

PHẦN I - MỞ ĐẦU



1) Lý do chọn đề tài

Hàm số là một trong những khái niệm cơ bản của toán học nói chung và chương trình toán phổ thông nói riêng. Quan điểm hàm số cần được quán triệt trong toàn bộ chương trình toán ở trường trung học phổ thông. Các bài toán khó về hàm số, phương trình, bất phương trình thường có mặt trong các kỳ thi đại học, cao đẳng, thi học sinh giỏi các cấp... Lý thuyết về hàm số, phương trình, bất phương trình và hệ phương trình được trình bày khá rõ ràng trong SGK Đại số lớp 10 của nhà xuất bản Giáo dục và một số sách tham khảo khác.

Toán học nói chung và Hàm số nói riêng có nhiều ứng dụng rất quan trọng trong đời sống cũng như trong các ngành khoa học khác. SGK Đại số lớp 10 của nhà xuất bản Giáo dục đã trình bày rất rõ về định nghĩa và các tính chất của hàm số; phương trình ; bất phương trình và hệ phương trình. Để giúp học sinh THPT, đặc biệt là học sinh lớp 12, có thể tìm hiểu sâu hơn về hàm số và ứng dụng của nó làm cơ sở để tham gia các kỳ thi cuối cấp cũng như ứng dụng trong thực tế cuộc sống, trong phạm vi *đề tài sáng kiến kinh nghiệm* của mình tôi xin trình bày một ứng dụng của hàm số vào việc giải các bài toán về phương trình - bất phương trình:

Vận dụng tính đơn điệu của Hàm số vào việc giải các bài toán về phương trình - bất phương trình.

Đây là một vấn đề được nhiều giáo viên và học sinh rất quan tâm và yêu thích. Bằng kinh nghiệm của bản thân trong nhiều năm giảng dạy, tôi đã tích lũy được một số kinh nghiệm trong việc khai thác những ứng dụng của tính đơn điệu của hàm số trong giải toán. Trong phạm vi đề tài của mình tôi chỉ xin nêu ra một số ứng dụng của tính đơn điệu của hàm số trong việc giải một số bài toán điển hình về phương trình – bất phương trình trong chương

trình cũng như trong các đề thi mà một số đáp án được giải bằng phương pháp khác.

2) Mục đích nghiên cứu

Xây dựng một hệ thống bài tập đa dạng có sử dụng tính đơn điệu của hàm số nhằm rèn luyện khả năng tư duy, sáng tạo và kỹ năng giải toán cho học sinh, góp phần nâng cao chất lượng dạy học.

3) Nhiệm vụ nghiên cứu

Nghiên cứu và đưa ra một phương pháp giải toán dựa trên ứng dụng tính đơn điệu của hàm số.

4) Phương pháp nghiên cứu

- *Nghiên cứu lý luận:* Nghiên cứu sách, báo, tạp chí, tài liệu về các vấn đề liên quan đến đề tài
- *Phương pháp quan sát điều tra:* Tìm hiểu việc giảng dạy của giáo viên và học tập của học sinh trong việc vận dụng tính đơn điệu của hàm số để giải toán
- *Phương pháp thực nghiệm sư phạm*

5) Bố cục đề tài

Ngoài các phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và phụ lục, sáng kiến kinh nghiệm gồm 3 chương:

Chương 1: Cơ sở lý thuyết

Chương 2: Vận dụng tính đơn điệu của hàm số vào việc giải các bài toán về phương trình – bất phương trình

Chương 3: Thực nghiệm sư phạm

PHẦN II – NỘI DUNG

VẬN DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ VÀO VIỆC GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

CHƯƠNG I – CƠ SỞ LÝ THUYẾT

✎ SGK Đại số 10 đã định nghĩa phương trình và bất phương trình một ẩn như sau:

Cho hai hàm số: $f(x)$ với tập xác định D_f , $g(x)$ với tập xác định D_g . Đặt $D = D_f \cap D_g$. Ta đặt vấn đề tìm các giá trị $a \in D$ sao cho: $f(a) = g(a)$, ($f(a) > g(a)$).

Khi đó ta nói rằng mệnh đề chứa biến dạng $f(x) = g(x)$ gọi là một *phương trình* ($f(x) > g(x)$ là một *bất phương trình*) một ẩn, x gọi là ẩn số (hay ẩn) của phương trình.

Số thực a được gọi là một *ng nghiệm* của phương trình (bất phương trình), D là *tập xác định* của phương trình (bất phương trình).

Giải phương trình (bất phương trình) là tìm tất cả các nghiệm của nó. Định nghĩa trên đây nêu lên mối quan hệ hữu cơ giữa các khái niệm hàm số, phương trình và bất phương trình.

✎ Tính đơn điệu của hàm số:

a. Định nghĩa:

- Hàm số f được gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall x_1; x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

- Hàm số f được gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall x_1; x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

b. Tính chất:

Tính chất 1:

Nếu hàm số f chỉ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2; \forall x_1, x_2 \in (a;b)$ (suy ra từ định nghĩa).

Tính chất 2:

Nếu hàm số f chỉ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Chứng minh:

- ***Trường hợp hàm số f đồng biến trong khoảng $(a;b)$***

Giả sử có hai số $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = 0(*)$. Điều (*) này gặp phải mâu thuẫn, vì $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1 \in (a;b), x_2 \in (a;b)$ (do hàm số f tăng trong khoảng $(a;b)$).

- ***Trường hợp hàm số f nghịch biến trong khoảng $(a;b)$.***

Lập luận tương tự a) , ta cũng gặp mâu thuẫn.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ không thể có nhiều hơn một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

CHƯƠNG II – VẬN DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ VÀO VIỆC GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A - VẬN DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ VÀO VIỆC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: Giải phương trình: $3\sqrt{x-8} = 5 + \sqrt{13-x}$

Lời giải: Điều kiện: $8 \leq x \leq 13$

Phương trình đã cho tương đương với: $3\sqrt{x-8} - \sqrt{13-x} = 5$

Đặt $f(x) = 3\sqrt{x-8} - \sqrt{13-x}$, $x \in [8;13]$, ta có: $f(x)$ liên tục trên $[8;13]$ và

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x-8}} + \frac{1}{2\sqrt{13-x}} > 0, \forall x \in (8;13)$$

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $(8; 13)$. Mà $f(12) = 5$, nên phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $x = 12$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

Lời giải: Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Đặt $f(x) = \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1}$, $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, thấy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Như vậy, $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, mà $f(1/2) = 1$ nên phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $x = 1/2$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5$ (2)

Lời giải: Điều kiện: $x \geq -2$

Đặt $f(x) = \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4}$, thấy hàm số liên tục trên $[-2; +\infty)$ và

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+9}} + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} > 0, \forall x \in (-2; +\infty),$$

chứng tỏ hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[-2; +\infty)$. Mà $f(0) = 5$, suy ra $f(x) = \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5 \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy nghiệm bất phương trình đã cho là $x > 0$.

- *Nhận xét: Ta nhận thấy ở 3 ví dụ trên, bằng cách sử dụng phương pháp hàm số ta thu được lời giải rất ngắn gọn, khoa học. Nếu sử dụng các phương pháp biến đổi tương đương để giải thì lời giải sẽ phức tạp hơn nhiều.*

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$

Lời giải: Điều kiện: $x \leq \frac{1}{3}$

Đặt $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{1-3x}} > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

Suy ra, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, mà $f(-1) = 0$ nên phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $x = -1$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+15} = 3x-2+\sqrt{x^2+8}$ (2)

Lời giải: Phương trình (2) tương đương với: $f(x) = 3x-2+\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+15} = 0$

- Nếu $3-2x \leq 0 \Rightarrow f(x) < 0$, khi đó phương trình vô nghiệm.
- Nếu $3-2x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$, khi đó ta có: $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

$$\text{và } f'(x) = 3 + x \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+8}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+15}} \right] > 0, \forall x > \frac{2}{3}$$

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Mà $f(1) = 0$, suy ra phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $x^2 - 6x + 15 = \sqrt{x^2 - 6x + 18} \cdot (x^2 - 6x + 11)$ (6)

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{x^2 - 6x + 18} = \sqrt{(x-3)^2 + 9} \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó phương trình (6) trở thành: $t^2 - 3 = t(t^2 - 7) \Leftrightarrow f(t) = t^3 - t^2 - 7t + 3 = 0$.

Thấy hàm số $f(t)$ liên tục trên $[3; +\infty)$ và có $f'(t) = 3t^2 - 2t - 7 > 0, \forall t \in [3; +\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[3; +\infty)$. Mà $f(3) = 0$ nên phương trình $f(t) = t^3 - t^2 - 7t + 3 = 0$ có duy nhất một nghiệm $t = 3$. Khi đó phương trình (6) trở thành: $t = \sqrt{x^2 - 6x + 18} = 3 \Leftrightarrow x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

- **Nhận xét:** Ta nhận thấy ở ví dụ 4, 5, 6 ở trên, là các bài toán loại bất quy tắc, nếu sử dụng phương pháp biến đổi tương đương thì sẽ rất khó khăn để có thể giải được bài toán. Trong khi đó, nếu sử dụng phương pháp hàm số một cách khéo léo thì ta sẽ có lời giải rất đẹp, điều đó thể hiện thế mạnh của việc vận dụng phương pháp hàm số vào giải toán. Ví dụ sau lại thể hiện một cách khai thác khác ứng dụng của hàm số:

Ví dụ 7: Giải phương trình: $(2x-1)\sqrt{4x^2-4x+4}+3x\sqrt{9x^2+3}=0$ (7)

Lời giải: Phương trình tương đương với:

$$(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+3}=(-3x)\sqrt{(-3x)^2+3} \quad (7')$$

Ta thấy hàm số $f(t)=t\sqrt{t^2+3}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(t)=\sqrt{t^2+3}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có:

Phương trình (7') $\Leftrightarrow f(2x-1)=f(-3x) \Leftrightarrow 2x-1=-3x \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$. Vậy $x = 1/5$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 8: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$ (8)

Lời giải: Điều kiện: $1 \leq x \leq 3$

Phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2+2}-\sqrt{(x-3)^2+2}&>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}&>\sqrt{(x-3)^2+2}+\sqrt{3-x} \end{aligned} \quad (8')$$

Ta thấy hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}+\frac{1}{2\sqrt{t}}>0, \forall t \in (0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Khi đó, bất phương trình (8') $\Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x) \Leftrightarrow x-1>3-x \Leftrightarrow x>2$.

Kết hợp điều kiện, ta được nghiệm bất phương trình đã cho là: $x \in (2;3]$

- **Nhận xét:** Ở ví dụ 7, 8 ở trên, ta sử dụng phương pháp **hàm đại diện** bằng cách làm xuất hiện những dạng thức giống nhau ở hai vế phương trình, bất phương trình, khi đó sử dụng các tính chất của hàm số đơn điệu ta sẽ có lời giải rất ngắn gọn. Lời giải này ưu việt hơn rất nhiều so với việc sử dụng phương pháp khác để giải. Tuy nhiên, khi sử dụng phương pháp này ta cần lưu ý điều kiện để áp dụng tính chất 1 đã nêu trong phần cơ sở lý thuyết để không mắc sai lầm. Vấn đề này tôi sẽ đề cập cụ thể ở phần hệ phương trình, hệ bất phương trình.

Ví dụ 9: Giải phương trình: $3^x=5-2x$ (9)

Lời giải: Phương trình (9) tương đương với: $3^x+2x=5$

Ta thấy hàm số $f(x)=3^x+2x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=3^x \ln 3+2>0, \forall x \in \mathbb{R}$ Nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà $f(1)=5$ nên phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm là $x=1$.

Ví dụ 10: Giải bất phương trình: $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x > 6^x - 1$ (10)

Lời giải: Bất phương trình tương đương với:

$$2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x + 1 > 6^x \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 1 \quad (10')$$

Ta thấy hàm số $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln \frac{1}{3} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^x \ln \frac{1}{6} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số } f(t) \text{ luôn nghịch}$$

biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f(2) = 1$, nên bất phương trình $(10') \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x < 2$ là nghiệm bất phương trình đã cho.

Ví dụ 11: Giải phương trình: $\log_2(x+1) = 2 - x$ (11)

Lời giải: Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình (11) tương đương với: $\log_2(x+1) + x = 2$

Ta thấy hàm số $f(x) = \log_2(x+1) + x$ liên tục trên $(-1; +\infty)$ và

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1) \ln 2} + 1 > 0, \forall x \in (-1; +\infty) \text{ nên hàm số } f(x) \text{ luôn đồng biến trên}$$

$(-1; +\infty)$. Mà $f(1) = 2$, suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Ví dụ 12: Giải bất phương trình: $3 \log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) > 2 \log_2 \sqrt{x}$ (12)

Lời giải: Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Đặt } t = \log_2 \sqrt{x} \Rightarrow 2^t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 4^t$$

Bất phương trình (12) trở thành:

$$\begin{aligned} 3 \log_3(1 + 2^t + \sqrt[3]{4^t}) > 2t &\Leftrightarrow \log_3(1 + 2^t + \sqrt[3]{4^t}) > \frac{2t}{3} \\ \Leftrightarrow 1 + 2^t + \sqrt[3]{4^t} > \sqrt[3]{9^t} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)^t + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)^t + \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^t > 1 \quad (12') \end{aligned}$$

Đặt

$$f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)^t + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)^t + \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^t \Rightarrow f'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)^t \ln \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)^t \ln \frac{2}{\sqrt[3]{9}} + \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^t \ln \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} < 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, mà $f(6) = 1$ nên bất phương trình $(12') \Leftrightarrow f(t) > f(6) \Leftrightarrow t < 6 \Rightarrow \log_2 \sqrt{x} < 6 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} < 2^6 \Leftrightarrow 0 < x < 2^{12}$ là nghiệm bất phương trình.

Ví dụ 13: Giải phương trình:

$$\log_5(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x - x^2 - 1} = 257 \quad (13)$$

Lời giải: Điều kiện $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$, suy ra $u \geq 0$ và $x^2 - 3x = u^2 - 2$, thay vào (13) ta có: $\log_5(u + 2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1 - u^2} = 257 \Leftrightarrow \log_5(u + 2) + \frac{1}{2} \cdot 2^{u^2} = 257 \quad (13')$

Đặt $f(u) = \log_5(u + 2) + \frac{1}{2} 2^{u^2}$, vì $f'(u) > 0, \forall u \in [0; +\infty)$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$. Mặt khác $f(3) = \log_5 5 + \frac{1}{2} 2^9 = 257$.

$$\text{Vì vậy, } (2) \Leftrightarrow f(u) = f(3) \Leftrightarrow u = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: } x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Ví dụ 14 : Giải phương trình: $\log_{2013} \frac{4x^2 + 1}{x^6 + x^2 + 3} = x^6 - 3x^2 + 2 \quad (14)$

Lời giải:

$$\text{Đặt } u = 4x^2 + 1 \geq 1; v = x^6 + x^2 + 3 \geq 3$$

$$\text{Ta có } (14) \Leftrightarrow \log_{2013} \frac{u}{v} = v - u \Leftrightarrow u + \log_{2013} u = v + \log_{2013} v \Leftrightarrow u \cdot 2013^u = v \cdot 2013^v \quad (14')$$

Xét hàm số: $f(t) = t \cdot 2013^t, t \in [3; +\infty)$, có $f'(t) = 2013^t \cdot (1 + t \cdot \ln 2013) > 0, \forall t \in [3; +\infty)$.

Suy ra, hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[3; +\infty)$. Vậy, từ phương trình (14') ta có $u = v$, hay $4x^2 + 1 = x^6 + x^2 + 3 \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0$

$$\text{Đặt } X = x^2 \geq 0 \Rightarrow X^3 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = -2 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\text{Với } X = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = \pm 1$

Ví dụ 15: Giải bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3^{\cos 2x} - \log_6 2013 \geq 0 \quad (15)$

Kinh nghiệm giảng dạy môn Toán: ***Vận dụng tính đơn điệu của Hàm số vào giải các bài toán về phương trình – bất phương trình***

Lời giải: Ta có:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3^{\cos 2x} - \log_6 2013 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3^{1-2\sin^2 x} - \log_6 2013 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} \geq \log_6 2013$$

Đặt $t = \sin^2 x, t \in [0;1]$, BPT(15) trở thành: $\left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t \geq \log_6 2013$ (15')

Hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t$ nghịch biến với $\forall t \in [0;1] \Rightarrow f(t) \leq f(0) = 4$

Mà $\log_6 2013 > 4$, suy ra bất phương trình đã cho vô nghiệm.

- *Nhận xét: Từ ví dụ 9 đến ví dụ 15, là các phương trình, bất phương trình mũ và logarit. Ta nhận thấy việc sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải các bài toán đó rất gọn gàng và đẹp. Hơn nữa, có nhiều bài toán không thể sử dụng được phương pháp khác để giải. Điều đó khẳng định rằng, phương pháp **sử dụng tính đơn điệu của hàm số** vào giải toán là một phương pháp không thể thiếu với mỗi học sinh khi ôn tập để chuẩn bị cho các kì thi lớn như kì thi học sinh giỏi khối 12 hay kì thi đại học.*

B - VẬN DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ VÀO VIỆC GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH- HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

Ví dụ 1: Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 < 0 \\ x^3 - 3x + 1 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải: Hệ bất phương trình tương đương với
$$\begin{cases} x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right) \\ f(x) = x^3 - 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

Ta có $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (-1; 1) \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) > f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$$

Vậy nghiệm hệ phương trình là $x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y & (*) \\ x^8 + y^4 = 1 & (**) \end{cases} \quad (2)$$

Lời giải:

Từ phương trình $(**)$ ta có:
$$\begin{cases} x^8 \leq 1 \\ y^4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 5t$ liên tục trên $[-1; 1]$, có $f'(t) = 3t^2 - 5 \Rightarrow f'(t) < 0, \forall t \in [-1; 1]$

Suy ra, $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $[-1; 1]$, vì vậy phương trình $(*)$ tương đương với $x = y$, ta có hệ:

$$\begin{cases} x = y \\ x^8 + y^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^8 + x^4 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^8 + x^4 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm \sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \end{cases} \text{ là nghiệm hệ}$$

đã cho.

Ví dụ 3 : Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y & (*) \\ \cos 2x + \sin 2y + \cos x + \sin y + 1 = 0 & (**) \end{cases} \quad (3)$$

Lời giải: Ta có (*) $\Leftrightarrow x - \sin x = y - \sin y$ (*1). Xét hàm số $f(t) = t - \sin t$, liên tục trên $\mathbb{R}$, có: $f'(t) = 1 - \cos t \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số tăng trên $\mathbb{R}$ do đó, (*1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$, thế vào (**) ta có phương trình:

$$\cos 2x + \sin 2x + \cos x + \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2 \cos x (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$* \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$* 2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm: $x = y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = y = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 3x + 3y = 0 & (*) \\ x\sqrt{x+1} + \sqrt{y+3} = 2\sqrt{y^2+1} & (**) \end{cases} \quad (4)$$

Lời giải: Điều kiện: $x \geq -1; y \geq -3$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow x^3 + 3x = (-y)^3 + 3(-y)$ (*')

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có phương trình (*') $\Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y$, thế vào (**) ta được:

$$x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2(x+1) + 3-x + 2x\sqrt{x+1}\sqrt{3-x} = 4x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x - 1 + 2x\sqrt{x+1}\sqrt{3-x} = 0 \Leftrightarrow x^2(3-x) + (x+1) = 2x\sqrt{x+1}\sqrt{3-x}$$

Với điều kiện $-1 \leq x \leq 3$ thì $x^2(3-x) \geq 0; x+1 \geq 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số đó, ta có: $x^2(3-x) + (x+1) \geq 2|x|\sqrt{3-x}\sqrt{x+1} \geq 2x\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x^2(3-x) = x+1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; x=1 \pm \sqrt{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1+\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy, nghiệm hệ đã cho là: $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=-1-\sqrt{2} \end{cases}$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (*) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (**) \end{cases} \quad (5)$$

Lời giải: Hiển nhiên $y \neq 0$, chia hai vế phương trình (*) cho y^5 , ta được:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y \quad (***)$$

Kinh nghiệm giảng dạy môn Toán: **Vận dụng tính đơn điệu của Hàm số vào giải các bài toán về phương trình – bất phương trình**

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ là hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy phương trình (***) tương đương với $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$, thế vào phương trình (**) ta được:

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \quad (****)$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8}$ liên tục trên $\left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$, có

$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+5}} + \frac{1}{2\sqrt{x+8}} > 0, \forall x \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$, suy ra $g(x)$ luôn nghịch biến trên $\left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$, mà $g(1) = 6$ nên phương trình (****) có nghiệm duy nhất $x = 1$,

vậy hệ đã cho có hai nghiệm là: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3(3y-2) = -8 & (*) \\ x(y^3+2) = -6 & (**) \end{cases} \quad (6)$

(Đề thi Học sinh giỏi thành phố Hà Nội – năm học 2012 - 2013)

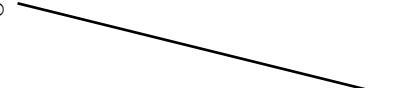
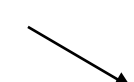
Lời giải: Thấy $x = 0$ không phải là nghiệm hệ nên ta có hệ tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{3y-2}{-8} = \frac{1}{x^3} \\ \frac{y^3+2}{-6} = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{3y-2}{-8} = \left(\frac{y^3+2}{-6}\right)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq \frac{2}{3} \\ \frac{(y^3+2)^3}{3y-2} = 27 \end{cases}$$

Xét hàm $f(y) = \frac{(y^3+2)^3}{3y-2}$ có:

$$f'(y) = \frac{3(y^3+2)^2(y-1)(8y^2+2y+2)}{(3y-2)^2} \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y) = +\infty$; $\lim_{y \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^+} f(y) = +\infty$; $\lim_{y \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^-} f(y) = -\infty$, ta có bảng biến thiên:

y	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$	$2/3$	1	$+\infty$				
$f'(y)$	-	0	-		-	0	+		
$f(y)$	$+\infty$						27		$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy: $f(y)=27 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ y=1 \end{cases}$. Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là: $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x+1=y^3+y^2+y \\ 2y+1=z^3+z^2+z \\ 2z+1=x^3+x^2+x \end{cases} \quad (7)$$

Lời giải:

Xét hàm số : $f(t)=t^3+t^2+t$, với $t \in R$. Khi đó:

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=f(y) \\ 2y+1=f(z) \\ 2z+1=f(x) \end{cases}$$

Ta có : $f'(t)=3t^2+2t+1>0, \forall t \in R \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên R .

• Nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$

$$\Leftrightarrow 2z+1 < 2x+1 \Leftrightarrow z < x \Rightarrow f(z) < f(x) \Rightarrow 2y+1 < 2z+1 \Leftrightarrow y < z.$$

Từ đó, suy ra: $x < y < z < x$. Điều này vô lý.

• Nếu $y < x$ thì $f(y) < f(x)$

$$\Leftrightarrow 2x+1 < 2z+1 \Leftrightarrow x < z \Rightarrow f(x) < f(z) \Rightarrow 2z+1 < 2y+1 \Leftrightarrow z < y$$

Từ đó, suy ra: $y < x < z < y$. Điều này vô lý.

Do đó , hệ chỉ có thể có nghiệm $x = y = z$.

Thế vào hệ ta được:

$$2x+1=x^3+x^2+x \Leftrightarrow x^3+x^2-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1=y=z \\ x=-1=y=z \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(1;1;1)$ hoặc $(-1;-1;-1)$.

Ví dụ 8: Giải phương trình: $x^3 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x+6}} = 6 \quad (8)$

Lời giải: Đặt $\begin{cases} \sqrt[3]{x+6}=z \\ \sqrt[3]{z+6}=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^3-x=6 \\ y^3-z=6 \end{cases}$. Mặt khác theo bài ra ta có: .

Vậy ta có hệ:
$$\begin{cases} z^3 = x + 6 \\ y^3 = z + 6 \\ x^3 = y + 6 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3, t \in \mathbb{R}$, ta có: $f'(t) = 3t^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Như vậy ta có:

+ Nếu: $x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow y + 6 > z + 6 \Rightarrow y > z \Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow z + 6 > x + 6 \Rightarrow x > y > z > x$ (vô lý).

+ Nếu: $y > x \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow z + 6 > y + 6 \Rightarrow z > y \Rightarrow f(z) > f(y) \Rightarrow x + 6 > z + 6 \Rightarrow x > z \Rightarrow y > x > z > y$ (vô lý).

Vậy, hệ chỉ có nghiệm $x = y = z$, thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} x = y = z \\ x^3 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

Kết luận, nghiệm phương trình đã cho là $x = 2$.

➤ **Chú ý:** Khi hướng dẫn cho học sinh phương pháp **hàm đại diện** cần đặc biệt lưu ý sự liên tục của hàm số đặc trưng trên tập xác định của chúng.

Chẳng hạn đối với bài toán:

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \quad \text{(I)} \quad (\text{Đề thi ĐH khối A năm 2003})$$

Rất nhiều học sinh giải bài toán theo hướng :

Đặt $f(t) = t - \frac{1}{t} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ rồi

thế vào phương trình còn lại trong hệ để giải. Đây là một sai lầm thường mắc phải của các em học sinh khi sử dụng phương pháp này, bởi vì hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t}$ chỉ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định $(-\infty; 0); (0; +\infty)$ chứ không phải luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f(t)$ gián đoạn tại $t = 0$.

Hay với bài toán: Giải hệ
$$\begin{cases} x - 3z^2x - 3z + z^3 = 0 \\ y - 3x^2y - 3x + x^3 = 0 \\ z - 3y^2z - 3y + y^3 = 0 \end{cases}$$
, rất nhiều học sinh áp dụng

cách giải như ví dụ 7, ví dụ 8 bằng cách làm như sau:

Hệ tương đương với
$$\begin{cases} x(1-3z^2) = 3z - z^3 \\ y(1-3x^2) = 3x - x^3 \\ z(1-3y^2) = 3y - y^3 \end{cases}$$
, thấy nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ

thì phải có x, y, z đều khác $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, nên hệ tương đương với:
$$\begin{cases} x = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} \\ y = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \\ z = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \end{cases}$$

Xét hàm $f(t) = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$ có $f'(t) = \frac{3(t^2 + 1)^2}{(1 - 3t^2)^2} \geq 0, \forall t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $f(t)$ luôn đồng

biến, rồi chứng minh như ví dụ 6 suy ra $x = y = z = -1$ là nghiệm duy nhất của hệ. Đây là một sai lầm giống như bài toán đã nêu trên, vì hàm số

$f(t) = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$ có $f'(t) = \frac{3(t^2 + 1)^2}{(1 - 3t^2)^2} \geq 0$ nhưng hàm $f(t)$ lại gián đoạn tại $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nếu giải bài toán đúng bằng phương pháp đặt ẩn phụ thì hệ đã cho phải có 25 nghiệm.

Ghi nhớ: Với $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$) và $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ thì trên $(a; b)$ ta có: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

C- VẬN DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ VÀO VIỆC GIẢI VÀ BIỆN LUẬN CÁC BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Xác định a để bất phương trình sau có nghiệm:

$$x^3 + 3x^2 - 1 \leq a(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3 \quad (1)$$

(Đề thi tuyển sinh ĐH Bách Khoa Hà Nội – Khối A – năm 2000)

Lời giải: Điều kiện: $x \geq 1$

Ta thấy, khi $x \geq 1$ thì $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3 > 0$. Khi đó bất phương trình

$$(1) \text{ tương đương với: } f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3} \leq a.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^6} \left[(3x^2 + 6x)(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3 - (x^3 + 3x^2 - 1) \cdot 3(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^2 (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})' \right] \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^6} \left[(3x^2 + 6x)(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3 - 3(x^3 + 3x^2 - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) \right] \end{aligned}$$

Xét $\forall x > 1$, ta có: $3x^2 + 6x > 0$; $(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3 > 0$; $x^3 + 3x^2 - 1 > 0$; $-3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) > 0$,
suy ra: $f'(x) > 0, \forall x > 1$. Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(1) = 3, \forall x \in [1; +\infty)$. Như vậy, để bất phương trình đã cho có nghiệm cần $a \geq 3$.

Ví dụ 2: Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m \quad (2)$$

Lời giải: Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$. Ta có: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Thấy $\sqrt{x^2 \pm x + 1} = \sqrt{\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$, suy ra:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} &> \left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \left|x + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}\right| = |2x| \\ \Rightarrow \frac{|2x|}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} &< 1 \Rightarrow |f(x)| < 1. \end{aligned}$$

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -1$

Kinh nghiệm giảng dạy môn Toán: **Vận dụng tính đơn điệu của Hàm số vào giải các bài toán về phương trình – bất phương trình**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

Và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên ta có: $-1 < f(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy, phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m < 1$.

Ví dụ 3: Xác định các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m \quad (3)$$

Lời giải: Điều kiện: $x \geq 0$

Ta thấy $\sqrt[4]{x^2 + 1} > \sqrt{x}, \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} > 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow m > 0$.

Cách 1: Đặt $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x}$, thì hàm số $f(x)$ liên tục trên miền $x \in [0; +\infty)$.

$$\text{Có } f'(x) = \frac{2x}{4\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - \sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} = \frac{\sqrt[4]{(x^2)^3} - \sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} < 0, \forall x \in [0; +\infty)$$

Như vậy, hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3} - \sqrt[4]{(x^2 + 1)^2 x^2} + \sqrt[4]{(x^2 + 1) \cdot x^4} - \sqrt[4]{(x^2)^3}} = 0 \text{ và } f(0) = 1$$

Suy ra: $0 < f(x) \leq 1, \forall x \in [0; +\infty)$.

Vậy, phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m \leq 1$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{x^2 + 1} \\ v = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \geq 1 \\ v \geq 0 \end{cases}$, khi đó hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\text{hệ sau có nghiệm: } \begin{cases} u \geq 1; v \geq 0, m > 0 \\ u - v = m \quad (*) \\ u^4 - v^4 = 1 \quad (**) \end{cases}$$

Thay (*) vào (**) , ta có: $g(v) = (m + v)^4 - v^4 = 1$. Thấy hàm số $g(v)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g'(v) = 4(m + v)^3 - 4v^3 \Rightarrow g'(v) > 0, \forall v \in (0; +\infty)$, vì $m > 0$. Có $\lim_{v \rightarrow +\infty} g(v) = +\infty$

Suy ra, $g(v)$ là hàm số đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow g(v) \geq g(0) = m^4, \forall v \in [0; +\infty)$.

$$\text{Để } g(v) = 1 \text{ có nghiệm } v \geq 0 \text{ cần } \begin{cases} m > 0 \\ 1 \geq m^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1.$$

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình sau

$$\text{nghiệm đúng } \forall x \leq 0: \frac{1}{1-x} \leq mx + 1. \quad (4)$$

$$\text{Lời giải: Có bất phương trình đã cho tương đương với: } \frac{x}{1-x} \leq mx \quad (4')$$

Thấy bất phương trình (4') luôn nhận $x = 0$ là nghiệm với mọi m .

Xét với mọi $x < 0$, bất phương trình (4') tương đương với: $f(x) = \frac{1}{1-x} \geq m$.

Có $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ và $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 0]$ nên suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $(-\infty; 0]$ và $0 < f(x) < f(0) = 1, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Như vậy, để $f(x) \geq m, \forall x \leq 0$ cần $m \leq 0$. Vậy, giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = 0$.

Ví dụ 5: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:

$$\sin^5 x + \cos^5 x - m(\sin x + \cos x) \geq \sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x) \quad (5)$$

Lời giải: Có

$$\begin{aligned} \sin^5 x + \cos^5 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^3 x + \cos^3 x) - \sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin x + \cos x) \\ &= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x) \end{aligned}$$

Vậy, bất phương trình (5) tương đương với:

$$(\sin x + \cos x)(1 - 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x - m) \geq 0$$

Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ nên $\sin x + \cos x > 0$, do đó bất phương trình tương đương với:

$$(1 - 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x - m) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sin 2x - \frac{1}{4}\sin^2 2x \geq m$$

Đặt $t = \sin 2x$, vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ nên $t \in [0; 1]$. Yêu cầu bài toán tương đương với,

tìm m để bất phương trình: $f(t) = 1 - t - \frac{1}{4}t^2 \geq m \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 4t \leq 4 - 4m$ nhận mọi $t \in [0; 1]$ làm nghiệm. Ta có: $f'(t) = 2t + 4 > 0$, với mọi $t \in [0; 1]$, suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0; 1]$. Chứng tỏ: $0 = f(0) \leq f(t) \leq f(1) = 5, \forall t \in [0; 1]$.

Để bất phương trình $f(t) = t^2 + 4t \leq 4 - 4m, \forall t \in [0; 1]$, cần $5 \leq 4 - 4m \Leftrightarrow 4m \leq -1 \Leftrightarrow m \leq \frac{-1}{4}$.

Vậy $m \leq \frac{-1}{4}$ thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ví dụ 6: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x + y \leq m \end{cases} \quad (6)$

Lời giải: Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$, hệ (6) trở thành:

$$\begin{cases} u \geq 0; v \geq 0 \\ u + v = 1 \\ u^2 + v^2 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v \geq 0 \\ u = 1 - v \\ (1 - v)^2 + v^2 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u, v \in [0; 1] \\ u = 1 - v \\ f(v) = 2v^2 - 2v + 1 \leq m \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi bất phương trình $f(v) \leq m$ có duy nhất một nghiệm $v \in [0; 1]$.

Có $f'(v) = 4v - 2 \Rightarrow f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{1}{2}$, ta có bảng biến thiên:

v	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(v)$	-	0	+
$f(v)$	1	$\frac{1}{2}$	1

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy bất phương trình $f(v) \leq m$, với $v \in [0; 1]$, có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$, và khi đó nghiệm hệ là $x = y = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 7: Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{3-y} = m & (1) \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{3-x} = m & (2) \end{cases} \quad (7)$

Lời giải: Điều kiện: $-1 \leq x, y \leq 3$.

Trừ vế với vế của (1) cho (2), ta được: $\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} = \sqrt{y+1} - \sqrt{3-y} \quad (3)$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{3-t}, t \in [-1; 3]$. Thấy hàm số liên tục trên TXĐ và

$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3-t}} > 0, \forall t \in (-1; 3)$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(-1; 3)$.

Như vậy, phương trình (3) tương đương với $x = y$, khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{3-x} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = m \end{cases}$$

Xét hàm số: $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}, x \in [-1; 3]$, có

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x = 1$$

Tính được: $g(-1) = g(3) = 2; g(1) = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2 \leq g(x) \leq 2\sqrt{2}, \forall x \in [-1; 3]$

Vậy hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Ví dụ 8: Cho $f(x) = 2.25^x - (2m+1)10^x + (m+2)4^x$. Tìm m để $f(x) \geq 0$, với $\forall x \geq 0$

Lời giải: Ta có: $f(x) \geq 0$ với $\forall x \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2 \left[\left(\frac{5}{2} \right)^x \right]^2 - (2m+1) \left(\frac{5}{2} \right)^x + m+2 \geq 0, \forall x \geq 0$$

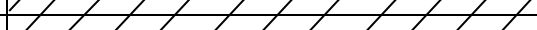
$$\Leftrightarrow 2t^2 - (2m+1)t + m+2 \geq 0 \quad \forall t = \left(\frac{5}{2} \right)^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^2 - t + 2}{2t-1} \geq m, \quad \forall t \geq 1 \Leftrightarrow \min_{[1; +\infty)} f(t) \geq m$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{2t^2 - t + 2}{2t-1}, \quad \forall t \geq 1$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{4t^2 - 4t - 3}{(2t-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$			
$f'(t)$					-	0	+		
$f(t)$					3		$\frac{5}{2}$		$+\infty$

Vậy $m \leq \frac{5}{2}$ là kết quả cần tìm.

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:

$$\left(\frac{1}{3} \right)^{|x^2 - 2x|} = m^2 + m + 1 \quad (9)$$

Lời giải: Phương trình (9) $\Leftrightarrow |x^2 - 2x| = \log_{\frac{1}{3}}(m^2 + m + 1)$, (vì $m^2 + m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$)

$$\text{Xét hàm số } f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty) \\ -x^2 + 2x, & x \in (0; 2) \end{cases}$$

$$\text{Có } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ và } f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \\ -2x + 2, & x \in (0; 2) \end{cases}$$

Kinh nghiệm giảng dạy môn Toán: **Vận dụng tính đơn điệu của Hàm số vào giải các bài toán về phương trình – bất phương trình**

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f'(0)$, $f'(2)$ không xác định.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	-			+	0	-		+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x) = |x^2 - 2x| = \log_{\frac{1}{3}}(m^2 + m + 1)$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$0 < \log_{\frac{1}{3}}(m^2 + m + 1) < 1 \Leftrightarrow 1 > m^2 + m + 1 > \frac{1}{3} \Leftrightarrow m \in (-1; 0)$$

Vậy, phương trình (9) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $-1 < m < 0$.

Ví dụ 10: Giải và biện luận phương trình:

$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m \quad (10)$$

Lời giải: Phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow 5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = (2x^2 + 4mx + m + 2) - (x^2 + 2mx + m)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x^2+2mx+2} + (x^2 + 2mx + m) = 5^{2x^2+4mx+m+2} + (2x^2 + 4mx + m + 2) \quad (10')$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra $f(t)$ là một hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó phương trình (10') tương đương với:

$$f(x^2 + 2mx + 2) = f(2x^2 + 4mx + m + 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2 = 2x^2 + 4mx + m + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0 \quad (10'')$$

Giải phương trình (10'') có: $\Delta' = m^2 - m$

Trường hợp 1: $\Delta' = m^2 - m < 0 \Leftrightarrow m \in (0; 1)$, khi đó phương trình (10'') vô nghiệm nên phương trình (10) vô nghiệm.

Trường hợp 2: $\Delta' = m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$, khi đó phương trình (10'') có nghiệm kép, cụ thể:

- Khi $m = 0$ thì phương trình (10'') có nghiệm duy nhất: $x = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.
- Khi $m = 1$ thì phương trình (10'') có nghiệm duy nhất: $x = -1$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Trường hợp 3: $\Delta' = m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$, khi đó phương trình (10'') có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -m + \sqrt{m^2 - m}$; $x_2 = -m - \sqrt{m^2 - m}$, đây cũng là 2 nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 11: Tìm m để hệ sau có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4 & (*)1 \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) - m \log_{(x^2 - 2x + 5)} 2 = 5 & (*)2 \end{cases}$$

Lời giải: Điều kiện: $x > 1$.

$$\text{BPT } (*)1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 2\log_3 2 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \log_3 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 2 \Leftrightarrow x < 3$$

Kết hợp điều kiện, ta được: $1 < x < 3$.

Xét phương trình (*2), ta thấy: $0 < x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó ta có:

$$(*)2 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2x + 5) - \frac{m}{\log_2(x^2 - 2x + 5)} = 5 \quad (*)2'$$

Đặt $t = \log_2(x^2 - 2x + 5)$, khi đó phương trình (*2') trở thành:

$$t - \frac{m}{t} = 5 \Leftrightarrow g(t) = t^2 - 5t = m$$

Ta thấy, nghiệm bất phương trình (*1) là $x \in (1; 3)$, xét $f(x) = x^2 - 2x + 5$, với $x \in (1; 3)$. Ta có, $f'(x) = 2x - 2$ nên $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 1$, ta có bảng biến thiên:

x	1	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	4	8

Nhìn bảng biến thiên ta thấy: $4 < f(x) < 8$, với mọi $x \in (1; 3)$.

Suy ra: $2 < t < 3$, khi $x \in (1; 3)$. Và hơn nữa, với mỗi giá trị của t thỏa mãn $2 < t < 3$ chỉ cho duy nhất một giá trị $x \in (1; 3)$ tương ứng. Do đó, yêu cầu bài toán tương với việc tìm m để phương trình $g(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(2; 3)$.

Xét $g(t) = t^2 - 5t, \forall t \in (2; 3)$, có: $g'(t) = 2t - 5 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$, ta có bảng biến thiên:

t	2	$\frac{5}{2}$	3
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	-6	$-\frac{25}{4}$	-1

Nhìn bảng biến thiên, ta thấy phương trình $g(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $-\frac{25}{4} < m < -6$.

Vậy, hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-\frac{25}{4} < m < -6$.

- Nhận xét: Từ những ví dụ nêu ra ở trên, cho chúng ta thấy ứng dụng rộng lớn của phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số trong việc giải và biện luận các bài toán về phương trình, bất phương trình và các dạng hệ phương trình khác nhau. Đây là một dạng toán thường xuyên xuất hiện ở các đề thi học sinh giỏi và đề thi đại học. Vì vậy, việc trang bị cho các em học sinh khá giỏi phương pháp này là điều cần thiết.*

CHƯƠNG III – THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

I – Mục đích, nội dung

- 1) *Mục đích*: Kiểm tra sự tiến bộ của học sinh trong việc vận dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, bất phương trình sau khi được học về phương pháp này.
- 2) *Nhiệm vụ*: Biên soạn giáo án thực nghiệm, dạy thử nghiệm và đánh giá chất lượng hiệu quả sau quá trình học tập.

II – Tổ chức thực nghiệm

Trong quá trình giảng dạy tại các lớp chọn và bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi của trường THPT Đống Đa trong những năm qua, tôi đã đưa nội dung *Vận dụng tính đơn điệu của hàm số vào giải các bài toán về phương trình, bất phương trình* vào giảng dạy. Đa số học sinh tích cực, chủ động tham gia giờ học với sự hứng thú, say mê.

III – Kết quả thực nghiệm

Sau mỗi khóa giảng, tôi nhận thấy đa số học sinh hiểu, nắm vững phương pháp và vận dụng tốt phương pháp trong quá trình giải các bài tập về phương trình, bất phương trình và đạt kết quả khá tốt. Điều đó đã giúp học sinh tự tin hơn, sự linh hoạt mềm dẻo trong tư duy tốt hơn. Học sinh đã đạt kết quả khá tốt trong quá trình ôn tập và tham gia các kì thi lớn như kì thi học sinh giỏi cấp trường, cấp cụm, cấp thành phố và cả trong kì thi đại học.

PHẦN III – KẾT LUẬN

Nói về ứng dụng các tính chất của hàm số không chỉ có các ứng dụng tôi đã trình bày trong đề tài này, mà ứng dụng của nó là vô cùng rộng lớn. Tuy nhiên với khuôn khổ của đề tài cũng như tính thực tiễn của nó tôi chỉ nêu ra một ứng dụng trên.

Trong những năm qua tôi đã vận dụng phương pháp trên cho đối tượng học sinh khá giỏi của trường THPT Đống Đa trong các đợt bồi dưỡng học sinh giỏi và luyện thi đại học, cao đẳng và thấy rằng học sinh tiếp thu tương đối chủ động ; đa số học sinh hiểu và vận dụng tốt trong quá trình giải các dạng bài tập ở trên. Ngoài ra, phương pháp này còn giúp học sinh rèn luyện khả năng tư duy, sáng tạo và kĩ năng giải toán. Điều đó góp phần không nhỏ vào thành tích chung của đội tuyển học sinh giỏi của trường, cũng như giúp học sinh đạt kết quả cao trong các kì thi đại học, cao đẳng.

Trên đây là một số suy nghĩ và đề xuất của tôi, mong đóng góp cùng đồng nghiệp để giúp đỡ học sinh khai thác tốt hơn các ứng dụng của hàm số trong chương trình toán học phổ thông làm cơ sở tham gia các kỳ thi cuối cấp cũng như nghiên cứu các ứng dụng thực tiễn trong cuộc sống sau này. Trong những năm học tới, nếu có điều kiện tôi sẽ thực hiện tiếp đề tài: “*vận dụng tính đơn điệu của hàm số vào chứng minh bất đẳng thức và tìm GTLN – GTNN của một biểu thức*”.

Trong quá trình biên soạn đề tài này chắc sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Mong nhận được sự góp ý chân thành của đồng nghiệp và Hội đồng khoa học của nhà trường để các đề tài sau của tôi được tốt hơn. Tôi xin chân thành cảm ơn!

Tôi xin cam đoan, đây là đề tài sáng kiến kinh nghiệm do chính tôi viết bằng kinh nghiệm giảng dạy trong nhiều năm của mình. Tôi không sao chép nội dung của người khác.

Xác nhận của Thủ trưởng đơn vị

Trường THPT Đống Đa, tháng 05/2013
Người thực hiện đề tài

Vũ Thị Thu Hiền

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1) NXB Giáo Dục - Sách giáo khoa Đại số 10.
- 2) NXB Giáo Dục – Sách giáo khoa Giải tích 12.
- 3) NXB Giáo Dục - Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
- 4) Bộ Giáo Dục - Đề thi tuyển sinh Đại Học, cao đẳng các năm
- 5) Đề thi Học sinh Giỏi khối 12 của các Tỉnh – Thành phố trong cả nước
- 6) Phan Huy Khải - Phương pháp giải và biện luận phương trình, hệ phương trình chứa tham số.

Phụ lục – MỘT SỐ BÀI TẬP THAM KHẢO

1. Giải phương trình: $\sqrt{(x+2)(2x-1)} + \sqrt{(x+6)(2x-1)} = 4 + 3(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})$
2. Giải bất phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} \leq 9 - \sqrt{x-5}$
3. Giải bất phương trình: $x^5 + x^3 > \sqrt{1-3x} - 4$
4. Giải phương trình: $\sqrt{x+9} = 5 - \sqrt{4x+4}$
5. Chứng minh rằng phương trình: $x^3 + x^2 + 12x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm.
6. Giải bất phương trình $x(x^8 + 2x + 16) > 6(4 - x^2)$
7. Giải phương trình: $\log_2 \frac{2x+1}{(x-1)^2} = x^2 - 4x$
8. Giải bất phương trình: $3x^3 + 2x + \ln x \leq 5$
9. Giải bất phương trình: $4^x + 9^x \leq 25^x$
10. Giải phương trình: $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2)$
11. Giải phương trình: $\log_3 \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = x^2 + 3x + 2$
12. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$
13. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = y - x & (*) \\ 2x + 7y = 4\pi \\ -\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
14. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 3 = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ y + 3 = z + \sqrt{z^2 + 1} \\ z + 3 = x + \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$
15. Chứng minh rằng phương trình sau có đúng một nghiệm:
$$x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (\text{Đề TSDH khối D – năm 2004})$$
16. Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ thì phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$
17. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:
$$m\sqrt{x^2 + 4} - x + 1 = 0$$
18. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:
$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1} \quad (\text{Đề TSDH Khối A- năm 2007})$$

19. Tìm m để phương trình: $2.\cos x.\cos 2x.\cos 3x + m = 7.\cos 2x$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{8}; -\frac{\pi}{8}\right]$
20. Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$
(Đề TSDH khối B – năm 2004)
21. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x > 0$:

$$(3m+1).12^x + (2-m).6^x + 3^x < 0$$
22. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$:

$$m.4^{x-x^2} + (m+1).10^{x-x^2} - 25^{1+x-x^2} > 0$$
23. Tìm m để phương trình $\frac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2$ có nghiệm duy nhất.
24. Tìm m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_4 x^2 - 3)$ có nghiệm $x \in [32; +\infty)$
25. Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$4^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2|x-m| + 2) = 0$$



=====

[illegible]

.....

.....

.....

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

MỤC LỤC