

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT ĐỒNG ĐA



DẠY HỌC TIẾP CẬN NĂNG LỰC THÔNG QUA KỸ
THUẬT SỬ DỤNG LƯỢNG GIÁC HÓA GIẢI PHƯƠNG
TRÌNH VÔ TỈ ĐỂ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

Môn/Lĩnh vực : Toán
Cấp học : THPT
Tên tác giả : Hoàng Quốc Định
Đơn vị công tác : Trường THPT Đồng Đa
Chức vụ : Giáo viên

Năm học 2022 - 2023

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

Kính gửi: Hội đồng Khoa học ngành Giáo dục và Đào tạo

Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Tên sáng kiến
Hoàng Quốc Định	23/01/1978	THPT Đống Đa		Thạc sỹ	Dạy học tiếp cận năng lực thông qua kỹ thuật sử dụng lượng giác hóa giải phương trình vô tỉ để bồi dưỡng học sinh giỏi.

Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: Môn Toán lớp 11.

Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử: Ngày 6/10/2022

Mô tả bản chất của sáng kiến:

+ Nghiên cứu về phương pháp giáo dục tiếp cận năng lực. So sánh các thành tố giữa hai phương pháp giáo dục: Tiếp cận nội dung (phương pháp giáo dục truyền thống) và Tiếp cận năng lực (phương pháp giáo dục mới) để thấy rõ ưu điểm mà phương pháp giáo dục tiếp cận năng lực mang lại.

+ Với mong muốn nâng cao chất lượng giáo dục môn Toán lớp 11, cụ thể là nâng cao số học sinh đạt điểm giỏi trong kì thi, vì vậy trong đề tài này tôi đã đưa ra kỹ thuật sử dụng lượng giác hóa trong giải phương trình vô tỉ nhằm phát hiện và giải quyết vấn đề một cách sáng tạo.

- **Các điều kiện cần thiết để áp dụng sáng kiến:** học sinh khá giỏi lớp 11.

- **Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả:**

Áp dụng phương pháp giáo dục tiếp cận năng lực cho thấy tính hiệu quả rõ rệt trong giáo dục. Trước đây, khi giảng dạy vấn đề “phương trình vô tỉ” giải quyết các câu hỏi vận dụng cao bằng phương pháp giáo dục truyền thống thì số lượng học sinh làm được những bài thi đó còn rất khiêm tốn, học sinh ngại học phần này vì nhiều đây là phần khó. Nhưng khi sử dụng phương pháp tiếp cận

năng lực vào giảng dạy thì số lượng học sinh chinh phục được câu hỏi này trong đề thi tăng lên rõ rệt. Các học sinh được thử nghiệm đã chủ động, tích cực, tự tin hơn, linh hoạt và sáng tạo hơn trong học tập và giải quyết các tình huống xuất hiện trong các câu hỏi vận dụng cao. Tỷ lệ điểm khá, giỏi tăng, điểm yếu kém giảm rõ rệt.

Kết quả bài kiểm tra đánh giá năng lực có sự tiến bộ rõ rệt so với khi áp dụng phương pháp giáo dục truyền thống, học sinh hào hứng, phấn khởi, chủ động hơn, đua nhau tìm nhiều lời giải cho bài toán, các thầy cô tham gia dạy thử nghiệm đều đánh giá hiệu quả mang lại rất tích cực.

Danh sách giáo viên đã tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu

Số TT	Họ và tên	Năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ	Nội dung công việc hỗ trợ
1	Trần Thị Hạnh	20/4/1982	THPT Đống Đa	Giáo viên	Thạc sĩ	Dạy thử nghiệm
2	Vũ Thị Phương Nam	18/8/1978	THPT Đống Đa	Giáo viên	Thạc sĩ	Dạy thử nghiệm
3	Nguyễn Thị Xuân Diễm	28/4/1982	THPT Đống Đa	Giáo viên	Thạc sĩ	Dạy thử nghiệm

Tôi xin cam đoan mọi thông tin nêu trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Hà Nội, ngày 18 tháng 02 năm 2023.

Người viết đơn

Hoàng Quốc Định

PHIẾU NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ

Họ tên tác giả: HOÀNG QUỐC ĐỊNH.

Tên đề tài: Dạy học tiếp cận năng lực thông qua kỹ thuật sử dụng lượng giác hóa giải phương trình vô tỉ để bồi dưỡng học sinh giỏi.

Lĩnh vực: Toán học.

STT	Tiêu chuẩn	Điểm tối đa	Điểm HD chấm
1	Sáng kiến có tính mới		
1.1	Hoàn toàn mới, được áp dụng đầu tiên	30	
1.2	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ khá	20	
1.3	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ trung bình	10	
1.4	Không có tính mới hoặc sao chép từ các giải pháp đã có trước đây	0	
<u>Nhận xét:</u> - Nội dung sáng kiến hoàn toàn mới, được áp dụng lần đầu tiên tại nhà trường. - Phù hợp với yêu cầu đổi mới, coi trọng, phát triển phẩm chất, năng lực của người học.			
2	Sáng kiến có tính áp dụng		
2.1	Có khả năng áp dụng trong phạm vi toàn ngành hoặc rộng hơn	30	
2.2	Có khả năng áp dụng trong đơn vị và có thể nhân ra một số đơn vị có cùng điều kiện	20	
2.3	Có khả năng áp dụng trong đơn vị	10	
2.4	Không có khả năng áp dụng trong đơn vị	0	
<u>Nhận xét:</u> - Có khả năng áp dụng trên toàn trường và trong các trường THPT trên địa bàn cả nước. - Có thể áp dụng triển khai ở các chuyên đề toán khác cũng như tìm hiểu thêm các			

phương pháp và kỹ thuật dạy học khác.			
3	Sáng kiến có tính hiệu quả		
3.1	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội, có tính lan tỏa	30	
3.2	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội	20	
3.3	Có hiệu quả, lợi ích phù hợp với mức độ phù hợp tại đơn vị	10	
3.4	Không có hiệu quả cụ thể	0	
<u>Nhận xét:</u> - Sáng kiến có tính lan tỏa phù hợp với thực tế giúp học sinh chủ động, tích cực chiếm lĩnh tri thức và thấy được ứng dụng của toán học trong thực tế.			
4	Điểm trình bày		
4.1	Trình bày khoa học, hợp lý	10	
4.2	Trình bày chưa khoa học, chưa hợp lý	5	
<u>Nhận xét:</u> - Trình bày khoa học, hợp lý. - Nội dung rõ ràng, logic.			
Tổng cộng:		Đánh giá: ☐ Đạt (≥ 70 điểm) ☐ Không đạt	

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN CƠ SỞ

MỤC LỤC

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

I. Lý do chọn đề tài.....	1
II. Mục đích, yêu cầu.....	2
III. Đối tượng, phạm vi và thời gian nghiên cứu.....	2
VI. Nhiệm vụ nghiên cứu:.....	2
V. Phương pháp nghiên cứu.....	3

B. NỘI DUNG CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.....

4

I. Cơ sở lý luận.....

4

1. Cách tiếp cận phát hiện và giải quyết vấn đề trong tiến trình giải toán bao gồm:.....	4
---	---

2. Năng lực giải toán theo định hướng phát hiện và giải quyết vấn đề:.....	4
---	---

3. Dạy học hợp tác (học sinh tương tác, hợp tác với nhau để cùng giải quyết bài toán) có thể là như sau:.....	5
--	---

II. Thực trạng vấn đề nghiên cứu.....

6

III. Các giải pháp thực nghiệm.....

7

IV. Tiến trình thực hiện.....

9

V. Kết quả thực nghiệm và tính hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

29

C. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ.....

31

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

I. Lý do chọn đề tài:

Trong luật giáo dục Việt Nam, năm 2005 đã viết: “Phương pháp giáo dục phổ thông phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, sáng tạo của học sinh, phù hợp với đặc điểm của từng lớp học, môn học, cần phải bồi dưỡng phương pháp tự học, rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn, cần đem lại niềm vui, hứng thú cho học sinh”.

Đổi mới phương pháp dạy học đang chuyển từ chương trình giáo dục tiếp cận nội dung sang tiếp cận năng lực người học, từ chỗ quan tâm đến việc “học sinh học được cái gì” đến chỗ quan tâm đến việc “học sinh vận dụng được cái gì qua việc học”. Để thực hiện điều đó, phải chuyển từ phương pháp dạy học theo lối “truyền thụ một chiều” sang dạy “cách học, cách vận dụng kiến thức, rèn luyện kỹ năng, hình thành năng lực và phẩm chất”. Tăng cường học tập trong nhóm, đổi mới quan hệ giáo viên – học sinh theo hướng cộng tác, có ý nghĩa quan trọng nhằm phát triển năng lực xã hội.

Một trong các quan điểm dạy học Toán ở trường phổ thông được coi là phương pháp dạy học tích cực. “Thầy giáo tạo ra tình huống có vấn đề, điều khiển học sinh phát hiện vấn đề, hoạt động tự giác, tích cực chủ động, sáng tạo để giải quyết vấn đề, thông qua đó mà tạo tri thức, rèn luyện kỹ năng, hình thành năng lực”.

Là giáo viên dạy nhiều năm ở bộ môn toán THPT, tôi đã gặp không ít những trắc trở trong việc giảng dạy ở nhiều bài toán giải phương trình vô tỉ. Vì mỗi bài toán có thể có nhiều cách giải khác nhau, mỗi cách giải thể hiện được khái niệm toán học của nó. Trong các cách giải khác nhau đó, có cách giải thể hiện tính hợp lý trong dạy học, có cách giải thể hiện tính sáng tạo của toán học. Trong đề tài này tôi muốn hướng dẫn học sinh giải các bài toán về phương trình vô tỉ bằng “Kỹ thuật lượng giác hóa” của toán học để khử căn một cách hiệu quả.

Trong chương trình giảng dạy bộ môn Toán ở bậc trung học phổ thông, các bài toán về phương trình chiếm một vị trí rất quan trọng, xuyên suốt chương trình của ba khối lớp và có mặt trong các đề thi học sinh giỏi nhiều năm. Bên cạnh các dạng toán giải phương trình vô tỉ thì phương pháp để giải quyết các dạng bài toán đó cũng rất phong phú, rất nhiều ý tưởng độc đáo và bất ngờ được

phát hiện khi tìm hiểu để giải quyết những bài toán tạo lên sự hấp dẫn của toán học đối với người học cũng như người dạy.

Tuy nhiên hệ thống bài tập trong một số chuyên đề đó còn rời rạc, việc khai thác và khắc sâu ý tưởng trong bài giải còn chưa triệt để. Điều đó gây khó khăn cho học sinh trong việc xây dựng cho mình những kỹ năng giải hoàn chỉnh đối với các dạng bài toán giải phương trình vô tỉ. Đó là lí do tôi chọn đề tài: **"Dạy học tiếp cận năng lực thông qua kỹ thuật sử dụng lượng giác hóa giải phương trình vô tỉ để bồi dưỡng học sinh giỏi"** làm sáng kiến kinh nghiệm, mong rằng với những tìm hiểu của mình có thể giúp học sinh nhận biết, xử lý bài toán giải phương trình vô tỉ nhanh chóng và thành thạo hơn.

II. Mục đích, yêu cầu:

- Hiểu được bản chất của phương pháp giáo dục tiếp cận năng lực của học sinh.
- Hiểu được vai trò và nội dung cơ bản của phương pháp giáo dục tiếp cận năng lực của học sinh.
- Vận dụng được phương pháp giáo dục tiếp cận năng lực của học sinh trong một số bài dạy.

III. Đối tượng, phạm vi và thời gian nghiên cứu:

- Khách thể: Học sinh khá giỏi môn Toán lớp 11.
- Đối tượng, phạm vi nghiên cứu: Kỹ thuật sử dụng lượng giác hóa giải phương trình vô tỉ, các bài tập giải phương trình vô tỉ trong chương trình phổ thông và các đề thi đại học, ôn thi học sinh giỏi.
- Thời gian nghiên cứu: 2 tuần. Thời gian thực hiện: 3 tiết học.
- Nghiên cứu thông qua thực tế giảng dạy ở các nhóm học sinh giỏi lớp: 11A1, 11A2.

VI. Nhiệm vụ nghiên cứu:

- Hệ thống kiến thức về lượng giác: các hằng đẳng thức lượng giác, công thức lượng giác, công thức nghiệm, ... trong chương II Đại số và giải tích 11
- Hệ thống kiến thức về phương trình vô tỉ: Phép biến đổi phương trình, phương trình tương đương, tập nghiệm,....
- Cùng học sinh chinh phục một số bài toán giải phương trình vô tỉ bằng kỹ thuật lượng giác hóa, khó đối với học sinh nói chung và không đưa được về các dạng quen thuộc.

- Cùng học sinh nghiên cứu phát triển thành lớp các bài toán tương tự khác.

V. Phương pháp nghiên cứu:

- Khảo sát năng lực tư duy, trình độ nhận thức và kỹ năng giải toán của học sinh.
- Phân tích và tổng hợp các vấn đề liên quan theo từng dạng bài cụ thể.
- Tổng kết kinh nghiệm, điều chỉnh, tìm ra những khó khăn, thuận lợi khi giải quyết các bài toán.

B. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

I. Cơ sở lý luận

Dạy học theo hướng tiếp cận năng lực người học là mô hình dạy học lấy học sinh làm trung tâm. Nó giúp phát triển kiến thức và các kỹ năng liên quan thông qua những nhiệm vụ mang tính mở, khuyến khích học sinh tìm tòi, hiện thực hoá những kiến thức đã học trong quá trình thực hiện và tạo ra những sản phẩm của chính mình. Chương trình dạy học theo hướng tiếp cận năng lực được xây dựng dựa trên những câu hỏi định hướng quan trọng, lồng ghép các chuẩn nội dung và tư duy bậc cao trong những bối cảnh thực tế, trong đó thể hiện rõ nhất là phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề kết hợp với dạy học hợp tác.

1. Cách tiếp cận phát hiện và giải quyết vấn đề trong tiến trình giải toán bao gồm:

- Áp dụng phép tương tự, đặc biệt hóa, khái quát hóa, quy lạ về quen.
- Áp dụng phép phân tích, tổng hợp.
- Áp dụng phép suy diễn và quy nạp.

2. Năng lực giải toán theo định hướng phát hiện và giải quyết vấn đề:

a) Năng lực giải toán có thể hiểu là năng lực áp dụng tiến trình phát hiện và giải quyết vấn đề vào bài toán cụ thể, có mục tiêu và tính hướng đích cao, đòi hỏi phải tư duy tích cực và sáng tạo, nhằm đạt kết quả sau một số bước thực hiện.

b) Đặc trưng của năng lực giải Toán: Là tập hợp tất cả những nét riêng biệt và tiêu biểu được xem là dấu hiệu để phân biệt với các năng lực khác, gồm:

- Năng lực giải toán là một dạng năng lực hoạt động cá nhân được nảy sinh khi gặp tình huống có vấn đề, có nhu cầu hay mâu thuẫn cần được giải quyết (cần giải một bài toán cụ thể).

- Năng lực giải toán được đặc trưng bởi hoạt động tư duy tích cực, độc lập, sáng tạo của chủ thể là học sinh.

- Năng lực giải toán của chủ thể (học sinh) luôn thể hiện ở “trạng thái động”, ở tính linh hoạt, mềm dẻo thích ứng linh hoạt của tư duy và thay đổi các phương thức khác nhau để giải toán.

c) Tiến trình giải một bài toán cụ thể có 3 mức độ của năng lực giải toán:

- Mức độ 1: Tập trung vào sự đáp ứng yêu cầu mà bài toán đặt ra (đối với học sinh trung bình)

- Mức độ 2: Tập trung vào sự lựa chọn những tri thức và phương pháp giải toán thích hợp (đối với học sinh khá)

- Mức độ 3: Tập trung vào việc tiên liệu những điều kiện đã làm nảy sinh các vấn đề, tình huống vấn đề, các nhu cầu hoặc khó khăn, mâu thuẫn cần giải quyết trong bài toán và việc “phân xét”, cách tiếp cận, giải quyết vấn đề trong tiến trình giải toán (đối với học sinh khá, giỏi).

3. Dạy học hợp tác (học sinh tương tác, hợp tác với nhau để cùng giải quyết bài toán) có thể là như sau:

Khi sử dụng Phương pháp dạy học này, lớp học được chia thành những nhóm từ 4 đến 8 người. Tùy mục đích sư phạm và yêu cầu của vấn đề học tập, các nhóm được phân chia ngẫu nhiên hoặc có chủ định, được duy trì ổn định trong cả tiết học hoặc thay đổi theo từng hoạt động, từng phần của tiết học, các nhóm được giao nhiệm vụ giống nhau hoặc mỗi nhóm nhận một nhiệm vụ khác nhau, là các phần trong một chủ đề chung.

Bước 1. Làm việc chung cả lớp

- Giáo viên giới thiệu chủ đề thảo luận, nêu vấn đề, xác định nhiệm vụ nhận thức.

- Tổ chức các nhóm, giao nhiệm vụ cho các nhóm, quy định thời gian và phân công vị trí làm việc cho các nhóm.

- Hướng dẫn cách làm việc theo nhóm (nếu cần).

Bước 2. Làm việc theo nhóm

- Lập kế hoạch làm việc

- Thỏa thuận quy tắc làm việc

- Phân công trong nhóm, từng cá nhân làm việc độc lập.

- Trao đổi ý kiến, thảo luận trong nhóm.

- Cử đại diện trình bày kết quả làm việc của nhóm.

Bước 3. Thảo luận, tổng kết trước toàn lớp

- Đại diện từng nhóm trình bày kết quả thảo luận của nhóm.

- Các nhóm khác quan sát, bình luận và bổ sung ý kiến.
- Giáo viên tổng kết, nhận xét, đặt vấn đề cho bài tiếp theo hoặc vấn đề tiếp theo

Ưu điểm

- Học sinh được học cách cộng tác trên nhiều phương diện
- Học sinh được nêu quan điểm của mình, được nghe quan điểm của bạn khác trong nhóm, trong lớp; được trao đổi, bàn luận về các ý kiến khác nhau và đưa ra lời giải tối ưu. Qua cách học đó, học sinh sẽ bớt phần chủ quan, phiến diện, làm tăng tính khách quan khoa học, tư duy phê phán của học sinh được rèn luyện và phát triển.
- Các thành viên trong nhóm chia sẻ các suy nghĩ, băn khoăn, kinh nghiệm, hiểu biết của bản thân và học hỏi lẫn nhau. Kiến thức trở nên sâu sắc, bền vững, dễ nhớ và nhớ nhanh hơn do được giao lưu, học hỏi giữa các thành viên trong nhóm. Học sinh hào hứng khi có sự đóng góp của mình vào thành công chung của cả lớp.
- Do không khí thảo luận cởi mở nên học sinh, đặc biệt là những em nhút nhát, trở nên bạo dạn hơn; các em học được cách trình bày ý kiến của mình, biết lắng nghe có phê phán ý kiến của bạn; từ đó, giúp học sinh dễ hòa nhập vào cộng đồng nhóm, tạo cho các em sự tự tin, hứng thú trong học tập và sinh hoạt.
- Vốn hiểu biết và kinh nghiệm xã hội của học sinh thêm phong phú; kỹ năng giao tiếp, kỹ năng hợp tác của học sinh được phát triển.

Hạn chế

- Một số học sinh do nhút nhát hoặc lười không tham gia vào hoạt động chung của nhóm, nên nếu giáo viên không phân công hợp lý có thể dẫn đến tình trạng chỉ có một vài học sinh khá tham gia còn đa số học sinh khác không hoạt động.
- Ý kiến các nhóm có thể quá phân tán hoặc mâu thuẫn gay gắt với nhau.
- Thời gian có thể bị kéo dài

II. Thực trạng vấn đề nghiên cứu

- Phần lượng giác và phương trình vô tỉ chiếm vị trí quan trọng trong chương trình toán học ở THPT, nhưng qua kinh nghiệm của mình tôi thấy đối

với học sinh hai phần này là độc lập, không liên hệ gì được. Thực tế chất lượng dạy học phần bài tập giải phương trình vô tỉ chưa cao, học sinh nắm kiến thức một cách hình thức, các em thường chỉ giải được các bài toán ở dạng cơ bản $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$; $\sqrt{f(x)} = g(x)$ bằng cách bình phương hai vế để loại bỏ dấu căn, nên khi giải phương trình thường gặp khó đối với dạng khác, đặc biệt là các bài giải phương trình vô tỉ ở các đề thi học sinh giỏi, bồi dưỡng đội tuyển... Khi học phần này học sinh thường được giáo viên đưa cho chúng những tính chất một cách áp đặt, nghe giảng một cách thụ động, không hiểu được bản chất của hàm số lượng giác và không thấy quan hệ với phương trình vô tỉ.

- Khi giải toán, học sinh gặp khó khăn trong việc vận dụng cách giải phương trình vô tỉ, cách nào phù hợp? Dựa vào đặc điểm nào, yếu tố nào để lựa chọn cách đó? Vì vậy, học sinh khó hình dung, dẫn đến ngại và không có hứng thú học ôn thi phương trình vô tỉ.

III. Các giải pháp thực nghiệm

Dạy học tiếp cận năng lực học sinh là một mô hình giáo dục giúp phát triển kiến thức và các kỹ năng liên quan thông qua những nhiệm vụ mang tính mở. Học là quá trình kiến tạo, học sinh tìm tòi, khám phá, phát hiện, tự hình thành hiểu biết, năng lực.

Giờ đây, thay vì cho rằng thầy cô làm trung tâm trong hoạt động dạy học và thực hiện truyền tải kiến thức một chiều thì thầy cô cần chuyển vị trí trung tâm cho học sinh để phát huy tính chủ động của người học. Vì vậy, giáo viên cần có quan điểm dạy học mới: Giảng dạy là khai thác và nuôi dưỡng nội lực của học sinh để học sinh tạo ra thói quen rèn luyện tư duy, kỹ năng phân tích vấn đề, giải quyết vấn đề, khả năng diễn đạt, tổ chức và xử lý thông tin, ...

Trên cơ sở học sinh đã nắm vững các kiến thức lượng giác kết hợp với việc tìm tòi các khía cạnh của mỗi bài toán, để rồi "quy lạ về quen" sẽ dẫn đến đường lối giải quyết bài toán, Trong khuôn khổ đề tài này, tôi xin được minh họa cách giải một số phương trình vô tỉ bằng phương pháp lượng giác mà không nêu ra lời giải bằng các phương pháp khác.

Cách giải tổng quát:

Lượng giác hóa là một phương pháp khá rộng, với mỗi bài toán lại có một nét riêng biệt, ta có thể khái quát nội dung của phương pháp sử dụng hàm số lượng giác để giải bài toán đại số là cách tìm đối biến lượng giác phù hợp với

các yêu cầu và giả thiết của bài toán để đưa một đẳng thức, bất đẳng thức, phương trình, ... phức tạp về một biểu thức lượng giác tương đối đơn giản và từ đó sử dụng các công thức biến đổi lượng giác quen thuộc để tìm ra lời giải cho bài toán.

Bước 1: Chọn một hàm số lượng giác cho phù hợp để thay biến của bài toán bằng các hàm số lượng giác đó.

Việc chọn biến lượng giác để thay đổi cho biến cũ thông qua các dấu hiệu đặc biệt của các biến trong bài toán và sự nắm bắt các dấu hiệu đó thông qua miền giá trị và hình thức các công thức lượng giác thông dụng.

Chẳng hạn:

- Đặt $x = a.\sin \alpha$ hoặc $x = a.\cos \alpha$; khi $x \in [-a; a]$.
- Đặt $x = a.\tan \alpha$ hoặc $x = a.\cot \alpha$; khi $x \in \mathbb{R}$.
- Khi nhận thấy các biến tạo thành một công thức lượng giác ta cũng có thể chọn hàm số lượng giác tương ứng để có thể áp dụng được những công thức lượng giác đó.

Bước 2: Sau khi đã chọn được các hàm số lượng giác phù hợp với bài toán thì ta thay biến cũ bằng hàm số lượng giác vừa chọn được một bài toán mới với ẩn là các hàm số lượng giác. Giải bài toán mới bằng cách sử dụng các công thức biến đổi lượng giác đã học.

Trước khi thay các hàm lượng giác vào, chúng ta có thể biến đổi chúng nếu bài toán quá "cồng kềnh".

Bước 3: Cuối cùng, ta thực hiện bước trả lại biến (với những bài giải phương trình) rồi kết luận bài toán.

+ Giáo viên **chuyển giao nhiệm vụ học tập** về *Chuyên đề lượng giác ở lớp 11 áp dụng vào giải phương trình vô tỉ ở lớp 10 cho từng nhóm học sinh.*

+ Giáo viên **hướng dẫn, giám sát việc thực hiện, hợp tác** của các thành viên trong mỗi nhóm.

+ Giáo viên **quan sát** phần trình bày, nhận xét, đánh giá của các nhóm để **nhận xét, rút kinh nghiệm và tổng kết bài học.**

Qua đó, khắc phục nhược điểm của phương pháp dạy học cũ, phát huy ưu điểm của phương pháp dạy học hợp tác:

+ Bồi dưỡng kĩ năng hợp tác cho học sinh; phát hiện và phát huy năng lực, sở trường của từng cá nhân học sinh thông qua các nhiệm vụ học tập.

+ Hạn chế các nhược điểm của từng cá nhân học sinh qua việc học hỏi lẫn nhau và sự góp ý của thầy cô.

IV. Tiến trình thực hiện

Bước 1. Làm việc chung cả lớp

+ **Giáo viên nêu vấn đề, xác định nhiệm vụ nhận thức.**

Giáo viên yêu cầu cả lớp hợp tác theo từng nhóm nhỏ thực hiện nhiệm vụ sau:

- 1) Nghiên cứu lại phần Lượng Giác và từ đó, hệ thống kiến thức trọng tâm.
- 2) Nhận Phiếu bài tập và phân chia dạng bài, xem xét hướng giải quyết của bài mẫu, nhấn mạnh lí thuyết đã được áp dụng vào bài.
- 3) Lựa chọn 2 bài liên quan nội dung bài tập mà nhóm mình phụ trách.
Nêu cách giải quyết.
- 4) Trình bày trước lớp phần nội dung được giao.

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 1

Giải các phương trình sau:

$$1) 4x^3 - 3\sqrt{3-x^2} - 9x = 0 \qquad 2) \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$3) \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2}) \qquad 4) x - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$5) x + \frac{3x}{\sqrt{x^2-9}} = 6\sqrt{2} \qquad 6) x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$7) \sqrt{1+x^2} = \frac{5}{2\sqrt{1+x^2}} + x \qquad 8) \sqrt{1+x^2} + \frac{1+x^2}{2x} = \frac{(1+x^2)^2}{2x(1-x^2)}$$

$$9) x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1} \quad 10)$$

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$11) x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} \quad 12) \sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1 - 2x^2$$

Phân tích một số dạng phương trình vô tỉ có thể giải bằng lượng giác hóa

1. DẠNG 1: Trong bài toán có chứa biểu thức dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Phương pháp:

Mục đích của bài toán giải phương trình vô tỉ là tìm cách khử căn thức một cách nhanh chóng và đưa phương trình đã cho về một phương trình mới đơn giản hơn và giải nó một cách dễ dàng.

Khi gặp các phương trình mà trong bài toán có xuất hiện biểu thức này thì ta sẽ đặt $x = |a|\sin \alpha$, với $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (hoặc $x = |a|\cos \alpha$, với $\alpha \in [0; \pi]$).

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x^2} - 2x^2 + 1 = 0$ (1)

Đây sẽ là vấn đề khó vì học sinh chưa có một quy tắc nào có tính chất thuật toán giải phương trình trên, giáo viên cần có gợi ý để học sinh phát hiện mối liên hệ giữa các góc, từ đó biến đổi về các hàm số lượng giác chứa cùng một góc và đưa về bài toán quen thuộc:

- Tìm điều kiện của phương trình? $(-1 \leq x \leq 1)$

- Nên đặt ẩn phụ thế nào để bỏ được dấu căn? (liên tưởng đến việc đặt $x = \cos t$)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad (*)$$

Với điều kiện đó, đặt $x = \cos t$ ($t \in [0; \pi]$) (**), ta được phương trình:

$$\sqrt{1-\cos t} - 2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t} - 2\cos^2 t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} - 2\cos t \cdot \sin t - \cos 2t = 0 \Leftrightarrow \sin 2t + \cos 2t = \sqrt{2} \sin \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} \Leftrightarrow \sin \left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + \frac{\pi}{4} = \frac{t}{2} + k2\pi \\ 2t + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{t}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{5}{2}t = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} \\ t = \frac{3\pi}{10} + k\frac{4\pi}{5} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Do điều kiện (**) nên ta được $t = \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \cos \frac{3\pi}{10}$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \cos \frac{3\pi}{10}$.

Nhân xét:

- Bài toán trên ta cũng có thể sử dụng cách đặt

$$x = \sin t \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) (**)$$

- Nhờ công thức biến đổi lượng giác mà đã khử được các căn thức một cách nhanh chóng và không thấy gượng ép vì các biểu thức trong căn đều không âm với điều kiện đặt trước.

2. DẠNG 2: Trong bài có chứa biểu thức dạng $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Phương pháp:

Khi gặp các phương trình mà trong bài có xuất hiện biểu thức này thì ta sẽ

đặt $x = \frac{|a|}{\cos \alpha}$, với $\alpha \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ (hoặc $a = \frac{|a|}{\sin \alpha}$, với $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \setminus \{0\}$).

Bài 2: Giải phương trình: $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$ (1)

Giải

Phân tích: Ta nhận thấy trong phương trình có chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ với $a = 1$. Nên ta giải bài toán bằng phương pháp lượng giác.

Điều kiện: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1$.

Với $x < -1$ thì $VT(1) < 0 < VP(1)$: Phương trình (1) vô nghiệm. Do đó điều kiện của phương trình (1) là $x > 1$. (*)

Với điều kiện (*), ta đặt $x = \frac{1}{\cos t}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Khi đó, ta được phương trình:

$$\frac{1}{\cos t} + \frac{\frac{1}{\cos t}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} = \frac{35}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = \frac{35}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12(\sin t + \cos t) = 35 \sin t \cdot \cos t \quad (2)$$

$$\text{Đặt } u = \sin t + \cos t \left(1 \leq u \leq \sqrt{2}\right) (**) \Rightarrow \sin t \cdot \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Phương trình (2) trở thành: } 12u = 35 \frac{u^2 - 1}{2} \Leftrightarrow 35u^2 - 24u - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{7}{5} \\ u = -\frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow u = \frac{7}{5} \quad (\text{do điều kiện (**)})$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \sin t + \cos t = \frac{7}{5} \\ \sin t \cos t = \frac{12}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{3}{5} \\ \cos t = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin t = \frac{4}{5} \\ \cos t = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{5}{4} \text{ hoặc } x = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm: } x = \frac{5}{4} \text{ hoặc } x = \frac{5}{3}.$$

3. DẠNG 3: Trong bài có chứa biểu thức dạng $\sqrt{x^2 + a^2}$.

Phương pháp:

Khi gặp các bài toán xuất hiện biểu thức $\sqrt{x^2 + a^2}$, thì ta đặt $x = |a| \tan t$,

với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (hoặc $x = |a| \cot t$, với $t \in (0; \pi)$).

Bài 3: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 1} = x + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (1).

Giải:

Phân tích: Trong phương trình có xuất hiện biểu thức $\sqrt{x^2 + a^2}$ với $a = 1$ nên ta có thể sử dụng phương pháp lượng giác để giải.

Đặt $x = \tan t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{\tan^2 t + 1} = \tan t + \frac{2}{\sqrt{\tan^2 t + 1}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t} + \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} + 2 \cos t$$

$$\Leftrightarrow 1 = \sin t + 2 \cos^2 t$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 t - \sin t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 1 \\ \sin t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $\sin t = 1 \Rightarrow \cos t = 0$: Không thỏa mãn.

$$\text{Với } \sin t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy phương trình (1) có 1 nghiệm $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. DẠNG 4: Một số dạng khác.

Nhận xét: Khi giải các bài tập về phương trình vô tỷ và nó không thuộc về một trong các dạng trên, xong ta tìm điều kiện của ẩn và cũng đưa được về việc sử dụng các công thức biến đổi lượng giác để khử dấu căn thức một cách nhanh chóng, hiệu quả.

Chẳng hạn:

 Trong bài toán có chứa biểu thức dạng: $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$,

ta đặt $x = a \cos 2\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Trong bài toán có chứa biểu thức dạng: $\sqrt{(x-a)(b-x)}$

Ta đặt $x = a + (b-a)\sin^2 \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Bài 4: Giải phương trình: $(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) = 2x \quad (1)$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x| \leq 1$$

$$\text{Ta nhận thấy } \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^2 = 1$$

$$\text{nên ta đặt } \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \cos t \Rightarrow \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (*)$$

$$\text{Từ đó: } \sqrt{1+x} = \sqrt{2} \cdot \cos t; \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \cdot \sin t \Rightarrow x = 2\cos^2 t - 1$$

$$\text{Ta được phương trình: } (\sqrt{2} \cos t - 1)(\sqrt{2} \sin t + 1) = 2(2\cos^2 t - 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} \cos t - 1)(\sqrt{2} \sin t - 2\sqrt{2} \cos t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} \sin t - 2\sqrt{2} \cos t - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\blacksquare \text{ Ta có } \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 0$$

$$\blacksquare \text{ Giải (2): } \sqrt{2} \sin t - 2\sqrt{2} \cos t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin t = \sqrt{2} + 2\cos t \left(\text{Do } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq \sin t; \cos t \leq 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 t = 1 + 4\cos^2 t - 4\sqrt{2} \cos t$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\cos^2 t = 1 + 8\cos^2 t + 4\sqrt{2} \cos t$$

$$\Leftrightarrow 10\cos^2 t + 4\sqrt{2} \cos t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (loại) hoặc } \cos t = \frac{\sqrt{2}}{10} \Leftrightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow x = -\frac{24}{25}$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm: $x_1 = -\frac{24}{25}$; $x_2 = 0$.

+ Tổ chức các nhóm, giao nhiệm vụ cho các nhóm, quy định thời gian và phân công công việc cho các nhóm.

Chia lớp thành 4 nhóm, mỗi nhóm 4 - 9 học sinh

Nội dung chuẩn bị của từng tổ nhóm như sau:

	Nhóm 1	Nhóm 2	Nhóm 3	Nhóm 4
<i>Nhiệm vụ 1</i>	<i>Nghiên cứu lại bài học về Lượng giác. Từ đó, hệ thống kiến thức trọng tâm</i>			
<i>Nhiệm vụ 2</i>	<i>Nhận Phiếu bài tập và phân chia dạng bài, nêu cách giải quyết, nhấn mạnh lý thuyết đã được áp dụng vào bài.</i>			
<i>Nhiệm vụ 3</i> <i>Trình bày trước lớp phần chuẩn bị nhiệm vụ 2.</i>	1 – 3	4 – 6	7 – 9	10 – 12

Thời gian chuẩn bị: 1 tuần.

Thời gian thực hiện: 3 tiết học.

+ Hướng dẫn cách làm việc theo nhóm.

Mỗi nhóm tự bầu 1 nhóm trưởng (thầy cô sẽ trợ giúp nếu cần).

Nhóm trưởng các buổi thảo luận nhóm; phân công nhiệm vụ cho các thành viên; ghi chép lại tiến độ công việc, ý thức tham gia của các thành viên.

Bước 2. Làm việc theo nhóm

- Lập kế hoạch làm việc.

Nhóm trưởng lập kế hoạch với sự thống nhất của cả tổ nhóm và báo cáo giáo viên.

Cá nhân làm độc lập; báo cáo đúng hạn; tham dự đầy đủ các buổi thảo luận nhóm.

- Phân công trong nhóm, từng cá nhân làm việc độc lập.

Giáo viên hướng dẫn nhóm trưởng công công việc cụ thể, rõ ràng, minh bạch có thời hạn hoàn thành, có nhận xét tiến độ, hiệu quả.

- Trao đổi ý kiến, thảo luận trong nhóm.

Giáo viên hướng dẫn nhóm trưởng lập kế hoạch về thời gian thảo luận nhóm và thực hiện theo kế hoạch đó.

- Cử đại diện trình bày kết quả làm việc của nhóm.

Nhóm trưởng tổng hợp các ý kiến, chốt lại nội dung và phân công đại diện trình bày kết quả (có thể vài học sinh trong nhóm cùng trình bày).

Bước 3. Thảo luận, tổng kết trước toàn lớp

Đại diện từng nhóm trình bày trực tiếp

HOẠT ĐỘNG 1: PHÂN DẠNG BÀI TẬP, HƯỚNG DẪN GIẢI.

Cụ thể, các nội dung phải đạt được yêu cầu cơ bản như sau:

Phân dạng bài tập và hướng giải quyết	Lý thuyết áp dụng
NHÓM 1.	
Dạng 1: Trong bài toán có chứa biểu thức dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$. Giải các phương trình sau: 1) $4x^3 - 3\sqrt{3 - x^2} - 9x = 0$ (1) Điều kiện $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ (*). Đặt $x = \sqrt{3} \cos t, t \in [0; \pi]$ (**), phương trình (1) trở thành: $12\sqrt{3}\cos^3 t - 3\sqrt{3 - 3\cos^2 t} - 9\sqrt{3}\cos t = 0$ $\Leftrightarrow 12\sqrt{3}\cos^3 t - 9\sqrt{3}\cos t - 3\sqrt{3}\sqrt{\sin^2 t} = 0$ $\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = \sin t \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t$ $\Leftrightarrow \cos 3t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$	Đặt $x = a \sin \alpha$, với $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (hoặc $x = a \cos \alpha$, với $\alpha \in [0; \pi]$). Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, mối liên hệ giữa các góc đặc biệt. Công thức nhân ba, công thức nghiệm của

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k.2\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + k.2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$ Do (**) nên ta có $\begin{cases} t = \frac{\pi}{8} \\ t = \frac{5\pi}{8} \\ t = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{8} \\ x = \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{8} \\ x = \sqrt{3}\cos\frac{3\pi}{4} \end{cases}$ Vậy, phương trình (1) có 3 nghiệm $x_1 = \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{8}, x_2 = \frac{\sqrt{6+3\sqrt{2}}}{2}, x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$ 2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} (*)$ Đặt $x = \cos t \left(t \in (0; \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \right) (**)$. Ta được phương trình: $\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sin t + \cos t}{2\sin t \cos t} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} (2).$ đặt $u = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right), -1 < u \leq \sqrt{2}.$ Phương trình (2) trở thành: $\frac{u}{u^2 - 1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow u = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin t + \cos t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \sin 2t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2t = \frac{\pi}{3} \\ 2t = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \text{ (do (**))} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$	phương trình lượng giác $\cos x = \cos \alpha$ $\Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi$ Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản $\sin^2 t + \cos^2 t = 1,$ $\cos x = \cos \alpha$ $\Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi$ $u = \sin t + \cos t$ $\Rightarrow \sin t \cdot \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}$
--	--

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm là

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3) \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2}) \quad (3)$$

$$\text{Điều kiện: } 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad (*)$$

Từ phương trình (1) ta thấy nếu $-1 \leq x \leq 0$ thì phương trình (3) vô nghiệm, do đó điều kiện của phương trình (3) là $0 < x \leq 1$.

$$\text{Với điều kiện trên, đặt } x = \sin t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (**)$$

Khi đó phương trình (3) trở thành:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \sin t(1 + 2\sqrt{1 - \sin^2 t})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos t} = \sin t(1 + 2\cos t) \quad (\text{do } (**) \text{ nên } \cos t \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos \frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos \frac{t}{2} = 2\sin \frac{3t}{2}\cos \frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos \frac{t}{2}\left(1 - \sqrt{2}\sin \frac{3t}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{t}{2} = 0 \\ \sin \frac{3t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{3t}{2} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{3t}{2} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pi + k2\pi \\ t = \frac{\pi}{2} + k\frac{4\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

(4)

$$\text{Do điều kiện } (**) \text{ nên từ (4) ta được } \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm: $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 1$.	
NHÓM 2.	
Dạng 2: Trong bài toán có chứa biểu thức dạng $\sqrt{x^2 - a^2}$. Giải các phương trình sau: 4) $x - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (1) Điều kiện: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$ (*). Với điều kiện (*), ta đặt $x = \frac{1}{\cos t}, t \in (0; \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ (**) Khi đó, phương trình (1) trở thành: $\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} - \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{ \cos t }{\sin t} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (2)$ Xét hai trường hợp: 1) Nếu $t \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \cos t > 0$. Ta được $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} - \frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Leftrightarrow 2(\sin t - \cos t) = \sqrt{5} \sin t \cos t \quad (3)$ Đặt $\sin t - \cos t = u \Rightarrow \sin t \cos t = \frac{1 - u^2}{2}$ Khi đó phương trình (3) trở thành: $2u = \sqrt{5} \cdot \frac{1 - u^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\sqrt{5} \text{ (loại)} \\ u = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{5}}$	Đặt $x = \frac{ a }{\cos \alpha}$, với $\alpha \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ (hoặc $a = \frac{ a }{\sin \alpha}$, với $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \setminus \{0\}.$ Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$ dấu của các hàm số lượng giác. Công thức nghiệm của phương trình lượng giác

Do đó, ta có phương trình: $\sin t - \cos t = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{1}{\cos t} = \sqrt{5}$ 2) Nếu $t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos t < 0$. Ta được $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Leftrightarrow 2(\sin t + \cos t) = \sqrt{5} \sin t \cos t \quad (3)$ Đặt $\sin t + \cos t = u \Rightarrow \sin t \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}$ Khi đó phương trình (3) trở thành: $2u = \sqrt{5} \cdot \frac{u^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt{5} \text{ (loại)} \\ u = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow u = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ Do đó, ta có phương trình: $\sin t + \cos t = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos t = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{1}{\cos t} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \sqrt{5}$. 5) $x + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} = 6\sqrt{2}$ Phân tích: Ta nhận thấy trong phương trình có chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ với $a = 3$. Nên ta giải bài toán bằng phương pháp lượng giác. Điều kiện: $x > 3$ Ta thấy, khi $x < -3$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Do đó $x > 3$. Với điều kiện đó, ta đặt $x = \frac{3}{\sin t}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Khi đó, ta được	Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản $1 + \cot^2 t = \frac{1}{\sin^2 t},$
--	---

phương trình:

$$\frac{3}{\sin t} + \frac{9}{\sin t \cdot \sqrt{9\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)}} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{3}{\sin t} + \frac{9}{3 \sin t \cdot \cot t} = 6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sin t} + \frac{3}{\cot t} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos t + \sin t = 2\sqrt{2} \cos t \cdot \sin t$$

$$\Leftrightarrow \sin 2t = \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = \frac{\pi}{4} + t + k2\pi \\ 2t = \frac{3\pi}{4} - t + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ t = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Do $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên (2) có một nghiệm

$$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 3\sqrt{2}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 3\sqrt{2}$.

$$6) \quad x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Điều kiện: $|x| > 1$

Ta thấy, khi $x < -1$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Do đó $x > 1$.

Với điều kiện đó, ta đặt $x = \frac{1}{\sin t}, 0 < t < \frac{\pi}{2}$. Khi đó, ta được

phương trình:

$$\frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\sin t \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\sin t \cdot \cot t} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\cot t} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2(\cos t + \sin t) = 3\sqrt{5} \cos t \cdot \sin t$$

dấu của các hàm số lượng giác.

Công thức nghiệm của phương trình lượng giác

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}$$

Đặt $\sin t + \cos t = u \Rightarrow \sin t \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}$ Khi đó phương trình (3) trở thành: $2u = 3\sqrt{5} \cdot \frac{u^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ (loại)} \\ u = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow u = \frac{3}{\sqrt{5}}$ Do đó, ta có phương trình: $\sin t + \cos t = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin t = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ Vậy phương trình (1) có hai nghiệm duy nhất $x_1 = \sqrt{5}; x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$	
---	--

NHÓM 3.

Dạng 3: Trong bài có chứa biểu thức dạng $\sqrt{x^2 + a^2}$. 7) $\sqrt{1+x^2} = \frac{5}{2\sqrt{1+x^2}} + x$ Phân tích: Trong phương trình có xuất hiện biểu thức $\sqrt{x^2 + a^2}$ với $a = 1$. Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (*). Khi đó, ta được phương trình: $\sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{5}{2\sqrt{1+\tan^2 t}} + \tan t \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} = \frac{5\cos t}{2} + \frac{\sin t}{\cos t}$ $\Leftrightarrow 2 = 5\cos^2 t + 2\sin t \Leftrightarrow 2 = 5(1 - \sin^2 t) + 2\sin t$ $\Leftrightarrow 5\sin^2 t - 2\sin t - 3 = 0$ Đặt $u = \sin t, -1 < u < 1$ (**), ta được pt:	Đặt $x = a \tan t$, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (hoặc $x = a \cot t$, với $t \in (0; \pi)$). Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$ đấu của các hàm số lượng giác.
--	--

$5u^2 - 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = -\frac{3}{5} \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện (**) ta được $u = -\frac{3}{5}$ $\Rightarrow \sin t = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos t = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan t = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$ Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{3}{4}$. 8) $\sqrt{1+x^2} + \frac{1+x^2}{2x} = \frac{(1+x^2)^2}{2x(1-x^2)}$ Điều kiện: $x \neq 0; x \neq \pm 1$. Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$ (**) Khi đó, ta được phương trình: $\sqrt{1+\tan^2 t} + \frac{1+\tan^2 t}{2\tan t} = \frac{(1+\tan^2 t)^2}{2\tan t(1-\tan^2 t)}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2\sin t \cos t} = \frac{1}{2\cos^4 t \frac{\sin t \cos 2t}{\cos t \cos^2 t}}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2\sin t \cdot \cos t} = \frac{1}{2\cos t \cdot \sin t \cdot \cos 2t}$ $\Leftrightarrow 2\sin t \cdot \cos 2t + \cos 2t = 1 \text{ (do (**))}$ $\Leftrightarrow 2\sin t(1-2\sin^2 t) - 2\sin^2 t = 0$ $\Leftrightarrow 2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0 \text{ (do (**))}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{1}{2} \\ \sin t = -1 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.	Công thức nghiệm của phương trình lượng giác $\Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}$
---	---

$$9) x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$$

Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (*). Khi đó, ta được phương trình:

$$\tan^2 t + 3 \tan t + 1 = (\tan t + 3)\sqrt{\tan^2 t + 1}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 t + 3 \tan t + 1 = (\tan t + 3) \frac{1}{\cos t}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 \sin t \cdot \cos t = \sin t + 3 \cos t$$

$$\Leftrightarrow (3 \cos t - 1)(\sin t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{1}{3} \\ \sin t = 1 (\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow \tan t = 2\sqrt{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2\sqrt{2}$.

NHÓM 4.

Dạng 4: Dạng khác

$$10) \sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 1+2x > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Đặt $2x = \cos t, t \in (0; \pi)$. Phương trình trở thành:

$$\sqrt{1-\cos t} + \sqrt{1+\cos t} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} + \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) \cdot \sqrt{2} = \tan \left(\frac{t}{2} \right) + \cot \left(\frac{t}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right)^2 = \tan^2 \left(\frac{t}{2} \right) + \cot^2 \left(\frac{t}{2} \right) + 2$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \sin t) = \frac{4}{\sin^2 t} \Leftrightarrow \sin^3 t + \sin^2 t - 2 = 0$$

Trong bài toán có chứa biểu thức

dạng: $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc

$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, ta đặt

$$x = a \cos 2\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Trong bài toán có chứa biểu thức dạng:

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}$$

Ta đặt

$$x = a + (b-a) \sin^2 \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (\sin t - 1)(\sin^2 t + \sin t + 2) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 1$$

$$(\text{Do } \sin^2 t + \sin t + 2 > 0, \forall t)$$

$$\Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

$$11) x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$$

Điều kiện: $0 < x \leq 2$.

Với điều kiện đó ta đặt $x = 2\cos t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (*), phương

trình đã cho trở thành:

$$2\cos t = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos t}}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos t}}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2 + \sqrt{2 - 2\cos \frac{t}{2}}} \Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2 + 2\sin \frac{t}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{8} + \cos \frac{t}{8} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \sin \left(\frac{t}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (**)$$

Giải phương trình (**) kết hợp với điều kiện (*) ta được

$$t = \frac{2\pi}{9}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$$x = 2\cos \frac{2\pi}{9}.$$

$$12) \sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} = 1 - 2x^2 (1)$$

Phân tích: Ta thấy phương trình có chứa biểu thức $\sqrt{a^2 - x^2}$ với $a = 1$ nên ta có thể sử dụng phương pháp lượng giác hóa để giải.

Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Công thức nhân đôi, dấu của các hàm số lượng giác.

Công thức nghiệm của phương trình lượng giác

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}$$

Sử dụng các công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, dấu của các hàm số lượng giác.

Nhận xét: Ta thấy $1 + 2x\sqrt{1-x^2} = \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)^2 \geq 0$, do đó điều kiện xác định của phương trình (1) là $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$ (*)

Với điều kiện (*), đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$ (**), ta được phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{1 + 2\cos t \sqrt{1 - \cos^2 t}} = \sqrt{2}(1 - 2\cos^2 t)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 2\sin t \cdot \cos t} = -\sqrt{2}\cos 2t$$

$$\Leftrightarrow \left| \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right| = -\cos 2t \quad (2)$$

a) Nếu $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq t - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$

(3*)

Khi

đó:

$$(2) \Leftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 2t) \Leftrightarrow t - \frac{\pi}{4} = \pm(\pi - 2t) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \\ t = \frac{3\pi}{4} - k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với điều kiện (3*), ta được

$$\begin{cases} t = \frac{5\pi}{12} \\ t = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ x = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

b) Nếu $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < t \leq \pi$ (4*). Khi đó

Công thức nghiệm của phương trình lượng giác

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi$$

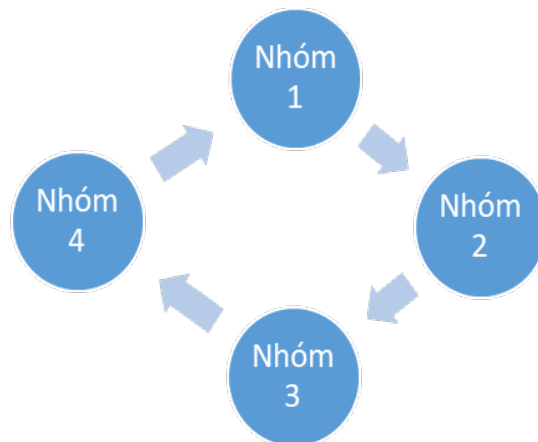
$$(2) \Leftrightarrow -\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ t = \frac{\pi}{12} + n\frac{2\pi}{3} \end{cases}, (k, n \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với điều kiện (4*), ta thấy không có giá trị nào của t thỏa mãn.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

+ Các nhóm cùng quan sát, lắng nghe, chất vấn, bình luận và bổ sung ý kiến và chấm điểm cho nhóm trình bày theo sơ đồ sau:



HOẠT ĐỘNG 2: GIAO LƯU, HỌC HỎI LẦN NHAU GIỮA CÁC NHÓM.

Để tạo không khí sôi động hơn thì phần này, giáo viên giao nhiệm vụ cho các nhóm, sau đó các nhóm thi với nhau theo hình thức, các nhóm trưởng sẽ bốc thăm mời thành viên của nhóm khác lên bốc câu hỏi, cả nhóm sẽ có 5 phút trao đổi và 5 phút để thành viên đó trình bày. Thi xong, sẽ đưa ra đáp án và hướng dẫn giải. (Mỗi nhóm sẽ gọi 2 thành viên khác nhau trả lời 2 câu. Điểm tính cho nhóm, giáo viên kiểm duyệt, các nhóm trưởng cùng nhận xét, cho điểm,...)

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Giải các phương trình sau: (phát phiếu trước, chỉ có đề bài)

Đề bài	Hướng dẫn – Đáp số
1) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-x^2}{3}}$	1) Đáp số $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$
2) $4x^3 + 2\sqrt{1-x^2} - 3x - 1 = 0$	2) Đáp số $x = 1$.
3) $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$	3) Đáp số
4) $2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} = 4x^3 + \sqrt{1-x^2}$	$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; x = \cos \frac{3\pi}{10}$.
5) $\frac{1}{1-x^2} = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$	4) Đáp số $x = \frac{1}{2}; x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
6) $2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$	5) Đáp số $x = \frac{\sqrt{2}}{2}; x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
7) $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.	6) Đáp số $x = 0; x = \cos \frac{7\pi}{10}$.
8) $\sqrt{\frac{1}{2} - x\sqrt{1-x^2}} = 1 - 2x^2$	7) Đáp số: $x = \frac{\sqrt{2}}{2};$
9) $1 + \sqrt{1-x^2} = 2x^2$	$x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$
10) $5 + 3\sqrt{1-x^2} = 8 \left[x^6 + (1-x^2)^3 \right]$	8) Đáp số
11) $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$.	$x = \frac{\sqrt{2}}{2}; x = \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.
12) $2x + \sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{1-x^2}$	9) Đáp số: $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
13)	10) Đáp số
$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right) = 2 + \sqrt{1-x^2}$	$x = 0; x = \cos \frac{\pi}{10}; \cos \frac{9\pi}{10}$.
14) $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$	11) Đáp số: $x = \sqrt{2}$
	12) Đáp số: $x = 0; x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

	13) Đáp số: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 14) $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
--	--

+ Giáo viên tổng kết và nhận xét, đặt vấn đề cho bài tiếp theo hoặc vấn đề tiếp theo.

- 1) Giáo viên nhận xét về ý thức chuẩn bị, thái độ hợp tác và hiệu quả công việc của các nhóm dựa vào bảng sau:
- 2) Giáo viên nhận xét về ý thức chuẩn bị, thái độ hợp tác và hiệu quả công việc của các nhóm dựa vào bảng sau:

Nhóm	Nhóm trưởng	Ý thức chuẩn bị	Thái độ hợp tác	Nội dung chuẩn bị	Trình bày trước lớp	Thành viên tích cực
1						
...						

- 3) Giáo viên cho điểm học sinh dựa vào bảng nhận xét trên.
- 4) Giáo viên tổng kết bài học

+ Bài học về phẩm chất và năng lực:

Thông qua bài học, qua hợp tác nhóm, các phẩm chất và năng lực sau đã được phát triển: Phẩm chất Nhân ái (tôn trọng ý kiến người khác, tôn trọng sự khác biệt...), Trung thực, Trách nhiệm.

Năng lực Tự chủ, tự học, Giao tiếp và Hợp tác, năng lực Tin học, Tính toán.

V. Kết quả thực nghiệm và tính hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

Sau một thời gian nghiên cứu, trao đổi cùng đồng nghiệp trong tổ chuyên môn, tôi bền bỉ áp dụng phương pháp giáo dục tiếp cận năng lực học sinh theo hướng phát hiện và giải quyết vấn đề kết hợp với dạy học hợp tác thì đến nay đa số học sinh trong lớp đã thay đổi quan điểm học môn toán. Học sinh thấy hứng thú, tự tin hơn, linh hoạt, sáng tạo hơn, chủ động tích cực hơn và cũng sẵn sàng “đương đầu” với các câu hỏi khó. Học sinh cũng rèn được tính kiên nhẫn trong học tập, không bỏ cuộc, kiên trì suy nghĩ, tìm tòi để đưa ra lời giải cho các bài toán khó.

Để kiểm tra tính hiệu quả của phương pháp giáo dục tiếp cận năng lực mang lại, tôi đã tiến hành chia lớp 12A1 và 12A2 (hai lớp chất lượng cao ban A

của trường) mỗi lớp làm hai nhóm đồng đều về trình độ. Giáo viên thực hiện giảng dạy nội dung đề tài với hai nhóm theo hai phương pháp khác nhau.

Nhóm Năng lực 1: Sử dụng phương pháp giáo dục truyền thống (phương pháp giáo dục tiếp cận nội dung).

Nhóm Năng lực 2: Sử dụng phương pháp giáo dục tiếp cận năng lực.

Sau khi thực hiện bài giảng xong, tôi cho học sinh cả hai lớp một tuần ôn tập rồi giáo viên cho học sinh làm bài kiểm tra đánh giá năng lực gồm 20 câu trong thời gian 45', phiếu kiểm tra như sau:

Giải các phương trình sau:

$$1) 2 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x^2$$

$$2) x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$$

$$3) 4 - 3x^2 = x^2\sqrt{x^2-1}$$

$$4) x + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

$$5) \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2}{|x-1|}$$

Kết quả thu được như sau:

<i>Nhóm</i>	<i>Điểm Giỏi</i>	<i>Điểm Khá</i>	<i>Điểm Trung bình</i>	<i>Điểm Yếu Kém</i>
Nhóm Năng lực 1	12,6%	28%	41%	18,4%
Nhóm Năng lực 2	35,2%	44,3%	20,5%	0%

Qua quá trình thực nghiệm, tôi thấy rất mừng vì sự tăng trưởng của số điểm khá, giỏi mà còn mừng hơn là tôi nhận thấy không khí lớp trong giờ học đổi mới phương pháp thực sự sôi nổi. Tôi cảm nhận rõ sự tự tin của học sinh, niềm hứng thú đối với môn Toán các em cũng tăng lên rõ rệt sau khi đã hợp tác cùng nhau và thể hiện hết các năng lực cá nhân để hoàn thành nhiệm vụ học tập.

C. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

Quá trình thực nghiệm cùng những kết quả rút ra sau thực nghiệm cho thấy: Mục đích thực nghiệm đã được hoàn thành, tính khả thi và tính hiệu quả của biện pháp đã được khẳng định, thực hiện các biện pháp đó sẽ góp phần phát triển kỹ năng phát hiện và giải quyết vấn đề kết nối giữa phương trình vô tỉ và lượng giác, góp phần nâng cao hiệu quả dạy học môn Toán cho học sinh THPT.

Việc thực hiện theo chuyên đề đổi mới giảng dạy như nội dung sáng kiến kinh nghiệm mà tôi đã nêu trên đã góp phần thay đổi học sinh: từ thụ động lĩnh hội kiến thức sang chủ động nghiên cứu, tìm tòi, sáng tạo và hợp tác cùng nhau để giải quyết các vấn đề gặp phải, hứng thú hoàn thành nhiệm vụ được giao. Chuyên đề đổi mới trên cũng góp phần thay đổi cách đánh giá học sinh: không chỉ dựa vào kết quả của các bài kiểm tra đơn thuần mà còn đánh giá dựa vào cả quá trình học tập và thái độ học tập của học sinh; thay đổi cả tư duy dạy học: giáo viên không chỉ truyền thụ tri thức mà còn phát hiện kịp thời những khó khăn của học sinh trong quá trình học tập để hỗ trợ và điều chỉnh các hoạt động giáo dục cho phù hợp.

Trên đây là một số kinh nghiệm nhỏ rút ra trong thực tế giảng dạy của bản thân. Rất mong các đồng nghiệp góp ý để đề tài được hoàn thiện và áp dụng hiệu quả hơn trong giảng dạy.

Trân trọng cảm ơn!

Hà Nội, ngày 18 tháng 02 năm 2023
Tôi cam đoan SKKN này là của mình viết,
không sao chép từ bất kì người nào.

**Xác nhận của Thủ trưởng
đơn vị**

Người viết

Hoàng Quốc Định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] – Sách giáo khoa nâng cao 10, 11, 12.
- [2] – Những bài toán chọn lọc và Phương pháp giải phương trình–hệ phương trình – bất phương trình. (Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội – Hồ Sĩ Vinh).
- [3] – Lời giải Đề thi Học sinh giỏi Toán 12 (Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội – Trần Tiến Tựu).
- [4] – Báo Toán học Tuổi trẻ các năm 2006, 2013, 2014, 2015.
- [5] – Bài giảng Trọng tâm chương trình chuẩn Toán 10 (Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội – Lê Hồng Đức).
- [6] – Bộ giáo dục và đào tạo - Hội toán học Việt Nam (1977), 30 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ, NXB Giáo dục
- [7] – Dương Quốc Việt, Lê Văn Đính (2012), Bài tập đại số sơ cấp, NXB Đại học sư phạm.