}{3}m^2$

B. $\frac{131}{3}m^2$

C. $\frac{28}{3}m^2$

D. $\frac{26}{3}m^2$

Câu 27 (Chuyên Hưng Yên - 2018). Cho Parabol $(P): y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$. Biết rằng tồn tại m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích nhỏ nhất đó.

A. $S = 0$

B. $S = \frac{4}{3}$

C. $S = \frac{2}{3}$

D. $S = 4$

Câu 28 (THPT Nguyễn Quang Diệu - 2018). Cho S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Số nguyên lớn nhất không vượt quá S là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 29 (Sở GD&ĐT HN - 2018). Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

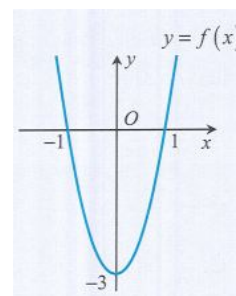
A. $S = 9$

B. $S = \frac{27}{4}$

C. $S = \frac{21}{4}$

D. $S = \frac{5}{4}$

Câu 30 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Trong Công viên Toán học có những mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên. Tính diện tích S của Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều mét.



mảnh đất tạo thành đất mang trong hệ mảnh đất dài 1

D.

A. $S = \frac{125}{6}(m^2)$

B. $S = \frac{125}{4}(m^2)$

C. $S = \frac{250}{3}(m^2)$

$S = \frac{125}{3}(m^2)$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2A	3B	4B	5D	6A	7D	8B	9B	10D
11B	12B	13C	14B	15A	16B	17C	18D	19D	20D
21A	22D	23C	24A	25D	26A	27B	28B	29B	30D

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRONG XOAY

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Dạng 1: Thể tích vật thể có diện tích thiết diện $S(x)$ tạo bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x (a \leq x \leq b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm liên tục thì thể tích vật thể tích theo công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2. Dạng 2: Cho hình phẳng (H) tạo bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox thì được vật thể tròn xoay có thể tích tính theo công thức:

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

3. Dạng 3: Cho hình phẳng (H) tạo bởi các đường $x = f(y)$, $x = g(y)$ và các đường thẳng $y = a$, $y = b$. Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Oy thì được vật thể tròn xoay có thể tích tính theo công thức:

$$V = \pi \int_a^b |f^2(y) - g^2(y)| dy$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Thể tích vật thể có thiết diện biến đổi

Ví dụ 1: (Báo THPT).

Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0, x = 1$ biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 1)$ là một tam giác đều có cạnh là $4\sqrt{\ln(1+x)}$

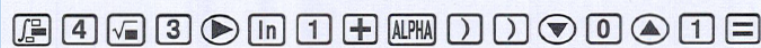
- A. $4\sqrt{3}(2\ln 2 - 1)$ B. $4\sqrt{3}(2\ln 2 + 1)$ C. $8\sqrt{3}(2\ln 2 - 1)$ D. $16\pi(2\ln 2 - 1)$

Giải

Thiết diện là một tam giác đều nên có diện tích: $S = S(x) = \left(4\sqrt{\ln(1+x)}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \ln(1+x)$

Diện tích $S = S(x)$ là một hàm liên tục trên $[0;1]$ nên thể tích được tính theo công thức:

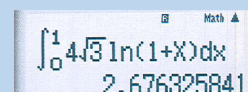
$$V = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 4\sqrt{3} \ln(1+x) dx = 2.6763... = \sqrt{3}(2\ln 2 - 1)$$



=> Chọn A

Phân tích

Diện tích một tam giác đều cạnh x được tính theo công thức $a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$



Ví dụ 2: (Đề minh họa BGD)

Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi 2 mặt phẳng $x = 1$ và $x = -1$ biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$

- A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$ B. $V = \frac{124\pi}{3}$ C. $V = \frac{124}{3}$ D. $V = (32 + 2\sqrt{15}\pi)$

Giải

Diện tích thiết diện $S = S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$

Thể tích vật thể có thiết diện biến đổi đều là: $V = \int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2} dx = 41,3(3) = \frac{124}{3}$

=> Chọn C

Phân tích

Đây là 1 dạng toán lạ, xuất hiện trong sách giáo khoa nâng cao. Nếu học sinh chưa biết cách làm thì rất khó nhưng biết cách làm rồi thì lại đơn giản.

Ví dụ 3: (Sở GD – ĐT Phú Thọ)

Tính thể tích vật thể giới hạn bởi 2 mặt phẳng $x = 1$ và $x = 4$ biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 4)$ thì được thiết diện là một hình lục giác đều có độ dài cạnh là $2x$

- A. $V = 63\sqrt{3}\pi$ B. $126\sqrt{3}$ C. $63\sqrt{3}$ D. $126\sqrt{3}\pi$

Giải

Khám phá tính chất lục giác đều ta thấy: Lục giác đều là 1 hình được ghép lại bởi 6 tam giác đều bằng nhau.

Diện tích 1 tam giác là: $S_0 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = x^2\sqrt{3}$

Vậy diện tích của lục giác đều cạnh $2x$ là: $S = S(x) = 6S_0 = 6\sqrt{3}x^2$

Suy ra thể tích cần tìm là: $V = \int_1^4 S(x) dx = \int_1^4 6\sqrt{3}x^2 dx = 2\sqrt{3}x^3 \Big|_1^4 = 126\sqrt{3}$

=> Chọn B

Ví dụ 4: (Sở GD – ĐT Bắc Giang)

Có một vật hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là $4cm$ và chiều cao là $6cm$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một Parabol. Tính thể tích của vật thể đã cho

- A. 12π B. 12 C. $\frac{72\pi}{5}$ D. $\frac{72}{5}$

Giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào hình bên tương ứng I là gốc tọa độ, IO là trục hoành.

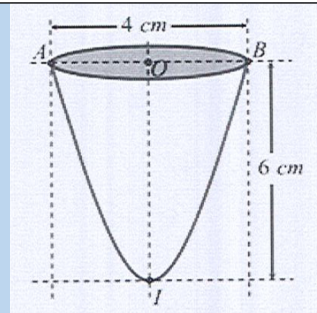
Gọi phương trình Parabol là $y = ax^2 + bx + c$

Parabol qua $I(0;0) \Rightarrow 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Parabol qua $B(2;6) \Rightarrow 4a + 2b = 6$

Parabol qua $A(-2;6) \Rightarrow 4a - 2b = 6$

Vậy ta có:
$$\begin{cases} 4a + 2b = 6 \\ 4a - 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow b = 0; a = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2$$



Lấy $M(0; y)$ thuộc OI , mặt phẳng qua M và vuông góc với Oy cắt hình theo thiết diện là một đường tròn bán kính là MN với N là giao điểm của đường tròn và Parabol.

$\Rightarrow N\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y, y\right) \Rightarrow R_0 = MN = \sqrt{\frac{2}{3}}y$
Bán kính thiết diện

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện: $S = S(y) = \pi R_0^2 = \pi \cdot \frac{2}{3}y^2 = \frac{2\pi y^2}{3}$

$\Rightarrow$ Thể tích ly: $V = \int_0^6 S(y) dy = \frac{2\pi}{3} \int_0^6 y^2 dy = 12\pi$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Phân tích:

Bài toán này là bài mở rộng của dạng 1. Nếu thiết diện có diện tích $S(y)$ thì thể tích vật thể sẽ là $\int_0^6 S(y) dy$

Dạng 2: Thể tích sinh ra khi hình phẳng xoay quanh Ox

Ví dụ 5: (Thi THPT QG).

Cho hình phẳng D giới hạn bởi $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích là bao nhiêu?

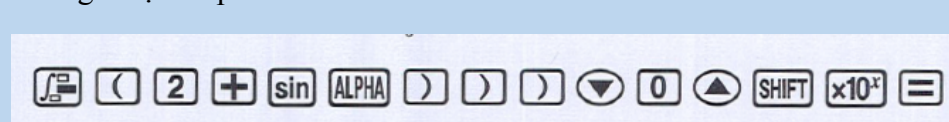
- A. $V = 2\pi^2$ B. $V = 2\pi(\pi + 1)$ C. $V = 2\pi$ D. $V = 2(\pi + 1)$

Giải

Giải phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{2 + \sin x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -2 \Rightarrow$ vô nghiệm $\Rightarrow$ chỉ có 2 cận là $x = 0, x = \pi$

Thể tích cần tìm: $V = \pi \int_0^\pi [f^2(x) - g^2(x)] dx = \pi \int_0^\pi (2 + \sin x) dx$

Tính giá trị tích phân: $\int_0^\pi (2 + \sin x) dx \approx 8.28 = 2(\pi + 1)$



Từ đó suy ra $V = 2\pi(\pi + 1)$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Phân tích:

Dù đề bài cho 2 cận sẵn rồi nhưng chúng ta vẫn cứ cẩn thận tìm xem có cận thứ 3 không. Nếu có cận thứ

3 thì thể tích phải chia thành 2 thể tích nhỏ cộng lại với nhau.

Khi tính giá trị thể tích bằng máy tính casio ta chú ý không cần nhập giá trị π vào tránh rối mắt.

Trong các đáp án của loại này phải có nhân tử π nếu không có thì sai luôn. Ví dụ như đáp số D.

$$\int_0^{\pi} (2+\sin(x))dx = 8.283185307$$

Ví dụ 6: (Chuyên ĐH Vinh).

Cho hàm bậc hai: $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và Ox quanh trục Ox .

A. $\frac{16\pi}{15}$

B. $\frac{4\pi}{3}$

C. $\frac{16\pi}{5}$

D. $\frac{12\pi}{5}$

Giải

Đồ thị của hàm bậc 2 có dạng Parabol

Gọi hàm $y = f(x)$ có phương trình $y = ax^2 + bx + c$

Đồ thị đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow 0a + 0b + c = 0 \Rightarrow c = 0$

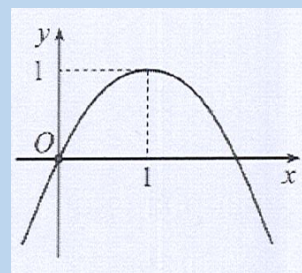
Đồ thị đi qua $(1;1) \Rightarrow a + b + c = 1 \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$

Đồ thị đi qua $(2;0) \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có:
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 2$$

$\Rightarrow$ Hàm số có dạng $y = -x^2 + 2x$

$\Rightarrow$ Thể tích cần tìm: $V = \pi \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx$. Tính tích phân $\int_0^2 (-x + 2x) dx = \frac{16}{15}$



$$\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \frac{16}{15}$$

Vậy $V = \frac{16\pi}{15} \Rightarrow$ Chọn A

Phân tích:

Một bài toán hay, đề bài yêu cầu ta phải đi xây dựng hàm $y = f(x)$ rồi mới lắp công thức để tính thể tích

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \frac{16}{15}$$

Ví dụ 7: (Sở GD – ĐT Hà Tĩnh).

Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa đường tròn đường kính AB có diện tích là 8π và góc $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh đường AB .

A. $\frac{220\pi}{3}$

B. $\frac{98\pi}{3}$

C. $\frac{224\pi}{3}$

D. $4\pi^2$

Giải

Diện tích nửa đường tròn đường kính AB là

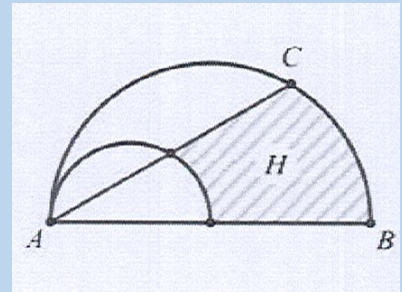
$$\frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{AB}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{\pi AB^2}{8} = 8\pi \Rightarrow AB = 8$$

Gọi R_1 là bán kính đường tròn lớn và R_2 là bán kính đường tròn nhỏ

$$\Rightarrow R_1 = 4 \text{ và } R_2 = 2$$

Lắp hệ trục tọa độ vào hình vẽ, chọn A là gốc tọa độ O và AB là trục hoành Ox

Khi đó đường tròn to có tâm $I_1(4;0)$ và đường tròn nhỏ có tâm $I_2(2;0)$



Phương trình đường tròn lớn: $(x-4)^2 + y^2 = 16 \Rightarrow$ Phương trình cung tròn lớn là: $y = \sqrt{16 - (x-4)^2}$ ta coi đây là $y = f(x)$

Phương trình đường tròn nhỏ: $(x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ Phương trình cung tròn nhỏ là $y = \sqrt{4 - (x-2)^2}$ ta coi đây là $y = g(x)$

Gọi phương trình đường thẳng AC là $y = kx + m$ với k là hệ số góc của đường thẳng và giá trị của k được

$$k = \tan BAC = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

tính theo công thức

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + m \quad A(0;0) \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

mà lại đi qua điểm m . Ta coi đây là m

Gọi C là giao điểm của AC và đường tròn lớn ta tìm được $C(6;0)$

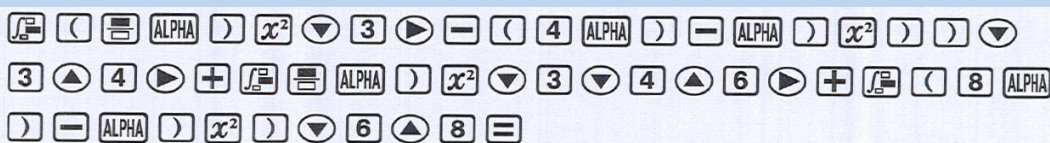
Gọi D là giao điểm của AC và đường tròn nhỏ ta tìm được $D(3;0)$

$$\Rightarrow V = \pi \int_3^4 (h^2(x) - g^2(x)) dx + \pi \int_4^6 (h^2(x) - 0) dx + \pi \int_6^8 (f^2(x) - 0) dx$$

$$\text{Tính giá trị } \int_3^4 (h^2(x) - g^2(x)) dx + \int_4^6 (h^2(x) - 0) dx + \int_6^8 (f^2(x) - 0) dx$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{x^2}{3} - (4x - x^2) \right) dx + \int_4^6 \frac{x^2}{3} dx + \int_6^8 (8x - x^2) dx = \frac{98}{3}$$

Bằng máy tính Casio ta được:



Vậy thể tích cần tìm

$$\text{là } V = \frac{98\pi}{3} \Rightarrow \text{Chọn B}$$

Phân tích:

Bài toán này nâng cao hơn nữa, để bài ản đi $f(x), g(x), h(x)$ và ta phải gán hệ trục tọa độ một cách phù hợp tìm ra chúng. Đường tròn lớn $(x-4)^2 + y^2 = 16$ sẽ tạo ra 2 nửa đường tròn là $y = \sqrt{16 - (x-4)^2}$ và $y = -\sqrt{16 - (x-4)^2}$ và ta sẽ nhận nửa trên ứng với $y \geq 0$

$$\int_3^4 \left(\frac{x^2}{3} - (4x - x^2) \right) dx = \frac{98}{3}$$

Dạng 3: Thể tích vật thể sinh ra khi quay hình phẳng quanh Oy

Ví dụ 8: (Sách bài tập Nâng cao).

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2 + 1} \quad y = 0, y = 1$$

và các đường thẳng

A. $\frac{2\pi}{2}$

B. $\frac{3\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{3\pi}{2}$

Giải

Ta hiểu $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2 + 1} \Rightarrow x = f(y)$ và hai cận $y = 0, y = 1$

Áp dụng công thức tính thể tích ta có: $V = \pi \int_a^b f^2(y) dy = \pi \int_0^1 \frac{2y}{(y^2 + 1)^2} dy$

Tính giá trị tích phân: $\int_0^1 \frac{2y}{(y^2 + 1)^2} dy = \frac{1}{2}$

$V = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Chọn C

Phân tích:

Bài toán nhìn lạ nhưng ta nên làm quen để coi nó là bình thường vì vai trò của Ox và Oy là tương đương. Khi làm quen rồi thì thấy nó cũng thật dễ dàng

Ví dụ 9: (Sách bài tập Nâng cao).

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^4 + 2x$ và đường thẳng $y = 0$?

A. $\frac{5\pi}{3}$

B. $\frac{2\pi}{5}$

C. $\frac{7\pi}{5}$

D. $\frac{8\pi}{3}$

Giải

Biến đổi hàm số ban đầu về dạng $x = f(y)$ và $x = g(y)$

Ta có: $y = 2x - x^2 \Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 1 - y \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{1 - y} \\ x - 1 = -\sqrt{1 - y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{1 - y} \\ x = 1 - \sqrt{1 - y} \end{cases}$

Ta coi $x = 1 + \sqrt{1 - y}$ là $x = f(y)$ và hàm còn lại là $x = g(y)$

Phương trình tung độ giao điểm: $1 + \sqrt{1 - y} = 1 - \sqrt{1 - y} \Leftrightarrow y = 1$

Vậy ta có cận thứ nhất $y = 0$ và cận thứ hai $y = 1$

$\Rightarrow V = \pi \int_0^1 \left[(1 + \sqrt{1 - y})^2 - (1 - \sqrt{1 - y})^2 \right] dy = \pi \int_0^1 [4\sqrt{1 - y}] dy$

Thể tích $\int_0^1 [4\sqrt{1 - y}] dy = 2.66(6) = \frac{8}{3}$. Vậy $\pi \int_0^1 [4\sqrt{1 - y}] dy = \frac{8\pi}{3}$

Tính giá trị $\int_0^1 [4\sqrt{1 - y}] dy = 2.66(6) = \frac{8}{3}$. Vậy $\pi \int_0^1 [4\sqrt{1 - y}] dy = \frac{8\pi}{3}$

$\Rightarrow$ Chọn D

$$\int_0^1 4\sqrt{1-x} dx = 2.666666667$$

Ví dụ 10: (Sách bài tập Nâng cao).

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đường tròn tâm $I(2;0)$ bán kính $R=1$.

A. 4π

B. $4\pi^2$

C. 5π

D. $5\pi^2$

Giải

Đường tròn tâm $I(2;1)$ có bán kính $R=1$ có phương trình: $(x-2)^2 + y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{1-y^2} \\ x-2 = -\sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

Tách đường tròn thành 2 nhánh:

Vậy ta được nhánh thứ nhất $x = 2 + \sqrt{1-y^2}$ ta coi là hàm $x = f(y)$ và nhánh thứ hai $x = 2 - \sqrt{1-y^2}$ ta coi là hàm $x = g(y)$

Phương trình tung độ: $2 + \sqrt{1-y^2} = 2 - \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow 1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy thể tích $V = \pi \int_{-1}^1 \left[\left(2 + \sqrt{1-y^2} \right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-y^2} \right)^2 \right] dy = \pi \int_{-1}^1 8\sqrt{1-y^2} dy$

Tính tích phân $= \int_{-1}^1 8\sqrt{1-y^2} dy = 4\pi$

$$\int_{-1}^1 8\sqrt{1-x^2} dx = 4\pi$$

$\Rightarrow V = 4\pi^2$

$\Rightarrow$ Chọn B

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (THPT Nguyễn Huệ - 2018).

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2$, $y = 0$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục Ox .

A. $V = \frac{512}{15}$ (đvdt)

B. $V = \frac{512\pi}{15}$ (đvdt)

C. $V = 2\pi$ (đvdt)

D. $V = \frac{32\pi}{3}$ (đvdt)

Câu 2 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018).

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(C_1): y = \sqrt{x}$, $(d): y = 2 - x$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh Ox .

A. $V = \frac{7\pi}{6}$

B. $V = \frac{11\pi}{6}$

C. $V = \frac{5\pi}{6}$

D. $V = \frac{2\pi}{3}$

Câu 3 (Sở GD – ĐT Bình Phước – 2018).

(H) $y = \tan x$
 Kí hiệu là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , hai đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{3}$ và trục hoành. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay (H) xung quanh trục hoành.

- A. $\pi\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ B. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ C. $\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ D. $\pi\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

Câu 4 (Chuyên Nguyễn Quang Diệu – 2018).

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên bởi phép quay xung quanh trục Ox của một hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x-1}{x}; y = \frac{1}{x}, x=1$.

- A. $\pi(2\ln 2 - 1)$ B. $-\pi$ C. 0 D. 0

Câu 5 (THPT Bắc Yên Thành – 2018).

Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị (C): $y = x \ln x$, trục hoành và các đường thẳng $x=1, x=e$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành

- A. $\frac{3}{2}\pi$ B. $-\frac{5}{2}e^3 + \ln 64\pi$ C. $(-4 + \ln 64)\pi$ D. $\frac{\pi}{27}(5e^3 - 2)$

Câu 6 (THPT Giao Thủy – 2018).

Gọi V là thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}$ $x=1$ $x=2$ và $y=0$ quanh trục Ox . Tính giá trị của V .

- A. $V = \pi^2 e$ B. $V = \pi(e^2 - e)$ C. $V = \pi e^2$ D. $V = \pi(e^2 + e)$

Câu 7 (THPT Trung Giã – 2018).

Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sin 2x \cdot \cos x, y=0, (0 \leq x \leq \pi)$ xung quanh trục Ox .

- A. $\frac{\pi^2}{8}$ B. $\frac{\pi}{8}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi^2}{4}$

Câu 8 (Chuyên ĐH Vinh – 2018).

Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=0, y=x\sqrt{\ln(x+1)}$ và $x=1$ xung quanh trục Ox là

- A. $V = \frac{5\pi}{6}$ B. $V = \frac{\pi}{6}(12\ln 2 - 5)$ C. $V = \frac{5\pi}{18}$ D. $V = \frac{\pi}{18}(12\ln 2 - 5)$

Câu 9 (THPT Bảo Lâm - 2018).

(H) $y = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$ $x=1$
 Cho hình là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục Ox và đường thẳng . Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$ C. $y' = 0$ D. $\pi \ln \frac{4}{3}$

Câu 10 (THPT Tuy Phước – 2018).

$y = \tan x$,
 Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường cong trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{4}$. Tính thể tích V khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng này xung quanh trục Ox .

A. $V = -\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

B. $V = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

C. $V = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

D. $V = \pi \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$

Câu 11 (Chuyên Thái Nguyên – 2018).

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình Elip $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay xung quanh trục Ox .

A. $4\pi b$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi b^2$

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi b^2$

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi b^3$

Câu 12 (Chuyên ĐH Vinh – 2018).

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn các đường $y = \sqrt{2-x}$, $y = x$, $y = 0$ xung quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V = \pi \int_0^1 (2-x) dx + \pi \int_1^2 x^2 dx$

B. $V = \pi \int_0^2 (2-x) dx$

C. $V = \pi \int_0^1 x dx + \pi \int_1^2 \sqrt{2-x} dx$

D. $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx$

Câu 13 (Thi THPTQG – 2018).

Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2\pi^2$

B. $V = 2\pi(\pi + 1)$

C. $V = 2\pi$

D. $V = 2(\pi + 1)$

Câu 14 (Sở GD – ĐT Phú Thọ - 2018).

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 4$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 4)$ thì được thiết diện là một hình lục giác đều có độ dài cạnh là $2x$.

A. $V = 63\sqrt{3}\pi$

B. $V = 126\sqrt{3}$

C. $V = 63\sqrt{3}$

D. $V = 126\sqrt{3}\pi$

Câu 15 (Đề Minh Họa – 2018).

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$

B. $V = \frac{124\pi}{3}$

C. $V = \frac{124}{3}$

D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$

Câu 16 (Sở GD&ĐT Bắc Giang – 2018).

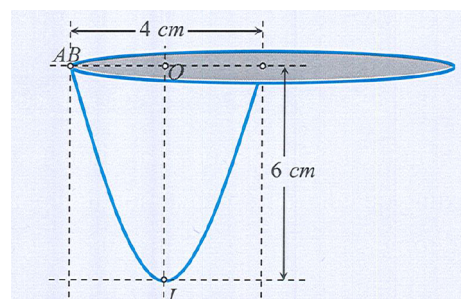
Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cốc ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4cm và chiều cao là 6cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V(\text{cm}^3)$ của vật thể đã cho.

A. $V = 12\pi$

B. $V = 12$

C. $V = \frac{72}{5}\pi$

D. $V = \frac{72}{5}$



Câu 17 (Thi THPTQG – 2108).

Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi e^2}{2}$

B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$

C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$

D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$

Câu 18 (THPT Thanh Chương – 2018).

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{-x}{x+1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$ khi quay quanh trục Ox là $V = \pi(a + b \ln 2)$ với $(a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó ab bằng

A. 3

B. $-\frac{4}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. -3

Câu 19 (Chuyên Bến Tre - 2018).

Gọi $V(a)$ là thể tích khối tròn xoay tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1$ và $x = a (a > 1)$. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(a)$.

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(a) = \pi$

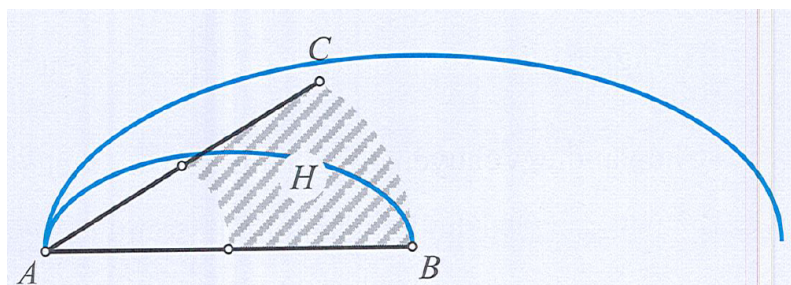
B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(a) = \pi^2$

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(a) = 3\pi$

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(a) = 2\pi$

Câu 20 (Sở GD-ĐT Hà Tĩnh – 2018).

Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $\angle BAC = 30^\circ$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB



A. $\frac{220}{3}\pi$

D. $4\pi^2$

B. $\frac{98}{3}\pi$

C. $\frac{224}{3}\pi$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1B	2C	3D	4A	5D	6C	7D	8D	9A	10C
11C	12D	13B	14B	15C	16A	17D	18D	19A	20B

CHỦ ĐỀ 19: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH QUẢNG ĐƯỜNG VẬT DI CHUYỂN

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Dạng 1: Vật chuyển động thẳng biến đổi đều theo thời gian

Cho vật thể A chuyển động thẳng biến đổi đều (nhanh dần đều hoặc chậm dần đều) với vận tốc biến đổi theo hàm $v = v(t)$. Khi đó quãng đường vật thể A di chuyển từ thời điểm t_0 đến t_1 được tính theo công thức:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

2. Dạng 2: Vật chuyển động với gia tốc biến đổi theo thời gian

Cho vật thể A chuyển động biến đổi (biến đổi nhưng không đều) theo gia tốc là hàm biến đổi theo thời gian $a = a(t)$ thì ta có vận tốc là nguyên hàm của gia tốc:

$$v = \int a(t) dt = F(t) + C$$

3. Một số công thức liên quan

$S' = v$: Đạo hàm của quãng đường là vận tốc

$v' = a$: Đạo hàm của vận tốc là gia tốc

$v = \int a(t) dt$: Vận tốc là nguyên hàm của gia tốc

$$v(t) = v_0 + at$$

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Thử tích vật thể có thiết diện biến đổi

Ví dụ 1: (Chuyên Tuyên Quang) Một ô tô đang chạy thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -12t + 24(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi được bao nhiêu mét?

A. 18m

B. 15m

C. 20m

D. 24m

Giải:

Ta hiểu: đến khi ô tô dừng hẳn tức là vận tốc bằng 0

$$\Leftrightarrow -12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Chọn mốc thời gian $t_1 = 0$ thì thời điểm $t_2 = 2s$ thì xe dừng hẳn.

$\Rightarrow$ Quãng đường mà xe còn di chuyển được là:

$$S = \int_0^2 (-12t + 24) dt = 24m$$

$\Rightarrow$ Chọn D

Bình luận: Cách 2 có thể giải theo vận tốc trung bình. Ta thấy vận tốc lúc bắt đầu đạp phanh là $24m/s$ đến lúc dừng hẳn là $0m/s$ thì vận tốc trung bình là $12m/s$. Vậy xe di chuyển thêm là

$$v_{tb} \cdot t = 12 \cdot 2 = 24m$$

Ví dụ 2 (Chuyên Biên Hòa): Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t(m/s^2)$. Tính quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. 68,25m

B. 70,25m

C. 69,75m

D. 67,25m

Giải:

Chọn gốc thời gian từ lúc chất điểm tăng tốc.

Ta có:
$$v(t) = \int a(t)dt = \int (t^2 + 4t)dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C$$

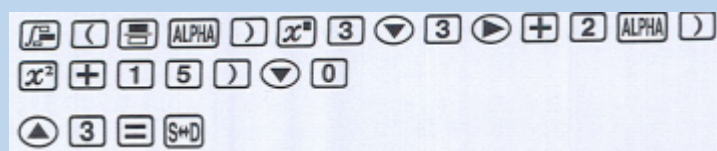
Tại thời điểm $t = 0$ vận tốc $v_0 = 15m/s \Rightarrow C = 15$

$\Rightarrow$ Ta có hàm vận tốc theo thời gian:

$$v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15$$

$\Rightarrow$ Quãng đường chất điểm di chuyển trong thời gian 3 giây là:

$$S = \int_0^3 \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15 \right) dt = 69,75(m)$$



$\Rightarrow$ Chọn C

Phân tích:

Gia tốc là một hàm biến đổi theo thời gian chứ không phải là số cố định như ở ví dụ 1 nên ta phải áp dụng công thức ở dạng 2: $v(t) = \int a(t)dt$ chứ

áp dụng luôn:

$$S = \int_0^3 (15 + (t^2 + 4t)t) dt$$

thì sẽ được kết quả sai.

Handwritten solution for Example 2 showing the correct integration of velocity to find displacement. The steps are: $v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15$, then $S = \int_0^3 (\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 15) dx = 69.75$.

$\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 3 (THPT Trung Giã): Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v = 30(m/s)$ thì đột ngột thay đổi gia tốc $a(t) = 4 - t(m/s^2)$. Tính quãng đường đi được của chất điểm kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến thời điểm vận tốc lớn nhất.

A. $\frac{848}{3}(m)$

B. $\frac{424}{3}(m)$

C. $\frac{128}{3}(m)$

D. $\frac{64}{3}(m)$

Giải:

Gốc thời gian $t_1 = 0$

Khi đó
$$v(t) = \int a(t)dt = \int (4 - t)dt = 4t - \frac{t^2}{2} + C$$

Tại thời điểm ban đầu vận tốc là $30(m/s) \Rightarrow C = 30$

$\Rightarrow$

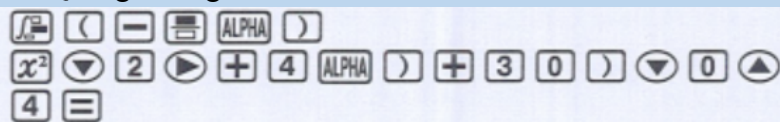
Ta có hàm vận tốc theo thời gian:
$$v(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t + 30$$

Ta thấy hàm số $v(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t + 30$ là một Parabol lõm sẽ đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh của Parabol. Đỉnh Parabol có tọa độ $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Vậy vận tốc lớn nhất đạt được khi $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-1} = 4(s)$

$\Rightarrow$

$$\text{Quãng đường cần tìm là: } \int_0^4 \left(-\frac{t^2}{2} + 4t + 30\right) dt = \frac{424}{3}$$



$\Rightarrow$ Chọn B

Phân tích:

Ngoài cách coi hàm là 1 Parabol ta có thể sử dụng phương pháp đánh giá.

$$\text{Tách } v(t) = -\frac{1}{2}(t-4)^2 + 38 \leq 38$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $t = 4s$

Ví dụ 4 (Chuyên ĐH Vinh): Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162(m) so với mặt đất được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị (mét/ phút). Nếu như vậy thì từ khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là:

A. 5(m/p)

B. 7(m/p)

C. 9(m/p)

D. 3(m/p)

Giải:

Chọn gốc thời gian $t_1 = 0$ lúc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162(m)

Gọi t_2 là thời điểm mà khí cầu chạm đất. Khi đó khí cầu đã di chuyển được quãng đường là:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_0^{t_2} (10t - t^2) dt \Leftrightarrow \int_0^{t_2} (10t - t^2) dt = 162$$

$$\Leftrightarrow \left(5t^2 - \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^{t_2} = 162 \Leftrightarrow 5t_2^2 - \frac{t_2^3}{3} = 162 \Leftrightarrow t_2 = 9$$

Từ đó ta suy ra được vận tốc lúc chạm đất

$$v(9) = 10 \cdot 9 - 9^2 = 9(m/s)$$

$\Rightarrow$ Chọn C

Phân tích:

$x_3 =$

9

Ví dụ 5 (Sở GD- ĐT Bình Phước): Một chất điểm A từ trạng thái nghỉ chuyển động với vận tốc nhanh dần đều, sau 8s nó đạt đến vận tốc 6m/s. Từ thời điểm đó nó chuyển động đều. Một chất điểm B khác xuất phát từ cùng vị trí A nhưng chậm hơn nó 12s chuyển động nhanh dần đều và đuổi kịp A sau 8s kể từ khi B xuất phát. Tìm vận tốc B tại thời điểm đó?

A. 12m/s

B. 20m/s

C. 18m/s

D. 24m/s

=> Chọn D

Ví dụ 6 (Thi THPT QG): Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của Parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

A. $S=26,75$

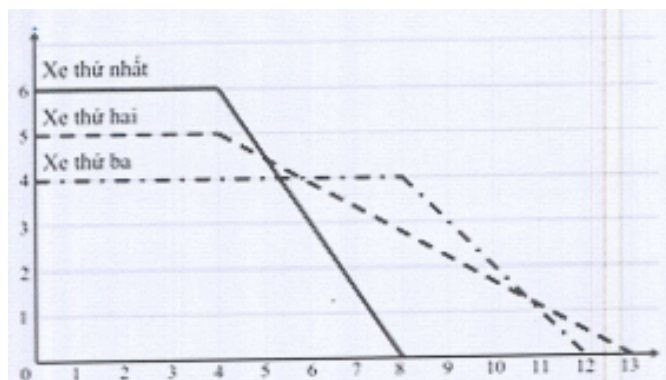
B. $S=25,25$

C. $S=24,25$

D. $S=24,75$

=> Chọn D

Ví dụ 7 (Chuyên KHTN HN): Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở trạm dừng nghỉ, ba xe đang chuyển động đều với vận tốc lần lượt là $60km/h, 50km/h, 40km/h$. Xe thứ nhất đi thêm 4 phút thì bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 8. Xe thứ hai đi thêm 4 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 13. Xe thứ ba đi thêm 8 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 12. Đồ thị biểu diễn vận tốc ba xe theo thời gian như sau: (đơn vị trục tung x $10km/h$,



đơn vị trục hoành là phút). Giả sử tại thời điểm t trên, ba xe đang cách trạm lần lượt là d_1, d_2, d_3 . So sánh 3 khoảng cách này ta có:

A. $d_1 < d_2 < d_3$

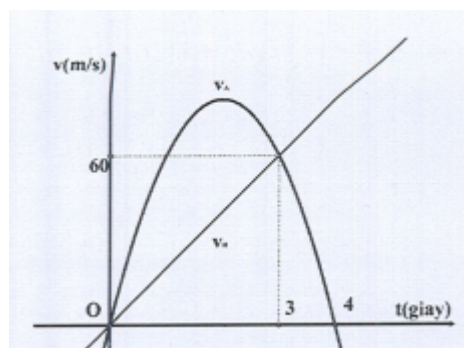
B. $d_1 < d_3 < d_2$

C. $d_3 < d_1 < d_2$

D. $d_2 < d_3 < d_1$

=> Chọn B

Ví dụ 8. Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc, bên cạnh nhau và trên cùng một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là một đường Parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là một đường thẳng ở hình bên. Hỏi sau khi đi được 3 giây khoảng cách giữa 2 xe trên là bao nhiêu?



A. 90m

B. 60m

C. 0m

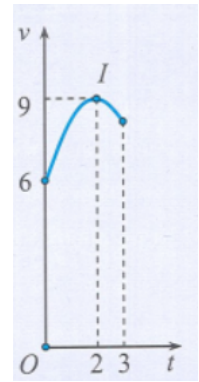
D. 270m

=> Chọn B

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Thi THPTQG- 2018). Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động trong 4 giờ đó.

- A. $s = 26,5(km)$ B. $s = 28,5(km)$
C. $s = 27(km)$ D. $s = 24(km)$



Câu 2 (Thi THPTQG- 2018). Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động trong 4 giờ đó.

- A. $s = 26,5(km)$ B. $s = 27(km)$ C. $s = 27(km)$ D. $s = 24(km)$

Câu 3 (Sở GD- ĐT TP HCM- 2018). Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 3t^2 + t(m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là 2 (m/s). Hỏi vận tốc của vật là bao nhiêu sau khi chuyển động với gia tốc đó được 2s.

- A. 8 m/s B. 12 m/s C. 16 m/s D. 10 m/s

Câu 4 (Sở GD- ĐT TP HCM- 2018). Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t(m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

- A. $\frac{45}{2}$ mét B. 18 mét C. 36 mét D. $\frac{27}{4}$ mét

Câu 5 (THPT Lê Lợi- 2018). Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 3t + 2$, thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường đi được tính theo đơn vị mét. Biết tại thời điểm $t = 2s$ thì vật đi được quãng đường là 10m. Hỏi tại thời điểm $t = 30s$ thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu ?

- A. 240m B. 1140m C. 300m D. 1410m

Câu 6 (Chuyên Biên Hòa- 2018). Một học sinh đi học từ nhà đến trường bằng xe đạp với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 40t + 100(m/phút)$. Biết rằng sau khi đi được 1 phút thì quãng đường học sinh đó đi được là 120m. Biết quãng đường từ nhà đến trường là 3 km. Hỏi thời gian học sinh đó đi đến trường là bao nhiêu phút ?

- A. 9 phút B. 15 phút C. 10 phút D. 12 phút

Câu 7 (Sở GD- ĐT TP HCM- 2018). Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ có gia tốc $a(t) = 3t^2 + t(m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là 2 (m/s). Hỏi vận tốc của vật sau 2s.

- A. 12 m/s B. 10 m/s C. 8 m/s D. 16 m/s

Câu 8 (THPT Đặng Thúc Hứa- 2018). Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm trên cùng đoạn đường thẳng AB, ô tô thứ nhất bắt đầu xuất phát từ A và đi theo hướng từ A đến B với vận tốc $v_A(t) = 2t + 1(km/h)$; ô tô thứ hai xuất phát từ O cách A một khoảng 22km và đi theo hướng từ A đến B với vận tốc 10 km/h, sau một khoảng thời gian người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô thứ hai chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_O(t) = -5t + 20(km/h)$. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu kể từ khi xuất phát hai ô tô đó gặp nhau.

- A. 6h B. 8h C. 7h D. 4h

Câu 9 (THPT TH Cao Nguyên- 2018). Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) (m/s)$ có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1} (m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Tính vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- A. $v = 10(m/s)$ B. $v = 8(m/s)$ C. $v = 15(m/s)$ D. $v = 13(m/s)$

Câu 10 (Chuyên Hùng Vương- 2018). Một viên đạn được bắn theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 29,4 m/s. Gia tốc trọng trường là $9,8 m/s^2$. Tính quãng đường S viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất.

- A. $S = 88,2m$ B. $S = 88,5m$ C. $S = 88m$ D. $S = 89m$

Câu 11 (THPT Lương Tâm- 2018). Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t = 0(s)$ chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5-t) (m/s)$. Tìm quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại

- A. 20,8m B. 20,83m C. $\frac{125}{6}m$ D. 20,83333m

Câu 12 (THPT Lương Tâm- 2018). Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/ phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất, vận tốc v của khí cầu là

- A. $v = 5(m/p)$ B. $v = 7(m/p)$ C. $v = 9(m/p)$ D. $v = 3(m/p)$

Câu 13 (THPT Ngô Sĩ Liên- 2018). Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách 45m (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)

- A. 5m B. 4m C. 6m D. 3m

Câu 14 (THPT Đức Thọ- 2018). Bạn Minh ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5(m/s)$. Tính quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10

- A. 264m B. 252m C. 1134m D. 966m

Câu 15 (THPT Hồng Quang- 2018). Một chiếc xe bắt đầu khởi hành nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 3t(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ khi xe bắt đầu chuyển động. Sau khi khởi hành được 5 giây thì chiếc xe giữ nguyên vận tốc và chuyển động thẳng đều. Tính quãng đường chiếc xe đi được sau 10 giây.

- A. 150m B. 75m C. 2812,5m D. 112,5m

Câu 16 (Chuyên Thái Bình- 2018). Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t(m/s)$. Tìm quãng đường S mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm vật dừng lại

- A. $S = 2560m$ B. $S = 1280m$ C. $S = 2480m$ D. $S = 3840m$

Câu 17 (Sở GD&ĐT Bình Phước- 2018). Một chất điểm A từ trạng thái nghỉ chuyển động với vận tốc nhanh dần đều, 8s sau nó đạt đến vận tốc 6 m/s. Từ thời điểm đó nó chuyển động đều. Một chất điểm B khác xuất phát từ cùng vị trí với A nhưng chậm hơn nó 12s với vận tốc nhanh dần đều và đuổi kịp A sau 8s (kể từ lúc B xuất phát). Tìm vận tốc B tại thời điểm đó

- A. 12m/s B. 24m/s C. 18m/s D. 30m/s

Câu 18 (SỞ GD&ĐT HN- 2018). Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_t(t) = 7t(m/s)$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70(m/s^2)$. Tính quãng đường $S(m)$ đi được của ô tô kể từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho tới khi dừng hẳn.

A. $S = 95,70(m)$

B. $S = 96,25(m)$

C. $S = 87,50(m)$

D. $S = 94,00(m)$

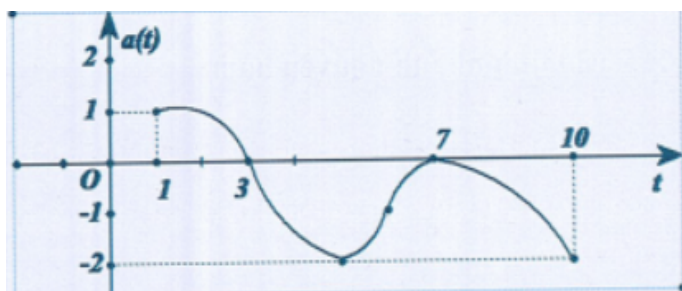
Câu 19 (THPT Quang Trung- 2018). Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} (m/s)$.
 Quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian 1,5 giây chính xác đến 0,01m là :

A. 0,34m

B. 0,30m

C. 0,26m

D. 0,24m



Câu 20 (Chuyên Quốc học Huế- 2018). Người ta khảo sát gia tốc $a(t)$ của một vật thể chuyển động (t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc vật thể bắt đầu chuyển động) từ giây thứ nhất đến giây thứ 10 và ghi nhận được $a(t)$ là một hàm số liên tục có đồ thị như hình bên. Hỏi trong thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 10 được khảo sát đó, thời điểm nào vật thể có vận tốc lớn nhất ?

A. giây thứ nhất

B. giây thứ 3

C. giây thứ 10

D. giây thứ 7

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2C	3B	4B	5D	6C	7A	8A	9D	10A
11C	12C	13A	14D	15D	16B	17B	18D	19C	20A

CHỦ ĐỀ CASIO GIẢI NHANH CHƯƠNG NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Casio tính nhanh nguyên hàm

Ta biết nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \Leftrightarrow F'(\alpha) = f(\alpha)$

Cách làm: Chọn $x = \alpha$ bất kì rồi tính $f(\alpha)$. Dựa vào đáp số nếu đáp số nào có $F'(\alpha) = f(\alpha)$ thì đó là đáp số đúng

2. Casio tính nhanh tích phân

Cố gắng đưa bài toán tích phân trở về bài tìm nghiệm của phương trình, hệ phương trình rồi dùng tính năng dò nghiệm MODE 7 hoặc SHIFT SOLVE để tìm nghiệm

Kỹ thuật ép hệ phương trình: Cho hệ thức $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(a, b, c)$ muốn tìm a, b, c thỏa mãn hệ thức

$h(a, b, c) = m$ ta sẽ tính tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(m)$ rồi lưu vào A .

Vậy ta sẽ ép được hệ phương trình $\begin{cases} f(a, b, c) = A \\ h(a, b, c) = m \end{cases}$. Để giải hệ phương trình này ta sẽ sử dụng chức năng

dò nghiệm SHIFT SOLVE hoặc chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio

Kỹ thuật ép cận nguyên hàm: Cho nguyên hàm gốc $\int f(x)dx$ và nguyên hàm hệ quả $\int f(u(t))dt$ qua phép đổi biến $x = u(t)$. Để sử dụng được máy tính Casio ta ép hệ số cho nguyên hàm gốc để trở thành

tích phân xác định $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Vì nguyên hàm gốc và nguyên hàm hệ quả là tương đương nên

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} f(u(t))dx \quad (\alpha', \beta' \text{ là 2 cận mới})$$

3. Casio tính nhanh diện tích, thể tích, quãng đường

Xác định các hàm $f(x)$, $g(x)$ xuất hiện trong bài và xác định 2 cận a, b rồi áp dụng công thức tính diện tích, thể tích, quãng đường đã học

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Casio tính nhanh nguyên hàm

Ví dụ 1 (Đề thi minh họa ĐHQG - 2016): Nguyên hàm của hàm số $y = x.e^{2x}$ là

A. $2e^{2x}(x-2)+C$ B. $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$ C. $2e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$ D. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C$

Giải

Ta biết $F'(x) = f(x)$ việc này đúng với mọi x thuộc tập xác định.

Vậy sẽ đúng với $x = 1$ chẳng hạn. Khi đó $F'(1) = f(1)$

Tính giá trị $f(1) = 7,3890.....$

ALPHA) ALPHA $\times 10^x$ x^y 2 ALPHA) CALC 1 =

Tính đạo hàm $F'(1)$ với từng đáp án, bắt đầu từ đáp án A là $F(x) = 2e^{2x}(x-2)$

SHIFT $\int$ 2 ALPHA $\times 10^x$ x^y 2 ALPHA) $\rightarrow$ (ALPHA)
= 2) $\rightarrow$ 1 =

Vậy ta được kết quả $F'(1) = -14.7781$ đây là 1 kết quả khác với $f(1)$

=> Đáp án A sai

Tính đạo hàm $F'(1)$ của đáp án B với $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

SHIFT $\int$ 1 ∇ 2 $\rightarrow$ ALPHA $\times 10^x$ x^y 2 ALPHA) $\rightarrow$ (ALPHA)
= $\int$
1 ∇ 2 $\rightarrow$) $\rightarrow$ 1 =

Ta thu được kết quả giống hệt $f(x)$ vậy $F'(x) = f(x)$ hay $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ là nguyên hàm của $f(x)$

=> Chọn B

Bình luận

Việc sử dụng Casio để tính nguyên hàm đặc biệt hữu ích đối với với những bài phức tạp, áp dụng nhiều công thức tính đạo hàm cùng một lúc, và tránh nhầm lẫn trong việc tính toán !!

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\Big|_{x=1}$
 7.389056099
 xe^{2x}
 7.389056099
 $\frac{d}{dx}(2e^{2x}(x-2))\Big|_{x=1}$
 -14.7781122

Ví dụ 2 (Đề minh họa năm – 2017): Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$

Giải

Nhắc lại 1 lần nữa công thức quan trọng của chúng ta. Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x) = f(x)$

Khi đó ta chọn 1 giá trị $x = a$ bất kì thuộc tập xác định thì $F(a) = f(a)$

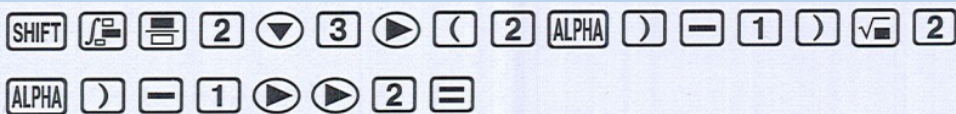
Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn (thỏa điều kiện $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$)

Khi đó $f(2) = 1,732....$



Theo đúng quy trình ta sẽ chọn đáp án $F(x)$ ở 4 đáp án A, B, C, D nếu đáp án nào thỏa mãn $F'(x) = f(2) = 1,732...$

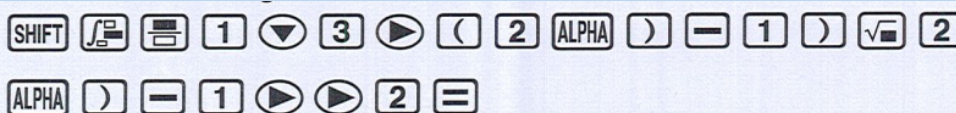
Thử với đáp án A khi đó $F(x) = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$



Vậy $F'(2) = 3,4641....$ là một giá trị khác $f(2) = 1,732...$ điều đó có nghĩa là điều kiện $F'(x) = f(x)$ không được đáp ứng. Vậy đáp án A là sai.

Ta tiếp tục thử nghiệm với đáp án B.

Khi này $F(x) = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$



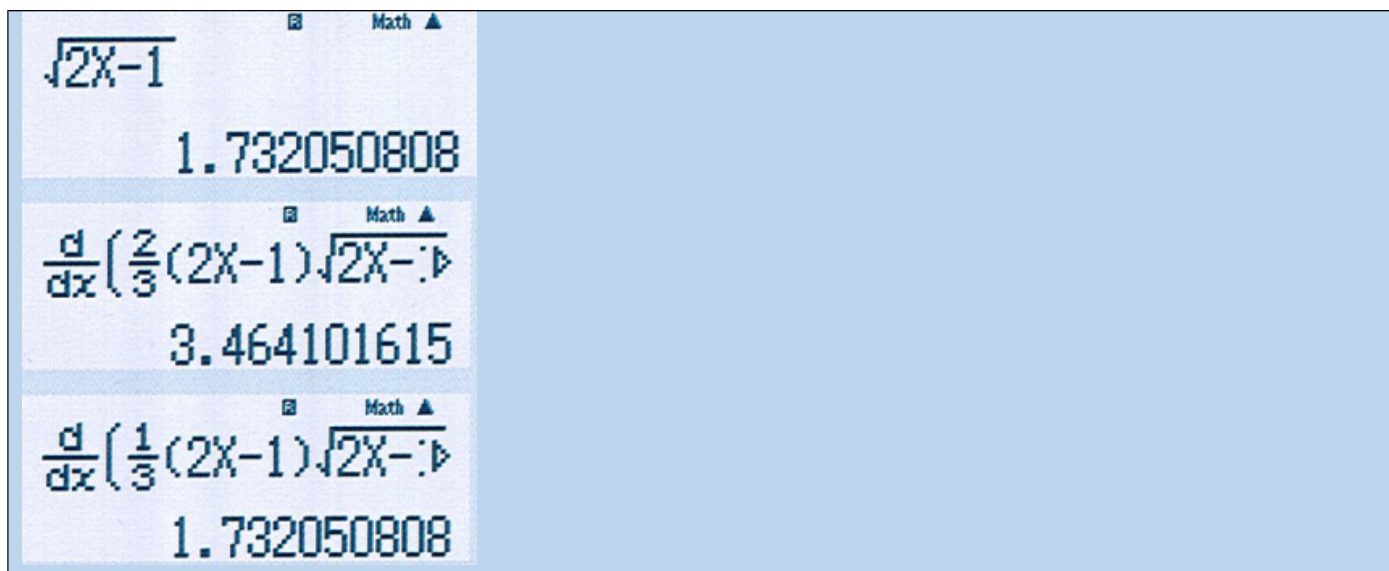
Ta được $F'(2) = 1,732....$ giống hệt $f(2) = 1,732...$ có nghĩa là điều kiện $F'(x) = f(x)$ được thỏa mãn.

=> **Chọn B**

Bình luận

Nếu chúng ta có một chút kiến thức cơ bản về đạo hàm thì việc sử dụng máy tính Casio để tìm đáp án sẽ nhẹ nhàng hơn. Chúng ta chỉ việc thử với đáp án A và B vì 2 đáp án này mới có số mũ là F

Điều đặc biệt của dạng này là số mũ của nguyên hàm $F(x)$ lúc nào cũng lớn hơn số mũ của hàm số $f(x)$ là 1 đơn vị.



Ví dụ 3 (Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 - 2016): Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ trên tập số thực là

- A. $\frac{1}{4} \cos 2x + C$ B. $-\frac{1}{4} \cos 2x + C$ C. $-\sin x \cdot \cos x$ D. $-\frac{1}{4} \sin 2x + C$

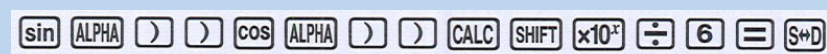
Giải

Chuyển máy tính Casio về chế độ Radian (khi làm các bài toán liên quan đến lượng giác)



Chọn 1 giá trị x bất kì ví dụ như $x = \frac{\pi}{6}$

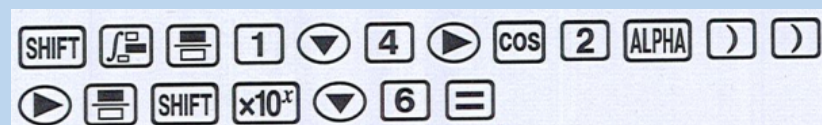
Khi đó giá trị của $f(x)$ tại $x = \frac{\pi}{6}$ là $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,4330\dots$



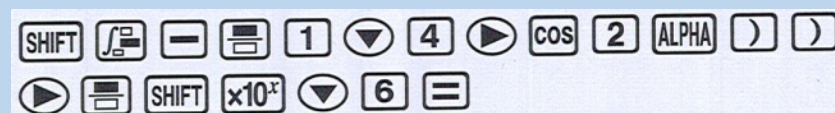
Theo đáp án A thì $F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x$

Nếu đáp án A đúng thì $F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Ta tính được $F'(2) = -0,44330\dots$ là một giá trị khác $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Vậy đáp án A sai



Ta tiếp tục thử nghiệm với đáp án B.

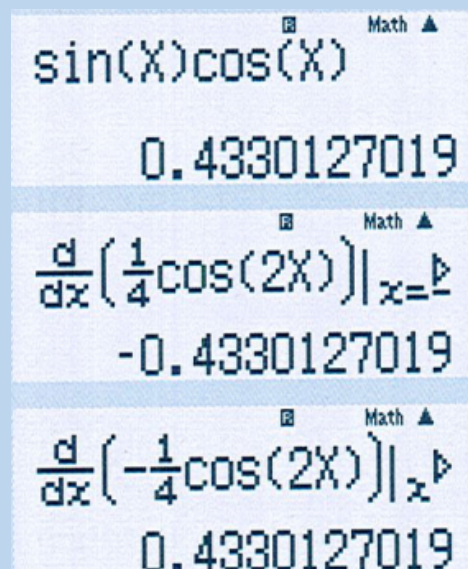


Ta được $F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,4330... = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow$ Chọn B

Bình luận

Khi sử dụng máy tính Casio để làm bài tập liên quan đến hàm lượng giác thì ta nên đổi sang chế độ Radian để phép tính của chúng ta đạt độ chuẩn xác cao..



Dạng 2. Casio tính nhanh nguyên hàm

Ví dụ 4 (Đề minh họa Bộ GD-ĐT – Lần 2 - 2017): Biết $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$

A. $S = 6$

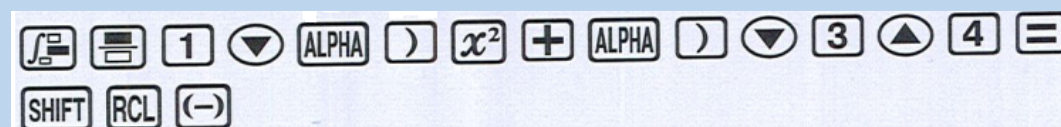
B. $S = 2$

C. $S = -2$

D. $S = 0$

Giải

Tính tích phân $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x}$ và lưu vào biến A

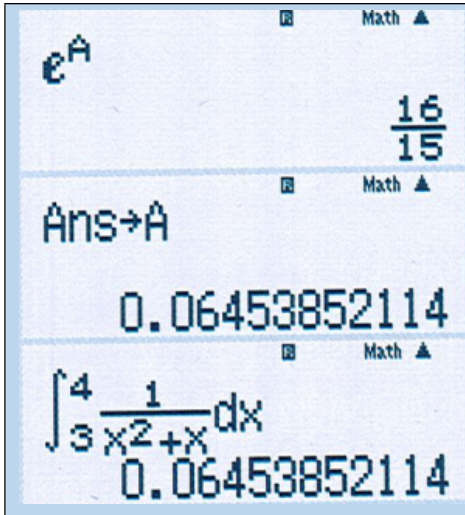


Khi đó $A = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5 \Leftrightarrow A = \ln(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c) \Leftrightarrow 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c = e^A = \frac{16}{5}$



Dễ thấy $\frac{16}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5} = 2^4 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \Rightarrow a = 4; b = -1; c = -1 \Rightarrow S = 2$

$\Rightarrow$ Chọn B



Ví dụ 5 (Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017): Cho $I = \int_1^2 \ln(x+1) dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$

$(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính giá trị của biểu thức $A = a + b + c$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Giải

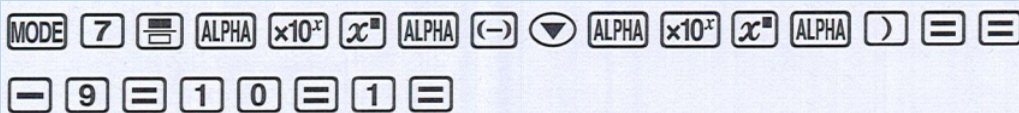
Tính giá trị tích phân $I = \int_1^2 \ln(x+1) dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A



Khi đó $a \ln 3 + b \ln 2 + c = A \Leftrightarrow \ln(3^a \cdot 2^b \cdot e^c) = \ln e^A$

$$\Leftrightarrow 3^a \cdot 2^b \cdot e^c = e^A \Leftrightarrow 3^a \cdot 2^b = \frac{e^A}{e^c}$$

Để tính được $3^a \cdot 2^b$ ta sử dụng chức năng MODE 7 với hàm $f(X) = 3^a \cdot 2^b = \frac{e^A}{e^c}$



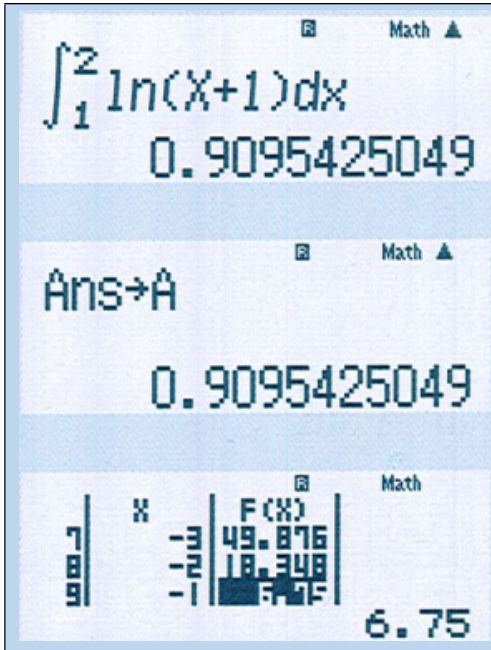
Quán sát màn hình xem giá trị nào của $f(X)$ (cũng là của $3^a \cdot 2^b$) là số hữu tỉ thì nhận

$$\text{Dễ thấy } X = c = -1 \text{ thì } 3^a \cdot 2^b = 6.75 = \frac{27}{4} = 3^3 \cdot 2^{-2}$$

$$\Rightarrow a = 3; b = -2$$

$$\text{Tóm lại } a + b + c = 3 - 2 - 1 = 0$$

=> Chọn A



Ví dụ 6 (Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017):

Cho $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = (a+b) \ln 3 + c \ln 2$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Tính giá trị của biểu thức $A = a + b + c$

A. 0

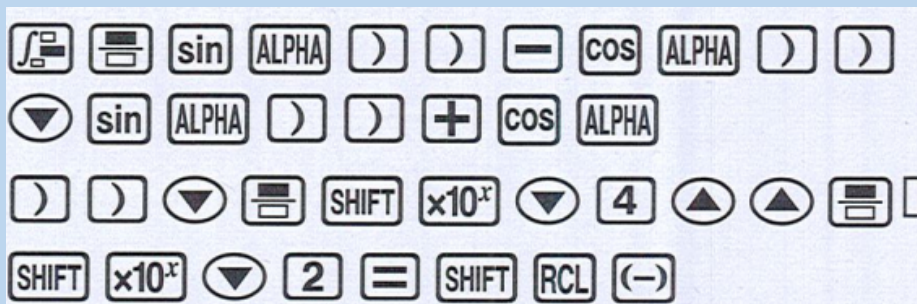
B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. 2

Giải

Tính giá trị tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A



Khi đó $(a+b) \ln 3 + c \ln 2 = A \Leftrightarrow \ln(3^{a+b} \cdot 2^c) = \ln e^A$

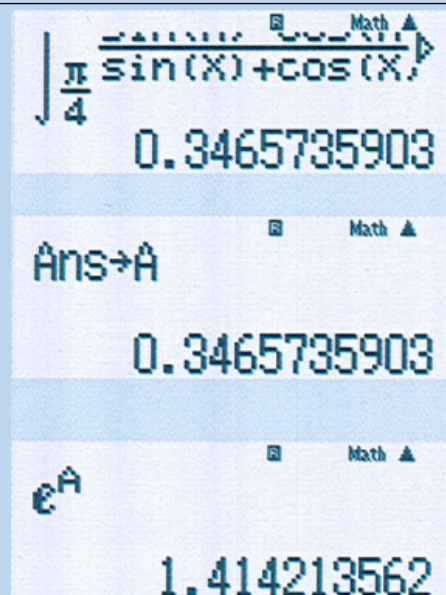
Mà ta tính được $e^A = \sqrt{2}$



$$\Rightarrow 3^{a+b} \cdot 2^c = \sqrt{2} = 3^0 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a+b=0; c=\frac{1}{2}$$

Tóm lại $a+b+c = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

=> Chọn B



Ví dụ 7 (Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017):

Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx = \pi a + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính giá trị của biểu thức $A = a + b$

A. $\frac{11}{32}$

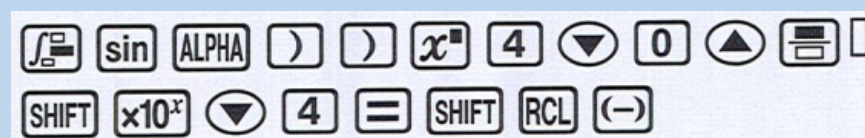
B. $-\frac{5}{32}$

C. 4

D. 7

Giải

Tính giá trị tích phân $I = \int_1^2 \ln(x+1) dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

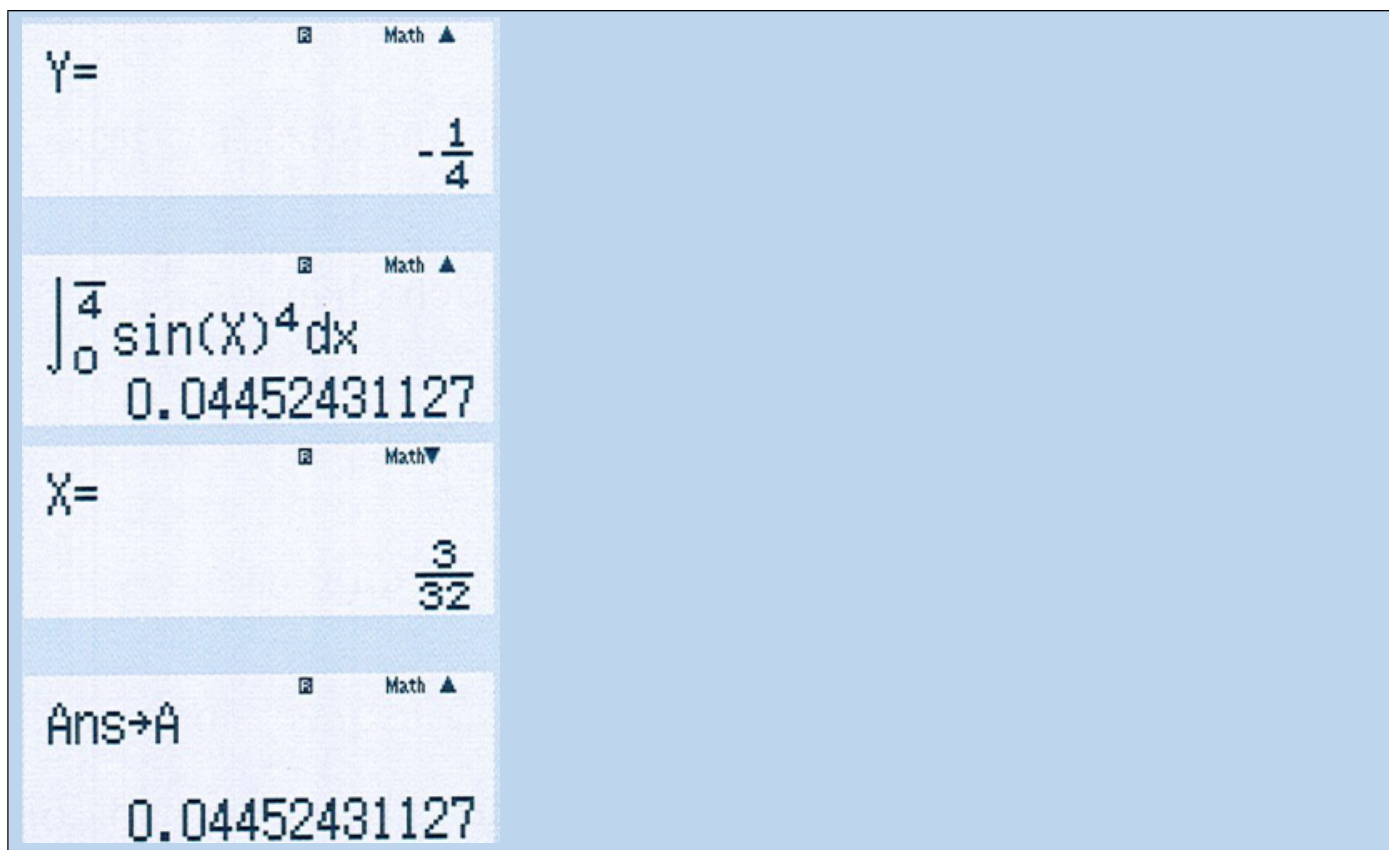


Khi đó $\pi a + b = A$. Nếu đáp án A đúng thì hệ $\begin{cases} \pi a + b = A \\ a + b = \frac{11}{32} \end{cases}$ có nghiệm hữu tỉ (thuộc $\mathbb{Q}$)



Rõ ràng $a = \frac{3}{32}; b = -\frac{1}{4}$ là các số hữu tỉ

=> Chọn B



Ví dụ 8 (Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017):

Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx = \frac{\pi^2 + a}{b} \rightarrow (a, b, c \in \mathbb{Z})$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính biểu thức $A = a + b$

A. 20

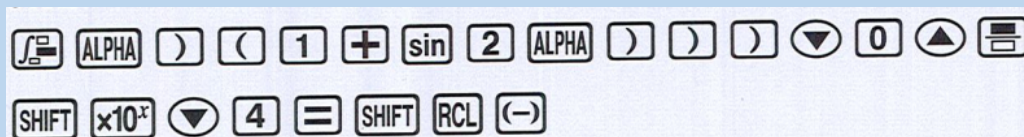
B. 40

C. 60

D. 10

Giải

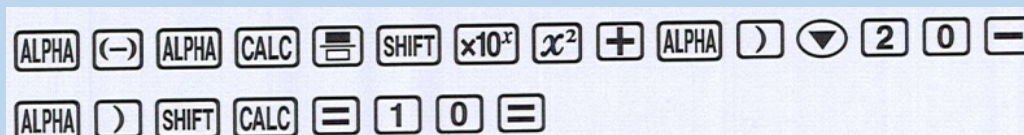
Tính giá trị tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A



Khi đó $\frac{\pi^2 + a}{b} = A$

Nếu đáp số A đúng $a + b = 20 \Rightarrow b = 20 - a \Rightarrow A = \frac{\pi^2 + a}{20 - a}$

Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE để tìm a (với a là số nguyên)

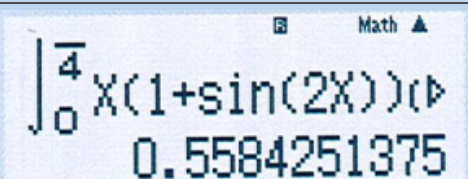


Kết quả không ra một số nguyên $\Rightarrow$ Đáp số A sai

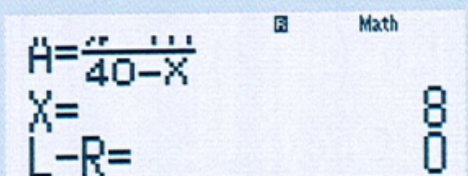
Nếu đáp số B đúng thì $a + b = 40 \Rightarrow b = 40 - a \Rightarrow A = \frac{\pi^2 + a}{40 - a}$

Vậy $a = 8 \Rightarrow b = 32$

$\Rightarrow$ Chọn B



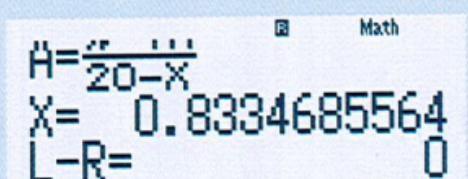
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin(2x))dx = 0.5584251375$$



$$A = \frac{\pi^2}{40 - x}$$

$$x = 8$$

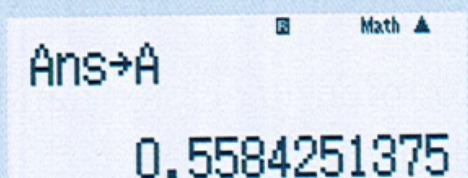
$$L - R = 0$$



$$A = \frac{\pi^2}{20 - x}$$

$$x = 0.8334685564$$

$$L - R = 0$$



$$\text{Ans} \rightarrow A = 0.5584251375$$

Ví dụ 9 (Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017):

Cho $I = \int_1^2 x^3 \ln^2 x dx = \frac{ae^4 + b}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) với $\frac{a}{c}; \frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính biểu thức $A = a + b$

A. 15

B. -28

C. 36

D. 46

$\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 10 (Trích đề thi ĐH khối B - 2005):

Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx$. Nếu đổi biến số $t = \sin x$ thì?

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t t dt$

B. $\int_0^1 e^t t dt$

C. $2 \int_0^1 e^t t dt$

D. $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t t dt$

$\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 11 (Trích đề thi ĐH khối D – 2011):

Sử dụng phương pháp đổi biến đưa tích phân $\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$ thành tích phân $\int_3^5 f(t) dt$. Khi đó $f(t)$ là hàm nào trong các hàm số sau?

$$\text{A. } f(t) = \frac{2t^2 - 3}{t + 2}$$

$$\text{B. } f(t) = \frac{(2t^2 - 8t + 3)(t + 2)}{t}$$

$$\text{C. } f(t) = \frac{2t^2 - 3}{2(t + 2)}$$

$$\text{D. } f(t) = \frac{(2t^2 - 8t + 3)(t + 2)}{2t}$$

=> Chọn B

Ví dụ 12: Nếu sử dụng phương pháp đổi biến tìm nguyên hàm, ta đặt $t = \sqrt[3]{1 + \ln x}$ thì nguyên hàm của

$$\int \frac{\ln x \cdot \sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx \text{ có dạng:}$$

$$\text{A. } \int 3t^3 (t^3 - 1) dt$$

$$\text{B. } \int t^3 (t^3 - 1) dt$$

$$\text{C. } \int 3t^3 (t^3 + 1) dt$$

$$\text{D. } \int t^3 (t^3 + 1) dt$$

=> Chọn A

Dạng 3. Casio tính nhanh diện tích, thể tích, quãng đường

Ví dụ 13 (Đề cương chuyên KHTN Hà Nội - 2017): Cho miền (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln(x + 1)$, $y = \ln 2 \cdot \sqrt{x}$, $x = 2$. Diện tích miền phẳng (D) bằng

$$\text{A. } \ln \sqrt[3]{16} \cdot (\sqrt{2} + 1) - 3 \ln 3 + 1$$

$$\text{B. } -\frac{4}{3} \ln 2 \cdot (\sqrt{2} + 1) + 3 \ln 3 - 1$$

$$\text{C. } \ln \frac{16}{27} + \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln 2 + 1$$

$$\text{D. } \ln \frac{\sqrt[3]{16}}{27} + \frac{4}{3} \ln 2^{\sqrt{2}} + 1$$

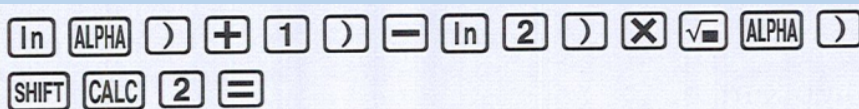
Giải

Ta có hai hàm số $y = \ln(x + 1)$ và $y = \ln 2 \cdot \sqrt{x}$

Cận đầu tiên là $x = 2$ ta đi tìm cận tiếp theo bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm $\ln(x + 1) = \ln 2 \cdot \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow \ln(x + 1) - \ln 2 \cdot \sqrt{x} = 0$$

Để giải nhanh phương trình này ta sẽ sử dụng Casio với chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE



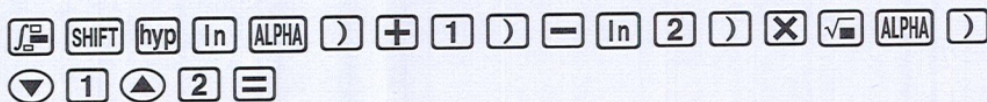
Ta được nghiệm $x = 1$

Vậy ta tìm được hai cận $x = 1$; $x = 2$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm số $y = \ln(x + 1)$, $y = \ln 2 \cdot \sqrt{x}$ và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$

$$\text{là } S = \int_1^2 |\ln(x + 1) - \ln 2 \cdot \sqrt{x}| dx$$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân

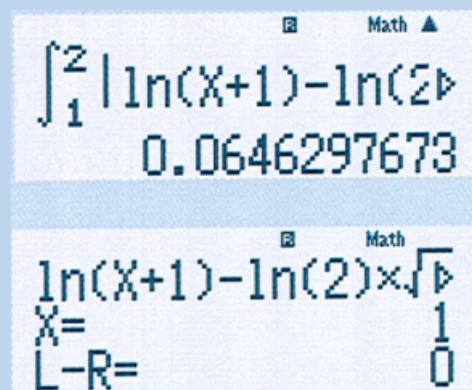


Vậy $S = 0,0646\dots$ Tính giá trị xem đáp án nào có kết quả $0,0646\dots$ thì là đáp án chính xác.

=> **Chọn B**

Bình luận

Việc tìm nghiệm phương trình hoành độ giao điểm hay tung độ giao điểm mà phức tạp ta có thể tính nhanh bằng kỹ thuật dò nghiệm với chức năng SHIFT SOLVE đã được học ở bài trước.



Ví dụ 14 (Đề minh họa môn Toán Bộ GD-ĐT - Lần 1 – 2017) Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi hình (H) quay xung quanh trục Ox

- A. $V = 4 - 2e$ B. $V = (4 - 2e)\pi$ C. $V = e^2 - 5$ D. $V = (e^2 - 5)\pi$

Giải

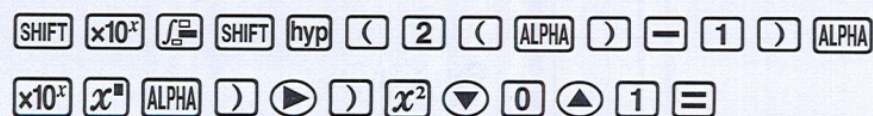
Hình phẳng được giới hạn bởi trục tung $\Rightarrow$ cận thứ nhất là: $x = 0$

Trục hoành có phương trình $y = 0$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y = 2(x-1)e^x$ và trục hoành $\Rightarrow 2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy cận thứ 2 là: $x = 1$

$$\text{Thể tích } V = \pi \int_0^1 \left| 2(x-1)e^x - 0^2 \right| dx$$

Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân



$$\Rightarrow V = 7.5054\dots = \pi(e^2 - 5)$$

=> **Chọn D**

Ví dụ 15 (Đề cương Chuyên KHTN Hà Nội – 2017) Lúc 9h sáng, một ô tô bắt đầu xuất phát từ Nhà hát

Lớn thành phố Hà Nội đi thành phố Hồ Chí Minh. Trong 1 giờ đầu tiên, vì xe đi trong nội thành nên tốc độ di chuyển chưa nhanh, xe ô tô đi với vận tốc $v(t) = 0,5 + 0,2 \cdot \cos \pi t$ (km/phút), trong đó t là thời gian kể từ lúc xe ô tô xuất phát được tính bằng đơn vị phút. Hỏi lúc 9h10' xe ô tô đi được quãng đường bao nhiêu km?

A. 0,7

B. 5

C. 0,3

D. 5,2

Giải

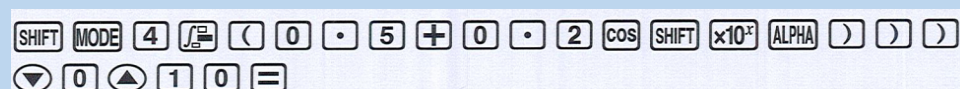
Ta có quãng đường $S(t) = v(t) \cdot t$. Vì phân 2 về theo t ta được $S'(t) \cdot dt = v(t) \cdot dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$

$\Rightarrow S(t)$ là 1 nguyên hàm của $v(t) = S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$

Chọn gốc thời gian lúc 9h là $t_0 = 0$ thì lúc 9h10' là $t_1 = 10$

Quãng đường là $S = \int_0^{10} (0,5 + 0,2 \cdot \cos \pi t) dt$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tính tích phân

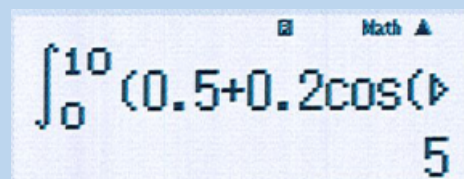


Quãng đường $S = 5m$

$\Rightarrow$ Chọn B

Bình luận

Bài toán rất chuẩn mực về phép tính toán, con số ra cũng phản ánh tình trạng tắc xe tồi tệ ở Hà Nội khi 10⁵ chỉ đi được có 5m



CHỦ ĐỀ 21: BÍ QUYẾT TÌM NHANH CÁC THUỘC TÍNH CỦA SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Số ảo: được kí hiệu bằng chữ i và có giá trị là $i^2 = -1$

Quy luật của số ảo: $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$

2. Số phức: là số có dạng $z = a + bi$ với a, b là 2 số thực

Một số dạng số phức cơ bản: số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$, số phức đối của z là $-z = -a - bi$, số

phức nghịch đảo của z là $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$, mô đun của số phức là một đại lượng được kí

hiệu là $|z|$ và có giá trị $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

3. Phần thực, phần ảo:

Phần thực của số phức z được kí hiệu là $\text{Re}(z)$ và có giá trị $\text{Re}(z) = a$

Phần ảo của số phức z được kí hiệu là $\text{Im}(z)$ và có giá trị $\text{Im}(z) = b$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: (THPT Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - Lần 3 - Năm 2017) Tính mô đun của số phức z thỏa mãn: $z = 1 + 4i + (1 - i)^3$

A. $|z| = \sqrt{5}$.

B. $|z| = 5$.

C. $|z| = \sqrt{3}$.

D. $|z| = \sqrt{29}$.

Giải

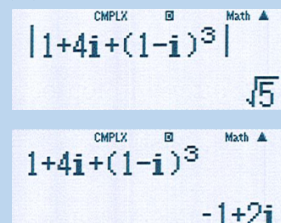
Cách tính cơ bản

Tính giá trị của z ta được:

$\text{MODE } 2 \ 1 \ + \ 4 \ \text{ENG} \ + \ (\ 1 \ - \ \text{ENG} \) \ x^\square \ 3 \ =$

Vậy $z = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Chọn A



Cách tính nhanh

Để tính mô đun số phức ta có thể sử dụng lệnh SHIFT ABS

$\text{SHIFT} \ \text{hyp} \ 1 \ + \ 4 \ \text{ENG} \ + \ (\ 1 \ - \ \text{ENG} \) \ x^\square \ 3 \ =$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Chọn A

Ví dụ 2: (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - TP Hồ Chí Minh - Năm 2017) Trong tập các số phức, tìm số phức z biết $(1 + i)z + 2 - 3i = z(2 - i) - 2$.

A. $z = 1 + 2i$.

B. $z = 2 + i$.

C. $z = 2 - i$.

D. $z = 1 - 2i$.

Giải

PT ban đầu $\Leftrightarrow (1 + i)z - (2 - i)z = -2 - (2 - 3i)$

$$\Leftrightarrow (-1+2i)z = -4+3i \Leftrightarrow z = \frac{-4+3i}{-1+2i}$$

Vậy $z = 2+i$

=> Chọn B

Kinh nghiệm

Đối với phương trình chỉ chứa mình z thì ta tiến hành cô lập z rồi dùng máy tính Casio

Ví dụ 3: (Sở GD-ĐT TP Hồ Chí Minh - Cụm 2 - 2017) Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tính

$$m = |\bar{z} + iz|.$$

A. $m = 16$.

B. $m = 4\sqrt{2}$.

C. $m = 8\sqrt{2}$.

D. $m = 2\sqrt{2}$.

Giải

Dùng máy tính Casio với lệnh MODE 2 tính giá trị $\bar{z}$ ta được:

$$\bar{z} = -4 - 4i$$

$$\Rightarrow z = -4 + 4i$$

Từ đó dùng lệnh SHIFT ABS để tính mô đun số phức $|\bar{z} + iz|$

$$|(-4-4i) + (-4+4i)| =$$

$$\text{Vậy } m = |\bar{z} + iz| = 8\sqrt{2}$$

=> Chọn C

Chú ý

Để tính toán các đại lượng liên quan đến số ảo i ta đều đăng nhập vào môi trường làm việc của số phức bằng lệnh MODE 7

Ví dụ 4: (Sở GD-ĐT Hải Dương - Năm 2017) Tìm $\text{Im}(z)$ của số phức z : $z + 2\bar{z} = (2-i)^3(1-i)$.

A. -13 .

B. 9 .

C. 13 .

D. -9 .

Giải

Để dễ nhìn ta rút gọn cụm $(2-i)^3(1-i)$ ở vế phải:

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } z + 2\bar{z} = -9 - 13i \quad (1)$$

Đặt $z = a + bi$ khi đó (1)

$$\Leftrightarrow a + bi + 2(a - bi) = -9 - 13i \Leftrightarrow 3a - bi = -9 - 13i$$

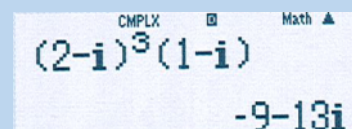
$$\text{Để 2 vế bằng nhau: } \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -9 \\ -b = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 13 \end{cases}$$

Phần ảo số phức z kí hiệu là $\text{Im}(z) = 13$

$\Rightarrow$ Chọn C

Kinh nghiệm

Đối với bài tìm z mà không cô lập được z thì ta sẽ đặt $z = a + bi$



CMPLX Math ▲
 $(2-i)^3(1-i)$
 $-9-13i$

Ví dụ 5: (Sở GD-ĐT Bình Phước - Năm 2017) Cho số phức $z = (1+i)^n$, biết $n \in \mathbb{N}$ và thỏa mãn $\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3$. Tìm $\text{Re}(z)$ của số phức z .

A. $a = 7$.

B. $a = 0$.

C. $a = 8$.

D. $a = -8$.

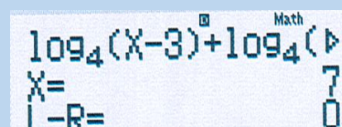
Giải

Đầu tiên ta giải phương trình Logarit để tìm được n

$$\text{PT Logarit} \Leftrightarrow \log_4(n-3)(n+9) = 3$$

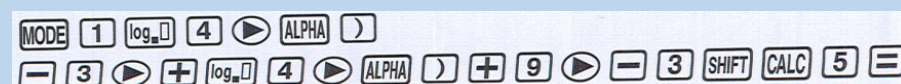
$$\Leftrightarrow (n-3)(n+9) = 4^3 = 64 \Leftrightarrow n^2 + 6n - 91 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ n = -13 \end{cases}. \text{ Vì } n > 3 \Rightarrow n = 7$$



Math ▲
 $\log_4(X-3) + \log_4(X+9) = 3$
 $X = 7$
 $L-R = 0$

Hoặc ta có thể dò nghiệm n bằng chức năng SHIFT SOLVE ta cũng thu được $n = 7$



MODE 1 log 4 ALPHA 7 = 3 + log 4 ALPHA 9 = 3 SHIFT CALC 5 = =

Vậy $z = (1+i)^7 = 8 - 8i$ và phần thực được kí hiệu là $\text{Re}(z) = 8$

$\Rightarrow$ Chọn C



MODE 2 (1 + ENG) x^y 7 =

Ví dụ 6: (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - Lần 3 - Năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i\sqrt{3}).z = 4i$. Tính z^{2017} .

A. $-8^{672}(\sqrt{3}+i)$.

B. $8^{672}(\sqrt{3}.i-1)$.

C. $8^{672}(\sqrt{3}+i)$.

D. $8^{672}(1-\sqrt{3}.i)$.

Giải

Tiến hành cô lập và tính z ta được: $z = \sqrt{3} + i$

$$\text{Khi đó: } z^{2017} = (\sqrt{3} + i)^{2017} = \left[(\sqrt{3} + i)^3 \right]^{672} (\sqrt{3} + i)$$

$$= (8i)^{672} (\sqrt{3} + i) = 8^{672} (\sqrt{3} + i) i^{672}$$

$$8^{672} (\sqrt{3} + i)$$

$\Rightarrow$ Chọn C

Phân tích

Đại lượng $\sqrt{3} + i$ nếu lập phương thì sẽ thu được giá trị đặc biệt $(\sqrt{3} + i)^3 = 8i$



CMPLX Math ▲
 $\frac{4i}{1+i\sqrt{3}}$
 $\sqrt{3}+i$

Ta có $i^4 = 1$ thì $(i^4)^n = 1$

$$\Rightarrow i^{672} = (i^4)^{168} = 1$$

Ví dụ 7: (THPT Quốc Học Quy Nhơn - Bình Định - Lần 1 - Năm 2017) Cho hai số phức $z_1 = m + 3i$, $z_2 = 2 - (m+1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm các giá trị của m để $z_1 \cdot z_2$ là số thực.

- A. $m = 2$ hoặc $m = -3$ B. $m = 2$ hoặc $m = -1$ C. $m = 1$ hoặc $m = -2$ D. $m = -2$ hoặc $m = -3$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Tính } z_1 z_2 &= (m + 3i)[2 - (m+1)i] \\ &= 2m + 6i - m(m+1)i - 3(m+1)i^2 \\ &= 2m + 3(m+1) + [6 - m(m+1)]i = 5m + 3 + (6 - m - m^2)i \end{aligned}$$

$$\text{Để } z \text{ là số thực thì phần ảo phải bằng } 0 \Leftrightarrow 6 - m - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Chọn A

Mở rộng

Số thực sẽ có phần ảo bằng 0, số ảo sẽ có phần thực bằng 0, số có cả phần thực và phần ảo bằng 0 là số 0

Ví dụ 8: (THPT Chuyên Tuyên Quang - Lần 1 - Năm 2017) Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z - 2i\bar{z} = 5 + 3i$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = \sqrt{97}$. B. $|z| = \sqrt{65}$. C. $|z| = 97$. D. $|z| = 65$.

$\Rightarrow$ Chọn B

Ví dụ 9: (THPT Chuyên Lê Khiết - Lần 1 - Năm 2017) Phần thực và phần ảo của số phức

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{2017} \text{ lần lượt là}$$

- A. 1 và 0. B. -1 và 0. C. 0 và -1. D. 0 và 1.

$\Rightarrow$ Chọn D

Ví dụ 10: (THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội - Lần 3 Năm 2017) Cho số phức $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^9$. Khi đó

- A. $z = i$. B. $z = 1 - i$. C. $z = 1 + i$. D. $z = 1$.

$\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 11: (THPT Quốc Học Huế - Lần 2 - Năm 2017) Cho số phức $z \neq 0$ sao cho z không phải là số

$$\text{thực và } w = \frac{z}{1+z^2} \text{ là số thực. Tính } \frac{|z|}{1+|z|^2}.$$

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ Chọn B

Ví dụ 12: (THPT Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 3 - Năm 2017) Cho hai số phức z_1, z_2

thỏa mãn $z_1, z_2 \neq 0$; $z_1 + z_2 \neq 0$ và $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}$. Tính $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow$ Chọn A

Ví dụ 13: (Đề Minh Họa - BGD&ĐT - Lần 2 - Năm 2017) Xét số phức z thỏa mãn

$(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

B. $|z| > 2$.

C. $|z| < \frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow$ Chọn D

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (THPTQG - 2018 - Mã đề 110). Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z+2+i = |z|$. Tính $S = 4a+b$.

A. $S = 4$

B. $S = 2$

C. $S = -2$

D. $S = -4$

Câu 2 (Đề Thi THPTQG - 2018 - Mã đề 110). Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i| = 2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo.

A. 0

B. 2

C. 4

D. 3

Câu 3 (Đề Thi THPTQG - 2018 - Mã đề 103). Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.

A. $x = -\sqrt{2}, y = 2$

B. $x = \sqrt{2}, y = 2$

C. $x = 0, y = 2$

D. $x = \sqrt{2}, y = -2$

Câu 4 (Đề Thi THPTQG - 2018 - Mã đề 103). Cho số phức z thỏa mãn $|z+3| = 5$ và $|z-2i| = |z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 17$

B. $|z| = \sqrt{17}$

C. $|z| = \sqrt{10}$

D. $|z| = 10$

Câu 5 (Đề Thi THPTQG - 2018 - Mã đề 103). Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. Vô số

B. 2

C. 0

D. 1

Câu 6 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh - Cụm 6 - 2018). Cho các số phức $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 1+4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức $z_1 z_2$.

A. $-14-5i$

B. $-10-5i$

C. $-10+5i$

D. $14-5i$

Câu 7 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh - Cụm 6 - 2018). Cho số phức $z = x+yi$; $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $z^3 = 18+26i$. Tính $T = (z-2)^2 + (4-z)^2$.

A. 2

B. 4

C. 0

D. 1

Câu 8 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh - CỤM 5 - 2018). Cho z số phức thỏa mãn $z + (1 - 2i)\bar{z} = 2 - 4i$.

Tìm môđun của số phức z

- A. $|z| = 3$ B. $|z| = \sqrt{5}$ C. $|z| = 5$ D. $|z| = \sqrt{3}$

Câu 9 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh - CỤM 2 - 2018). Tính môđun của số phức z thỏa mãn:
 $3z\bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 12 - 2018i$

- A. $|z| = 2$ B. $|z| = \sqrt{2017}$ C. $|z| = 4$ D. $|z| = \sqrt{2018}$

Câu 10 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh - CỤM 2 - 2018). Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - 2i$. Tìm môđun của số phức $w = \frac{z_1^{2016}}{z_2^{2017}}$.

- A. $|w| = 5$ B. $|w| = \sqrt{3}$ C. $|w| = 3$ D. $|w| = \sqrt{5}$

Câu 11 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh - CỤM 2 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)^2 \cdot \bar{z} + 4 - 5i = -1 + 6i$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = -3$ B. $S = 8$ C. $S = 6$ D. $S = 3$

Câu 12 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh - CỤM 2 - 2018). Tính môđun của số phức $z = (1 - 2i)[2 + i + i(3 - 2i)]$.

- A. $z = 4\sqrt{10}$ B. $z = 4\sqrt{5}$ C. $z = 160$ D. $z = 2\sqrt{10}$

Câu 13 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh - CỤM 2 - 2018). Tính tổng S của các phần thực của tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $\bar{z} = \sqrt{3}z^2$.

- A. $S = \sqrt{3}$ B. $S = \frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $S = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 14 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh - CỤM 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $(1 - i)z + 4\bar{z} = 7 - 7i$. Khi đó, môđun của z bằng bao nhiêu?

- A. $|z| = \sqrt{3}$ B. $|z| = 5$ C. $|z| = \sqrt{5}$ D. $|z| = 3$

Câu 15 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Cho hai số phức $z = 1 + 3i$, $w = 2 - i$. Tìm phần ảo của số phức $u = \bar{z} \cdot w$.

- A. -7 B. $5i$ C. 5 D. $-7i$

Câu 16 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z|(2 + i) = z - 1 + i(2z + 3)$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = -1$ B. $S = 1$ C. $S = 7$ D. $S = -5$

Câu 17 (THPT Lê Lợi - Lần 3 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z(2i - 3) - 8i\bar{z} = -16 - 15i$. Tính $S = a - 3b$.

- A. 4 B. 6 C. 5 D. -1

Câu 18 (THPT Chuyên Biên Hòa - Lần 3 - 2018). Tìm số phức liên hợp của số phức z thỏa mãn $z = (1+i)(3-2i) + \frac{1}{3+i}$.

- A. $\bar{z} = \frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$ B. $\bar{z} = \frac{53}{10} + \frac{9}{10}i$ C. $\bar{z} = \frac{53}{8} - \frac{9}{8}i$ D. $\bar{z} = \frac{37}{10} - \frac{9}{10}i$

Câu 19 (Sở GD-ĐT Phú Thọ - Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $2(z+1) = 3\bar{z} + i(5-i)$. Tính $a + 2b$.

- A. $a + 2b = 1$ B. $a + 2b = -3$ C. $a + 2b = 3$ D. $a + 2b = -1$

Câu 20 (Đề Minh Họa - Lần 3 - BGD&ĐT - 2018). Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 0

Câu 21 (THPT Kim Liên - Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $3z + 5\bar{z} = 5 - 5i$. Tính giá trị $P = \frac{a}{b}$.

- A. $P = \frac{1}{4}$ B. $P = 4$ C. $P = \frac{25}{16}$ D. $P = \frac{16}{25}$

Câu 22 (THPT Đặng Thúc Hứa - 2018). Cho số phức z bất kỳ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $|z^2| = |z|^2$ B. $z\bar{z} = |z|^2$ C. $|z| = |\bar{z}|$ D. $z^2 = |z|^2$

Câu 23 (THPT Đặng Thúc Hứa - 2018). Cho các số phức $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\sqrt{2}$ C. $P = 2$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 24 (THPT Chuyên Thái Nguyên - Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1+z)\bar{z}$.

- A. -2 B. 0 C. -1 D. -i

Câu 25 (THPT Chuyên Thái Nguyên - Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn phương trình $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. $3+2\sqrt{2}$ B. $2+2\sqrt{2}$ C. $3-2\sqrt{2}$ D. 4

Câu 26 (THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Lần 1 - 2018). Cho số phức $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{1+i}$. Tính môđun của số phức $\bar{z} + iz$ được kết quả:

- A. $6\sqrt{2}$ B. $9\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $7\sqrt{2}$

Câu 27 (THPT TH Cao Nguyên - Lần 1 - 2018). Cho các số phức $z_1 = 3i$, $z_2 = -1 - 3i$, $z_3 = m - 2i$.

Tập giá trị tham số m để số phức z_3 có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

- A. $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$ B. $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ C. $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ D. $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$

Câu 28 (THPT Cao Nguyên - Lần 1 - 2018). Tính môđun của số phức $z = 4 - 3i$.

- A. $|z| = \sqrt{7}$ B. $|z| = 7$ C. $|z| = 25$ D. $|z| = 5$

Câu 29 (THPT Chuyên Bến Tre - 2018). Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$. Tính $P = 3x + y$.

- A. $P = 7$. B. $P = 6$ C. $P = 5$ D. $P = 8$

Câu 30 (Sở GD&ĐT Hà Tĩnh - 2018). Trong các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

- A. $8i$ B. 4 C. -8 D. 8

Câu 31 (Chuyên KHTN - Lần 5 - 2018). Cho số phức $z = 1 + i$, môđun số phức $z_0 = \frac{2z + z^2}{zz + 2z}$ bằng

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $1 + \sqrt{2}$ D. 1

Câu 32 (Chuyên Phan Bội Châu - Lần 3 - 2018). Tìm giá trị của số thực m sao cho số phức $z = \frac{2-i}{1+mi}$ là một số thuần ảo.

- A. Không tồn tại m B. $m = -\frac{1}{2}$ C. $m = -2$ D. $m = 2$

Câu 33 (Thanh Chương - Lần 1 - 2018). Tìm môđun của số phức $z = (2 - 3i)i + (1 + i)^2$.

- A. $|z| = 1$ B. $|z| = 3$ C. $|z| = \sqrt{5}$ D. $|z| = 5$

Câu 34 (THPT Quốc Học Huế - Lần 1 - 2018). Số phức z thỏa mãn $\frac{\bar{z}}{4 - 3i} + (2 - 3i) = 5 - 2i$. Môđun của z bằng

- A. $|z| = 5\sqrt{10}$ B. $|z| = 10\sqrt{2}$ C. $|z| = 250$ D. $|z| = \sqrt{10}$

Câu 35 (THPT Chuyên Tuyên Quang - Lần 1 - 2018). Trong mặt phẳng phức, tìm điểm M biểu diễn số phức $z = \frac{i^{2017}}{3 + 4i}$.

- A. $M\left(-\frac{4}{25}; \frac{3}{25}\right)$ B. $M\left(\frac{4}{25}; \frac{3}{25}\right)$ C. $M\left(-\frac{4}{25}; -\frac{3}{25}\right)$ D. $M\left(\frac{4}{25}; -\frac{3}{25}\right)$

Câu 36 (THPT Chuyên Tuyên Quang - Lần 1 - 2018). Tính $z = \frac{2-i}{1-i^{2017}}$.

- A. $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ B. $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ D. $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

Câu 37 (THPT Chuyên Thái Bình - Lần 4 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i) + \frac{2}{1-i} = \sqrt{14} + 2i$. 4

Tìm môđun của số phức $w = z + 1$.

- A. $|w| = 3$ B. $|w| = \sqrt{8 - \sqrt{14}}$ C. $|w| = \sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$ D. $|w| = 3\sqrt{2}$

Câu 38 (THPT Chuyên Ngoại ngữ - Lần 1 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z(2i - 3) - 8i\bar{z} = -16 - 15i$. Tính $S = a + 3b$.

- A. $S = 4$ B. $S = 3$ C. $S = 6$ D. $S = 5$

Câu 39 (THPT Chuyên Lê Khiết - Lần 1 - 2018). Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$. Kết luận nào sau đây là sai?

- A. $\frac{z_1}{z_2} = i$ B. $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ C. $z_1 + z_2 = 2$ D. $|z_1 \cdot z_2| = 2$

Câu 40 (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Lần 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $2z + (1+i)\bar{z} = 5 + 3i$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = \sqrt{5}$ B. $|z| = \sqrt{3}$ C. $|z| = 3$ D. $|z| = 5$

Câu 41 (THPT Chuyên KHTN - Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là

- A. -2^{11} B. $-2^{11} + 2$ C. $-2^{11} - 2$ D. 2^{11}

Câu 42 (THPT Chuyên KHTN - Lần 1 - 2018). Cho $P(z)$ là một đa thức với hệ số thực. Nếu số phức z thỏa mãn $P(z) = 0$ thì

- A. $P(|z|) = 0$ B. $P\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ C. $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0$ D. $P(\bar{z}) = 0$

Câu 43 (Sở GD&ĐT Bắc Giang - Lần 1 - 2018). Tìm số phức z thỏa mãn hệ thức $(1+i)z + \bar{z} = 1 + i$.

- A. $z = 2 + i$ B. $z = 1 - i$ C. $z = 2 - i$ D. $z = 1 + i$

Câu 44 (THPT Chuyên ĐHSPT - Lần 3 - 2018). Số phức z thỏa mãn $|z| + z = 0$. Khi đó

- A. z là số thực nhỏ hơn hoặc bằng 0 B. $|z| = 1$
C. Phần thực của z là số âm D. z là số thuần ảo

Câu 45 (TT Diệu Hiền - 2018). Biểu thức $P = \frac{1+i^{2017}}{2+i}$ có giá trị là

- A. $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ B. $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ C. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ D. $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$

Câu 46 (Sở GD&ĐT Quảng Ninh - Lần 1 - 2018). Cho số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$. Tính $z^5 + z^6 + z^7 + z^8$.

- A. 4 B. 0 C. $4i$ D. 2

Câu 47 (Chuyên ĐHSPT - Lần 4 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z - (1+2i)\bar{z} = 7 - i$. Tìm môđun của z .

A. $|z| = \sqrt{5}$

B. $|z| = 1$

C. $|z| = \sqrt{3}$

D. $|z| = 2$

Câu 48 (THPT Chuyên KHTN - Lần 1 - 2018). Cho số phức z có phần thực dương và thỏa mãn $\frac{z}{z - \frac{(5 + \sqrt{3}i)}{z}} - 1 = 0$. Khi đó

A. $|z| = 2$

B. $|z| = 3$

C. $|z| = 4$

D. $|z| = \sqrt{7}$

Câu 49 (THPT Chuyên KHTN - Lần 1 - 2018). Giả sử số phức $z = -1 + i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 - \dots - i^{99} + i^{100} - i^{101}$. Lúc đó tổng phần thực và phần ảo của z là

A. 2

B. -1

C. 0

D. 1

Câu 50 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Lần 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $(1 - 3i)z + (1 + i)^2 \bar{z} = 5 - i$. Tính môđun của z .

A. $|z| = \frac{\sqrt{20}}{3}$

B. $|z| = \sqrt{10}$

C. $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

D. $|z| = \frac{\sqrt{29}}{3}$

Câu 51 (THPT Nguyễn Trãi - Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn: $(3 - 2i)\bar{z} - 4(1 - i) = (2 + i)z$. Môđun của z là

A. $\sqrt{10}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{3}$

Câu 52 (TT Diệu Hiền - 2018). Tìm số phức z biết $|z| = 5$ và phần thực lớn hơn phần ảo một đơn vị.

A. $z_1 = -4 - 3i, z_2 = 3 + 4i$

B. $z_1 = 4 + 3i, z_2 = -3 - 4i$

C. $z_1 = 3 - 4i, z_2 = 4 - 3i$

D. $z_1 = 4 + 3i, z_2 = -4 - 3i$

Câu 53 (Đề Minh Họa - BGD&ĐT - Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$

B. $P = 1$

C. $P = -1$

D. $P = -\frac{1}{2}$

Câu 54 (THPT Hùng Vương - Lần 1 - 2018). Tính i^{2009} .

A. -1

B. 1

C. -i

D. i

Câu 55 (THPT Hùng Vương - Lần 1 - 2018). Tìm dạng lượng giác của số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$.

A. $z = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

B. $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$

C. $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

D. $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2D	3C	4D	5D	6D	7C	8B	9A	10D
11B	12A	13B	14C	15A	16A	17A	18A	19C	20C
21A	22D	23C	24D	25A	26B	27A	28D	29B	30D

31D	32D	33D	34A	35B	36B	35A	38D	39B	40A
41C	42D	43D	44A	45A	46B	47A	48D	49C	50D
51A	52B	53D	54D	55B					

CHỦ ĐỀ 22: BÍ QUYẾT GIẢI NHANH PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Phương trình bậc 2 số phức: $az^2 + bz + c = 0$ được giải bằng lệnh **MODE 5 3**

2. Phương trình bậc 3 số phức: $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ được giải bằng lệnh **MODE 5 4**

3. Phương trình bậc 4 trùng phương: $az^4 + bz^2 + c = 0$ được giải bằng cách đặt $z^2 = t$ rồi đưa phương trình bậc 4 trở về phương trình bậc 2 số phức: $at^2 + bt + c = 0$ rồi dùng lệnh **MODE 5 3** để giải tiếp

4. Để chứng minh một đẳng thức số phức: ta thường tiến hành bằng phương pháp cá biệt hóa, chọn các giá trị đại diện của $z_1, z_2, \dots$ rồi sử dụng máy tính Casio để tính toán và so sánh.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: (Đề thi THPTQG – 2017 – Mã đề 110) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$

B. $P = \frac{2}{3}$

C. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Giải

Giải phương trình bậc 2: $3z^2 - z + 1 = 0$ bằng **MODE 4 3** rồi lưu z_1 vào phím **A** và z_2 vào phím **B**.

MODE **5** **3** **3** **=** **1** **=** **1** **=** **SHIFT** **RCL** **(-)** **=** **SHIFT** **RCL** **°"**

Tính giá trị biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$ ta được $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

=> Chọn D

MODE **2** **SHIFT** **hyp** **ALPHA** **(-)** **▶** **+** **SHIFT** **hyp** **ALPHA** **°"** **=**

Chú ý

Vì nghiệm z_1, z_2 chứa số ảo i để tính P thì đầu tiên ta phải đăng nhập vào môi trường làm việc của số phức bằng lệnh **MODE 2**

$X_1 = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i$
 $X_2 = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i$
CMPLX
 $|A| + |B| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 2: (THPT Bảo Lâm – Lần 1 – 2017) Xét phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$ trong tập số phức. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình. Tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$

B. $5\sqrt{2}$

C. 5

D. $\sqrt{2}$

Giải

Đặt $z^2 = t$ khi đó phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$ trở thành $2t^2 - 3t - 2 = 0$

Giải phương trình bậc 2 này ta thu được:
$$\begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

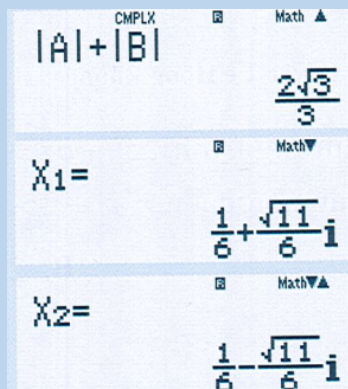
Trường hợp 1: $t = 2 \Leftrightarrow z^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2} \end{cases}$

Trường hợp 2: $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow z^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow z^2 = \frac{i^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ z = -\frac{i\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

=> Chọn A

Chú ý

Vì nghiệm z_1, z_2 chứa số ảo i để tính P thì đầu tiên ta phải đăng nhập vào môi trường làm việc của số phức bằng lệnh MODE 2



Ví dụ 3: (THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa – Lần 3 – 2017) Cho phương trình ẩn phức $z^3 + 8 = 0$ có ba nghiệm z_1, z_2, z_3 . Tính tổng $M = |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

- A. $M = 6$ B. $M = 2 + 2\sqrt{5}$ C. $M = 2 + 2\sqrt{10}$ D. $M = 2 + 2\sqrt{2}$

Giải

Giải phương trình bậc 3: $z^3 + 8 = 0$ bằng lệnh **MODE 5 4** ta thu được 3 nghiệm $z_1 = -2$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$

Tính tổng $M = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ ta được $M = 6$

=> Chọn A

MODE 2 SHIFT hyp 2 ► + SHIFT hyp 1 + $\sqrt{\square}$ 3 ► ENG ► +
SHIFT hyp 1 $\square$ $\sqrt{\square}$ 3 ► ENG $\square$

Phương pháp

Để giải phương trình bậc 4 trùng phương $az^4 + bz^2 + c = 0$ ta đặt $z^2 = t$ để đưa phương trình về dạng bậc 2 ẩn t mà máy tính Casio có thể tính được nghiệm.

Ví dụ 4: (THPT Chuyên Thái Nguyên – Lần 2 – 2017) Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$, $(a, b \in \mathbb{R})$ có một nghiệm là $z = 1 - i$. Tính môđun của số phức $w = a + bi$.

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. 3

Giải

Ta hiểu: $z = 1 - i$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ (1)

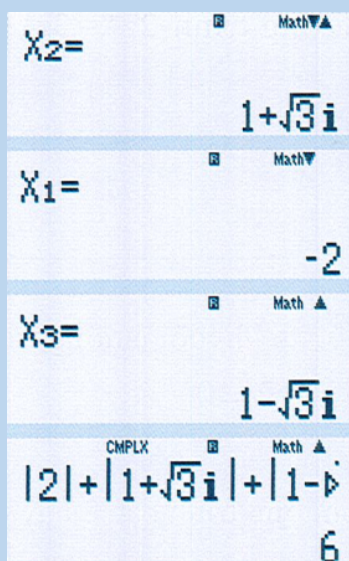
tức là $1 - i$ thỏa mãn phương trình (1) $\Leftrightarrow (1 - i)^2 + a(1 - i) + b = 0$

$$\Leftrightarrow -2i + a - ai + b = 0 \Leftrightarrow a + b - (a + 2)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra số phức $w = -2 + 2i \Rightarrow |w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Chọn C



Ví dụ 5: (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – HCM – 2017) Biết phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ $z_1, z_2, z_3 = 1 + 2i$ là nghiệm. Biết z_2 có phần ảo âm, tìm phần ảo của $w = z_1 + 2z_2 + 3z_3$.

A. 3

B. 2

C. -2

D. -1

Giải

Vì $z_3 = 1 + 2i$ là nghiệm nên sẽ thỏa mãn phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$

$$\Leftrightarrow a(1 + 2i)^3 + b(1 + 2i)^2 + c(1 + 2i) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow (-11 - 2i)a + b(-3 + 4i) + c(1 + 2i) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow -11a - 3b + c + d + (-2a + 4b + 2c)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11a - 3b + c + d = 0 \\ -2a + 4b + 2c = 0 \end{cases}$$

Chọn $c = 1, d = 0$ khi đó hệ (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11a - 3b = -1 \\ -2a + 4b = -2 \end{cases}$$

MODE 5 1 1 1 3 1
2 4 2

Ta thu được $a = \frac{1}{5}$ và $b = -\frac{2}{5}$ khi đó phương trình ban đầu trở thành $\frac{1}{5}z^3 - \frac{2}{5}z^2 + z = 0$

Giải phương trình bậc 3 này ta thu được: $z_1 = 0, z_2 = 1 - 2i, z_3 = 1 + 2i$

MODE 5 4 1 5 2 5 1
0

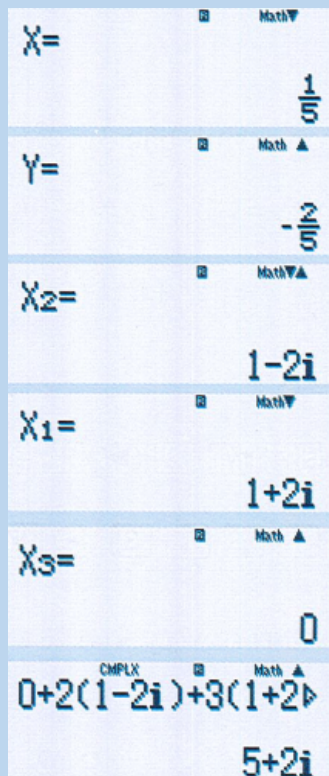
Thu gọn số phức $w = 5 + 2i \Rightarrow$ Phần ảo của w là 2

$\Rightarrow$ Chọn B

MODE 2 0 + 2 (1 + DEL
2 ENG) + 3 (1 + 2 ENG) =

Phân tích

Hệ (*) có 2 ẩn mà 4 phương trình thì ta sẽ chọn 2 ẩn là 1 số bất kì, tuy nhiên phải đảm bảo $a \neq 0$ để đảm bảo phương trình ẩn z là bậc 3 để có 3 nghiệm.



Ví dụ 6: (Chuyên KHTN – Lần 5 – 2017) Giả sử z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 + (1 - 2i)z - 1 - i = 0$. Khi đó $|z_1 - z_2|$ bằng?

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Giải

$$\Delta = (1 - 2i)^2 - 4(-1 - i) = 1$$

$$\text{Vậy } z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(1 - 2i) + 1}{2} = i$$

Phân tích

Vì hệ số của z chứa số ảo i nên ta không thể bấm máy tính với chức năng MODE 5 3 được mà phải đi lên từ cách tính thông thường.

Ví dụ 8 (Bắc Hà - 2017): Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết $2w+i$ và $3w-5$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tìm phần thực của số phức w .

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Ví dụ 9 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2017): Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1 = \omega + 3i$, $z_2 = \omega + 9i$, $z_3 = 2\omega - 4$, trong đó ω là một số phức nào đó.

Ví dụ 7: (Sở GD&ĐT Hải Phòng - 2017) Gọi A, B, C là các điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $S = 1$ C. $S = 3\sqrt{3}$ D. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Giải

$$PT \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - 5z + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ z^2 - 5z + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1;0) \\ B\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{5}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

Suy ra $AB = AC = BC = \sqrt{3} \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều, suy ra $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow$ Chọn D

Kinh nghiệm

Đề bài thường cho ΔABC là tam giác đều cạnh a thì $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ hoặc là Δ vuông thì $S = \frac{1}{2}$ tích 2 cạnh góc vuông.

Tính giá trị của $P = |a + b + c|$.

- A. $P = 208$ B. $P = 84$ C. $P = 136$ D. $P = 36$

$\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 10 (THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm - 2017): Cho phương trình $2z^2 + 5|z| - 3 = 0$. Hỏi phương trình có bao nhiêu nghiệm phức phân biệt?

A. 4

B. 3

C. 2

D. 6

=> Chọn D

Ví dụ 11 (THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam – Lần 3 - 2017): Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 3, |z_1| = 1, |z_2| = 2$. Tính $z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2$.

A. 2

B. 0

C. 8

D. 4

=> Chọn D

Ví dụ 12 (THPT Cao Nguyên – Lần 2 - 2017): Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn 2 điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2017$ và $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Tính $P = \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right|$.

A. $P = 2017$ B. $P = 1008,5$ C. $P = 2017^2$ D. $P = 6051$ **=> Chọn A**

Ví dụ 13 (Chuyên Lê Quý Đôn - 2017): Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$

B. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$

C. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$

D. $3 = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| \cdot |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2|$

=> Chọn A

Ví dụ 14 (THPT Quảng Xương 1 - 2017): Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Trong các khẳng định sau đâu là khẳng định sai?

A. $\frac{z}{z - \bar{z}} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}i$ với $b \neq 0$

B. $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

C. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

D. $\frac{\bar{z}}{z} = 1 - \frac{2b(b + ai)}{a^2 + b^2}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

=> Chọn A

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Đề thi THPTQG – 2018 – Mã đề 110). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $S = 4a + b$. Tính $S = 4a + b$.

A. $S = 4$ B. $S = 2$ C. $S = -2$ D. $S = -4$

Câu 2 (Đề thi THPTQG – 2018 – Mã đề 110). Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo?

A. 2

B. 2

C. 4

D. x

Câu 3 (Đề thi THPTQG – 2018 – Mã đề 103). Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.

A. $x = -\sqrt{2}, y = 2$

B. $x = \sqrt{2}, y = 2$

C. $x = 0, y = 2$

D. $x = \sqrt{2}, y = -2$

Câu 4 (Đề thi THPTQG – 2018 – Mã đề 103). Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3| = 5$ và $|z - 2i| = |z - 2 - 2i|$. Tính $|z|$.

- A. $|z|=17$ B. $|z|=\sqrt{17}$ C. $|z|=\sqrt{10}$ D. $|z|=10$

Câu 5 (Đề thi THPTQG – 2018 – Mã đề 103). Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

- A. Vô số B. 2 C. 0 D. 1

Câu 6 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 6 - 2018). Cho các số phức $z_1=2-3i$, $z_2=1+4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức z_1z_2 .

- A. $-14-5i$ B. $-10-5i$ C. $-10+5i$ D. $14-5i$

Câu 7 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 6 - 2018). Cho số phức $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $z^3=18+26i$. Tính $T=(z-2)^2+(4-z)^2$.

- A. 2 B. 4 C. 0 D. 1

Câu 8 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 5 - 2018). Cho z số phức thỏa mãn $z+(1-2i)\bar{z}=2-4i$. Tìm môđun của số phức z .

- A. $|z|=3$ B. $|z|=\sqrt{5}$ C. $|z|=\sqrt{3}$ D. $|z|=\sqrt{3}$

Câu 9 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 2 - 2018). Tính môđun của số phức z thỏa mãn: $3z\bar{z}+2017(z-\bar{z})=12-2018i$.

- A. $|z|=2$ B. $|z|=\sqrt{2017}$ C. $|z|=4$ D. $|z|=\sqrt{2018}$

Câu 10 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 2 - 2018). Cho hai số phức $z_1=1-2i$, $z_2=1-2i$. Tìm môđun của số phức $w=\frac{z_1^{2016}}{z_2^{2017}}$.

- A. $|w|=5$ B. $|w|=3$ C. $|w|=3$ D. $|w|=\sqrt{5}$

Câu 11 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 2 - 2018). Cho số phức $z=a+bi$ ($a,b\in\mathbb{R}$) thỏa mãn $(1+i)^2\bar{z}+4-5i=-1+6i$. Tính $S=a+b$.

- A. $S=-3$ B. $S=6$ C. $S=6$ D. $S=3$

Câu 12 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 2 - 2018). Tính môđun của số phức $z=(1-2i)[2+i+i(3-2i)]$.

- A. $|z|=4\sqrt{10}$ B. $|z|=4\sqrt{5}$ C. $|z|=2\sqrt{10}$ D. $|z|=2\sqrt{10}$

Câu 13 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 2 - 2018). Tính tổng Z của các phần thực của tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $\bar{z}=\sqrt{3}z^2$.

- A. $S=\sqrt{3}$ B. $S=\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $S=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $S=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 14 (Sở GD&ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z+4\bar{z}=7-7i$. Khi đó môđun của z bằng bao nhiêu?

A. $|z| = \sqrt{3}$

B. $|z| = \sqrt{5}$

C. $|z| = \sqrt{5}$

D. $|z| = 3$

Câu 15 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Cho hai số phức $z = 1 + 3i$, $w = 2 - i$. Tìm phần ảo của số phức $u = \bar{z} \cdot w$.

A. $5i$

B. $5i$

C. 5

D. $-7i$

Câu 16 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z|(2+i) = z - 1 + i(2z+3)$. Tính $S = a + b$.

A. $S = -1$

B. $S = 1$

C. $S = 7$

D. $S = -5$

Câu 17 (THPT Lê Lợi - Lần 3 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z(2i-3) - 8i \cdot z = -16 - 15i$. Tính $S = a - 3b$.

A. 4

B. 5

C. -5

D. -1

Câu 18 (THPT Chuyên Biên Hòa - Lần 3 - 2018). Tìm số phức liên hợp của số phức z thỏa mãn $z = (1+i)(3-2i) + \frac{1}{3+i}$.

A. $\bar{z} = \frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$

B. $\bar{z} = \frac{53}{8} - \frac{9}{8}i$

C. $\bar{z} = \frac{53}{8} - \frac{9}{8}i$

D. $\bar{z} = \frac{37}{10} - \frac{9}{10}i$

Câu 19 (Sở GD-ĐT Phú Thọ - Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $2(z+1) = 3\bar{z} + i(5-i)$. Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = 1$

B. $a + 2b = -3$

C. $a + 2b = -1$

D. $a + 2b = -1$

Câu 20 (Đề minh họa - Lần 3 - BGD&ĐT - 2018). Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2

B. 4

C. 4

D. 0

Câu 21 (THPT Kim Liên - Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $3z + 5\bar{z} = 5 - 5i$. Tính giá trị $P = \frac{a}{b}$.

A. $P = \frac{1}{4}$

B. $P = 4$

C. $P = \frac{25}{16}$

D. $P = \frac{16}{25}$

Câu 22 (THPT Đặng Thúc Hứa - 2018). Cho số phức z bất kỳ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

B. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

C. $z^2 = |z|^2$

D. $z^2 = |z|^2$

Câu 23 (THPT Đặng Thúc Hứa - 2018). Cho các số phức $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}.$$
 Tính giá trị của biểu thức $P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$.

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\sqrt{2}$

C. $P = 2$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 24 (THPT Chuyên Thái Nguyên - Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tìm phần ảo của số phức $w = (1+z)\bar{z}$.

A. -2

B. 0

C. -1

D. -i

Câu 25 (THPT Chuyên Thái Nguyên – Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn phương trình $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{z}} = i$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $3+2\sqrt{2}$ B. $3-2\sqrt{2}$ C. $3-2\sqrt{2}$

D. 4

Câu 26 (THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm – Lần 1 - 2018). Cho số phức $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{1+i}$. Tính môđun của số phức $\bar{z} + iz$ được kết quả:

A. $6\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $7\sqrt{2}$

Câu 27 (THPT TH Cao Nguyên – Lần 1 - 2018). Cho các số phức $z_1 = 3i$, $z_2 = m - 2i$, $z_3 = m - 2i$. Tập giá trị tham số m để số phức z_3 có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

A. $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (5; +\infty)$ B. $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ C. $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ D. $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$

Câu 28 (THPT Cao Nguyên – Lần 1 - 2018). Tính môđun của số phức $z = 4 - 3i$.

A. $|z| = \sqrt{7}$ B. $|z| = 7$ C. $|z| = 25$ D. $|z| = 5$

Câu 29 (THPT Chuyên Bến Tre - 2018). Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$. Tính $P = 3x + y$.

A. $P = 6$ B. $P = 6$ C. $P = 5$ D. $P = 8$

Câu 30 (Sở GD&ĐT Hà Tĩnh - 2018). Trong các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

A. $8i$

B. 4

C. -8

D. 8

Câu 31 (Chuyên KHTN – Lần 5 - 2018). Cho số phức $z = 1 + i$, môđun số phức $z_0 = \frac{2z + z^2}{z \cdot \bar{z} + 2z}$ bằng

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $1 + \sqrt{2}$

D. 1

Câu 32 (Chuyên Phan Bội Châu – Lần 3 - 2018). Tìm giá trị của số thực m sao cho số phức $z = \frac{2-i}{1+mi}$ là một số thuần ảo:

A. Không tồn tại m .B. $m = -\frac{1}{2}$ C. $m = -2$ D. $m = 2$

Câu 33 (Thanh Chương – Lần 1 - 2018). Tìm môđun của số phức $z = (2 - 3i)i + (1 + i)^2$.

A. $|z| = 1$ B. $|z| = \sqrt{5}$ C. $|z| = \sqrt{5}$ D. $|z| = 5$

Câu 34 (THPT Quốc Học Huế - Lần 1 - 2018). Số phức z thỏa $\frac{\bar{z}}{4-3i} + (2-3i) = 5-2i$. Môđun của z bằng

A. $|z| = 5\sqrt{10}$ B. $|z| = 10\sqrt{2}$ C. $|z| = 250$ D. $|z| = \sqrt{10}$

Câu 35 (THPT Chuyên Tuyên Quang – Lần 1 - 2018). Trong mặt phẳng phức, tìm điểm M biểu diễn số phức $z = \frac{i^{2017}}{3+4i}$.

- A. $M\left(\frac{4}{25}; \frac{3}{25}\right)$ B. $M\left(\frac{4}{25}; \frac{3}{25}\right)$ C. $M\left(-\frac{4}{25}; -\frac{3}{25}\right)$ D. $M\left(\frac{4}{25}; -\frac{3}{25}\right)$

Câu 36 (THPT Chuyên Tuyên Quang – Lần 1 - 2018). Tính $z = \frac{2-i}{1-i^{2017}}$.

- A. $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ B. $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ D. $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

Câu 37 (THPT Chuyên Thái Bình – Lần 4 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i) + \frac{2}{1-i} = \sqrt{14} + 2i$. Tìm môđun của số phức $w = z + 1$.

- A. $|w| = 3$ B. $|w| = \sqrt{9-2\sqrt{14}}$ C. $|w| = \sqrt{9+2\sqrt{14}}$ D. $|w| = 3\sqrt{2}$

Câu 38 (THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Lần 1 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z(2i-3) - 8i\bar{z} = -16-15i$. Tính $S = a + 3b$.

- A. $S = 4$ B. $S = 3$ C. $S = 6$ D. $S = 5$

Câu 39 (THPT Chuyên Lê Khiết – Lần 1 - 2018). Cho hai số phức $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$. Kết luận nào sau đây là sai?

- A. $\frac{z_1}{z_2} = i$ B. $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ C. $z_1 + z_2 = 2$ D. $|z_1 \cdot z_2| = 2$

Câu 40 (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Lần 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $2z + (1+i)\bar{z} = 5+3i$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = \sqrt{5}$ B. $|z| = \sqrt{3}$ C. $|z| = 3$ D. $|z| = 5$

Câu 41 (THPT Chuyên KHTN – Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là

- A. -2^{11} B. $-2^{11} + 2$ C. $-2^{11} - 2$ D. 2^{11}

Câu 42 (THPT Chuyên KHTN – Lần 1 - 2018). Cho $P(z)$ là một đa thức với hệ số thực. Nếu số phức z thỏa mãn $P(z) = 0$ thì

- A. $P(|z|) = 0$ B. $P\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ C. $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0$ D. $P(\bar{z}) = 0$

Câu 43 (Sở GD&ĐT Bắc Giang – Lần 1 - 2018). Tìm số phức z thỏa mãn hệ thức $(1+i)z + \bar{z} = 1+i$.

- A. $z = 2+i$ B. $z = 1-i$ C. $z = 2-i$ D. $z = 1+i$

Câu 44 (THPT Chuyên ĐHSPT – Lần 3 - 2018). Số phức z thỏa mãn $|z| + z = 0$. Khi đó

- A. z là số thực nhỏ hơn hoặc bằng 0. B. $|z| = 1$
C. Phần thực của z là số âm. D. z là số thuần ảo.

Câu 45 (TT Diệu Hiền - 2018). Biểu thức $P = \frac{1+i^{2017}}{2+i}$ có giá trị là

- A. $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ B. $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ C. $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$ D. $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$

Câu 46 (Sở GD&ĐT Quảng Ninh – Lần 1 - 2018). Cho số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$. Tính $z^5 + z^6 + z^7 + z^8$.

- A. 4 B. 0 C. 4i D. 2

Câu 47 (Chuyên ĐHSPT – Lần 4 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z - (1+2i)\bar{z} = 7-i$. Tìm môđun của z .

- A. $|z| = \sqrt{5}$ B. $|z| = 1$ C. $|z| = 2$ D. $|z| = 2$

Câu 48 (THPT Chuyên KHTN – Lần 1 - 2018). Cho số phức z có phần thực dương và thỏa $\frac{z}{z} = \frac{(5+\sqrt{3}i)}{z} - 1 = 0$. Khi đó

- A. $|z| = 2$ B. $|z| = 3$ C. $|z| = 4$ D. $|z| = \sqrt{7}$

Câu 49 (THPT Chuyên KHTN – Lần 1 - 2018). Giả sử số phức:

$z = -1+i-i^2+i^3-i^4+i^5-\dots-i^{99}+i^{100}-i^{101}$. Lúc đó tổng phần thực và phần ảo của z là

- A. 2 B. -1 C. 0 D. 1

Câu 50 (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Lần 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $(1-3i)z + (1+i)^2\bar{z} = 5-i$. Tính môđun của z .

- A. $|z| = \frac{\sqrt{20}}{3}$ B. $|z| = \sqrt{10}$ C. $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $|z| = \frac{\sqrt{29}}{3}$

Câu 51 (THPT Nguyễn Trãi – Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn: $(3-2i)\bar{z} - 4(1-i) = (2+i)z$. Môđun của z là

- A. $\sqrt{10}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 52 (TT Diệu Hiền - 2018). Tìm số phức z biết $|z| = 5$ và phần thực lớn hơn phần ảo một đơn vị.

- A. $z_1 = -4-3i, z_2 = 3+4i$ B. $z_1 = 4+3i, z_2 = -3-4i$
C. $z_1 = 3-4i, z_2 = 4-3i$ D. $z_1 = 4+3i, z_2 = -4-3i$

Câu 53 (Đề minh họa – BGD&ĐT – Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3+2i$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = \frac{1}{2}$ B. $P = 1$ C. $P = -1$ D. $P = -\frac{1}{2}$

Câu 54 (THPT Hùng Vương – Lần 1 - 2018). Tính i^{2009} .

- A. -1 B. 1 C. -i D. i

Câu 55 (THPT Hùng Vương – Lần 1 - 2018). Tìm dạng lượng giác của số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$.

A. $z = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

B. $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$

C. $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

D. $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2D	3C	4C	5D	6D	7C	8B	9A	10D
11D	12A	13B	14C	15A	16A	17D	18A	19C	20C
21A	22D	23D	24C	25A	26B	27D	28D	29B	30D
31D	32D	33D	34A	35B	36B	37A	38D	39B	40A
41C	42D	43D	44A	45A	46B	47A	48D	49C	50D
51A	52B	53D	54D	55B					

CHỦ ĐỀ 23 BÍ QUYẾT TÌM TẬP HỢP BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Hệ trục tọa độ thực ảo

Hệ trục thực ảo gồm có 2 trục vuông góc với nhau: Trục nằm ngang là trục thực, trục đứng dọc là trục ảo
Số phức $z = a + bi$ khi biểu diễn trên hệ trục thực ảo là điểm $M(a; b)$

Môđun của số phức $z = a + bi$ là độ lớn của vectơ $\overrightarrow{OM}$

2. Phương pháp tìm tập hợp điểm (quỹ tích)

Bài toán quỹ tích luôn đi lên từ định nghĩa. Ta luôn đặt $z = a + bi$, biểu diễn số phức theo yêu cầu đề bài, từ đó khử i và thu về một hệ thức mới:

Nếu hệ thức có dạng $Ax + By + C = 0$ thì tập hợp điểm là đường thẳng

Nếu hệ thức có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ thì tập hợp điểm là đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R

Nếu hệ thức có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì tập hợp điểm có dạng một Elip

Nếu hệ thức có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì tập hợp điểm là một Hyperbol

Nếu hệ thức có dạng $y = Ax^2 + Bx + C$ thì tập hợp điểm là một Parabol

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 (Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An – Lần 3 – Năm 2017): Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 3$

A. Đường tròn tâm $I(2; -1)$, bán kính $R = 1$.

B. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

C. Đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 3$.

D. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = 3$.

Giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Trên hệ trục tọa độ thực ảo, điểm biểu diễn số phức z là $M(x; y)$. Thế vào hệ thức điều kiện ta có: $|x + 2 + (y - 1)i| = 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$

$\Rightarrow$ Chọn D

Mở rộng

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 3$ thì tập hợp điểm M là miền trong của hình tròn $(I; R)$

Ví dụ 2 (Sở GD–ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 5 – Năm 2017): Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

A. $S = 25\pi$

B. $S = 8\pi$

C. $S = 4\pi$

D. $S = 16\pi$

Giải

Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và có điểm biểu diễn là M .

$$\text{Khi đó } 3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5 \Leftrightarrow 3 \leq |x + 1 + (y - 3)i| \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} \leq 5 \Leftrightarrow 9 \leq (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 \geq 9 (I) \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 25 (II) \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M giữa 2 đường tròn (I) và (II) (*)

Đường tròn (I) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R_1 = 3 \Rightarrow S_1 = 9\pi$

Đường tròn (II) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R_2 = 5 \Rightarrow S_2 = 25\pi$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S_2 - S_1 = 25\pi - 9\pi = 16\pi$

$\Rightarrow$ Chọn D

Phân tích

$$3^2 \leq (x+1)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow M \text{ nằm ở miền ngoài đường tròn } (I)$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 25 \Rightarrow M \text{ nằm ở miền trong đường tròn } (II)$$

$$\Rightarrow M \in (*)$$

Ví dụ 3 (Chuyên Ngoại Ngữ – Hà Nội – Lần 1 – Năm 2017): $w = z(2 + 3i) + 5 - i$ là số thuần ảo.

A. Đường tròn $x^2 + y^2 = 5$.

B. Đường thẳng $2x - 3y + 5 = 0$.

C. Đường tròn $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

D. Đường thẳng $3x + 2y - 1 = 0$.

Giải

Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Thế vào hệ thức điều kiện

$$w = (x + yi)(2 + 3i) + 5 - i = 2x + 2yi + 3xi + 3yi^2 + 5 - i$$

$$= 2a - 3b + 5 + (2b + 3a - 1)i$$

Để số phức w thuần ảo thì w có phần thực $= 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 5 = 0$

Đây là dạng phương trình đường thẳng $Ax + By + C = 0$

$\Rightarrow$ Chọn B

Ví dụ 4 (Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi – Lần 1 – Năm 2017): Cho số phức z thỏa mãn $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $20x - 16y - 47 = 0$.

B. $20x + 16y - 47 = 0$

C. $20x - 16y + 47 = 0$

D. $20x + 16y + 47 = 0$

Giải

Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Thế vào hệ thức ta có:

$$2|x - 2 + (y + 3)i| = |2i - 1 - 2(x - yi)|$$

$$\Leftrightarrow 2|x - 2 + (y + 3)i| = |-2x - 1 + (2y + 2)i|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} = \sqrt{(-2x - 1)^2 + (2y + 2)^2}$$

Bình phương 2 vế để khử căn ta được:

$$4(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9) = 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 8y + 4$$

$$\Leftrightarrow -16x + 24y + 52 = 4x + 8y + 5 \Leftrightarrow 20x - 16y - 47 = 0$$

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $20x - 16y - 47 = 0$

$\Rightarrow$ Chọn A

Ví dụ 5 (THPT Chu Văn An – Hà Nội – Lần 2 – Năm 2017) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2| + |z + 2| = 10$.

A. Đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$.

B. Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C. Đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$.

D. Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$.

Giải

Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Biến đổi hệ thức:

$$|z - 2| + |z + 2| = 10 \Leftrightarrow |x - 2 + yi| + |x + 2 + yi| = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = 10 \quad (1)$$

Vì các dạng quỹ tích (tập hợp điểm) đều không chứa căn nên ta tiến hành bình phương để khử căn từ hệ thức (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 100 + (x + 2)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow -4x = 100 + 4x - 20\sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow 100 + 8x = 20\sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow 25 + 2x = 5\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} \quad (2)$$

Bình phương 2 vế lần thứ 2 là sẽ mất hết căn

$$(2) \Leftrightarrow 625 + 100x + 4x^2 = 25(x^2 + 4x + 4 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 21x^2 + 25y^2 = 525 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là một Elip

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Mở rộng

Elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có độ dài trục lớn $2a$, độ dài trục bé $2b$ có tiêu cự $e = \frac{c}{a}$ với $c^2 = a^2 - b^2$

Ví dụ 6 (THPT Lê Lợi – Thanh Hóa – Lần 3 – Năm 2017) Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$.

A. Là đường Hyperbol $(H_2): y = -\frac{1}{x}$.

B. Là đường Hyperbol $(H_1): y = \frac{1}{x}$.

C. Là đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 4$.

D. Là đường Hyperbol $(H_1): y = \frac{1}{x}; (H_2): y = -\frac{1}{x}$.

Giải

Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Khi đó } |z^2 - \bar{z}^2| = 4 \Leftrightarrow |(x + yi)^2 - (x - yi)^2| = 4$$

$$\Leftrightarrow |4xyi| = 4 \Leftrightarrow |xyi| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + (xy)^2} = 1$$

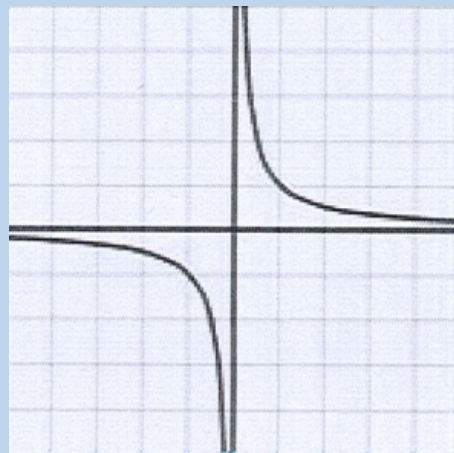
$$\Leftrightarrow |xy| = 1$$

$$\text{TH 1: } xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\text{TH 2: } xy = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z thuộc 2 đường cong $y = \pm \frac{1}{x}$

$\Rightarrow$ **Chọn D**



Phân tích

Phương trình Hyperbol đều có dạng đặc biệt là $y = \frac{m}{x}$ hơi khác so với dạng chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ trong sách giáo khoa.

Ví dụ 7 (THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương – Lần 1 – Năm 2017) Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là hình gì.

A. Một đường thẳng.

B. Một đường parabol.

C. Một đường Elip

D. Một đường tròn.

Giải

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Từ điều kiện $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$

ta có $2|x + yi - i| = |x + yi - (x - yi) + 2i|$

$\Leftrightarrow 2|x + (y - 1)i| = |2(y + 1)i| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(y + 1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(y + 1)^2}$

Bình phương 2 vế ta được: $x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là parabol có dạng $y = \frac{1}{4}x^2$

$\Rightarrow$ Chọn B

Mở rộng

Parabol có phương trình là $y = Ax^2 + Bx + C$ ($A \neq 0$) có đỉnh $I\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{\Delta}{4A}\right)$

Ví dụ 8 (THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam – Lần 3 – Năm 2017) Cho $ABCD$ là hình bình hành với A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1 - i, 2 + 3i, 3 + i$. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là D .

A. $z = 2 - 3i$

B. $z = 4 + 5i$

C. $z = 4 + 3i$

D. $z = 2 + 5i$

$\Rightarrow$ Chọn A

Ví dụ 9 (THPT TH Cao Nguyên – Lần 2 – Năm 2017) Trong mặt phẳng phức gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = (1 - i)(2 + i), z_2 = 1 + 3i, z_3 = -1 - 3i$. Tam giác ABC là

A. Một tam giác vuông (không cân)

B. Một tam giác cân (không đều, không vuông)

C. Một tam giác vuông cân

D. Một tam giác đều

$\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 10 (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 4 – Năm 2017) Cho số phức z có điểm biểu diễn là M . Biết rằng số phức $w = \frac{1}{z}$ được

biểu diễn bởi một trong bốn điểm P, Q, R, S như hình vẽ bên. Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào?

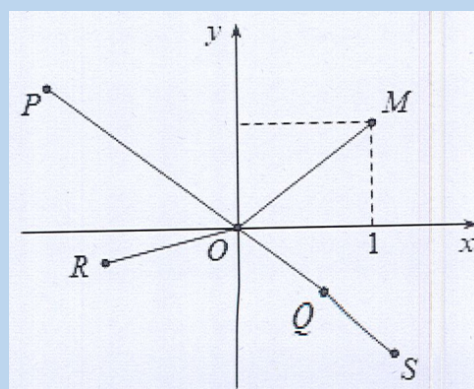
A. S

B. Q

C. P

D. R

$\Rightarrow$ Chọn B



Ví dụ 11 (THPT Đoàn Thượng – Hải Dương – Lần 1 – năm 2017) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy M là điểm biểu diễn số phức $z = (2 - i)(-1 + i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương của trục hoành với véc

tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

A. $\frac{3}{5}$

B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{\sqrt{10}}$

D. $-\frac{3}{\sqrt{10}}$

=> Chọn B

Ví dụ 12 (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình – Lần 1 – Năm 2017) Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$ và điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích tam giác OMM' (O là gốc tọa độ).

A. $\frac{15}{2}$

B. $\frac{25}{4}$

C. $\frac{25}{2}$

D. $\frac{31}{4}$

=> Chọn B

Ví dụ 13 (Sở GD & ĐT Bắc Giang – Lần 1 – Năm 2017) Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z - \bar{z}| \leq 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H .

A. π

B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{2}$

D. 6π

=> Chọn C

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Sở GD–ĐT Tp Hồ Chí Minh – cụm 5 – năm 2018). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = |z + 3i|$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z .

A. Một đường thẳng

B. Một đường tròn

C. Một hyperbol

D. Một elip

Câu 2 (Sở GD&ĐT Tp Hồ Chí Minh – 2018). Cho số phức $z = a + bi$, với a và b là hai số thực. Để điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ Oxy nằm hẳn bên trong hình tròn tâm O bán kính $R = 2$ như hình bên thì điều kiện cần và đủ của a và b là

A. $a^2 + b^2 < 2$

B. $a^2 + b^2 < 4$

C. $a + b < 2$

D. $a + b < 4$

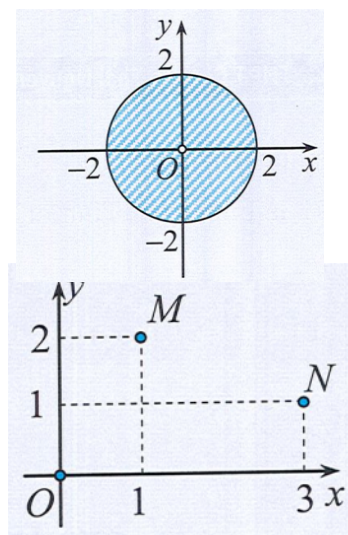
Câu 3 (THPT Chuyên Lam Sơn – Lần 3 – 2018). Cho hai điểm M, N trong mặt phẳng phức như hình vẽ, gọi P là điểm sao cho $OMNP$ là hình bình hành. Điểm P biểu thị cho số phức nào trong các số phức sau?

A. $z_4 = 4 - 3i$

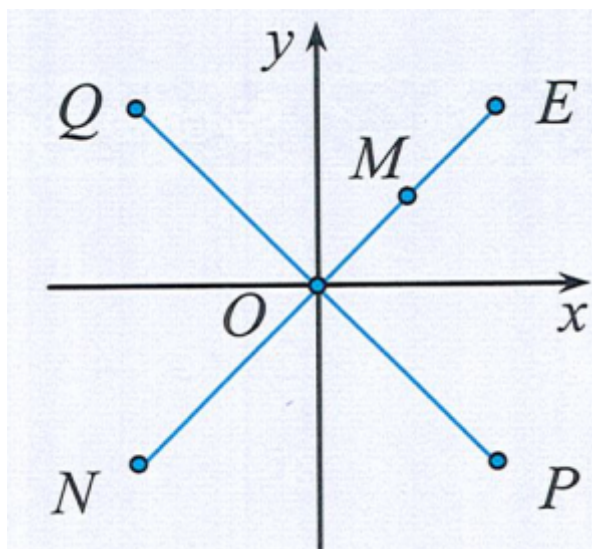
B. $z_2 = 4 + 3i$

C. $z_3 = -2 + i$

D. $z_1 = 2 - i$



Câu 4 (Sở GD&ĐT Tp Hồ Chí Minh – Cụm 8 – 2018). Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| = |i - z|$ là đường thẳng Δ có phương trình



- A. $2x + 4y + 13 = 0$ B. $4x + 2y + 3 = 0$ C. $-2x + 4y - 13 = 0$ D. $4x - 2y + 3 = 0$

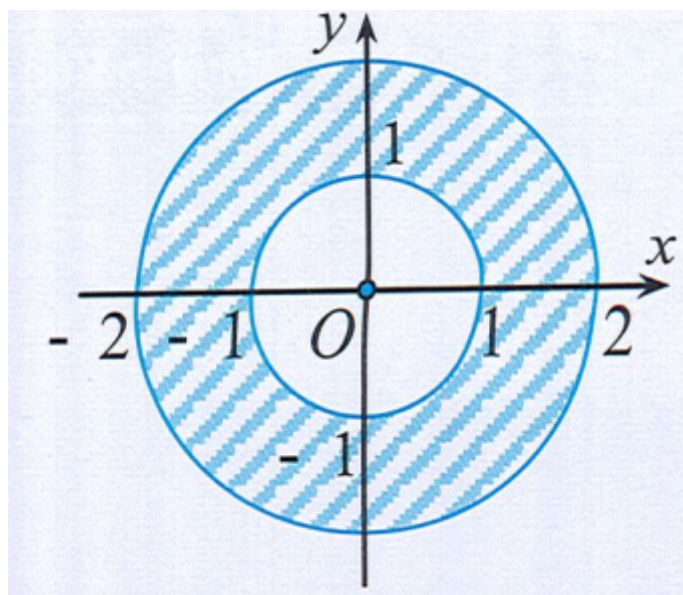
Câu 5 (Đề Minh Họa – lần 3 – BGD). Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z (như hình vẽ bên). Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?

- A. Điểm N B. Điểm Q C. Điểm E D. Điểm P

Câu 6 (Sở GD&ĐT Bình Dương – Lần 1 – 2018). Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng phức thỏa mãn điều kiện $(2 - z)(i + z)$ là số thực.

- A. Đường thẳng $x + y - 2 = 0$ B. Đường tròn tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$
C. Đường tròn $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$ D. Đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$

Câu 7 (Sở GD&ĐT Bình Dương – Lần 1 – 2018). Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa điều kiện nào của x, y sau đây để tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ kể cả hai đường tròn $(C_1), (C_2)$?



- A. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ B. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 2 \end{cases}$ C. $1 < x^2 + y^2 < 4$ D. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

Câu 8 (Sở GD–ĐT Bình Phước – 2018). Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -3 - 2i$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

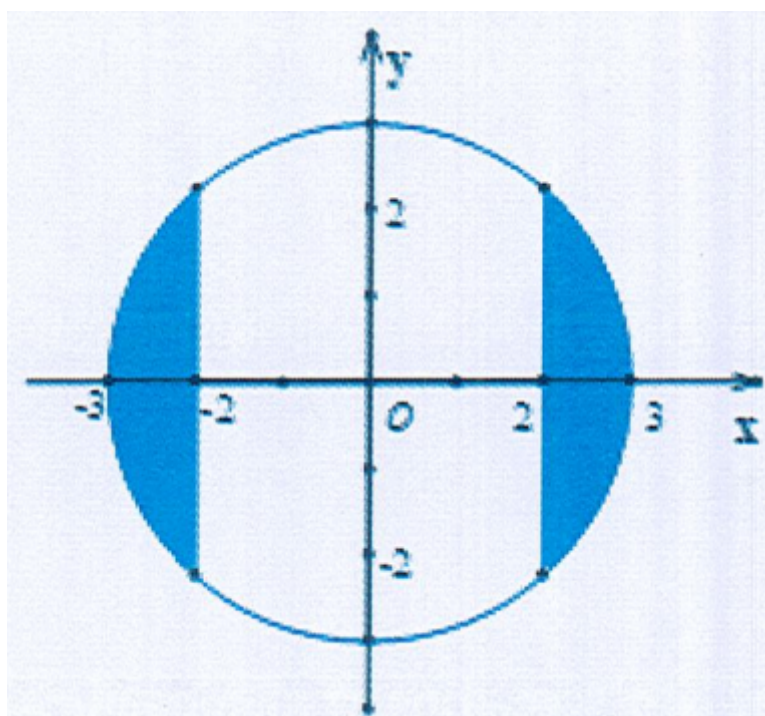
A. B và C đối xứng nhau qua trục tung

B. Trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G\left(1; \frac{2}{3}\right)$

C. A và B đối xứng nhau qua trục hoành

D. A, B, C nằm trên đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{13}$

Câu 9 (THPT Thanh Thủy – 2018). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1 + i)z|$ là



A. Đường tròn có phương trình $x^2 + (y + 1)^2 = 2$

B. Hai đường thẳng có phương trình $x = 1, x = -2$

C. Đường thẳng có phương trình $x + y - 1 = 0$

D. Đường tròn có phương trình $(x + 1)^2 + y^2 = 2$

Câu 10 (THPT Nguyễn Huệ – Lần 1 – 2018). Trong mặt phẳng phức Oxy , số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa điều kiện nào thì có điểm biểu diễn thuộc phần tô đậm trong hình vẽ (kể cả biên)?

A. $a \in [-3; 2] \cup [2; 3] \quad |z| > 3$

B. $a \in (-3; 2) \cup (2; 3) \quad |z| \leq 3$

C. $a \in [-3; 2] \cup [2; 3] \quad |z| < 3$

D. $a \in [-3; -2] \cup [2; 3] \quad |z| \leq 3$

Câu 11 (THPT Kim Liên – Lần 2 – 2018). Cho hai số thực b và c ($c > 0$). Kí hiệu A, B là hai điểm biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2bz + c = 0$ trong mặt phẳng phức. Tìm điều kiện của b và c để tam giác OAB là tam giác vuông (O là gốc tọa độ).

A. $b^2 = 2c$

B. $c = 2b^2$

C. $b = c$

D. $b^2 = c$

Câu 12 (THPT Chuyên Thái Nguyên – Lần 2 – 2018). Tập hợp các số phức $w = (1+i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z-1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

- A. 4π B. 2π C. 3π D. π

Câu 13 (THPT Chuyên Thái Nguyên – Lần 2 – 2018). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2-i)z$ là một đường tròn. Hãy tính bán kính của đường tròn đó.

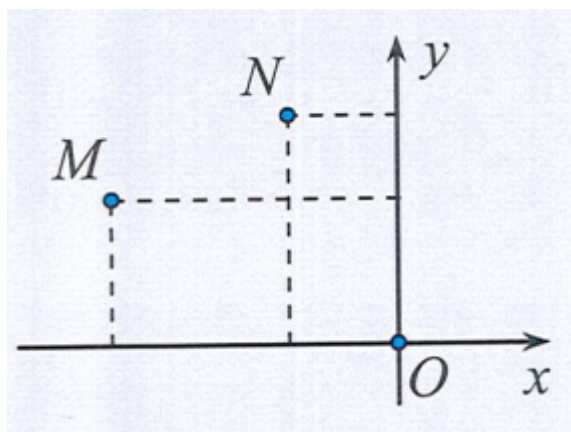
- A. $3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{7}$

Câu 14 (THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm – Lần 1 – 2018). Cho số phức z thỏa mãn $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích bằng

- A. 5π B. $\frac{5\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{2}$ D. 25π

Câu 15 (Chuyên ĐH Vinh – Lần 3 – 2018). Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 như hình vẽ bên. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $|z_1 - z_2| = MN$ B. $|z_1| = OM$
C. $|z_2| = ON$ D. $|z_1 + z_2| = MN$



Câu 16 (Chuyên ĐH Vinh – Lần 3 – 2018). Cho số phức z thay đổi luôn có $|z| = 2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1-2i)\bar{z} + 3i$ là

- A. Đường tròn $x^2 + (y-3)^2 = 20$
B. Đường tròn $x^2 + (y-3)^2 = 2\sqrt{5}$
C. Đường tròn $x^2 + (y+3)^2 = 20$
D. Đường tròn $(x-3)^2 + y^2 = 2\sqrt{5}$

Câu 17 (THPT Thanh Chương – Lần 1 – 2018). Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i+2| = |2-i|$ là đường nào trong các đường dưới đây?

- A. Đường tròn B. Đường thẳng C. Đường parabol D. Đường elip

Câu 18 (THPT Chuyên Thái Bình – Lần 4 – 2018). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z(1+i)$ là số thực là

- A. Đường tròn bán kính bằng 1
B. Trục Ox
C. Đường thẳng $y = -x$
D. Đường thẳng $y = x$

Câu 19 (THPT Chuyên Lê Khiết – Lần 1 – 2018). Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức $z_1 - 1 + 3i, z_2 = -3 - 2i, z_3 = 4 + i$ trong hệ tọa độ Oxy . Hãy chọn kết luận đúng nhất.

- A. Tam giác ABC vuông cân B. Tam giác ABC cân

C. Tam giác ABC vuông

D. Tam giác ABC đều

Câu 20 (THPT Chuyên Lê Khiết – Lần 1 – 2018). Cho số phức z thỏa mãn $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $20x - 16y - 47 = 0$

B. $20x + 16y - 47 = 0$

C. $20x - 6y + 47 = 0$

D. $20x + 16y + 47 = 0$

Câu 21 (THPT Chuyên Biên Hòa – Lần 2 – 2018). Cho 3 điểm A, B, C lần lượt biểu diễn cho các số phức z_1, z_2, z_3 . Biết $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ và $z_1 + z_2 = 0$. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

A. Tam giác ABC đều

B. Tam giác ABC vuông tại C

C. Tam giác ABC cân tại C

D. Tam giác ABC vuông cân tại C

Câu 22 (Sở GD&ĐT Nam Định – Lần 1 – 2018). Cho các số phức $z_1 = 1 + 3i, z_2 = -5 - 3i$. Tìm điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z_3 , biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ và mô đun số phức $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$

B. $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$

C. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$

D. $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$

Câu 23 (THPT Quốc Học Huế – Lần 2 – 2018). Gọi (H) là tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 1 \leq a - b$.

A. $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

D. 1

Câu 24 (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Lần 1 – 2018). Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z - \bar{z}| \leq 3$ và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H .

A. 3π

B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{2}$

D. 6π

Câu 25 (THPT Chuyên Sơn La – Lần 2 – 2018). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Số phức

$w = \frac{5}{iz}$ có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm $A, B,$

C, D ở hình bên?

A. Điểm D

B. Điểm C

C. Điểm B

D. Điểm A

Câu 26 (THPT SỐ 478 – 2018). Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 5$ trên mặt phẳng tọa độ là một

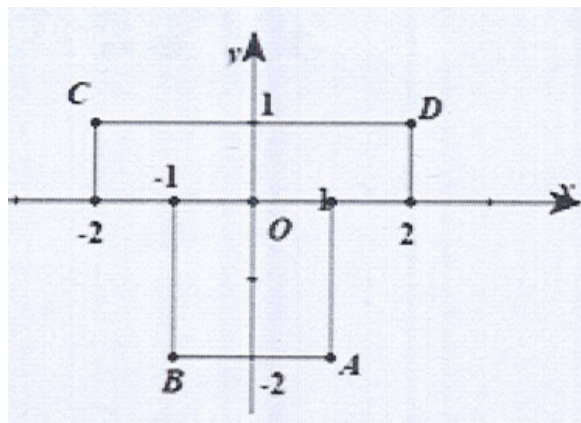
A. đường thẳng

B. đường tròn

C. elip

D. hypebol

Câu 27 (THPT Chuyên KHTN – Lần 2 – 2018). Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn phần thực của $\frac{z-1}{z-i}$ bằng 0 là đường tròn tâm I , bán kính R (trừ một điểm).



A. $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), R = \frac{1}{2}$

C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), R = \frac{1}{2}$

D. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 28 (THPT Chuyên KHTN – Lần 2 – 2018). Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i| = |z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (2-i)z+1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $-x+7y+9=0$

B. $x+7y-9=0$

C. $x+7y+9=0$

D. $x-7y+9=0$

Câu 29 (THPT Chuyên Lào Cai – Lần 1 – 2018). Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-(1+i)| = |z+2i|$ là đường nào sau đây:

A. Đường thẳng

B. Đường tròn

C. elip

D. parabol

Câu 30 (THPT Chuyên Lào Cai – Lần 1 – 2018). Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$

Câu 31 (THPT Chuyên Lào Cai – Lần 1 – 2018). Cho số phức z thỏa mãn $iz+2-i=0$. Khoảng cách từ điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ Oxy đến điểm $M(3;-4)$ là

A. $2\sqrt{5}$

B. $\sqrt{13}$

C. $2\sqrt{10}$

D. $2\sqrt{2}$

Câu 32 (Sở GD&ĐT Bắc Giang – Lần 1 – 2018). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-i| = |(1+i)z|$ là đường tròn có phương trình

A. $x^2+(y+1)^2=2$

B. $(x-1)^2+y^2=2$

C. $x^2+(y-1)^2=2$

D. $(x+1)^2+y^2=2$

Câu 33 (Sở GD&ĐT Bắc Giang – Lần 1 – 2018). Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=3-4i$ và điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z'=\frac{1+i}{2}z$.

Tính diện tích tam giác OMM' (O là gốc tọa độ).

A. $\frac{15}{2}$

B. $\frac{25}{4}$

C. $\frac{25}{2}$

D. $\frac{31}{4}$

Câu 34 (THPT Gia Lộc 2 – Hải Dương – Lần 1 – 2018). Cho số phức $z=m+(m-3)i, m \in \mathbb{R}$. Tìm m để điểm biểu diễn của số phức z nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư.

A. $m=\frac{3}{2}$

B. $m=\frac{1}{2}$

C. $m=\frac{2}{3}$

D. $m=0$

Câu 35 (TT Diệu Hiền – Cần Thơ – 2018). Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $1+i, 2+3i$. Số phức z biểu diễn bởi điểm Q sao cho $\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$ là

A. $z=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i$

B. $z=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i$

C. $z=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i$

D. $z=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i$

Câu 36 (TT Diệu Hiền – Cần Thơ – 2018). Cho hình vuông $ABCD$ có tâm H và A, B, C, D, H lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức a, b, c, d, h . Biết $a = -2 + i; h = 1 + 3i$ và số phức b có phần ảo dương. Khi đó, môđun của số phức b là

- A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{26}$ D. $\sqrt{37}$

Câu 37 (THPT Chuyên Bắc Giang – Lần 1 – 2018). Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0$, khi đó tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

- A. là tam giác đều B. là tam giác vuông
C. là tam giác cân, không đều D. là tam giác tù

Câu 38 (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 1 – 2018). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các điểm $A(4;0), B(1;4), C(1;-1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Biết rằng G là điểm biểu diễn số phức z . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $z = 3 + \frac{3}{2}i$ B. $z = 3 - \frac{3}{2}i$ C. $z = 2 - i$ D. $z = 2 + i$

Câu 39 (THPT Chuyên Tuyên Quang – Lần 3 – 2018). Trong mặt phẳng phức gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0$), M' là điểm biểu diễn cho số phức $\bar{z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M' đối xứng với M qua Oy B. M' đối xứng với M qua Ox
C. M' đối xứng với M qua O D. M' đối xứng với M qua đường thẳng $y = x$

Câu 40 (THPT Chuyên Quang Trung – Lần 3 – 2018). Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I , bán kính R . Khi đó

- A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$ B. $I(1; 2), R = \sqrt{5}$ C. $I(-1; 2), R = 5$ D. $I(1; -2), R = 5$

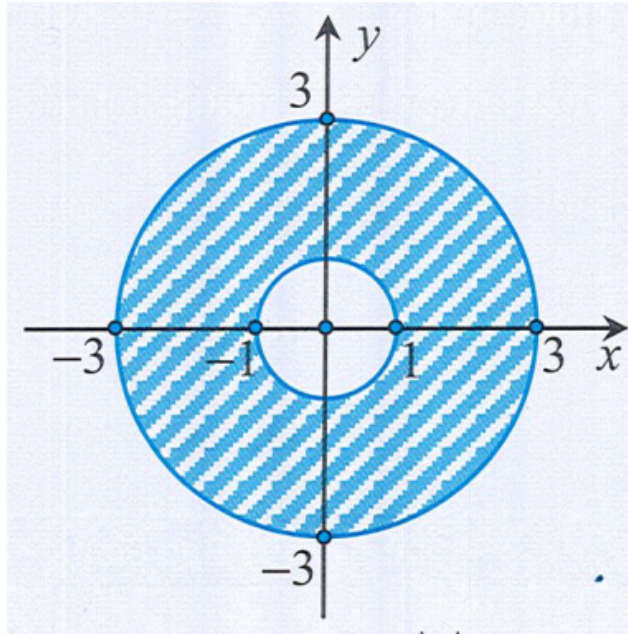
Câu 41 (TT Diệu Hiền – 2018). Tập hợp điểm biểu diễn số phức $|z - 2i| = 3$ là đường tròn tâm I . Tất cả giá trị m thỏa khoảng cách từ I đến đường thẳng $d: 3x + 4y - m = 0$ bằng $\frac{1}{5}$ là

- A. $m = 8; m = -8$ B. $m = 8; m = 9$ C. $m = -7; m = 9$ D. $m = 7; m = 9$

Câu 42 (THPT Trần Hưng Đạo – Lần 3 – 2018). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích:

- A. $S = 9\pi$ B. $S = 12\pi$ C. $S = 16\pi$ D. $S = 25\pi$

Câu 43 (THPT Lạng Giang 1 – Lần 3 – 2018). Phần gạch chéo trong hình bên là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện nào?



- A. $1 \leq |x| \leq 3$ B. $|x| \leq 3$ C. $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$ D. $|z| \geq 1$

Câu 44 (THPT Chuyên Phan Bội Châu – Lần 2 – 2018). Cho A, B, C là các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $z^3 + i = 0$. Tìm phát biểu **sai**:

- A. Tam giác ABC đều
 B. Tam giác ABC có trọng tâm $O(0;0)$
 C. Tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $O(0;0)$

D. $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 45 (THPT Chuyên Biên Hòa – Lần 1 – 2018). Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi A, B, C, D lần lượt là bốn điểm biểu diễn bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 đó. Tính giá trị của $P = OA + OB + OC + OD$, trong đó O là gốc tọa độ.

- A. $P = 4$ B. $P = 2 + \sqrt{2}$ C. $P = 2\sqrt{2}$ D. $P = 4 + 2\sqrt{2}$

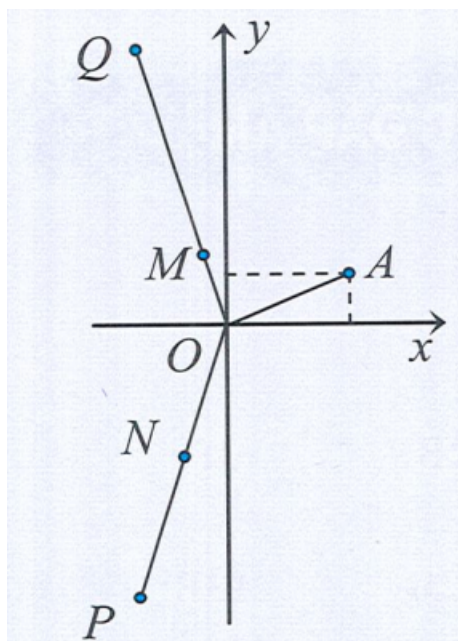
Câu 46 (THPT Phạm Văn Đồng – Lần 2 – 2018). Xét ba điểm A, B, C theo thứ tự trong mặt phẳng phức biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Biết $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, khi đó tam giác ABC có tính chất gì?

- A. Tù B. Vuông C. Cân D. Đều

Câu 47 (THPT Trung Giã – Lần 1 – 2018). Gọi M_1, M_2 là hai điểm lần lượt biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 4 = 0$. Tính số đo góc $\widehat{M_1OM_2}$.

- A. 120° B. 90° C. 60° D. 150°

Câu 48 (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 1 – 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là



- A. điểm Q B. điểm M C. điểm N D. điểm P

Câu 49 (THPT Chuyên KHTN – Lần 3 – 2018). Trên mặt phẳng phức, cho điểm A biểu diễn số phức $3 - 2i$, điểm B biểu diễn số phức $-1 + 6i$. Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó điểm M biểu diễn số phức nào sau đây?

- A. $1 - 2i$ B. $2 - 4i$ C. $2 + 4i$ D. $1 + 2i$

Câu 50 (THPT Nguyễn Bình Khiêm – Lần 1 – 2018). Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z(1 - 2i)| + |(2 - i)| = 10$ là

- A. Đường tròn $x^2 + y^2 = 5$ B. Đường tròn $x^2 + y^2 = 9$
C. Đường thẳng $x + y = 5$ D. Đường thẳng $x + y = 9$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1A	2B	3D	4B	5C	6D	7D	8B	9A	10D
11B	12B	13B	14B	15D	16A	17A	18C	19A	20A
21B	22D	23C	24C	25D	26C	27D	28C	29A	30C
31C	32A	33B	34A	35B	36D	37A	38D	39B	40C
41D	42C	43A	44D	45D	46D	47A	48D	49D	50A

CHỦ ĐỀ 24: BÍ QUYẾT TÌM MIN MAX MÔĐUN SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Một số công thức cần nhớ

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$	$ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 $	$ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 $
$ z = -z = \overline{z} $	$ z = -z = \overline{z} $	$z \cdot \overline{z} = z ^2$
$ z_1 \cdot z_2 ^2 = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2})$	$\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$	$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$
$ z_1 - z_2 \leq z_1 - z_2 \leq z_1 + z_2 $	$ z_1 - z_2 \leq z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $	$- z \leq \{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\} \leq z $

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki

Cho 2 bộ số a, b và x, y ta luôn có: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

3. Bất đẳng thức Cô si

Cho 2 số thực không âm x, y ta luôn có $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ và $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ hay $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

4. Bất đẳng thức Vec-tơ

$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a \pm x)^2 + (b \pm y)^2}$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Phương pháp đại số

Bước 1: Đặt $z = a + bi$, thay vào hệ thức điều kiện của đề bài, biến đổi, bình phương khử căn để thu được một điều kiện ràng buộc (*)

Bước 2: Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển như Cô si hay Bunhiacopxki để đánh giá biểu thức cần tìm min max dựa trên điều kiện.

Ví dụ 1: (Sở GD&ĐT Bắc Giang – Lần 1 – Năm 2017). Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |z|$.

A. $P_{\max} = 9$

B. $P_{\max} = 5$

C. $P_{\max} = 12$

D. $P_{\max} = 3$

Giải

Biến đổi hệ thức điều kiện:

$$\Leftrightarrow |a - 3 + (b + 4)i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(a - 3)^2 + (b + 4)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b + 4)^2 = 16 \quad (1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 6a - 8b - 9 \quad (2)$$

$$\text{Xét } P = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6a - 8b - 9}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số $6; -8$ và a, b ta được:

$$(6a - 8b)^2 \leq (36 + 64)(a^2 + b^2) = 100|z|^2$$

$$\text{Vậy } (2) \Leftrightarrow |z|^2 \leq \sqrt{100|z|^2} - 9 \Leftrightarrow |z|^2 - 10|z| + 9 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq |z| \leq 9$$

$\Rightarrow$ Chọn A.

Kinh nghiệm

Phép rút $a^2 + b^2 = 6a - 8b - 9$ rồi thế vào T là phép biến đổi rất quan trọng và thường xuyên sử dụng trong phương pháp dùng bất đẳng thức cổ điển nên chúng ta cần ghi nhớ.

Ví dụ 2: (THPT Chu Văn An – Hà Nội – Lần 2 – Năm 2017). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$

B. $\max T = 4$

C. $\max T = 4\sqrt{2}$

D. $\max T = 8$

Giải

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } |z - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a - 1 + bi| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + b^2} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 = 2 \text{ và } a^2 + b^2 = 2a + 1$$

$$\text{Biến đổi biểu thức } T \text{ ta có: } T = \sqrt{a^2 + (b + 1)^2} + \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 1)^2}$$

$$T^2 = \left(\sqrt{a^2 + (b + 1)^2} + \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 1)^2} \right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2a + 2b + 2} + \sqrt{-2a - 2b + 6} \right)^2 \leq (1 + 1)(2a + 2b + 2 - 2a - 2b + 6) = 16.$$

Vậy $T \leq 4$.

$\Rightarrow$ Chọn B.

Phân tích

Bất đẳng thức Cô si $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ sẽ biến tổng thành tích và có khả năng tìm được min của T điều này là trái với chiều tìm $\max T \leq \max$ của đề bài $\Rightarrow$ Không thể dùng BĐT Cô si mà phải dùng BĐT Bunhiacopxki.

Ví dụ 3: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – Năm 2017). Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|, w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 2

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Giải

Gọi $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Biến đổi hệ thức điều kiện:

$$|z+2-2i|=|z-4i| \Leftrightarrow |a+2+(b-2)i|=|a+(b-4)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}=\sqrt{a^2+(b-4)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+2)^2+(b-2)^2=a^2+(b-4)^2 \Leftrightarrow 4a+4b=8 \Leftrightarrow a+b=2$$

$$\text{Ta có: } |w|=|i(a+bi)+1|=|-b+1+ai|=\sqrt{(-b+1)^2+a^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$$

$$\text{Lại có: } a+b=2 \Leftrightarrow a+b-1=1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số 1,1 và $a,b-1$

$$(a+b-1)^2 \leq (1+1)[a^2+(b-1)^2] \Leftrightarrow 1 \leq 2|w|^2$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |w| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là $\frac{\sqrt{2}}{2}$

=> Chọn A.

Bình luận

Cái hay của bài toán này ở phép biến đổi: $\sqrt{(-b+1)^2+a^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$

Ví dụ 4: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 4 – Năm 2017). Cho số phức z không phải số thực và

$w=\frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1-i|$ là

A. $2\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. 8

=> Chọn A.

Ví dụ 5: (Thi thử Thukhoa.edu.vn). Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|=|z+2|$. Giá trị nhỏ nhất của

$P=|z+2i|+|z-5+9i|$ là

A. $\sqrt{70}$

B. $3\sqrt{10}$

C. $4\sqrt{5}$

D. $\sqrt{74}$

=> Chọn B.

Dạng 2: Phương pháp hình học

Ví dụ 6: (Đề Minh Họa – Lần 3 – Bộ GD&ĐT – Năm 2017). Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$.

B. $P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

C. $P=5\sqrt{2}+2\sqrt{73}$.

D. $P=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Giải

Đặt $z=a+bi$ ($a,b \in \mathbb{R}$) và có điểm biểu diễn là $M(a,b)$.

Khi đó $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-7)^2}=6\sqrt{2} \quad (1)$

Gọi $A(-2;1)$ và $B(4;7)$ thì $(1) \Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2}$

Mặt khác $AB=|AB|=\sqrt{(4+2)^2+(7-1)^2}=6\sqrt{2}$ tức là M thuộc đoạn thẳng AB .

Xét $|z-1+i|=\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$

Gọi $C(1;-1)$ thì $|z-1+i|=MC$

Vì M thuộc đoạn thẳng AB nên MC nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của C lên AB tức là

$$MC=d(C;AB)=\frac{5}{\sqrt{2}}\Rightarrow \min=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Để MC lớn nhất thì C phải ở biên, tức là C trùng với A hoặc B .

Tính $CA=\sqrt{13}$ và $CB=\sqrt{73}\Rightarrow \max=\sqrt{73}.$

Vậy $\min+\max=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}.$

$\Rightarrow$ Chọn B.

Bình luận

Để rút gọn được biểu thức điều kiện $\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-7)^2}=6\sqrt{2}$ là công việc cực kì phức tạp, mất thời gian. Mặt khác nó có dạng tổng độ dài của 2 đoạn thẳng nên ta ưu tiên chọn cách hình học.

Ví dụ 7: (Đề thi thử Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội). Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1|+2|z-1|$

A. $\max P=2\sqrt{5}.$ B. $\max P=2\sqrt{10}.$ C. $\max P=3\sqrt{5}.$ D. $\max P=3\sqrt{2}.$

Giải

Hình vẽ minh họa:

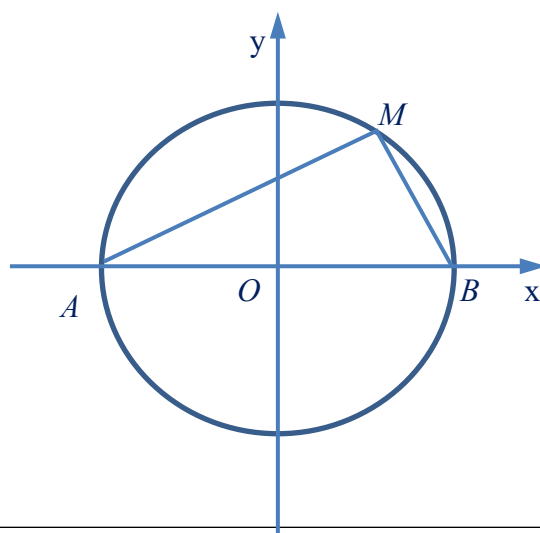
Đặt $z=x+yi(x,y\in R)$ suy ra $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có $|z|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1\rightarrow M$ thuộc đường tròn $(C):x^2+y^2=1$.

Gọi $A(-1;0), B(1;0)$ suy ra $A,B\in(C)$ và biểu thức $P=MA+2MB$.

Vì AB là đường kính của đường tròn (C)

$$\Rightarrow MA^2+MB^2=AB^2=4.$$



Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$P^2 = (MA + MB)^2 \leq (1^2 + 2^2)(MA^2 + MB^2)$$

$$\Rightarrow P^2 \leq 5.4 = 20 \Rightarrow P \leq 2\sqrt{5}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow$ Chọn A.

Kinh nghiệm

Các điểm xuất hiện trong bài ví dụ như $A(-1;0), B(1;0)$ luôn có tính chất đặc biệt nào đó, để làm được bài cực trị mô đun số phức theo cách hình học thì ta phải khám phá được tính chất này.

Ví dụ 8: (Đề thi thử THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương). Cho số phức z, w thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = |z + 5i|$ và $w = iz + 20$. Giá trị nhỏ nhất m của $|w|$ là

A. $m = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

B. $m = 7\sqrt{10}$.

C. $m = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

D. $m = 2\sqrt{10}$.

Giải

Gọi $A(1;-2), B(0;-5)$ suy ra $I\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

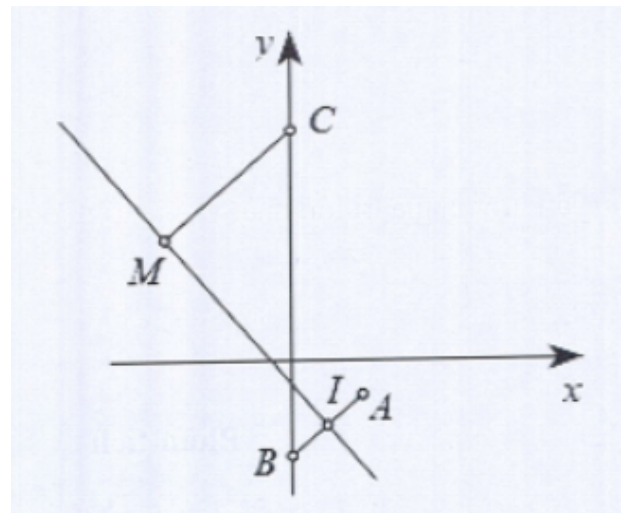
Đặt $z = a + bi$ khi đó z có điểm biểu diễn là $M(a;b)$.

Thế vào biểu thức điều kiện $|z - 1 + 2i| = |z + 5i|$

$$\Leftrightarrow |a - 1 + (b - 2)i| = |a + (b + 5)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 2)^2} = \sqrt{a^2 + (b + 5)^2}$$

$\Leftrightarrow MA = MB \Rightarrow M$ thuộc đường thẳng trung trực của AB là $(\Delta): x + 3y + 10 = 0$.



Gọi $C(0;20)$, ta có $|w| = |iz + 20| = |ai - b + 20| = \sqrt{a^2 + (-b + 20)^2} = MC$.

Để $|w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $MC \perp (\Delta)$ hay $|w|_{\min} = d(C;(\Delta))$.

Khoảng cách từ điểm $C \rightarrow (\Delta)$ là $d(C;(\Delta)) = \frac{|0 + 3.20 + 10|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = 7\sqrt{10}$.

Vậy $m = 7\sqrt{10}$.

$\Rightarrow$ Chọn B.

Phân tích

VD8 gần giống VD6 nhưng khác ở chỗ M thuộc cả đường thẳng (Δ) (không bị giới hạn trong một đoạn thẳng) nên trong trường hợp này sẽ không có max của MC .

Ví dụ 9: (Đề thử sức THPT Lần 5). Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

- A. 10 và 4. B. 5 và 4. C. 4 và 3. D. 5 và 3.

=> Chọn D.

Ví dụ 10: (Đề thi thử THPT Thăng Long – Hà Nội). Cho z là số phức thay đổi thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=4\sqrt{2}$. Trong mặt phẳng tọa độ, gọi M, N là điểm biểu diễn của z và $\bar{z}$. Tính giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN .

- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

=> Chọn D.

Dạng 3: Phương pháp dùng bất đẳng thức mô đun

Công thức thường dùng

$$|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2| \quad (1) \text{ Dấu = xảy ra khi và chỉ khi } z_1=k.z_2 \text{ với } k\geq 0$$

$$|z_1|+|z_2|\geq|z_1-z_2| \quad (2) \text{ Dấu = xảy ra khi và chỉ khi } z_1=k.z_2 \text{ với } k\leq 0$$

$$|z_1+z_2|\geq||z_1|-|z_2|| \quad (3) \text{ Dấu = xảy ra khi và chỉ khi } z_1=k.z_2 \text{ với } k\leq 0$$

$$|z_1-z_2|\geq||z_1|-|z_2|| \quad (4) \text{ Dấu = xảy ra khi và chỉ khi } z_1=k.z_2 \text{ với } k\geq 0$$

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2) \quad (5)$$

Ví dụ 11: (Sở GD-ĐT Hưng Yên – Năm 2017). Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z+2+i|$. Tính $S=M^2+m^2$

- A. $S=34$. B. $S=82$. C. $S=68$. D. $S=36$.

Giải

$$\text{Ta có: } |z-1-2i|=|z+2+i-(3+3i)|\geq||z+2+i|-|3+3i||=|P-3\sqrt{2}|$$

$$\text{Vậy } 4\geq|P-3\sqrt{2}|\Leftrightarrow -4\leq P-3\sqrt{2}\leq 4\Leftrightarrow 3\sqrt{2}-4\leq P\leq 3\sqrt{2}+4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M=3\sqrt{2}+4 \\ m=3\sqrt{2}-4 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } \Rightarrow S=M^2+m^2=(3\sqrt{2}+4)^2+(3\sqrt{2}-4)^2=68$$

=> Chọn C.

Phân tích

Việc đánh giá từ tổng $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}$ sang tích xy rõ ràng là dấu hiệu dùng bất đẳng thức Cô si $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ chứ không thể dùng bất đẳng thức Bunhiacopski được.

Ví dụ 12: (Sở GD-ĐT Hà Tĩnh – Năm 2017). Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của 2 số phức này là

- A. $8i$. B. 4, C. -8 . D. 8.

Giải

Ta có: $2 \geq ||z| - |2 + 4i|| = ||z| - 2\sqrt{5}|$

$$\Leftrightarrow -2 \leq |z| - 2\sqrt{5} \leq 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} - 2 \leq |z| \leq 2\sqrt{5} + 2$$

Giá trị lớn nhất của $|z|$ là $2\sqrt{5} + 2$, dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $z = k \cdot (2 + 4i)$

Kết hợp $2 = ||z| - 2\sqrt{5}| \Leftrightarrow 2 = k \cdot 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (k-1)\sqrt{5} = 1 \Leftrightarrow k = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow z_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)(2 + 4i)$$

Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $2\sqrt{5} - 2$, dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $z = k \cdot (2 + 4i)$

Kết hợp $2 = ||z| - 2\sqrt{5}| \Leftrightarrow -2 = k \cdot 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (1-k)\sqrt{5} = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow z_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)(2 + 4i)$$

Vậy tổng hai phần ảo của z_1, z_2 là $4\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 4\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 8$.

=> Chọn D.

Bình luận

Việc tìm dấu $=$ trong bất đẳng thức mô đun là tương đối khó khăn, đây cũng là một nhược điểm của cách dùng bất đẳng thức mô đun.

Ví dụ 13: (Đề thi thử THPT Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

- A. $\sqrt{13} + 2$. B. 4. C. 6. D. $\sqrt{13} + 1$.

=> Chọn D.

Ví dụ 14: (Đề thi thử THPT Chuyên KHTN – Lần 4). Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

- A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$. B. $P = 2\sqrt{26}$. C. $P = 4\sqrt{6}$. D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

=> Chọn B.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Sở GD&ĐT Tp Hồ Chí Minh – Cụm 6 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|=2|z|$ và $\max|z-1+2i|=a+b\sqrt{2}$. Tính $a+b$.

- A. 4. B. $4\sqrt{2}$. C. 3. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 2 (Sở GD&ĐT Tp Hồ Chí Minh – Cụm 6 - 2018). Cho các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $\sqrt{2}|z_1|=\sqrt{2}|z_2|=|z_1-z_2|=6\sqrt{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z|+|z-z_1|+|z-z_2|$.

- A. $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$. B. $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$. C. $6\sqrt{2+\sqrt{3}}$. D. $\frac{9}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Câu 3 (Sở GD&ĐT Tp Hồ Chí Minh – Cụm 1 - 2018). Cho số phức z thỏa điều kiện $|z^2+4|=|z(z+2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 4 (THPT TH Cao Nguyên – Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $\left|iz+\frac{2}{1-i}\right|+\left|iz+\frac{2}{i-1}\right|=4$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M.n$.

- A. $M.n=2$. B. $M.n=1$. C. $M.n=2\sqrt{2}$. D. $M.n=2\sqrt{3}$.

Câu 5 (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 4 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w=\frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1-i|$ là

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 8.

Câu 6 (Sở GD&ĐT Hải Dương - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z^3+3z+\bar{z}|-|z+\bar{z}|$.

- A. $\frac{15}{4}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{13}{4}$. D. 3.

Câu 7 (Sở GD&ĐT Tp Hồ Chí Minh – Cụm 7 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$ và $w=2z+1-i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất là

- A. $16+\sqrt{74}$. B. $2+\sqrt{130}$. C. $4+\sqrt{74}$. D. $4+\sqrt{130}$.

Câu 8 (Sở GD&ĐT Tp Hồ Chí Minh – Cụm 8 - 2018). Cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $3x-4y-3=0$, $|z|$ nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 9 (THPT Đông Quan – Lần 1 - 2018). Trong các số phức z thỏa mãn: $|z-1+i|=\left|\bar{z}+1-2i\right|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất là

- A. $\frac{-3}{5}-\frac{3}{10}i$. B. $\frac{-3}{5}+\frac{3}{10}i$. C. $\frac{3}{5}+\frac{3}{10}i$. D. $\frac{3}{5}-\frac{3}{10}i$.

Câu 10 (THPT Thanh Thủy – Phú Thọ - 2018). Trong mặt phẳng tọa độ, hãy tìm số phức z có mô đun nhỏ nhất, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$.

- A. $z = -1 - 2i$. B. $z = 1 - 2i$. C. $z = 1 + 2i$. D. $z = -1 + 2i$.

Câu 11 (THPT TH Cao Nguyên – Lần 1- 2018). Cho số phức thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là

- A. $4\sqrt{2} - 2$. B. $2\sqrt{2} + 1$. C. $2 + \sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2} + 1$.

Câu 12 (THPT Chuyên Bến Tre - 2018). Xét số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z - i| = |z - 1| \\ |z - 2i| = |z| \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $|z| > \sqrt{5}$. B. $|z| = \sqrt{5}$. C. $|z| = \sqrt{2}$. D. $|z| < \sqrt{2}$.

Câu 13 (Sở GD-ĐT Hà Tĩnh - 2018). Trong các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

- A. $8i$. B. 4 . C. -8 . D. 8 .

Câu 14 (THTT Số 478 - 2018). Xét số phức z thỏa mãn $2|z - 1| + 3|z - i| \leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $|z| > 2$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 15 (THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Lần 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$.

- A. $\max T = 2\sqrt{5}$. B. $\max T = 2\sqrt{10}$. C. $\max T = 3\sqrt{5}$. D. $\max T = 3\sqrt{2}$.

Câu 16 (THPT Chuyên Lam Sơn – Lần 1 - 2018). Cho số phức z , tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{-2 - 3i}{3 - 2i} z + 1 \right| = 1$.

- A. 3 . B. $\sqrt{2}$. C. 2 . D. 1 .

Câu 17 (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Lần 1 - 2018). Biết số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ có mô đun nhỏ nhất. Tính $M = a^2 + b^2$.

- A. $M = 8$. B. $M = 10$. C. $M = 16$. D. $M = 26$.

Câu 18 (THPT Chuyên Sơn La – Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có mô đun lớn nhất. Số phức z có mô đun bằng

- A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $5\sqrt{2}$.

Câu 19 (THTT Số 478 - 2018). Xét số phức z thỏa mãn $2|z - 1| + 3|z - i| \leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $|z| > 2$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 20 (THTT Số 478 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

- A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{13}$. D. 5.

Câu 21 (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Lần 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

- A. $\min|w| = \frac{3}{2}$. B. $\min|w| = 2$. C. $\min|w| = 1$. D. $\min|w| = \frac{1}{2}$.

Câu 22 (THPT Hà Huy Tập – Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z}|$ là

- A. $\sqrt{5}$. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 23 (THPT Hà Huy Tập – Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - i|$. Tìm mô đun nhỏ nhất của số phức $w = 2z + 2 - i$.

- A. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 24 (Sở GD&ĐT Quảng Ninh – Lần 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm số phức z có mô đun nhỏ nhất.

- A. $z = -1 + i$. B. $z = -2 + 2i$. C. $z = 2 + 2i$. D. $z = 3 + 2i$.

Câu 25 (Sở GD&ĐT Quảng Ninh – Lần 1 - 2018). Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$.

- A. $P = 1 - i$. B. $P = -1 - i$. C. $P = -1$. D. $P = 1 + i$.

Câu 26 (THPT Gia Lộc 2 – Lần 1 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|iz + 4 - 3i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- A. 6. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 27 (THPT Chuyên Bắc Giang – Lần 1 - 2018). Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| = \frac{3}{2}$, tìm số phức có mô đun nhỏ nhất.

- A. $z = \frac{26 - 3\sqrt{13}}{13} + \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$. B. $z = \frac{25 - 3\sqrt{13}}{13} + \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$.
C. $z = \frac{26 + 3\sqrt{13}}{13} + \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$. D. $z = \frac{26 - 3\sqrt{13}}{13} - \frac{78 - 9\sqrt{13}}{26}i$.

Câu 28 (Chuyên KHTN – Lần 4 - 2018). Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$

- A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$. B. $P = 2\sqrt{26}$. C. $P = 4\sqrt{6}$. D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Câu 29 (THPT Nguyễn Trãi – Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 2 - 2i| = 1$. Số phức $z - i$ có mô đun nhỏ nhất là

- A. $\sqrt{5} - 1$. B. $\sqrt{5} + 1$. C. $\sqrt{5} - 2$. D. $\sqrt{5} + 2$.

Câu 30 (THPT Trần Hưng Đạo – Lần 3 - 2018). Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$. Tìm số phức có mô đun nhỏ nhất.

- A. $z = 1 - 2i$. B. $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. C. $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. D. $z = -1 + 2i$.

Câu 31 (THPT Lạng Giang I – Lần 3 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Gọi M, m lần lượt có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M + m$ bằng

- A. $4 - \sqrt{7}$. B. $4 + \sqrt{7}$. C. 7. D. $4 + \sqrt{5}$.

Câu 32 (THPT Chuyên Phan Bội Châu – Lần 2 - 2018). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

- A. $\sqrt{13} + 2$. B. 4. C. 6. D. $\sqrt{13} + 1$.

Câu 33 (THPT Quang Trung – Lần 1 - 2018). Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$, số phức z có mô đun bé nhất là

- A. $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. B. $z = -1 + 2i$. C. $z = 1 - 2i$. D. $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

Câu 34 (THPT Đoàn Thượng – Lần 1 - 2018). Biết rằng số phức z thỏa mãn: $\omega = (z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i)$ là một số thực. Tìm số phức z để $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $z = 2 + 2i$. B. $z = -2 - 2i$. C. $z = -2 + 2i$. D. $z = 2 - 2i$.

Câu 35 (THPT Phạm Văn Đồng – Lần 2 - 2018). Cho số phức $z = m + (m - 3)i, (m \in \mathbb{R})$. Tìm m để $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất

- A. $m = 0$. B. $m = 3$. C. $m = \frac{3}{2}$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 36 (THPT Chuyên KHTN – Lần 3 - 2018). Trong số các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 4 + 3i| = 3$, gọi z_0 là số phức có mô đun lớn nhất. Khi đó $|z_0|$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 8.

Câu 37 (THPT Quảng Xương – Lần 8 - 2018). Trong các số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 2 + 4i|$, số phức có mô đun nhỏ nhất là

- A. $z = 3 + i$. B. $z = 5$. C. $z = \frac{5}{2}i$. D. $z = 1 + 2i$.

Câu 38 (THPT Võ Giỗ - Lần 1 - 2018). Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm số phức z có mô đun nhỏ nhất.

- A. $z = -1 + i$. B. $z = -2 + 2i$. C. $z = 2 + 2i$. D. $z = 3 + 2i$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1A	2C	3B	4C	5A	6B	7D	8B	9A	10C
11B	12C	13D	14D	15A	16C	17A	18B	19D	20C
21C	22D	23C	24C	25C	26B	27D	28B	29A	30C
31B	32D	33D	34C	35C	36D	35D	38C		

CHỦ ĐỀ 25: CASIO GIẢI NHANH CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khái niệm Môđun số phức

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) có môđun là $|z|$ và có độ lớn $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Lệnh Casio

Đăng nhập môi trường làm việc của số phức MODE 2

Nhập số ảo i ENG

Lệnh nhập số phức liên hợp SHIFT 2 2

Lệnh tìm môđun số phức SHIFT hyp

3. Phương pháp Casio tìm min, max môđun số phức

Bước 1: Đặt $z = a + bi$ biến đổi theo điều kiện tìm hệ thức điều kiện

Bước 2: Rút b (hoặc a) từ hệ thức điều kiện thế vào **biểu thức tìm min max**

Bước 3: Sử dụng MODE 7 của Casio để tìm min max

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Giải nhanh các thuộc tính số phức

Ví dụ 1: (THPT Chuyên Tuyên Quang – Lần 1 – Năm 2017) : Giải nhanh các thuộc tính số phức

Tính $z = \frac{2-i}{1-i^{2017}}$

A. $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$

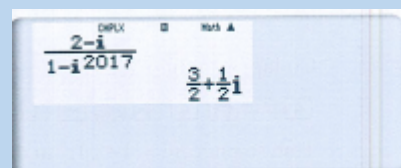
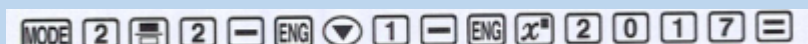
B. $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

C. $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

D. $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

Giải

Tính giá trị của biểu thức z ta nhận:



Lệnh Casio

Để đăng nhập vào môi trường làm việc của số phức ta dùng lệnh MODE 2 và số ảo i nha nhập bằng lệnh ENG

⇒ **Chọn B**

Ví dụ 2 (Sở GD & ĐT Bắc Giang – Lần 1 – Năm 2017).

Tìm số phức z thỏa mãn hệ thức $(1+i)z + \bar{z} = 1+i$

A. $z = 2+i$

B. $z = 1-i$

C. $z = 2-i$

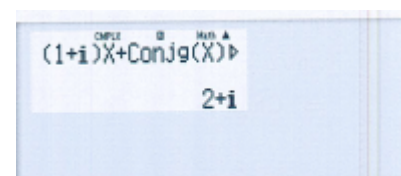
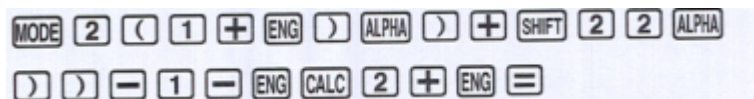
D. $z = 1+i$

Giải

Chuyển phương trình số phức về dạng vế trái bằng 0

$$\Leftrightarrow (1+i)z + \bar{z} - 1 - i = 0 \quad (1)$$

Sử dụng lệnh CALC để tính giá trị biểu thức vế trái.



Ta thấy với $z = 2+i$ thu được vế trái = $2+i$ khi đó (1)

$\Leftrightarrow 2+i=0$ (không thỏa mãn)

$\Rightarrow 2+i$ không phải là nghiệm

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Ví dụ 3 (Sở GD & ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 6 – Năm 2017)

Cho các số phức $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức $z_1 z_2$.

A. $-14-5i$.

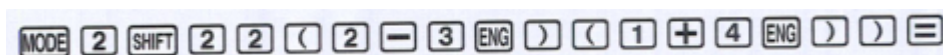
B. $-10-5i$

C. $-10+5i$

D. $14-5i$.

Giải

Tính số phức liên hợp của $z_1 z_2$ ta nhân:

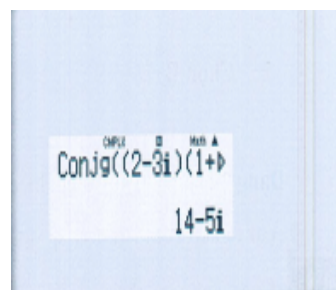


Vậy $\overline{z_1 z_2} = 14 - 5i$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Lệnh Casio

Để tìm số phức liên hợp ta dùng lệnh



Ví dụ 4 (THPT Chuyên Thái Nguyên – Lần 2 – Năm 2017)

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tìm $\text{Im}(w)$ biết $w = (1+z)\bar{z}$

A. -2

B. 0

C. -1

D. $-i$

Giải

Cô lập z ta được: $z = \frac{4+i-(2-i)^2}{3+2i}$. Tính số phức z :

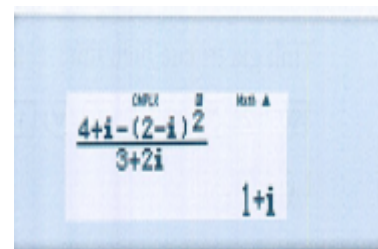


Tính số phức $w = (1+z)\bar{z}$ từ đó ta tìm được phần ảo là -1

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Thuật ngữ

Phần ảo của số phức z được kí hiệu là $\text{Im}(z)$ và phần thực của số phức z được kí hiệu là $\text{Re}(z)$.



Ví dụ 5 (VTHPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm – Quảng Ngãi – Lần 1 – Năm 2017)

Cho số phức $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{1+i}$. Tính môđun của số phức $\bar{z} + iz$ được kết quả:

A. $6\sqrt{2}$.

B. $9\sqrt{2}$.

C. $8\sqrt{2}$.

D. $7\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Ví dụ 6 (THPT Chuyên KHTN – Hà Nội – Lần 2 – Năm 2017)

Cho số phức $z = (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là

A. -2^{11}

B. $-2^{11} + 2$

C. $-2^{11} - 2$

D. 2^{11}

$\Rightarrow$ **Chọn C**

Ví dụ 7 (THPT Hùng Vương – Bình Định – Lần 1 – Năm 2017)

Tìm dạng lượng giác của số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$

A. $z = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$. B. $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$.

C. $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ D. $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

⇒ **Chọn B**

Dạng 2: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức

Ví dụ 8 (THPT Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi – Lần 1- Năm 2017)

Cho số phức z thỏa mãn $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

- A. $20x - 16y - 47 = 0$ B. $20x + 16y - 47 = 0$
C. $20x - 16y + 47 = 0$ D. $20x + 16y + 47 = 0$.

Giải

Phương trình $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$

⇔ $2|z - 2 + 3i| - |2i - 1 - 2\bar{z}| = 0$ (1)

Để xác minh A có phải đáp đúng hay không ta chọn 1 cặp số (x, y) ví dụ như

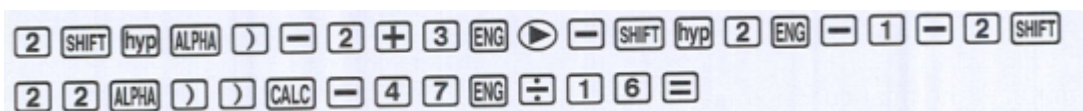
$\left(0; -\frac{47}{16} \right) \Leftrightarrow z = -\frac{47}{16}i$.

Kiểm tra đáp án A bằng lệnh CALC ta thấy $z = -\frac{47}{16}i$ đúng

⇒ Đáp án A hoặc D đúng

Bình luận:

Cách thử đáp án tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức chỉ dùng được nếu phương trình quá phức tạp ta ngại biến đổi và đáp án phải cho số xác định.



Thử kiểm tra cặp $(x; y) = \left(\frac{47}{20}; 0 \right)$ hay $z = \frac{47}{20}$ ta cũng thấy đúng mà $z = -\frac{47}{20}$ thuộc đáp án A mà không thuộc đáp án D

⇒ **Chọn A**

Dạng 3: Giải phương trình số phức

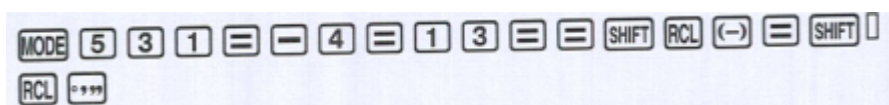
Ví dụ 9 (THPT Chuyên Ngoại ngữ - Hà Nội – Lần 1 – Năm 2017)

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Tính giá trị của $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A. $P = 26$ B. $P = 2\sqrt{13}$ C. $P = 13$ D. $P = \sqrt{26}$.

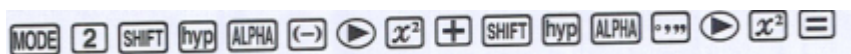
Giải :

Tính 2 nghiệm z_1, z_2 của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$ bằng lệnh MODE 5 3 rồi lưu 2 nghiệm này vào phím A và B.

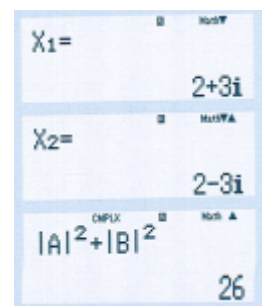


Khi đó giá trị $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 = |A|^2 + |B|^2 = 26$

⇒ Chọn A



Bình luận: Việc tính nghiệm phương trình bậc 2 bậc 3 đổi số phức tương tự phép tính nghiệm phương trình bậc 2 đổi với số thực là MODE 5 3 và MODE 5 4 nghiệm phương trình bậc 2 đổi với số



Ví dụ 10 (THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội – Lần 3 – Năm 2017)

Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z_1| = |z_2| = 1$. Khi đó $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ bằng

A. 2

B. 4

C. 1

D. 0

Giải

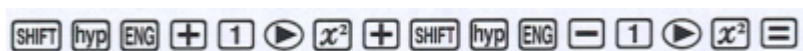
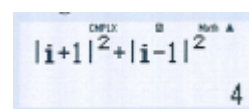
Ta có thể chọn 1 số phức z_1 thỏa mãn $|z_1| = 1$ ví dụ như $z_1 = i$

Ta có thể chọn 1 số phức z_2 thỏa mãn $|z_2| = 1$ ví dụ như $z_2 = 1$

Khi đó $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4$

⇒ Chọn B

Bình luận: Ta có thể chọn mọi số phức z_1, z_2 thỏa mãn hệ thức, kết quả đều ra đúng như nhau và đúng đáp án



Dạng 4: Tìm giá trị nhất, nhỏ nhất của mô đun số phức

Ví dụ 11 (Sở GD & ĐT TP Hồ Chí Minh – Cụm 8 – Năm 2017)

Cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $3x - 4y - 3 = 0$, $|z|$ nhỏ nhất bằng.

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

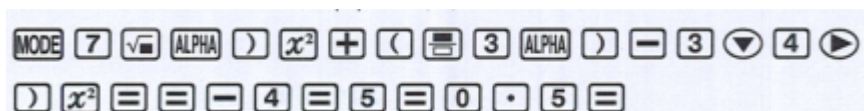
D. $\frac{2}{5}$

Giải

Gọi $z = a + bi$ khi đó $3a - 4b - 3 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3a-3}{4}$

Xét $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a-3}{4}\right)^2} = f(a)$

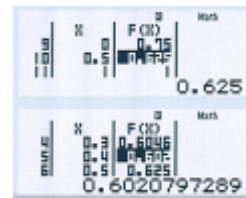
Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z| = f(a)$ bằng chức năng MODE 7



Bình luận: Để cẩn thận hơn ta có thể dò min trên đoạn nhỏ hơn là (0; 1) Step 0.1 ta thấy $\min = 0,6$ là giá trị chính xác, gần đáp án hơn

Ta thấy giá trị nhỏ nhất $\approx 0.625 = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow$ Chọn B



Ví dụ 12 (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình – Lần 1 – Năm 2017)

Biết số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ có mô đun nhỏ nhất. Tính $M = a^2 + b^2$

A. $M = 8$

B. $M = 10$

C. $M = 16$

D. $M = 26$

Giải:

Gọi $z = a + bi$ khi đó $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-4)^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-4)^2 = a^2 + (b-2)^2$$

$$\Leftrightarrow -4a - 4b + 16 = 0$$

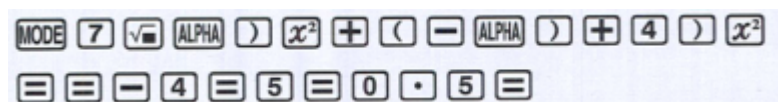
$$\Leftrightarrow b = -a + 4$$

Bí quyết: Tôi đây ta đã hiểu kỹ thuật tìm mô đun của số phức bằng casio là kỹ thuật rút b theo a rồi thế để xây dựng hàm $f(x)$ sau đó dùng MODE 7 để tìm min max



$$\text{Xét } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-a+4)^2} = f(a)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z| = f(a)$ bằng chức năng MODE 7



Ta thấy $|z|$ có giá trị nhỏ nhất $\approx 2.82 = 2\sqrt{2}$

$$\text{Mà } P = a^2 + b^2 = |z|^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

$\Rightarrow$ Chọn A

Ví dụ 13 (THPT Lạng Giang 1-Bắc Giang – Lần 3 – Năm 2017)

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $4 - \sqrt{7}$

B. $4 + \sqrt{7}$

C. 7

D. $4 + \sqrt{5}$

Giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) khi đó

$$|z - 3| + |z + 3| = 8 \Leftrightarrow |a - 3 + bi| + |a + 3 + bi| = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2 + b^2} + \sqrt{(a+3)^2 + b^2} = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2 + b^2} = 8 - \sqrt{(a+3)^2 + b^2}$$

Bí quyết: Ta nên chặn miền điều kiện bằng 1 dữ kiện thỏa mãn tính xác định trong bài toán ví dụ như $b \geq 0 \Leftrightarrow 112 - 7a^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow -4 \leq a \leq 4$

$$\Leftrightarrow (a-3)^2 + b^2 = 64 - 16\sqrt{(a+3)^2 + b^2} + (a+3)^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{(a+3)^2 + b^2} = 64 + 12a \Leftrightarrow 4\sqrt{(a+3)^2 + b^2} = 16 + 3a$$

$$\Leftrightarrow 16(a+3)^2 + 16b^2 = (16+3a)^2$$

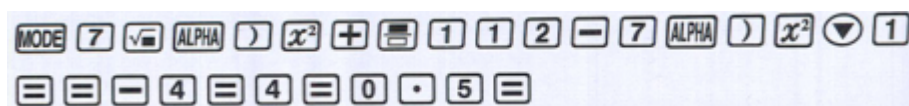
$$\Leftrightarrow 7a^2 + 16b^2 = 112$$

Ta rút được $b^2 = \frac{112-7a^2}{16}$ Vì $b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{112-7a^2}{16} \geq 0$

$$\Leftrightarrow 7a^2 \leq 112 \Leftrightarrow a^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 4$$

Mặt khác $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{112-7a^2}{16}} = f(a)$

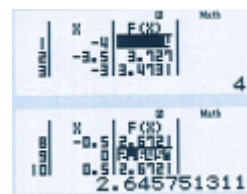
Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z| = f(a)$ bằng chức năng MODE 7



Ta thấy $|z|$ giá trị nhỏ nhất ≈ 2.6 và giá trị lớn nhất là 4 vậy

$$M + m \approx 6.6 = 4 + \sqrt{7}$$

$\Rightarrow$ **Chọn B**



CHỦ ĐỀ 26: BÍ QUYẾT TÍNH THỂ TÍCH – TỈ SỐ THỂ TÍCH – PHẦN BÙ THỂ TÍCH

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Công thức tính thể tích

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$ (một phần ba tích chiều cao và diện tích đáy)

Thể tích khối lăng trụ: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AH.S_{A'B'C'D'}$ (tích chiều cao nhân diện tích đáy)

2. Công thức tỉ số thể tích:

Cho chóp tam giác $S.ABCD$ có 3 điểm M, N, P thuộc các cạnh SA, SB, SC thì $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$

3. Tư duy tính phần bù thể tích:

Khi tính thể tích một khối đa diện phức tạp mà khó (không) xác định được chiều cao và diện tích đáy thì ta xem khối đa diện này nằm trong một khối chóp, một khối lăng trụ nào. Sau đó tính khối chóp, khối lăng trụ đó trừ đi các hình cơ bản còn lại (không thuộc khối đa diện cần tính).

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Sử dụng công thức tính thể tích khối chóp, khối lăng trụ

Ví dụ 1: (THPT Kim Liên- Năm 2018) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với đáy AD và BC . Biết $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AD thỏa mãn $HD = 3HA$, SD tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$

B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$

C. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$

D. $V = \frac{9\sqrt{3}a^3}{8}$

Giải

Gọi M là trung điểm của AD

Ta có: $BC = AM = a$ và $BC \parallel AM$ nên tứ giác $ABCM$ là hình bình hành

$$\Rightarrow CM = AB = a \Rightarrow \triangle CDM \text{ đều.}$$

Gọi K là hình chiếu của C lên AD

$$\text{Ta có: } CK = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

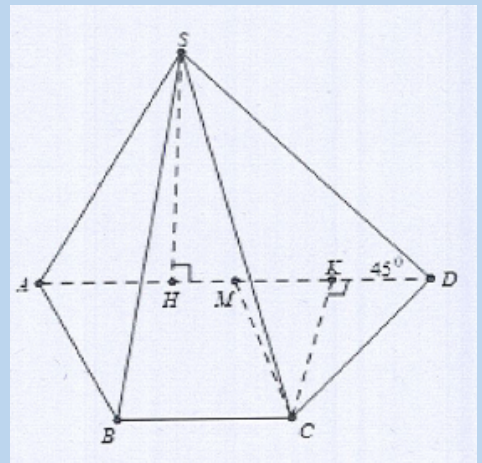
Diện tích hình thang $ABCD$ là:

$$S = \frac{(a+2a) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Xét tam giác vuông SHD có $\frac{SH}{HD} = \tan 45^\circ = 1$

$$\Rightarrow SH = HD = \frac{3}{4}AD = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là: } V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$\Rightarrow = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$$

$\Rightarrow$ Chọn C

Mở rộng

$ABCD$ còn được gọi là nửa lục giác đều cạnh a , có 2 góc ở đáy nhỏ là 120° và 2 góc ở đáy lớn là 60° . Các tam giác $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMD$ là các tam giác đều cạnh a .

Ví dụ 2 (THPT Hàn Thuyên – Năm 2017). Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Giải

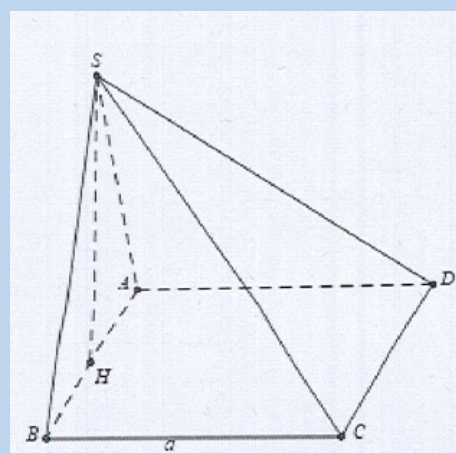
Gọi H là trung điểm của AB . Vì tam giác SAB là tam giác đều và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$

$$\text{Ta có: } SH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

$$\text{Thể tích khối chóp là: } V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

$\Rightarrow$ Chọn A



Tính chất

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) \\ d \in (P), d \perp \Delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \perp (Q) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

Ví dụ 3: (THPT Trần Phú – Năm 2017). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 45° . Thể tích tứ diện $SBCD$ bằng

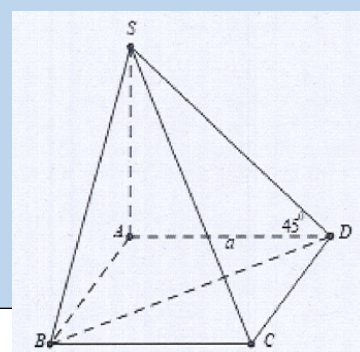
A. $\frac{a^3}{2}$

B. a^3

C. $\frac{a^3}{3}$

D. $\frac{a^3}{6}$

Giải



$$\begin{aligned} & \text{Vi } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SAD) \\ & = SA \perp (ABCD) \end{aligned}$$

Ta có: $\triangle SAD$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow SA = AD = a; S_{BCD} = \frac{a^2}{2}$$

Thể tích tứ diện $SBCE$ bằng

$$V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$$

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Tính chất

$$\begin{cases} (P), (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = d \Rightarrow d \perp (R) \end{cases}$$

Áp dụng $\Rightarrow SA \perp (ABC)$

Ví dụ 4 (THPT Lê Hồng Phong – Năm 2018). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , đường chéo $AB' = a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Giải

Ta thấy $ABB'A'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \triangle AA'B'$ vuông tại A'

$$AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B^2}$$

$$= \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - a^2} = a$$

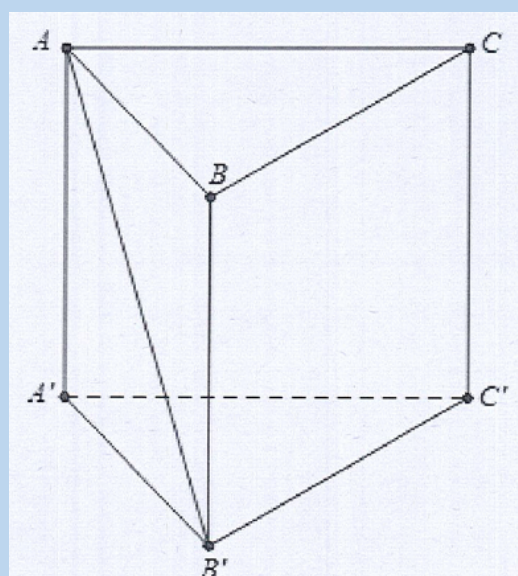
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích khối lăng trụ là:

$$V = AA' \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow$ **Chọn D**



Ghi nhớ:

Hình lăng trụ tam giác đều là lăng trụ có 2 đáy là tam giác đều $ABC.A'B'C'$, các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy

Ví dụ 5 (Chuyên Thái Bình – Năm 2018). Một tấm kẽm hình vuông ($ABCD$) có cạnh bằng 30 cm. Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:

- A. $x = 5(cm)$ B. $x = 9(cm)$ C. $x = 8(cm)$ D. $x = 10(cm)$

Giải

Thể tích khối lăng trụ được tạo thành là: $V = S_{FDH} \cdot AD$

Thể tích đạt GTLN khi S_{NAD} lớn nhất. Áp dụng công thức Hê-rông để tính diện tích tam giác ta có:

$$S_{NAD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15(15-x)(15-x)(15-(30-2x))}$$

$$\text{Hay } S = \sqrt{15(15-x)^2(2x-15)}$$

Xét hàm số

$$f(x) = (15-x)^2(2x-15) = (15-x)(15-x)(2x-15)$$

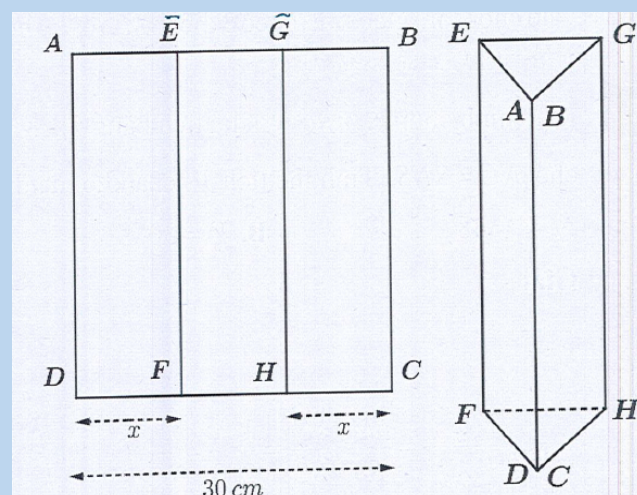
$$\leq \frac{(15-x+15-x+2x-15)^2}{27}$$

$$(\text{Áp dụng BĐT } abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27} \Leftrightarrow f(x) \leq 125$$

$\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra

$$15-x = 2x-15 \Leftrightarrow x = 10(cm)$$

$\Rightarrow$ **Chọn D**



Bình luận

Ngoài cách áp dụng bất đẳng thức Cô si dạng biến đổi tổng thành tích ta có thể sử dụng chức năng CALC của máy tính để tìm giá trị $f(x)$ và nhận thấy $f(max) = f(10)$

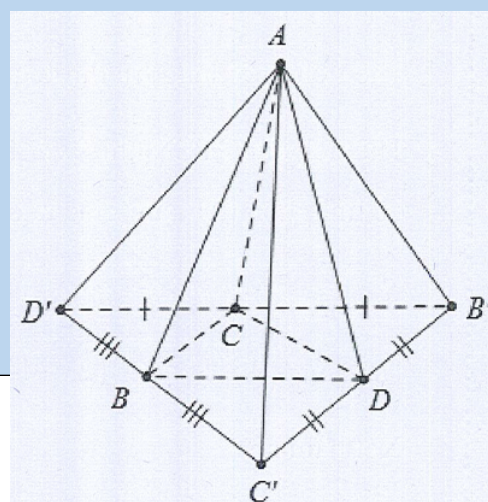
Ví dụ 6: (THPT Lê Quý Đôn – Năm 2018). Cho tứ diện có $ABCD$ có $AD = BC = \sqrt{6}(cm)$; $AC = BD = \sqrt{7}(cm)$ và $AB = CD = 3(cm)$. Thể tích khối tứ diện là.

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{2}(cm^2)$ B. $\frac{2\sqrt{10}}{3}(cm^2)$
C. $\frac{\sqrt{10}}{2}(cm^2)$ D. $\frac{\sqrt{10}}{3}(cm^2)$

Giải

Dựng hình chóp $A.B'C'D'$ sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm của $C'D'; B'D'; B'C'$

Khi đó $AC = BD = \frac{1}{2} B'D'$ suy ra tam giác $AB'D'$ vuông tại A hay $AB' \perp AD'$



Tương tự suy ra AB' ; AC' ; AD' đôi một vuông góc.

Ta có: $AB' = b$; $AC' = c$; $AD' = d$ thì

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = B'C'^2 = 4AD'^2 \\ c^2 + d^2 = C'D'^2 = 4AB'^2 \\ b^2 + d^2 = 4AC'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2\sqrt{2} \\ c = 4 \\ d = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } V_{A.BCD} = \frac{1}{4} V_{A.B'C'D'} = \frac{1}{24} . AB' . AC' . AD'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{24} bcd = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Tổng quát

Cho tứ diện có $AD = BC = a$ (cm); $AC = BD = b$ (cm) và $AB = CD = c$ (cm).

$$\text{Khi đó } V = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}$$

Bình luận

Phương pháp tính tỉ số thể tích được sử dụng hiệu quả khi tính thể tích của hình chóp $SA'B'C'$ khó dựng chiều cao hoặc khó tính diện tích đáy.

Dạng 2: Tỉ số thể tích

Cho hình chóp $S.ABC$ có 3 điểm M, N, P thuộc 3 cạnh SA, SB, SC thì ta có công thức

$$\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$$

Ví dụ 7: (THPT Lý Thái Tổ – Năm 2018). Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có thể tích bằng 72. Gọi M là trung điểm của SA và N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $NC = 2NS$. Tính thể tích V của khối đa diện $MNABC$

A. $V = 48$

B. $V = 30$

C. $V = 24$

D. $V = 60$

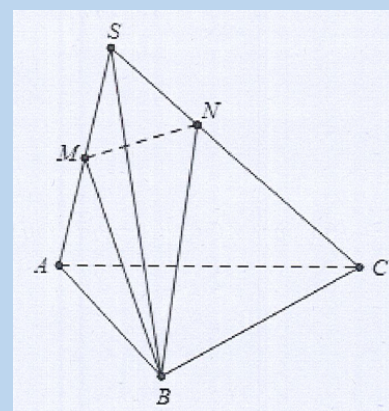
Giải

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{6} . 72 = 12$$

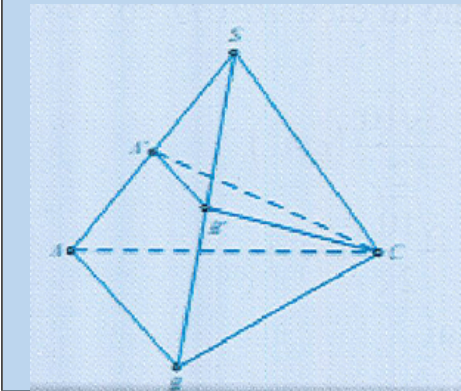
$$\Rightarrow V_{MNABC} = 72 - 12 = 60$$

$\Rightarrow$ **Chọn D**



Bình luận

Phương pháp tỉ số thể tích được sử dụng hiệu quả khi tính thể tích của hình chóp $SA'B'C'$ khó dựng chiều cao hoặc khó tính diện tích đáy.



Ví dụ 8: (THPT Thanh Miện – Năm 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$ biết $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Một mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với SC tại H , cắt SB tại K . Tính thể tích khối chóp $S.AHK$ theo a .

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{30}$

B. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{60}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{60}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$

Giải

Ta có: $AC = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$

$SB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, $SK = \frac{SA^2}{SB}$

$\Rightarrow \frac{SK}{SB} = \left(\frac{SA}{SB}\right)^2 = \left(\frac{a}{a\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Tương tự có:

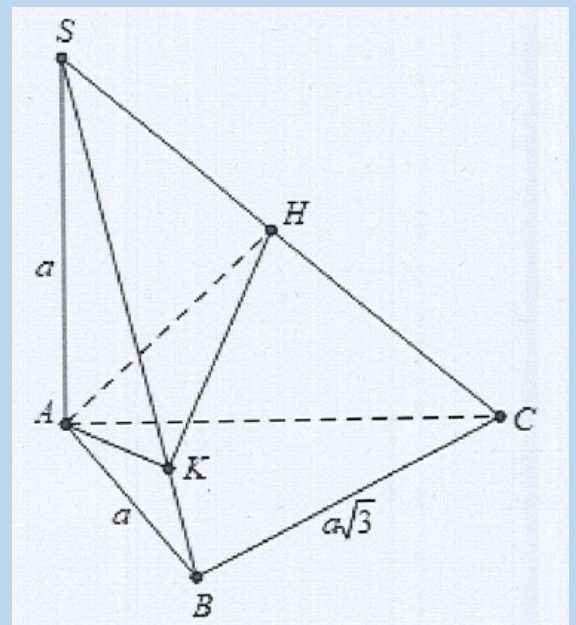
$SC = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$

$\frac{SH}{SC} = \left(\frac{SA}{SC}\right)^2 = \left(\frac{a}{a\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$

$\frac{V_{S.AKH}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SC} \cdot \frac{SK}{SB} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow V_{S.AKH} = \frac{V_{S.ABC}}{10} = \frac{\frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3}}{10} = \frac{a^3\sqrt{3}}{60}$

$\Rightarrow$ Chọn C



Bình luận

Đây là một bài toán quen thuộc, dựa nhiều vào kinh nghiệm để dựng được đường vuông góc thứ 2 là AK

(ngoài AH là đường vuông góc thứ nhất). $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$$\Rightarrow BC \perp AK$$

Lại có $AK \perp SB \Rightarrow AK \perp (SBC)$

$$\Rightarrow AK \perp SC$$

Ví dụ 9: (Chuyên Lê Quý Đôn – Năm 2017). Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông cạnh a , góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC và chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện có chứa điểm S và V_2 thể tích của khối đa diện còn lại. Tìm tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

A. 1.

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{4}{5}$

Giải

Vì $SC \perp (AMNP) \Rightarrow SC \perp AM$. $DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp MA$

$$\Rightarrow AM \perp (SDC) \Rightarrow AM \perp SD$$

ΔSAC vuông cân tại

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có: } SA^2 = SM \cdot SD \Rightarrow \frac{SM}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$$

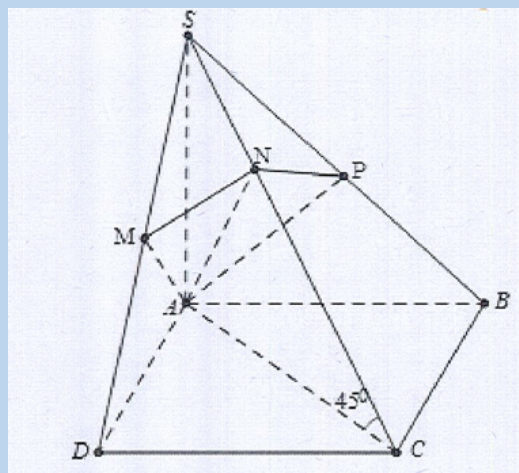
$$SA^2 = SN \cdot SC \Leftrightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{2a^2}{4a^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}$$

Do tính chất đối xứng

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{S.AMNP}}{V_{ABCD.MNP}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ **Chọn C**



Chú ý

Công thức tính tỉ số thể tích chỉ có thể áp dụng cho tam giác nên ta không thể tính $\frac{V_{SAMNP}}{V_{SADCB}}$ được mà phải chia thành 2 tỉ số chóp tam giác như trên.

Ví dụ 10: (THPT Lương Thế Vinh – Năm 2017). Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, MC . Thể tích khối chóp $N.ABCD$ là

A. $\frac{V}{6}$

B. $\frac{V}{4}$

C. $\frac{V}{2}$

D. $\frac{V}{3}$

Giải

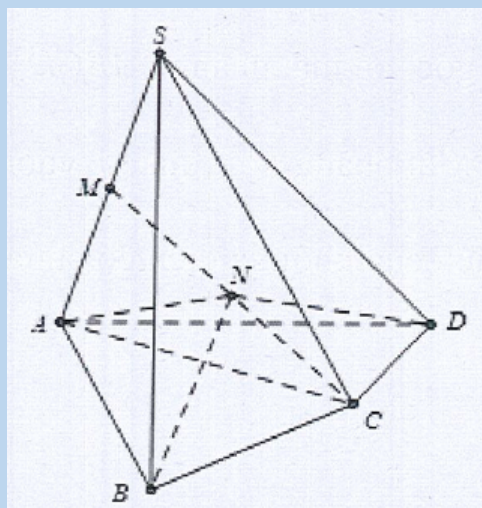
Vì $NC = NM$ mà $MA = MS$ nên

$$\begin{aligned} d(N; (ABCD)) &= \frac{1}{2} d(M; (ABCD)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d(S; (ABCD)) = \frac{1}{4} d(S; (ABCD)) \end{aligned}$$

Thể tích khối chóp $N.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} d(N; (ABCD)) \cdot S_{ABCD}$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} d(S; (ABCD)) \cdot S_{ABCD} = \frac{V}{4}$$

$\Rightarrow$ Chọn B



Bình luận

Ngoài việc dùng công thức tỉ số thể tích ta có thể thực hiện các phép so sánh khoảng cách chiều cao để tìm tỉ số thể tích.

Ví dụ 11: (THPT Trần Hưng Đạo– Năm 2018). Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' , N là điểm trên cạnh CC' sao cho $CN = 3NC'$. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 như hình vẽ.

Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$

D. $\frac{V_1}{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$

Giải

Ta có:

$$V_2 = \frac{5}{8} BB' \cdot d(BB'; CC')$$

$$\text{Do đó } V_2 = \frac{5}{8} V_{A.BCC'B'} = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} V$$

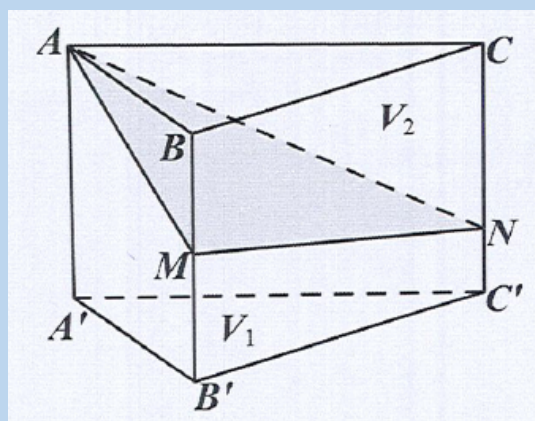
$$(\text{với } V = V_{ABC.A'B'C'}) = \frac{5}{12} V$$

$$\Rightarrow \text{Suy ra } V_1 = \frac{7}{12} V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$$

$\Rightarrow$ Chọn D

Công thức tính nhanh

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A'A + B'M + C'N}{AA' + MB + NC} = \frac{(1 + 0,5 + 0,25) AA'}{(0 + 0,5 + 0,75) AA'} = \frac{7}{5}$$



Công thức tính nhanh

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A'A + B'M + C'N}{AA + MB + NC}$$

Ví dụ 12 (THPT Trần Phú– Năm 2017). Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $AB = a$, $AC = 2a$, $AD = 3a$ thể tích khối đa diện đó bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{2}$

B. $3\sqrt{2}a^3$

C. $\sqrt{2}a^3$

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$

Giải

Trên AC lấy E , trên AD lấy F sao cho $AE = AF = a$. Khi đó $ABEF$ là tứ diện đều cạnh a

Thể tích khối tứ diện đều $ABEF$ là: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Gọi V là thể tích khối tứ diện $ABCD$

Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AF}{AD} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V = 6V_1 = 6 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ Chọn D

Dạng 3: Phần bù thể tích khối chóp, khối lăng trụ phức tạp

Ví dụ 13: (Chuyên Thái Bình– Năm 2018). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích là V . Tính thể tích của tứ diện $ACB'D'$ theo V

A. $\frac{V}{6}$

B. $\frac{V}{4}$

C. $\frac{V}{5}$

D. $\frac{V}{3}$

Giải

Khối chóp $ACB'D'$ nằm lũng lờ trong hình hộp nên việc xác định đâu là chiều cao, đâu là diện tích đáy rất phức tạp.

Để đơn giản hóa việc này thì ta sẽ dùng phương pháp phần bù, ta sẽ tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ to ở bên ngoài trừ đi các khối chóp xung quanh để tìm thể tích khối chóp $ACB'D'$.

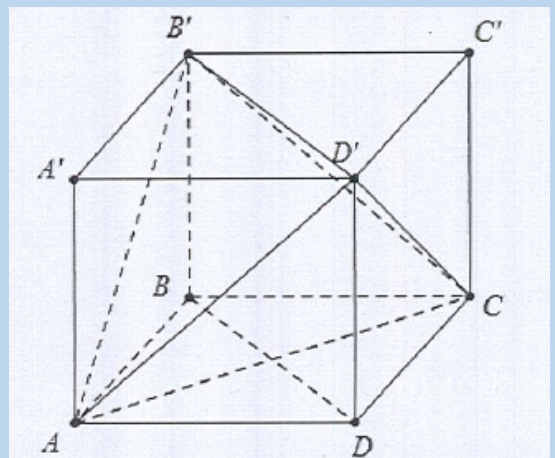
Ta thấy $V_{ACB'D'} = V - V_{A'.AB'D'} - V_{B.B'AC} - V_{D.ACD'} - V_{C'.A'D'C}$

Để dễ dàng tính thể tích ta sẽ tiến hành chuẩn hóa, coi hình hộp là hình lập phương cạnh a khi đó: $V = a^3$

Thể tích các khối chóp xung quanh đều bằng $\frac{a^3}{6} = \frac{V}{6}$

$V_{ACB'D'} = V - 4 \cdot \frac{V}{6} = \frac{V}{3}$

$\Rightarrow$ Chọn D



Phân tích

Việc chuẩn hóa dựa trên nền tảng tính chất "nếu tỉ số thể tích đúng thì nó đúng với mọi hình hộp" mà hình lập phương là hình hộp đặc biệt nên tỉ số thể tích cũng đúng với hình lập phương.

Ví dụ 14: (THPT Yên Lạc – Năm 2017). Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ và M là trung điểm của cạnh AB . Mặt phẳng $(B'C'M)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỷ số thể tích của hai phần đó

A. $\frac{7}{5}$

B. $\frac{6}{5}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{3}{8}$

Giải

Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại N khi đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng $(B'C'M)$ và khối chóp là tứ giác $B'C'NM$. Khi đó thiết diện chia khối lăng trụ thành hai phần là $BCNMB'C'$ và $AMNA'B'C'$

Gọi S là giao điểm của $C'N$ với AA'

$$\text{Ta có } \frac{V_{SAMN}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SM}{SB'} \cdot \frac{SN}{SC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow V_{SAMN} = \frac{1}{8} V_{SA'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{AMNA'B'C'} = \frac{7}{8} V_{SA'B'C'} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA' \cdot S_{A'B'C'}$$

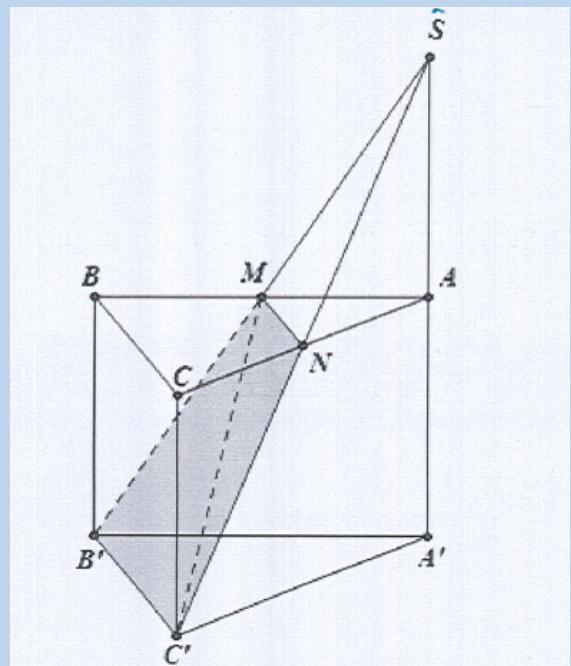
$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2AA' \cdot S_{A'B'C'}$$

$$= \frac{7}{12} \cdot AA' \cdot S_{A'B'C'} = \frac{7}{12} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{BCNMB'C'} = \frac{5}{12} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Rightarrow \text{Do đó tỷ số thể tích của hai phần là } \frac{7}{12} : \frac{5}{12} = \frac{7}{5}$$

$\Rightarrow$ Chọn A



Tính chất

3 đường thẳng BM , CN , AA' là 3 giao tuyến của 3 mặt phẳng $(B'C'M)$, $(A'ACC')$, $(A'ABB')$ nên chúng đồng quy tại S .

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Bắc Ninh - 2018). Tính thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng 2.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D. $2\sqrt{2}$

Câu 2 (Chuyên Bắc Ninh - 2018). Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi M , N , P , Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC , ABD , ACD , BCD . Tính theo V thể tích của khối tứ diện $MNPQ$

A. $\frac{V}{27}$

B. $\frac{4V}{27}$

C. $\frac{2V}{81}$

D. $\frac{V}{9}$

Câu 3 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), đáy (ABCD) là hình thang vuông tại A và B có $AB = a$, $BC = a$. Biết $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối S.BCD theo a.

A. $2\sqrt{3}a^3$

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$

Câu 4 (THPT Thanh Miện - 2018). Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$, $SA = SB = a$, $SC = 3a$. Tính thể tích của khối chóp S.ABC

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Câu 5 (THPT Thanh Miện - 2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành và có thể tích bằng 1. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện SEBD.

A. $V = \frac{2}{3}$

B. $V = \frac{1}{6}$

C. $V = \frac{1}{3}$

D. $V = \frac{4}{3}$

Câu 6 (THPT Thanh Miện - 2018). Tính thể tích của khối lập phương ABCD.A'B'C'D' biết độ dài đoạn thẳng $AC = 2a$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

B. $2a^3\sqrt{2}$

C. a^3

D. $\frac{a^3}{3}$

Câu 7 (THPT C- Nghĩa Hưng - 2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối chóp S.ABCD.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

D. $a^3\sqrt{6}$

Câu 8 (THPT C- Nghĩa Hưng - 2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = 2a$, $AD = a$. Hai mặt bên SAB và SAD cùng vuông góc với đáy $SC = a\sqrt{14}$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.

A. $V = 6a^3$

B. $V = 3a^3$

C. $V = 2a^3$

D. $V = a^3$

Câu 9 (THPT C- Nghĩa Hưng - 2018). Hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều có $AB = BC = CA = 2a$; $SA \perp (ABC)$, và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích hình chóp S.ABC bằng:

A. a^3

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

C. $\frac{a^3}{4}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 10 (THPT C- Nghĩa Hưng - 2018). Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy có độ dài a. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B'; C'; D' cho $SB' = 2BB'$. Tỉ số giữa thể tích hình chóp S.AB'C'D' và thể tích hình chóp S.ABCD bằng

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{4}{27}$

Câu 11 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Câu 12 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Cho hình tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = 4\sqrt{7}a^3$

B. $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{9}$

C. $V = \frac{4a^3}{3}$

D. $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{3}$

Câu 13 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$, $DN = 3ND'$ và $CP = 2PC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng

A. $\frac{7385}{18}$

B. $\frac{5275}{12}$

C. $\frac{8440}{9}$

D. $\frac{5275}{6}$

Câu 14 (THPT Thạch Thành 1 - 2018). Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh đáy bằng $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp biết tam giác SAB vuông.

A. $9a^3$

B. $\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{9a^3}{2}$

D. $9a^3\sqrt{3}$

Câu 15 (THPT Lý Thái Tổ - 2018). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' . Tính tỉ số $\frac{V_{MNC'ABC}}{V_{MNA'B'C'}}$.

A. 2

B. 1,5

C. 2,5

D. 3

Câu 16 (THPT Lý Thái Tổ - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 72. Gọi M là trung điểm của SA và N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $NC = 2NS$. Tính thể tích V của khối đa diện $MNABC$.

A. $V = 48$

B. $V = 30$

C. $V = 24$

D. $V = 60$

Câu 17 (THPT Lý Thái Tổ - 2018). Tính thể tích V của hình lập phương có độ dài đường chéo bằng 6.

A. $V = 24\sqrt{3}$

B. $V = 8\sqrt{3}$

C. $V = 4\sqrt{3}$

D. $V = 12\sqrt{3}$

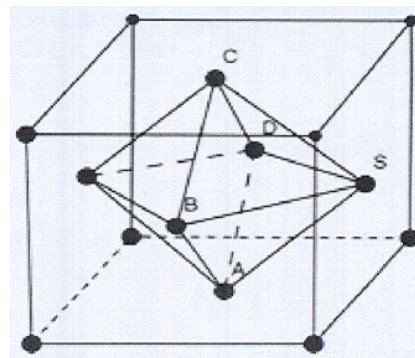
Câu 18 (THPT Yên Lạc 2 - 2018). Người ta gọt một khối lập phương gỗ để lấy khối tám mặt đều nội tiếp nó (tức là khối có các đỉnh là các tâm của các mặt khối lập phương). Biết các cạnh của khối lập phương bằng a . Hãy tính thể tích của khối tám mặt đều đó:

A. $\frac{a^3}{4}$

B. $\frac{a^3}{6}$

C. $\frac{a^3}{12}$

D. $\frac{a^3}{8}$



Câu 19 (THPT Phạm Công Bình - 2018). Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của hình lăng trụ đã cho

A. $h = \frac{a}{3}$

B. $h = a$

C. $h = 9a$

D. $h = 3a$

Câu 20 (THPT Phạm Công Bình - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

- A. $V = a^3$ B. $V = \frac{a^3}{2}$ C. $V = \frac{3a^3}{2}$ D. $V = 3a^3$

Câu 21 (THPT Sơn Tây - 2018). Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V , thể tích của khối đa diện có đỉnh là trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng V' . Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

- A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{8}$ C. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$ D. $\frac{V'}{V} = \frac{3}{4}$

Câu 22 (THPT Nguyễn Tất Thành - 2018). Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $AB = 5, BC = 6, CA = 7$. Thể tích V của tứ diện $OABC$ là

- A. $V = \sqrt{94}$ B. $V = \sqrt{97}$ C. $V = \sqrt{93}$ D. $V = \sqrt{95}$

Câu 23 (THPT Nguyễn Tất Thành - 2018). Một hình chóp tam giác có đường cao bằng 100cm và các cạnh đáy bằng 20cm, 21cm, 29cm. Thể tích khối chóp đó bằng

- A. $7000cm^3$ B. $6213cm^3$ C. $6000cm^3$ D. $7000\sqrt{2}cm^3$

Câu 24 (THPT Nguyễn Tất Thành - 2018). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 3, AD = 4, AA' = 5$, thể tích lớn nhất của hình hộp trên là

- A. 20 B. 60 C. 80 D. 15

Câu 25 (THPT Lê Hồng Phong - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

Câu 26 (THPT Lê Hồng Phong - 2018). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , đường chéo $AB' = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 27 (THPT Lê Hồng Phong - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B, AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$.

- A. $V_{S.ACD} = \frac{a^3}{3}$ B. $V_{S.ACD} = \frac{a^3}{2}$ C. $V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 28 (THPT Bình Xuyên - 2018). Cho khối chóp $S.ABCD$ có đường cao SA và đáy $ABCD$ là hình thoi. Thể tích khối chóp đã cho được tính theo công thức nào sau đây?

- A. $\frac{1}{3}SA.AB^2$ B. $\frac{1}{3}SA.AC.BD$ C. $\frac{1}{6}SA.AC.BD$ D. $\frac{1}{2}SA.AB^2$

Câu 29 (THPT Bình Xuyên - 2018). Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $24a^3$. Tính thể tích V của khối chóp $A'.ABCD$?

A. $V = 2a^3$

B. $V = 12a^3$

C. $V = 4a^3$

D. $V = 8a^3$

Câu 30 (THPT C Bình Lục - 2018). Cho khối bát diện đều cạnh a . Tính thể tích V của khối bát diện đều đó

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 31 (THPT C Bình Lục - 2018). Tính thể tích V lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $A'C = a\sqrt{3}$

A. $V = 3\sqrt{3}a^3$

B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$

C. $V = \frac{a^3}{3}$

D. $V = a^3$

Câu 32 (THPT C Bình Lục - 2018). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (BDC') chia khối lập phương thành hai phần. Tính tỉ lệ thể tích phần nhỏ so với phần lớn.

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

Câu 33 (THPT Nam Trực - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , biết $SA = SB$, $SC = SD$, $(SAB) \perp (SCD)$. Tổng diện tích hai tam giác SAB , SCD bằng $\frac{7a^2}{10}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{4a^3}{25}$

B. $\frac{4a^3}{15}$

C. $\frac{a^3}{5}$

D. $\frac{a^3}{15}$

Câu 34 (THPT Nam Trực - 2018). Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích $9\sqrt{3}cm^3$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các mặt của khối tứ diện $ABCD$. Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}cm^3$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}cm^3$

C. $3\sqrt{3}cm^3$

D. $\sqrt{3}cm^3$

Câu 35 (THPT Việt Trì - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác vuông SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4a^3}{3}$. Khi đó, độ dài SC bằng

A. $3a$

B. $a\sqrt{6}$

C. $2a$

D. $6a$

Câu 36 (THPT Việt Trì - 2018). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, SM . Mặt phẳng (ABN) cắt SC tại E . Gọi V_2 là thể tích của khối chóp $S.ABE$ và V_1 là thể tích của khối chóp $S.ABC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_2 = \frac{1}{8}V_1$

B. $V_2 = \frac{1}{4}V_1$

C. $V_2 = \frac{1}{3}V_1$

D. $V_2 = \frac{1}{6}V_1$

Câu 37 (THPT Việt Trì - 2018). Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy $a = 4$ biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $4\sqrt{3}$

B. $8\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $10\sqrt{3}$

Câu 38 (THPT Ngô Gia Tự - 2018). Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3\sqrt{5}$, $BC = AD = \sqrt{61}$, $AC = BD = \sqrt{34}$.

A. 30 (đvtt)

B. 60 (đvtt)

C. 15 (đvtt)

D. 90 (đvtt)

Câu 39 (THPT Nguyễn Thị Giang - 2018). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có O là giao điểm của AC và BD. Khi đó tỉ số diện tích của khối chóp $O.A'B'C'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

Câu 40 (THPT Nguyễn Thị Giang - 2018). Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

Câu 41 (THPT Vĩnh Yên - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $27m^3$. Lấy A' trên SA sao cho $SA = 3SA'$. Mặt phẳng đi qua A' và song song với đáy hình chóp cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích hình chóp $S.A'B'C'D'$

- A. $3m^3$ B. $1m^3$ C. $5m^3$ D. $6m^3$

Câu 42 (THPT Vĩnh Yên - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = SA = a$, $AD = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, gọi I là giao điểm của BM và AC.

Tỷ số $\frac{V_{AMNI}}{V_{SABCD}}$ là

- A. $\frac{1}{24}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{7}$

Câu 43 (THPT Lục Ngạn 1 - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông tâm O. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SB, SD. Tỷ số thể tích $\frac{V_{AOHK}}{V_{S.ABCD}}$ bằng

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 44 (THPT Lục Ngạn 1 - 2018). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. $A'B = 3a$. Thể tích khối lăng trụ là

- A. $\frac{7a^3}{2}$ B. $-\sin x.c$ C. $6a^3$ D. $7a^3$

Câu 45 (THPT Cổ Loa - 2018). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu vuông góc của đỉnh C lên mặt phẳng $(ABB'A')$ là tâm của hình bình hành $ABB'A'$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a là

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ C. $a^3\sqrt{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 46 (THPT Hà Trung - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$, G là trọng tâm tam giác ABC, A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm G tỉ số $k = -\frac{1}{2}$. Tính $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 47 (Sở GD&ĐT Bình Thuận- 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = a^3\sqrt{2}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $V = a^3$

Câu 48 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $BC = AA' = \sqrt{3}a$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{9a^3}{4}$ B. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ C. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{6}$ D. $V = \frac{3a^3}{4}$

Câu 49 (Chuyên Lê Quý Đôn - 2018). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi $\widehat{A'AC} = 60^\circ$; $B'C = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 50 (THPT Phan Ngọc Hiền - 2018). Hình chóp $S.ABC$ có $SB = SC = BC = CA = a$. Hai mặt phẳng (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC) .

Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. 4. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1C	2A	3B	4B	5C	6B	7C	8C	9A	10C
11B	12D	13D	14C	15A	16B	17A	18B	19D	20A
21A	22D	23A	24B	25B	26D	27D	28C	29D	30B
31D	32B	33A	34B	35B	36C	37B	38A	39A	40B
41B	42A	43C	44B	45A	46A	47C	48D	49B	50D

CHỦ ĐỀ 27: BÍ QUYẾT TÌM KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khoảng cách từ 1 điểm M đến đường thẳng d : được kí hiệu là $d(M;d) = MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M lên d

2. Khoảng cách từ 1 điểm M đến mặt phẳng (P): được kí hiệu là $d(M;(P)) = MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M lên (P)

3. Khoảng cách từ đường thẳng d đến mặt phẳng (P): chỉ tồn tại khi $d \parallel (P)$ khi đó $d(d;(P)) = d(A;(P))$ với A là một điểm bất kì thuộc d

4. Khoảng cách từ mặt phẳng (P) đến mặt phẳng (Q): chỉ tồn tại khi $(P) \parallel (Q)$ khi đó $d((P);(Q)) = d(A;(Q))$ với A là một điểm bất kì thuộc (P).

5. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau d và Δ : được kí hiệu là $d(d; \Delta) = MN$ với $M \in d, N \in \Delta$ và $\begin{cases} MN \perp d \\ MN \perp \Delta \end{cases}$

6. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau d và Δ : $d(d; \Delta) = d(d;(P))$ với (P) là mặt phẳng $\parallel d$ và chứa Δ . Khi đó ta đưa khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ 1 đường thẳng đến 1 mặt phẳng song song với nó.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Phương pháp: Để dựng khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng ta cố gắng tìm xem điểm và đường thẳng thuộc tam giác nào thì dựng đường vuông góc $\Rightarrow$ Khi tính toán sẽ dễ dàng hơn

Ví dụ 1: (Chuyên ĐH Vinh - Năm 2018) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách từ B tới đường thẳng DB'

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Giải

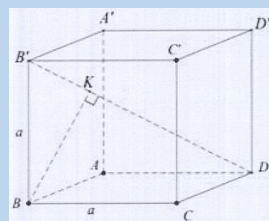
Trong BDB' kẻ đường cao BK $\Rightarrow K$ là hình chiếu của B lên B'D

Và $d(B;B'D) = BK; BD = a\sqrt{2}$

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow BK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } d(B;B'D) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$\Rightarrow$ Chọn B



Kinh nghiệm

Ta cố gắng tìm tam giác chứa điểm và đường thẳng là tam giác vuông để có thể sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính toán khoảng cách.

Dạng 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Ví dụ 2: (Sở GD&ĐT Ninh Bình - Năm 2018) Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng

(ABC), $AC = AD = 4$, $AB = 3$, $BC = 5$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

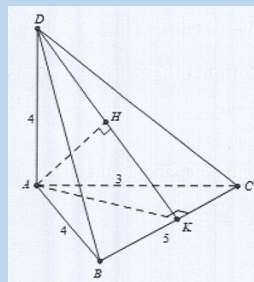
Giải

Ta có: $BC^2 = BA^2 + AC^2$ nên ΔABC vuông tại A

Kẻ $AK \perp BC$ và $AH \perp DK$. Ta luôn có $AH \perp (DBC)$ và $AH = d(A; (DBC))$

Cách tính AH:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{17}{72} \Rightarrow d(A; (BCD)) = AH = \sqrt{\frac{72}{17}} = \frac{12}{\sqrt{34}}$$



Kinh nghiệm

Ta cố gắng tìm tam giác chứa điểm và đường thẳng là tam giác vuông để có thể sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính toán khoảng cách

Ví dụ 3: (Chuyên ĐH Vinh - Năm 2018) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $SB = 3a$, $AB = 4a$, $BC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{12a\sqrt{61}}{61}$

B. $\frac{4a}{5}$

C. $\frac{12a\sqrt{29}}{29}$

D. $\frac{3a\sqrt{14}}{14}$

Giải

Gọi E là hình chiếu của B xuống AC, ta có

$$\begin{cases} BE \perp AC \\ SB \perp (ABC) \Rightarrow SB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAE)$$

Gọi F là hình chiếu của B lên SE

Do $AC \perp (SAE) \Rightarrow AC \perp BF$

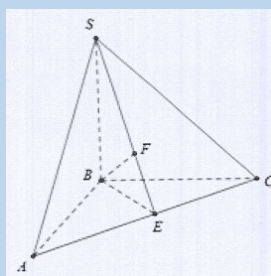
$$\text{Lại có: } \begin{cases} BF \perp AC \\ BF \perp SE \end{cases} \Rightarrow BF \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow d_{(B; (SAC))} = BF$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SB \perp (ABC) \\ BE \perp AC \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{BF^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{61}{144a^2}$$

$$\Rightarrow BF = \frac{12a\sqrt{61}}{61} \text{ hay } d_{(B; (SAC))} = \frac{12a\sqrt{61}}{61}$$

$\Rightarrow$ Chọn A



Công thức

Tứ diện B.SAC được gọi là tứ diện vuông vì có 3 cặp cạnh BS, BA, BC đôi một vuông góc. Khi đó muốn tính khoảng cách từ đỉnh B đến đáy SAC thì có công thức giải nhanh là $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BS^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}$

Ví dụ 4: (THPT Thanh Miện - Năm 2018) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Cạnh bên $AA' = a$, ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a, AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$

D. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$

Giải

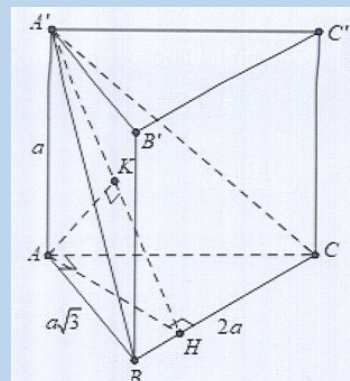
HD: Gọi H là hình chiếu của A lên BC và K là hình chiếu của A lên $A'H$. Ta có: $d(A; (A'BC)) = AK$ (1)

Ta có: $AC = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$\Rightarrow$ Chọn A



Tính chất

Vì $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = d(M; (SCD)) = \frac{3a\sqrt{7}}{7}$

Ví dụ 5: (Sở GD&ĐT Nam Định - Năm 2018) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{1}{3}a^3$

B. $V = a^3$

C. $V = \frac{2}{3}a^3$

D. $V = \frac{3}{2}a^3$

$\Rightarrow$ Chọn D

Ví dụ 6: (Chuyên ĐH Vinh - Năm 2018) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2a, AB = 3a$. Gọi M là trung điểm của SC . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB)

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{14}$

B. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$

$\Rightarrow$ Chọn A

Dạng 3: Khoảng cách từ 1 đường thẳng d đến 1 mặt phẳng (P) song song với nó.

Phương pháp: Chọn một điểm A bất kì thuộc d khi đó $d(d; (P)) = d(A; (P))$ và ta đưa bài toán trên về dạng tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng như dạng 2.

Kinh nghiệm: Chọn điểm A là chân đường cao của hình chóp hoặc 1 điểm dễ quy về chân đường cao.

Ví dụ 7: (Chuyên Thái Bình - Năm 2018) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a, AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$

Giải

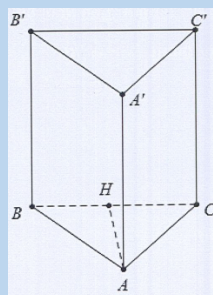
Vì $AA' \parallel (BB'C'C)$ và $d(AA'; (BCC'B')) = d(A; (BCC'B'))$

$(ABC) \perp (BCC'B')$ theo giao tuyến BC

Dựng $AH \perp BC$. Lại có: $AH \perp BB' \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$

$$\Rightarrow \text{Vậy khoảng cách cần tìm là: } d = AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ **Chọn B**



Ghi nhớ

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = \Delta \\ AH \in (P) \\ AH \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow AH \perp (Q)$$

Áp dụng vào bài thì $AH \perp (BCC'B')$

Dạng 4: Tính khoảng cách giữa mặt phẳng

Phương pháp: Để tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) ta chọn 1 điểm A thuộc (P) khi đó $d((P); (Q)) = d(A; (Q))$. Ta tiếp tục quy khoảng cách giữa 2 mặt phẳng trở về khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng.

Ví dụ 8: (Chuyên Thái Bình - Năm 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

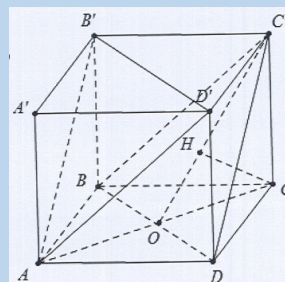
Giải

HD: Ta có: $CO = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Dựng $CH \perp C'O$ (hình vẽ).

Do $AB' \parallel C'D$ và $AD' \parallel BD \Rightarrow (AB'D') \parallel (BC'D)$

Khi đó



$$d((AB'D'); (BC'D)) = d(A; (C'BD)) = d(C; (BDC')) = CH = \frac{CO \cdot CC'}{\sqrt{CO^2 + CC'^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Bình luận

2 mặt phẳng (P) và x = 1 có khoảng cách khi và chỉ khi chúng // với nhau vì vậy việc đầu tiên ta phải chứng minh $(AB'D') \parallel (BC'D)$

Dạng 5: Sử dụng tính chất đoạn vuông góc chung tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

Ví dụ 9: (Chuyên ĐH Vinh - Năm 2018) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC

A. $a\sqrt{3}$

B. a

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Giải

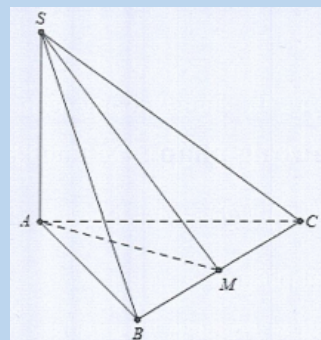
Gọi M là trung điểm của BC.

 ΔABC đều $\Rightarrow AM \perp BC$ (1)Lại có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AM$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: AM là đoạn vuông góc chung của SA và BC

 $\Rightarrow d(SA; BC) = AM$

Ta có: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

 $\Rightarrow$ Chọn D**Kinh nghiệm**Vì $SA \perp$ mặt phẳng chứa BC là (ABC) nên từ A kẻ đường $\perp$ BC ta sẽ thu được đoạn $\perp$ chung.

Ví dụ 10: (THPT Nam Trực - Năm 2018) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Góc tạo bởi cạnh bên và đáy bằng 30° . Hình chiếu vuông góc H của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng cách giữa AA' và BC là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

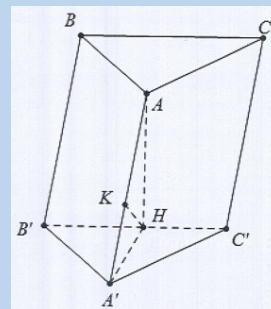
B. $a\sqrt{3}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

D. $2a\sqrt{3}$

GiảiTa có: $A'H = AA' \cos 30^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow H$ là trung điểm của $B'C'$ Do $AA' \parallel BB' \Rightarrow d(AA'; BC) = d(AA'; (BCC')) = d(B'C'; AA')$ Dựng $HK \perp AA'$ suy ra HK là đoạn vuông góc chung của AA' và $B'C'$

$\Rightarrow d = HK = A'H \cdot \sin \widehat{AA'H} = a\sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

 $\Rightarrow$ Chọn A

Ví dụ 11: (Chuyên Bắc Ninh - Năm 2018) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của BC ta có:

$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AM)$

Dựng $MF \perp AA'$ (1). Lại có $BC \perp (A'MA) \Rightarrow BC \perp MF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MF$ là đường vuông góc chung của AA' và BC . Khi đó $d(AA'; BC) = MF$

Theo Talet ta có: $MF = \frac{3}{2}GE = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow GE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

GE là chiều cao trong Δ vuông $A'GA$: $\frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{GA^2} = \frac{1}{GE^2} \Rightarrow GA' = \frac{a}{3}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = GA' \cdot S_{ABC} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

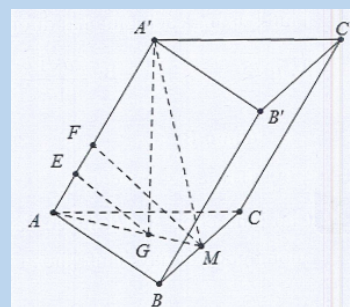
Dạng hình: Phương pháp hồi quy tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau d và Δ

Bước 1: Dựng (P) chứa Δ và // (P) khi đó $d(d; \Delta) = d(d; (P))$

Bước 2: Chọn 1 điểm A thuộc đường thẳng d .

Vì $d // (P) \Rightarrow d(d; (P)) = d(A; (P))$

Tới đây bài toán tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau trở về bài toán tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng và làm tiếp tương tự như dạng 3.



Bình luận

Cách dựng đường vuông góc chung tính tế hơn tuy nhiên khó nhìn hơn.

Ta có thể dùng cách cơ bản:

Dựng xx' qua A và // BC khi đó $BC // (A'Ax) \Rightarrow d(A; (A'Ax)) = d(M; (A'Ax)) = \frac{2}{3}d(G; (A'Ax)) = \frac{2}{3}GE$

Ví dụ 12: (THPT Bình Xuyên - Năm 2018) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

A. $a\sqrt{3}$

B. a

C. $a\sqrt{2}$

D. 2a

Giải

Vì $CD // AB \Rightarrow CD // (SAB)$

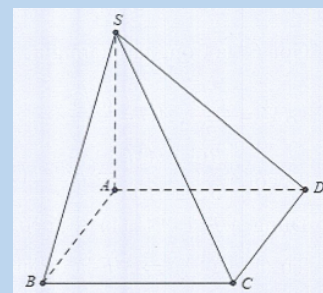
Chọn điểm D thuộc CD khi đó $d(CD; (SAB)) = d(D; (SAB))$

Để thấy $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DA \\ DA \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow d(D; (SAB)) = DA = a$

Tóm lại $d(CD; SA) = d(CD; (SAB)) = d(D; (SAB)) = DA = a$

$\Rightarrow$ **Chọn B**



Bình luận

Đây là một bài toán dễ tìm mặt phẳng chứa AB và $//CD$, ở các bài tiếp theo, hình vẽ sẽ không có sẵn mặt phẳng (P) và ta sẽ tiến hành dựng thêm hình.

Ví dụ 13: (Chuyên ĐH Vinh - Năm 2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$

- A. $a\sqrt{5}$ B. $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

⇒ Chọn B

Ví dụ 14: (THPT Thăng Long - Năm 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. a C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a}{2}$

⇒ Chọn A

Ví dụ 15: (THPT Chuyên Trần Phú - Năm 2017) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết thể tích của khối lăng trụ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC

- A. $\frac{3a}{2}$ B. $\frac{4a}{3}$ C. $\frac{3a}{4}$ D. $\frac{2a}{3}$

⇒ Chọn C

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng (BCC'B') là

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$

Câu 2 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tam giác SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Câu 3 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM là

A. $a\sqrt{\frac{15}{62}}$

B. $a\sqrt{\frac{30}{31}}$

C. $a\sqrt{\frac{15}{68}}$

D. $a\sqrt{\frac{15}{17}}$

Câu 4 (THPT Thanh Miện-2018). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Cạnh bên $AA' = a$, ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a, AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$

D. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$

Câu 5 (THPT Thanh Miện -2018). Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có thể tích là a^3 , $AB = a$. Tính theo a khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC)

A. $2a\sqrt{3}$

B. $4a\sqrt{3}$

C. $4a\sqrt{6}$

D. $a\sqrt{3}$

Câu 6 (THPT Thanh Miện -2018). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có cạnh đáy bằng a và thể tích khối chóp là $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

D. $a\sqrt{6}$

Câu 7 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến (SBD) bằng $\frac{6a}{7}$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD)

A. $\frac{12a}{7}$

B. $\frac{3a}{7}$

C. $\frac{4a}{7}$

D. $\frac{6a}{7}$

Câu 8 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$

B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$

D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 9 (THPT Thạch Thành 1 - 2018). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên

A. $a\sqrt{\frac{3}{10}}$

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

C. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$

D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Câu 10 (THPT Lý Thái Tổ-2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) , biết khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

A. $d = \frac{a}{2\sqrt{5}}$

B. $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$

C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Câu 11 (THPT Lý Thái Tổ-2018). Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2a$, $AD = 4a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AD . Tính khoảng cách d từ giữa hai đường thẳng $A'B'$ và $C'M$.

A. $d = 2a\sqrt{2}$

B. $d = a\sqrt{2}$

C. $d = 2a$

D. $d = 3a$

Câu 12 (THPT Phạm Công Bình-2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật; $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AB; SC tạo với đáy góc 45° . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) là

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Câu 13 (THPT Sơn Tây - 2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD). Tính khoảng cách từ B đến (SCD)

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Câu 14 (THPT Sơn Tây - 2018). Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có các mặt bên là hình vuông cạnh a. Gọi D, E lần lượt là trung điểm các cạnh BC, A'C'. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB' và DE theo a

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $a\sqrt{3}$

Câu 15 (THPT Nguyễn Tất Thành - 2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính $d(A; (SBC))$.

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

Câu 16 (THPT Nguyễn Tất Thành - 2018). Cho hình chóp OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = 3$, $OB = 4$, $OC = 1$. Khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là

- A. $\frac{25}{13}$ B. $\frac{14}{13}$ C. 5 D. $\frac{12}{13}$

Câu 17 (THPT C Bình Lục-2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường chéo nhau SC và BD

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ D. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 18 (THPT Nam Trực - 2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Tam giác SBC cân tại S, tam giác SCD vuông tại C. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Chiều cao SH của hình chóp là

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ B. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{2a}{\sqrt{15}}$ D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

Câu 19 (THPT Việt Trì-2018). Cho tứ diện ABCD có các tam giác ABC và DBC vuông cân và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $AB = AC = DB = DC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD).

- A. $a\sqrt{6}$ B. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Câu 20 (THPT Đoàn Thượng - 2018). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB, SC. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là đoạn thẳng nào sau đây?

- A. AN B. AC C. AM D. AB

Câu 21 (THPT Đội Cấn-2018). Khối chóp S.ABC có SA vuông góc với (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại B với $SB = 2a$, $BC = a$ và thể tích khối chóp là a^3 . Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ B. $6a$ C. $\frac{3a}{2}$ D. $3a$

Câu 22 (THPT Đội Cấn-2018). Cho khối chóp S.ABCD có thể tích bằng a^3 . Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và đáy ABCD là hình bình hành. Khoảng cách giữa SA và CD bằng

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ B. $a\sqrt{3}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $2\sqrt{3}a$

Câu 23 (THPT Hà Trung - 2018). Tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. a

Câu 24 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Cho hình chóp S.ABC có $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Góc $\widehat{ASB} = 45^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

- A. $\frac{1}{2}$ B. 3 C. 1 D. $\frac{3}{2}$

Câu 25 (THPT Triệu Sơn 1 -2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết $SH = 3a$ và vuông góc với mặt đáy (ABCD). Khoảng cách giữa hai đường thẳng MD và SC là

- A. $\frac{12a\sqrt{15}}{61}$ B. $\frac{a\sqrt{61}}{61}$ C. $\frac{12a\sqrt{61}}{61}$ D. $\frac{6a\sqrt{61}}{61}$

Câu 26 (Chuyên Thái Nguyên - 2018). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$ và $SA \perp (ABC)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

- A. $\frac{10\sqrt{3}a}{\sqrt{79}}$ B. $\frac{5a}{2}$ C. $5\sqrt{3}a$ D. $\frac{5\sqrt{3}a}{\sqrt{79}}$

Câu 27 (Chuyên Thái Nguyên - 2018). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $2a$ C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ D. $R = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

Câu 28 (THPT Yên Lạc 2 năm-2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B. Biết $AB = a$, $BC = a$, $AD = 3a$, $SA = a\sqrt{2}$. Khi $SA \perp (ABCD)$, khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA, CD là

A. $\frac{a}{5}$

B. $\frac{a}{\sqrt{5}}$

C. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$

D. $\frac{3a}{\sqrt{5}}$

Câu 29 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hình lập phương ABCD.A' B'C' D' có tất cả các cạnh bằng 2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AB' D') và (BC'D) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

Câu 30 (Sở GD&ĐT Bình Thuận - 2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a}{3}$. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD

A. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{15}$

B. $\frac{a^3\sqrt{10}}{15}$

C. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{15}$

D. $\frac{2a^3\sqrt{10}}{15}$

Câu 31 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành thỏa mãn $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Biết tam giác SBC cân tại S, tam giác SCD vuông tại C và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{2a^3}{3\sqrt{5}}$

B. $V = \frac{a^3}{3\sqrt{5}}$

C. $V = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$

D. $V = \frac{a^3}{\sqrt{5}}$

Câu 32 (THPT Ba Đình-2018). Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, A'C', C'B'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và AB'.

A. $d = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

D. $d = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

Câu 33 (THPT Lương Thế Vinh-2018). Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích bằng a^3 . Gọi M là trung điểm của CC'. Tính khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng (ABM) biết rằng ABM là tam giác đều cạnh a.

A. $\frac{4a}{3}$

B. $\frac{4a}{3\sqrt{3}}$

C. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2a}{3}$

Câu 34 (Chuyên KHTN-2018). Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và A'C'. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'N bằng

A. 2a

B. $a\sqrt{3}$

C. a

D. $a\sqrt{2}$

Câu 35 (Phan Đăng Lưu - 2018). Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, góc $BAC = 60^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

B. 2a

C. $\frac{3a}{4}$

D. a

Câu 36 (Phan Đăng Lưu - 2018). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. Biết thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{4a^3}{3}$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và $B'C'$

A. $h = \frac{8a}{3}$

B. $h = \frac{3a}{8}$

C. $h = \frac{2a}{3}$

D. $h = \frac{a}{3}$

Câu 37 (THPT Hoàng Văn Thụ-2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{9}$

Câu 38 (THPT Thạch Thành 1 -2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

A. $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$

B. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$

C. $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$

D. $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$

Câu 39 (THPT Lê Quý Đôn-2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3, AD = 1$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc cạnh đáy AB sao cho $AH = 2HB$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SHC).

A. $3\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2

Câu 40 (THPT Lê Quý Đôn-2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của CD. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SM bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1-B	2-D	3-B	4-A	5-B	6-A	7-D	8-D	9-A	10-C
11-A	12-C	13-B	14-B	15-B	16-D	17-C	18-C	19-B	20-C
21-D	22-D	23-C	24-D	25-C	26-A	27-C	28-D	29-B	30-C
31-B	32-B	33-C	34-A	35-C	36-A	37-C	38-B	39-C	40-C

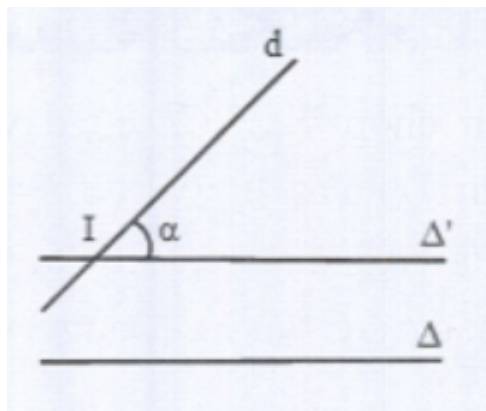
CHỦ ĐỀ 28: BÍ QUYẾT TÌM GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Góc giữa 2 đường thẳng d và Δ chéo nhau

Chọn 1 điểm I thuộc đường thẳng d kẻ $\Delta' // \Delta$.

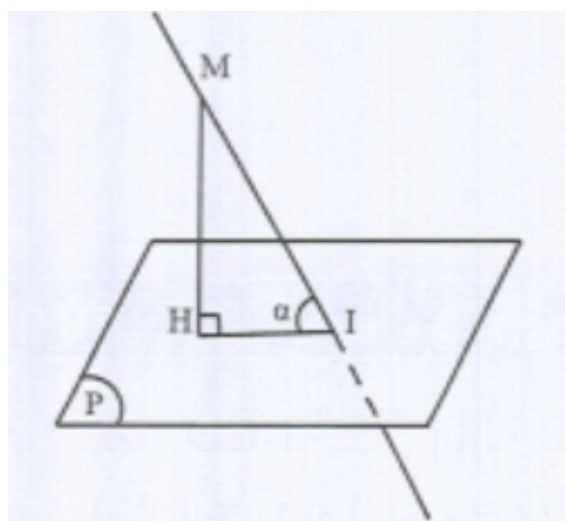
Khi đó $(\widehat{d, \Delta}) = (\widehat{d, \Delta'}) = \alpha$ và $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$



2. Góc giữa 2 đường thẳng d và (P) cắt nhau

Tìm giao điểm I của d và (P) . Lấy 1 điểm M thuộc d hạ đường cao $AH \perp (ABC)$. Khi đó $(\widehat{d, (P)}) = \widehat{MIH} = \alpha$ và $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Chú ý: Cách nhớ góc $\widehat{MIH}$ là đỉnh – hình chiếu – giao điểm.

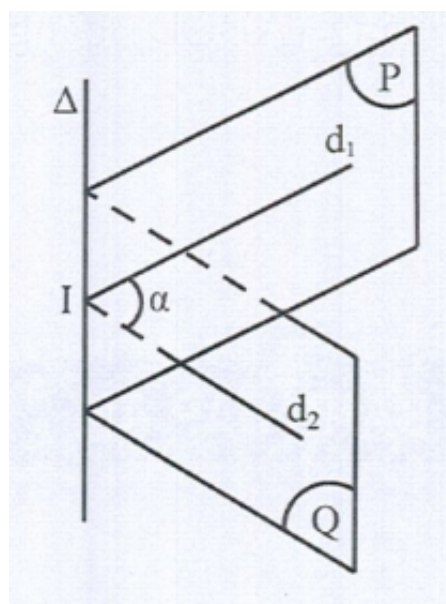


3. Góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau

Tìm giao tuyến của (P) và (Q) là Δ . Trên (P) tìm đường thẳng $d_1 \perp \Delta$ và trên (Q) tìm $d_2 \perp \Delta$.

Khi đó: $(\widehat{(P), (Q)}) = (\widehat{d_1, d_2}) = \alpha$ và $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Chú ý: Nếu Δ là 1 đường thẳng thuộc đáy thì d_1 là đường thẳng nối từ chân đường cao của chóp (lăng trụ) đến giao tuyến.



B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Góc giữa hai đường thẳng

Ví dụ 1: (Chuyên Hùng Vương – Năm 2018). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Giải

Vì $CDC'D'$ là hình bình hành

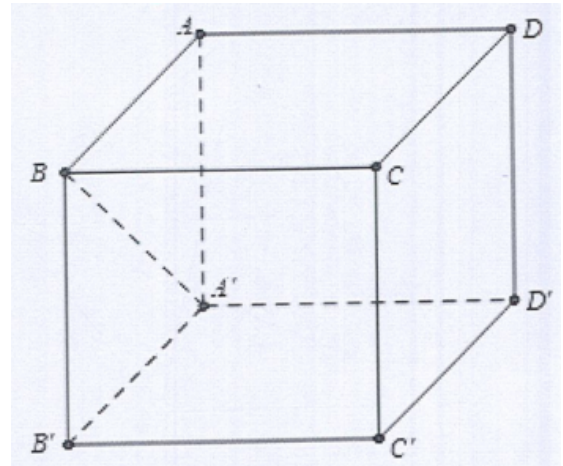
$$\Rightarrow CD \parallel C'D' \Rightarrow (\widehat{BA'; CD}) = (\widehat{BA'; C'D'}) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } C'D' \parallel A'B' \Rightarrow (\widehat{BA'; C'D'}) = (\widehat{BA'; A'B'}) = \widehat{BA'B'}$$

$\Rightarrow$ Vậy góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng góc $\widehat{BA'B'}$. Mà $ABB'A'$ là hình vuông.

$$\Rightarrow \widehat{BA'B'} = 45^\circ$$

$\Rightarrow$ Chọn A.



Mở rộng

Có rất nhiều cách để xác định góc ví dụ như: $(\widehat{A'B; CD}) = (\widehat{D'C; CD})$

$$z = 1 + 4i + (1 - \text{ hoặc } (\widehat{A'B; CD}) = (\widehat{A'B; AB}) = \widehat{ABA'} = 45^\circ$$

Ví dụ 2: (Chuyên Hùng Vương – Năm 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 45° . Gọi I là trung điểm của cạnh CD . Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng (Số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị)

- A. 48° . B. 51° . C. 42° . D. 39° .

Giải

$$\text{Ta có: } \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = 5 \\ b - a = 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } (\widehat{DS; (SAB)}) = \widehat{DSA} = 45^\circ.$$

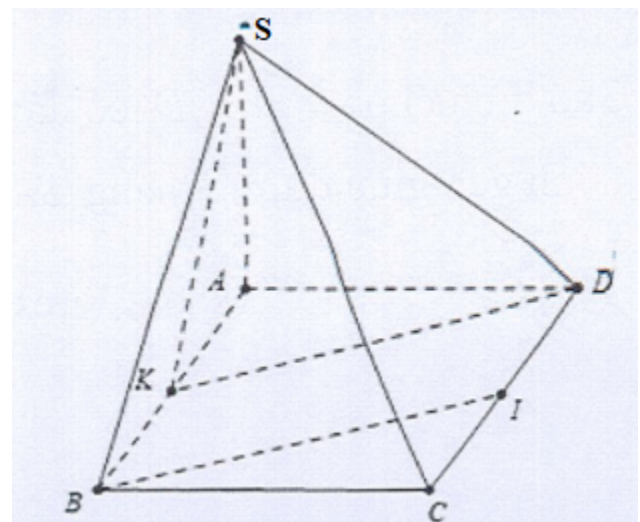
$$\text{Đặt } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

Gọi K là trung điểm của AB khi đó $DK \parallel BI$

$$\text{Suy ra } (\widehat{SD; BI}) = (\widehat{SD; DK})$$

Ta có:

$$\text{Suy ra } SD = a\sqrt{2}; BI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$



$$SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos \widehat{SDK} = \frac{SD^2 + DK^2 - SK^2}{2 \cdot SD \cdot SK} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{SDK} \approx 51^\circ.$$

=> Chọn B.

Bình luận

Trong hình vẽ của VD2 này chưa có sẵn đường nào // BI hoặc SD. Vậy ta sẽ tiến hành kẻ thêm hình. Ưu tiên kẻ thêm đường thẳng // với đường thẳng ở đáy là BI tránh kẻ // SD sẽ khó tính.

Ví dụ 3: (Chuyên ĐH Vinh – Năm 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a, BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. $\arctan\sqrt{2}$.

Giải

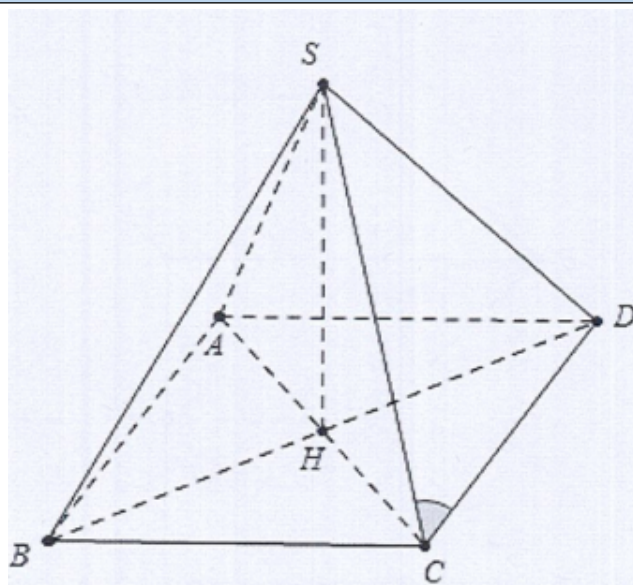
Do $SA = SB = SC = SD$ nên hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với tâm hình chữ nhật $ABCD$.

Do $AB \parallel CD$ nên $(\widehat{AB; SC}) = (\widehat{CD; SC}) = \widehat{SCD}$

$$\text{Lại có: } \cos \widehat{SCD} = \frac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2SC \cdot CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{SCD} = 45^\circ$$

=> Chọn A.



Bí quyết

Nếu một hình chóp có các cạnh bên đều bằng nhau thì chân đường cao H là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Ví dụ 4: (THPT Hà Trung – Năm 2018). Cho tứ diện $ABCD$ gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết $AB = CD = a, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

=> Chọn C.

Ví dụ 5: (THPT Đoàn Thượng – Năm 2018). Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó cosin của góc giữa hai đường thẳng nào sau đây có giá trị bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

- A. $(AB; DM)$. B. $(AD; DM)$. C. $(AM; AD)$. D. $(AB; AM)$.

$\Rightarrow$ Chọn A.

Dạng 2: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ví dụ 6: (THPT ĐH Vinh). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .

- A. 45° . B. $\arcsin \frac{1}{4}$ C. 30° . D. 60° .

Giải

$$\text{Ta thấy } \begin{cases} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AO \\ AO \perp BD \end{cases}$$

$\Rightarrow AO \perp (SBD)$ hay O là hình chiếu của A lên (SBD)

$$\Rightarrow (\widehat{SA; (SBD)}) = \widehat{ASO}$$

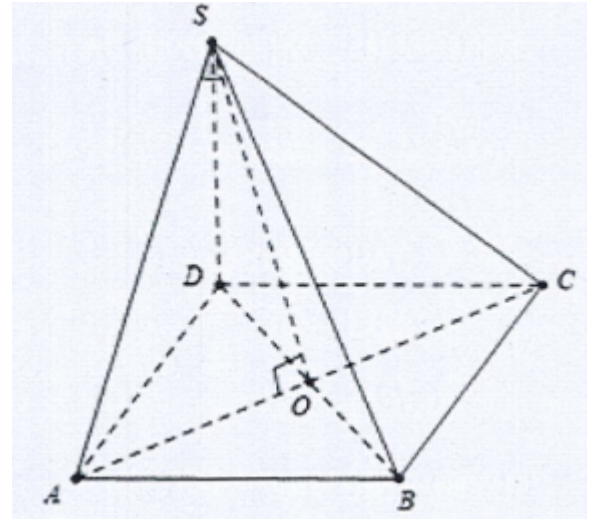
$$\text{Ta có: } 2AO^2 = a^2 \Rightarrow AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Do } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp SO$$

$$\Rightarrow \Delta SAO \text{ vuông tại } O \text{ ta có: } \sin \widehat{ASO} = \frac{OA}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$$

$\Rightarrow$ Chọn C.



Ví dụ 7: (Chuyên Thái Bình – Năm 2018). Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khi đó thể tích khối lăng trụ là

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{27}{4}$. D. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Giải

Dựng $C'H \perp (ABC)$ khi đó H là hình chiếu vuông góc của C' lên (ABC) (1)

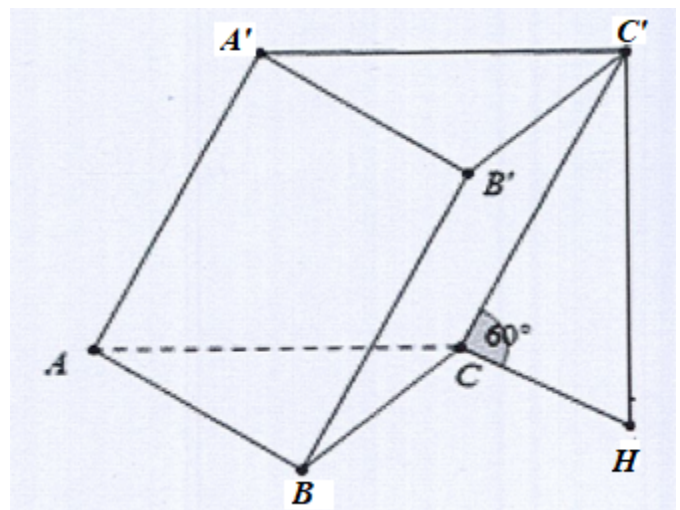
Lại có $C'C \cap (ABC) = C$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ góc giữa cạnh bên và mặt đáy là

$$(\widehat{C'C; (ABC)}) = \widehat{C'CH} = 30^\circ$$

$$\text{Do đó } C'H = CC' \sin 30^\circ = \sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \text{Suy ra } V_{ABC.A'B'C'} = C'H \cdot S_{ABC} = \sqrt{3} \cdot \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{27}{4}.$$



=> Chọn C.

Ghi nhớ

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc xuất phát từ đỉnh A tới giao điểm S đến chân đường vuông góc $O \Rightarrow \widehat{ASO}$

(Nhiều bạn nhầm thành $\widehat{SAO}$ là sai)

Ví dụ 8: (THPT Việt Trì – Năm 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) .

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

C. $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Giải

HD: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1)$ với $a = 1$.

Do $CK = AB = \frac{1}{2}CD$ với K là trung điểm của AD nên tam giác ACD vuông tại C .

Vì $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$ nên $\overrightarrow{CD} = (-1;1;0)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) .

$$\Rightarrow \text{vậy } \sin(MN; (SAC)) = \frac{|\vec{u}_{MN} \cdot \vec{n}_{(SAC)}|}{|\vec{u}_{MN}| \cdot |\vec{n}_{(SAC)}|} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{55}}{10}.$$

=> Chọn C.

Bí quyết

Nếu một hình chóp chứa 3 cặp cạnh $z = 2 + i$ đôi một vuông góc với nhau thì ta có thể dùng phương pháp tọa độ hóa để giải quyết. Luôn ưu tiên giao điểm A là gốc tọa độ $(0;0;0)$

Ví dụ 9: (Chuyên ĐH Vinh – Năm 2018). Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , đường thẳng DB_1 tạo với mặt phẳng (BCC_1B_1) góc 30° . Tính thể tích khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

A. $a^3\sqrt{3}$.

B. $a^3\sqrt{2}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

=> Chọn B.

Ví dụ 10: (THPT Kim Liên – Năm 2018). Một kim tự tháp Ai Cập có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên là một số thực dương không đổi. Gọi α là góc giữa cạnh bên của kim tự tháp với mặt đáy. Khi thể tích của kim tự tháp lớn nhất, tính $\sin \alpha$.

$$\text{A. } \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{B. } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{C. } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{D. } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\Rightarrow$ Chọn D.

Dạng 3: Góc giữa hai mặt phẳng

Ví dụ 11: (Chuyên Vĩnh Phúc). Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật. $SA = AD = 2a$. Góc giữa (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Thể tích khối chóp $S.AGD$ là

$$\text{A. } \frac{32a^3\sqrt{3}}{27}.$$

$$\text{B. } \frac{8a^3\sqrt{3}}{27}.$$

$$\text{C. } \frac{4a^3\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{D. } \frac{16a^3}{27\sqrt{3}}.$$

Giải

$$\text{Ta thấy: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \quad (SA \perp (ABCD)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB, BC \perp SB \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} AB \in (ABCD) \\ SB \in (SAB) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{(SAB); (ABCD)} = \widehat{(SB; AB)} = \widehat{SAB} = 60^\circ$$

$$\text{Ta có: } AB \tan 60^\circ = SA \Rightarrow AB = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Gọi M là trung điểm của BC ta có: $|z| = 5$

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} d(M; AD) \cdot AD = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot 2a = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$$

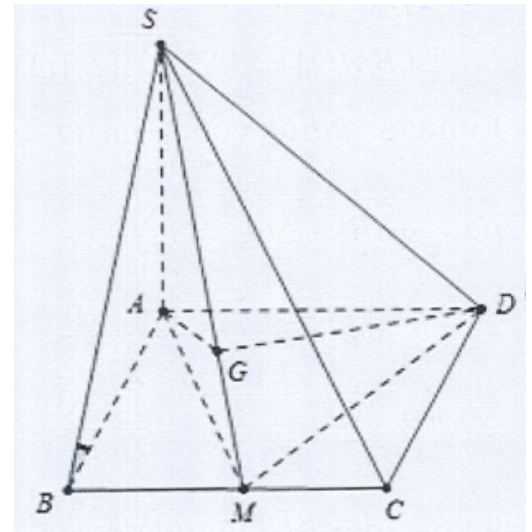
$$\Rightarrow V_{SAMD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ADM} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{2a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$$

$\Rightarrow$ Theo công thức tỉ số thể tích:

$$\frac{V_{SAMD}}{V_{SAGD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SG}{SM} \cdot \frac{SD}{SD} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{SAGD} = \frac{2}{3} V_{SAMD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4a^3\sqrt{3}}{9} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{27}$$

$\Rightarrow$ Chọn B.



Ví dụ 12: (Chuyên Hùng Vương – Năm 2018). Cho tứ diện $ABCD$ có $BD = 2$, hai tam giác ABD , BCD có diện tích lần lượt là 6 và 10. Biết thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 16, tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) .

A. $\arccos\left(\frac{4}{15}\right)$.

B. $\arcsin\left(\frac{4}{15}\right)$.

C. $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.

D. $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

Giải

HD: Dựng $AH \perp (BCD), HM \perp BD$

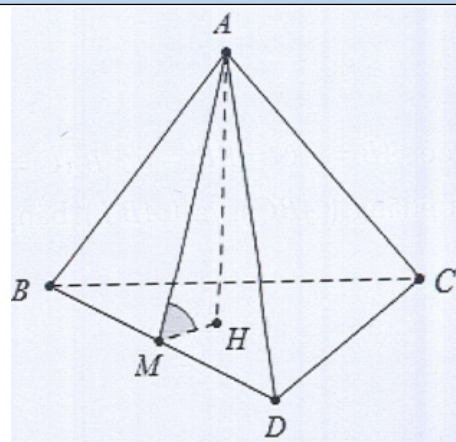
$$\text{Do } \begin{cases} HM \perp BD \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AMH)$$

$$\Rightarrow \widehat{((ABD);(BCD))} = \widehat{AMH}$$

$$\text{Lại có: } AH = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{24}{5}, AM = \frac{2S_{\Delta ABD}}{BD} = 6$$

$$\text{Do đó } \sin AMH = \frac{AH}{AM} = \frac{4}{5} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$$

$\Rightarrow$ Chọn C.



Phân tích

Trong công thức tính thể tích $V_{ABCD} = \frac{1}{3}$ chiều cao x diện tích đáy có tất cả 3 thành phần. Ví dụ nếu biết 2 thành phần V_{ABCD} và diện tích đáy $S_{\Delta BCD}$ sẽ tính được AH.

Ví dụ 13: (Chuyên Bắc Ninh – Năm 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a, SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

A. 30° .

B. 50° .

C. 60° .

D. 90° .

Giải

Tam giác SAB cân tại B suy ra $BM \perp SA$ (1)

Tam giác SAD cân tại S suy ra $DM \perp SA$ (2)

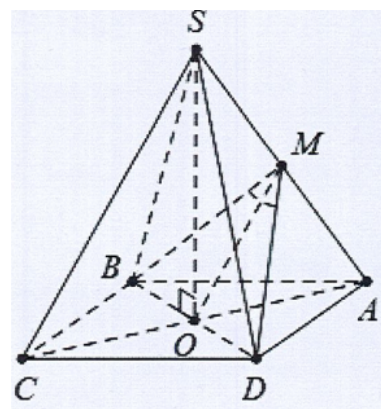
Từ (1) và (2) suy ra $SA \perp (BMD) \Rightarrow \widehat{((SAB);(SAD))} = \widehat{BMD}$

Tam giác SBO vuông tại O , có

$$BO = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$



Suy ra $SA = BD$ mà $OM = \frac{SA}{2} \Rightarrow OM = \frac{BD}{2}$ $z = a + bi$ vuông cân tại M.

Vậy $\left(\widehat{(SAB)}; \widehat{(SAD)} \right) = \widehat{BMD} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ Chọn D.

Bình luận

Ta nhận thấy tính chất đối xứng của hình chóp khi $Im(z)$ chia hình thành 2 phần giống hệt nhau. Nếu $BM \perp SA$ thì cũng dễ dàng chứng minh được $DM \perp SA$

Ví dụ 14: (THPT Yên Lạc – Năm 2018). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt (ABC) là trung điểm của AB . Mặt bên $(ACC'A')$ tạo với đáy góc 45° . Thể tích khối lăng trụ này theo a là

A. $V = \frac{3a^3}{16}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

$\Rightarrow$ Chọn A.

Ví dụ 15: (Sở GD-ĐT Bắc Giang). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = BB' = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm của CC' . Ta có cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABI) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. C. $\frac{3\sqrt{5}}{12}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow$ Chọn B.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Chuyên Bắc Ninh - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $3\sqrt{2}a^3$. B. $\sqrt{6}a^3$. C. $3a^3$. D. $\sqrt{2}a^3$.

Câu 2 (THPT Lương Thế Vinh – Năm 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật. $SA = AD = 2a$. Góc giữa (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Thể tích khối chóp $S.AGD$ là

A. $\frac{32a^3\sqrt{3}}{27}$. B. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{27}$. C. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{16a^3}{9\sqrt{3}}$.

Câu 3 (THPT C – Nghĩa Hưng – Năm 2018). Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AB = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa SB và đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. B. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 4 (THPT C- Nghĩa Hưng - 2018). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $B'C' = a\sqrt{5}$, các đường thẳng $A'B$ và $B'C$ cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° , tam giác $A'CB$ vuông tại B , tam giác $A'CD$ vuông tại D . Tính thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a .

- A. $2a^3$. B. $\frac{2a^3}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 5 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 45° . Gọi I là trung điểm của cạnh $|z| =$. Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng (Số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị)

- A. 48° B. 51° C. 42° D. 39°

Câu 6 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2$, $AD = 3$, $AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α . Tính giá trị gần đúng của góc α .

- A. $45,2^\circ$ B. $38,1^\circ$ C. $53,4^\circ$ D. $61,6^\circ$

Câu 7 (THPT Lý Thái Tổ - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 1$ và $AD = \sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = 3$. B. $V = 2$. C. $V = 6$. D. $V = 1$.

Câu 8 (THPT Yên Lạc 2 - 2018). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tất cả các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 9 (THPT Yên Lạc 2 - 2018). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' của một mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ theo a .

- A. $a^3\sqrt{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 10 (THPT Yên Lạc 2 - 2018). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB . Mặt bên $(ACC'A')$ tạo với đáy một góc 45° . Thể tích khối lăng trụ này theo a là

- A. $\frac{3a^3}{16}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3}{16}$.

Câu 11 (THPT Phạm Công Bình - 2018). Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{9}$. C. $a^3\sqrt{2}$. D. $\frac{a^3}{2}$.

Câu 12 (THPT Phạm Công Bình - 2018). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm AD ; M trung điểm CD ; cạnh bên SB hợp với đáy góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABM$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Câu 13 (THPT Phạm Công Bình - 2018). Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 2a$, mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = a^3\sqrt{2}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Câu 14 (THPT Phạm Công Bình - 2018). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B ; $AB = a$; $BC = a\sqrt{2}$; mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 30° . Thể tích của khối lăng trụ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $a^3\sqrt{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 15 (THPT Phạm Công Bình - 2018). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. C. $V = \frac{a^3}{4}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 16 (THPT Sơn Tây - 2018). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{12}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 17 (THPT Sơn Tây - 2018). Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Tính thể tích của khối chóp $S.CDMN$.

- A. $V = \frac{5a^3}{8}$. B. $V = \frac{a^3}{8}$. C. $V = \frac{5a^3}{24}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 18 (THPT Sơn Tây - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC .

- A. 45° B. 60° C. 30° D. 90°

Câu 19 (THPT Nguyễn Tất Thành - 2018). Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a , $B'C$ tạo với đáy (ABC) góc 60° . Tính $V_{ABC.A'B'C'}$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = \frac{3a^3}{4}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = a^3$.

Câu 20 (THPT Nguyễn Tất Thành - 2018). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , góc giữa CA' và mặt $(AA'B'B)$ bằng 30° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 21 (THPT Lê Hồng Phong - 2018). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a bằng

A. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

C. $a^3\sqrt{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 22 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $AB = a$, $SA = 2SD$ và mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{5a^3}{2}$.

B. $V = 5a^3$.

C. $V = \frac{15a^3}{2}$.

D. $V = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 23 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng 45° . Hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 24 (THPT Bình Xuyên - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và hai mặt phẳng (SAC) , (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây.

A. (SB, SA) .

B. (SB, SO) .

C. (SB, BD) .

D. (SO, BD) .

Câu 25 (THPT C Bình Lục - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, mặt bên (SBC) tạo với đáy 1 góc bằng 60° . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB và SC . Thể tích V của khối chóp $S.AMN$?

A. $V = \frac{a^3}{2}$.

B. $V = \frac{a^3}{4}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 26 (THPT Nam Trực - 2018). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$; $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy góc 60° . Thể tích của lăng trụ đã cho là

A. $\frac{3a^3}{4}$.

B. $\frac{3a^3}{8}$.

C. $\frac{9a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3}{8}$.

Câu 27 (THPT Việt Trì - 2018). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a . Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{\pi}{3}$.

D. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 28 (THPT Việt Trì - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M , N lần lượt là trung điểm SB và CD . Tính cosin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) .

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

C. $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 29 (THPT Ngô Gia Tự - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, SC hợp với mặt phẳng (SAD) một góc α .

Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$. Biết $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 30 (THPT Vĩnh Yên - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA = a\sqrt{3}$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 31 (THPT Vĩnh Yên - 2018). Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $A_1A = a\sqrt{2}$ và A_1A tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30° . Tính thể tích khối tứ diện A_1B_1CA là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{6}}{24}$.

Câu 32 (THPT Đội Cấn - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60° .

B. 45° .

C. 30° .

D. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Câu 33 (THPT Lục Ngạn 1 - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = 2a, \widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, góc giữa cạnh bên SA với mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{6}$.

B. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 34 (THPT Lục Ngạn 1 - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a, SA = a$ vuông góc với đáy, cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 35 (THPT Lục Ngạn 1 - 2018). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $\widehat{ACB} = 135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB . Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. 90°

B. 60° .

C. 45°

D. 30°

Câu 36 (THPT Cổ Loa - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. $\widehat{SAD}$. B. $\widehat{ASD}$. C. $\widehat{SDA}$. D. $\widehat{BSD}$.

Câu 37 (THPT Kim Liên - 2018). Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với đáy AD và BC . Biết $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AD thỏa mãn $HD = 3HA$, SD tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $V = \frac{9\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 38 (Sở GD&ĐT Bạc Liêu - 2018). Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân ABC với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'B'C')$ tạo với đáy một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{6}$. B. $V = \frac{a^3}{8}$. C. $V = \frac{3a^3}{8}$. D. $V = \frac{9a^3}{8}$.

Câu 39 (Sở GD&ĐT Nam Định - 2018). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) , M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

- A. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. D. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 40 (THPT Triệu Sơn 1 - 2018). Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$ và $CA = CD = x$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Biết thể tích của khối tứ diện bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là

- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 120° .

Câu 41 (THPT Yên Lạc 2 - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , $(SAB) \perp (ABC)$, $SA = SB$, I là trung điểm AB . Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là:

- A. Góc $\widehat{SCI}$. B. Góc $\widehat{SCA}$. C. Góc $\widehat{ISC}$. D. Góc $\widehat{SCB}$.

Câu 42 (THPT Yên Lạc 2 - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC . Cosin của góc giữa 2 đường thẳng AI và SC là:

- A. $-\sqrt{\frac{2}{3}}$. B. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Câu 43 (THPT Lương Văn Tụy - 2018). Cho $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng. Biết $\widehat{ASB} = 120^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng:

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 44 (THPT Ba Đình - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , các mặt bên (SAB) , (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$; góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng α . Khi đó $\tan \alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau:

- A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\tan \alpha = 1$. C. $\tan \alpha = 3$. D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 45 (THPT Đoàn Thượng - 2018). Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó cosin của góc giữa hai đường thẳng nào sau đây có giá trị bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

- A. $(AB; DM)$. B. $(AD; DM)$. C. $(AM; DM)$. D. $(AB; AM)$.

Câu 46 (THPT Lương Tài - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = a\sqrt{6}$, cạnh $SC = 4\sqrt{3}a$. Hai mặt phẳng (SAD) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và M là trung điểm của SC . Tính góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ACD)

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 47 (THPT Trần Nhật Duật - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của S trên (ABC) thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2AH$, biết mặt bên (SAC) hợp với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 48 (THPT Hàm Rồng - 2018). Tứ diện đều $ABCD$ số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 49 (THPT Lương Thế Vinh - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SA với mặt phẳng đáy biết rằng thể tích của khối chóp $S.BCD$ bằng $\frac{a^3}{6}$.

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. Đáp án khác.

Câu 50 (THPT Kinh Môn - 2018). Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2B	3C	4A	5B	6D	7B	8D	9A	10A
11B	12D	13B	14D	15A	16A	17C	18D	19B	20B
21A	22A	23B	24C	25C	26B	27A	28C	29C	30C
31B	32A	33B	34A	35D	36C	35C	38B	39C	40C
41A	42B	43A	44A	45A	46B	47A	48D	49B	50A

CHỦ ĐỀ 29: BÍ QUYẾT GIẢI BÀI TOÁN HAY GẶP VỀ NÓN, TRỤ, CẦU

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Công thức về hình nón, khối nón

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l$

Diện tích đáy: $S_d = \pi r^2$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi \cdot r \cdot (r + l)$

Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Thiết diện qua trục SI là tam giác cân

Thiết diện qua đỉnh S là tam giác cân SAI

Thiết diện vuông góc với trục SI là đường tròn tâm J

2. Công thức về hình trụ, khối trụ

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h$

Diện tích đáy: $S_d = 2\pi R^2$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi \cdot R(R + h)$

Thể tích: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$

Thiết diện chứa trục OO' là hình chữ nhật ABCD có diện tích $S = 2Rh$

Thiết diện song song với trục là hình vuông ADEF có khoảng cách giữa trục và thiết diện là OI

Thiết diện vuông góc với trục là hình tròn tâm J bán kính R

3. Công thức về mặt cầu, khối cầu

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Thiết diện qua tâm là đường tròn tâm I, bán kính R

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Các bài toán thường gặp về hình nón, khối nón

Ví dụ (1) - Chuyên Thái Bình Năm 2018: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho

A. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$

B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$

C. $V = 3\pi a^3$

D. $V = \pi a^3$

Giải

Góc ở đỉnh của nón là 60°

$$\Rightarrow \angle ASB = 60^\circ \Rightarrow SA = AB = SB = 2r$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$$

$$\text{Khi đó: } S_{xq} = \pi r l = 2\pi r^2 = 6\pi a^2$$

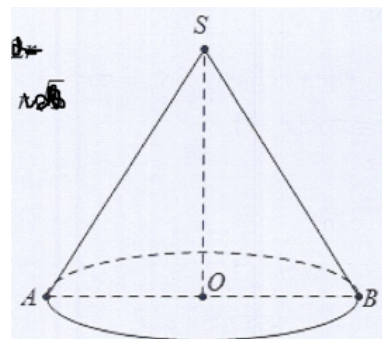
$$\Rightarrow r = a\sqrt{3}$$

Vậy thể tích khối nón là:

$$V_N = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi (a\sqrt{3})^3 = 3\pi a^3$$

$\Rightarrow$ Chọn C

Ghi nhớ



Góc ở đỉnh của nón là $\angle ASO$ với S là đỉnh của nón, AB là một đường kính của đáy và mặt phẳng (SAB) chứa trục SO

Ví dụ (2)- Chuyên Vĩnh Phúc năm 2017: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a, thể tích của khối nón là

A. $\frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}$

B. $\frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{6}\pi a^3\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{8}\pi a^3\sqrt{3}$

Giải

Thiết diện là tam giác ABB' đều như hình vẽ

Ta có: $r_d = OB = \frac{a}{2}; h = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$

=> Chọn A

Ghi nhớ

Thiết diện qua trục là tam giác ABB' với BB' là một đường kính qua tâm O và $\triangle ABB'$ chứa trục AO

Ta luôn có $\triangle ABB'$ cân tại đỉnh A và $AB' = AB = l$

Ví dụ (3) - THPT Lương Thế Vinh Năm 2018: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Tam giác SAB có diện tích bằng $2a^2$. Thể tích khối nón có đỉnh là S và đường tròn đáy nội tiếp ABCD là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$

B. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{7}$

C. $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{4}$

D. $\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$

Giải

Ta có $S_{SAB} = \frac{1}{2}SH \cdot AB = 2a^2 \Rightarrow SH = 4a$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \frac{3a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{3a\sqrt{7}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{7}}{8}$

=> Chọn A

Công thức nhanh

Đường tròn nội tiếp của hình vuông ABCD cạnh a có bán

$r = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ (4) - Chuyên Thái Bình Năm 2018: Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ (cm). Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 (cm). Tính diện tích của thiết diện đó

A. 300cm^2

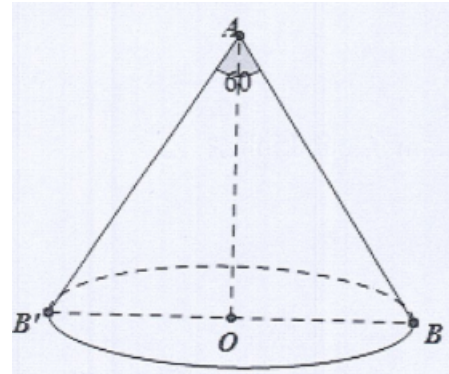
B. 400cm^2

C. 500cm^2

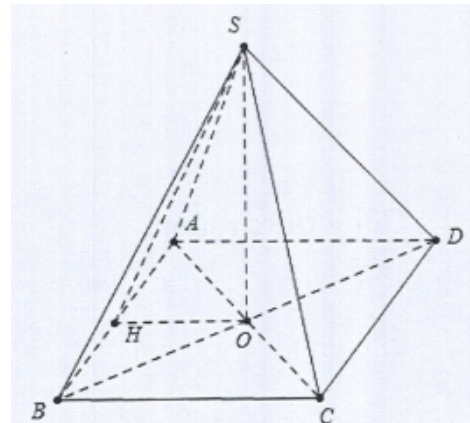
D. 406cm^2

=> Chọn C

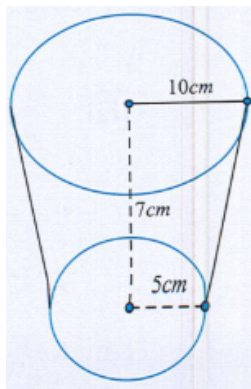
Ví dụ (5) - THPT Võ Nguyên Giáp Năm 2017: Có một chiếc cốc có dạng như hình vẽ. Biết chiều cao của chiếc cốc là 7cm, bán kính đáy của cốc là 5cm, bán kính miệng cốc là 10cm. Tính thể tích V của chiếc cốc



kính



kính



- A. $\frac{1400\pi}{3}(cm^3)$ B. $\frac{1225\pi}{3}(cm^3)$ C. $1225\pi(cm^3)$ D. $1225(cm^3)$

=> Chọn B

Ví dụ (6) - THPT Hoàng Văn Thụ Năm 2017: Bạn A có một tấm bìa hình tròn (như hình vẽ), bạn ấy muốn dùng tấm bìa đó tạo thành một cái phễu hình nón, vì vậy bạn phải cắt bỏ phần quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm của hình quạt tròn dùng làm phễu. Giá trị của x để thể tích phễu lớn nhất là

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{(6-2\sqrt{6})\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$

=> Chọn D

Dạng 2: Các bài toán thường gặp về hình trụ

Ví dụ (7) Bộ GD&ĐT Năm 2018: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 4. tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao tứ diện ABCD

- A. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ B. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$ C. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$ D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$

Giải

Dựng hình như hình vẽ bên ta có:

Bán kính đường tròn nội tiếp đáy: $r = HM = \frac{1}{3}BM = \frac{4\sqrt{3}}{6}$

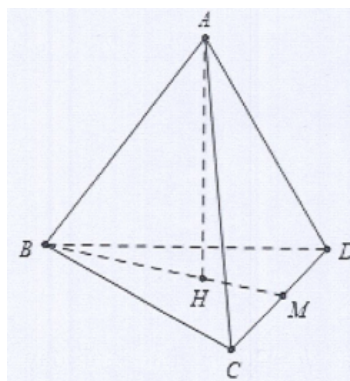
Chiều cao: $h = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

Do đó $S_{xq(T)} = 2\pi rh = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$

=> Chọn A

Công thức nhanh

Tam giác đều ABC cạnh a có bán kính nội tiếp bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, còn bán kính ngoại tiếp $R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



Ví dụ (8) - Sở GD&ĐT Bạc Liêu năm 2018: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật ABCD có AB và CD thuộc hai đáy của hình trụ, $AB = 4a$, $AC = 5a$. Thể tích của khối trụ

A. $8\pi a^3$

B. $12\pi a^3$

C. $4\pi a^3$

D. $16\pi a^3$

Giải

Ta có:

$$h = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 3a$$

$$r = \frac{AB}{2} = 2a$$

$$\text{Khi đó } V_{(T)} = \pi r^2 h = 12a^3 \pi$$

=> Chọn B**Ghi nhớ**

ABCD được gọi là thiết diện qua trục của hình trụ trên và ABCD luôn là hình chữ nhật

Ví dụ (9) - Chuyên Biên Hòa Năm 2017: Trong không gian cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 1$, $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó

A. 10π

B. 4π

C. 2π

D. 6π

Giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

Khi quay hình chữ nhật xung quanh trục MN ta được hình trụ

$$\text{Bán kính đường tròn đáy là } r = AM = \frac{AD}{2} = 1$$

$$\text{Chiều cao của hình trụ là } h = AB = 1$$

=> Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$$S_{tp} = 2\pi r(r + h) = 4\pi$$

=> Chọn B**Mở rộng**

Nếu quay hình chữ nhật ABCD quanh đường chéo AC ta sẽ được một khối tròn xoay gồm 2 khối nón 2 bên và 1 khối trụ ở giữa

Ví dụ (10) - THPT Lý Thái Tổ Năm 2018: Một hình trụ có đường cao 10(cm) và bán kính đáy bằng 5(cm). Gọi (P) là mặt phẳng song song với trục của hình trụ và cách trục 4(cm). Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi (P)

A. $60(\text{cm}^2)$

B. $40(\text{cm}^2)$

C. $30(\text{cm}^2)$

D. $80(\text{cm}^2)$

=> Chọn A

Ví dụ (11) - Sở GD&ĐT Bắc Giang Năm 2017: Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và tâm O', $OO' = a$. Trên đường tròn (O) lấy điểm A, trên đường tròn (O') lấy điểm B sao cho $AB = 2a$ và thể

$$\text{tích khối tứ diện } OO'AB \text{ bằng } \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}. \text{ Tính thể tích khối trụ đã cho}$$

A. πa^3

B. $\frac{2\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{4\pi a^3}{3}$

=> Chọn A

Ví dụ (12) - Sở GD&ĐT Bắc Ninh Năm 2017: Cho một hình trụ (T) có chiều cao và bán kính đều bằng $3a$. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB, CD lần lượt là hai dây cung của hai đường tròn đáy, cạnh AD, BC không phải là đường sinh của hình trụ (T). Tính cạnh của hình vuông này

A. $3a\sqrt{5}$

B. $6a$

C. $3a$

D. $\frac{3a\sqrt{10}}{2}$

=> Chọn D

Dạng 3: Các bài toán thường gặp về mặt cầu, khối cầu

Ví dụ (13) - THPT Nguyễn Viết Xuân Năm 2018: Một hình cầu có thể tích $\frac{4\pi}{3}$ ngoại tiếp một hình lập phương. Thể tích của khối lập phương là

A. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

B. $\frac{8}{3}$

C. 1

D. $2\sqrt{3}$

Giải

Đặt cạnh hình lập phương là a

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \Rightarrow R = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Thể tích khối lập phương là: $V = a^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$

=> Chọn A

Bình luận

Bán kính ngoại tiếp hình lập phương là $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và bán kính nội tiếp là $r = \frac{a}{2}$

Ví dụ (14) - Chuyên Thái Nguyên Năm 2018: Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều ABCD cạnh $a\sqrt{2}$

A. $R = a\sqrt{3}$

B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $R = \frac{3a}{2}$

D. $R = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Giải

Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$, ta có $AG \perp (BCD)$ nên AG là trục của $\triangle BCD$

Gọi M là trung điểm của AB

Qua M dựng đường thẳng $\Delta \perp AB, \{I\} = \Delta \cap AG$

Do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm là I và bán kính $R = IA$

Ta có $\triangle AMI$ và $\triangle AGB$ là hai tam giác vuông đồng dạng nên

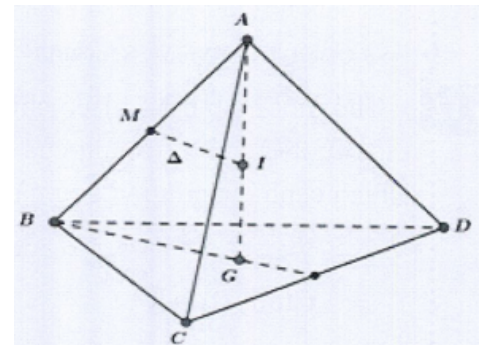
$$\frac{AI}{AB} = \frac{AM}{AG} \Rightarrow AI = AB \cdot \frac{AM}{AG}$$

Do

$$AB = a\sqrt{2}, AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}, AG = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$R = AI = a\sqrt{2} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Khi đó



=> Chọn B

Công thức nhanh

$$R = \frac{AB^2}{2SG} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ví dụ (15) - Chuyên Thái Nguyên Năm 2018: Cho mặt cầu tâm O, bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (P) nằm cách tâm O một khoảng bằng 1 và cắt mặt cầu theo một đường tròn có chu vi bằng

A. $4\sqrt{2}\pi$

B. $6\sqrt{2}\pi$

C. $3\sqrt{2}\pi$

D. $8\sqrt{2}\pi$

Giải

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu tâm O theo một đường tròn tâm H và bán kính $r = HA$

Ta có $OH = d(O; (P)) = 1; OA = R = 3$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông HOA ta có

$$r = HA = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Vậy chu vi đường tròn thiết diện là $2\pi r = 4\sqrt{2}\pi$

$\Rightarrow$ Chọn A

Công thức

Gọi H là tâm đường tròn thiết diện có $OH \perp (P)$ và quan hệ giữa OH,

$$R, r \text{ là } R^2 = OH^2 + r^2$$

Ví dụ (16) - Chuyên Lam Sơn Năm 2017: Trên quả địa cầu, vĩ tuyến 30 độ Bắc chia đôi khối cầu thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích giữa phần lớn và phần bé của khối cầu đó

A. $\frac{27}{8}$

B. $\frac{27}{5}$

C. $\frac{24}{5}$

D. $\frac{9}{8}$

$\Rightarrow$ Chọn B

Ví dụ (17) - THPT Võ Nguyên Giáp Năm 2017: Cho (S) là mặt cầu ngoại tiếp một hình tứ diện đều cạnh a. Tính bán kính R của mặt cầu (S)

A. $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $R = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

D. $R = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ Chọn A

Ví dụ (18) - THPT Võ Nguyên Giáp Năm 2017: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính diện tích xung quanh mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $\frac{31\pi a^2}{3}$

B. $\frac{43\pi a^2}{12}$

C. $\frac{43\pi a^2}{48}$

D. $\frac{43\pi a^2}{48}$

$\Rightarrow$ Chọn B

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2018). Một hình cầu có thể tích $\frac{4\pi}{3}$ ngoại tiếp một hình lập phương. Thể tích của khối lập phương là

A. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

B. $\frac{8}{3}$

C. 1

D. $2\sqrt{3}$

Câu 2 (Sở GD&ĐT Nam Định - 2018). Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2a. Thể tích của khối nón là

A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$

Câu 3 (THPT Kim Liên - 2018). Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng $2a$, các mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

- A. $S = \frac{25\pi a^2}{3}$ B. $S = \frac{32\pi a^2}{3}$ C. $S = \frac{8\pi a^2}{3}$ D. $S = \frac{a^2}{12}$

Câu 4 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Một hình nón có chiều cao bằng a và thiết diện qua trục của hình nón đó là tam giác vuông. Tính theo a diện tích xung quanh của hình nón đó

- A. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}a^2$ B. $2\pi a^2$ C. $2\sqrt{2}\pi a^2$ D. $\sqrt{2}\pi a^2$

Câu 5 (THPT Kim Liên - 2018). Cho tứ diện đều ABCD có cạnh $2a$. Tính bán kính r của mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của tứ diện

- A. $r = \frac{\sqrt{6}a}{8}$ B. $r = \frac{\sqrt{6}a}{6}$ C. $r = \frac{\sqrt{6}a}{12}$ D. $r = \frac{\sqrt{6}a}{3}$

Câu 6 (THPT Lương Tài - 2018). Tính diện tích của mặt cầu (S) khi biết nửa chu vi đường tròn lớn của nó bằng 4π

- A. $S = 16\pi$ B. $S = 64\pi$ C. $S = 8\pi$ D. $S = 32\pi$

Câu 7 (THPT Kim Liên - 2018). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

- A. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$ B. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi a^3}{54}$ C. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi a^3}{18}$ D. $V = \frac{5\pi a^3}{3}$

Câu 8 (Sở GD&ĐT Bạc Liêu - 2018). Cho tứ diện ABCD có tam giác BCD vuông tại B, AC vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AC = 5a$, $BC = 3a$ và $BD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

- A. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$ B. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$ C. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$ D. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$

Câu 9 (Sở GD&ĐT Bạc Liêu - 2018). Cho (S) là một mặt cầu cố định có bán kính R . Một hình trụ (H) thay đổi nhưng luôn có hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối cầu (S) và V_2 là thể

tích lớn nhất của khối trụ (H). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{6}$ B. $\frac{V_1}{V_2} = 2$ C. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{3}$ D. $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{2}$

Câu 10 (Sở GD&ĐT Bạc Liêu - 2018). Thể tích V của một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là

- A. $V = \frac{1}{3}B^2h$ B. $V = Bh$ C. $V = \frac{1}{3}Bh$ D. $V = \frac{1}{2}Bh$

Câu 11 (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2018). Cho hình lăng trụ tam giác đều có chín cạnh đều bằng a . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó là

- A. $\frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{54}$ B. $\frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{18}$ C. $\frac{7\pi a^3 \sqrt{3}}{54}$ D. $\frac{7\pi a^3 \sqrt{7}}{54}$

Câu 12 (Sở GD&ĐT Nam Định - 2018). Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, $AB = AC = a$. Quay tam giác ABC (bao gồm cả điểm trong tam giác) quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay đó bằng

- A. $\frac{\pi a^3}{3}$ B. $\frac{\pi a^3}{4}$ C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{4}$

Câu 13 (THPT Triệu Sơn 3 - 2018). Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của hình trụ là

- A. $S = 4\pi a^2$ B. $S = 16\pi a^2$ C. $S = 8\pi a^2$ D. $S = 24\pi a^2$

Câu 14 (THPT Triệu Sơn 3 - 2018). Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là:

- A. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $R = 2\sqrt{3}$ C. $R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 15 (Chuyên Hùng Vương - 2018). Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đó

- A. $R = 2a\sqrt{2}$ B. $R = a$ C. $R = a\sqrt{2}$ D. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 16 (Chuyên Lam Sơn - 2018). Tính thể tích V của khối cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng 1

- A. $V = \frac{\sqrt{2}\pi}{24}$ B. $V = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ C. $V = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$ D. $V = \frac{\sqrt{2}\pi}{12}$

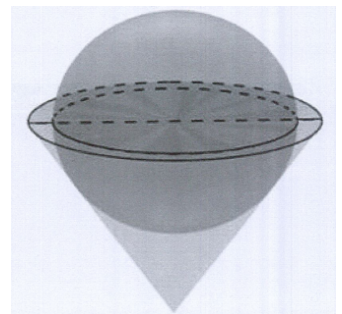
Câu 17 (Chuyên Lam Sơn - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\angle D = 120^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 3a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.BCD$

- A. $R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$ B. $R = \frac{5a}{3}$ C. $R = \frac{\sqrt{5}a}{3}$ D. $R = \frac{4a}{3}$

Câu 18 (THPT Triệu Sơn 1 - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Mặt cầu đi qua bốn điểm S, A, B, E có bán kính là

- A. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$ B. $\frac{a\sqrt{41}}{24}$ C. $\frac{a\sqrt{41}}{16}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{16}$

Câu 19 (THPT Triệu Sơn - 2018). Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu không thấm nước, có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là V . Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu chìm trong nước (hình bên). Tính thể tích nước còn lại trong bình



- A. $\frac{1}{6}V$ B. $\frac{1}{3}V$ C. V
D. $\frac{1}{\pi}V$

Câu 20 (Chuyên Thái Nguyên - 2018). Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a\sqrt{2}$

- A. $R = a\sqrt{3}$ B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $R = \frac{3a}{2}$ D. $R = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Câu 21 (Sở GD&ĐT Vĩnh Phúc - 2018). Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu và có ba kích thước là a, b, c . Khi đó bán kính mặt cầu bằng

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ B. $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3}$ C. $\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$ D. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Câu 22 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = SB = AB = AC = a; SC = a\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC bằng

- A. $2\pi a^2$ B. πa^2 C. $8\pi a^2$ D. $4\pi a^2$

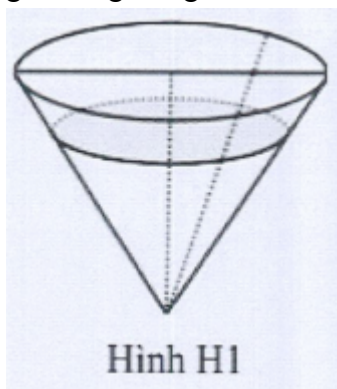
Câu 23 (Chuyên Bắc Ninh - 2018). Trong không gian, cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Tính thể tích V của khối trụ tạo bởi hình trụ đó

- A. $V = \frac{\pi}{2}$ B. $V = \pi$ C. $V = 2\pi$ D. $V = 4\pi$

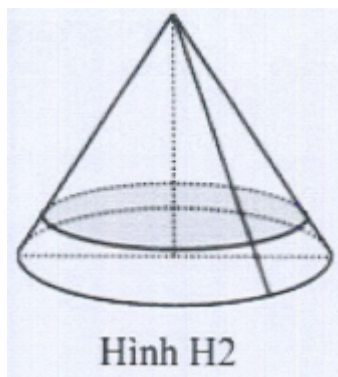
Câu 24 (Chuyên Bắc Ninh - 2018). Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $R\sqrt{3}$, bán kính đáy R và hình nón có đỉnh là O', đáy là hình tròn (O;R). Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích xung quanh của hình nón

- A. 2 B. 3 C. i D. $\sqrt{3}$

Câu 25 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh - 2018). Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là 20cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 10cm (Hình H1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (Hình H2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng với giá trị nào sau đây?



Hình H1



Hình H2

- A. $\sqrt[3]{7}cm$ B. 1cm C. $az^4 + bz^2 + c = 0$ D. $(20\sqrt[3]{7} - 10)cm$

Câu 26 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh - 2018). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = 2a$. Mặt bên (SAB), (SCA) lần lượt là các tam giác vuông tại B, C. Biết thể tích khối chóp S.ABC bằng $\frac{2}{3}a^3$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

- A. $R = a\sqrt{2}$ B. $R = a$ C. $R = \frac{3a}{2}$ D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 27 (Sở GD&ĐT Bình Thuận - 2018). Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều cạnh bằng 4. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón. Tính bán kính của mặt cầu

- A. $\sqrt{3}$ B. 4 C. $4\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

Câu 28 (Sở GD&ĐT Bình Thuận - 2018). Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, $BC = 2AB = 2AD = 2a$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang ABCD quanh cạnh AB là

- A. $\frac{7\pi a^3}{3}$ B. $7\pi a^3$ C. $\frac{\pi a^3}{3}$ D. $\frac{7\pi a^3}{2}$

Câu 29 (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018). Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA = 2a, AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho

- A. a B. 2a C. $a\sqrt{2}$ D. $2a\sqrt{2}$

$$\frac{8\pi a^2}{3}$$

Câu 30 (THPT Lương Văn Tụy - 2018). Cho mặt cầu có diện tích bằng $\frac{8\pi a^2}{3}$, bán kính của mặt cầu bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 31 (Sở GD&ĐT Cần Thơ - 2018). Cho mặt phẳng (P) cắt mặt cầu S(I;R) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 3\text{cm}$, khoảng cách từ I đến (P) bằng 2cm. Diện tích của mặt cầu S(I;R) bằng

- A. $52\pi\text{cm}^2$ B. $13\pi\text{cm}^2$ C. $4\sqrt{13}\pi\text{cm}^2$ D. $4\sqrt{5}\pi\text{cm}^2$

Câu 32 (Sở GD&ĐT Cần Thơ - 2018). Diện tích xung quanh của một hình nón có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng 60° là

- A. $2\pi a^2$ B. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$ C. $\pi a^2 \sqrt{3}$ D. πa^2

Câu 33 (Sở GD&ĐT Cần Thơ - 2018). Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $\angle B = 30^\circ$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay tam giác ABC quanh cạnh BC là

- A. $\frac{3a^3\pi}{2}$ B. $\frac{a^3\pi}{6}$ C. $\frac{3a^3\pi}{8}$ D. $\frac{a^3\pi}{2}$

Câu 34 (THPT Cẩm Bình - 2018). Tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương đó là

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ B. $\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}$ C. $\frac{3}{\pi\sqrt{2}}$ D. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

Câu 35 (THPT Phan Ngọc Hiển - 2018). Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều. Khai triển hình nón theo một đường sinh, ta được một hình quạt tròn có góc ở tâm là α . Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ B. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ C. $\alpha = \pi$ D. $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Câu 36 (THPT Lê Đức Thọ - 2018). Cho tam giác vuông cân ABC cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$. Quay tam giác quanh đường cao AH ta được hình nón tròn xoay. Thể tích khối nón bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}\pi}{12}$ B. $\frac{a^3\pi}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}\pi}{3}$ D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

Câu 37 (THPT Hàm Rồng - 2018). Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (T) là

- A. $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$ B. $S_{tp} = \pi Rl + 2\pi R^2$ C. $M = 6$ D. $M = 2 + 2\sqrt{5}$

Câu 38 (THPT Hải An - 2018). Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5 cm và khoảng cách giữa hai đáy là 7 cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Tính diện tích S của thiết diện được tạo thành

- A. $S = 55(\text{cm}^2)$ B. $S = 56(\text{cm}^2)$ C. $S = 53(\text{cm}^2)$ D. $S = 46(\text{cm}^2)$

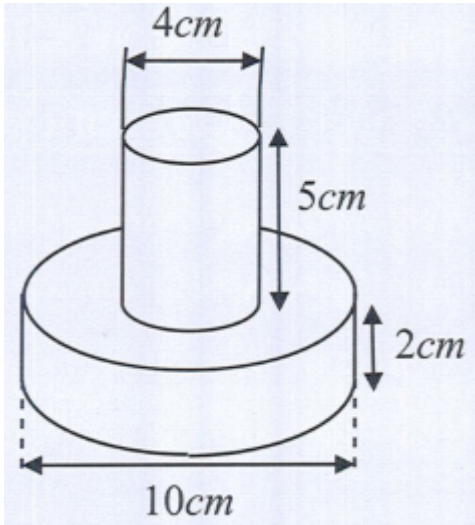
Câu 39 (Thi THPT Quốc gia 2018). Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $\alpha_3 = 1$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N)

- A. $V = 3\pi$ B. $V = 3\sqrt{3}\pi$ C. $V = 9\pi$ D. $V = 9\sqrt{3}\pi$

Câu 40 (THPT Kiến An - 2018). Cho nửa hình tròn tâm O đường kính AB. Người ta ghép hai bán kính OA, OB lại tạo thành mặt xung quanh một hình nón. Tính góc ở đỉnh của hình nón đó

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 41 (THPT Bến Tre - 2018). Một chi tiết máy (gồm 2 hình trụ xếp chồng lên nhau) có các kích thước cho trên hình vẽ. Tính diện tích bề mặt S và thể tích V của chi tiết đó được



- A. $S = 94\pi (cm^2), V = 70\pi (cm^3)$
 B. $S = 98\pi (cm^2), V = 30\pi (cm^3)$
 C. $S = 90\pi (cm^2), V = 70\pi (cm^3)$
 D. $S = 94\pi (cm^2), V = 30\pi (cm^3)$

Câu 42 (THPT Hải An - 2018). Một hình trụ có bán kính đáy là r . Gọi O, O' là tâm của hai đáy với $OO' = 2r$. Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O' . Phát biểu nào dưới đây sai?

- A. Diện tích mặt cầu bằng diện tích xung quanh của hình trụ
 B. Diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần hình trụ
 C. Thể tích khối cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích khối trụ
 D. Thể tích khối cầu bằng $\frac{3}{4}$ thể tích khối trụ

Câu 43 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng 3 . Tính thể tích khối cầu đi qua các đỉnh của lăng trụ

- A. $\frac{1}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$ B. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$ C. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}} \sqrt{(4a^2 + b^2)^3}$ D. $\frac{\pi}{18\sqrt{2}} \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$

Câu 44 (THPT Lương Thế Vinh - 2018). Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ

- A. $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ B. $\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$ D. $\frac{4\pi}{9}$

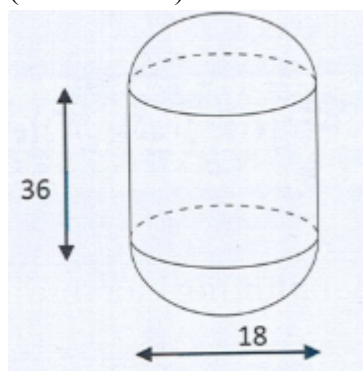
Câu 45 (Chuyên Thái Bình - 2018). Một hình trụ có bán kính $r = 5cm$ và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7cm$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3cm$. Diện tích của thiết diện được tạo thành là

- A. $S = 56(cm^2)$ B. $S = 55(cm^2)$ C. $S = 53(cm^2)$ D. $S = 46(cm^2)$

Câu 46 (Chuyên Thái Bình - 2018). Một hình trụ có bán kính $r = 5cm$ và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7cm$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3cm$. Diện tích của thiết diện được tạo thành là

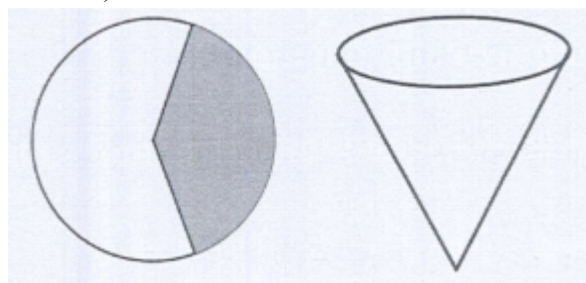
- A. $S = 56(cm^2)$ B. $S = 55(cm^2)$ C. $S = 53(cm^2)$ D. $S = 46(cm^2)$

Câu 47 (THPT Thạch Thành 1 - 2018). Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (như hình vẽ). Các kích thước được ghi cùng đơn vị. Hãy tính thể tích của bồn chứa



- A. $\pi 4^2 \cdot 3^5$ B. $\pi 4^5 \cdot 3^2$ C. $\pi \frac{4^2}{3^5}$ D. $\pi \frac{4^5}{3^2}$

Câu 48 (THPT Yên Lạc 2 - 2018). Với một miếng tôn hình tròn có bán kính $R=9\text{cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (như hình vẽ). Hình nón có thể tích lớn nhất khi độ dài cung tròn của hình quạt tạo thành hình nón bằng



- A. $8\pi\sqrt{6}\text{cm}$ B. $2\pi\sqrt{6}\text{cm}$ C. $\pi\sqrt{6}\text{cm}$ D. $P=84$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1A	2B	3A	4D	5B	6B	7B	8D	9C	10B
11A	12B	13B	14A	15C	16A	17B	18A	19B	20B
21A	22D	23A	24D	25C	26C	27A	28A	29C	30A
31A	32A	33D	34A	35C	36A	35C	38B	39A	40C
41C	42D	43B	44B	45A	46A	47A	48D		

BÍ QUYẾT GIẢI CÁC DẠNG TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng d :

Là vectơ có phương song song hoặc trùng d và thường kí hiệu là $\vec{u}(a;b;c)$

2. Phương trình chính tắc:

Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{u}(a;b;c)$ thì có phương trình là

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

3. Phương trình tham số:

Nếu đặt cả 3 phân số trên là t : $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t$ rồi nhân chéo chuyển vế thì ta được:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad d$$

thì ta gọi đây là phương trình tham số của đường thẳng

4. Phương trình tổng quát:

Nếu ra coi đường thẳng d được sinh ra là giao tuyến của mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt

phẳng $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ thì $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng

5. Tích có hướng của 2 vectơ

$\vec{u}(a;b;c)$ và $\vec{u'}(a';b';c')$ là một vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ và có công thức liên hệ:

$$\vec{n} = [\vec{u}; \vec{u'}] = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$$

6. Tích hỗn tạp của 3 vectơ

$\vec{u}; \vec{u'}; \vec{u''}$ là một đại lượng có giá trị $[\vec{u}; \vec{u'}] \cdot \vec{u''}$

Nếu $[\vec{u}; \vec{u'}] \cdot \vec{u''} = 0$ thì 3 vectơ trên đồng phẳng (cùng thuộc 1 mặt phẳng)

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Vị trí tương đối

Cho đường thẳng d qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, đường thẳng d' qua điểm M' có vectơ chỉ phương $\vec{u'}$

Nếu $d // d'$ thì $\vec{u}$ tỉ lệ với $\vec{u'}$ và giữ 2 đường thẳng không có điểm chung

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 = \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $2x+3y-9=0$, $y+2z+5=0$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là

- A. Song song B. Chéo nhau C. Cắt nhau D. Trùng nhau

Giải

Vì d_2 là giao tuyến của $(P): 2x+3y-9=0$ và $(Q): y+2z+5=0$ nên d_2 thuộc cả (P) và (Q)

$$\begin{cases} \vec{n}_P \perp (P) \Rightarrow \vec{n}_P \perp \vec{u}_{d_2} \\ \vec{n}_Q \perp (Q) \Rightarrow \vec{n}_Q \perp \vec{u}_{d_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{d_2} \parallel [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (6; -4; 2)$$

$$\Rightarrow \vec{u}_{d_2} = (3; -2; 1)$$

Gọi $N(x_N; y_N; z_N)$ thuộc $d_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_N + 3y_N - 9 = 0 \\ y_N + 2z_N + 5 = 0 \end{cases}$

Chọn $x_N = 0 \Rightarrow y_N = 3, z_N = 1 \Rightarrow N(0; 3; 1)$

Lại có $M(1; 7; 3)$ là 1 điểm thuộc d_1

$$\begin{cases} [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] = (9; 10; -7) \\ [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] \cdot \vec{MN} = -9 - 40 + 49 = 0 \end{cases}$$

Xét $\vec{MN} = (-1; -4; -7)$ từ đó suy ra tích hỗn tạp

Vậy d_1, d_2 đồng phẳng $\Rightarrow$ cùng thuộc 1 mặt phẳng

$\Rightarrow d_1, d_2$ cắt nhau

$\Rightarrow$ Chọn C

Chú ý

Một vectơ $\vec{u}_{d_2}(9; -6; 3)$ là vectơ chỉ phương thì $k \cdot \vec{u}_{d_2} = \frac{-1}{3}(9; -6; 3) = (3; -2; 1)$ cũng là vectơ chỉ phương.

Ví dụ 2 (THPT Lê Quý Đôn – Năm 2017): Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $d': \frac{x-3}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. d song song với d' B. d cắt d' C. d trùng với d' D. d chéo d'

Giải

Đường thẳng d qua $A(1; 7; 3)$ và có vtcp $\vec{u}_1(2; 1; 4)$, đường thẳng d' qua điểm $B(3; -1; -2)$ và có vtcp $\vec{u}_2(6; -2; 1)$

Ta có $\vec{u}_1 \neq k \cdot \vec{u}_2 \Rightarrow d, d'$ cắt hoặc chéo nhau

Xét $\begin{cases} \overrightarrow{[u_d; u_{d'}]} = \overrightarrow{(9; 22; -10)} \\ AB = \overrightarrow{(1; -8; -5)} \end{cases}$ từ đó suy ra tích hỗn tạp $\overrightarrow{[u_d; u_{d'}]} \cdot \overrightarrow{MN} = 9 - 172 + 50 = -113 \neq 0$

Vậy d, d' không đồng phẳng $\Rightarrow$ không thuộc 1 mặt phẳng $\Rightarrow d, d'$ chéo nhau

$\Rightarrow$ Chọn D

Bình luận

Ta hiểu d_1, d_2 có điểm A chung thì không thể // vậy chỉ có thể trùng nhau

Ví dụ 3 (Sở GD&ĐT Điện Biên – Năm 2017): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường

$$\text{thẳng} \quad d_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{3} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x=2t \\ y=1+4t \\ z=2+6t \end{cases}$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. d_1 và d_2 cắt nhau
- B. d_1 và d_2 trùng nhau
- C. d_1 và d_2 chéo nhau
- D. d_1 và d_2 song song với nhau

Giải

$d_1 \vee \mu d_2$ có cùng vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1(1;2;3)} \Rightarrow d_1 \vee \mu d_2$ chỉ có thể song song hoặc trùng nhau

$\Rightarrow$ Mà điểm $A(0;1;2) \in d_1 \cap d_2$ nên $d_1 \equiv d_2$

=> Chọn B

Bình luận

Ta hiểu d_1, d_2 có điểm A chung thì không thể // vậy chỉ có thể trùng nhau

Ví dụ 4 (Chuyên Lam Sơn – Năm 2017): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+3}{-3}$ và $d_2: \begin{cases} x=3t \\ t=-1+2t, (t \in R) \\ z=0 \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. d_1 chéo d_2
- B. d_1 cắt và vuông góc với d_2
- C. d_1 cắt và không vuông góc với d_2
- D. d_1 song song với d_2

=> Chọn C

Ví dụ 5 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}; d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}; d_3: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}; d_4: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Gọi Δ là đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ ?

- A. $\vec{u} = (2; 1; 1)$ B. $\vec{u} = (2; 1; -1)$ C. $\vec{u} = (2; 0; -1)$ D. $\vec{u} = (1; 2; -2)$

=> Chọn B

Dạng 2: Lập phương trình đường thẳng

Phương pháp: Để lập phương trình đường thẳng ta đi tìm 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng và 1 điểm M mà đường thẳng đi qua

Chú ý: Nếu $\vec{u}$ vuông góc với 2 vectơ cho trước thì $\vec{u}$ là tích có hướng của 2 vectơ đó

Ví dụ 6 (THPT Lương Thế Vinh – Năm 2017): Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; -3; 4)$; $B(-2; -5; -7)$; $C(6; -3; -1)$. Phương trình đường trung tuyến AM của tam giác là

- A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -8 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 4 - 8t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
- C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ D. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 4 - 11t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Giải

Vì M là trung điểm của BC nên

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-5 - 3}{2} = -4 \\ z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{-7 - 1}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow M(2; -4; -4)$$

=> Ta có: $\vec{AM}(1; -1; -8)$. Vì trung tuyến AM đi qua $A(1; -3; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{AM}$ nên phương

trình đường trung tuyến AM của tam giác là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 4 - 8t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

=> Chọn B

Phân tích

Đường trung tuyến là đường đi qua đỉnh A và trung điểm M của đáy BC như vậy ra có thể coi VD này là dạng viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm A, M cho trước.

Ví dụ 7 (Sở GD&ĐT Thanh Hóa – Năm 2017): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;0;2)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 6z + 4 = 0$ và $(Q): x + y - 2z + 4 = 0$

- A. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Giải

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_P = (2; -3; 6) \\ \vec{n}_Q = (1; 1; -2) \end{cases} \Rightarrow [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (0; 10; 5)$

Lại có $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_Q \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = (0; 10; 5)$

$\Rightarrow$ Đường thẳng d qua $A(-1;0;2)$ và nhận $[\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (0; 10; 5)$ là một vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow d: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Chọn D

Tổng kết

Đường thẳng song song với 2 mặt phẳng thì nhận 2 vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng đó làm cặp vectơ pháp tuyến và $\vec{u}_d = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q]$

Ví dụ 8 (Chuyên Vị Thanh – Năm 2017): Viết phương trình đường thẳng d qua $M(1;-2;3)$ và vuông

$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}, d_2: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 1+3t \end{cases}$
góc với hai đường thẳng

- A. $\begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+t \\ z = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2+t \\ z = 3+t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2+t \\ z = 3+t \end{cases}$

Giải

Ta có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = [\vec{u}_1; \vec{u}_2]$ với $\vec{u}_1(1; -1; 3)$ là vectơ chỉ phương của d_1 và $\vec{u}_2(-1; 1; 3)$ là vectơ chỉ phương của d_2

$$\text{Vì } \begin{cases} d \perp d_1 \Rightarrow u_d \perp \vec{u}_{d_1} \\ d \perp d_2 \Rightarrow u_d \perp \vec{u}_{d_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-1; 1; 0)$$

$$\Rightarrow u_d = (-1; 1; 0)$$

Vậy phương trình đường thẳng d sẽ là
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

=> Chọn A

Tổng kết

Đường thẳng vuông góc với 2 đường thẳng thì nhận vectơ chỉ phương của 2 đường thẳng đó là cặp vectơ pháp tuyến và $u_d = [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}]$

Ví dụ 9 (Chuyên Lê Thánh Tông – Năm 2017): Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 2; 0); B(-3; 0; 0)$

Viết phương trình trung trực Δ của đoạn AB biết Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y + z = 0$

A. $(\Delta) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$

B. $(\Delta) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

C. $(\Delta) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -t \end{cases}$

D. $(\Delta) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

=> Chọn B

Ví dụ 10 (THPT Trần Phú – Năm 2017): Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$

. Phương trình đường thẳng a nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d là

A. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -4 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$

=> Chọn D

Dạng 3: Khoảng cách

Công thức: Cho 2 đường thẳng chéo nhau d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$ thì

$$d(d; d') = \frac{|\vec{MM'} \cdot [\vec{u}; \vec{u'}]}{||[\vec{u}; \vec{u'}}]||}$$

$$d(A; d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{u_d} \right|}$$

Cho một điểm A bất kì thì

Ví dụ 11 (Sở GD&ĐT Phú Thọ - Năm 2017): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng d và d' .

- A. $h = \frac{4\sqrt{21}}{21}$ B. $h = \frac{22\sqrt{21}}{21}$ C. $h = \frac{8\sqrt{21}}{21}$ D. $h = \frac{10\sqrt{21}}{21}$

Giải

Cách 1:

Ta có: $A(-1; -1; 1) \in d$ và d có vtcp $\overrightarrow{u}(2; 3; 2)$; $B(1; -2; 3) \in d'$ và d' có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; 1; 1)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}(2; -1; 2)$

$$h = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1} \right] \cdot \overrightarrow{AB} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1} \right] \right|} = \frac{8}{\sqrt{21}}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' là:

Cách 2: Viết PT mặt phẳng (P) chứa d và song song với d' khi đó $(P): x + 2y - 4z - 1 = 0$

$$\Rightarrow \text{Tính } d(M(1; -2; 3); (P)) = \frac{8}{\sqrt{21}}$$

=> Chọn C

Phân tích

$$h = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right] \cdot \overrightarrow{AB} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right] \right|}$$

Cách 1 ứng dụng tích có hướng là để tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau ra nhanh gọn hơn cách 2

Ví dụ 12 (Chuyên Hưng Yên – Năm 2017): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ và điểm $K(-3; 4; 3)$. Viết phương trình đường thẳng d' song song với d , cách d một khoảng bằng 3 và cách điểm K một khoảng nhỏ nhất

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{2}$

B. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+3}{2}$

C. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$

D. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{2}$

Giải

Gọi $F(1+2t; t; 1+2t)$ là hình chiếu vuông góc của K trên d

Ta có: $\overrightarrow{KF}(2t+4; t-4; 2t-2)$

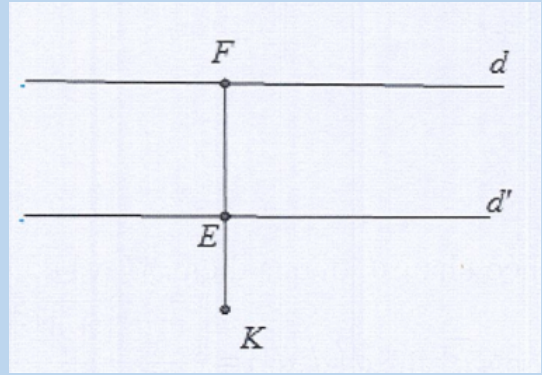
Khi đó $\overrightarrow{KF} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow 4t+8+t-4+4t-4=0$

Suy ra $F(1; 2; 1) \Rightarrow KF=6$

d' cách K một khoảng bé nhất $\Leftrightarrow E$ thuộc đoạn KF sao cho $EF=3$. Khi đó E là trung điểm của $KF \Rightarrow E(-1; 2; 2)$

$$\Rightarrow \text{Do đó } d': \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{2}$$

$\Rightarrow$ Chọn A



Phân tích

Ta có thể hiểu khi d' quay quanh d sẽ tạo nên hình trụ và điểm E sẽ thuộc hình trụ này. Vậy để EK nhỏ nhất thì E là giao điểm của trụ và FK

Dạng 4: Hình chiếu vuông góc

Phương pháp: Để tìm hình chiếu vuông góc của điểm M đến đường thẳng d ta tiến hành gọi $H \in d$ sau đó thiết lập quan hệ $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$ sẽ tìm được H và từ đó suy ra khoảng cách $= MH = |\overrightarrow{MH}|$

Ví dụ 13 (THPT Lê Quý Đôn – Năm 2017): Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$ và điểm $A(1; -2; 0)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm A trên đường thẳng Δ

- A. $H\left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$ B. $H\left(-\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ C. $H\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ D. $H\left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Giải

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với $\Delta \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}(1; -1; 2)$

Phương trình (P) là $(P): 1(x-1) - 1(y+2) + 2(z-0) = 0$ hay $(P): x - y + 2z - 3 = 0$

$$\Rightarrow \text{Ta có: } H = (P) \cap \Delta \Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

$\Rightarrow$ Chọn D

Tổng kết

Hình chiếu H là giao điểm của mặt phẳng (P) đi qua A , vuông góc với đường thẳng Δ

Ví dụ 14 (Sở GD&ĐT Điện Biên – Năm 2017): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -4; 0)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Gọi $A'(a; b; c)$ là điểm đối xứng với A qua d . Khi đó tổng $a + b + c$ là

A. 3

B. -1

C. $-\frac{1}{2}$

D. 4

Giải

VTCP của d là $\vec{u}(2; 1; -1)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d

Khi đó (P) nhận $\vec{u}$ làm VTCP. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $(P): 2x + y - z = 0$

Gọi H là giao điểm của (d) và $(P) \Rightarrow H(1; -1; 1)$

Vì H là trung điểm của AA' nên $\begin{cases} a = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ b = 2 \cdot (-1) + 4 = 2 \\ c = 2 \cdot 1 - 0 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow a + b + c = 0 + 2 + 2 = 4$

$\Rightarrow$ Chọn D

Tổng kết

Điểm A' đối xứng với điểm A qua gốc đường thẳng d sẽ nhận hình chiếu vuông góc H là trung điểm AA'

Ví dụ 15 (Chuyên Lam Sơn – Năm 2017): Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu của (d) lên mặt phẳng (Oxy)

A. $(d'): \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

B. $(d'): \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

C. $(d'): \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

D. $(d'): \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

Giải

Điểm $A \in (d) \Rightarrow A(t-2; t+1; 2t+2)$ và điểm $A \in (Oxy) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow A(-3; 0; 0)$

Điểm $B(-2; 1; 2) \in (d) \Rightarrow C(-2; 1; 0)$ là hình chiếu của B trên mặt phẳng (Oxy)

$\Rightarrow AC = (1; 1; 0) \Rightarrow u_{(d')} = (1; 1; 0) \Rightarrow$ Ta có phương trình đường thẳng $(d'): \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$
=> Chọn B
Tổng kết Đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) nếu nó đi qua 2 hình chiếu vuông góc của 2 điểm A, B thuộc (d)

Dạng 5: Góc

Phương pháp: Để tính góc giữa 2 đường thẳng d và d' ta tính thông qua góc của cặp vectơ chỉ phương của chúng

$$\cos(d; d') = \left| \cos(u_d; u_{d'}) \right| = \frac{|\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}|}{|\vec{u}_d| |\vec{u}_{d'}|}$$

Chú ý:

Ví dụ 16 (THPT Lê Quý Đôn – Năm 2017): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}(1; 0; 1)$ và $\vec{v}(1; -1; -2)$. Khi đó $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Giải

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

=> Chọn C

Cách nhớ

Cosin góc giữa 2 vectơ là tích vô hướng chia tích độ dài

Ví dụ 17 (THPT Chuyên ĐHSPT HN – Năm 2018): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $A'(0; 0; 2)$. Góc giữa BC' và $A'C$ bằng

A. 90°

B. 60°

C. 30°

D. 45°

Giải

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Ta thấy $B(2; 0; 0)$ nên B thuộc trục hoành, $C(0; 2; 0)$ nên C thuộc trục tung, $A'(0; 0; 2)$ nên A' thuộc trục cao.

Nhìn vào hệ trục tọa độ ta thấy $C'(0; 2; 2) \Rightarrow BC'(-2; 2; 2)$ và $A'C(0; -2; 2)$

Gọi α là góc giữa 2 vectơ $\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{A'C}$ ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BC'} \cdot \overrightarrow{A'C}|}{|\overrightarrow{BC'}| |\overrightarrow{A'C}|} = \frac{|0 - 4 + 4|}{|\overrightarrow{BC'}| |\overrightarrow{A'C}|} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ \text{ thỏa mãn } \alpha \leq 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Góc giữa 2 đường thẳng BC' và $A'C$ là 90°

$\Rightarrow$ Chọn A

Chú ý

$$d(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{A'C}) = \alpha \text{ nếu } \alpha \leq 90^\circ \text{ và } = -\alpha \text{ nếu } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Thi THPTQG). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $|z+2-i| =$ và hai mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$, $(Q): x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q) ?

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3-2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3-t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t \end{cases}$

Câu 2 (THPT Lương Thế Vinh). Trong không gian với hệ tọa độ $Z=X$, cho tam giác ABC với $A(1;-3;4), B(2;-5;-7), C(6;-3;-1)$. Phương trình đường trung tuyến AM của $\triangle ABC$ là

A. $\begin{cases} x=1+t & (t \in \mathbb{R}) \\ y=-1-3t \\ z=-8-4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=1-3t & (t \in \mathbb{R}) \\ y=-3-2t \\ z=4-11t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1+t & (t \in \mathbb{R}) \\ y=-3-t \\ z=4-8t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=1+3t & (t \in \mathbb{R}) \\ y=-3+4t \\ z=4-t \end{cases}$

Câu 3 (Chuyên Lê Hồng Phong). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1} \text{ và } (P): 2x+y+z-9=0$$

. Tìm tọa độ giao điểm A của d và (P).

A. $A(0;-4;-2)$

B. $A(3;2;1)$

C. $(x, y \in \mathbb{R})$

D. $A(2;0;0)$

Câu 4 (Thi THPTQG). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3)$, $B(-1;4;1)$ và

đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với d ?

A. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$

B. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$

C. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$

D. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$

Câu 5 (Chuyên KHTN). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$. Tính khoảng cách từ điểm $M(-2;1;-1)$ tới d

A. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

Câu 6 (Chuyên KHTN). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;3;1)$, $N(5;6;-2)$.

Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm A . Điểm A chia đoạn MN theo tỉ số

A. 2

B. -2

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

Câu 7 (THPT Nguyễn Trãi). Giao điểm của hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases} \quad \text{có}$$

tọa độ là

A. $(5;-1;20)$

B. $(3;7;18)$

C. $(-3;-2;6)$

D. $(3;-2;1)$

Câu 8 (Đề minh họa BGD). Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$,

$d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với P và cắt

d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$

B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$

D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$

C. $m = -2$

D. Không tồn tại m

Câu 14 (Sở GD&ĐT Bình Phước). Đường thẳng (d) đi qua $A(-1; 2; -3)$, cắt $(\Delta): \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$ và song song với $(P): 6x - 2y - 3z + 3 = 0$ có dạng là:

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{-6}$

B. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-6}$

C. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{6}$

D. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-6}{-3}$

Câu 15 (Chuyên Lê Hồng Phong). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua $A(1; -2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 3x - 4y - 5z + 1 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d .

A. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-5}$

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{5}$

C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$

D. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{-5}$

Câu 16 (Sở GD&ĐT Tp HCM). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và đường

thẳng $(d): \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu A' của A trên (d)

A. $A'(2; 3; 1)$

B. $A'(-2; 3; 1)$

C. $A'(2; -3; 1)$

D. $A'(2; 3; -1)$

Câu 17 (Chuyên Thái Nguyên). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; -2)$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta_2: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+6}{-1}$. Lấy điểm N trên Δ_1 và P trên Δ_2 sao cho M, N, P thẳng hàng. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng NP .

A. $(0; 2; 3)$

B. $(2; 0; -7)$

C. $(1; 1; -3)$

D. $(1; 1; -2)$

Câu 18 (Sở GD&ĐT Phú Thọ). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Tìm khoảng cách h giữa hai đường thẳng d và d'

A. $h = \frac{4\sqrt{21}}{21}$

B. $h = \frac{22\sqrt{21}}{21}$

$$\text{C. } h = \frac{8\sqrt{21}}{21}$$

$$\text{D. } h = \frac{10\sqrt{21}}{21}$$

Câu 19 (Sở GD&ĐT Bình Phước). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad \Delta_2 : \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Δ_1 và Δ_2 chéo nhau và vuông góc nhau
- B. Δ_1 cắt và không vuông góc với Δ_2
- C. Δ_1 cắt và vuông góc với Δ_2
- D. Δ_1 và Δ_2 song song với nhau

Câu 20 (THPT Kim Liên). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \text{và} \quad d' : \frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-7}{8} . \text{ Mệnh đề nào dưới đây đúng?}$$

- A. d vuông góc với d'
- B. d song song với d'
- C. d trùng với d'
- D. d và d' chéo nhau

Câu 21 (Sở GD&ĐT Hà Tĩnh). Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{và} \quad d_2 : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1} . \text{ Góc giữa hai đường thẳng đó bằng}$$

- A. 90°
- B. 60°
- C. 30°
- D. 45°

Câu 22 (TT Diệu Hiền). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$$d : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3} \quad \text{đi qua điểm } M(2; m; n) . \text{ Khi đó giá trị } m, n \text{ là}$$

- A. $m = 2, n = -1$
- B. $m = -2, n = 1$
- C. $m = -4, n = 7$
- D. $m = 0, n = 7$

Câu 23 (Chuyên Vĩnh Phúc). Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và

$$d_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases} . \text{ Mệnh đề nào dưới đây đúng?}$$

- A. d_1, d_2 vuông góc
- B. d_1, d_2 cắt nhau

C. d_1, d_2 chéo nhau

D. d_1, d_2 song song

Câu 24 (Chuyên Lam Sơn). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt tia Oz tại điểm B sao cho $OB = 2OA$.

A. $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-6}{-4}$

B. $\Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{2}$

C. $\Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+6}{4}$

D. $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{4}$

Câu 25 (THPT Võ Nguyên Giáp). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 1; -3), B(4; 3; -2), C(6; -4; -1); D(1; 2; 3)$. Chọn khẳng định sai.

A. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$

B. Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng

C. Tam giác ABC vuông

D. Diện tích tam giác BCD bằng $\frac{3\sqrt{206}}{2}$

Câu 26 (Chuyên ĐHSPT). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng OM đi qua $A(5; -3; 5)$ cắt d_1, d_2 tại B và C . Độ dài BC là

A. $2\sqrt{5}$

B. $\sqrt{19}$

C. $3\sqrt{2}$

D. 19

Câu 27 (Chuyên Bắc Giang). Cho điểm $M(2; -6; 4)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua d .

A. $M'(3; -6; 5)$

B. $M'(4; 2; -8)$

C. $M'(-4; 2; 8)$

D. $M'(-4; -2; 0)$

Câu 28 (Chuyên Nguyễn Trãi). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa 2 đường thẳng

$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$

A. 45°

B. 30°

C. 60°

D. 90°

Câu 29 (THPT Hùng Vương). Viết phương trình đường thẳng d qua $M(1;-2;3)$ và vuông góc với hai

$$d_1: \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}, \quad d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

đường thẳng:

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Oxyz

Câu 30 (Thi THPTQG). Trong không gian với hệ tọa độ , cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ và

$d': \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và M , đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$

B. $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$

C. $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$

D. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}$

Câu 31 (Chuyên ĐH Vinh). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-3;1)$ lên Δ .

A. $H(-3;-1;-2)$

B. $H(-1;-2;0)$

C. $H(3;-4;4)$

D. $H(1;-3;2)$

Câu 32 (THPT Thanh Chương - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC biết $A(-1;0;1), B(-1;1;0), C(0;1;1)$. Đường cao AH của tam giác ABC có vectơ chỉ phương là vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\vec{u} = (1;2;-1)$

B. $\vec{u} = (-3;2;1)$

C. $\vec{u} = (3;1;-1)$

D. $\vec{u} = (-1;-2;-1)$

Câu 33 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(2;-3;1)$ và

đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua d

A. $M'(3;-3;0)$

B. $M'(1;-3;2)$

C. $M'(0;-3;3)$

D. $M'(-1;-2;0)$

Câu 34 (Sở GD&ĐT Hải Dương - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) sao cho mọi điểm thuộc đường thẳng d luôn cách đều 2 điểm A và B

A.
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

Câu 35 (THTT Số 477 - 2018). Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A.
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 36 (Chuyên Thái Bình - 2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + 4y + 9z - 9 = 0$. Giao điểm I của (d) và (P) là

A. $I(2;4;-1)$

B. $I(1;2;0)$

C. $I(1;0;0)$

D. $I(0;0;1)$

Câu 37 (THPT Hàm Rồng - 2018). Cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) , cắt d và vuông góc với d có phương trình là:

A.
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -t \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}$$

Câu 38 (THPT Nguyễn Huệ - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau

B. Hai đường thẳng d_1, d_2 trùng nhau

C. Hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau

D. Hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau

Câu 39 (THPT Lương Thế Vinh - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ chỉ phương của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;2;4), B(-2;3;5), C(-9;7;6)$ có tọa độ là:

- A. $(3;4;5)$ B. $(3;-4;5)$ C. $(-3;4;-5)$ D. $(3;4;-5)$

Câu 40 (Sở GD&ĐT Bình Phước - 2018). Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;1;0), B(2;2;2), C(-2;3;1)$ và

đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d để thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3

- A. $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$ B. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$
C. $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$ D. $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

$$M(4;1;1)$$

$$d: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Câu 41 (Chuyên Vị Thanh - 2018). Cho điểm $M(4;1;1)$ và đường thẳng d . Hình chiếu H của M trên đường thẳng d có tọa độ là

- A. $H(-1;2;-1)$ B. $H(2;3;-1)$ C. $H(1;2;1)$ D. $H(-1;-2;1)$

Câu 42 (THPT Nguyễn Bình Khiêm - 2018). Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(1;1;-2)$ song song với (P) và vuông góc với d là

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$ B. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{-3}$
C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{3}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad A(5;0;-1), B(3;1;0)$$

Câu 43 (Chuyên Bắc Giang - 2018). Cho đường thẳng d và hai điểm $A(5;0;-1), B(3;1;0)$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng đã cho. Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác BAM

- A. $\frac{\sqrt{82}}{2}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{22}$ D. $\sqrt{21}$

Câu 44 (Chuyên Ngoại ngữ - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1), B(2;-1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ chứa trong (P) sao cho mọi điểm thuộc Δ cách đều hai điểm A, B

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Oxyz

$$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Câu 45 (THPT Lê Khiết - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ , cho $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-3}$, $d_3: \frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ , biết cắt d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho $AB = BC$

$$\text{A. } \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$\text{B. } \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

$$\text{C. } \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$$

$$\text{D. } \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

Câu 46 (Chuyên ĐHS - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0)$ và $A'(0;0;1)$. Khoảng cách giữa AC và $B'D$ là

$$\text{A. } \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{B. } \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\text{C. } 1$$

$$\text{D. } \sqrt{2}$$

Câu 47 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và

$$d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

$$\text{A. } \Delta: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{B. } \Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\text{C. } \Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\text{D. } \Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Câu 48 (Sở GD&ĐT Bắc Giang - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Gọi d là đường thẳng qua $M(0;3;-1)$ cắt

d_1 tại A và cắt d_2 tại B . Tỉ số $\frac{MA}{MB}$ bằng

$$\text{A. } 1$$

$$\text{B. } 5$$

$$\text{C. } 3$$

$$\text{D. } 6$$

Câu 49 (Đề minh họa BGD&ĐT - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$

C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$

D. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{5}{9}}{2}$

Câu 50 (THPT Chu Văn An - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-1}$. Đường vuông góc chung của d_1 và d_2 lần lượt cắt b, d_2 tại A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB

A. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $S = \sqrt{6}$

C. $S = \frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $S = \frac{\sqrt{6}}{4}$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2C	3B	4C	5A	6D	7B	8A	9D	10B
11D	12D	13C	14B	15C	16C	17D	18C	19C	20C
21A	22C	23C	24A	25A	26B	27D	28D	29A	30D
31D	32A	33C	34D	35B	36D	37C	38A	39A	40A
41B	42A	43D	44B	45B	46B	47B	48B	49A	50C

CHỦ ĐỀ 31: BÍ QUYẾT GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Vecto pháp tuyến $\vec{n}_p$: là vecto vuông góc với mặt phẳng (P). Chú ý: Nếu A là một vecto pháp tuyến của (P) thì $k\vec{n}_p$ cũng là 1 vecto pháp tuyến.

2. Phương trình mặt phẳng (P): được xác định khi biết một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ mà nó đi qua và một vecto pháp tuyến $\vec{n}(A; B; C)$ khi đó: $(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

3. Mặt chắn: Cho 3 điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ thuộc 3 trục tọa độ. Khi đó $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

gọi là phương trình mặt chắn B(1; 4)

Tính chất: hình chiếu vuông góc từ gốc tọa độ đến C(1;-1) là trực tâm H của ΔABC

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Vị trí tương đối

Cho đường thẳng d đi qua M và có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$ và mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_p$.

Nếu $M \parallel \vec{n}_p$ thì $d \perp (P)$

Nếu $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_p = 0$ thì $d \parallel (P)$ hoặc Oy

Cho mặt phẳng M' có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$

Nếu $\vec{n}_p$ tỉ lệ với $\vec{n}_Q$ (song song hoặc trùng) thì $(P) \parallel (Q)$ hoặc $(P) \equiv (Q)$

Nếu $\vec{n}_p \perp \vec{n}_Q$ thì $(P) \perp (Q)$

Ví dụ 1: (Chuyên Lê Hồng Phong - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz,

cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 15 = 0$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $d \parallel (P)$

B. $d \cap (P) = \{I(1; -1; 0)\}$

C. $d \perp (P)$

D. $d \subset (P)$

Giải

Vecto chỉ phương của d là $\vec{u}(1; 2; -2)$, vtpt của (P) là $\vec{n}(2; -1; 0)$.

Ta có: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow d \parallel (P)$ hoặc $d \subset (P)$. Mà $A(1; -1; 0) \in d$ nhưng $A \notin (P) \Rightarrow d \parallel (P)$

$\Rightarrow$ Chọn A

Tổng kết

Nếu d trùng (P) thì mọi điểm thuộc d phải thuộc (P), vì $A \notin (P)$ nên d không thuộc (P)

Ví dụ 2: (Chuyên Thái Bình - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x + y + 2z + 1 = 0$, (R): $x - y + 5 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $(Q) \perp (R)$

B. $(P) \perp (Q)$

C. $(P) \parallel (R)$

D. $(P) \perp (R)$

Giải

Ta xét (P): $x + y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (1; 1; 2)$

(Q): $x + y - z + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = (1; 1; -1)$

và (R): $x - y + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(R)} = (1; -1; 0)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = 0 \\ \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(R)} = 0 \\ \vec{n}_{(Q)} \cdot \vec{n}_{(R)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Chọn C

Mở rộng

3 mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một vuông góc với nhau và 3 giao tuyến của chúng hoặc đôi một song song với nhau hoặc đồng quy

Ví dụ 3: (Chuyên Lam Sơn - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$d: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 3 = 0$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại đúng 1 điểm
- B. Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)
- C. Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P)
- D. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P)

Giải

Do $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow d$ hoặc // hoặc $\equiv$ (P)

$\Rightarrow$ Lại có $M(3; -1; 4) \in d$ và cũng thuộc (P) nên d nằm trong (P)

$\Rightarrow$ Chọn C

Ví dụ 4: (Chuyên Thái Bình - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ tìm tất cả các giá trị thực của m

để đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$ song song với mặt phẳng (p): $x + y - z + m = 0$

- A. $m \neq 0$
- B. $m = 0$
- C. $m \in \mathbb{R}$
- D. Không có giá trị của m

$\Rightarrow$ Chọn A

Ví dụ 5: (THPT An Nhơn) Trong không gian với hệ tọa độ A, B, cho ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) lần lượt có phương trình (P): $x + 3ay - z + 2 = 0$; (Q): $ax - y + z + 1 = 0$ và (R): $x - y - 4z + 2 = 0$. Gọi (d_a) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Tìm a để đường thẳng (d_a) vuông góc với mặt phẳng (R).

- A. $\begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{-1}{3} \end{cases}$
- B. $a = -\frac{1}{3}$
- C. $a = 1$
- D. Không có giá trị a

=> Chọn C

Dạng 2: Lập phương trình mặt phẳng

Phương pháp : Để viết phương trình mặt phẳng (P) ta cần tìm 1 điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) và 1 vectơ pháp tuyến của (P)

Cách tìm $\vec{n}_p$ là ta hay tìm 2 vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng vuông góc với Q khi đó $\vec{n}_p = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$

Ví dụ 6: (Sở GD&ĐT Hà Nam - Năm 2017) Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(3;1;1) và B(1;-1;-3). Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của AB ?

- A. $2x - y = 0$ B. $x + y + 2z + 6 = 0$ C. $x + y + 2z - 6 = 0$ D. $x + y + 2z = 0$

Giải

Ta có: $\vec{BA} = (2; 2; 4) = 2(1; 1; 2) = 2\vec{u}$. Gọi I là trung điểm của AB. Ta có I(2;0;-1)

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là:

$$(P): 1(x - 2) + 1(y - 0) + 2(z + 1) = 0 \text{ hay } (P): x + y + 2z = 0$$

=> Chọn D

Kiến thức

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm và vuông góc với đoạn AB. Hơn nữa mọi điểm thuộc (P) đều cách đều 2 điểm A, B

Ví dụ 7: (Đề minh họa BGD - Năm 2018) Trong không gian Oxyz, cho ba điểm M(2;0;0), N(0;-1;0) và P(0;0;2). Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

- A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$ B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$ C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$ D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$

Giải

$$\Rightarrow \text{Phương trình mặt phẳng (MNP): } \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$$

=> Chọn D

Bí quyết

Ta thấy 3 điểm M, N, p thuộc 3 trục của hệ trục tọa độ Oxyz, rõ ràng ta sẽ sử dụng phương trình mặt chắn

Ví dụ 8: (THPT Chuyên Thái Bình - Năm 2018) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho H(2;1;1). Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và cắt các trục tọa độ tại A,B,C sao cho H là trọng tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là?

- A. $2x + y + z - 6 = 0$ B. $x + 2y + z - 6 = 0$ C. $x + 2y + 2z - 6 = 0$ D. $2x + y + z + 6 = 0$

Giải

Mặt phẳng (P) cắt 3 trục tại A, B, C sẽ lập thành một hình tứ diện vuông OABC.

Theo tính chất của tứ diện vuông đỉnh O thì nếu từ O hạ đường vuông góc đến mặt đáy (ABC) thì chân đường vuông góc H chính là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó (P) qua H(2;1;1) và nhận $\overrightarrow{OH}(2;1;1)$ là vecto pháp tuyến

$$\Rightarrow (P): 2(x-2) + (y-1) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 6 = 0$$

$\Rightarrow$ Chọn A

Chú ý:

Đối với các đỉnh khác 0 thì không đúng nữa, khi ta hạ chân đường cao từ đỉnh A,B,C đến các mặt đối diện thì chân đường vuông góc không là trực tâm của tam giác đối diện.

Ví dụ 9: (THPT Lê Quý Đôn - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(3; -4; 7) và chứa trục Oz

A. (P): $3x + 4z = 0$ B. (P): $4x + 3y = 0$ C. (P): $3x + 4y = 0$ D. (P): $4y + 3z = 0$

Giải

Chọn điểm A(0;0;1) $\in$ Oz. Mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm M, A và nhận $\overrightarrow{Oz}(0;0;1)$ làm một vecto chỉ phương.

Ta có: $\overrightarrow{MA}(-3;4;-6)$ vecto pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{Oz}] = (4;3;0)$

Phương trình mặt phẳng (P) là: (P): $4(x-0) + 3(y-0) + 0(z-1) = 0$ hay (P): $4x + 3y = 0$

$\Rightarrow$ Chọn B

Kiến thức

2 vecto $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{Oz}$ được gọi là cặp vecto chỉ phương của (P) và vecto pháp tuyến $\vec{n}_p$ là tích có hướng của cặp vecto chỉ phương

Ví dụ 10: (Chuyên Thái Bình - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng (Q): $2x - y + 3z = 0$; (R): $x + 2y + z = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $7x + y - 5z = 0$ B. $7x - y - 5z = 0$ C. $7x + y + 5z = 0$ D. $7x - y + 5z = 0$

$\Rightarrow$ Chọn B

Ví dụ 11: (Chuyên Quốc Học Huế - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $x + y - z - 2 = 0$; (Q): $x + 3y - 12 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa đường thẳng d và giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q)

A. (R): $5x + y - 7z - 1 = 0$ B. (R): $x + 2y - z + 2 = 0$
C. (R): $x + 2y - z = 0$ D. (R): $15x + 11y - 17z - 10 = 0$

$\Rightarrow$ Chọn D

Ví dụ 12: (THPT Lương Thế Vinh - Năm 2017) Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương

trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 12z + 7 = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm $P(-4;1;4)$ có phương trình là

A. $2x - 5y - 10z + 53 = 0$

B. $8x + 7y + 8z - 7 = 0$

C. $9x + 16z - 73 = 0$

D. $6x + 3y + 2z + 13 = 0$

=> Chọn D

Dạng 3: Khoảng cách

Công thức: Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ thì khoảng cách từ M đến (P) được

tính bằng công thức $d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Ví dụ 13: (THPT Hoàng Văn Thụ - Năm 2017) Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x + y + z - 4 = 0$ và hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$. Tọa độ điểm I (khác B) thuộc đường thẳng AB sao cho khoảng cách từ điểm I đến (P) bằng khoảng cách từ điểm B đến (P) là

A. $I\left(2; \frac{8}{3}; 1\right)$

B. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$

C. $I(-3; 1; 1)$

D. $I \equiv A$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3, -1, 0) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (AB):
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Điểm $I \in (AB) \Rightarrow I(3t; 2+t; 1)$

Ta có $d(I, (P)) = d(B, (P)) \Leftrightarrow |4t - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vì điểm $I \neq B \Rightarrow$ Vậy tọa độ điểm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$

=> Chọn B

Phương pháp

Khi đề bài yêu cầu tìm $2\sqrt{5}$ thuộc I đường thẳng d thì ta luôn chuyển d về dạng tham số sau đó gọi $I(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

Ví dụ 14: (Sở GD&ĐT Hải Phòng – năm 2017) Trong không gian với tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Gọi I là giao điểm của d và (P), M là điểm trên đường thẳng d sao cho $IM = 9$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P)

A. $d[M, (P)] = 3\sqrt{2}$

B. $d[M, (P)] = 4$

C. $d[M, (P)] = 8$

D. $d[M, (P)] = 2\sqrt{2}$

Giải

$\Rightarrow \sin(d; (P)) = |\cos(d; (P))| = \frac{|2 + 4 + 2|}{9} = \frac{8}{9}$

Suy ra $d(M; (P)) = IM \cdot \sin \widehat{d; (P)} = 8$

$\Rightarrow$ Chọn C

Bình luận

Nếu gọi H là chân đường cao từ M thì $\triangle MIH$ vuông tại H, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông thì $\sin \widehat{d; (P)} = \frac{MH}{IM}$

Ví dụ 15: (Chuyên KHTN- Hà Nội - Năm 2018) Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P) : $x + 2y - 2z - 6 = 0$ và (Q) : $x + 2y - 2z + 3 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A. 1

B. 3

C. 9

D. 6

Giải

Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là 1 điểm thuộc (P) khi đó $x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 6 = 0$

Chọn $x_0 = y_0 = 0$ thì $z_0 = -3 \Rightarrow M(0; 0; -3)$

Ta có khoảng cách từ (P) đến (Q) là khoảng cách từ 1 điểm M bất kì thuộc (P) đến (Q)

$$\Rightarrow d(M; (Q)) = \frac{|0 + 0 + 6 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 3 \Rightarrow d((P); (Q)) = 3$$

$\Rightarrow$ Chọn B

Nhận xét

Hai mặt phẳng có khoảng cách khi và chỉ khi chúng song song với nhau

Ví dụ 16: (THPT Nguyễn Huệ - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}. \text{ Tìm phương trình của mặt phẳng cách đều hai đường thẳng } d_1, d_2$$

A. $x + 3y + z - 8 = 0$

B. $x + 5y - 2z + 12 = 0$

C. $x - 5y + 2z - 12 = 0$

D. $x + 5y + 2z + 12 = 0$

Giải

Các vtcp của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1(1; -1; 2), \vec{u}_2(-1; 0; 1)$

Ta có: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -3; -1) \neq \vec{0} \Rightarrow d_1; d_2$ cắt nhau hoặc chéo nhau.

Giải hệ phương trình của d_1 và $d_2 \Rightarrow$ vô nghiệm $\Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau.

Khi đó (P) nhận $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -3; -1)$ làm vectơ pháp tuyến $\Rightarrow (P): x + 3y + z + m = 0$

$$A(2; 1; 0) \in d_1; B(2; 3; 0) \in d_2 \Rightarrow d(A; (P)) = d(B; (P))$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 + 3 \cdot 1 + 0 + m|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 3 \cdot 3 + 0 + m|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow m = -8 \Rightarrow (P): x + 3y + z - 8 = 0$$

$\Rightarrow$ Chọn A

Phân tích

Khoảng cách từ 1 đường thẳng d đến (P) là khoảng cách từ 1 điểm A bất kì thuộc d đến M' . Khoảng cách này chỉ xảy ra nếu $d \parallel (P)$

Dạng 4 : Hình chiếu vuông góc

Phương pháp : Để tìm hình chiếu vuông góc của 1 điểm M lên (P) ta thực hiện theo 3 bước

Bước 1 : Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và $\perp (P)$

Bước 2 : Gọi H là hình chiếu vuông góc, tham số hóa tọa độ điểm M theo d

Bước 3 : Cho $H \in (P)$ ta sẽ tìm được t từ đó tìm được H

Ví dụ 17: (THPT Lê Quý Đôn - Năm 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(7;-9;5)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 6 = 0$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) là

A. $(8;-11;6)$

B. $(2;1;0)$

C. $(-1;2;-3)$

D. $(3;-1;1)$

Giải

Phương trình đường thẳng qua M và vuông góc với (P) là

$$\begin{cases} x = 7 + t \\ y = -9 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H = d \cap (P) &\Rightarrow 7 + t + 18 + 4t + 5 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = -4 \\ \text{Khi đó} &\Rightarrow H(3;-1;1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Chọn D

Phân tích

Vì $H = d \cap (P)$ nên H vừa thuộc d vừa thuộc $(P) \Rightarrow$ tọa độ H thỏa mãn phương trình (P)

Ví dụ 18: (Sở GD&ĐT Phú Thọ - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu của đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ trên mặt phẳng (Oxy) ?

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 3t \\ z = 0 \end{cases}$

Giải

Ta có: $(Oxy): z = 0$. Các điểm $A(1;-2;3), B(3;1;4) \in d$. Gọi A' là hình chiếu của A lên $(Oxy) \Rightarrow A'(1;-2;0)$

Gọi B' là hình chiếu của B lên $(Oxy) \Rightarrow B'(3;1;0)$

$\Rightarrow \overline{A'B'}(2;3;0)$. Phương trình đường thẳng hình chiếu là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$$

=> Chọn C

Phương pháp

Để tìm hình chiếu vuông góc của

1. đường thẳng d lên (P) ta chọn
2. điểm A, B thuộc d sau đó tìm hình chiếu vuông góc A', B' thì d' sẽ đi qua A', B'

Ví dụ 19: (THPT Bắc Hà - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;2;3)$. Phương trình mặt phẳng (α) sao cho hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O trên mặt phẳng (α) là điểm A là

- A. $3x + 2y + z - 10 = 0$ B. $x + 2y + 3z = 0$ C. $x + 2y + 3z - 14 = 0$ D. $x + 2y + 3z + 14 = 0$

=> Chọn C

Ví dụ 20: (THPT Quảng Xương 3 - Năm 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $M(3;2;-1)$. Điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oxy) là

- A. $M'(3;2;0)$ B. $M'(3;2;-1)$ C. $M'(3;-2;1)$ D. $M'(3;2;1)$

=> Chọn D

Dạng 5 : Góc

Phương pháp 1 : Gọi góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) là α . Để tính góc α ta tính thông qua góc giữa 2

vecto pháp tuyến $\vec{n}_P, \vec{n}_Q$ theo công thức: $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| |\vec{n}_Q|}$

Phương pháp 2 : Góc giữa đường thẳng d và (P) là α . Để tính góc α ta tính thông qua vecto chỉ phương $\vec{u}_d$ và vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$ theo công thức: $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}_d, \vec{n}_P) \right|$

Ví dụ 21: (THPT Nho Quan A - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $A(3;0;1)$, $B(6;-2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và (P) tạo với mặt phẳng (Oyz) góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{2}{7}$?

A. $\begin{cases} 2x - 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x + 3y + 6z + 12 = 0 \\ 2x + 3y - 6z - 1 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x + 3y - 6z = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x - 3y - 6z + 1 = 0 \end{cases}$

Giải

Ta có $A(3;0;1)$, $B(6;-2;1) \Rightarrow \vec{AB} = (3;-2;0)$ suy ra $\vec{n}_{(P)} = (-2m;-3m;-2n)$

Khi đó: $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Oyz)} = -2m \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Oyz)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Oyz)}|} = \frac{2|m|}{\sqrt{13m^2 + 4n^2}} = \frac{2}{7}$

$\Leftrightarrow 7|m| = \sqrt{13m^2 + 4n^2} \Leftrightarrow n^2 = 9m^2$

$\Rightarrow$ Chọn $m = 1 \Rightarrow n^2 = 9 \Rightarrow n = \pm 3$ suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x + 3y - 6z = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow$ Chọn C

Bình luận

2 mặt phẳng cắt nhau tạo thành 4 góc và ta quy ước góc $\alpha \leq 90^\circ$ nên $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right|$

Ví dụ 22: (THPT Bắc Hà - Năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng

$(\alpha): 6x + 4y + 2z - 5 = 0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = (m-1)t \\ z = 2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}, m \text{ là tham số}).$ Với giá trị nào của m thì

d hợp với (α) 1 góc 90° ?

A. $m = 0$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m = 3$

Giải

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n}(3; 2; 1)$, vtcp của d là: $\vec{u}(m; m-1; 1)$

Để d hợp với (α) một góc 90° thì $[\vec{n}, \vec{u}] = \vec{0} \Leftrightarrow (3-m; m-3; m-3) = \vec{0} \Leftrightarrow m = 3$

$\Rightarrow$ Chọn D

Tổng quát

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng nhỏ nhất nếu $\alpha = 0$, khi đó đường thẳng // hoặc $\equiv$ mặt phẳng

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1 (Sở GD&ĐT Tp HCM - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(-2;0;0), B(0;1;0), C(0;0;-3).

A. (P): $3x - 6y + 2z - 6 = 0$

B. (P): $3x + 6y + 2z - 6 = 0$

C. (P): $3x - 6y - 2z + 6 = 0$

D. (P): $3x - 6y + 2z + 6 = 0$

Câu 2 (Sở GD&ĐT Tp HCM - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $x + (m+1)y - 2z + m = 0$ và (Q): $2x - y + 3 = 0$, với m là tham số thực. Để (P) và (Q) vuông góc thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

A. $m = -5$

B. $m = 1$

C. $m = 3$

D. $m = -1$

Câu 3 (Chuyên Lam Sơn - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(2;4;1) và mặt phẳng (P): $x - 3y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P).

A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{2}$ B. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{2}$ C. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{-2}$ D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+1}{2}$

Câu 4 (Chuyên ĐHSPT-2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + 3 = 0$; (Q): $x + 2y - 2z - 1 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho là:

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. 4

Câu 5 (Chuyên Phan Bội Châu - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm A(1;2;1) và mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z - 1 = 0$. Gọi B là điểm đối xứng với A qua (P). Độ dài đoạn thẳng AB là

A. 2

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. 4

Câu 6 (Đề Minh họa - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(-2;3;1) và B(5;6;2). Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{AM}{BM} = 2$

C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$

D. $\frac{AM}{BM} = 3$

Câu 7 (Chuyên Phan Bội Châu - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $2x + y - z - 1 = 0$ và (Q): $x - 2y + z - 5 = 0$. Khi đó, giao tuyến của (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (1;3;5)$

B. $\vec{u} = (-1;3;-5)$

C. $\vec{u} = (2;1;-1)$

D. $\vec{u} = (1;-2;1)$

Câu 8 (THPT Đoàn Thượng - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(2; -3; 0), mặt phẳng (α): $x + 2y - z + 3 = 0$. Tìm mặt phẳng (P) qua A, vuông góc (α) và song song với Oz.

A. $y + 2z + 3 = 0$

B. $x + 2y - z + 4 = 0$

C. $2x + y - 1 = 0$

D. $2x - y - 7 = 0$

Câu 9 (THPT Lý Thái Tổ-2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tọa độ điểm các điểm trên trục Oy cách đều hai mặt phẳng có phương trình $x + 2y - 2z + 1 = 0$ và $2x + y + 2z - 1 = 0$ là

A. M(0;1;0)

B. M(0;-1;0)

C. $M\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$

D. M(0;0;0) và N(0;-2;0)

Câu 10 (THPT Chuyên Thái Bình - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(1;2;3). Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C. Tính thể tích khối chóp O.ABC

A. $\frac{1372}{9}$

B. $\frac{686}{9}$

C. $\frac{524}{3}$

D. $\frac{343}{9}$

Câu 11 (THPT Lê Quý Đôn-2018). Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm M(1; -3; 5). Gọi I;J;K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox; Oy; Oz. Phương trình mặt phẳng (IJK) là

A. $x - \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 0$

B. $x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$

C. $x - \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$

D. $x + \frac{y}{3} - \frac{z}{5} = 1$

Câu 12 (Chuyên Hà Giang - 2018). Cho hai mặt phẳng (α): $2x + y + 2z - 4 = 0$; (β): $2x + y + 2z + 10 = 0$. Tính khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (α) và (β) là:

A. 14

B. 6

C. 2

D. $\frac{14}{13}$

Câu 13 (THPT Hoàng Văn Thụ-2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng có phương trình (P): $x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tọa độ điểm M có tọa độ âm thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 2 là

A. M(-2;-3;-1)

B. M(-1;-3;-5)

C. M(11;21;31)

D. M(-1;-5;-7)

Câu 14 (THPT Nho Quan A-2018). Trong không gian Oxyz, cho A (0; 1; 0), B (2; 2; 2), C(-2;3;1) và đường thẳng (d) có phương trình là $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d để thể tích tứ diện M.ABC bằng 3

A. $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$

B. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

C. $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

D. $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); M\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

Câu 15 (THPT Võ Nguyên Giáp - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 4 điểm M(1;-2;3), N(0;1;2), P(1;5;-1), Q(3;-1;1). Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua hai điểm M, N và cách đều hai điểm P, Q?

- A. 1 mặt phẳng B. 2 mặt phẳng C. Có vô số mặt phẳng D. 4 mặt phẳng

Câu 16 (Chuyên Thái Bình - 2018). Trong không gian với hệ trục Oxyz, mặt phẳng (p) chứa đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): $2x + y - z = 0$ có phương trình là

- A. $x - 2y - 1 = 0$ B. $x - 2y + z = 0$ C. $x + 2y - 1 = 0$ D. $x + 2y + z = 0$

Câu 17 (Chuyên Thái Bình - 2018). Trong không gian với hệ trục Oxyz, tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A(0;1;2) trên mặt phẳng (P): $x + y + z = 0$

- A. (-1;0;1) B. (-2;0;2) C. (-1;1;0) D. (-2;2;0)

Câu 18 (Chuyên Thái Bình - 2018). Trong không gian với hệ trục Oxyz, mặt phẳng chứa 2 điểm A(1;0;1) và B(-1;2;2) song song với trục Ox có phương trình là

- A. $x + y - z = 0$ B. $2y - z + 1 = 0$ C. $y - 2z + 2 = 0$ D. $x + 2z - 3 = 0$

Câu 19 (Chuyên Thái Bình - 2018). Trong không gian với hệ trục Oxyz, mặt phẳng đi qua điểm A(1;3;-2) trên mặt phẳng (P): $2x - y + 3z + 4 = 0$.

- A. $2x - y + 3z + 7 = 0$ B. $2x + y - 3z + 7 = 0$ C. $2x + y + 3z + 7 = 0$ D. $2x - y + 3z - 7 = 0$

Câu 20 (THPT Hàm Rồng - 2018). Mặt phẳng song song với hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{4}$ và

$\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-1}$ có vectơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n} = (5; -6; 7)$ B. $\vec{n} = (-5; 6; -7)$ C. $\vec{n} = (-5; 6; 7)$ D. $\vec{n} = (-5; -6; 7)$

Câu 21 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 10$ và mặt phẳng (P): $-2x + y + \sqrt{5}z + 9 = 0$. Gọi (Q) là tiết diện của (S) tại M(5;0;4). Tính góc giữa (P) và (Q)

- A. 60° B. 120° C. 30° D. 45°

Câu 22 (THPT Hậu Lộc 2 - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng (d) có phương trình $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x + y - m^2z - m = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá

trị của m để đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P)

A. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$

B. $m = -2$

C. $m = 2$

D. Không có giá trị nào của m

Câu 23 (THPT Quảng Xương 1 - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $A(1;-2;-3)$; $B(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng sao cho khoảng cách từ A đến (P) bằng 15. Khoảng cách từ B đến (P) bằng 10. Khi đó mặt phẳng (P) đi qua điểm H có tọa độ

A. $H(1;-1;15)$

B. $H(1;1;15)$

C. $H(1;-7;9)$

D. $H(1;7;-9)$

Câu 24 (THPT Quảng Xương 3 - 2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$

Câu 25 (Sở GD&ĐT Thanh Hóa - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - 3y + z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P)

B. d song song với (P)

C. d vuông góc với (P)

D. d nằm trên (P)

Câu 26 (THPT Lê Quý Đôn - 2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho 4 điểm $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B và khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến mặt phẳng (P) và C và D nằm ở 2 phía đối với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $2x + 3z - 5 = 0$

B. $2y + 3z - 5 = 0$

C. $2x - y + 3z - 5 = 0$

D. $2x + 3y - 5 = 0$

Câu 27 (THPT Hai Bà Trưng - 2018). Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(1;0;-1)$ và $C(0;-1;2)$, $D(0;m;k)$. Hệ thức giữa m và k để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là

A. $m + k = 1$

B. $m + 2k = 3$

C. $2m - 3k = 0$

D. $2m + k = 0$

Câu 28 (Chuyên Lê Thánh Tông - 2018). Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): (m^2 - 1)x + 2y - mz + m + 1 = 0$. Xác định m biết $(\alpha) \parallel (Ox)$

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = \pm 1$

D. $m = -1$

Câu 29 (THPT Nguyễn Bình Khiêm - 2018). Trong không gian Oxyz cho điểm $A(4;1;-2)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua mp (Oxz) là:

A. $(4;-1;2)$

B. $(-4;-1;2)$

C. $(4;-1;-2)$

D. $(4;1;2)$

Câu 30 (THPT Quang Trung - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu của d lên mặt phẳng (Oxy) là

- A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

Câu 31 (THPT Nguyễn Khuyến - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 1 = 0$ và điểm $I(4; -1; 2)$. Mặt phẳng (Q) vuông góc với 2 mặt phẳng (P) và (Oxy), đồng thời (Q) cách điểm I một khoảng bằng $\sqrt{5}$. Mặt phẳng (Q) có phương trình là

- A. $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y - 2z + 10 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases}$

Câu 32 (THPT Hai Bà Trưng - 2018). Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2; 0; -2)$, $B(3; -1; -4)$, $C(-2; 2; 0)$. Điểm D nằm trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện ABCD bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là:

- A. $D(0; 3; -1)$ B. $D(0; -3; -1)$ C. $D(0; 1; -1)$ D. $D(0; 2; -1)$

Câu 33 (Sở GD&ĐT tp HCM - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{1}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy

- A. $\begin{cases} x = 3 - 6t \\ y = 11 - 9t \\ z = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 11 - 9t \\ z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 11 + 9t \\ z = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 11 - 9t \\ z = 0 \end{cases}$

Câu 34 (Sở GD&ĐT tp HCM - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z - 3 = 0$; $(\beta): 2x - y + 5 = 0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) song song với trục Oz và chứa giao tuyến của (α) và (β) .

- A. (P): $x - 2y + 5 = 0$ B. (P): $2x - y + 5 = 0$ C. (P): $2x - y - 5 = 0$ D. (P): $2x + y + 5 = 0$

Câu 35 (Chuyên Biên Hòa - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại A, B, C. Biết trọng tâm của tam giác ABC là $G(-1; -3; 2)$. Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $6x + 2y - 3z - 1 = 0$ B. $6x + 2y - 3z + 18 = 0$ C. $6x + 2y + 3z - 18 = 0$ D. $6x - 2y + 3z - 1 = 0$

Câu 36 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x + ay + bz - 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. Biết rằng $(\alpha) \parallel \Delta$ tạo với các trục Ox, Oz các góc giống nhau. Tìm giá trị của a

- A. $a = -1$ hoặc $a = 1$ B. $a = 2$ hoặc $a = 0$ C. $a = 0$ D. $a = 2$

Câu 37 (Sở GD-ĐT Bình Phước - 2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(4; 1; -2)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) là:

- A. $A'(4; -1; 2)$ B. $A'(-4; -1; 2)$ C. $A'(4; -1; -2)$ D. $A'(4; 1; 2)$

Câu 38 (Chuyên Thái Nguyên - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2 \\ y = -m + 2t \\ z = n + t \end{cases} \text{ và mặt phẳng (P): } 2mx - y + mz - n = 0. \text{ Biết đường thẳng } d \text{ nằm trong mặt phẳng (P).}$$

Khi đó hãy tính $m + n$

A. 8

B. 12

C. -12

D. -8

Câu 39 (Chuyên Thái Nguyên - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$$d: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \text{ và mặt phẳng (P): } x - z - 4 = 0. \text{ Viết phương trình đường thẳng là hình chiếu}$$

vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P)

A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ t = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ t = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ t = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 - t \\ t = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Câu 40 (Chuyên Bến Tre - 2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho 2 đường thẳng

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}; d': \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{2}. \text{ Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa hai đường thẳng } d \text{ và } d'$$

A. Không tồn tại (Q)

B. (Q): $y - 2z - 2 = 0$

C. (Q): $x - y - 2 = 0$

D. (Q): $-2y + 4z + 1 = 0$

Câu 41 (Chuyên Phan Bội Châu - 2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $A(1;2;3)$,

$B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB

A. $m = 2$

B. $m = -2$

C. $m = -3$

D. $m = \pm 2$

Câu 42 (Chuyên Tuyên Quang - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1 ,

$$d_2 \text{ lần lượt có phương trình } d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}; d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{4}. \text{ Viết phương trình mặt}$$

phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 .

A. $14x + 4y + 8z + 13 = 0$

B. $14x - 4y - 8z - 17 = 0$

C. $14x - 4y - 8z - 13 = 0$

D. $14x - 4y + 8z - 17 = 0$

Câu 43 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng

$$(\alpha): x - y + 2z + 1 = 0 \text{ và đường thẳng } \Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}. \text{ Góc giữa đường thẳng } \Delta \text{ và mặt phẳng } (\alpha) \text{ bằng}$$

A. 30°

B. 60°

C. 150°

D. 120°

Câu 44 (Chuyên Lê Khiết - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 mặt phẳng có phương

trình (P): $x - y + 4z - 2 = 0$; (Q): $2x - 2z + 7 = 0$. Góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) là:

A. 90°

B. 45°

C. 60°

D. 30°

Câu 45 (Chuyên Võ Nguyên Giáp - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 điểm $A(1;0;-$

$1)$, $B(3;-1;-2)$, $C(6;-2;3)$, $D(0;1;6)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua 2 điểm C, D và cách đều 2 điểm A, B?

A. 1 mặt phẳng

B. 2 mặt phẳng

C. 4 mặt phẳng

D. có vô số mặt phẳng

Câu 46 (THPT Phan Đình Phùng - 2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho 3 mặt phẳng (P): $x + 2z - 4 = 0$; (Q): $x + y - z - 3 = 0$; (R): $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q), đồng thời vuông góc với mặt phẳng (R)

A. (α): $x + 2y - 3z + 4 = 0$

B. (α): $2x - 3y - z - 4 = 0$

C. (α): $2x + 3y - 5z - 5 = 0$

D. (α): $3x - 2y - 5z - 5 = 0$

Câu 47 (Chuyên KHTN - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 3 = 0$ và đường thẳng (d): $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{2}$. Gọi A là giao điểm của (d) và (P); gọi M là điểm thuộc (d) thỏa mãn điều kiện $MA = 2$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P)

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{8}{9}$

D. $\frac{2}{9}$

Câu 48 (THPT Quốc Học Huế - 2018). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 mặt phẳng (P): $x + y - z - 2 = 0$; (Q): $x + 3y - 12 = 0$ và đường thẳng d: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa đường thẳng d và giao tuyến của 2 mặt phẳng (P), (Q)

A. (R): $5x + y - 7z - 1 = 0$

B. (R): $x + 2y - z + 2 = 0$

C. (R): $x + y - z = 0$

D. (R): $15x + 11y - 17z - 10 = 0$

Câu 49 (THPT Lê Lợi - 2018). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(5;4;3)$ và chắn trên các tia Ox, Oy, Oz các đoạn bằng nhau có phương trình là

A. $x - y + z - 4 = 0$

B. $x + y + z - 12 = 0$

C. $5x + 4y + 3z - 50 = 0$

D. $x - y - z + 2 = 0$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1-D	2-B	3-C	4-B	5-B	6-A	7-A	8-D	9-D	10-B
11-C	12-B	13-B	14-A	15-C	16-A	17-A	18-C	19-A	20-C
21-A	22-B	23-A	24-B	25-D	26-A	27-B	28-A	29-C	30-B
31-B	32-A	33-D	34-B	35-A	36-D	35-C	38-D	39-A	40-B
41-A	42-C	43-A	44-C	45-B	46-C	47-C	48-D	49-B	

CHỦ ĐỀ 32: BÍ QUYẾT GIẢI CÁC DẠNG TOÁN VỀ MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

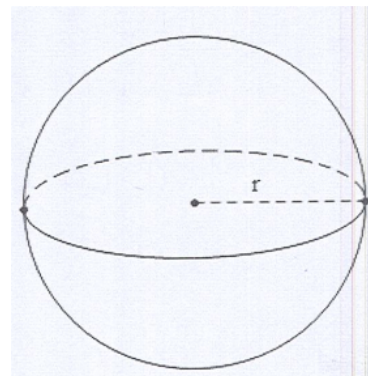
1. Sự hình thành mặt cầu, khối cầu:

Mặt cầu: Tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách I một khoảng R cho trước là mặt cầu tâm I bán kính R . Kí hiệu $(I; R)$

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$

Khối cầu: Tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách I một khoảng $\leq R$ gọi là khối cầu tâm I bán kính R . Như vậy khối cầu bao gồm mặt cầu và phần không gian bên trong mặt cầu

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



2. Phương trình chính tắc của mặt cầu

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R thì có phương trình chính tắc là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1)$$

3. Phương trình tổng quát của mặt cầu

Khai triển phương trình (1) ta được: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$

Để dễ nhìn ta đặt: $A = -2a, B = -2b, C = -2c, D = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$

Khi đó ta thu được: $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$

Phương trình (1) gọi là phương trình tổng quát của mặt cầu

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Ví dụ 1 (Chuyên Biên Hòa - 2017):

Cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z + m = 0$. Các giá trị của m để (α) và (S) không có điểm chung là

- A. $m \leq -9$ hoặc $m \geq 21$ B. $m < -9$ hoặc $m > 21$ C. $-9 \leq m \leq 21$ D. $-9 < m < 21$

Giải

Xét $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25 \Rightarrow I(-1; 2; 3)$ và bán kính $R = 5$.

Để (S) và (α) không có điểm chung khi $d(I; (P)) > R$

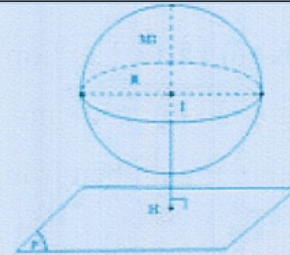
$$\Leftrightarrow \frac{|-1.2 + 2 - 2.3 + m|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} > 5$$

$$\Leftrightarrow |m - 6| > 15 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 21 \\ m < -9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Tổng quát

Mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) nếu $d(I; (P)) > R$



Ví dụ 2 (Chuyên Biên Hòa - 2017):

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$. Mệnh đề nào đúng?

A. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oxy)

B. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oxz)

C. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oyz)

D. Mặt cầu (S) không tiếp xúc với cả 3 mặt trên

Giải

Xét mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9 \Rightarrow$ tâm $I(2; -1; 3)$ và $R = 3$.

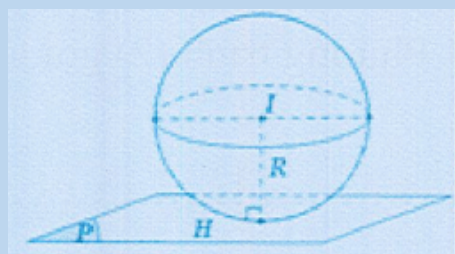
Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) có phương trình lần lượt là: $z = 0; x = 0; y = 0$.

Khi đó $d(I; (Oxy)) = 3, d(I; (Oyz)) = 2, d(I; (Oxz)) = 1$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oxy) .

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Tổng quát

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nếu $d(I; (P)) = R$



Ví dụ 3 (THPT Lê Lợi - 2017):

Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là $(P): 2x + 2y + z - m^2 + 4m - 5 = 0$, $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$. Tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc (S) là

A. $m = -1$ hoặc $m = 5$ B. $m = -1$ hoặc $m = -5$ C. $m = -1$

D. $m = 5$

Giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{1+1+1+6} = 3$.

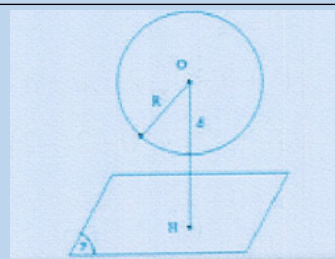
Để (P) tiếp xúc với (S) thì $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|1-m^2+4m-5|}{\sqrt{4+4+1}} = 3$

$$\Leftrightarrow |m^2 - 4m + 4| = 9 \Leftrightarrow (m+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Chọn A.

Mở rộng

Nếu đề bài hỏi tìm m để (P) ngoài (S) thì $d(I; (P)) > R$



Ví dụ 4 (THPT Lê Lợi - 2017):

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$ và điểm $I(1; -2; 3)$

Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với d là

A. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5\sqrt{2}$

B. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$

C. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 50$

D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 50$

Giải

Ngoài phương pháp tìm $R = d(I; (P)) = \frac{|\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{u_d}|}$ thì ta có thể dùng phương pháp tham số hóa tọa độ

Gọi $H(-1+2t; 2+t; -3-t)$ là chân đường cao hạ từ I xuống d

Khi đó $\overrightarrow{IH}(-2+2t; 4+t; -6-t)$

Suy ra $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 2(2t-2) + t + 4 + t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

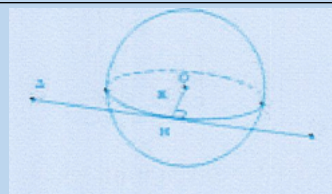
Suy ra $IH = \sqrt{16+9+25} = 5\sqrt{2}$

Do đó $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$

⇒ Chọn B.

Tổng kết

Mặt cầu (S) tiếp xúc với d thì $R = IH = d(I; d)$



Dạng 2: Lập phương trình mặt cầu với các yếu tố cho trước

Ví dụ 5 (THPT Hai Bà Trưng - 2017):

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $O, A(1;0;0)$ và $A(0;-2;0), C(0;0;4)$

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z = 0$

B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = 0$

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$

D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 8z = 0$

Giải

Cách 1: Đi từ phương trình tổng quát

Phương trình mặt cầu có dạng

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$$

Vì mặt cầu (S) đi qua $O, A(1;0;0)$ và $A(0;-2;0), C(0;0;4)$ nên ta có:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 1^2 + 0 + 0 - 2 \cdot 1 \cdot a + d = 0 \\ 0 + (-2)^2 + 0 - (-2) \cdot b + d = 0 \\ 0 + 0 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$$

⇒ Chọn C.

Cách 2: Đi từ tâm I của mặt cầu

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu thì $IO = IA = IB = IC = R$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} IO^2 = IA^2 \\ IO^2 = IB^2 \\ IO^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+2)^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c-4)^2 \end{cases}$$

Rút gọn và giải hệ bậc nhất 3 phương trình 3 ẩn ta được $I(\frac{1}{2}; -1; 2)$

$$\Rightarrow R = OI = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 4} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\Rightarrow (S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{21}{4}$$

Bình luận

Có 2 cách để giải bài này, đối với cách Đi từ phương trình tổng quát thì buộc chúng ta phải có máy tính Vinacal 570 VN Plus thì mới giải được hệ bậc nhất 4 phương trình 4 ẩn

Ví dụ 6 (THPT Nguyễn Bình Khiêm - 2017):

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 2), N(3; 1; 4)$. Tìm phương trình mặt cầu có đường kính MN

A. $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \sqrt{3}$

B. $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 3$

C. $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 3$

D. $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \sqrt{3}$

Giải

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a = \frac{1+3}{2} = 2 \\ b = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ c = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2; 0; 3).$$

Bán kính của mặt cầu là:

$$R = MI = \sqrt{(2-1)^2 + (0+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}.$$

$\Rightarrow$ Chọn B.

Tổng quát

Mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính thì sẽ có tâm I là trung điểm AB và có bán kính $R = \frac{AB}{2}$

Ví dụ 7 (Sở GD-ĐT Phú Thọ - 2017):

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -4)$ và thể tích của khối cầu tương ứng bằng 36π .

A. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 9$

B. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 9$

C. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 9$

D. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 3$

Giải

Gọi R là bán kính khối cầu. Ta có: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R = 3$.

Mặt cầu lại có tâm $I(1; 2; -4)$ nên có phương trình:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 9$$

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Ghi nhớ

Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$ và ta có mối quan hệ $V' = S$ và $\int S \cdot dx = V$

Ví dụ 8 (Sở GD-ĐT Phú Thọ - 2017):

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-2; -4; 5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông.

A. $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 40$

B. $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 82$

C. $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 58$

D. $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 90$

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Ví dụ 9 (THPT Hoàng Hóa - 2017):

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(a; b; c)$; bán kính R , đi qua 3 điểm $A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1)$ và tâm I thuộc mặt phẳng $x + y + z - 2 = 0$. Tính $(a + 2b + 3c)R$

A. 12

B. 8

C. 6

D. 4

$\Rightarrow$ **Chọn D.**

Ví dụ 10 (Sở GD-ĐT Điện Biên Phủ - 2017):

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -6 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $\Delta: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x + 3y - z - 1 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc d , tiếp xúc với cả Δ và (P) . Biết hoành độ điểm I là số

nguyên. Tung độ của điểm I là

A. 2

B. 0

C. -4

D. -2

$\Rightarrow$ Chọn C.

Dạng 3: Khoảng cách trong các bài toán về mặt cầu

Ví dụ 11 (THPT Lê Quý Đôn - 2017):

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 10z + 14 = 0$. Mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi bằng bao nhiêu?

A. 2π

B. 6π

C. 4π

D. 8π

Giải

Ta có $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 16 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(2;1;-5)$ và bán kính $R = 4$.

$d(I(P)) = \frac{|2+1-5-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 2\sqrt{3}$. Bán kính đường tròn giao tuyến là:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{16 - (2\sqrt{3})^2} = 2$$

Chu vi đường tròn là : $2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$.

$\Rightarrow$ Chọn C.

Tổng quát

Mặt cầu (S) cắt (P) thì sẽ cắt theo giao tuyến là đường tròn tâm J bán kính r . Lại có $IJ \perp (P)$ và có hệ thức $R^2 = IJ^2 + r^2$

Ví dụ 12 (THPT Chuyên Hà Giang - 2017):

Cho mặt cầu $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 16 \Rightarrow (S)$ và điểm $A(1;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu sao cho độ dài đoạn AM là lớn nhất.

A. $M(3;6;9)$

B. $M(1;2;-9)$

C. $M(1;2;9)$

D. $M(-1;-2;1)$

Giải

Tâm của mặt cầu là $I(1;2;-5)$.

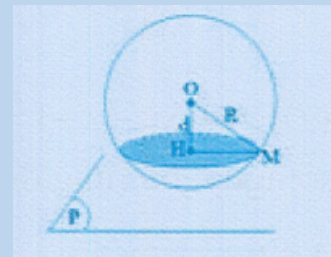
Ta nhận thấy $A \in$ mặt cầu. Để AM lớn nhất thì AM là 1 đường kính của hình cầu.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = 2_{x_1} - x_A = 2.1 - 1 = 1 \\ y_M = 2_{y_1} - y_A = 2.2 - 2 = 2 \\ z_M = 2_{z_1} - z_A = 2.(-5) + 1 = -9 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2; -9)$$

$\Rightarrow$ Chọn B.

Phương pháp

Cho một điểm A cố định, điểm M là 1 điểm thuộc mặt cầu thì AM lớn nhất và nhỏ nhất thì đường thẳng AM đều đi qua tâm I của mặt cầu



Ví dụ 13 (Sở GD-ĐT Thanh Hóa - 2017):

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $I(2; -1; 1)$.

Viết phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I .

A. $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$

B. $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$

C. $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$

D. $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \frac{80}{9}$

Giải

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng $d \Rightarrow H(2t+2; 2t+1; -t-1)$.

Đường thẳng d có vecto pháp tuyến $\vec{u}_d = (2; 2; -1)$.

Sử dụng $\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow H\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow IH = 2$.

Tam giác IAB là tam giác vuông cân tại I nên $IA = IH\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cũng là bán kính mặt cầu cần tìm.

$\Rightarrow$ Chọn C.

Tổng kết

ΔIAB vuông cân thì $R = \sqrt{2}d(I, d)$ còn ΔIAB vuông đều thì $R = \frac{2}{\sqrt{3}}d(I, d)$

Dạng 4: Mặt cầu ngoại tiếp một khối chóp**Ví dụ 14 (Chuyên Sư phạm - 2018):**

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0), B(0;0;2), C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{14}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

D. $\sqrt{14}$

Giải

Ngoài cách giải đặt $I(a;b;c)$ rồi thiết lập hệ bậc nhất 3 phương trình 3 ẩn thì ta có thể sử dụng công thức giải nhanh.

$\Rightarrow$ Vì $OA=1, OB=2, OC=3$ và đôi một vuông góc $\Rightarrow$ Tứ diện $OABC$ là tứ diện vuông

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn C.**

Công thức giải nhanh

Bán kính mặt cầu tứ diện vuông $OABC$ đỉnh O với 3 cạnh bên $OA=a, OB=b, OC=c$ là

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}.$$

Ví dụ 15 (Chuyên Sư phạm - 2018):

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;-2), B(4;0;0)$. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất, đi qua O, A, B có tâm là

A. $I(2;0;-1)$

B. $I(0;0;-1)$

C. $I(2;0;0)$

D. $I\left(\frac{4}{3}; 0; -\frac{2}{3}\right)$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (0;0;-2), \overrightarrow{OB} = (4;0;0)$

Suy ra: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O .

Gọi M là tâm ngoại tiếp ΔOAB thì M là trung điểm cạnh huyền AB và Δ là trục của ΔOAB nên Δ đi qua M và $\perp (OAB)$ tại $M \Rightarrow \Delta \perp (OAB)$

Vì tâm I của mặt cầu ngoại tiếp O, A, B thì $IA = IB = IO \Rightarrow I \in \Delta$ và $IO = R$

Để IO đạt giá trị nhỏ nhất thì $IO = d(O; \Delta)$ khi đó I là hình chiếu vuông góc của O lên Δ hay $IO \perp \Delta$

Lại có $\Delta \perp (OAB) \Rightarrow \Delta \perp OM \Rightarrow$ là hình chiếu vuông góc của O lên $\Delta \Rightarrow M \equiv I$.

Vậy tọa độ tâm mặt cầu là $I(2;0;-1)$

$\Rightarrow$ Chọn A.

Kiến thức

Tâm đường tròn ngoại tiếp của Δ vuông là trung điểm cạnh huyền, của Δ đều là trọng tâm Δ đều, của hình chữ nhật và hình vuông là giao điểm 2 đường chéo.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;0), B(-2;3;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$. Mặt cầu (S) đi qua A, B và có tâm I thuộc đường thẳng d là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 17$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$

C. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 16$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;0;0), B(-0;0;2), C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{14}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

D. $\sqrt{14}$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với 2 mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0; (Q): x - 2y - 2 = 0$ là:

A. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$

B. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{5}$

C. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 5$

D. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1), B(3;-1;1), C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

A. 5

B. 7

C. 6

D. 8

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 8$

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm thuộc Ox và tiếp xúc với 2 mặt phẳng $(P): x+2y+2z-1=0; (Q): x-2y-2z+3=0$ có bán kính R bằng:

A. $\frac{2}{3}$

B. 2

C. $\frac{1}{3}$

D. 3

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y-z+2=0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bé hơn 3

B. (P) tiếp xúc với (S)

C. (P) không cắt (S)

D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 3

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;-2;5)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 2$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 2$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 4$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 4$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-4;0), B(0;0;4), C(-1;0;3)$. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 3y - 4z = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, đâu là phương trình mặt cầu đường kính AB với $A(1;-1;1)$ và $A(-3;-1;3)$?

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 20$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 20$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(-1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-3=0$?

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

Câu 12: Trong không gian cho mặt cầu có phương trình $(S): (x+3)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 4 = 0$. Biết mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn (C) . Tính chu vi đường tròn (C) .

- A. 8π B. 4π C. 2π D. $4\pi\sqrt{2}$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;-2)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$. Một đường thẳng d đi qua A , cắt mặt cầu tại hai điểm M, N . Độ dài ngắn nhất của MN là:

- A. 6 B. 10 C. 4 D. 8

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - y - z + 6 = 0, (Q): 2x + 3y - 2z + 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc (Q) và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm $E(-1;2;3)$, bán kính $r = 8$. phương trình mặt cầu (S) là

- A. $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 64$ B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 67$
C. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$ D. $x^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 64$

Câu 15: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng có phương trình $(P_1): x - 2y - 2z + 2 = 0, (P_2): x - 2y + 2z - 8 = 0, (P_3): 2x + y - 2z - 3 = 0, (P_4): 2x + 2y - z + 1 = 0$. Cặp mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tâm $I(1;-1;1)$ và bán kính $R = 1$ là

- A. (P_1) và (P_2) B. (P_1) và (P_3) C. (P_2) và (P_3) D. (P_2) và (P_4)

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;2;1), B(0;0;3), C(2;1;1)$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua ba điểm A, B, C . Tính diện tích của mặt cầu (S) .

- A. 18π B. $\frac{162}{17}\pi$ C. $\frac{54}{17}\pi$ D. 9π

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z - 11 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

- A. $I(-2;-3;1)$ và $R = 25$ B. $I(-2;-3;1)$ và $R = 5$
C. $I(2;3;-1)$ và $R = 5$ D. $I(2;3;-1)$ và s

Câu 18: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $I(2;4;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm phương trình mặt cầu (S) có tâm I sao cho (S) cắt (P) theo một đường tròn có đường kính là 2.

- A. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 4$ B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$
C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn giao tuyến ấy có bán kính r bằng

- A. $r = 4$ B. $r = 2$ C. $r = \sqrt{5}$ D. $r = \sqrt{6}$

Câu 20: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$ và điểm $M(7; -1; 5)$. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M là

- A. $x + 2y + 2z - 15 = 0$ B. $6x - 2y - 2z - 34 = 0$
C. $6x + 2y + 3z - 55 = 0$ D. $7x - y + 5z - 55 = 0$

Câu 21: Tìm m để phương trình sau là phương trình của một mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-1)x + 2(2m-3)y + 2(2m+1)z + 11 - m = 0.$$

- A. $0 < m < 1$ B. $m < -1, m > 2$ C. $m < 0, m > 1$ D. $-1 < m < 2$

Câu 22: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + m = 0$. (S) và (P) tiếp xúc với nhau khi:

- A. $m = 7, m = -5$ B. $m = -7, m = 5$ C. $m = 2, m = 6$ D. $m = -2, m = -6$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 1; 3), B(-1; 3; 2), C(-1; 2; 3)$. Tính bán kính r của mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC)

- A. $r = 3$ B. $r = \sqrt{3}$ C. $r = \sqrt{6}$ D. $r = 2$

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 2; 1), B(3; -1; 1), C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) lần lượt là hai mặt cầu có tâm B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

- A. 5 B. 7 C. 6 D. 8

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4 = 0$. Chọn phát biểu sai.

- A. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 0)$ B. Mặt cầu (S) có bán kính bằng $\sqrt{6}$
C. Điểm $A(2; 3; 1)$ nằm trong mặt cầu (S) D. Điểm $A(1; 2; 1)$ nằm ngoài mặt cầu (S)

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{3}$. Phương trình mặt cầu (S)

- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{28}{9}$

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình mặt cầu tâm A , cắt Δ tại B, C sao cho $BC = 8$ là:

A. $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 25$

B. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25$

C. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$

D. $x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$

Câu 28: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và đi qua $A(1;0;4)$ có phương trình

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 53$

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 53$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 53$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 53$

Câu 29: Trong mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. (S) có tâm $I(-1;2;3)$

B. (S) có bán kính $R = 2\sqrt{3}$

C. (S) đi qua điểm $M(1;0;1)$

D. (S) đi qua điểm $N(-3;4;2)$

Câu 30: Cho mặt phẳng $(\alpha): 4x - 2y + 3z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 0$. Khi đó, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề nào sai?

A. (α) cắt (S) theo một đường tròn

B. (α) có điểm chung với (S)

C. (α) tiếp xúc với (S)

D. (α) đi qua tâm của (S)

Câu 31: Phương trình mặt cầu (S) nhận đoạn vuông góc chung của $d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1+t' \\ y = 2-t' \\ z = 0 \end{cases}$ làm

đường kính là

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$

B. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$, đường thẳng

$\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = z$. Mặt phẳng (P) vuông góc với Δ và tiếp xúc với (S) có phương trình là:

A. $2x - 2y + z + 2 = 0$ và $2x - 2y + z - 16 = 0$

B. $2x - 2y + 3\sqrt{8} - 6 = 0$ và $2x - 2y - 3\sqrt{8} - 6 = 0$

C. $2x - 2y - 3\sqrt{8} + 6 = 0$ và $2x - 2y - 3\sqrt{8} - 6 = 0$

D. $2x + 2y - z + 2 = 0$ và $2x + 2y - z - 16 = 0$

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - y + z - 4 = 0$, $mp(\alpha)$ cắt mặt cầu (S) tâm $I(1; -3; 3)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm $H(2; 0; 1)$, bán kính $r = 2$. Phương trình (S) là

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 18$

B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 18$

C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 4$

D. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 4$

Câu 34: Cho mặt cầu (S) có tâm $I(-4; 2; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{104}$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 5t \\ z = -8 + 5t \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. d tiếp xúc với S tại điểm có tọa độ là $(2; 4; -8)$

B. d đi qua tâm của S

C. d và S cắt nhau tại 2 điểm có tọa độ là $(2; 4; -8)$ và $(2; -6; 2)$

D. d và S không cắt nhau

Câu 35: Đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) tâm $I(3; -1; -4)$, bán kính $R = 4$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 3 = 0$. Tâm H của đường tròn là điểm nào sau đây?

A. $H(1; 1; 3)$

B. $H(1; 1; -3)$

C. $H(-1; 1; 3)$

D. $H(-3; 1; 1)$

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $H(4; 3; 4)$ song song với đường thẳng Δ và tiếp xúc mặt cầu (S) là:

A. $2x + y + 2z - 19 = 0$

B. $x - 2y + 2z - 1 = 0$

C. $2x + y - 2z - 12 = 0$

D. $2x + y - 2z - 10 = 0$

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0, (Q): x - y + z + 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$. Một mặt cầu (S) tâm thuộc d , tiếp xúc với (P) và cắt (Q) theo một đường tròn có chu vi 2π . Tìm phương trình mặt cầu (S) có hoành độ tâm lớn hơn -5

A. $(x+7)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 4$

B. $(x+5)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2 = 4$

C. $(x+3)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 = 4$

D. $(x+6)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4$

Câu 38: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z + 15 = 0$ và điểm $J(-1; -2; 1)$. Gọi I là điểm đối xứng của J qua (α) . Viết phương trình mặt cầu (C) tâm I , biết nó cắt (α) theo một đường tròn có chu vi 8π .

A. (C): $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 25$

B. (C): $(x+5)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 5$

C. (C): $(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 5$

D. (C): $(x+5)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1;2;1), B(3;2;3)$, có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x - y - 3 = 0$, đồng thời có bán kính nhỏ nhất, hãy tính bán kính R của mặt cầu (S)

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z + m = 0$ không phải là phương trình mặt cầu

A. $m < -14$

B. $m \geq 14$

C. $m < 0$

D. $m < 14$

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và hai mặt phẳng (P) và (Q)

lần lượt có phương trình $x + 2y + 2z + 3 = 0; x + 2y + 2z + 7 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d , tiếp xúc hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$

B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

C. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và hai mặt phẳng (P) và (Q)

lần lượt có phương trình $x + 2y + 2z + 3 = 0; x + 2y + 2z + 7 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d , tiếp xúc hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$

B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

C. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}(3; -4; -5)$ là vectơ pháp tuyến và (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$. Phương trình của mặt phẳng (P) là:

A. $3x - 4y - 5z - 15 = 0$ hoặc $3x - 4y - 5z - 25 = 0$ B. $3x - 4y - 5z + 15 = 0$ hoặc $3x - 4y - 5z - 25 = 0$

C. $3x - 4y - 5z - 15 = 0$ hoặc $3x - 4y - 5z + 25 = 0$ D. $3x - 4y - 5z + 15 = 0$ hoặc $3x - 4y - 5z + 25 = 0$

Câu 44: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ gọi (S) là mặt cầu đi qua 2 điểm $A(0;2;1), B(-2;0;1)$, có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và có bán kính nhỏ nhất, hãy tính bán kính R của mặt cầu (S)

- A. $R = 3\sqrt{2}$ B. $R = 3$ C. $R = 6$ D. $R = 18$

Câu 45: Trong không gian tọa độ mặt phẳng $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z + m = 0$. Giá trị m để (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng 7π là:

- A. $m = 3, m = -15$ B. $m = -3, m = 15$ C. $m = 6, m = -18$ D. $m = 0$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) . Khi đó:

- A. $m.n = 2$ B. $m.n = -2$ C. $m.n = 4$ D. $m.n = -4$

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 18$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B . Tính diện tích tam giác IAB .

- A. $\frac{8\sqrt{11}}{3}$ B. $\frac{16\sqrt{11}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{11}}{6}$ D. $\frac{8\sqrt{11}}{9}$

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$. Tìm phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với Oy tại B , tiếp xúc với Oz tại C và (S) đi qua A ?

- A. $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 61$ B. $(x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+6)^2 = 61$
C. $(x-5)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 61$ D. $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 61$

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$, mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 18 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua M và nằm trong (α) cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất là

- A. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$ D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB

A. $S = \sqrt{7}$

B. $S = 4$

C. $S = 2\sqrt{7}$

D. $S = 2\sqrt{2}$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1B	2C	3A	4B	5A	6A	7A	8C	9D	10A
11D	12C	13D	14B	15A	16B	17B	18C	19C	20C
21C	22A	23C	24A	25D	26D	27C	28D	29D	30C
31C	32A	33C	34A	35B	36A	35C	38C	39D	40B
41B	42B	43B	44A	45A	46D	47A	48C	49B	50B