

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG HỢP THANH

**KỸ THUẬT XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH
MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI CHÓP
VÀ KHỐI LĂNG TRỤ**

Lĩnh vực/ môn: Toán

Tác giả: **NGUYỄN THỊ HẢI**

Chức vụ: Giáo viên

Đơn vị công tác: Trường THPT Hợp Thanh

Năm học: 2023 - 2024

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

Kính gửi: Sở giáo dục đào tạo Hà Nội

Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Tên sáng kiến
Nguyễn Thị Hải	06/06/1986	THPT Hợp Thanh	Giáo viên	Đại học	Kĩ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ.

- Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: **Toán học**.
- Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử: 22/11/2023
- **Mô tả bản chất của sáng kiến:** Xuất phát từ những thuận lợi, khó khăn của học sinh, tôi đưa ra giải pháp giúp các em vừa học tập tốt, nắm chắc các kiến thức cơ bản, vừa đạt được kết quả cao trong các bài kiểm tra quan trọng và thi TNTHPT Quốc gia. Đề tài là “**Kĩ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ.**” được chia làm hai phần chính: phần 1 giúp học sinh ghi nhớ lại cá kiến thức cơ bản. Phần 2 gồm ví dụ minh họa, hướng dẫn học sinh thực hiện và sau cùng có các bài tập tương tự để học sinh áp dụng.
- **Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả:** Sau khi thực hiện đề tài học sinh nắm tốt kiến thức cơ bản, các bài tập ở mức độ nhận biết và thông hiểu 100% học sinh lớp tôi dạy thực hiện tốt, số lượng học sinh làm các bài tập mức độ vận dụng, vận dụng cao tăng lên rất nhiều.

Học sinh có ý thức học tập tốt hơn, tự tin hơn trong các bài kiểm tra và thi TNTHPT Quốc gia liên quan phần kiến thức của đề tài .

Danh sách những người đã tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu (nếu có):

Số TT	Học sinh lớp	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác (hoặc nơi thường trú)	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Nội dung công việc hỗ trợ
1	12A3					
2	12A4					

Tôi xin cam đoan mọi thông tin nêu trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Mỹ Đức, ngày 27 tháng 2 năm 2024

Người nộp đơn
(Ký và ghi rõ họ tên)



Nguyễn Thị Hải

THPT HỢP THANH
HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾNCỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

PHIẾU NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ

Họ tên tác giả:NGUYỄN THỊ HẢI.....

Tên đề tài: KỸ THUẬT XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÀN KINH MÃI CẦU NGOM
TIẾP KHỐC CHỌP KHU LĂNG TRỤ.....Lĩnh vực.....

STT	Tiêu chuẩn	Điểm SKKN
1	Sáng kiến có tính mới	
1.1	Hoàn toàn mới, được áp dụng đầu tiên	25
1.2	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ khá	
1.3	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ trung bình	
1.4	Không có tính mới hoặc sao chép từ các giải pháp đã có trước đây	
Nhận xét: Sáng kiến vừa có tính mới vừa cải tiến		
2	Sáng kiến có tính áp dụng	
2.1	Có khả năng áp dụng trong phạm vi toàn ngành hoặc rộng hơn	20
2.2	Có khả năng áp dụng trong đơn vị và có thể nhân ra một số đơn vị có cùng điều kiện	
2.3	Có khả năng áp dụng trong đơn vị	
2.4	Không có khả năng áp dụng trong đơn vị	
Nhận xét: Sáng kiến có khả năng áp dụng trong đơn vị và một số đơn vị khác		
3	Sáng kiến có tính hiệu quả	
3.1	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội, có tính lan tỏa	20
3.2	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội	
3.3	Có hiệu quả, lợi ích phù hợp với mức độ phù hợp tại đơn vị	
3.4	Không có hiệu quả cụ thể	
Nhận xét: Có hiệu quả đem lại lợi ích kinh tế		
4	Điểm trình bày	
4.1	Trình bày khoa học, hợp lý	10
4.2	Trình bày chưa khoa học, chưa hợp lý	
Nhận xét: Trình bày khoa học, hợp lý		
Tổng cộng: 80		Đánh giá: ☒ Đạt (≥ 70 điểm) ☐ Không đạt

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN CƠ SỞ



Nguyễn Khắc Thuật

MỤC LỤC

STT	NỘI DUNG	TRANG
1	PHẦN I : ĐẶT VẤN ĐỀ	1
	1. Lí do chọn đề tài	1
	2. Mục đích nghiên cứu	1
	3. Nhiệm vụ nghiên cứu	1
	4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu	2
	5. Phương pháp nghiên cứu	2
2	PHẦN II : GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ	3
	1. Cơ sở lí luận	3
	2. Ưu nhược điểm của sáng kiến	3
	3. Nội dung sáng kiến	3
	3.1. Kiến thức cơ bản	3
	3.2. Kỹ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp	5
	3.3. Kỹ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ	16
	3.4. Bài tập áp dụng	20
	4. Kết quả thực tiễn	23
	PHẦN III : KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT	25
3	1. Kết luận	
	2. Đề xuất, kiến nghị	

PHẦN I: ĐẶT VẤN ĐỀ

1. Lý do chọn đề tài

Toán học có nguồn gốc từ thực tế và là chìa khóa trong hầu hết các hoạt động của con người, có mặt ở khắp nơi. Toán học là kết quả của sự trừu tượng hóa các sự vật, hiện tượng trong thực tế trên những phương diện khác nhau và có vai trò rất quan trọng trong việc thực hiện mục tiêu chung của giáo dục phổ thông. Mặc dù là ngành khoa học có tính trừu tượng cao nhưng toán học có mối liên hệ chặt chẽ với thực tế, là công cụ hữu ích trong hoạt động sản xuất và đời sống thực tế. Mặt khác, kiến thức Toán học có thể ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau, là công cụ cho một số môn học khác trong trường phổ thông, phục vụ cho công tác nghiên cứu nhiều ngành khoa học khác.

Trong những năm gần đây, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã chỉ đạo thực hiện sự đổi mới mạnh mẽ về cách dạy và học môn Toán trong trường phổ thông, đặc biệt là đã tăng cường đưa toán thực tế nói chung và các bài toán về khối cầu nói riêng vào các đề thi môn Toán trong kỳ thi THPT Quốc gia hàng năm. Nhằm giúp học sinh trong nhà trường có thêm hứng thú học tập môn Toán nói chung, với phần kiến thức về xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện, đồng thời thông qua các bài toán tính thể tích đó thì học sinh có thể ứng dụng toán học vào thực tiễn gặp phải. Mặt khác, mong muốn giúp học sinh có thêm một tài liệu ôn thi THPT Quốc gia môn Toán, vì vậy tôi lựa chọn và thực hiện giải pháp: ***“Kỹ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ”***.

2. Mục đích nghiên cứu:

Nhằm nâng cao chất lượng giảng dạy, giúp các em học sinh có thể làm tốt một số bài toán thi THPT quốc gia, để các em yêu thích môn toán và say mê hơn với hình học toạ độ trong không gian mà không phải lựa chọn ngẫu nhiên phụ thuộc vào may rủi, giúp các em tránh được điểm liệt, tăng khả năng đậu tốt nghiệp THPT tạo niềm yêu thích trong mỗi giờ học toán, không còn cảm thấy môn học khô khan.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu:

+ Sáng kiến thực hiện với mục tiêu là xây dựng được hệ thống các kỹ năng tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ. Từ đó giúp bồi dưỡng thêm năng lực chuyên môn, trau dồi kiến thức cho giáo viên, hình thành thêm kỹ năng dạy học với nhiều phương pháp đổi mới, tích cực. Sáng kiến cũng đưa ra được những kỹ năng cần phát triển cho học sinh thông qua mỗi bài tập. Qua đây, giáo viên cùng học sinh tiếp cận với xu hướng đổi mới thi dưới hình thức trắc nghiệm.

4. Đối tượng phạm vi nghiên cứu:

Đề tài tập trung nghiên cứu các câu hỏi và bài tập trắc nghiệm, có các mức độ thông hiểu và vận dụng phù hợp với đa số học sinh lớp 12A3, 12A4 năm học 2023-2024 trường THPT Hợp Thanh.

5. Phương pháp nghiên cứu

- + Phương pháp nghiên cứu lí luận: tìm kiếm, nghiên cứu các tài liệu.
- + Phương pháp nghiên cứu thực tiễn: khảo sát, thực nghiệm, thống kê, so sánh số liệu.
- + Triển khai chuyên đề.
- + Kiểm tra, phỏng vấn thống kê đánh giá kết quả.

PHẦN II : GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

1. Cơ sở lý luận

Với sự thay đổi của kì thi THPT Quốc gia năm 2017 đến nay, các bài toán khối cầu đã được xuất hiện nhiều trong các đề thi minh họa và đề thi chính thức. Trước khi thực hiện giải pháp này, theo điều tra thì có rất nhiều em học sinh có tâm lí sợ học hình và nhất là hình học không gian trong đó có các bài tập về xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ, đặc biệt là các em ở miền núi. Đây là một dạng toán mới và khó nên đa số học sinh khi gặp bài toán này còn lúng túng không giải được. Học sinh chưa biết phối hợp một cách khéo léo giữa lí thuyết, các bài tập cơ bản để hình thành tư duy để giải quyết các bài toán khó và hơn hết các tài liệu liên quan đến các bài toán thực tế còn rất ít.

2. Ưu, nhược điểm của sáng kiến.

** Ưu điểm của sáng kiến:*

Thứ nhất, người giáo viên xây dựng được cho mình một hệ thống bài toán trắc nghiệm áp dụng vào dạy học. Thông qua đó tự bồi dưỡng và nâng cao chuyên môn nghiệp vụ của bản thân mình.

Thứ hai, người giáo viên trang bị thêm cho học sinh những kĩ năng cần thiết khi làm bài thi trắc nghiệm. Học sinh hứng thú và say mê tìm tòi, yêu thích bộ môn hơn.

Thứ ba, người giáo viên giúp học sinh phát triển năng lực tư duy logic qua đó sẽ giúp hình thành và phát triển cho học sinh các năng lực của bản thân.

** Nhược điểm của sáng kiến:*

Sáng kiến đã đem lại những kết quả đáng ghi nhận trong sự tiến bộ của học sinh. Tuy nhiên do học sinh lười học lý thuyết và tư duy hạn chế nên còn một bộ phận nhỏ học sinh còn gặp khó khăn trong việc xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ.

3. Nội dung sáng kiến.

Về cấu trúc chung, giải pháp: “**Kỹ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ**” được chia thành các phần sau:

- + Phần 1: Kiến thức cơ bản
- + Phần 2: Kỹ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ
- + Phần 3: Một số bài tập tham khảo.

3.1. Kiến thức cơ bản.

3.1.1. Các khái niệm cơ bản.

- **Trục của đa giác đáy:** là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy

- **Đường trung trực của đoạn thẳng:** là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

Chú ý: Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

- **Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng:** là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

Chú ý: Bất kì một điểm nào nằm trên mặt phẳng trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

3.1.2. Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp.

Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại tiếp O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.

Hình vuông và hình chữ nhật : O là giao điểm 2 đường chéo

Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).

Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền

Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ .

3.1.3. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- **Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:** là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.

- **Bán kính:** là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

3.1.4. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

- **Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ:** là điểm cách đều các đỉnh của hình lăng trụ (Hay nói cách khác, tâm của mặt cầu chính là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai đáy của hình lăng trụ)

- **Bán kính:** là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình lăng trụ.

Chú ý: Để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp thì hình lăng trụ đó phải là hình lăng trụ đứng và có đáy lăng trụ là một đa giác nội tiếp một đường tròn.

3.2. Kỹ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp).
 Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:

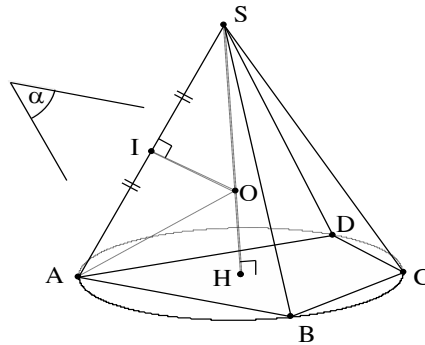
Bước 1:

- Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- Dựng Δ : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Bước 2: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.

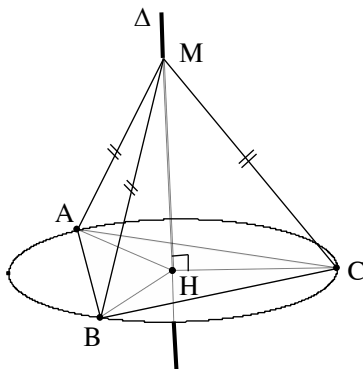
Lúc đó:

- Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$
- Bán kính: $R = SA (= SO)$. Tùy vào từng trường hợp.



Lưu ý: Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

* **Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy:** là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.



Tính chất: $\forall M \in \Delta: MA = MB = MC$

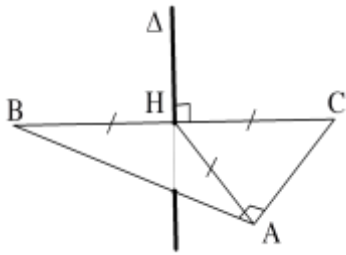
Suy ra: $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$

* **Các bước xác định trục:**

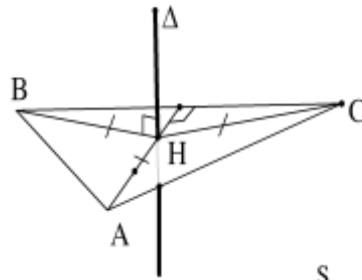
- Bước 1: Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- Bước 2: Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

VD: Một số trường hợp đặc biệt

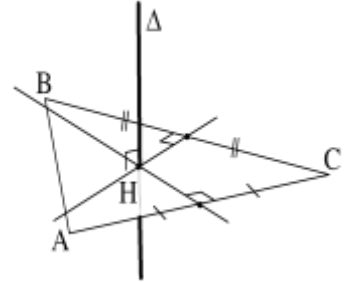
A. Tam giác vuông



B. Tam giác đều

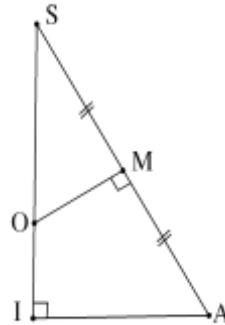


C. Tam giác bất kì



Lưu ý: Kỹ năng tam giác đồng dạng

$$\Delta SMO \sim \Delta SIA \Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SM}{SI}$$



Nhận xét quan trọng:

$$\exists M, S: \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM \text{ là}$$

trục đường

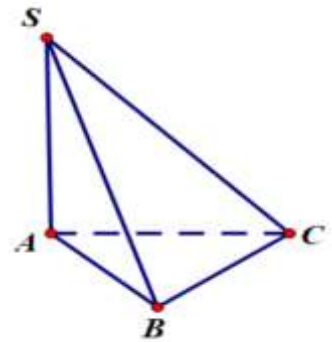
tròn ngoại tiếp ΔABC .

*** Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông.**

- Hình chóp $S.ABC$ có $SAC = SBC = 90^\circ$

+ Tâm: I là trung điểm của SC .

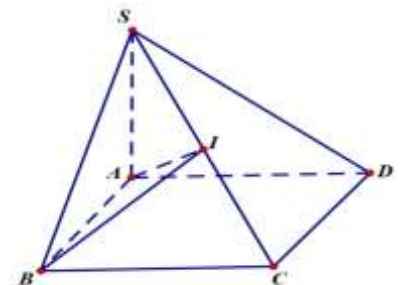
+ Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC$.



- Hình chóp $S.ABCD$ có $SAC = SBC = SDC = 90^\circ$

+ Tâm: I là trung điểm của SC .

+ Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$



*** Hình chóp đều**

- Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.

$mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.

Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính là:

$$R = IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = \dots$$

The diagram shows a tetrahedron with vertices S , A , B , and C . The base is triangle ABC . A point I is located inside the base, representing the intersection of its medians. A line d passes through I and is perpendicular to the plane of the base. A line Δ is also shown passing through I . Dashed lines connect S to I and I to the vertices A , B , and C . A point M is marked on the edge SA .

Cho hình chóp $S.ABC\dots$ có cạnh bên $SA \perp (ABC\dots)$ và đáy $ABC\dots$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O . Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC\dots$ được xác định như sau:

- Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC\dots)$ tại O .

- Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA cắt SA tại M , cắt d tại I .

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = \dots$

- Tìm bán kính:

Ta có: $MIOA$ là hình chữ nhật.

$$\text{Xét } \triangle MAI \text{ vuông tại } M \text{ có: } R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}.$$

*** VÍ DỤ ÁP DỤNG:**

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy, $SA = a$, $AD = 5a$, $AB = 2a$. Điểm E thuộc cạnh BC sao cho $CE = a$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.AED$.

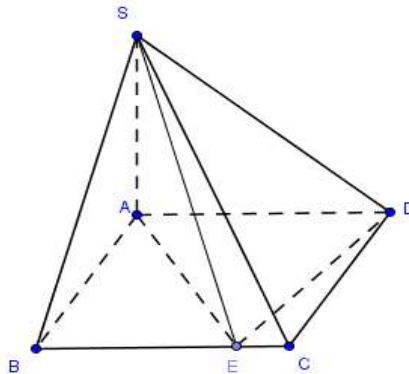
A. $a\sqrt{26}$

B. $\frac{a\sqrt{26}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{26}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{62}}{2}$

Hướng dẫn giải:



Ta có

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = 4a^2 + (4a)^2 = 20a^2$$

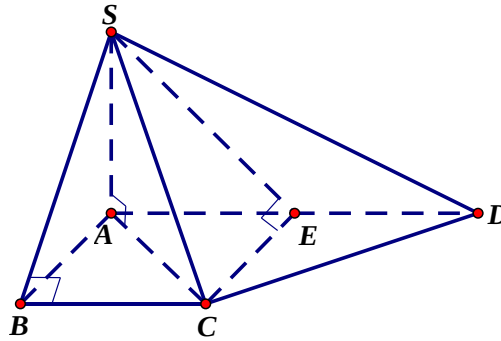
$$DE^2 = DC^2 + CE^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2.$$

Do đó $AE^2 + DE^2 = AD^2 = 25a^2 \Rightarrow \triangle AED$ vuông ở E

Suy ra $ED \perp (SAE) \Rightarrow ED \perp SE$. Vậy A và E đều nhìn SD dưới một góc vuông. Do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SAED$ có bán kính là:

$$R = \frac{SD}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{26}}{2}. \quad \text{Vậy } R = \frac{a\sqrt{26}}{2}$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, B . Biết $SA \perp (ABCD)$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C, E .

A. a **B.** $2a$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$ **Hướng dẫn giải:**

* Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \angle SAC = 90^\circ$.

* Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \angle SBC = 90^\circ$.

* Do $CE \parallel AB \Rightarrow CE \perp (SAD) \Rightarrow CE \perp SE \Rightarrow \angle SEC = 90^\circ$.

Suy ra các điểm A, B, E cùng nhìn đoạn SC dưới một góc vuông nên mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C, E là mặt cầu đường kính SC .

Bán kính mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C, E là: $R = \frac{SC}{2}$.

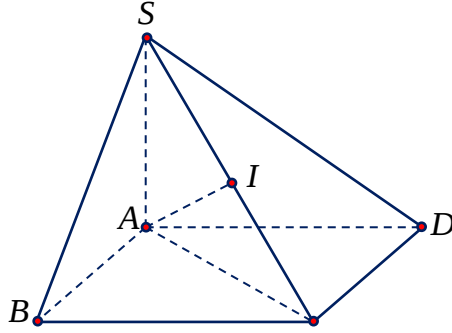
Xét tam giác SAC vuông tại A ta có: $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$
 $\Rightarrow SC = AC\sqrt{2} = 2a$

$$\Rightarrow R = \frac{SC}{2} = a.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với độ dài đường chéo bằng $\sqrt{2}a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $a\sqrt{6}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $2a\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải:



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AC$ hay $\triangle SAC$ vuông tại A và $SA \perp BC$, $SA \perp CD$.

+ $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$ hay $\triangle SBC$ vuông tại B ;

+ $CD \perp AD$ nên $CD \perp SD$ hay $\triangle SCD$ vuông tại D ;

Khi đó $\triangle SAC$, $\triangle SBC$, $\triangle SCD$ cùng nhìn cạnh huyền SC dưới một góc vuông nên các đỉnh S, A, B, C, D cùng nằm trên mặt cầu đường kính SC .

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

$$R = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 2a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABC = ADC = 90^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, góc tạo bởi SC và đáy $ABCD$ bằng 60° , $CD = a$ và tam giác ADC có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

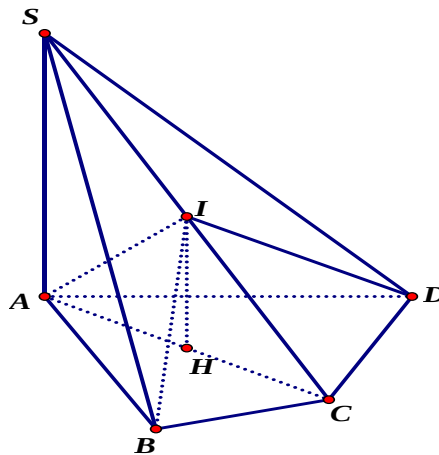
A. $4\pi a^2$

B. $16\pi a$

C. $16\pi a^2$

D. $16\pi a^3$

Hướng dẫn giải:



Giả thiết: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$.

Do đó: $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = SCA = 60^\circ$

Xét tam giác ADC vuông tại D , ta có

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = a\sqrt{3}$$

$$\text{Khi đó: } AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$$

$$\triangle SAC \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } \tan SAC = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$$

Gọi I là trung điểm SC ⁽¹⁾, H là trung điểm AC .

Khi đó: $IH // SA \Rightarrow IH \perp (ABCD)$.

Tứ giác $ABCD$ có $D = B = 90^\circ$, H là trung điểm AC nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Suy ra $IA = IB = IC = ID$ ⁽²⁾.

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{Bán kính mặt cầu: } R = \frac{1}{2} SC = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 12a^2} = 2a$$

$$\text{Diện tích mặt cầu: } S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2.$$

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . $SA = 5$, $AB = 3$, $BC = 4$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

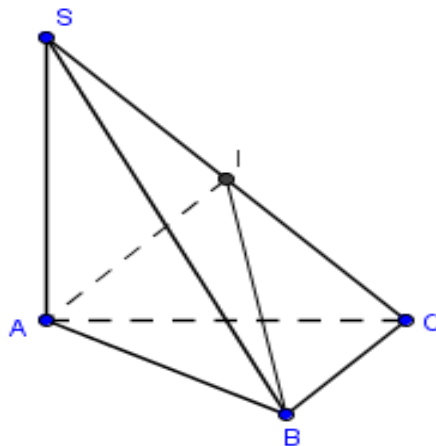
A. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

C. $5\sqrt{2}$

D. $5\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:



Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Vậy hai điểm A, B cùng nhìn cạnh SC dưới một góc vuông. Điều đó chứng tỏ SC là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Do đó bán kính

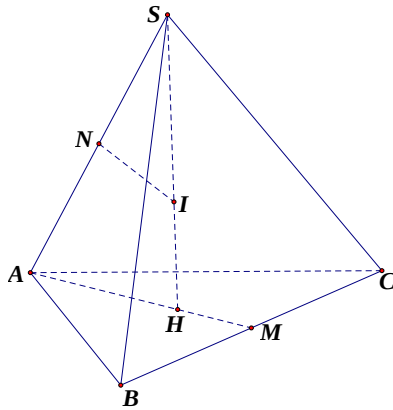
$$R = \frac{SC}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 6: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mỗi cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $a\sqrt{15}$ B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{a\sqrt{15}}{2}$

Hướng dẫn giải:



Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC , khi đó $SH \perp (ABC)$ và là trục đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.

Gọi N là trung điểm SA , mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại I . Khi đó $IS = IA = IB = IC$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bán kính mặt cầu là

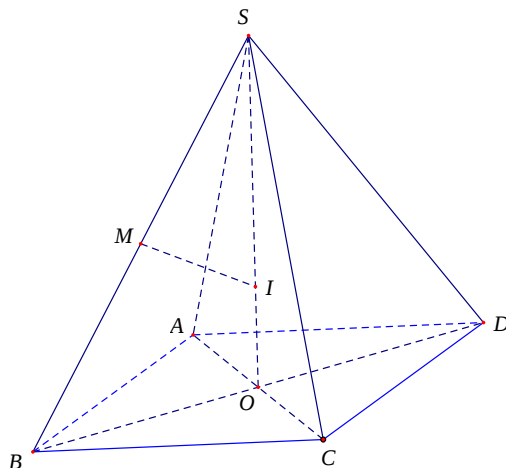
$$R = SI = \frac{SN \cdot SA}{SH} = \frac{\frac{1}{2} SA^2}{\sqrt{SA^2 - AH^2}} = \frac{1}{2} \frac{(a\sqrt{2})^2}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $R = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 60° . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Tính thể tích V của khối cầu (S) .

- A. $8a\pi\sqrt{6}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{8a^3\pi\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$

Hướng dẫn giải:



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ hay SO là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy.

Trong mặt phẳng (SBO) kẻ đường trung trực Δ của cạnh SB và gọi $I = \Delta \cap SO$ khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Theo giả thiết ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều và góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy bằng 60° nên $SBO = 60^\circ$.

Ta có: $\Delta SMI \sim SOB$ nên $\frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SB} \Leftrightarrow SI = \frac{SM.SB}{SO}$

$$\text{Vör } SO = OB \cdot \tan 60^\circ \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$SB = OB \cdot \cos 60^\circ = a\sqrt{2}; SM = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vây } SI = \frac{SM.SB}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

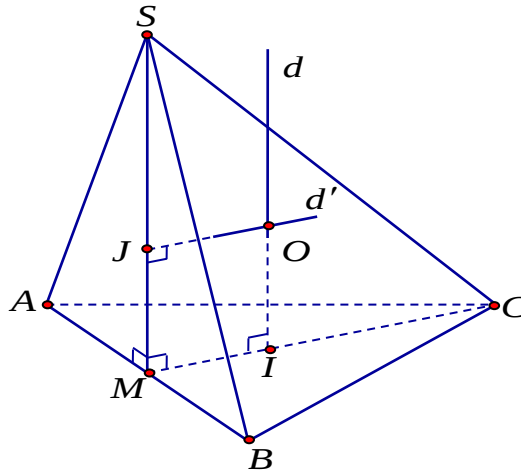
Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{2} \right)^3 = \frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$$

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $5\pi\sqrt{15}$ B. $\frac{5\pi\sqrt{15}}{54}$ C. $\frac{5\pi\sqrt{15}}{27}$ D. $2\pi\sqrt{15}$

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của AB . Vì $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SM \perp (ABC)$. Gọi I là trọng tâm $\triangle ABC$. Vì $\triangle ABC$ đều nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Dựng đường thẳng d đi qua I và vuông góc với $mp(ABC)$.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$. Dựng đường thẳng d' đi qua J và vuông góc với $mp(SAB)$.

Gọi $O = d \cap d'$. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ với $r = OC$.

Do $\triangle SAB$ và $\triangle ABC$ là những tam giác đều cạnh bằng 1 nên ta có:

$$JM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad IC = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Xét } \triangle OIC \text{ vuông tại } I \text{ ta có: } OC = \sqrt{IC^2 + IO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho là:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \frac{5\pi\sqrt{15}}{54}$$

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB=3, AD=2$, . Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

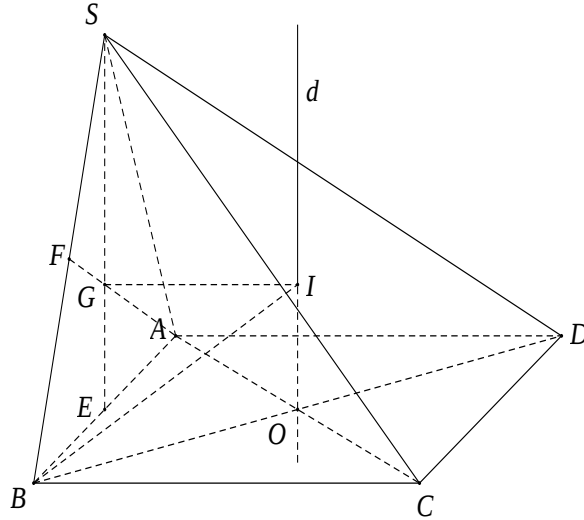
A. 64π

B. $\frac{8\pi}{3}$

C. $\frac{32\pi}{3}$

D. 16π

Hướng dẫn giải:



Gọi E là trung điểm AB

Dễ thấy $SE \perp (ABCD)$.

Dựng trục d qua O và song song với SE .

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đường thẳng đi qua G vuông góc với mặt phẳng (ABC) cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$$\text{Ta có } SE = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SG = \frac{2}{3}SE = \sqrt{3}.$$

$$GI = EO = \frac{1}{2}AD = 1.$$

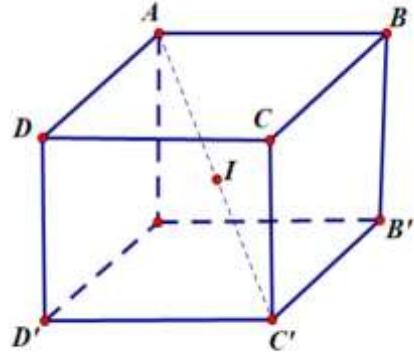
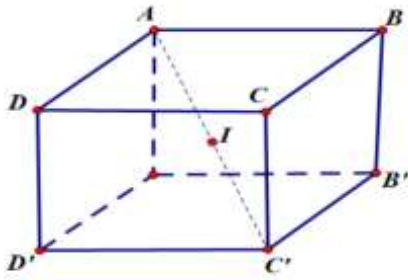
$$R = SI = \sqrt{SG^2 + GI^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Suy ra thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3}.$$

3.3. Kỹ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

* Hình hộp chữ nhật, hình lập phương.



+ **Tâm**: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$\Rightarrow$ Tâm là I , là trung điểm của AC' .

+ **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$$\Rightarrow \text{Bán kính: } R = \frac{AC'}{2}.$$

* **Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn.**

Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A'_1A'_2A'_3...A'_n$ trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ nội tiếp đường tròn (O) và (O') . Khi đó, để xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ ta làm như sau:

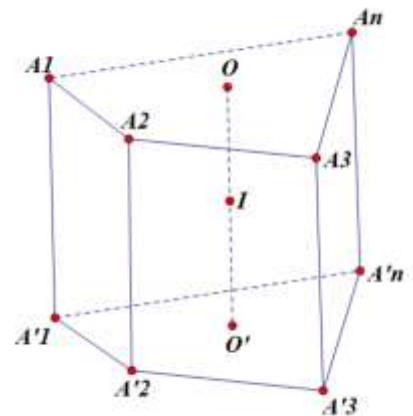
+ **Bước 1**: Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy của lăng trụ

+ **Bước 2**: Gọi I là trung điểm của OO'

$$\Rightarrow IA_1 = IA_2 = \dots = IA_n = IA'_1 = IA'_2 = \dots = IA'_n$$

Do đó, mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ có tâm I và có bán kính

$$R = IA_1 = IA_2 = \dots = IA_n = IA'_1 = IA'_2 = \dots = IA'_n$$



Ví dụ 10: Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a ?

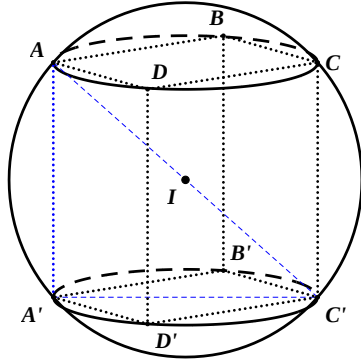
A. $\frac{\pi \cdot a^3 \sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\pi \cdot a^2 \sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\pi \cdot a^3 \sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\pi \cdot a^3 \sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải:



Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là trung điểm của đường chéo AC' và $R = IA = \frac{AC'}{2}$

Khối lập phương cạnh a nên: $AA' = a$, $A'C' = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{AC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích khối cầu cần tính là:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^3 \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi \cdot a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 11: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = AA' = 2a$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$?

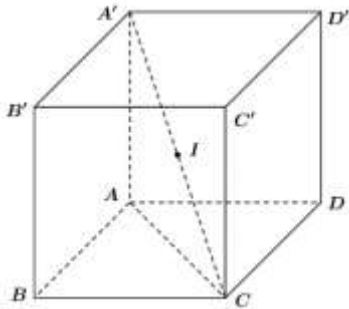
A. $9\pi a^2$

B. $9\pi a^3$

C. $\frac{9\pi \cdot a^3}{2}$

D. $\frac{9\pi \cdot a^2}{2}$

Hướng dẫn giải:



Ta có tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ cũng là trung điểm của một đường chéo $A'C$ của hình hộp.

Hình hộp chữ nhật có độ dài 3 cạnh dài, rộng, cao là: $AD = 2a$, $AB = a$, $AA' = 2a$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là:

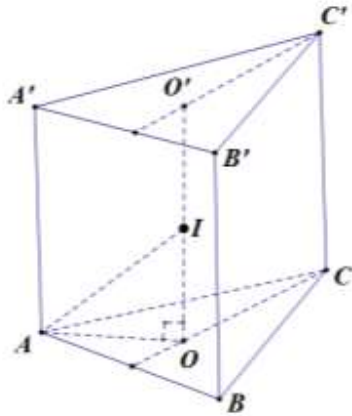
$$R = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2 + AA'^2}}{2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 9\pi a^2.$$

Ví dụ 12: Một hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó ?

- A. $2a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải:



Xét lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$ $\Rightarrow OO'$ chính là trục của các tam giác ABC và $A'B'C'$.

Gọi I là trung điểm của $OO' \Rightarrow I$ cách đều 6 đỉnh của hình lăng trụ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ, bán kính $R = IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$

Xét tam giác IAO vuông tại O có:

$$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad (\text{M là trung điểm của BC})$$

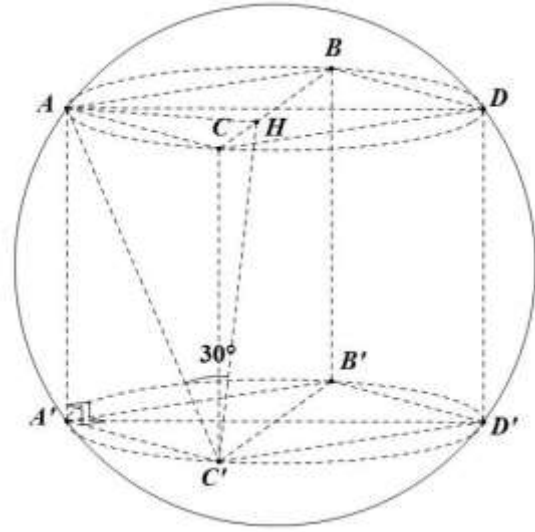
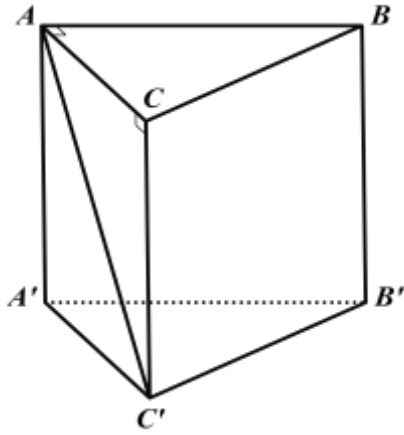
$$OI = \frac{1}{2}OO' = \frac{1}{2}AA' = a$$

$$\Rightarrow IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho?

- A. $6\pi a^2$ B. $6\pi a^3$ C. $2\pi a^2$ D. $2\pi a^3$

Hướng dẫn giải:

Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$) thì $AH \perp (BCC'B')$. Suy ra: $\angle AC'H = 30^\circ$.

$\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH nên $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$ và

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle AHC'$ vuông tại $H \Rightarrow AC' = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{3}$. Suy ra

$$AA' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = a\sqrt{2}.$$

Ta có thể xem hình lăng trụ đã cho là một phần của hình hộp chữ nhật có các kích thước lần lượt là $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$.

Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là

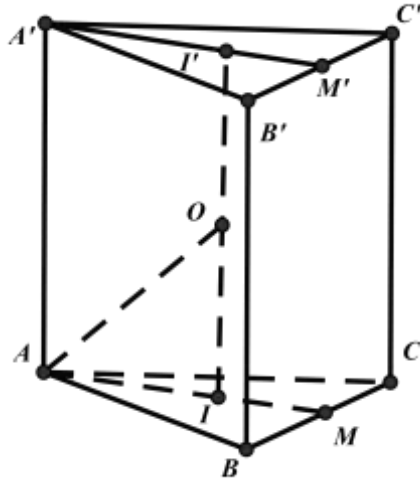
$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích mặt cầu cần tìm: $S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Ví dụ 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4, đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = 2$; $\angle BAC = 120^\circ$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ trên?

- A. 32π B. 16π C. 48π D. $\frac{32\pi}{3}$

Hướng dẫn giải:



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Khi đó, II' là trục đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, suy ra tâm mặt cầu là trung điểm O của II' .

Ta có $BM = AB \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$.

$$\frac{BC}{\sin BAC} = 2 \cdot IA \Rightarrow IA = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \sin 120^\circ} = 2; \quad OI = 2 \Rightarrow OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = 2\sqrt{2}.$$

Bán kính mặt cầu $R = OA = 2\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi (2\sqrt{2})^2 = 32\pi$.

3.4. Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ theo a .

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Biết $SA = AB = a$, $AD = 2a, SA \perp (ABCD)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bài 3: Cho khối tứ diện $OABC$ với OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 6$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Bài 4: Tính theo a bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$, biết các cạnh đáy có độ dài bằng a , cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$.

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

Bài 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $2a$ và cạnh bên $a\sqrt{6}$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bài 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

Bài 8: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bài 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a, AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

Bài 10 : Một hình lập phương có diện tích mặt chéo bằng $a^2\sqrt{2}$. Gọi V là thể tích khối cầu và S là diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương nói trên. Tính $S.V$?

Bài 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 2a\sqrt{3}$. Đường chéo BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc bằng 60° . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho. Tính bán kính của mặt cầu (S) ?

Bài 12: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng (ABC') tạo với mặt đáy góc 60° và G là trọng tâm tam giác ABC . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$.

* MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

Bài 13: Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

Bài 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên của hình chóp bằng $\sqrt{6} \text{ cm}$, $AB = 4 \text{ cm}$. Khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất, tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

Bài 15: Cho mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$. Khối tứ diện $ABCD$ có tất cả các đỉnh thay đổi và cùng thuộc mặt cầu (S) sao cho tam giác ABC vuông cân

tại B và $DA = DB = DC$. Biết thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ là $\frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), tính $a + b$.

Bài 16: Trên mặt phẳng (P) cho góc $xOy = 60^\circ$. Đoạn $SO = a$ và vuông góc với mặt phẳng (α) . Các điểm $M; N$ chuyển động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có: $OM + ON = a$. Tính diện tích của mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất ngoại tiếp tứ diện $SOMN$.

Bài 17: Một vật thể đựng đầy nước hình lập phương không có nắp. Khi thả một khối cầu kim loại đặc vào trong hình lập phương thì thấy khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương đó. Tính bán kính của khối cầu, biết thể tích nước còn lại trong hình lập phương là 10. Giả sử các mặt của hình lập phương có độ dày không đáng kể

Bài 18: Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a, OB = b, OC = c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a \geq b, a \geq c$. Tính giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{r}$?

Bài 19: Cho hình chóp tứ giác đều chiều cao là h nội tiếp trong một mặt cầu bán kính R . Tìm h theo R để thể tích khối chóp là lớn nhất.

Bài 20: Cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) đồng tâm O , có bán kính lần lượt là $R_1 = 2$ và $R_2 = \sqrt{10}$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1) và hai đỉnh C, D nằm trên (S_2) . Tính thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$?

4. Kết quả thực tiễn.

Tôi đã thực hiện sáng kiến với các lớp 12A3, 12A4 THPT Hợp Thanh trong học kì 1 năm học 2023 – 2024. Sau khi dạy, tôi tiến hành kiểm tra 1 tiết bằng hình thức trắc nghiệm khách quan với các dạng toán như trên thu được kết quả như sau:

Kết quả	Lớp đối chứng (12a4)	Lớp thực nghiệm (12a3)
Thái độ	Ngại học hình không gian	Chịu khó hơn
Nhận thức	Khó khăn việc vẽ hình Nhiều bài không vẽ được	Hiểu rõ hơn về việc vẽ hình Hình vẽ rõ ràng hơn, trực quan hơn.
Kỹ năng	Nhiều học sinh không vẽ được hình, không khai thác được giả thiết bài toán, không tìm ra được hướng giải.	Vẽ hình thạo hơn, nhanh hơn, làm được các bài toán cơ bản. Một số học sinh khá giỏi làm được bài tập vận dụng.

Hiệu quả của biện pháp được thống kê, phân tích qua so sánh kết quả giữa lớp thực nghiệm và lớp đối chứng cùng làm đề kiểm tra khảo sát sau khi học xong chủ đề thể tích khối đa diện.

Bảng: Kết quả so sánh giữa lớp thực nghiệm và lớp đối chứng

Lớp	Tổng số	Các loại điểm											
		2 - 3,5		4 - 4,5		5 - 6,5		7 - 7,5		8 - 10		>= 5,0	
		SL	%	SL	%	S L	%	S L	%	S L	%	S L	%
Lớp đối chứng1 2A3 (1)	38	9	23,7	14	36,8	11	28,9	4	10,6	0	0	15	39,5
Lớp thực nghiệm 12A5 (2)	39	1	2,6	10	25,6	16	41	9	23,1	3	7,7	28	71,8

Như vậy, thông qua kết quả thực nghiệm có thể khẳng định việc thiết kế và sử dụng sáng kiến này vào dạy học mang lại kết quả cao hơn.

Có thể áp dụng sáng kiến đối với tất cả các khối lớp của môn toán cũng như các môn học khác và áp dụng cho các đối tượng học sinh khác nhau ở các trường THPT trên cả nước.

Áp dụng sáng kiến này cần đảm bảo một số điều kiện sau :

+ Giáo viên phải hiểu rõ về đổi mới phương pháp dạy học, các kiến thức cơ bản làm nền tảng để có thể xác định được tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ.

+ Giáo viên phải trang bị cho mình một hệ thống bài tập đảm bảo phân loại được đối tượng học sinh và tạo hứng thú cho học sinh.

+ Có sự phối hợp của giáo viên trong nhóm bộ môn và các đồng nghiệp.

+ Thử nghiệm và đánh giá hiệu quả của sáng kiến khi áp dụng vào giảng dạy của nhà trường.

PHẦN III: KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT

1. Kết luận

Sau khi thực hiện giải pháp: “*Kỹ thuật xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và khối lăng trụ*” học sinh đã tự tin hơn khi làm bài toán khối cầu, các em có thể tự tin hơn khi gặp bài toán dạng này. Tuy nhiên, người thầy phải thường xuyên học hỏi trau dồi chuyên môn để có thể giúp các em thấy được ứng dụng của các bài toán vào thực tế của đời sống và các em cảm thấy yêu thích bộ môn toán hơn.

Do kinh nghiệm còn thiếu, thời gian nghiên cứu và ứng dụng chưa dài nên giải pháp của tôi không tránh khỏi còn nhiều hạn chế. Rất mong được sự đóng góp của các đồng nghiệp để giải pháp của tôi được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

2. Đề xuất, kiến nghị

Qua quá trình tiến hành nghiên cứu và thực nghiệm sư phạm tôi xin có một số đề xuất sau:

+ Tạo điều kiện về cơ sở vật chất, thiết bị thực hành, điều kiện kinh tế để đi thực tế... giúp cho học sinh tiếp cận và tiếp xúc với nội dung thực tiễn của bài học.

+ Giao lưu chuyên môn giữa các đơn vị, giữa các giáo viên cốt cán có nhiều kinh nghiệm, chia sẻ và dự giờ trao đổi kinh nghiệm.

+ Tổ chức những chuyên đề dạy học mẫu đặc biệt những chuyên đề ngoại khóa, trải nghiệm thực tiễn gắn với kiến thức đang học vào áp dụng trong giải quyết các vấn đề trọng cuộc sống.

Hà Nội ngày 27 tháng 2 năm 2024

Người viết SKKN



Nguyễn Thị Hải

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Hồng Đức và các tác giả , *Bài giảng trọng tâm chương trình chuẩn Toán 12*, NXB đại học quốc gia Hà Nội.
2. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên), Vũ Tuấn (chủ biên) cùng các tác giả, *Sách giáo khoa đại số và giải tích 12* – NXB giáo dục.
3. Các đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng môn Toán và tham khảo tại liệu trên mạng.