

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT HỢP THANH

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Phát triển tư duy và kỹ năng của học sinh qua bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm

Lĩnh vực/ môn	: Toán học
Cấp học	: THPT
Tên tác giả	: ĐẶNG THỊ NHUNG
Đơn vị công tác	: Trường THPT Hợp Thanh
Chức vụ	: Giáo viên

Năm học: 2023 – 2024

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN
Kính gửi: Sở giáo dục đào tạo Hà Nội

Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Tên sáng kiến
Đặng Thị Nhung	05/01/1986	THPT Hợp Thanh	Giáo viên	Đại học	Phát triển tư duy và kỹ năng của học sinh qua bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm

- Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: **Toán học**.

- Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử: 01/10/2023

- **Mô tả bản chất của sáng kiến:** Từ năm học 2017 kỳ thi trung học phổ thông quốc gia và kỳ thi tốt nghiệp trung học phổ thông với hình thức thi trắc nghiệm 90 phút 50 câu hỏi trắc nghiệm, yêu cầu đề ra học sinh phải tư duy, hoạt động nhanh. Xuất phát từ những thuận lợi, khó khăn của học sinh tôi đưa ra giải pháp giúp các em vừa học tập tốt, nắm chắc kiến thức cơ bản, vừa đạt được kết quả cao trong kỳ thi quan trọng này. Đề tài là **“Phát triển tư duy và kỹ năng của học sinh qua bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm”**. Đề tài được chia thành hai phần chính: phần 1 giúp học sinh nhớ lại các kiến thức cơ bản của **bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm**. Phần 2 chia các dạng theo mức độ từ dễ đến khó và có ví dụ minh họa, hướng dẫn học sinh thực hiện các bài tập và sau cùng có các bài tập tương tự để học sinh áp dụng

- **Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả :** Sau khi thực hiện đề tài học sinh nắm tốt kiến thức cơ bản, các bài tập ở mức độ nhận biết và thông hiểu 100% học sinh lớp tôi dạy thực hiện tốt, số lượng học sinh làm các bài tập mức độ vận dụng, vận dụng cao tăng lên rất nhiều.

Học sinh có ý thức học tập tốt hơn, tự tin hơn trong các bài kiểm tra và kỳ thi tốt nghiệp THPT.

Danh sách những người đã tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu (nếu có):

Số TT	Học sinh lớp	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác (hoặc nơi thường trú)	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Nội dung công việc hỗ trợ
1	12A2					
2	12A5					
3	12A6					

Tôi xin cam đoan mọi thông tin nêu trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Mỹ Đức, ngày 23 tháng 02 năm 2024

Người nộp đơn



Đặng Thị Nhung

THPT HỢP THANH
HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

PHIẾU NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ

Họ tên tác giả:Đặng Thị Nhung.....
Tên đề tài:PHÂN TRIỂN THỰC DUY VÀ KHẢ NĂNG CỦA HKS QUA BÀI
TOÁN TÌM GIỚI HẠN, GIỚI NHẬN DƯỚI VÀO ĐẠI HẠN..... Lĩnh vực.....

STT	Tiêu chuẩn	Điểm SKKN
1	Sáng kiến có tính mới	
1.1	Hoàn toàn mới, được áp dụng đầu tiên	<u>25</u>
1.2	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ khá	
1.3	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ trung bình	
1.4	Không có tính mới hoặc sao chép từ các giải pháp đã có trước đây	
Nhận xét: <u>Sáng kiến có tk mới, được áp dụng lần đầu</u>		
2	Sáng kiến có tính áp dụng	
2.1	Có khả năng áp dụng trong phạm vi toàn ngành hoặc rộng hơn	<u>25</u>
2.2	Có khả năng áp dụng trong đơn vị và có thể nhân ra một số đơn vị có cùng điều kiện	
2.3	Có khả năng áp dụng trong đơn vị	
2.4	Không có khả năng áp dụng trong đơn vị	
Nhận xét: <u>Có khả năng áp dụng rộng</u>		
3	Sáng kiến có tính hiệu quả	
3.1	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội, có tính lan tỏa	
3.2	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội	<u>20</u>
3.3	Có hiệu quả, lợi ích phù hợp với mức độ phù hợp tại đơn vị	
3.4	Không có hiệu quả cụ thể	
Nhận xét: <u>Sáng kiến có hiệu quả, đem lại lợi ích kt-xh</u>		
4	Điểm trình bày	
4.1	Trình bày khoa học, hợp lý	<u>10</u>
4.2	Trình bày chưa khoa học, chưa hợp lý	
Nhận xét: <u>Trình bày khoa học, hợp lý</u>		
Tổng cộng: <u>80</u>		Đánh giá: ☒ Đạt (≥ 70 điểm) ☐ Không đạt

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN CƠ SỞ



Nguyễn Khắc Thuât

MỤC LỤC

PHẦN I: ĐẶT VẤN ĐỀ	1
1. Lý do chọn đề tài.....	1
2. Mục đích nghiên cứu:.....	1
3. Nhiệm vụ nghiên cứu:.....	1
4. Đối tượng phạm vi nghiên cứu:	2
5. Phương pháp nghiên cứu.....	2
PHẦN II: GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ	3
1. Cơ sở lý thuyết	3
2. Nội dung kiến thức cần nhớ	3
3. Phân dạng và phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm”	4
3.1. Bài toán 1 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D	4
3.2. Bài toán 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức có nhiều ẩn.....	9
4. Kết quả và ứng dụng	18
4.1. Tiến hành thử nghiệm	18
4.2. Kết luận chung về thử nghiệm	19
PHẦN III: KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ	21
1. Kết luận	21
2. Khuyến nghị	21
TÀI LIỆU THAM KHẢO	22

PHẦN I: ĐẶT VẤN ĐỀ

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số nói riêng và bất đẳng thức nói chung là một trong những chủ đề quan trọng và hấp dẫn trong chương trình giảng dạy và học bộ môn toán ở trường phổ thông. Trong các đề thi môn toán của các kì thi đại học, cao đẳng, tốt nghiệp và thi học sinh giỏi các cấp những năm gần đây các bài toán liên qua đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số thường xuyên có mặt và thường là câu hỏi khó của đề thi.

Để tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số hay của biểu thức có nhiều phương pháp như: Sử dụng bất đẳng thức cô si, bất đẳng thức Bunhia; phương pháp lượng giác hóa; phương pháp miền giá trị; phương pháp đồ thị và hình học; phương pháp chiều biến thiên.... Nhưng tôi thấy trong những năm gần đây, trong các đề thi việc sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thường xuyên được sử dụng, chính vì vậy trong quá trình giảng dạy của mình tôi muốn hình thành cho học sinh có tư duy và kỹ năng sử lí các bài toán này dựa vào đạo hàm. Nên tôi xin trình bày sáng kiến kinh nghiệm: **“Phát triển tư duy và kỹ năng của học sinh qua bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm”**.

2. Mục đích nghiên cứu:

Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức có nhiên ản tôi nhận thấy:

- Học sinh sợ, bỏ qua, không hứng thú.
- Lúng túng, thụ động, không biết xử lí từ đâu.

Vậy vấn đề đặt ra là:

- Cần giúp cho học sinh hệ thống và ghi nhớ đầy đủ các kiến thức liên quan : đạo hàm và các bất đẳng thức cô si, bunhiacôpxki
- Giúp học sinh hình thành và phát triển tư duy linh hoạt, sáng tạo trong các bài toán liên quan.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu:

Nhiệm vụ nghiên cứu của SKKN bao gồm:

+ Phát triển năng lực cho học sinh nhận dạng và giải các bài toán về tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lớp 12 dựa vào đạo hàm.

+ Hệ thống kiến thức thật đơn giản, dễ hiểu, dễ nhớ. Có cách giải nhanh, để học sinh có thể giải quyết bài toán.

+ Chia sẻ với đồng nghiệp kinh nghiệm để rèn luyện kỹ năng giải bài tập về tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số cho học sinh lớp 12 ở trường THPT Hợp Thanh.

4. Đối tượng phạm vi nghiên cứu:

Để giải quyết vấn đề đó tôi đề xuất ý tưởng sau:

- Cần cho học sinh tự hệ thống lại kiến thức trọng tâm sau mỗi buổi học từ đó khắc sâu được kiến thức.
- Từ các bài toán cụ thể, dẫn dắt học sinh tự đúc kết ra các kinh nghiệm giải toán qua đó tự tìm ra thuật giải cho các lớp bài toán khác nhau.
- Cho học sinh thấy được mối liên hệ của kiến thức đang học với thực tiễn cuộc sống.
- Học sinh các lớp 12A2, 12A5, 12A6 năm học 2023-2024 trường THPT Hợp Thanh.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Xuất phát từ các bài toán cụ thể, cho học sinh nhìn rõ vấn đề và tìm ra phương pháp giải cụ thể cho các bài toán có sử dụng đạo hàm.
- Đúc kết ra thuật toán của các lớp bài toán khác nhau có sử dụng đạo hàm.
- Thực nghiệm sử dụng đạo hàm trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

PHẦN II: GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

1. Cơ sở lý thuyết

Dạy học giải bài tập là hoạt động trí tuệ của người thầy nhằm điều khiển học trò tự giải được bài toán. Chẳng hạn, chúng ta thực hiện quy trình bốn bước của Pôlya để giải một bài toán gồm :

- Bước 1 : Tìm hiểu nội dung bài toán
- Bước 2 : Xây dựng thuật giải
- Bước 3 : Thực hiện thuật giải
- Bước 4 : Kiểm tra, nghiên cứu lời giải

Trong từng đơn vị kiến thức cụ thể, chúng ta đưa ra cách dạy phù hợp. Chẳng hạn, khi dạy giải một bài toán liên quan đến tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số chúng ta có thể thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1 : Đọc kỹ đề, xác định dạng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- Bước 2 : Xây dựng phương pháp giải.
- Bước 3 : Thực hiện giải bài toán theo dạng phù hợp.

Ở trong sáng kiến này, tôi xin nêu qua một số bài toán cụ thể để hướng dẫn các em học sinh giải thành thạo bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số dựa vào đạo hàm.

2. Nội dung kiến thức cần nhớ

Hệ thống các kiến thức cơ bản:

- **Bất đẳng thức cô si :**

Cho hai số không âm, ta có : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Tổng quát: Cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} . \text{Dấu bằng xảy ra khi } a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

- **Bất đẳng thức Bunhia_ Côpski:**

Cho hai cặp số $(a; b)$ và $(c; d)$, ta có:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

Dấu bằng xảy ra : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

• **Khái niệm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất :**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu :

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in D \quad \text{và tồn tại } x_0 \in D: f(x_0) = M.$$

Kí hiệu : $M = \max_D f(x)$

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu :

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in D \quad \text{và tồn tại } x_0 \in D: f(x_0) = m.$$

Kí hiệu : $m = \min_D f(x)$

3. Phân dạng và phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm”.

3.1. Bài toán 1 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D .

Đây là cách sử dụng trực tiếp chiều biến thiên của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, các bài toán này thường gặp trong các đề thi tốt nghiệp, đại học và cao đẳng các khối D, B.

Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D :

Bước 1: Lập bảng biến thiên của hàm số trên D :

- Tính y' và tìm các điểm tới hạn
- Tính giới hạn vô cực và giới hạn tại vô cực (nếu có).

Bước 2: So sánh giá trị của hàm số tại các điểm đặc biệt (thông thường là các điểm cực đại, cực tiểu, các điểm không tồn tại đạo hàm). Từ phép so sánh ấy để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất phải tìm.

Ví dụ 1 : (Đại học khối D năm 2011)

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1} \quad \text{trên } [0; 2]$$

Giải: Ta có :

$$y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

t	$-\infty$	0		2	$+\infty$
y'			+		
Y		3		$\frac{17}{3}$	

Vậy :

$$\max_{[0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3}$$

$$\min_{[0;2]} y = y(0) = 3$$

Chú ý : Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ ta còn có thể áp dụng phương pháp sau đây :

Bước 1: Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên $[a;b]$ tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên và kết luận:

$$\max_{[a;b]} y = M, \quad \min_{[a;b]} y = m$$

Các bài toán trên thực sự rất đơn giản, học sinh không cần hiểu bản chất của bài toán vẫn tìm được kết quả của bài toán. Ta có thể làm như sau :

$$y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$$

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Trong đó nghiệm thỏa mãn trên đoạn $[0; 2]$ là $x = 0$

$$\text{Ta có } y(0) = 3 \text{ và } y(2) = \frac{17}{3}$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;2]} y = y(0) = 3 \text{ và } \max_{[0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3}$$

Ví dụ 2: (Đại học khối D năm 2010)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10} \text{ trên miền xác định của nó.}$$

Ta thấy bài toán này khác so với ví dụ 1 là bài toán chưa cho ta biết tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập nào, nên bước đầu tiên ta phải chỉ ra tập xác định của hàm số.

Giải

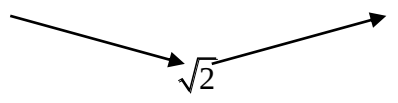
Tập xác định của hàm số $D = [-2; 5]$

Ta có :

$$y' = \frac{(4-2x)\sqrt{-x^2+3x+10} - (3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21}}{2\sqrt{-x^2+4x+21}\sqrt{-x^2+3x+10}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	5	$+\infty$
y'		-	0	+	
y					

Vậy $\min_{[-2;5]} y = y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{4x}{1+x^4}$$

Ta thấy : Trong ví dụ này khó hơn ví dụ 2, vì tập xác định của hàm số là tập $\mathbb{R}$, như vậy khi lập bảng biến thiên học sinh phải có kiến thức về giới hạn vô cực. Giáo viên nhắc lại kiến thức cơ bản về giới hạn vô cực:

Cho hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức.

- Nếu bậc $f(x) >$ bậc $g(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y, \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ kết quả bằng vô cực.
- Nếu bậc $f(x) =$ bậc $g(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{a}{b}$ với a, b lần lượt là hệ số của x có số mũ cao nhất trong các đa thức $f(x)$ và $g(x)$.
- Nếu bậc $f(x) <$ bậc $g(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$

Giải : Tập xác định: $\mathbb{R}$

Giới hạn :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

Ta có :

$$y' = \frac{4(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$-\sqrt[4]{27}$		$\sqrt[4]{27}$		0

Vậy $\max y = y\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \sqrt[4]{27}$ và $\min y = y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\sqrt[4]{27}$

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(0; 1)$

$$y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$$

Giải : Xét hàm số $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 1)$

Ta có :

$$y' = \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	$-1 + \sqrt{2}$	1	$+\infty$
g'(x)			- 0 +		
g(x)		$-\infty$	$3 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$	

Vậy $\min_{(0;1)} y = y(-1 + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x + \cos x + 1}$$

Ta thấy : Đối với hàm số trên nếu ta tính đạo hàm đối với hàm số lượng giác thì lập bảng biến thiên rất khó khăn, nên ở đây ta kết hợp với việc đặt ẩn phụ để đưa về các ví dụ trên.

Giải :

Đặt $t = \cos x$, $|t| \leq 1$. Hàm số trở thành :

$$y = \frac{t+1}{t^2+t+1} \quad \text{với } t \in [-1;1]$$

Ta có :

$$y' = \frac{-t^2 - 2t}{(t^2 + t + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
y'			+	0	-	
y			0	1	$\frac{2}{3}$	

Vậy $\max y = 1$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\min y = 0$ đạt được khi $t = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Chú ý : Việc đi tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số trên có rất nhiều ứng dụng trong khi giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình có tham số, xuất hiện rất nhiều trong các đề thi đại học những năm gần đây, như sau :

Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

Giải:

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq t \leq 2$

$\Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$. Phương trình trở thành :

$$m(t+2) = 2 - t^2 - t, \quad \text{với } t \in [0; \sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{-t^2 - t + 2}{t+2} = m$$

Xét hàm số :

$$f(t) = \frac{-t^2 - t + 2}{t + 2}, \quad t \in [0; \sqrt{2}]$$

$$f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t + 2)^2} < 0 \quad \forall t \in [0; \sqrt{2}]$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$			-	
$f(x)$		1	$\sqrt{2} - 1$	

$$\Rightarrow \min_{[0; \sqrt{2}]} y = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \quad \text{và} \quad \max_{[0; \sqrt{2}]} y = f(0) = 1$$

Khi đó : Phương trình có nghiệm $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$

Như vậy, trong bài toán 1 công việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D không khó khăn nhiều với học sinh. Học sinh đã vượt qua mức độ tư duy và kỹ năng tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số hay biểu thức có một ẩn. Học sinh gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức có nhiều ẩn thì học sinh phải làm như thế nào ?

3.2. Bài toán 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức có nhiều ẩn

Đây là bài toán khó nhất trong các đề thi đại học, cao đẳng những năm gần đây và cũng như các đề thi học sinh giỏi các cấp. Bài toán này có nhiều phương pháp giải quyết, nếu sử dụng phương pháp chiều biến thiên (sử dụng đạo hàm) thì học sinh phải làm được :

- **Bước 1:** Biến đổi, đánh giá (sử dụng các bất đẳng thức cơ bản) để đưa biểu thức có nhiều ẩn về biểu thức có một ẩn.
- **Bước 2:** Tìm điều kiện đầy đủ của ẩn số.
- **Bước 3:** Quay lại bài toán 1 (xét hàm số trên một tập nào đó).

Ví dụ 6: Cho hai số x, y thỏa mãn : $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$$

Ta thấy : Biểu thức P có hai ẩn x, y ta phải biến đổi P chỉ chứa một ẩn xy như sau :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \\
 &= \frac{x(x+1) + y(y+1)}{(x+1)(y+1)} \\
 &= \frac{(x+y)^2 - 2xy + 1}{xy + x + y + 1} \\
 &= \frac{2 - 2xy}{2 + xy}
 \end{aligned}$$

Vấn đề tiếp theo là ta phải tìm điều kiện của xy như thế nào ?

- vì $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$
- Ta có :

$$\begin{aligned}
 1 = x + y &\geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \\
 \Rightarrow 0 &\leq xy \leq \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(t) = \frac{2-2t}{2+t}, \quad t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$$

Ta có : $f'(t) = -\frac{6}{(2+t)^2} < 0 \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
f'(t)			-		
f(t)		1		$\frac{2}{3}$	

Vậy

$$\min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \min P = \frac{2}{3} \text{ đạt được khi } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

$$\max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f(0) = 1 \Rightarrow \max P = 1 \text{ đạt được khi } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Chú ý : Khi gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P có nhiều ẩn mà sử dụng đạo hàm học sinh thường gặp khó khăn :

- Biến đổi, đánh giá biểu thức P có nhiều ẩn về biểu thức có một ẩn.

- Tìm điều kiện đầy đủ của ẩn. (Học sinh hay mắc sai lầm và khó khăn ở công việc này)
- Xét dấu đạo hàm.

Ví dụ 7 : Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Giải :

$$\text{Ta có } (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq P \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$$

$$\Rightarrow P \geq x + y + z + \frac{9}{x + y + z}$$

$$\text{Đặt } t = x + y + z, \quad 0 < t \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = t + \frac{9}{t} \text{ với } 0 < t \leq \frac{3}{2}$$

$$f'(t) = 1 - \frac{9}{t^2} < 0 \text{ với } 0 < t \leq \frac{3}{2}$$

Bảng biến thiên :

t		0		$\frac{3}{2}$	
f'(t)			-		
f(t)				$\frac{15}{2}$	

$$\Rightarrow f(t) \geq \frac{15}{2}, \quad \forall t \in \left(0; \frac{3}{2} \right]$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{15}{2}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{15}{2} \text{ đạt được khi } \begin{cases} x + y + z = \frac{3}{2} \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 8 : Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Với x, y khác 0.

Giải:

$$\text{Đặt : } t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad |t| \geq 2$$

Khi đó :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} = (t^2 - 2)^2 - 2$$

Biểu thức P trở thành :

$$P = (t^2 - 2)^2 - 2 - (t^2 - 2) + t$$

$$= t^4 - 5t^2 + t + 4$$

Xét hàm số : $f(t) = t^4 - 5t^2 + t + 4 \quad (|t| \geq 2)$

Ta có:

$$f'(t) = 4t^3 - 10t + 1$$

$$f''(t) = 12t^2 - 10 > 0 \quad \forall |t| \geq 2$$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Khi đó :

$t \geq 2 \Rightarrow f'(t) \geq f'(2) = 13 > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$

$t \leq -2 \Rightarrow f'(t) \leq f'(-2) = -11 < 0$ suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2]$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow \min f(x) = -2$

Vậy $\min P = -2$ đạt được với $t = -2 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$

$$\Leftrightarrow x = -y \neq 0$$

Chú ý : Bài toán trên có một khó khăn đó là xét dấu $f''(x)$. Việc đi tìm điều kiện của ẩn đối với bài này không khó khăn lắm với $x, y \neq 0$. Trong các ví dụ 6, 7, 8 học sinh có thể dự đoán được kết quả của bài toán về giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất đạt được khi ẩn bằng nhau. Với các bài toán này đôi khi ta có thể sử dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất như ví dụ 7 :

$$\text{Ta có } T \geq x + y + z + \frac{9}{x + y + z} \geq x + y + z + \frac{9}{4(x + y + z)} + \frac{27}{4(x + y + z)} \geq 3 + \frac{9}{2} \geq \frac{15}{2}$$

Nhưng với những bài tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất đạt được khi các ẩn nhận những giá trị khác nhau thì phương pháp đạo hàm cực kì hiệu quả.

Ta sẽ mở rộng bài toán nếu thay đổi điều kiện của x, y như sau :

Cho x, y thỏa mãn : $1 \leq x \leq 2$ và $3 \leq y \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ

nhất :
$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Giải :

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

Với $1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{3}$

Xét hàm số : $f(u) = u + \frac{1}{u}$ với $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{2}{3}$

$$f'(u) = 1 - \frac{1}{u^2} < 0 \quad \forall u \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3} \right]$$

Bảng biến thiên :

y		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	
$f'(x)$			-	
$f(x)$		$\frac{17}{4}$	$\frac{13}{6}$	

$$\Rightarrow \frac{13}{6} \leq t \leq \frac{17}{4}$$

Bài toán trên trở thành bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$F(t) = t^5 - 5t^2 + t + 4 \quad \text{với} \quad \frac{13}{6} \leq t \leq \frac{17}{4}$$

$$F'(t) = 4t^3 - 10t + 1 = 4t(t^2 - 4) + 6t + 1 > 0 \quad \forall t \in \left[\frac{13}{6}, \frac{17}{4} \right]$$

Bảng biến thiên :

t		$\frac{13}{6}$	$\frac{17}{4}$	
$F'(t)$			+	
$F(t)$		$\frac{1083}{54}$	$\frac{4249}{16}$	

Vậy $\min F(t) = \frac{1083}{54} \Rightarrow \min P = \frac{108}{54}$ đạt được khi

$$t = \frac{13}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{17}{4} \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$\max F(t) = \frac{4249}{16} \Rightarrow \max P = \frac{4249}{16}$ đạt được khi :

$$t = \frac{17}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 9: (Đề thi đại học khối B năm 2011)

Cho hai số a, b thỏa mãn: $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Hướng dẫn:

Đặt: $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Khó khăn trong bài này: Ta phải biến đổi xuất hiện t từ giả thiết và đánh giá t dựa vào giả thiết để tìm điều kiện của t .

Ta có: $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$

$$2(a^2 + b^2) + ab = a^2b + ab^2 + 2(a + b)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 2 = a + b + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Ta có:

$$a + b + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 4}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}$$

Bài toán trở thành : Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(t) = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2)$$

$$= 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18 \quad \forall t \geq \frac{5}{2}$$

Ta có : $f'(t) = 6(2t^2 - 3t - 2) > 0 \quad \forall t \geq \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \min_{\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$$

$$\Rightarrow \min P = -\frac{23}{4} \quad \text{đạt được khi}$$

$$t = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \\ a + b = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 10 : (Đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh Thanh Hóa năm 2010_2012)

Cho các số a, b, c thỏa mãn : $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 6 \\ ab + bc + ca = -3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = a^6 + b^6 + c^6$.

Giải:

Ta có: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$

$$\Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow b + c = -a$$

$$\text{Mà } ab + bc + ca = 6 \Rightarrow a(b + c) + bc = -3$$

$$\Rightarrow bc = a^2 - 3$$

$$\text{Và } a^2 + b^2 + c^2 = 6 \Rightarrow b^2 + c^2 = 6 - a^2$$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} (b-c)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc \\ &\Leftrightarrow 6 - a^2 \geq 2(a^2 - 3) \\ &\Leftrightarrow a^2 \leq 4 \\ &\Rightarrow 0 \leq a^2 \leq 4 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= a^6 + b^6 + c^6 \\ &= a^6 + (b^2 + c^2) \left[(b^2 + c^2)^2 - 3b^2c^2 \right] \\ &= a^6 + (6 - a^2) \left[(6 - a^2)^2 - 3(a^2 - 3)^2 \right] \\ &= 3a^6 - 18a^4 + 27a^2 + 54 \end{aligned}$$

Đặt $a^2 = t$ ($0 \leq t \leq 4$)

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$f(t) = 3t^3 - 18t^2 + 27t + 54 \quad \forall t \in [0; 4]$$

Ta có:

$$f'(t) = 9t^2 - 36t + 27$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		54	66	54	66	

$\Rightarrow \max f(t) = 66 \Rightarrow \max P = 66$ đạt được khi bộ số (a; b; c) là hoán vị của các bộ số (2; 1; 1) hoặc (2; -1; -1) hoặc (-2; 1; 1) hoặc (-2; -1; -1).

Ví dụ 11: (Đại học khối A năm 2011)

Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn [1;4] và $x \geq y$; $y \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$

Hướng dẫn:

Khó khăn của bài này là biểu thức P có 3 ẩn x, y, z ta sử dụng bất đẳng thức phụ để đánh giá đưa biểu thức P về biểu thức có một ẩn. Dựa vào bất đẳng thức phụ:

Xét $a > 0, b > 0, ab \geq 1$ ta có:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \\ &= \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ do $x \geq y$ với $x, y \in [1;4] \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 4$

Suy ra $1 \leq t \leq 2$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2 + \frac{3}{t^2}} + \frac{2}{1+t} \Leftrightarrow P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t} \quad (1 \leq t \leq 2)$

Ta có: $f'(t) = \frac{6t}{(2t^2+3)^2} - \frac{2}{(1+t)^2} = \frac{-2 \cdot [t^3(4t-3) + 3t(2t-1) + 9]}{(2t^2+3)^2 \cdot (1+t)^2} < 0$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(t)$			-	
$f(t)$			$\frac{34}{33}$	

$$\Rightarrow f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{34}{33}$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{34}{33} \text{ đạt được khi: } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \\ \sqrt{x \cdot y} = 2 \\ x = y \\ x, y, z \in [1; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Chú ý: Trong ví dụ 11 thì biến đổi biểu thức P thành biểu thức có một ẩn dựa vào sử dụng bất đẳng thức phụ ta có thể làm theo cách sau đây có vẻ tự nhiên hơn, đó là sự kết hợp giữa bài toán 1 và bài toán 2 như sau:

Coi P như là một hàm số của z, xét hàm số ẩn z:

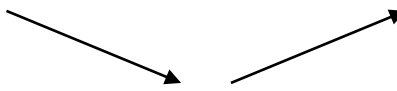
$$P = P(z) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \quad (z \in [1; x])$$

Ta có $P'(z) = -\frac{y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(z+x)^2} = \frac{(x-y)(z^2-xy)}{(y+z)^2 \cdot (z+x)^2}$

Với $x = y \Rightarrow P(z) = \frac{y}{5y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+y} = \frac{6}{5} \quad \forall z \in [1; x]$

Với $x > y \Rightarrow P'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{xy}$

Bảng biến thiên:

z	$-\infty$	1	$\sqrt{xy}$	x	$+\infty$
$P'(z)$		-	0	+	
$P(z)$					

$$\Rightarrow P(z) \geq P(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+x}$$

$$\Leftrightarrow P(z) \geq \frac{x}{2x+3y} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow P(z) \geq \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Khi đó ta quay lại ví dụ 11

4. Kết quả và ứng dụng

4.1. Tiến hành thử nghiệm

- Tiến hành dạy tiết tự chọn tiết 3: bài tập giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số.

- Để tiến hành thực nghiệm đạt kết quả tôi đã chọn 1 lớp thực nghiệm và một lớp đối chứng, tôi căn cứ vào các tiêu chí sau:

Học lực hiện tại của học sinh hai lớp

Điều kiện cơ sở vật chất là như nhau

Sĩ số của hai lớp

Trình độ giảng dạy của giáo viên

Cụ thể khi tiến hành thử nghiệm tôi đã chọn lớp 12A2 (sĩ số 38), 12A6 (sĩ số 39) dạy thực nghiệm và lớp 12A5 (sĩ số 38) không thực nghiệm làm lớp đối chứng. Việc lựa chọn các lớp trên là hoàn toàn phù hợp với tiêu chí đặt ra.

- Trong đợt thử nghiệm, tôi đã tiến hành thu thập kết quả của học sinh các lớp thử nghiệm và đối chứng trước khi tiến hành giảng dạy thử nghiệm.

- Sau khi dạy thử nghiệm kết thúc, tôi ra đề kiểm tra chung để kiểm tra kết quả học tập của các em học sinh trong các lớp nhằm mục đích: Xác định trình độ tiếp nhận kiến thức của các em sau khi được thử nghiệm, so sánh kết quả của các lớp đối chứng và thử nghiệm.

Kết quả khảo sát qua 2 bài tập như sau :

Câu 1. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:

A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.

Câu 2. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. 2. B. -23. C. -22. D. -7.

Câu 3. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. B. -40. C. $-32\sqrt{2}$. D. -45.

Câu 4. (Mã 104 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

A. $m = 5$ B. $m = 3$ C. $m = \frac{17}{4}$ D. $m = 10$

Câu 5. (Chuyên Bắc Ninh 2018) Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

A. $T = [1; 9]$. B. $T = [2\sqrt{2}; 4]$. C. $T = (1; 9)$. D. $T = [0; 2\sqrt{2}]$.

Câu 6. (Đề Tham Khảo 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0 B. 6 C. 1 D. 2

Kết quả : Khi chưa áp dụng đối với lớp 12A5 và áp dụng với lớp 12A2, 12A6, tôi được kết quả như sau:

	Số HS làm bài	Số HS đạt yêu cầu	Đạt tỷ lệ %
Lớp 12A2	38	34	89,7
Lớp 12A6	39	34	87,2
Lớp 12A5	38	26	68,4

Kết quả chưa được như mong đợi, nhưng điều đó nói lên học sinh đã làm tốt khi gặp những bài toán tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số dựa vào đạo hàm.

4.2. Kết luận chung về thử nghiệm

a. Hiệu quả của thử nghiệm

Căn cứ vào kết quả kiểm tra và theo dõi trong các tiết dạy của các lớp tôi có các nhận xét sau:

Sau thử nghiệm kết quả của các lớp thử nghiệm và đối chứng đều có sự thay đổi. Bài làm của lớp thử nghiệm phần trăm giỏi tăng lên 18%, tỉ lệ học sinh trung bình chiếm 8% không có học sinh yếu, số lượng học sinh khá và giỏi đã tăng.

Kết quả của lớp đối chứng sau thử nghiệm thì tỉ lệ học sinh giỏi tăng lên 5 em chiếm 10% tỉ lệ học sinh khá tăng lên 6% còn số lượng học sinh trung bình giảm đi. Không có điểm yếu.

Qua kết quả này cho thấy, học sinh phát huy được khả năng tiềm ẩn của mình, học sinh học tập tự tin hơn, mạnh dạn hơn, không khí lớp học sôi nổi hơn.

Tóm lại việc hướng dẫn học sinh giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số dựa vào đạo hàm cho học sinh lớp 12 THPT là hoàn toàn có khả năng góp phần nâng cao chất lượng dạy học, giúp học sinh học tập một cách chủ động, tích cực, tự chiếm lĩnh tri thức, tự xây dựng tri thức cho bản thân, phát huy được năng lực tạo được niềm tin, sự hứng thú trong quá trình học toán.

b. Hạn chế của thử nghiệm.

- Do thời gian tiến hành thử nghiệm không dài nên không thể khẳng định được hiệu quả một cách chính xác hoàn toàn.

- Việc thử nghiệm không được thí điểm với quy mô lớn, chỉ thực hiện trên bốn lớp nên các tỉ lệ trên không thể khẳng định là chính xác.

c. Khả năng vận dụng sáng kiến “Phát triển tư duy và kỹ năng của học sinh qua bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm”.

Như trong phần đặt vấn đề đã nêu, sáng kiến **“Phát triển tư duy và kỹ năng của học sinh qua bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm”**.

Với tinh thần đó, trong quá trình soạn, dạy dạng toán này tôi thực hiện theo cách phân dạng và định hướng cách giải cho từng dạng từ dễ đến khó, thông qua các ví dụ được chọn lọc. Khi tiến hành các giải pháp này tại lớp 12A2, 12A5, 12A6 tôi nhận thấy:

- Học sinh tỏ ra hứng thú hơn khi giải toán, bởi các bài tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất mà các em còn lúng túng, mơ hồ đã được trình bày một cách tường minh, dễ hiểu.

- Giờ dạy tránh được tính đơn điệu, nhàm chán theo một lối mòn lâu nay.

- Học sinh có nhiều thay đổi tích cực về phương pháp học tập và tư duy giải toán.

PHẦN III: KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

1. Kết luận

Qua thời gian thực tế giảng dạy, tôi nhận thấy khi chưa đưa chuyên đề vào giảng dạy, học sinh chỉ có thể giải quyết những bài tập ở dạng cơ bản và thường gặp lúng túng khi giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm. Sau khi học chuyên đề học sinh đã có thể làm tốt các bài tập khó, các em hứng thú và say mê hơn trong học tập. Qua khảo sát kết quả học tập của các em tăng lên rõ rệt.

2. Khuyến nghị

a) Để học sinh có kết quả cao trong học tập giáo viên cần nghiên cứu, tìm tòi, phân loại và xây dựng được các phương pháp giải toán sao cho học sinh dễ hiểu và cách giải ngắn nhất.

b) Giáo viên tăng cường kiểm tra, sửa chữa sai sót cho học sinh, đồng thời động viên các em khi các em tiến bộ.

c) Giáo viên hướng dẫn cách tự đọc sách của học sinh, động viên tìm tòi các phương pháp hay, ngắn gọn.

d) Tôi thấy chuyên đề này thực sự hiệu quả với đa số các em học sinh khối 12 trong trường, vì vậy nhà trường, tổ chuyên môn cần tạo điều kiện để chuyên đề này được triển khai ở tất cả các lớp 12 trong năm học tới.

Trên đây là một vài kinh nghiệm nhỏ trong quá trình thực hiện việc đổi mới phương pháp dạy học, đề tài không tránh khỏi những hạn chế.

Rất mong sự đóng góp quý báu của bạn bè, đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

Hà Nội ngày 23 tháng 02 năm 2024

Người viết SKKN



Đặng Thị Nhung

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa: Đại số và giải tích 12.
2. Sách bài tập: Đại số và giải tích 12.
3. Một số tài liệu tham khảo từ trang web: Violet.vn ; www.nguoi thay.vn,
www.moon.vn và www.diendantoanhoc.net .