



LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HẪN

CS 2: Trung Tâm 133 Xuân 68

CS 3: Trung tâm 168 Mai Thúc Loan

CS4: Trung Tâm THPT Nguyễn Trường Tộ

BÀI TẬP TOÁN 11 CÁNH DIỀU

BẢN ĐỀ BÀI



TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

CHƯƠNG 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1: GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. GÓC LƯỢNG GIÁC

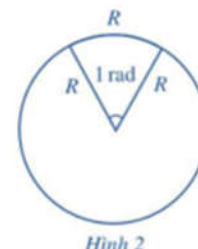
1) Góc hình học và số đo của chúng

Góc (còn được gọi là góc hình học) là hình gồm hai tia chung gốc. Mỗi góc có một số đo, đơn vị đo góc (hình học) là độ. Cụ thể như sau: Nếu ta chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn mỗi cung đó là 1° .

Số đo của một góc (hình học) không vượt quá 180° .

Một đơn vị khác được sử dụng nhiều khi đo góc là radian (đọc là ra-đi-an). Nếu trên đường tròn, ta lấy một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì góc ở tâm chắn cung đó gọi là góc có số đo 1 radian , gọi tắt là góc 1 radian (Hình 2).

1 radian còn viết tắt là 1 rad.



Hình 2

Nhận xét:

Ta biết góc ở tâm có số đo 180° sẽ chắn cung bằng nửa đường tròn (có độ dài bằng πR) nên số đo góc 180° bằng $\frac{\pi R}{R} \text{ rad} = \pi \text{ rad}$

Do đó, $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''$ và $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad}$

Chú ý: người ta thường không viết chữ radian hay rad sau số đo của góc. Chẳng hạn, $\frac{\pi}{2}$ rad cũng được viết là $\frac{\pi}{2}$

2) Góc lượng giác và số đo của chúng

a) Khái niệm

Việc quay tia Om quanh điểm O trong mặt phẳng, ta cần chọn một chiều quay gọi là *chiều dương*. Thông thường, ta chọn chiều dương là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ và chiều cùng chiều quay của kim đồng hồ gọi là *chiều âm*.

Cho hai tia Ou, Ov . Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói: Tia Om quét một góc lượng giác với tia đầu Ou và tia cuối Ov , kí hiệu là (Ou, Ov) .

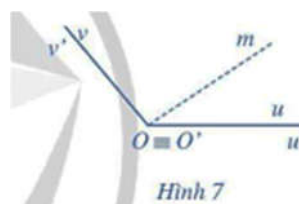
Khi tia Om quay góc α° thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α° (hay $\frac{\pi \alpha}{180} \text{ rad}$). Vì

thế, mỗi một góc lượng giác đều có một số đo, đơn vị đo góc lượng giác là độ hoặc radian. Nếu góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng α kí hiệu là $sđ(Ou, Ov) = \alpha$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha$.

Mỗi góc lượng giác gốc 0 được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của góc đó.

b) Tính chất

Nhận xét: Quan sát Hình 7 ta thấy:



Hình 7

Tia Om quay (chỉ theo chiều dương) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia On rồi quay tiếp một số vòng đến trùng với tia cuối On ;

Tia Om quay (chỉ theo chiều dương) xuất phát từ tia $O'u' \equiv Ou$ đến trùng với tia $O'v' \equiv On$ rồi quay tiếp một số vòng đến trùng với tia cuối $O'v' \equiv On$.

Sự khác biệt giữa hai góc lượng giác (Ou, On) , $(O'u', O'v')$ chính là số vòng quay quanh điểm O . Vì vậy, sự khác biệt giữa số đo của hai góc lượng giác đó chính là bội nguyên của 360° khi hai góc đó tính theo đơn vị độ (hay bội nguyên của 2π rad khi hai góc đó tính theo đơn vị radian).

Cho hai góc lượng giác (Ou, On) , $(O'u', O'v')$ có tia đầu trùng nhau ($Ou \equiv O'u'$), tia cuối trùng nhau ($On \equiv O'v'$). Khi đó, nếu sử dụng đơn vị đo là độ thì ta có:

$$(Ou, On) = (O'u', O'v') + k360^\circ \text{ với } k \text{ là số nguyên}$$

Nếu sử dụng đơn vị đo là radian thì công thức trên có thể viết như sau:

$$(Ou, On) = (O'u', O'v') + k2\pi \text{ với } k \text{ là số nguyên}$$

Người ta có thể chứng minh được định lý sau, gọi là hệ thức Chasles (Sa-lơ) về số đo của góc lượng giác:

Với ba tia tùy ý Ou, On, Ow ta có

$$(Ou, On) + (On, Ow) = (Ou, Ow) + (k2\pi) (k \in \mathbb{Z}).$$

II. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

1. Đường tròn lượng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta quy ước: Chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm. Như vậy, mặt phẳng tọa độ Oxy đã được định hướng.

Trong mặt phẳng tọa độ đã được định hướng Oxy, lấy điểm $A(1;0)$. Đường tròn tâm O , bán kính $OA=1$ được gọi là đường tròn lượng giác (hay đường tròn đơn vị) góc A .

Chú ý: Các điểm $B(0;1)$, $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$ nằm trên đường tròn lượng giác

2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

- Hoành độ x của điểm M được gọi là cosin của α , kí hiệu là $\cos \alpha$, $\cos \alpha = x$.

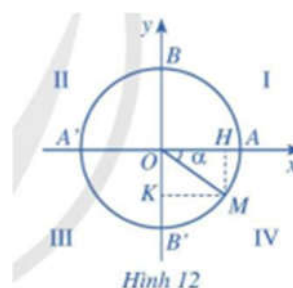
- Tung độ y của điểm M được gọi là sin của α , kí hiệu là $\sin \alpha$, $\sin \alpha = y$

- Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ được gọi là tang của α , kí hiệu là $\cot \alpha$, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

- Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ được gọi là cotang của α , kí hiệu là $\cot \alpha$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Dấu của các giá trị lượng giác của góc $\alpha = (OA, OM)$ phụ thuộc vào vị trí điểm M trên đường tròn lượng giác (Hình 12). Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau:

Góc phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ với mọi } \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} (\cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0).$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\cos \alpha \neq 0)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\sin \alpha \neq 0)$$

Bảng dưới đây nêu lên các giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

3. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Trên đường tròn lượng giác, cho hai điểm M, M' sao cho góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$, góc lượng giác $(OA, OM') = -\alpha$ (Hình 13).

Ta có các công thức sau cho hai góc đối nhau (α và $-\alpha$):

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Ta cũng có công thức sau cho:

Hai góc hơn kém nhau π (α và $\alpha + \pi$) (Hình 14):

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha.$$

Hai góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$) (Hình 15):

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

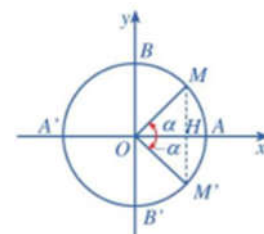
Hai góc phụ nhau $\left(\alpha \text{ và } \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (Hình 16):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

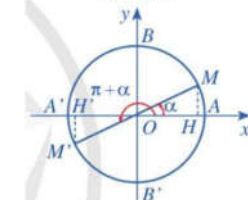
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

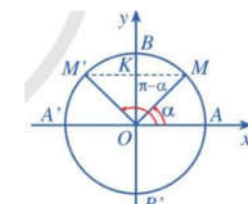
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$$



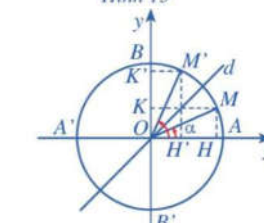
Hình 13



Hình 14



Hình 15



Hình 16

4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc lượng giác khi biết số đo của góc đó. Cụ thể như sau:

- Nếu đơn vị của góc lượng giác là độ ($^{\circ}$), trước hết, ta chuyển máy tính sang chế độ "độ".

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\sin 35^{\circ}15'33''$	$\sin 3 5 \dots 1 5 \dots 3 3 \dots =$	0.5772758359
$\tan(-205^{\circ})$	$\tan - 2 0 5 =$	-0.4663076582

- Nếu đơn vị của góc lượng giác là radian (rad), trước hết, ta chuyển máy tính sang chế độ "radian".

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$	$\cos - 9 \text{ SHIFT } \pi \div 7 =$	-0.6234898019
$\cot\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$1 \div \tan 2 \text{ SHIFT } \pi \div 5 =$	0.3249196962

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1 : Đơn vị đo độ và radian

1. Phương pháp

Dùng mối quan hệ giữa độ và radian: $180^{\circ} = \pi \text{ rad}$

- Đổi cung a có số đo từ radian sang độ $a \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi}$
- Đổi cung x° có số đo từ độ ra radian $x^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}}$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: a) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^{\circ}, 600^{\circ}, -37^{\circ}45'30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Ví dụ 2: Đổi số đo cung tròn sang số đo độ:

- a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{32\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{7}$ e) 2,3 f) 5,6

Ví dụ 3: Đổi số đo cung tròn sang số đo radian:

- a) 45° b) 150° c) 72° d) 75°

Dạng 2: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

1. Phương pháp

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo trên đường tròn lượng giác ta thực hiện như sau:

- Chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung.
- Xác định điểm cuối M của cung sao cho $\widehat{AM} = \alpha$

Lưu ý:

+ Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π là:

$$\overset{\curvearrowright}{\text{sđ } AM} = \alpha + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Ngoài ra, ta cũng có thể viết số đo bằng độ:

$$\overset{\curvearrowright}{\text{sđ } AM} = x^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

+ Nếu ta có $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha + k\frac{2\pi}{n}; k, n \in \mathbb{Z}$ thì sẽ có n điểm ngọn.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là $\frac{25\pi}{4}$

Ví dụ 2: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là -1485°

Ví dụ 3: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là

$$\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 4: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là $k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$

Dạng 3. Độ dài của một cung tròn

1. Phương pháp giải

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài là $I = R.\alpha$

2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Một đường tròn có bán kính 30 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn có số đo sau

đây: $\frac{\pi}{15}$ rad; 70°

Ví dụ 2: Một cung lượng giác trên đường tròn định hướng có độ dài bằng một nửa bán kính. Số đo theo radian của cung đó là

A. $\frac{1}{2}$ rad

B. 1 rad

C. $\frac{3}{2}$ rad

D. 2 rad

Dạng 4 : Tính giá trị của góc còn lại hoặc của một biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại số.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi$

d) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Ví dụ 2: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$

b) Cho $3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Ví dụ 3: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

Ví dụ 4: Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$

Dạng 5: Xác định giá trị của biểu thức chứa góc đặc biệt, góc liên quan đặc biệt và dấu của giá trị lượng giác của góc lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản và giá trị lượng giác của góc liên quan đặc biệt
- Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm ngọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$

b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$

d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$

Ví dụ 2: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

b) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$

d) $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha)$

Dạng 6: Chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x , đơn giản biểu thức.
1. Phương pháp giải.

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi

+ Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.

+ Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2 \sin^2 x = 1 + \sin^4 x$

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$

c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} = \tan A \cdot \cot(B+C)$$

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$

b) $B = \frac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)}$

c) $C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}$ với $\pi < x < 2\pi$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Gọi M, N, P là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của các góc lượng giác $(OA, OM), (OA, ON), (OA, OP)$ lần lượt bằng $\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}$. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.

Bài 2. Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau: $225^\circ; -225^\circ; -1035^\circ; \frac{5\pi}{3}; \frac{19\pi}{2}; -\frac{159\pi}{4}$.

Bài 3. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc sau:

a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) $k\pi (k \in \mathbb{Z});$

c) $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

d) $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 4. Tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ với $-\pi < \alpha < 0;$

c) $\tan \alpha = 3$ với $-\pi < \alpha < 0;$

d) $\cot \alpha = -2$ với $0 < \alpha < \pi.$

Bài 5. Tính:

a) $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ$ (17 số hạng).

b) $B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \dots + \cos 175^\circ$ (35 số hạng).

Bài 6. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1h; 3h; 5h.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn định hướng"?

A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.

B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.

C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.

D. Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Câu 2: Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:

A. Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.

B. Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.

C. Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.

D. Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Câu 3: Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác $\overset{b}{AB}$ xác định:

- A. Một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- B. Hai góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- C. Bốn góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- D. Vô số góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

Câu 4: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "**góc lượng giác**"?

- A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.
- B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.
- C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.
- D. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "**đường tròn lượng giác**"?

- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.
- B. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$ là một đường tròn lượng giác.
- C. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
- D. Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Câu 6: Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?

- A. Cung có độ dài bằng 1.
- B. Cung tương ứng với góc ở tâm 60° .
- C. Cung có độ dài bằng đường kính.
- D. Cung có độ dài bằng nửa đường kính.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\pi \text{ rad} = 1^\circ$.
- B. $\pi \text{ rad} = 60^\circ$.
- C. $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.
- D. $\pi \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Câu 8: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 \text{ rad} = 1^\circ$.
- B. $1 \text{ rad} = 60^\circ$.
- C. $1 \text{ rad} = 180^\circ$.
- D. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Câu 9: Nếu một cung tròn có số đo là a° thì số đo radian của nó là:

- A. $180\pi a$.
- B. $\frac{180\pi}{a}$.
- C. $\frac{a\pi}{180}$.
- D. $\frac{\pi}{180a}$.

Câu 10: Nếu một cung tròn có số đo là $3a^\circ$ thì số đo radian của nó là:

- A. $\frac{a\pi}{60}$.
- B. $\frac{a\pi}{180}$.
- C. $\frac{180}{a\pi}$.
- D. $\frac{60}{a\pi}$.

Câu 11: Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{70}{\pi}$.
- B. $\frac{7}{18}$.
- C. $\frac{7\pi}{18}$.
- D. $\frac{7}{18\pi}$.

Câu 12: Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{3\pi}{5}$.
- B. $\frac{\pi}{10}$.
- C. $\frac{3\pi}{2}$.
- D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 13: Đổi số đo của góc $45^\circ 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 0,7947.
- B. 0,7948.
- C. 0,795.
- D. 0,794.

Câu 14: Đổi số đo của góc $40^\circ 25'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần trăm.

A. 0,705.

B. 0,70.

C. 0,7054.

D. 0,71.

Câu 15: Đổi số đo của góc $-125^{\circ}45'$ sang đơn vị radian.

A. $-\frac{503\pi}{720}$.

B. $\frac{503\pi}{720}$.

C. $\frac{251\pi}{360}$.

D. $-\frac{251\pi}{360}$.

Câu 16: Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. 15° .

B. 10° .

C. 6° .

D. 5° .

Câu 17: Đổi số đo của góc $-\frac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $33^{\circ}45'$.

B. $-29^{\circ}30'$.

C. $-33^{\circ}45'$.

D. $-32^{\circ}55'$.

Câu 18: Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $-286^{\circ}44'28''$.

B. $-286^{\circ}28'44''$.

C. -286° .

D. $286^{\circ}28'44''$.

Câu 19: Đổi số đo của góc $\frac{3}{4}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $42^{\circ}97'18''$.

B. $42^{\circ}58'$.

C. $42^{\circ}97'$.

D. $42^{\circ}58'18''$.

Câu 20: Đổi số đo của góc -2 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $-114^{\circ}59'15''$.

B. $-114^{\circ}35'$.

C. $-114^{\circ}35'29''$.

D. $-114^{\circ}59'$.

Câu 21: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Số đo của cung tròn tỉ lệ với độ dài cung đó.

B. Độ dài của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.

C. Số đo của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.

D. Độ dài của cung tròn tỉ lệ nghịch với số đo của cung đó.

Câu 22: Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

A. $\ell = 3,93\text{cm}$.

B. $\ell = 2,94\text{cm}$.

C. $\ell = 3,39\text{cm}$.

D. $\ell = 1,49\text{cm}$.

Câu 23: Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 1,5 và bán kính bằng 20 cm.

A. 30cm.

B. 40cm.

C. 20cm.

D. 60cm.

Câu 24: Một đường tròn có đường kính bằng 20cm. Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 35° (lấy 2 chữ số thập phân).

A. 6,01cm.

B. 6,11cm.

C. 6,21cm.

D. 6,31cm.

Câu 25: Tính số đo cung có độ dài của cung bằng $\frac{40}{3}\text{cm}$ trên đường tròn có bán kính 20 cm.

A. 1,5 rad.

B. 0,67 rad.

C. 80° .

D. 88° .

Câu 26: Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo radian của cung tròn đó là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 27: Trên đường tròn bán kính R , cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{6}$ độ dài nửa đường tròn thì có số đo (tính bằng radian) là:

A. $\pi/2$.

B. $\pi/3$.

C. $\pi/4$.

D. $\pi/6$.

Câu 28: Một cung có độ dài 10cm, có số đo bằng radian là 2,5 thì đường tròn của cung đó có bán kính là:

A. 2,5cm.

B. 3,5cm.

C. 4cm.

D. 4,5cm.

- Câu 29:** Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu?
- A. $\frac{8}{5}\pi$. B. $\frac{5}{8}\pi$. C. $\frac{3}{5}\pi$. D. $\frac{5}{3}\pi$.
- Câu 30:** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:
- A. 30° . B. 40° . C. 50° . D. 60° .
- Câu 31:** Cho góc lượng giác $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì góc $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$?
- A. $k \in \emptyset$. B. $k = 3$. C. $k = -5$. D. $k = 5$.
- Câu 32:** Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < \alpha < 11\pi$.
- A. $k = 4$. B. $k = 5$. C. $k = 6$. D. $k = 7$.
- Câu 33:** Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo của góc lượng giác (OG, OP) là
- A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. C. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $\frac{9\pi}{10} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 34:** Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng
- A. -45° . B. 315° . C. 45° hoặc 315° . D. $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 35:** Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là:
- A. 120° . B. -240° . C. -120° hoặc 240° . D. $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 36:** Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo cung lượng giác AN bằng:
- A. 255° . B. -105° . C. -105° hoặc 255° . D. $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 37:** Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{19\pi}{6}$. Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?
- A. α và β ; γ và δ . B. β và γ ; α và δ . C. α, β, γ . D. β, γ, δ .
- Câu 38:** Các cặp góc lượng giác sau ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Hãy nêu kết quả SAI trong các kết quả sau đây:
- A. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{35\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{10}$ và $\frac{152\pi}{5}$. C. $-\frac{\pi}{3}$ và $\frac{155\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{7}$ và $\frac{281\pi}{7}$.
- Câu 39:** Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?
- A. $\frac{k2\pi}{3}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k\pi}{2}$. D. $\frac{k\pi}{3}$.

- Câu 40:** Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?
- A. $\frac{k\pi}{2}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k2\pi}{3}$. D. $\frac{k\pi}{3}$.
- Câu 41:** Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.
- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.
- Câu 42:** Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.
- A. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$. B. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha < 0$.
C. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$. D. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha > 0$.
- Câu 43:** Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là sai ?
- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.
- Câu 44:** Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là đúng ?
- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.
- Câu 45:** Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ cùng dấu?
- A. Thứ II. B. Thứ IV.
C. Thứ II hoặc IV. D. Thứ I hoặc III.
- Câu 46:** Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ trái dấu?
- A. Thứ I. B. Thứ II hoặc IV.
C. Thứ II hoặc III. D. Thứ I hoặc IV.
- Câu 47:** Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.
- A. Thứ II. B. Thứ I hoặc II.
C. Thứ II hoặc III. D. Thứ I hoặc IV.
- Câu 48:** Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$.
- A. Thứ III. B. Thứ I hoặc III. C. Thứ I hoặc II. D. Thứ III hoặc IV.
- Câu 49:** Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha > 0$. B. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$.
C. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha < 0$. D. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha > 0$.
- Câu 50:** Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$. B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$. C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$. D. $\sin(\alpha - \pi) > 0$.
- Câu 51:** Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$. B. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$. C. $\tan(\alpha + \pi) < 0$. D. $\tan(\alpha + \pi) > 0$.
- Câu 52:** Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

A. $\sin(\pi + \alpha)$. **B.** $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. **C.** $\cos(-\alpha)$. **D.** $\tan(\pi + \alpha)$.

Câu 53: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. **B.** $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$. **C.** $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0$. **D.** $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0$.

Câu 54: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của biểu thức $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$.

A. $M \geq 0$. **B.** $M > 0$. **C.** $M \leq 0$. **D.** $M < 0$.

Câu 55: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$.

A. $M \geq 0$. **B.** $M > 0$. **C.** $M \leq 0$. **D.** $M < 0$.

Câu 56: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right]$.

A. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}$.

D. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 57: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

A. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{1}{2}$.

C. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}$.

D. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 58: Tính giá trị biểu thức $P = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 8$.

Câu 59: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 8$.

Câu 60: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 3$.

Câu 61: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$.

B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

C. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$.

D. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$.

Câu 62: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 2\alpha^2 + \cos^2 2\alpha = 1$.

B. $\sin(\alpha^2) + \cos(\alpha^2) = 1$.

C. $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$.

D. $\sin^2 \alpha - \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$.

Câu 63: Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$

B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0).$

C. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0).$

D. $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 2018.$

Câu 64: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$

B. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

C. $\tan \alpha + \cot \alpha = 2.$

D. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$

Câu 65: Để $\tan x$ có nghĩa khi

A. $x = \pm \frac{\pi}{2}.$

B. $x = 0.$

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

D. $x \neq k\pi.$

Câu 66: Điều kiện trong đẳng thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ là

A. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 67: Điều kiện để biểu thức $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định là

A. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\alpha \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 68: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ.$

B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ.$

C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ.$

D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ.$

Câu 69: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan 45^\circ > \tan 46^\circ.$

B. $\cos 142^\circ > \cos 143^\circ.$

C. $\sin 90^\circ 13' < \sin 90^\circ 14'.$

D. $\cot 128^\circ > \cot 126^\circ.$

Câu 70: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$

B. $\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha.$

C. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha.$

D. $\tan(\pi + 2\alpha) = \cot(2\alpha).$

Câu 71: Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

A. $-\sin \alpha.$

B. $\cos \alpha.$

C. $\sin \alpha.$

D. $-\cos \alpha.$

Câu 72: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}.$

B. $-\frac{1}{3}.$

C. $\frac{1}{3}.$

D. $\frac{2}{3}.$

Câu 73: Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

- A.** $-\tan \alpha$. **B.** $\cot \alpha$. **C.** $\tan \alpha$. **D.** $-\cot \alpha$.

Câu 74: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

- A.** $A = \cos \alpha + \sin \alpha$. **B.** $A = 2 \sin \alpha$. **C.** $A = \sin \alpha \cos \alpha$. **D.** $A = 0$.

Câu 75: Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(\pi - x)$ ta được

- A.** $S = 0$. **B.** $S = \sin^2 x - \cos^2 x$. **C.** $S = 2 \sin x \cos x$. **D.** $S = 1$.

Câu 76: Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** $P + Q = 0$. **B.** $P + Q = -1$. **C.** $P + Q = 1$. **D.** $P + Q = 2$.

Câu 77: Biểu thức lượng giác $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$ có giá trị bằng?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 78: Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)\right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x)\right]^2$ bằng

- A.** $\frac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $\frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $\frac{2}{\sin^2 x}$. **D.** $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Câu 79: Biết rằng $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là

- A.** 1. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 80: Nếu $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(6\pi - x) = 0$ thì $\tan x$ bằng

- A.** 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** Một giá trị khác.

Câu 81: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng:

- A.** $\sin(A + C) = -\sin B$. **B.** $\cos(A + C) = -\cos B$.
C. $\tan(A + C) = \tan B$. **D.** $\cot(A + C) = \cot B$.

Câu 82: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó

- A.** $\sin C = -\sin(A + B)$. **B.** $\cos C = \cos(A + B)$.
C. $\tan C = \tan(A + B)$. **D.** $\cot C = \cot(A + B)$.

Câu 83: Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.** $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$. **B.** $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin(A+B) = \sin C$.

D. $\cos(A+B) = \cos C$.

Câu 84: A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức **sai**:

A. $\sin A = -\sin(2A+B+C)$.

B. $\sin A = -\cos \frac{3A+B+C}{2}$.

C. $\cos C = \sin \frac{A+B+3C}{2}$.

D. $\sin C = \sin(A+B+2C)$.

Câu 85: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$.

B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$.

D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Câu 86: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$.

D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 87: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Câu 88: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$.

B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$.

C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

Câu 89: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $P = \cos \alpha + \sin \alpha$.

A. $P = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

B. $P = 1 - \sqrt{5}$.

C. $P = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

D. $P = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 90: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot \alpha = -\frac{4}{5}$.

B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

C. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$.

D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Câu 91: Cho góc α thỏa $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

D. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Câu 92: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

A. $P = -3$.

B. $P = \frac{3}{7}$.

C. $P = \frac{12}{25}$.

D. $P = -\frac{12}{25}$.

Câu 93: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $P = \frac{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha + 1}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

A. $P = \frac{19+2\sqrt{2}}{9}$. **B.** $P = \frac{19-2\sqrt{2}}{9}$. **C.** $P = \frac{26-2\sqrt{2}}{9}$. **D.** $P = \frac{26+2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 94: Cho góc α thỏa mãn $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.

A. $P = 2\sqrt{2}$. **B.** $P = -2\sqrt{2}$. **C.** $P = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 95: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính $P = \sqrt{5+3\tan \alpha} + \sqrt{6-4\cot \alpha}$.

A. $P = 4$. **B.** $P = -4$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = -6$.

Câu 96: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \sqrt{\tan^2 \alpha - 2\tan \alpha + 1}$.

A. $P = -\frac{1}{3}$. **B.** $P = \frac{1}{3}$. **C.** $P = \frac{7}{3}$. **D.** $P = -\frac{7}{3}$.

Câu 97: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $P = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 98: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \alpha.$$

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 99: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos^2 \alpha}$.

A. $P = \frac{30}{11}$. **B.** $P = \frac{31}{11}$. **C.** $P = \frac{32}{11}$. **D.** $P = \frac{34}{11}$.

Câu 100: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\cos \alpha + 7\sin \alpha}$.

A. $P = -\frac{4}{9}$. **B.** $P = \frac{4}{9}$. **C.** $P = -\frac{4}{19}$. **D.** $P = \frac{4}{19}$.

Câu 101: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3\sin \alpha + 4\cos \alpha}{2\sin \alpha - 5\cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{15}{13}$. **B.** $P = \frac{15}{13}$. **C.** $P = -13$. **D.** $P = 13$.

Câu 102: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4\cos^2 \alpha}{5\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha}$.

A. $P = \frac{9}{13}$. **B.** $P = \frac{9}{65}$. **C.** $P = -\frac{9}{65}$. **D.** $P = \frac{24}{29}$.

Câu 103: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $P = \frac{2\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4\cos^2 \alpha}{5\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

- A. $P = -\frac{8}{13}$. B. $P = \frac{2}{19}$. C. $P = -\frac{2}{19}$. D. $P = -\frac{8}{19}$.

Câu 104: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 5$. Tính $P = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

- A. $P = \frac{9}{13}$. B. $P = \frac{10}{13}$. C. $P = \frac{11}{13}$. D. $P = \frac{12}{13}$.

Câu 105: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Tính $P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

- A. $P = \frac{9}{16}$. B. $P = \frac{9}{32}$. C. $P = \frac{9}{8}$. D. $P = \frac{1}{8}$.

Câu 106: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

- A. $P = \frac{91}{125}$. B. $P = \frac{49}{25}$. C. $P = \frac{7}{5}$. D. $P = \frac{1}{9}$.

Câu 107: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

- A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = -\frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 108: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

- A. $P = 2 - m$. B. $P = 2 - m^2$. C. $P = m^2 - 2$. D. $P = \sqrt{2 - m^2}$.

Câu 109: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Câu 110: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 5$. Tính $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$.

- A. $P = 100$. B. $P = 110$. C. $P = 112$. D. $P = 115$.

Câu 111: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P = 12$. B. $P = 14$. C. $P = 16$. D. $P = 18$.

Câu 112: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = -\sqrt{5}$. D. $P = \sqrt{5}$.

Câu 113: Cho góc α thỏa mãn $3\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2$ và $\sin \alpha < 0$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$. B. $\sin \alpha = -\frac{7}{13}$. C. $\sin \alpha = -\frac{9}{13}$. D. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Câu 114: Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2\cos \alpha = 1$. Tính $P = 2\tan \alpha - \cot \alpha$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = \frac{1}{4}$. C. $P = \frac{1}{6}$. D. $P = \frac{1}{8}$.

Câu 115: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

A. $M = 1$.

B. $M = 2$.

C. $M = 4$.

D. $M = 4 \sin x \cdot \cos x$.

Câu 116: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 4x$.

B. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$.

C. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.

D. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$.

Câu 117: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$.

B. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

C. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$.

D. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \cos^2 x - 1$.

Câu 118: Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$.

A. $M = 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

B. $M = 1 - 3 \sin^2 x$.

C. $M = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2x$.

D. $M = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$.

Câu 119: Rút gọn biểu thức $M = \tan^2 x - \sin^2 x$.

A. $M = \tan^2 x$.

B. $M = \sin^2 x$.

C. $M = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$.

D. $M = 1$.

Câu 120: Rút gọn biểu thức $M = \cot^2 x - \cos^2 x$.

A. $M = \cot^2 x$.

B. $M = \cos^2 x$.

C. $M = 1$.

D. $M = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$.

Câu 121: Rút gọn biểu thức $M = (1 \sin^2 x) \cot^2 x + (1 \cot^2 x)$.

A. $M = \sin^2 x$.

B. $M = \cos^2 x$.

C. $M = \sin^2 x$.

D. $M = \cos^2 x$.

Câu 122: Rút gọn biểu thức $M = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$.

A. $M = 1 + \sin^2 \alpha$.

B. $M = \sin \alpha$.

C. $M = 2 \sin \alpha$.

D. $M = 3$.

Câu 123: Rút gọn biểu thức $M = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.

A. $M = -4$.

B. $M = -2$.

C. $M = 2$.

D. $M = 4$.

Câu 124: Đơn giản biểu thức $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

A. $P = |\sin \alpha|$.

B. $P = \sin \alpha$.

C. $P = \cos \alpha$.

D. $P = |\cos \alpha|$.

Câu 125: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

A. $P = 1 + 2 \tan^2 \alpha$.

B. $P = 1 - 2 \tan^2 \alpha$.

C. $P = -1 + 2 \tan^2 \alpha$.

D. $P = -1 - 2 \tan^2 \alpha$.

Câu 126: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$.

B. $P = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$.

C. $P = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$.

D. $P = 0$.

Câu 127: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$.

A. $P = \tan^2 \alpha$.

B. $P = 1$.

C. $P = -\cos^2 \alpha$.

D. $P = \cot^2 \alpha$.

Câu 128: Đơn giản biểu thức $P = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

A. $P = \cos x + \sin x$.

B. $P = \cos x - \sin x$.

C. $P = \cos 2x - \sin 2x$.

D. $P = \cos 2x + \sin 2x$.

Câu 129: Đơn giản biểu thức $P = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$.

A. $P = 2 \tan^2 \alpha$.

B. $P = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$.

C. $P = 2 \cot^2 \alpha$.

D. $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$.

Câu 130: Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1$.

A. $P = 2$.

B. $P = 1 + \tan \alpha$.

C. $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

D. $P = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Câu 131: Đơn giản biểu thức $P = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$.

A. $P = 2$.

B. $P = 2 \cos \alpha$.

C. $P = 2 \tan \alpha$.

D. $P = 2 \sin \alpha$.

Câu 132: Đơn giản biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = \frac{1}{2}$.

D. $P = -\frac{1}{2}$.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. Ủng hộ chính chủ để được bảo hành và nhiều ưu đãi khác

Tránh mua các trang và cá nhân khác

BÀI 2: CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC**A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. CÔNG THỨC CỘNG**

- Trong trường hợp tổng quát, với các góc lượng giác a, b , ta có các công thức sau (thường được gọi chung là *công thức cộng* đối với $\sin$):

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

- Trong trường hợp tổng quát, với các góc lượng giác a, b , ta có các công thức sau (thường được gọi chung là *công thức cộng* đối với $\cos$):

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

- Trong trường hợp tổng quát, với các góc lượng giác a, b , ta có các công thức sau (thường được gọi chung là *công thức cộng* đối với $\tan$):

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

(khi các biểu thức đều có nghĩa).

II. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

- Tổng quát, ta có các công thức sau (thường gọi là công thức nhân đôi):

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad (\text{khi các}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

biểu thức đều có nghĩa)

Nhận xét

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$.
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ (thường gọi là công thức hạ bậc).

III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

Trong trường hợp tổng quát, ta có các công thức sau (thường gọi là *công thức biến đổi tích thành tổng*):

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

Trong trường hợp tổng quát, ta có các công thức sau (thường gọi là *công thức biến đổi tổng thành tích*):

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Sử dụng công thức cộng

1. Phương pháp giải.

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Biết $\sin x = \frac{1}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính giá trị lượng giác $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 2: Biết $\cos x = -\frac{12}{13}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị lượng giác $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $A = \sin(x+14^\circ)\sin(x+74^\circ) + \sin(x-76^\circ)\sin(x-16^\circ)$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a}$

Ví dụ 5: Không dùng MTCT, tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^\circ$, $\tan \frac{7\pi}{12}$.

Ví dụ 6: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin 22^\circ 30' \cos 202^\circ 30'$

b) $B = 4 \sin^4 \frac{\pi}{16} + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

Ví dụ 7: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$

b) $B = (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$

c) $C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$

d) $D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng

- $\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \left[\frac{1}{2} \sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right] = 2 \sin\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right)$

- $\sqrt{3} \sin x \pm \cos x = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \pm \frac{1}{2} \cos x \right] = 2 \sin\left(x \pm \frac{\pi}{6}\right)$

$$\bullet \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right] = \sqrt{2} \sin \left(x \pm \frac{\pi}{4} \right).$$

Ví dụ 8: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$

b) $B = \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

c) $C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$

d) $D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$

Ví dụ 9: Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$ và $\sin(\alpha + \beta)$.

Dạng 2: Sử dụng công thức nhân đôi và công thức hạ bậc

1. Phương pháp

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Không dùng máy tính. Hãy tính $\tan \frac{\pi}{8}$

Ví dụ 2: Chứng minh các biểu thức sau :

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$

Ví dụ 3: Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan 2\alpha$.

Ví dụ 4: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}$ với $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan \left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2} \right)$.

Ví dụ 5: Tính $A = \cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$

Ví dụ 6 *: Không dùng máy tính. Hãy tính $\sin 18^\circ$

Ví dụ 7: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right), \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Ví dụ 8: Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính $\cos 4\alpha$.

Ví dụ 9: Cho $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, $\tan \alpha = -2 \tan \beta$.

Tính $A = \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right)$.

Dạng 3: Công thức biến đổi tổng thành tích và tích thành tổng

1. Phương pháp giải.

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$

b) $D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng

a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

b) $\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2$ với $\sin \alpha + \sin \beta = 3 \sin(\alpha + \beta)$, $\alpha + \beta \neq k2\pi$

c) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

Ví dụ 4: Cho $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$$b) \frac{\sqrt{1+\cos \alpha} + \sqrt{1-\cos \alpha}}{\sqrt{1+\cos \alpha} - \sqrt{1-\cos \alpha}} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Ví dụ 5: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$a) A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$b) B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right)$$

Ví dụ 6: Đơn giản biểu thức sau:

$$a) A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}$$

$$b) B = \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}$$

$$c) C = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+nb) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Ví dụ 7: Cho $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M = \frac{1}{2 - \sin 2a} + \frac{1}{2 - \sin 2b}$ không phụ thuộc vào a, b .

Ví dụ 8: Chứng minh rằng

$$a) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$$

$$b) \sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3 \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right).$$

Dạng 4: bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin \alpha| \leq 1, |\cos \alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

$$a) 2 \cot^2 \alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$$

$$b) \cot \alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$$

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) \geq 2$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì

$$(2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) > (\sqrt{2 \sin \alpha} - 2)(3 - 2 \cos 2\alpha).$$

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A = \sin x + \cos x$

b) $B = \sin^4 x + \cos^4 x$

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = 2 - 2 \sin x - \cos 2x$

Dạng 5: chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.

1. Phương pháp giải

Trong tam giác ta cần lưu ý:

$$A + B + C = \pi \Rightarrow \begin{cases} A = \pi - (B + C) \\ B = \pi - (A + C) \\ C = \pi - (A + B) \end{cases}$$

$$A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

b) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

b) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$ với ABC là tam giác nhọn.

Ví dụ 4: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$

b) $\cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

c) $\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$ Với tam giác ABC không vuông.

Ví dụ 5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$b) \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\cos \frac{A}{2} \cos(B-C) + \cos A \cos \frac{B-C}{2} = 0$.

Chứng minh rằng $\cos 2B + \cos 2C \leq 1$.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho $\cos a = \frac{3}{5}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính: $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right), \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right), \tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 2. Tính:

$$A = \sin(a - 17^\circ) \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cos(a - 17^\circ);$$

$$B = \cos\left(b + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - b\right) - \sin\left(b + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - b\right)$$

Bài 3. Cho $\tan(a+b) = 3, \tan(a-b) = 2$. Tính: $\tan 2a, \tan 2b$.

Bài 4. Cho $\sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$, Tính: $\cos 2a, \cos 4a$.

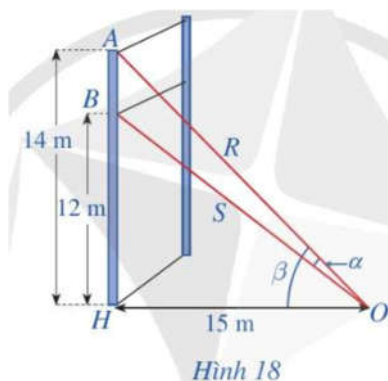
Bài 5. Cho $\sin a + \cos a = 1$. Tính: $\sin 2a$.

Bài 6. Cho $\cos 2a = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính: $\sin a, \cos a, \tan a$.

Bài 7. Cho $\cos 2x = \frac{1}{4}$. Tính: $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right); B = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Bài 8. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$.

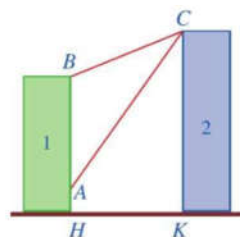
Bài 9. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình 18).



a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Bài 10. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20$ m. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 18). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32$ m, $AH = 6$ m, $BH = 24$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

- A. $M = \sqrt{3}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Câu 3: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{15\sqrt{3}}{32}$.

Câu 4: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 5: Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

Câu 7: Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{16}$.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ là

A. $\frac{1}{32}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Câu 9: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^\circ$.

B. $M = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$.

C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^\circ$.

D. $M = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$.

Câu 10: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

A. $M = 0$.

B. $M = -\frac{1}{2}$.

C. $M = 1$.

D. $M = 2$.

Câu 11: Công thức nào sau đây sai?

A. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$.

B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.

C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Câu 12: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin(2018a) = 2018 \sin a \cos a$.

B. $\sin(2018a) = 2018 \sin(1009a) \cos(1009a)$.

C. $\sin(2018a) = 2 \sin a \cos a$.

D. $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cos(1009a)$.

Câu 13: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$.

B. $\cos 6a = 1 - 2 \sin^2 3a$.

C. $\cos 6a = 1 - 6 \sin^2 a$.

D. $\cos 6a = 2 \cos^2 3a - 1$.

Câu 14: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

C. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

D. $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x$.

Câu 15: Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 16: Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. 2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 17: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\cos 3a = 3 \cos a - 4 \cos^3 a$.

B. $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$.

C. $\cos 3a = 3 \cos^3 a - 4 \cos a.$

D. $\cos 3a = 4 \cos a - 3 \cos^3 a.$

Câu 18: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$

B. $\sin 3a = 4 \sin^3 a - 3 \sin a.$

C. $\sin 3a = 3 \sin^3 a - 4 \sin a.$

D. $\sin 3a = 4 \sin a - 3 \sin^3 a.$

Câu 19: Nếu $\cos(a+b)=0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\sin(a+2b)| = |\sin a|.$

B. $|\sin(a+2b)| = |\sin b|.$

C. $|\sin(a+2b)| = |\cos a|.$

D. $|\sin(a+2b)| = |\cos b|.$

Câu 20: Nếu $\sin(a+b)=0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\cos(a+2b)| = |\sin a|.$

B. $|\cos(a+2b)| = |\sin b|.$

C. $|\cos(a+2b)| = |\cos a|.$

D. $|\cos(a+2b)| = |\cos b|.$

Câu 21: Rút gọn $M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y.$

A. $M = \cos x.$

B. $M = \sin x.$

C. $M = \sin x \cos 2y.$

D. $M = \cos x \cos 2y.$

Câu 22: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b).$

A. $M = 1 - 2 \cos^2 a.$

B. $M = 1 - 2 \sin^2 a.$

C. $M = \cos 4a.$

D. $M = \sin 4a.$

Câu 23: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) + \sin(a+b)\sin(a-b).$

A. $M = 1 - 2 \sin^2 b.$

B. $M = 1 + 2 \sin^2 b.$

C. $M = \cos 4b.$

D. $M = \sin 4b.$

Câu 24: Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$?

A. $18^\circ.$

B. $30^\circ.$

C. $36^\circ.$

D. $45^\circ.$

Câu 25: Đẳng thức nào sau đây đúng:

A. $\cot a + \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}.$

B. $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a).$

C. $\sin(a+b) = \frac{1}{2} \sin 2(a+b).$

D. $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}.$

Câu 26: Chọn công thức đúng trong các công thức sau:

A. $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)].$

B. $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}.$

C. $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan a}.$

D. $\cos 2a = \sin^2 a - \cos^2 a.$

Câu 27: Rút gọn $M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

A. $M = \sqrt{2} \sin x.$

B. $M = -\sqrt{2} \sin x.$

C. $M = \sqrt{2} \cos x.$

D. $M = -\sqrt{2} \cos x.$

Câu 28: Tam giác ABC có $\cos A = \frac{4}{5}$ và $\cos B = \frac{5}{13}$. Khi đó $\cos C$ bằng

A. $\frac{56}{65}.$

B. $-\frac{56}{65}.$

C. $\frac{16}{65}.$

D. $\frac{33}{65}.$

Câu 29: Cho A, B, C là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{5}, \tan C = \frac{1}{8}$. Tổng $A+B+C$ bằng

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{5}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Câu 30: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Khi đó $P = \sin A + \sin B + \sin C$ tương đương với:

- A. $P = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. B. $P = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.
C. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. D. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

Câu 31: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC .

Khi đó $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}$ tương đương với:

- A. $P = 1$. B. $P = -1$.
C. $P = \left(\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \right)^2$. D. Đáp án khác.

Câu 32: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì $\triangle ABC$ là tam giác có tính chất nào sau đây?

- A. Cân tại B . B. Cân tại A . C. Cân tại C . D. Vuông tại B .

Câu 33: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ thì $\triangle ABC$ là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác cân.
C. Tam giác đều. D. Tam giác vuông hoặc cân.

Câu 34: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

- A. $P = -\frac{24}{25}$. B. $P = \frac{24}{25}$. C. $P = -\frac{12}{25}$. D. $P = \frac{12}{25}$.

Câu 35: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 36: Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = -\frac{3}{5}$. B. $P = \frac{3}{5}$. C. $P = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$. D. $P = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 37: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = \frac{11}{100}$. B. $P = -\frac{11}{100}$. C. $P = \frac{7}{25}$. D. $P = \frac{10}{11}$.

Câu 38: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

A. $P = \frac{527}{625}$. **B.** $P = -\frac{527}{625}$. **C.** $P = \frac{524}{625}$. **D.** $P = -\frac{524}{625}$.

Câu 39: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. **C.** $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 40: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

A. $P = 1$. **B.** $P = \frac{17}{81}$. **C.** $P = \frac{7}{9}$. **D.** $P = \frac{9}{7}$.

Câu 41: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

A. $P = -\frac{120}{119}$. **B.** $P = -\frac{119}{120}$. **C.** $P = \frac{120}{119}$. **D.** $P = \frac{119}{120}$.

Câu 42: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$.

A. $P = 12$. **B.** $P = \frac{21}{2}$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 21$.

Câu 43: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$. **B.** $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.
C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$. **D.** $P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Câu 44: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = -\frac{1}{7}$. **B.** $P = \frac{1}{7}$. **C.** $P = -7$. **D.** $P = 7$.

Câu 45: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = \frac{\sqrt{2}}{10}$. **B.** $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$. **C.** $P = -\frac{1}{5}$. **D.** $P = \frac{1}{5}$.

Câu 46: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$.

A. $P = -\frac{39}{50}$. **B.** $P = \frac{49}{50}$. **C.** $P = -\frac{49}{50}$. **D.** $P = \frac{39}{50}$.

Câu 47: Cho góc α thỏa mãn $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2$. Tính $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = \frac{1}{2}$. **B.** $P = -\frac{1}{2}$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 4$.

Câu 48: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{11}{113}$. B. $P = \frac{13}{113}$. C. $P = \frac{15}{113}$. D. $P = \frac{17}{113}$.

Câu 49: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = 2\sqrt{19}$. B. $P = -2\sqrt{19}$. C. $P = \sqrt{19}$. D. $P = -\sqrt{19}$.

Câu 50: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = -\sqrt{5}$. C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 51: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

- A. $P = \frac{10}{9}$. B. $P = \frac{9}{10}$. C. $P = -\frac{10}{9}$. D. $P = -\frac{9}{10}$.

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{4\sqrt{6}}{25}$. B. $P = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$. C. $P = \frac{2\sqrt{6}}{25}$. D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{25}$.

Câu 53: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2\cos \alpha = -1$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{24}{25}$. B. $P = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. C. $P = -\frac{24}{25}$. D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Câu 54: Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a+b)$.

- A. $\frac{56}{65}$. B. $\frac{63}{65}$. C. $-\frac{33}{65}$. D. 0.

Câu 55: Nếu biết rằng $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của biểu thức $\cos(\alpha - \beta)$ là

- A. $\frac{16}{65}$. B. $-\frac{16}{65}$. C. $\frac{18}{65}$. D. $-\frac{18}{65}$.

Câu 56: Cho hai góc nhọn $a; b$ và biết rằng $\cos a = \frac{1}{3}$; $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Câu 57: Nếu a, b là hai góc nhọn và $\sin a = \frac{1}{3}$; $\sin b = \frac{1}{2}$ thì $\cos 2(a+b)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{7-2\sqrt{6}}{18}$. B. $\frac{7+2\sqrt{6}}{18}$. C. $\frac{7+4\sqrt{6}}{18}$. D. $\frac{7-4\sqrt{6}}{18}$.

Câu 58: Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 59: Cho x, y là các góc nhọn và dương thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Câu 60: Nếu α, β, γ là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì

- A. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. B. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.
C. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. D. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 61: Biết rằng $\tan a = \frac{1}{2}$ ($0 < a < 90^\circ$) và $\tan b = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$) thì biểu thức $\cos(2a - b)$ có giá trị bằng

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 62: Nếu $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$ ($135^\circ < a < 180^\circ$) thì giá trị của biểu thức $\tan 2a$ bằng

- A. $-\frac{20}{7}$. B. $\frac{20}{7}$. C. $\frac{24}{7}$. D. $-\frac{24}{7}$.

Câu 63: Nếu $\tan(a + b) = 7$, $\tan(a - b) = 4$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

- A. $-\frac{11}{27}$. B. $\frac{11}{27}$. C. $-\frac{13}{27}$. D. $\frac{13}{27}$.

Câu 64: Nếu $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ với $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, ($k, l \in \mathbb{Z}$) thì

- A. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha$. B. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta$.
C. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$. D. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$.

Câu 65: Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta$ thì $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $-\sqrt{3}$. C. 3. D. -3.

Câu 66: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

- A. $\frac{p}{q-1}$. B. $-\frac{p}{q-1}$. C. $\frac{2p}{1-q}$. D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Câu 67: Nếu $\tan \alpha$; $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($p, q \neq 0$). Và $\cot \alpha$; $\cot \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - rx + s = 0$ thì tích $P = rs$ bằng

- A. pq . B. $\frac{p}{q^2}$. C. $\frac{1}{pq}$. D. $\frac{q}{p^2}$.

Câu 68: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($q \neq 0$) thì giá trị biểu thức $P = \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ bằng:

- A. p . B. q . C. 1. D. $\frac{p}{q}$.

Câu 69: Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

- A. $M = \tan(x - y)$. B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.
C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$. D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Câu 70: Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

- A. $M = \sin 2\alpha$. B. $M = \cos 2\alpha$. C. $M = -\cos 2\alpha$. D. $M = -\sin 2\alpha$.

Câu 71: Chọn đẳng thức đúng.

- A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}$. B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}$.
C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$. D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}$.

Câu 72: Gọi $M = \frac{\sin(y - x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

- A. $M = \tan x - \tan y$. B. $M = \cot x - \cot y$ C. $M = \cot y - \cot x$. D.
 $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}$.

Câu 73: Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

- A. $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1)$. B. $M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x\right)$.
C. $M = \cos 2x (2 \cos x - 1)$. D. $M = \cos 2x (2 \cos x + 1)$.

Câu 74: Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}$.

- A. $\tan 2x$ B. $\sin x$. C. $2 \tan x$. D. $2 \sin x$.

Câu 75: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$.

- A. $\cos x$. B. $2 \cos x - 1$. C. $2 \cos x$. D. $\cos x - 1$.

Câu 76: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha$.

- A. 0. B. $2 \cos^2 x$. C. 2. D. $\cos 2x$.

Câu 77: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

- A.** $\sin 2\alpha$. **B.** $\cos 2\alpha$. **C.** $\tan 2\alpha$. **D.** $\cot 2\alpha$.

Câu 78: Biểu thức $A = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A.** $-\tan^4 \alpha$. **B.** $\tan^4 \alpha$. **C.** $-\cot^4 \alpha$. **D.** $\cot^4 \alpha$.

Câu 79: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng:

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Câu 80: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

- A.** $\tan \alpha$. **B.** $2 \tan \alpha$. **C.** $\tan 2\alpha + \tan \alpha$. **D.** $\tan 2\alpha$.

Câu 81: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin \alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \cos \alpha}$.

- A.** 1. **B.** $\tan \alpha$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $2 \tan \alpha$.

Câu 82: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:

- A.** $\tan \frac{x}{2}$. **B.** $\cot x$. **C.** $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$. **D.** $\sin x$.

Câu 83: Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.

- A.** $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. **B.** $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$. **C.** $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$. **D.** $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Câu 84: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 3 \sin x - 2$.

- A.** $M = 1, m = -5$. **B.** $M = 3, m = 1$.
C. $M = 2, m = -2$. **D.** $M = 0, m = -2$.

Câu 85: Cho biểu thức $P = -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $P \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $P \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$. **C.** $P \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $P \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 86: Biểu thức $P = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 87: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

- A.** $M = 3, m = 0$. **B.** $M = 2, m = 0$. **C.** $M = 2, m = 1$. **D.** $M = 3, m = 1$.

Câu 88: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$.
Tính $T = 2M - m^2$.

- A.** $T = 1$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 112$. **D.** $T = 130$.

Câu 89: Cho biểu thức $P = \cos^4 x + \sin^4 x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $P \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

C. $P \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

D. $P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 90: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^4 x - \cos^4 x$.

A. $M = 2, m = -2$.

B. $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$.

C. $M = 1, m = -1$.

D. $M = 1, m = \frac{1}{2}$.

Câu 91: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 1 - 2|\cos 3x|$.

A. $M = 3, m = -1$.

B. $M = 1, m = -1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Câu 92: Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{2} - 1$.

C. $M = \sqrt{2} + 1$.

D. $M = \sqrt{2} + 2$.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. Ủng hộ chính chủ để được bảo hành và nhiều ưu đãi khác

Tránh mua các trang và cá nhân khác

BÀI 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D .

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý

-Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

-Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

2. Hàm số tuần hoàn

-Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D . Hàm số $y = f(x)$ được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$, ta có:

- $x + T \in D$ và $x - T \in D$
- $f(x + T) = f(x)$

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn (nếu có) các tính chất trên được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn đó.

Nhận xét

Cho hàm số tuần hoàn chu kỳ T . Từ đồ thị hàm số đó trên đoạn $[a; a + T]$, ta dịch chuyển song song với trục hoành sang phải (hoặc sang trái) theo đoạn có độ dài T thì được đồ thị hàm số trên đoạn $[a + T; a + 2T]$ (hoặc $[a - T; a]$).

II. HÀM SỐ $y = \sin x$

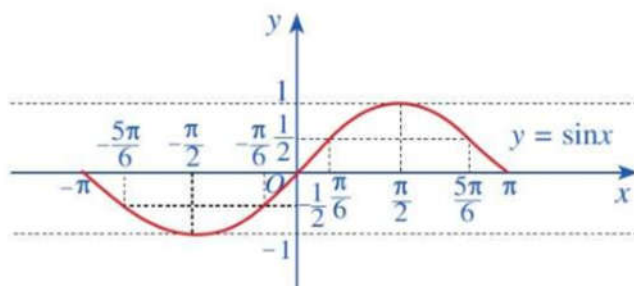
1. Định nghĩa

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực $\sin x$ được gọi là hàm số $y = \sin x$. Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ là $\mathbb{R}$.

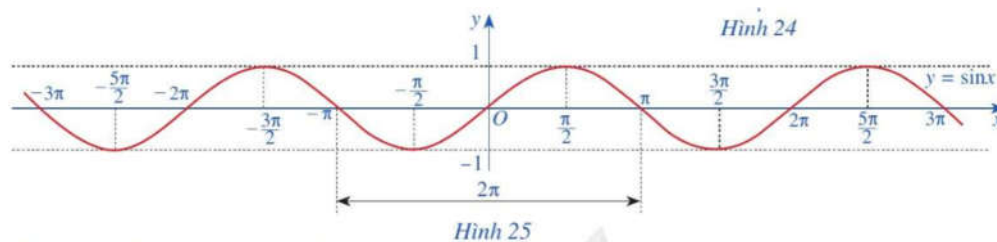
2. Đồ thị hàm số $y = \sin x$

-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các điểm $(x; \sin x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ (Hình 24).



Hình 24

-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các điểm $(x; \sin x)$ với $x \in [-3\pi; -\pi], [\pi; 3\pi], \dots$, ta có đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ được biểu diễn ở Hình 25.



3. Tính chất của hàm số $y = \sin x$

Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$ và có tính chất sau:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O ;
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn chu kỳ 2π ;
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (Hình 25), ta thấy $\sin x = 0$ tại những giá trị $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vì vậy, tập hợp các số thực x sao cho $\sin x \neq 0$ là $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

III. HÀM SỐ $y = \cos x$

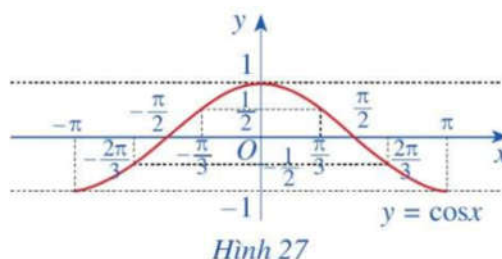
1. Định nghĩa

-Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

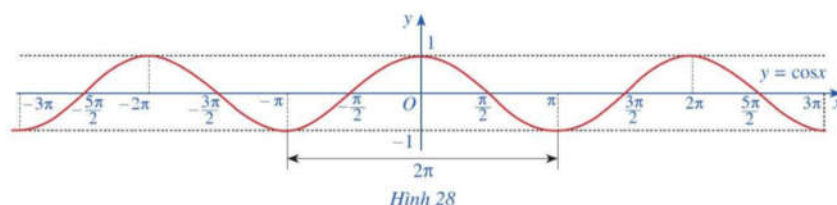
Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực $\cos x$ được gọi là hàm số $y = \cos x$. Tập xác định của hàm số $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.

2. Đồ thị hàm số $y = \cos x$

-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các điểm $(x; \cos x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ (Hình 27).



-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các điểm $(x; \cos x)$ với $x \in [-3\pi; -\pi], [\pi; 3\pi], \dots$, ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$ được biểu diễn ở Hình 28



3. Tính chất của hàm số $y = \cos x$

Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$ và có tính chất sau:

- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung;
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn chu kì 2π ;
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét:

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$ (Hình 28), ta thấy $\cos x = 0$ tại những giá trị $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vì vậy, tập hợp các số thực x sao cho $\cos x \neq 0$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

IV. HÀM SỐ $y = \tan x$

1. Định nghĩa

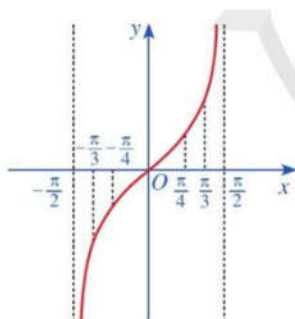
Ta có định nghĩa sau:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in D$ với một số thực $\tan x$ được gọi là hàm số $y = \tan x$. Tập

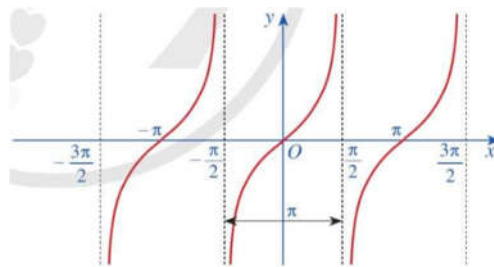
xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Đồ thị hàm số $y = \tan x$

-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các điểm $(x; \tan x)$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ (Hình 29).



-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các điểm $(x; \tan x)$ với $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right], \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right], \dots$, ta có đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R}$ được biểu diễn ở Hình 30



Hình 30

3. Tính chất của hàm số $y = \tan x$

Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có tính chất sau:

- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O ;
- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn chu kỳ π ;
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

V. HÀM SỐ $y = \cot x$

1. Định nghĩa

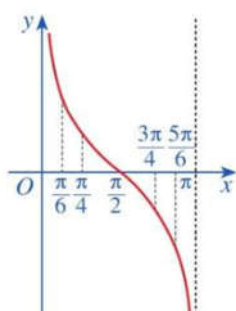
Ta có định nghĩa sau:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in E$ với một số thực $\cot x$ được gọi là hàm số $y = \cot x$. Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

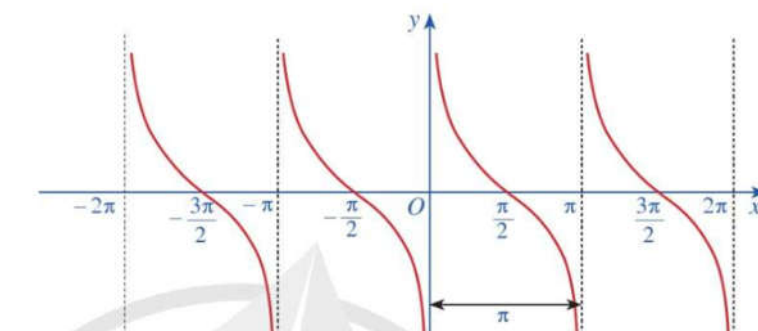
2. Đồ thị hàm số $y = \cot x$

-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các điểm $(x; \cot x)$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (Hình 31).

-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các điểm $(x; \cot x)$ với các khoảng $(\pi; 2\pi), (-\pi; 0), (-2\pi; -\pi), \dots$ ta được đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên E như (Hình 32).



Hình 31



Hình 32

3. Tính chất của hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có tính chất sau:

- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O ;
- Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn chu kỳ π ;

- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP LỜI GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

Để tìm tập xác định của hàm số ta cần lưu ý các điểm sau

- $y = \sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \geq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x) \neq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x) > 0$.
- Hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và tập giá trị của nó là: $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Như vậy, $y = \sin[u(x)]$, $y = \cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

- $y = \tan u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $y = \cot u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$; b) $y = \cos\sqrt{4 - x^2}$; c) $y = \sqrt{\sin x}$; d) $y = \sqrt{2 - \sin x}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; b) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; c) $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$; d) $y = \frac{1}{\tan x - 1}$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cos 2x + \frac{1}{\cos x}$; b) $y = \frac{3 \cos 2x}{\sin 3x \cos 3x}$.

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R}$: $y = \sqrt{2m - 3 \cos x}$.

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

1. Phương pháp:

Giả sử ta cần xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$

- Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số; kiểm chứng D là tập đối xứng qua số 0 tức là $\forall x, x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1)
- Bước 2: Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$

- Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn trên D (2)
- Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ trên D (3)

Chú ý:

- Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ trên D ;
- Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng, thì $f(x)$ là hàm không chẵn và cũng không lẻ trên D .

Lúc đó, để kết luận $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao cho

$$\begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$$

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x$; b) $y = \tan |x|$; c) $y = \sin^4 x$.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \tan x + \cot x$; b) $y = \sin x \cdot \cos x$.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin x + 3$; b) $y = \sin x + \cos x$.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$; b) $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$.

Ví dụ 5. Xác định tham số m để hàm số sau: $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1. Phương pháp:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad M = \max_D f(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \\ \blacksquare \quad m = \min_D f(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases} \end{aligned}$$

Lưu ý:

- $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- $0 \leq \sin^2 x \leq 1$; $0 \leq \cos^2 x \leq 1$.
- $0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1$; $0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1$.

- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình cơ bản

- Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$
- Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$
- Nếu hàm số có dạng: $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$

Ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về phương trình $a \sin x + b \cos x = c$.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$; b) $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin x + \cos x$; b) $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$; b) $y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2 \sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$

Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó

1. Phương pháp

Muốn chứng minh hàm số tuần hoàn $f(x)$ tuần hoàn ta thực hiện theo các bước sau:

- Xét hàm số $y = f(x)$, tập xác định là D
- Với mọi $x \in D$, ta có $x - T_0 \in D$ và $x + T_0 \in D$ (1). Chỉ ra $f(x + T_0) = f(x)$ (2)

Vậy hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn

Chứng minh hàm tuần hoàn với chu kỳ T_0

Tiếp tục, ta đi chứng minh T_0 là chu kỳ của hàm số tức chứng minh T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (1) và (2). Giả sử có T sao cho $0 < T < T_0$ thỏa mãn tính chất (2) $\Leftrightarrow \dots \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết $0 < T < T_0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (2). Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

Một số nhận xét:

- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn chu kỳ 2π . Từ đó $y = \sin(ax + b), y = \cos(ax + b)$ có chu kỳ

$$T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$$

- Hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ tuần hoàn chu kỳ π . Từ đó $y = \tan(ax + b)$, $y = \cot(ax + b)$ có chu kỳ

$$T_0 = \frac{\pi}{|a|}$$

Chú ý:

$y = f_1(x)$ có chu kỳ T_1 ;

$y = f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Các dấu hiệu nhận biết hàm số không tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ không tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau vi phạm

- Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn
- Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$
- Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm hữu hạn
- Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $\dots < x_m < x_{m+1} < \dots$ mà $|x_m - x_{m+1}| \rightarrow 0$ hay ∞

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

a) $f(x) = \sin x$, $T_0 = 2\pi$;

b) $f(x) = \tan 2x$, $T_0 = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x) = \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$; b) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$; c) $f(x) = \sin(x^2)$; d) $y = \tan \sqrt{x}$.

Dạng 5. Đồ thị của hàm số lượng giác

1. Phương pháp

1/ Vẽ đồ thị hàm số lượng giác:

- Tìm tập xác định D.
- Tìm chu kỳ T_0 của hàm số.
- Xác định tính chẵn – lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thiên trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T_0 có thể chọn:

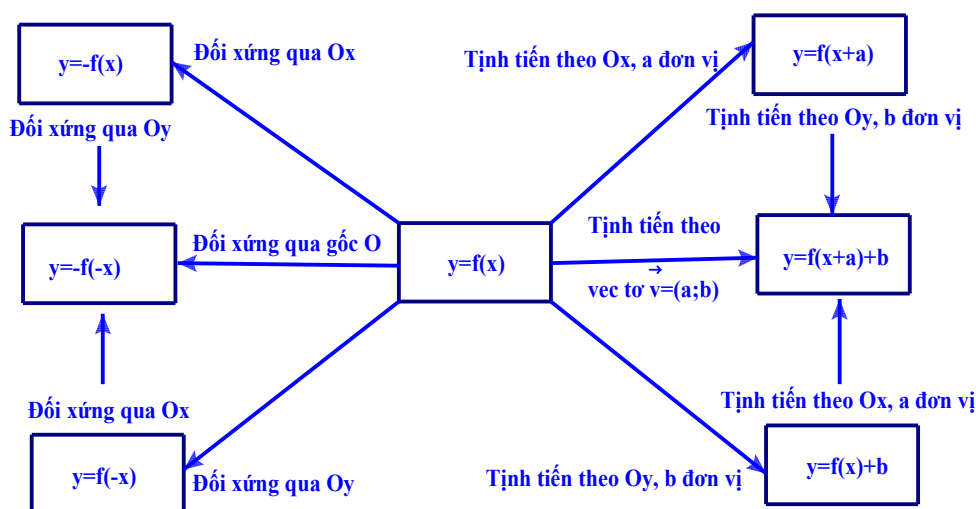
$$x \in [0, T_0] \text{ hoặc } x \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right].$$

- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị còn lại bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = k.T_0.\vec{i}$ về bên trái và phải song song với trục hoành Ox (với $\vec{i}$ là véc tơ đơn vị trên trục Ox).

2/ Một số phép biến đổi đồ thị:

- a) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) + a$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ lên trên trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- b) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ sang phải trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến sang trái trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- c) Từ đồ thị $y = f(x)$, suy ra đồ thị $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành.
- d) Đồ thị $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$ nên suy ra đồ thị $y = f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ phía trên trục hoành và lấy đối xứng $y = f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành

Mối liên hệ đồ thị giữa các hàm số



2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau: $y = \sin 4x$

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$.

Ví dụ 3. Cho đồ thị của hàm số $y = \sin x$, (C). Hãy vẽ các đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ b) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Dùng đồ thị hàm số, tìm g trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ để:

- a) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 1 ; b) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 0 ;
- c) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng -1 ; d) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0 .

Bài 2. Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên khoảng $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2} \right)$ để:

- a) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng -1 ; b) Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng 0 ;
- c) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 1 ; d) Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị bằng 0 .

Bài 3. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

- a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$;
 b) $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi)$.

Bài 4. Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

- a) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$;
 b) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in [0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$;
 c) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$;
 d) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in (0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.

Bài 5. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

- a) $y = \sin x \cos x$
 b) $y = \tan x + \cot x$
 c) $y = \sin^2 x$.

Bài 6. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét.

Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi

$t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

- a) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = 0$;
 b) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;
 c) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$

Bài 7. Trong bài toán mở đầu, hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước 2m

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2021}{\sin x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{(1+2k)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{(1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2021}{\sin x - \cos x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \emptyset$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = 3\tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3\tan x - 5}{1 - \sin^2 x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 8: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = [-2; +\infty)$.

C. $D = [0; 2\pi]$.

D. $D = \emptyset$.

Câu 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 2}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = [-1; 1]$.

D. $D = \emptyset$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \emptyset$.

Câu 11: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}$.

A. $D = \emptyset$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \left[\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}.$

D. $D = \left[\frac{5\pi}{6} + k2\pi; \frac{13\pi}{6} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}.$

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right).$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 13: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sin x.$

B. $y = \cos x.$

C. $y = \tan x.$

D. $y = \cot x.$

Câu 14: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = -\sin x.$

B. $y = \cos x - \sin x.$

C. $y = \cos x + \sin^2 x.$

D. $y = \cos x \sin x.$

Câu 15: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sin 2x.$

B. $y = x \cos x.$

C. $y = \cos x \cdot \cot x.$

D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}.$

Câu 16: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = |\sin x|.$

B. $y = x^2 \sin x.$

C. $y = \frac{x}{\cos x}.$

D. $y = x + \sin x.$

Câu 17: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A. $y = \sin x \cos 2x.$

B. $y = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$

C. $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}.$

D. $y = \cos x \sin^3 x.$

Câu 18: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \cos x + \sin^2 x.$

B. $y = \sin x + \cos x.$

C. $y = -\cos x.$

D. $y = \sin x \cdot \cos 3x.$

Câu 19: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y = \cot 4x.$

B. $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$

C. $y = \tan^2 x.$

D. $y = |\cot x|.$

Câu 20: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

B. $y = \sin^2 x.$

C. $y = \frac{\cot x}{\cos x}.$

D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}.$

Câu 21: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = 1 - \sin^2 x.$

B. $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x.$

C. $y = x^2 \tan 2x - \cot x.$

D.

$y = 1 + |\cot x + \tan x|.$

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \tan^2 x$. Chọn mệnh đề đúng

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.

D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Câu 23:

Câu 24: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn.

B. $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.

D. $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

Câu 25: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y = \frac{1}{\sin^3 x}$.

B. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

Câu 26: Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O .

B. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ đối xứng qua trục Oy .

C. Đồ thị hàm số $y = |\tan x|$ đối xứng qua trục Oy .

D. Đồ thị hàm số $y = \tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O .

Câu 27: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3\sin x - 2$.

A. $M = 1, m = -5$.

B. $M = 3, m = 1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Câu 28: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 3\cos 2x + 5$.

A. $T = [-1; 1]$.

B. $T = [-1; 11]$.

C. $T = [2; 8]$.

D. $T = [5; 8]$.

Câu 29: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3\sin x$.

A. $T = [-1; 1]$.

B. $T = [-3; 3]$.

C. $T = [2; 8]$.

D. $T = [5; 8]$.

Câu 30: Hàm số $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 31: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = -\sqrt{2} \sin(2016x + 2017)$.

A. $m = -2016\sqrt{2}$.

B. $m = -\sqrt{2}$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2017\sqrt{2}$.

Câu 32: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{1}{\cos x + 1}$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $m = 1$.

D. $m = \sqrt{2}$.

Câu 33: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$. Tính $P = M - m$.

A. $P = 4$.

B. $P = 2\sqrt{2}$.

C. $P = \sqrt{2}$.

D. $P = 2$.

Câu 34: Tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2017x - \cos 2017x$.

A. $T = [-2; 2]$.

B. $T = [-4034; 4034]$.

C. $T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

D. $T = [0; \sqrt{2}]$.

Câu 35: Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 36: Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 37: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2|\cos 3x|$.

A. $M = 3, m = -1$.

B. $M = 1, m = -1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Câu 38: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A.** $M = \sqrt{2}$. **B.** $M = \sqrt{2} - 1$. **C.** $M = \sqrt{2} + 1$. **D.** $M = \sqrt{2} + 2$.

Câu 39: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

- A.** $T = [0; 2]$. **B.** $T = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **C.** $T = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. **D.** $T = \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Câu 40: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$.

- A.** $M = 3, m = 0$. **B.** $M = 2, m = 0$. **C.** $M = 2, m = 1$. **D.** $M = 3, m = 1$.

Câu 41: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{2}{1 + \tan^2 x}$.

- A.** $M = \frac{1}{2}$. **B.** $M = \frac{2}{3}$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = 2$.

Câu 42: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x$. Tính $P = 2M - m^2$.

- A.** $P = 1$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 112$. **D.** $P = 130$.

Câu 43: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$.

- A.** $m = 2 - \sqrt{3}$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -\sqrt{3}$.

Câu 44: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 12\sin x - 5\cos x$.

- A.** $T = [-1; 1]$. **B.** $T = [-7; 7]$. **C.** $T = [-13; 13]$. **D.** $T = [-17; 17]$.

Câu 45: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x$.

- A.** $M = 3$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = 5$. **D.** $M = 4$.

Câu 46: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 5$. Tính $P = M - 2m^2$.

- A.** $P = 1$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 2$.

Câu 47: Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 48: Hàm số $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $x_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x_0 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 49: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$

- A.** $M = 2, m = -2$. **B.** $M = 1, m = 0$. **C.** $M = 4, m = -1$. **D.** $M = 2, m = -1$.

Câu 50: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 4\sin^4 x - \cos 4x$.

- A.** $m = -3$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -5$.

Câu 51: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{7 - 3\cos^2 x}$.

- A.** $M = \sqrt{10}, m = 2$. **B.** $M = \sqrt{7}, m = 2$. **C.** $M = \sqrt{10}, m = \sqrt{7}$. **D.** $M = 0, m = 1$.

Câu 52: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y = 4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t - 60)\right] + 10$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

- A.** 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

Câu 53: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$.

Mực nước của kênh cao nhất khi:

- A.** $t = 13$ (giờ). **B.** $t = 14$ (giờ). **C.** $t = 15$ (giờ). **D.** $t = 16$ (giờ).

Câu 54: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A.** Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 55: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A.** $y = \sin x$ **B.** $y = x + \sin x$ **C.** $y = x \cos x$. **D.** $y = \frac{\sin x}{x}$.

Câu 56: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không tuần hoàn?

- A.** $y = \cos x$. **B.** $y = \cos 2x$. **C.** $y = x^2 \cos x$. **D.** $y = \frac{1}{\sin 2x}$.

Câu 57: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A.** $T = \frac{2\pi}{5}$. **B.** $T = \frac{5\pi}{2}$. **C.** $T = \frac{\pi}{2}$. **D.** $T = \frac{\pi}{8}$.

Câu 58: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$.

- A.** $T = 4\pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = -2\pi$. **D.** $T = \pi$.

Câu 59: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$.

- A.** $T = \frac{1}{50}$. **B.** $T = \frac{1}{100}$. **C.** $T = \frac{\pi}{50}$. **D.** $T = 200\pi^2$.

Câu 60: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$.

- A.** $T = 4\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 2\pi$. **D.** $T = \frac{\pi}{2}$.

Câu 61: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$.

- A.** $T = \pi$. **B.** $T = 3\pi$. **C.** $T = 2\pi$. **D.** $T = 5\pi$.

Câu 62: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = 3\cos(2x+1) - 2\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$.

- A.** $T = 2\pi$. **B.** $T = 4\pi$ **C.** $T = 6\pi$ **D.** $T = \pi$.

Câu 63: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A.** $T = 2\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = 4\pi$.

Câu 64: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \tan 3\pi x$.

- A.** $T = \frac{\pi}{3}$. **B.** $T = \frac{4}{3}$. **C.** $T = \frac{2\pi}{3}$. **D.** $T = \frac{1}{3}$.

Câu 65: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x + \cot x$.

- A.** $T = 4\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = \frac{\pi}{3}$.

Câu 66: Tìm chu kì T của hàm số $y = \cot \frac{x}{3} + \sin 2x$.

- A.** $T = 4\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = \frac{\pi}{3}$.

Câu 67: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$.

- A.** $T = 4\pi$. **B.** $T = \pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = 2\pi$.

Câu 68: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\cos^2 x + 2017$.

- A.** $T = 3\pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = \pi$. **D.** $T = 4\pi$.

Câu 69: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\sin^2 x + 3\cos^2 3x$.

- A.** $T = \pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = 3\pi$. **D.** $T = \frac{\pi}{3}$.

Câu 70: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x - \cos^2 2x$.

- A.** $T = \pi$. **B.** $T = \frac{\pi}{3}$. **C.** $T = \frac{\pi}{2}$. **D.** $T = 2\pi$.

Câu 71: Hàm số nào sau đây có chu kì khác π ?

- A.** $y = \sin \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right)$. **B.** $y = \cos 2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. **C.** $y = \tan (-2x + 1)$. **D.** $y = \cos x \sin x$.

Câu 72: Hàm số nào sau đây có chu kì khác 2π ?

- A.** $y = \cos^3 x$. **B.** $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. **C.** $y = \sin^2 (x + 2)$. **D.** $y = \cos^2 \left(\frac{x}{2} + 1 \right)$.

Câu 73: Hai hàm số nào sau đây có chu kì khác nhau?

- A.** $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}$. **B.** $y = \sin x$ và $y = \tan 2x$.
C. $y = \sin \frac{x}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}$. **D.** $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$.

Câu 74: Đồ thị hàm số $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

- A.** Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Câu 75: Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

- A.** Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Câu 76: Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x + 1$ bằng cách:

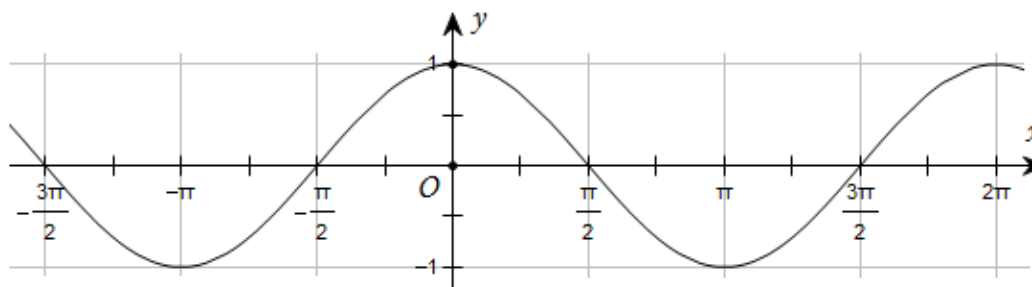
A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.

B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.

C. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

D. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

Câu 77: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

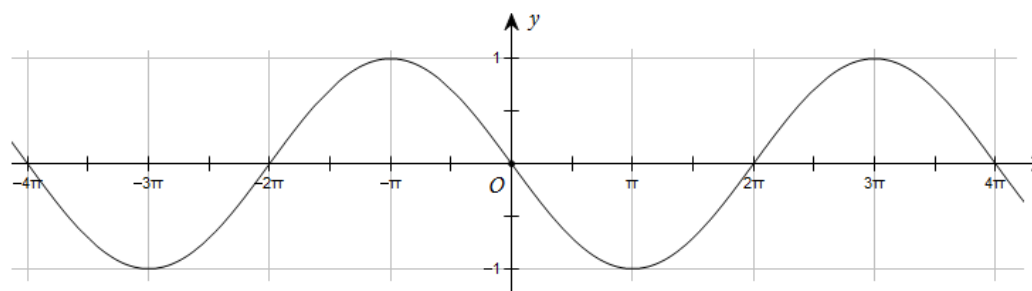
A. $y = 1 + \sin 2x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = -\sin x$.

D. $y = -\cos x$.

Câu 78: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

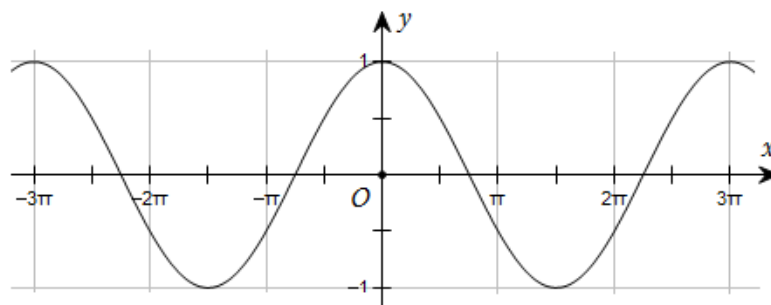
A. $y = \sin \frac{x}{2}$.

B. $y = \cos \frac{x}{2}$.

C. $y = -\cos \frac{x}{4}$.

D. $y = \sin \left(-\frac{x}{2} \right)$.

Câu 79: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

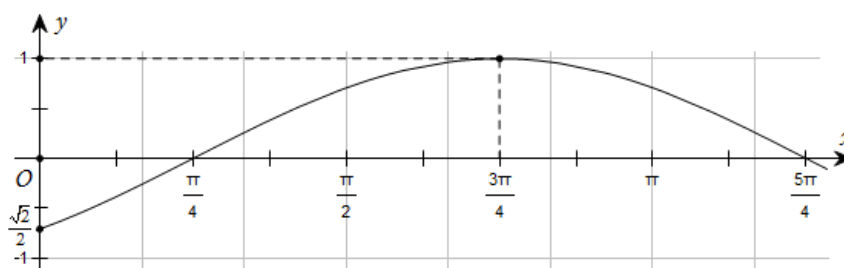
A. $y = \cos \frac{2x}{3}$.

B. $y = \sin \frac{2x}{3}$.

C. $y = \cos \frac{3x}{2}$.

D. $y = \sin \frac{3x}{2}$.

Câu 80: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

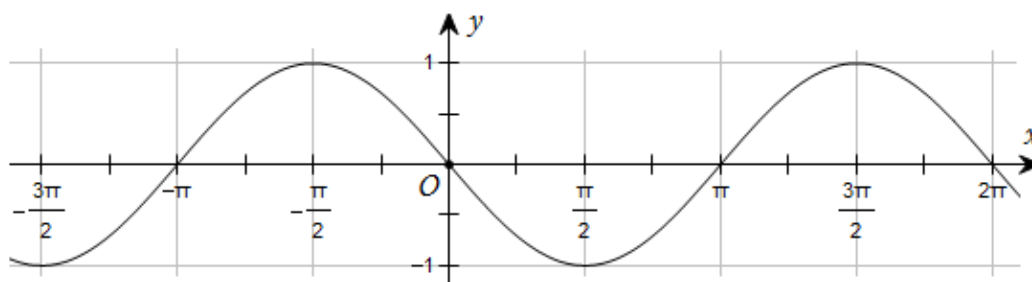
A. $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

B. $y = \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$.

C. $y = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

D. $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Câu 81: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

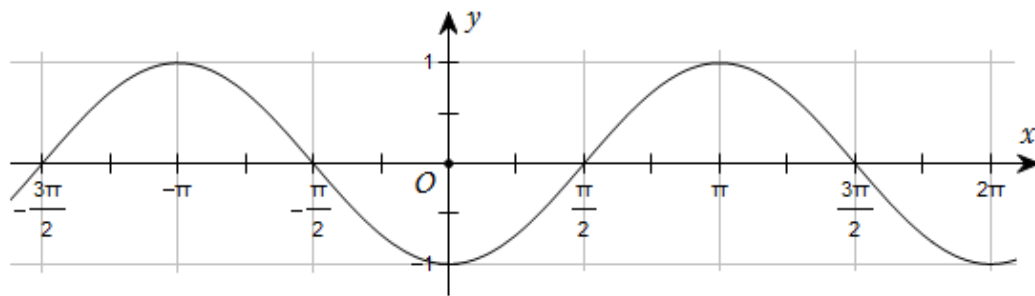
A. $y = \sin x$.

B. $y = |\sin x|$.

C. $y = \sin |x|$.

D. $y = -\sin x$.

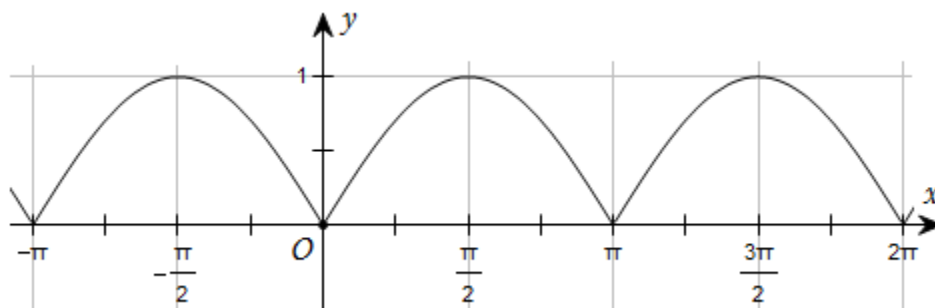
Câu 82: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \cos x$. B. $y = -\cos x$ C. $y = \cos|x|$. D. $y = |\cos x|$.

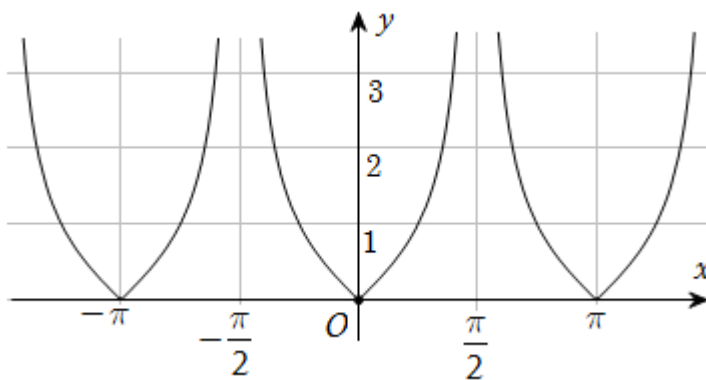
Câu 83: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = |\sin x|$. B. $y = \sin|x|$. C. $y = \cos|x|$. D. $y = |\cos x|$.

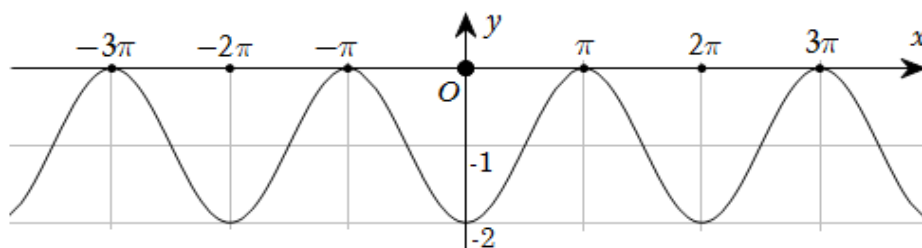
Câu 84: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \tan x$. B. $y = \cot x$. C. $y = |\tan x|$. D. $y = |\cot x|$.

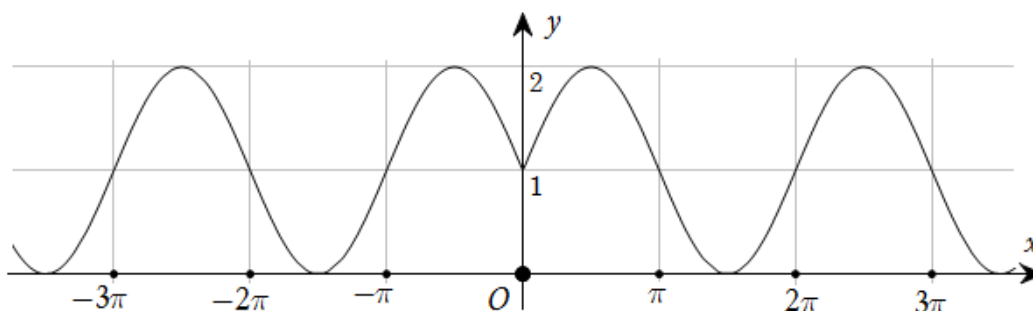
Câu 85: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1.$ **B.** $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$ **C.** $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1.$ **D.** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1.$

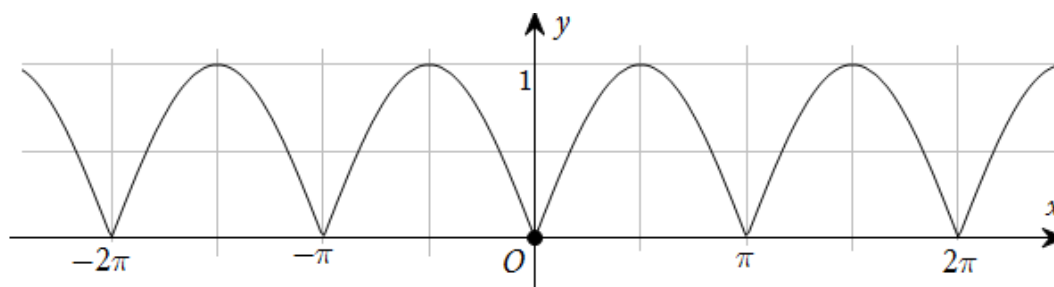
Câu 86: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = 1 + \sin|x|.$ **B.** $y = |\sin x|.$ **C.** $y = 1 + |\cos x|.$ **D.** $y = 1 + |\sin x|.$

Câu 87: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = 1 + \sin|x|.$ **B.** $y = |\sin x|.$ **C.** $y = 1 + |\cos x|.$ **D.** $y = 1 + |\sin x|.$

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. Ủng hộ chính chủ để được bảo hành và nhiều ưu đãi khác

Tránh mua các trang và cá nhân khác

BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Phương trình với ẩn x có dạng $f(x) = g(x)$, trong đó vế trái $f(x)$ và vế phải $g(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x . Khi giải phương trình (1), ta cần lưu ý tới điều kiện đối với ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa (tức là mọi phép toán đều thực hiện được). Đó là *điều kiện xác định của phương trình* (hay gọi tắt là *điều kiện của phương trình*).

-Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Hai phương trình (cùng ẩn) được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

-Định lí sau đây nêu lên một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng:

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương.

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức;

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

II. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

Trong trường hợp tổng quát, ta có thể giải phương trình $\sin x = m$ như sau:

Với $|m| > 1$, phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm.

Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$. Khi đó, ta có:

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

a) Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\sin x = m$:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$b) \text{ Ta có } \sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

c) Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin a^\circ$ như sau:

$$\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

III. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$

Trong trường hợp tổng quát, ta có thể giải phương trình $\cos x = m$ như sau:

Với $|m| > 1$, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm.

Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$. Khi đó, ta có:

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

a) Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\cos x = m$:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

b) Ta có $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

c) Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho

$$\cos x = \cos a^\circ \text{ như sau: } \cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

IV. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$

Trong trường hợp tổng quát, ta có cách giải phương trình $\tan x = m$ như sau:

Gọi α là số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$. Khi đó với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý:

Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\tan x = \tan a^\circ$ như sau:

$$\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

V. PHƯƠNG TRÌNH $\cot x = m$

Trong trường hợp tổng quát, ta có cách giải phương trình $\cot x = m$ như sau:

Gọi α là số thực thuộc khoảng $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$. Khi đó với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý:

Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cot x = \cot a^\circ$ như sau:

$$\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

VI. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Có thể sử dụng máy tính cầm tay (MTCT) để giải các phương trình lượng giác cơ bản.

Chú ý

Để giải phương trình $\cot x = a (a \neq 0)$ bằng MTCT, ta đưa về giải phương trình $\tan x = \frac{1}{a}$.

B. CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$; b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; c) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1$;

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ e) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; f) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1$;

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$ (1); b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (2)

c) $\tan \frac{x}{3} = 2$ (3); d) $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ (4)

Ví dụ 3. Giải phương trình

a) $\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $\cot g\left(x + 30^\circ\right) = \cot g \frac{x}{2}$.

c) $\cos^2 x = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$; d) $\sin 2x = \cos 3x$.

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau:

a) $\cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7}$; b) $\cot 3x = -2$; c) $\cot(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

a) $\sin 2x - \sin 2x \cos x = 0$ (1); b) $\sin x \cos 2x = \sin 2x \cos 3x$ (2).

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ c) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $2\cos 3x + 5 = 3$; e) $3\tan x = -\sqrt{3}$; g) $\cot x - 3 = \sqrt{3}(1 - \cot x)$.

Bài 2. Giải phương trình:

a) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$ b) $\sin 2x = \cos 3x$; c) $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Bài 3. Dùng đồ thị hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ để xác định số nghiệm của phương trình:

a) $3\sin x + 2 = 0$ trên khoảng $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

b) $\cos x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Bài 4. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365$$

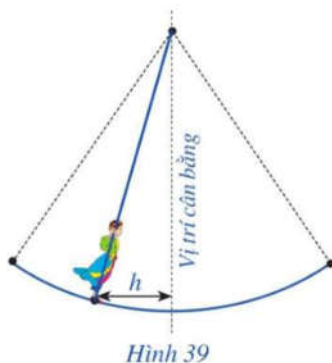
(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Bài 5. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu

diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy

ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m ?



Hình 39

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là:

- A.** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. **B.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. **C.** $x = k\pi$. **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là:

- A.** $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$. **B.** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. **C.** $x = k\pi$. **D.** $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$.

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ là:

- A.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. **B.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. **C.** $x = k\pi$. **D.** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 4: Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là:

- A.** $x = k\pi$. **B.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. **C.** $x = k2\pi$. **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 5: Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là:

- A.** $x = \pi + k\pi$. **B.** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. **C.** $x = \pi + k2\pi$. **D.** $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$.

Câu 6: Nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là:

- A.** $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. **B.** $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. **C.** $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$. **D.** $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ là:

- A.** $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. **B.** $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. **C.** $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$. **D.** $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 8: Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} + 3 \tan x = 0$ là:

- A.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. **B.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. **C.** $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $\cot x + \sqrt{3} = 0$ là:

- A.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. **B.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. **C.** $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. **D.** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 10: Nghiệm của phương trình $\sin x = -\frac{1}{2}$ là:

- A.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. **B.** $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$. **C.** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$. **D.** $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 11: Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = \sin x$ là

- A.** $S = \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. **B.** $S = \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. **D.** $S = \left\{ k2\pi; \pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12: Nghiệm của phương trình $2 \sin \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0$ là

- A.** $x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{24} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{24} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = k\pi; x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{8} + k\pi; x = \frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13: Phương trình $\sin 2x = \cos x$ có nghiệm là

- A.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 14: Giải phương trình $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0$.

- A.** $x = \frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 15: Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

B. $\left\{x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

D. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Câu 16: Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có một nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{6}.$

B. $x = \frac{2\pi}{3}.$

C. $x = \frac{\pi}{3}.$

D. $x = \frac{5\pi}{6}.$

Câu 17: Biểu diễn họ nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ trên đường tròn đơn vị ta được bao nhiêu điểm?

A. 1.

B. 8.

C. 4.

D. 2.

Câu 18: Phương trình $\sin x = \sin \alpha$ có nghiệm là

A. $x = \alpha + k\pi, x = \pi - \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \alpha + k2\pi, x = -\alpha + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \alpha + k2\pi, x = \pi - \alpha + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \alpha + k\pi, x = -\alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 19: Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

B. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C. $\left\{x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

D. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Câu 20: Tập nghiệm của phương trình $2\sin 2x + 1 = 0$ là

A. $S = \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

B. $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

C. $S = \left\{-\frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

D. $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Câu 21: Nghiệm của phương trình $\cos^2 x = 0$ là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

B. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}.$

D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Câu 22: Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm là:

A. $0 \leq m \leq 1.$

B. $m \leq 0.$

C. $m \geq 1.$

D. $-2 \leq m \leq 0.$

Câu 23: Phương trình lượng giác $3\cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

D. Vô nghiệm.

Câu 24: Phương trình lượng giác $2\cos x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$.

Câu 25: Phương trình lượng giác $\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. **B.** $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. **C.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. **D.** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 26: Phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm khi m là:

A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$. **B.** $m > 1$. **C.** $-1 \leq m \leq 1$. **D.** $m < -1$.

Câu 27: Nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ **C.** $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ **D.** $x = \frac{k\pi}{2}$

Câu 28: Giá trị đặc biệt nào sau đây là đúng

A. $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **B.** $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
C. $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. **D.** $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 29: Phương trình lượng giác: $\cos 3x = \cos 12^\circ$ có nghiệm là:

A. $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$. **B.** $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$. **C.** $x = \frac{-\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$. **D.** $x = \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$.

Câu 30: Giải phương trình lượng giác: $2\cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k2\pi$. **B.** $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$. **C.** $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k4\pi$. **D.** $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k4\pi$.

Câu 31: Nghiệm đặc biệt nào sau đây là sai

A. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. **B.** $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.
C. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$. **D.** $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 32: Phương trình lượng giác: $\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. **B.** $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. **C.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. **D.** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 33: Trong các phương trình sau phương trình nào vô nghiệm?

A. $\tan x = 2018$ **B.** $\sin x = \pi$ **C.** $\cos x = \frac{2017}{2018}$ **D.** $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

Câu 34: Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \sin 30^\circ$ là

A. $S = \{30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
B. $S = \{\pm 30^\circ + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $S = \{\pm 30^\circ + k360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $S = \{30^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150^\circ + 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 35: Phương trình $\cos x = 1$ có nghiệm là

A. $x = k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

C. $x = k\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

A. $m \leq 1$.

B. $m \geq -1$.

C. $-1 \leq m \leq 1$.

D. $m \leq -1$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

B. $m \in (1; +\infty)$.

C. $m \in [-1; 1]$.

D. $m \in (-\infty; -1)$.

Câu 38: Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là

A. $-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 39: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ bằng:

A. 0.

B. π .

C. 2π .

D. 3π .

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng:

- A. $(0; \pi)$. B. $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. D. $(-\pi; 0)$.

Câu 2: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$ là:

- A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \cot x$.

Câu 3: Nếu $\tan(a+b) = 3, \tan(a-b) = -3$ thì $\tan 2a$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{3}{5}$. C. 1. D. $-\frac{3}{4}$

Câu 4: Nếu $\cos a = \frac{1}{4}$ thì $\cos 2a$ bằng:

- A. $\frac{7}{8}$. B. $-\frac{7}{8}$. C. $\frac{15}{16}$. D. $-\frac{15}{16}$

Câu 5: Nếu $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\cos b = -\frac{4}{5}$ thì $\cos(a+b)\cos(a-b)$ bằng:

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 5

Câu 6: Nếu $\sin a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ thì $\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 7: Số nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là:

- A. 5. B. 9. C. 10. D. 11

Câu 8: Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là:

- A. 10. B. 6. C. 5. D. 11.

Câu 9: Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là:

- A. $-\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. C. $\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ D. $-\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 10: Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ trên đoạn $[0; \pi]$ là:

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

PHẦN 2: TỰ LUẬN

Bài 11. Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ rồi xác định số nghiệm của phương trình

$3\cos x + 2 = 0$ trên đoạn đó.

Bài 12. Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\sin 3x - \cos 5x = 0$

d) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

e) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

f) $\sin x + \cos x = 0$

Bài 13. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức

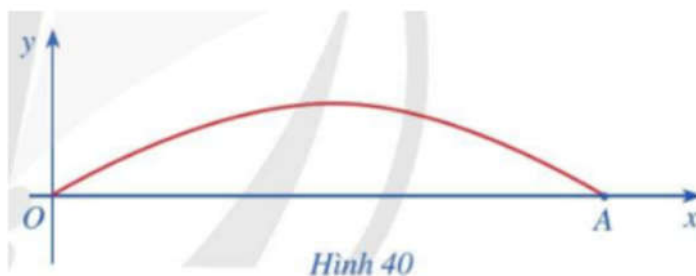
$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12$. Tìm t để độ sâu của mực nước là

a) 15 m

b) 9 m

c) 10,5 m

Bài 14. Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.



a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

b) Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 13,1m.



c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là 9m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 4,3m

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG 1

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cung có số đo 250° thì có số đo theo đơn vị là radian là

- A. $\frac{25\pi}{12}$. B. $\frac{25\pi}{18}$. C. $\frac{25\pi}{9}$. D. $\frac{35\pi}{18}$.

Câu 2: Nếu một cung tròn có số đo bằng radian là $\frac{5\pi}{4}$ thì số đo bằng độ của cung tròn đó là

- A. 172° . B. 15° . C. 225° . D. 5° .

Câu 3: Một cung tròn có độ dài bằng bán kính. Khi đó số đo bằng radian của cung tròn đó là

- A. 1. B. π . C. 2. D. 3.

Câu 4: Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{16}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 5: Trên đường tròn bán kính $R = 6$, cung 60° có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. $l = \frac{\pi}{2}$. B. $l = 4\pi$. C. $l = 2\pi$. D. $l = \pi$.

Câu 6: Trên đường tròn lượng giác, điểm M thỏa mãn $(Ox, OM) = 500^\circ$ thì nằm ở góc phần tư thứ

- A. I. B. II. C. III. D. IV.

Câu 7: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 1 giây, bánh xe quay được một góc bao nhiêu độ?

- A. 144° . B. 288° . C. 36° . D. 72° .

Câu 8: Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\tan \alpha < 0$. B. $\cot \alpha > 0$. C. $\sin \alpha > 0$. D. $\cos \alpha > 0$.

Câu 9: Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- A. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\cot \alpha = \sqrt{2}$. C. $\cot \alpha = 2$. D. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$.

Câu 10: Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây?

- A. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. B. $\cos 45^\circ \leq \sin 45^\circ$. C. $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ$. D. $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$.

Câu 11: Cho $\sin a = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\cos a$.

- A. $\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\cos a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\cos a = \frac{8}{9}$. D. $\cos a = -\frac{8}{9}$.

Câu 12: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = -\frac{5}{4}$. B. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. C. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\cos \alpha = \frac{5}{4}$.

Câu 13: Với mọi góc a và số nguyên k , chọn đẳng thức **sai**?

A. $\sin(a + k2\pi) = \sin a$.

B. $\cos(a + k\pi) = \cos a$.

C. $\tan(a + k\pi) = \tan a$.

D. $\cot(a - k\pi) = \cot a$.

Câu 14: Chọn khẳng định đúng?

A. $\tan(\pi - \alpha) = \tan \alpha$.

B. $\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$.

C. $\cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha$.

D. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.

Câu 15: Biểu thức $A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$ có giá trị bằng

A. $A = 9$.

B. $A = 3$.

C. $A = 12$.

D. $A = 6$.

Câu 16: Trong tam giác ABC , đẳng thức nào dưới đây luôn đúng?

A. $\sin(A + B) = \cos C$.

B. $\cos A = \sin B$.

C. $\tan A = \cot\left(B + \frac{\pi}{2}\right)$.

D. $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

Câu 17: Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác. Đặt $M = \cos(2A + B + C)$ thì:

A. $M = -\cos A$.

B. $M = \cos A$.

C. $M = \sin A$.

D. $M = -\sin A$.

Câu 18: Biểu thức $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$ được viết lại

A. $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \sin a + \frac{1}{2}$.

B. $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sin a - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a$.

C. $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a - \frac{1}{2}\cos a$.

D. $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a + \frac{1}{2}\cos a$.

Câu 19: Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\cos 2a = 2\cos a - 1$.

B. $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$.

C. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

D. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

Câu 20: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó, $\cos 2\alpha$ bằng

A. $-\frac{1}{8}$.

B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

C. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Câu 21: Biểu thức $\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}$ bằng

A. $\tan 10^\circ + \tan 20^\circ$.

B. $\tan 30^\circ$.

C. $\cot 10^\circ + \cot 20^\circ$.

D. $\tan 15^\circ$.

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 23: Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ là

- A.** $T = 2\pi$. **B.** $T = \frac{\pi}{2}$. **C.** $T = \pi$. **D.** $T = 4\pi$.

Câu 24: Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A.** Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. **B.** Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. **D.** Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 25: Phương trình lượng giác $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là:

- A.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$. **B.** $x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 26: Phương trình nào dưới đây vô nghiệm:

- A.** $\sin x + 3 = 0$. **B.** $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.
C. $\tan x + 3 = 0$. **D.** $3 \sin x - 2 = 0$.

Câu 27: Cho hai phương trình $\cos 3x - 1 = 0$; $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Tập các nghiệm của phương trình đồng thời là nghiệm của phương trình là

- A.** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 28: Tìm số đo ba góc của một tam giác cân biết rằng có số đo của một góc là nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

- A.** $\left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$. **B.** $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}; \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$.
C. $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}; \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$. **D.** $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$.

Câu 29: Phương trình $2 \cos x - \sqrt{2} = 0$ có tất cả các nghiệm là

- A.** $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 30: Phương trình $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ có các nghiệm là

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 31: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

PHẦN 2: TỰ LUẬN

Câu 32: Rút gọn biểu thức $S = \sin\left(x + \frac{2017\pi}{2}\right) + 2\sin^2(x - \pi) + \cos(x + 2019\pi) + \cos 2x$

Câu 33: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^7 x$

Câu 34: Nếu α là góc nhọn và $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$ thì $\tan \alpha$ bằng bao nhiêu?

Câu 35: Chứng minh biểu thức $\sin^2 x \cdot \tan x + 4\sin^2 x - \tan^2 x + 3\cos^2 x$ không phụ thuộc vào x

Câu 36: Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi, \sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

Câu 37: Với giá trị nào của n thì đẳng thức sau luôn đúng $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}} = \cos \frac{x}{n}$,
 $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Câu 38: Cho $\triangle ABC$ có các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$ thỏa mãn hệ thức $\frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c}$. Hãy nhận dạng $\triangle ABC$.

Câu 39: Số nghiệm của phương trình $\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$ là bao nhiêu?

CHƯƠNG II: Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân

BÀI 1: Dãy số

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm

Ta có khái niệm sau:

- Mỗi hàm số $u: \{1; 2; 3; \dots; m\} \rightarrow \mathbb{R} (m \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là một dãy số hữu hạn. Do mỗi số nguyên dương $k (1 \leq k \leq m)$ tương ứng với đúng một số u_k nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_m.$$

- Số u_1 gọi là số hạng đầu, số u_m gọi là số hạng cuối của dãy số đó.

Ta có khái niệm về dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số) như sau:

- Mỗi hàm số $u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một dãy số vô hạn.

Do mỗi số nguyên dương n tương ứng với đúng một số u_n nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$

- Dãy số đó còn được viết tắt là (u_n) .

- Số u_1 gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu), số u_2 gọi là số hạng thứ hai, ..., số u_n gọi là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số đó.

Chú ý:

Dãy số không đổi là dãy số có tất cả các số hạng đều bằng nhau.

II. CÁCH CHỌN MỘT DÃY SỐ

Ta có thể cho dãy số bằng một trong những cách sau:

- Liệt kê các số hạng của dãy số đó (với những dãy số hữu hạn và có ít số hạng).
- Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số đó.
- Cho công thức của số hạng tổng quát của dãy số đó.
- Cho bằng phương pháp truy hồi.

III. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý:

Không phải mọi dãy số đều là dãy số tăng hay dãy số giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với

$u_n = (-1)^n$ có dạng khai triển: $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$ không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm.

IV. DÃY SỐ BỊ CHẶN

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; tức là tồn tại các số m và M sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số

1. Phương pháp

Một dãy số có thể cho bằng:

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);

- Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- Phương pháp truy hồi.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+1}$. Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy số..

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) , từ đó dự đoán u_n

$$\text{a) } (u_n): \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}; \quad \text{b) } (u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$$

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) , từ đó dự đoán u_n

$$\text{a) } (u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}; \quad \text{b) } (u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$$

Dạng 2. Tính tăng giảm của dãy số

1. Phương pháp

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in N^*$.

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in N^* \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in N^* (u_n > 0).$$

- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in N^*$.

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in N^* \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in N^* (u_n > 0).$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

$$\text{a) } u_n = 2n + 3 \quad \text{b) } u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

Ví dụ 2. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

$$\text{a) } u_n = \frac{n}{n^2 + 1} \quad \text{b) } u_n = \frac{\sqrt{n+1} - n}{n}$$

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{n} - 2 \quad \text{b) } u_n = \frac{n-1}{n+1}$$

Ví dụ 4. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

$$\text{a) } u_n = \frac{2n+1}{5n+2} \quad \text{b) } u_n = 2n^2 + 5$$

Ví dụ 5. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

$$\text{a) } u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} \quad \text{b) } u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Ví dụ 6. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n + 1}$

b) $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$

Ví dụ 7. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

Ví dụ 8. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Ví dụ 9. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

Ví dụ 10. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

Ví dụ 11. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{na + 2}{n + 1}$

a) là dãy số tăng.

b) là dãy số giảm

Dạng 3. Dãy số bị chặn

1. Phương pháp

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}: u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý:

+) Trong các điều kiện về bị chặn ở trên thì không nhất thiết phải xuất hiện dấu '='

+) Nếu một dãy số tăng thì luôn bị chặn dưới bởi u_1 ; còn dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$

b) $u_n = \frac{7n + 5}{5n + 7}$

Ví dụ 2. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 3}$

b) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Ví dụ 3. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$

b) $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

Ví dụ 4. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{2n^2}{n^2 + 1}$

b) $u_n = \frac{2n^2 + 2n + 1}{n^2 + n + 4}$

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{4n + (-1)^{n+1}}$

a) Tính 6 số hạng đầu tiên của dãy, nêu nhận xét về tính đơn điệu của dãy số.

b) Tính u_{2n} và u_{2n+1} . Chứng minh rằng $0 < u_n \leq \frac{3n+4}{4n-1}$.

Ví dụ 6. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \frac{2n+3}{n+2}$

b) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Ví dụ 7. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1}$

b) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+n}}$

Ví dụ 8. Chứng minh rằng dãy số $u_n = \frac{n+3}{n+1}$ giảm và bị chặn.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng dãy số $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ tăng và bị chặn trên.

Ví dụ 10. Chứng minh rằng dãy số $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}$ là một dãy số bị chặn.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $u_n < 8$.

a) Giả sử tồn tại $u_n \geq 8 \Rightarrow u_{n-1} = 2(u_n - 4) = 8$

Ví dụ 12. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1} \end{cases}$

a) Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy số

b) Chứng minh rằng dãy số bị chặn dưới bởi 1 và bị chặn trên bởi $\frac{3}{2}$

Ví dụ 13. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+2} \end{cases}$ tăng và bị chặn trên bởi 2.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức sau:

a) $u_n = 2n^2 + 1$

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$

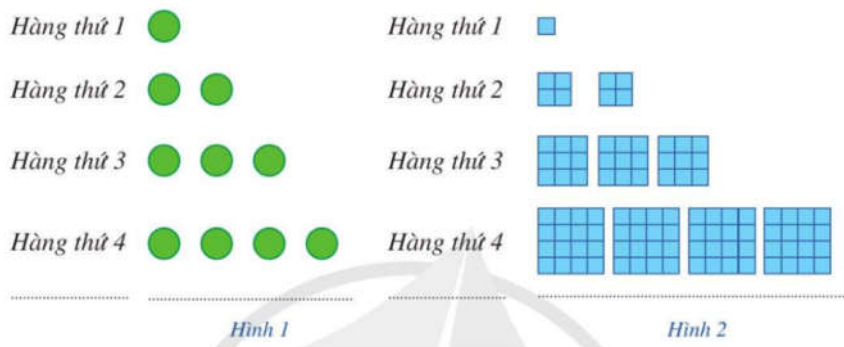
c) $u_n = \frac{2^n}{n}$

d)

$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Bài 2. a) Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ n trong Hình 1. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n) .

b) Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong Hình 2 (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n) .



Bài 3. Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n) , biết:

a) $u_n = \frac{n-3}{n+2}$

b) $u_n = \frac{3^n}{2^n \cdot n!}$

c) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$

Bài 4. Trong các dãy số (u_n) được xác định như sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 2$

b) $u_n = -2n + 1$

c) $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$

Bài 5. Cho dãy số thực dương (u_n) . Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 6. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}$.

B. $-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; -\frac{6}{7}$.

C. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$.

D. $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}$.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$.

C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

Câu 3: Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?
A. $-1; 2; 5$. **B.** $1; 4; 7$. **C.** $4; 7; 10$. **D.** $-1; 3; 7$.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5 .
A. $u_5 = \frac{1}{4}$. **B.** $u_5 = \frac{17}{12}$. **C.** $u_5 = \frac{7}{4}$. **D.** $u_5 = \frac{71}{39}$.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?
A. $u_1 = -2$. **B.** $u_2 = 4$. **C.** $u_3 = -6$. **D.** $u_4 = -8$.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .
A. $u_3 = \frac{8}{3}$. **B.** $u_3 = 2$. **C.** $u_3 = -2$. **D.** $u_3 = -\frac{8}{3}$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .
A. $u_4 = \frac{5}{9}$. **B.** $u_4 = 1$. **C.** $u_4 = \frac{2}{3}$. **D.** $u_4 = \frac{14}{27}$.

Câu 8: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?
A. $u_2 = \frac{5}{2}$. **B.** $u_3 = \frac{15}{4}$. **C.** $u_4 = \frac{31}{8}$. **D.** $u_5 = \frac{63}{16}$.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?
A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?
A. 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 11: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1} .
A. $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. **B.** $u_{n+1} = 2^n + 1$. **C.** $u_{n+1} = 2(n+1)$. **D.** $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1} .
A. $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$. **B.** $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$. **C.** $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$. **D.** $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1} .
A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1} = 5^n$. **C.** $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.

B. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

D. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Câu 15: Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{n+1}{n}$.

B. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

C. $u_n = \frac{n-1}{n}$.

D. $u_n = \frac{n^2 - n}{n+1}$.

Câu 16: Dãy số có các số hạng cho bởi: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 1$.

B. $u_n = -1$.

C. $u_n = (-1)^n$.

D. $u_n = (-1)^{n+1}$.

Câu 17: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = -2n$.

B. $u_n = n - 2$.

C. $u_n = -2(n+1)$.

D. $u_n = 2n - 4$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = n^{n-1}$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = 2^{n+1}$.

D. $u_n = 2$.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$.

B. $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.

C. $u_n = \frac{1}{2} - 2n$.

D. $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Câu 20: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$.

B. $u_n = 2 + n^2$.

C. $u_n = 2 + (n+1)^2$.

D. $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Câu 21: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

D. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A.** $u_n = \frac{-n+1}{n}$. **B.** $u_n = \frac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\frac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Câu 23: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A.** $u_n = 1 + n$. **B.** $u_n = 1 - n$. **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

Câu 24: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2(3^n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

- A.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.

Câu 25: Cho dãy số (a_n) , được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.** $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$. **B.** $a_{10} = \frac{3}{512}$.
C. $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$. **D.** $a_n = \frac{3}{2^n}$.

Câu 26: Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

- A.** 1; 1; 1; 1; 1; 1; ... **B.** 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...
C. 1; 3; 5; 7; 9; ... **D.** 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...

Câu 27: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

- A.** $u_n = \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \frac{1}{n}$. **C.** $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$. **D.** $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Câu 28: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

- A.** $u_n = \frac{2}{3^n}$. **B.** $u_n = \frac{3}{n}$. **C.** $u_n = 2^n$. **D.** $u_n = (-2)^n$.

Câu 29: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

- A.** $u_n = \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = \sqrt{n+2}$.

Câu 30: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

- A.** $u_n = \sin n$. **B.** $u_n = \frac{n^2+1}{n}$. **C.** $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **D.** $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

Câu 31: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng. **B.** Dãy số $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy giảm.

C. Dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$ là dãy tăng.

Câu 32: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Dãy số $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

B. Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

Câu 33: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 0.

Câu 34: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n = n^2$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = \frac{1}{n}$.

D. $u_n = \sqrt{n+1}$.

Câu 35: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. Không bị chặn trên.

Câu 36: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0.

B. -1.

C. $-\sqrt{2}$.

D. Không bị chặn dưới.

Câu 37: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sqrt{3} \cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2$; $M = 2$.

B. $m = -\frac{1}{2}$; $M = \sqrt{3} + 1$.

C. $m = -\sqrt{3} + 1$; $M = \sqrt{3} - 1$.

D. $m = -\frac{1}{2}$; $M = \frac{1}{2}$.

Câu 38: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 39: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)}$, $\forall n = 1; 2; 3 \dots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 40: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $\forall n = 2; 3; 4; \dots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 41: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$.

B. $u_n = n + \frac{1}{n}$.

C. $u_n = 2^n + 1$.

D. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Câu 42: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$.

B. $u_n = 3^n$.

C. $u_n = \sqrt{n+1}$.

D. $u_n = n^2$.

Câu 43: Cho dãy số (u_n) , xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6} \leq u_n < \frac{5}{2}$.

B. $\sqrt{6} \leq u_n < 3$.

C. $\sqrt{6} \leq u_n < 2$.

D. $\sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

Câu 44: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Câu 45: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

BÀI 2: CẤP SỐ CỘNG**A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. ĐỊNH NGHĨA**

Cấp số cộng là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d , tức là: $u_n = u_{n-1} + d$ ($n \geq 2$).

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có: $u_n - u_{n-1} = d$.

Chú ý:

Khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \geq 2.$$

Nhận xét:

Từ công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, ta có: $n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$ với $n \geq 2$.

III. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

Nhận xét:

Do $u_n = u_1 + (n - 1)d$ nên $u_1 + u_n = 2u_1 + (n - 1)d$. Suy ra $S_n = \frac{[2u_1 + (n - 1)d]n}{2}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**Dạng 1. Nhận dạng 1 dãy số là cấp số cộng****1. Phương pháp**

Sử dụng định nghĩa (u_n) là một cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một hằng số.

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $d = u_{n+1} - u_n$

- Nếu d là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai d .
- Nếu d phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Chứng minh các dãy số sau là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy số sau không phải là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Dạng 2. Xác định số hạng, công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng**1. Phương pháp**

- Xác định một cấp số cộng là xác định số hạng đầu u_1 và công sai d
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và d rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n .

Ví dụ 2: Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

Ví dụ 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17} .

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17} .

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

Dạng 3. Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng**1. Phương pháp**

Tính tổng n số hạng đầu tiên nhờ công thức: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = -5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Ví dụ 2: Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tính tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên

Ví dụ 3: Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots + (2n-1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

Ví dụ 5: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Ví dụ 5: Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính S_{19} .

Dạng 4: Giải phương trình (tìm x trong cấp số cộng)**1. Phương pháp**

Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x .

Ví dụ 2: Nếu các số $5 + m; 7 + 2m; 17 + m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

Ví dụ 3: Với giá trị nào của x và y thì các số $-7; x; 11; y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng?

Dạng 5. Chứng minh một hệ thức trong cấp số cộng lập thành cấp số cộng, bài toán có sử dụng yếu tố cấp số cộng

1. Phương pháp

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối cùng đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số công khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số

$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$. b) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

Ví dụ 3. Một tam giác vuông có chu vi bằng $3a$ và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a .

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0$.

Ví dụ 5. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số công: $x^4 - 10x^2 + 2m^2 + 7m = 0$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Vì sao?

a) $10, -2, -14, -26, -38$; b) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}$

c) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$; d) 1, 4, 7, 10, 13.

Bài 2. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng? Nếu là cấp số cộng, hãy tìm số hạng đầu u_1 và công sai d .

a) $u_n = 3 - 2n$ b) $u_n = \frac{3n+7}{5}$ c) $u_n = 3^n$.

Bài 3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$.

a) Viết công thức của số hạng tổng quát u_n .

b) Số 492 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 300 có là số hạng nào của cấp số công trên không?

Bài 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4, u_2 = 1$. Tính u_{10} .

Bài 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -1$.

a) Tìm công sai d và viết công thức của số hạng tổng quát u_n .

b) Số - 67 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 7 có phải là một số hạng của cấp số cộng trên không?

Bài 6. Tính tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 0,3n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

Bài 7. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức:

$$x_n = 75 + 5(n-1).$$

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

- a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?
 b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Bài 8. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
 b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

- A. $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots$ B. $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots$
 C. $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots$ D. $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots$

Câu 2: Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

- A. $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1$. B. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}$. D. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Câu 3: Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

- A. 7; 12; 17, B. 6; 10; 14. C. 8; 13; 18. D. 6; 12; 18.

Câu 4: Cho hai số -3 và 23. Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

- A. $n = 12$. B. $n = 13$. C. $n = 14$. D. $n = 15$.

Câu 5: Biết các số C_n^1 ; C_n^2 ; C_n^3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n .

- A. $n = 5$. B. $n = 7$. C. $n = 9$. D. $n = 11$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; $\dots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

- A. $u_n = 5n + 1$. B. $u_n = 5n - 1$. C. $u_n = 4n + 1$. D. $u_n = 4n - 1$.

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$. B. $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.
 C. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$. D. $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1)$.

Câu 8: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- A.** $u_n = 7 - 3n$. **B.** $u_n = 7 - 3^n$. **C.** $u_n = \frac{7}{3n}$. **D.** $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Câu 9: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- A.** $u_n = (-1)^n (2n+1)$. **B.** $u_n = \sin \frac{\pi}{n}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$.

Câu 10: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

- A.** $u_n = -4n + 9$. **B.** $u_n = -2n + 19$. **C.** $u_n = -2n - 21$. **D.** $u_n = -2^n + 15$.

Câu 11: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $u_{15} = 34$. **B.** $u_{15} = 45$. **C.** $u_{13} = 31$. **D.** $u_{10} = 35$.

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{4}$ và $d = -\frac{1}{4}$. Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $S_5 = -\frac{5}{4}$. **B.** $S_5 = \frac{4}{5}$. **C.** $S_5 = \frac{5}{4}$. **D.** $S_5 = -\frac{4}{5}$.

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n) có $d = -2$ và $S_8 = 72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 .

- A.** $u_1 = 16$. **B.** $u_1 = -16$. **C.** $u_1 = \frac{1}{16}$. **D.** $u_1 = -\frac{1}{16}$.

Câu 14: Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

- A.** $u_n = 57$. **B.** $u_n = 61$. **C.** $u_n = 65$. **D.** $u_n = 69$.

Câu 15: Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

- A.** $d = 2$. **B.** $d = 3$. **C.** $d = 4$. **D.** $d = 5$.

Câu 16: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = \frac{3n^2 - 19n}{4}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

- A.** $u_1 = 2; d = -\frac{1}{2}$. **B.** $u_1 = -4; d = \frac{3}{2}$. **C.** $u_1 = -\frac{3}{2}; d = -2$. **D.** $u_1 = \frac{5}{2}; d = \frac{1}{2}$.

Câu 17: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

- A.** $u_n = 2n + 3$. **B.** $u_n = 3n + 2$. **C.** $u_n = 5 \cdot 3^{n-1}$. **D.** $u_n = 5 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}$.

Câu 18: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

- A.** $u_{1001} = 4005$. **B.** $u_{1001} = 4003$. **C.** $u_{1001} = 3$. **D.** $u_{1001} = 1$.

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n) , biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Tính công sai d của cấp số cộng đó.

- A.** $d = -9$. **B.** $d = 7$. **C.** $d = -7$. **D.** $d = 9$.

Câu 20: Cho cấp số cộng (u_n) . Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

- A.** $\frac{u_{10} + u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$. **B.** $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$. **C.** $u_{10} \cdot u_{30} = u_{20}$. **D.** $\frac{u_{10} \cdot u_{30}}{2} = u_{20}$.

Câu 21: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_{23} = 60$. Tính tổng S_{24} của 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

- A.** $S_{24} = 60$. **B.** $S_{24} = 120$. **C.** $S_{24} = 720$. **D.** $S_{24} = 1440$.

Câu 22: Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

- A.** $d = 2$. **B.** $d = -3$. **C.** $d = 4$. **D.** $d = 5$.

Câu 23: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

- A.** $d = \frac{1}{2}$. **B.** $d = \frac{1}{3}$. **C.** $d = 2$. **D.** $d = 3$.

Câu 24: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 10 \\ d = -3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 4 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$.

Câu 25: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A.** $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$.

Câu 26: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d < 10$.

- A.** $d = 3$. **B.** $d = 4$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 6$.

Câu 27: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$. Tính u_2 .

- A.** $u_2 = 3$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 9$. **D.** $u_2 = 12$.

Câu 28: Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + \dots + 7515$.

- A.** $T = 5651265$. **B.** $T = 5651256$. **C.** $T = 5651625$. **D.** $T = 5651526$.

Câu 29: Tính tổng $T = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

- A.** $T = 500500$. **B.** $T = 500005$. **C.** $T = 505000$. **D.** $T = 500050$.

Câu 30: Cho cấp số cộng $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n$ có công sai d , các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác 0. Với giá trị nào của d thì dãy số $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots; \frac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

- A.** $d = -1$. **B.** $d = 0$. **C.** $d = 1$. **D.** $d = 2$.

- Câu 31:** Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:
A. 20° và 70° . **B.** 45° và 45° . **C.** 20° và 45° . **D.** 30° và 60° .
- Câu 32:** Ba góc A, B, C ($A < B < C$) của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:
A. 40° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 80° .
- Câu 33:** Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:
A. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}$.
- Câu 34:** Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?
A. 1635. **B.** 1792. **C.** 2055. **D.** 3125.
- Câu 35:** Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,...Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?
A. 73. **B.** 75. **C.** 77. **D.** 79.
- Câu 36:** Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?
A. 78. **B.** 156. **C.** 300. **D.** 48.
- Câu 37:** Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n . Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?
A. 98. **B.** 100. **C.** 102. **D.** 104.
- Câu 38:** Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?
A. 5.2500.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng. **C.** 4.000.000 đồng. **D.** 4.245.000 đồng.

BÀI 3: CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số nhân là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q , tức là: $u_n = u_{n-1} \cdot q$ ($n \geq 2$).

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q và $u_n \neq 0$ với mọi $n \geq 1$ thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q.$$

Chú ý:

Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad (n \geq 2).$$

III. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 1$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó: $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh một dãy số là cấp số nhân

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số nhân là xác định số hạng đầu u_1 và công bội q
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và q rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, \quad (n \geq 1) \end{cases}$.

- Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n = u_n + 3$, $n \geq 1$ là một cấp số nhân.
- Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Ví dụ 2: Xét trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bội của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$

b). $u_n = (-1)^n \cdot 5^{3n+2}$

c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Ví dụ 4: Cho $x, 3, y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4 = y\sqrt{3}$. Tìm x, y .

Dạng 2. Xác định các số hạng của cấp số nhân, tổng của cấp số nhân

1. Phương pháp

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1 , giải hệ phương trình này tìm được q và u_1 .

Để xác định số hạng thứ k , ta sử dụng công thức: $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$.

Để tính tổng của n số hạng, ta sử dụng công thức: $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì

$$u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n, \text{ do đó } S_n = nu_1.$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases} \end{array}$$

Ví dụ 2: Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

- Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.
- Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?
- Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Ví dụ 3: Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm u_1 và q , biết rằng:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2} \\ u_1 u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i = 1, \dots, 5) \end{cases} & 2) \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases} & 3) \begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \end{array}$$

$$4) u_1 + u_6 = 165; u_3 + u_4 = 60. \quad 5) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} 8u_2 + 5\sqrt{5}u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} u_1 u_2 u_3 = 1728 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases} & \text{e)} \quad & \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases} & \text{f)} \quad & \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tìm a, b biết rằng: 1, a, b là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Ví dụ 5: Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

Ví dụ 6: Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Ví dụ 7: Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

Ví dụ 8: Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Ví dụ 9: Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Ví dụ 10: Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

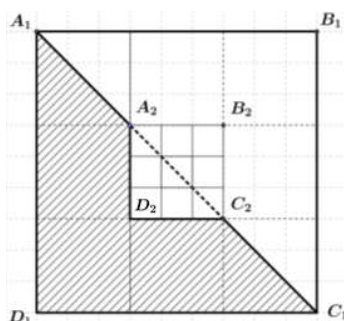
Ví dụ 11: Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Ví dụ 12: Tính các tổng sau:

$$\begin{aligned} \text{a). } S_n &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n \\ \text{b). } S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ \text{c). } S_n &= \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2 \\ \text{d). } S_n &= 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots6}_{n \text{ số } 6} \end{aligned}$$

Dạng 3. Các bài toán thực tế

Câu 1. Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu “đẹp”. Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:

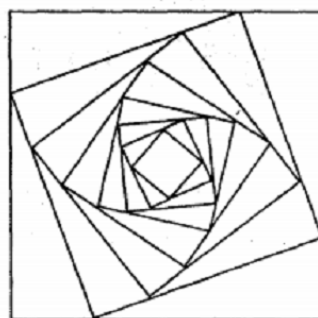


Bước 1: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm 49,99%.

Câu 2. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a . Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) (Hình vẽ).



Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1, 2, 3, \dots\}$). Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$. Biết $T = \frac{32}{3}$, tính a ?

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Vì sao?

a) $5; -0,5; 0,05; -0,005; 0,0005$

b) $-9, 3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9};$

c) $2, 8, 32, 64, 256.$

Bài 2. Chứng minh mỗi dãy số (u_n) với số hạng tổng quát như sau là cấp số nhân:

a) $u_n = \frac{-3}{4} \cdot 2^n$

b) $u_n = \frac{5}{3^n}$

c) $u_n = (-0,75)^n$

Bài 3. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$.

a) Tìm u_9 .

b) Số -320 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân trên?

c) Số 160 có phải là một số hạng của cấp số nhân trên không?

Bài 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3, u_3 = \frac{27}{4}$.

a) Tìm công bội q và viết năm số hạng đầu của cấp số nhân trên.

b) Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân trên.

Bài 5. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1% / năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

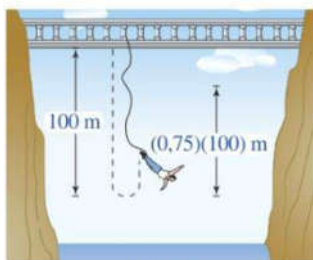
Bài 6. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.

b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Bài 7. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Hình 3

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là một cấp số nhân?

A. 2; 4; 8; 16; ...

B. 1; -1; 1; -1; ...

C. 1^2 ; 2^2 ; 3^2 ; 4^2 ; ...

D. a ; a^3 ; a^5 ; a^7 ; ... ($a \neq 0$).

Câu 2: Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. 1; 2; 4; 8; ...

B. 3; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; ...

C. 4; 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ...

D. $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ...

Câu 3: Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với:

A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.

B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.

D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. -2; 10; 50; -250.

B. -2; 10; -50; 250.

C. -2; -10; -50; -250.

D. -2; 10; 50; 250.

Câu 5: Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

A. 720.

B. 81.

C. 64.

D. 56.

Câu 6: Tìm x để các số 2; 8; x ; 128 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 14$.

B. $x = 32$.

C. $x = 64$.

D. $x = 68$.

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1$; x ; $2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $x = \pm \frac{1}{3}$.

C. $x = \pm \sqrt{3}$.

D. $x = \pm 3$.

Câu 8: Tìm x để ba số $1+x$; $9+x$; $33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 1$.

B. $x = 3$.

C. $x = 7$.

D. $x = 3$; $x = 7$.

- Câu 9:** Với giá trị x, y nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2; x; -18; y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?
- A. $\begin{cases} x = 6 \\ y = -54 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -10 \\ y = -26 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -6 \\ y = -54 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -6 \\ y = 54 \end{cases}$
- Câu 10:** Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $x; 12; y; 192$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. $x = 1; y = 144$. B. $x = 2; y = 72$. C. $x = 3; y = 48$. D. $x = 4; y = 36$.
- Câu 11:** Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số 5; $x; y; 320$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $\begin{cases} x = 25 \\ y = 125 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 15 \\ y = 45 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 30 \\ y = 90 \end{cases}$
- Câu 12:** Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6; x$ và y . Tìm y , biết rằng công bội của cấp số nhân là 6.
- A. $y = 216$. B. $y = \frac{324}{5}$. C. $y = \frac{1296}{5}$. D. $y = 12$.
- Câu 13:** Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:
- A. $2x-1$. B. $2x+1$. C. $8x^3-4x^2-2x+1$. D. $8x^3+4x^2-2x-1$.
- Câu 14:** Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?
- A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{2} \\ u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right), n \geq 1 \end{cases}$
- Câu 15:** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. (u_n) không phải là cấp số nhân.
- B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$.
- C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{2}$.
- D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.
- Câu 16:** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?
- A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. B. $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. C. $u_n = n + \frac{1}{3}$. D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.
- Câu 17:** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?
- A. $u_n = 7 - 3n$. B. $u_n = 7 - 3^n$. C. $u_n = \frac{7}{3n}$. D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.
- Câu 18:** Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?
- A. $u_1; u_3; u_5; \dots$ B. $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$

C. $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$ **D.** $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$

Câu 19: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 3; 9; 27; 81; Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n = 3^{n-1}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = 3^{n+1}$. **D.** $u_n = 3 + 3^n$.

Câu 20: Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = 2$. **D.** $q = -2$.

Câu 21: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_5 = -\frac{27}{16}$. **B.** $u_5 = -\frac{16}{27}$. **C.** $u_5 = \frac{16}{27}$. **D.** $u_5 = \frac{27}{16}$.

Câu 22: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_2 = -8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_6 = 130$. **B.** $u_5 = 256$. **C.** $S_5 = 256$. **D.** $q = -4$.

Câu 23: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.
C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Câu 24: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.
C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Câu 25: Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $q = \frac{1}{9}$. **B.** $q = 9$. **C.** $q = -9$. **D.** $q = -\frac{1}{9}$.

Câu 27: Một dãy số được xác định bởi $u_1 = -4$ và $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1}$, $n \geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

A. $u_n = 2^{n-1}$. **B.** $u_n = (-2)^{n-1}$. **C.** $u_n = -4(2^{-n+1})$. **D.** $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Câu 28: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10} = -511$. **B.** $S_{10} = -1025$. **C.** $S_{10} = 1025$. **D.** $S_{10} = 1023$.

Câu 29: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = 4^{n-1}$. **B.** $S_n = \frac{n(1+4^{n-1})}{2}$. **C.** $S_n = \frac{4^n - 1}{3}$. **D.** $S_n = \frac{4(4^n - 1)}{3}$.

- Câu 30:** Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.
A. $u_6 = 32$. **B.** $u_6 = 104$. **C.** $u_6 = 48$. **D.** $u_6 = 96$.
- Câu 31:** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n .
A. $n = 9$. **B.** $n = 10$. **C.** $n = 11$. **D.** $n = 12$.
- Câu 32:** Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.
A. $u_4 = 100$. **B.** $u_4 = 124$. **C.** $u_4 = 500$. **D.** $u_4 = 624$.
- Câu 33:** Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.
A. $u_5 = \frac{2}{3^4}$. **B.** $u_5 = \frac{1}{3^5}$. **C.** $u_5 = 3^5$. **D.** $u_5 = \frac{5}{3^5}$.
- Câu 34:** Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?
A. 4096. **B.** 2048. **C.** 1024. **D.** $\frac{1}{512}$.
- Câu 35:** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$.
A. $q = -3$. **B.** $q = -\frac{1}{3}$. **C.** $q = \frac{1}{3}$. **D.** $q = 3$.
- Câu 36:** Cho cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; \dots$ với $u_1 = 1$. Tìm công bội q để $4u_2 + 5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?
A. $q = -\frac{2}{5}$. **B.** $q = 0$. **C.** $q = \frac{2}{5}$. **D.** $q = 1$.
- Câu 37:** Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?
A. $u_n = 2^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2n$.
- Câu 38:** Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q . Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$. **B.** $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$. **C.** $u_k = \sqrt{u_{k+1} \cdot u_{k+2}}$. **D.** $u_k = u_1 + (k-1)q$.
- Câu 39:** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?
A. $u_7 = u_4 \cdot q^3$. **B.** $u_7 = u_4 \cdot q^4$. **C.** $u_7 = u_4 \cdot q^5$. **D.** $u_7 = u_4 \cdot q^6$.
- Câu 40:** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Với $1 < k < m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?
A. $u_m = u_k \cdot q^k$. **B.** $u_m = u_k \cdot q^m$. **C.** $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$. **D.** $u_m = u_k \cdot q^{m+k}$.
- Câu 41:** Cho một cấp số nhân có n số hạng ($n > k > 55$). Đẳng thức nào sau đây sai?
A. $u_1 \cdot u_n = u_2 \cdot u_{n-1}$. **B.** $u_1 \cdot u_n = u_5 \cdot u_{n-4}$. **C.** $u_1 \cdot u_n = u_{55} \cdot u_{n-55}$. **D.** $u_1 \cdot u_n = u_k \cdot u_{n-k+1}$.
- Câu 42:** Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) , biết $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$

Câu 43: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$

Câu 44: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q = 2$.

B. $q = -4$.

C. $q = 4$.

D. $q = -2$.

Câu 45: Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$

Câu 46: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} \right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}$$

Tính $P = u_1 + 4q^2$.

A. $P = 24$.

B. $P = 29$.

C. $P = 34$.

D. $P = 39$.

Câu 47: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q > 1$.

A. $q = \frac{5}{4}$.

B. $q = 4$.

C. $q = \frac{4}{3}$.

D. $q = 3$.

Câu 48: Các số $x+6y$, $5x+2y$, $8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1$, $y+2$, $x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

A. $x^2 + y^2 = 40$.

B. $x^2 + y^2 = 25$.

C. $x^2 + y^2 = 100$.

D. $x^2 + y^2 = 10$.

Câu 49: Ba số x ; y ; z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số x ; $2y$; $3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q .

A. $q = \frac{1}{3}$.

B. $q = \frac{1}{9}$.

C. $q = -\frac{1}{3}$.

D. $q = -3$.

Câu 50: Cho dãy số tăng a , b , c ($c \in \mathbb{Z}$) theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời a , $b+8$, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng và a , $b+8$, $c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P = a - b + 2c$.

A. $P = \frac{184}{9}$.

B. $P = 64$.

C. $P = \frac{92}{9}$.

D. $P = 32$.

Câu 51: Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q . Tìm q .

- A.** $q = 2$. **B.** $q = -2$. **C.** $q = -\frac{3}{2}$. **D.** $q = \frac{3}{2}$.

Câu 52: Cho bốn số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q > 1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a + d = 14$ và $b + c = 12$.

- A.** $q = \frac{18 + \sqrt{73}}{24}$. **B.** $q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$. **C.** $q = \frac{20 + \sqrt{73}}{24}$. **D.** $q = \frac{21 + \sqrt{73}}{24}$.

Câu 53: Gọi $S = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

- A.** $S = \frac{10^n - 1}{81}$. **B.** $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right)$.
C. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right) - n$. **D.** $S = \frac{1}{9} \left[10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n \right]$.

Câu 54: Biết rằng $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \dots + 11.3^{10} = a + \frac{21.3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

- A.** $P = 1$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 4$.

Câu 55: Một cấp số nhân có ba số hạng là a, b, c (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{bc}$. **B.** $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$. **C.** $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{ba}$. **D.** $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$.

Câu 56: Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

- A.** 56° . **B.** 102° . **C.** 252° . **D.** 168° .

Câu 57: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\,288\,m^2$). Tính diện tích mặt trên cùng.

- A.** $6m^2$. **B.** $8m^2$. **C.** $10m^2$. **D.** $12m^2$.

Câu 58: Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

- A.** Hòa vốn. **B.** Thua 20000 đồng.
C. Thắng 20000 đồng. **D.** Thua 40000 đồng.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giao viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. Ủng hộ chính chủ để được bảo hành và nhiều ưu đãi khác.

Tránh mua các trang và cá nhân khác

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

PHẦN 1: GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_n = 3u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Số hạng thứ năm của dãy số (u_n) là:

- A. 27. B. 9. C. 81. D. 243.

Bài 2: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

- A. 21, -3, -27, -51, -75. B. $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}$.
C. $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$. D. $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60}$.

Bài 3: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$, công sai $d = 4$. Công thức của số hạng tổng quát u_n là:

- A. $u_n = -5 + 4n$. B. $u_n = -1 - 4n$.
C. $u_n = -5 + 4n^2$. D. $u_n = -9 + 4n$.

Bài 4: Tổng 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên tính từ 1 là:

- A. 10000. B. 10100. C. 20000. D. 20200.

Bài 5: Trong các dãy số (u_n) cho bằng phương pháp truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- A. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}(n-1)$ với mọi $n \geq 2$.
B. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1} + 1$ với mọi $n \geq 2$.
C. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}^2$ với mọi $n \geq 2$.
D. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

Bài 6: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$. Khi đó $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ:

- A. 2016. B. 2017. C. 2018. D. 2019

Bài 7: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số tăng?

- A. $u_n = \sin n$. B. $u_n = n(-1)^n$. C. $u_n = \frac{1}{n}$. D. $u_n = 2^{n+1}$.

Bài 8: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của mỗi dãy số (u_n) sau, biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \frac{n^2}{n+1}$;

b) $u_n = \frac{2}{5^n}$

c) $u_n = (-1)^n \cdot n^2$

Bài 9: Cho cấp số cộng (u_n) . Tìm số hạng đầu u_1 , công sai d trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_2 + u_5 = 42$ và $u_4 + u_9 = 66$;

b) $u_2 + u_4 = 22$ và $u_1 \cdot u_5 = 21$.

Bài 10: Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm số hạng đầu u_1 , công bội q trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_6 = 192$ và $u_7 = 384$

b) $u_1 + u_2 + u_3 = 7$ và $u_5 - u_2 = 14$.

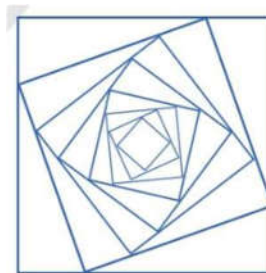
Bài 11: Tứ giác $ABCD$ có số đo bốn góc A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Biết số đo góc C gấp 5 lần số đo góc A . Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$ theo đơn vị độ.

Bài 12: Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Bài 13: Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là 12288 m^2 . Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Bài 14: Một khay nước có nhiệt độ 23°C được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

Bài 15: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Bài 16: Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất $12\%/năm$. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG 2

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là *sai*?

A. Dãy số có $u_{n+1} = a \cdot 3^{n+1}$.

B. Hiệu số $u_{n+1} - u_n = 3 \cdot a$.

C. Với $a > 0$ thì dãy số tăng.

D. Với $a < 0$ thì dãy số giảm.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$. Dãy số (u_n) là dãy số

A. Bị chặn trên bởi 1. B. Giảm.

C. Bị chặn dưới bởi 2. D. Tăng.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng của (u_n) đều lớn hơn 2018?

A. 287.

B. 289.

C. 288.

D. 286.

Câu 4: Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) có $u_9 = 5u_2$ và $u_{13} = 2u_6 + 5$.

A. $u_1 = 3$ và $d = 4$.

B. $u_1 = 3$ và $d = 5$.

C. $u_1 = 4$ và $d = 5$.

D. $u_1 = 4$ và $d = 3$.

Câu 5: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

A. $S_{16} = -24$.

B. $S_{16} = 26$.

C. $S_{16} = -25$.

D. $S_{16} = 24$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng.

A. $u_1 = 2$; $d = 4$.

B. $u_1 = 2$; $d = 3$.

C. $u_1 = 2$; $d = 2$.

D. $u_1 = 3$; $d = 2$.

Câu 7: Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tích của bốn số đó là:

A. 585.

B. 161.

C. 404.

D. 276.

Câu 8: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng là.

A. -244.

B. -274.

C. -253.

D. -285.

Câu 9: Cho dãy số u_n biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

A. $u_n = 3^n$.

B. $u_n = 3^{n+1}$.

C. $u_n = 3^{n-1}$.

D. $u_n = n^{n+1}$.

Câu 10: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 - u_1 = 26 \end{cases}$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n)

là

A. $S_8 = 3280$.

B. $S_8 = 9841$.

C. $S_8 = 3820$.

D. $S_8 = 1093$.

PHẦN 2: TỰ LUẬN

Câu 11: Tìm giá trị x dương nhỏ nhất thỏa mãn ba số $\sin x, \sin 2x, \sqrt{3} \cos x$ lập thành cấp số cộng.

Câu 12: Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số

$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Câu 13: Chu vi của một đa giác là 45 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3 \text{ cm}$. Biết cạnh lớn nhất là 15 cm, tính số cạnh của đa giác đó.

Câu 14: Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- a) Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 105.
- b) Tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương của chúng bằng 155.

Câu 15: Cho ba số a, b, c theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$ và $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

- a) Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n = u_n + 3, n \geq 1$ là một cấp số nhân.
- b) Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 17: Cho cấp số nhân có
$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$$

- a) Tìm số hạng đầu tiên và công bội
- b) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.
- c) Tổng của bao nhiêu số hạng đầu sẽ bằng 765.
- d) Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Câu 18: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết

- a)
$$\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_3 + u_5 = 240 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases}$$

Câu 19: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết

- a)
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ S_8 = \frac{3^8 - 1}{2} \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} S_4 = 40 \\ S_8 = 680 \end{cases}$$

Câu 20: Tìm ba số khác nhau tạo thành cấp số cộng có tổng bằng 6, biết rằng nếu hoán đổi vị trí số hạng thứ nhất và số hạng thứ hai đồng thời giữ nguyên số hạng thứ ba ta được cấp số nhân.

CHƯƠNG 3 : GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

-Ta có định nghĩa dãy số có giới hạn 0 như sau:

Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Chú ý: Ngoài kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, ta cũng sử dụng các kí hiệu sau: $\lim u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta có: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Nhận xét: Nếu u_n ngày càng gần tới 0 khi n ngày càng lớn thì $\lim u_n = 0$.

-Ta có định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn như sau:

Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

Chú ý: Ngoài kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, ta cũng sử dụng các kí hiệu sau: $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$

Chú ý:

-Một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

-Không phải dãy số nào cũng có giới hạn, chẳng hạn như dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

2. Một số giới hạn cơ bản

Ta có thể chứng tỏ được các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương cho trước;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{n^k} = 0$ với c là hằng số, k là số nguyên dương cho trước;

c) Nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$;

d) Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là e , $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Một giá trị gần đúng của e là 2,718281828459045.

II. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Ta có định lý về giới hạn hữu hạn của một tổng, của một hiệu, của một tích, của một thương và của một căn thức như sau:

a) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì:

$$\lim (u_n + v_n) = a + b;$$

$$\lim (u_n - v_n) = a - b.$$

$$\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b;$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (v_n \neq 0, b \neq 0).$$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

III. TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, \dots, u_1q^{n-1}, \dots$ có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là: $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q}$.

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

-Ta có định nghĩa về dãy số có giới hạn vô cực như sau:

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ hay $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

-Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ hay $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Nhận xét

$\lim n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương cho trước.

$\lim q^n = +\infty$ với $q > 1$ là số thực cho trước.

Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ (hoặc $\lim v_n = -\infty$) thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Nếu $\lim u_n = a, a > 0$ và $\lim v_n = 0, v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim (-u_n) = -\infty$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Giới hạn hữu tỉ

1. Phương pháp

Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cả tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của n^k , với k là bậc cao nhất ở mẫu, rồi áp dụng các quy tắc tính giới hạn.

Chú ý: Cho $P(n), Q(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m, k theo biến n :

$$P(x) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0 \quad (a_m \neq 0)$$

$$Q(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0 \quad (b_k \neq 0)$$

Khi đó $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim \frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, viết tắt $\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, ta có các trường hợp sau:

Nếu « bậc tử » < « bậc mẫu » ($m < k$) thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$.

Nếu « bậc tử » = « bậc mẫu » ($m = k$) thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_k}$.

Nếu « bậc tử » > « bậc mẫu ($m > k$) » thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_m b_k > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_m b_k < 0 \end{cases}$.

Để ý rằng nếu $P(n), Q(n)$ có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó. Cụ thể

$\sqrt[n]{n^k}$ thì có bậc là $\frac{k}{n}$. Ví dụ $\sqrt{n}$ có bậc là $\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{n^4}$ có bậc là $\frac{4}{3}, \dots$

Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng !

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim \frac{3n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 6n^2 + 4n + 5}$.

Ví dụ 2: Tính $\lim \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1}$

Ví dụ 3: Tính $\lim \frac{n^7 + n^2}{n^3 + 3n - 1}$

Ví dụ 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b bằng bao nhiêu

Ví dụ 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a bằng bao nhiêu

Ví dụ 6: Tính giới hạn $L = \lim \frac{(n^2 + 2n)(2n^3 + 1)(4n + 5)}{(n^4 - 3n - 1)(3n^2 - 7)}$.

Dạng 2. Dãy số chứa căn thức

1. Phương pháp

- Nếu biểu thức chứa căn thức cần nhân một lượng liên hiệp để đưa về dạng cơ bản.

$\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$	lượng liên hiệp là: $\frac{A+B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
$\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$	lượng liên hiệp là: $\frac{A+B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
$\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$	lượng liên hiệp là: $\frac{A+B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
$\frac{A-B}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}$	lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2} \right)$
$\frac{A-B}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}$	lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2} \right)$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim \left(\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 5} \right)$

Ví dụ 2. Tính $\lim \left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n \right)$

Ví dụ 3. Tính $\lim \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \right)$

Ví dụ 4. Tính $\lim \left[\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right]$

Dạng 3. Tính giới hạn của dãy số chứa hàm mũ

1. Phương pháp

Trong tính giới hạn $\lim \frac{u_n}{v_n}$ mà $u_n; v_n$ là hàm số mũ thì chia cả tử và mẫu cho a^n với a là cơ số lớn nhất. Sau đó sử dụng công thức: $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n}$

Ví dụ 2: Tính $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$

Ví dụ 3: Tính $\lim \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$

Ví dụ 4: Tính $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$.

Ví dụ 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0; 20)$ sao cho $\lim \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

Dạng 4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

1. Phương pháp

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là $|q| < 1$.

✓ Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

✓ Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của 10

$$X = N, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$

Ví dụ 2: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 0,212121\dots$ (chu kỳ là 21). Tìm a dưới dạng phân số.

Ví dụ 3: Tổng $S_n = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$ có kết quả bằng bao nhiêu?

Ví dụ 4: Cho $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, |q| < 1$

$$T = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + \dots, |Q| < 1$$

$$E = 1 + qQ + q^2Q^2 + q^3Q^3 + \dots$$

Biểu thị biểu thức E theo S, T

Ví dụ 5: Tìm số hạng U_1 của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S = 4; q = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 6: Tìm công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S = -6; U_1 = -3$.

Dạng 5: Phương pháp sai phân và quy nạp tính giới hạn

1. Phương pháp

1) Dạng tổng các phân số.

Ví Dụ: $A = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Ta phân tích: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (1)$

Để tính A ta thay k từ $2, 3, \dots, n$ vào biểu thức (1) ta tính dễ dàng

2) Dạng tích các phân số:

Ví dụ: $B = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \dots, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Ta phân tích: $\frac{k^2-1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} \quad (2)$

Để tính B ta thay k từ $2, 3, \dots, n$ vào biểu thức (2) ta tính dễ dàng

3) Dạng đa thức:

a) Mỗi đơn thức ở dạng tích:

Ví dụ: $C = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 99.100.101$

Ta tách:

$$4k(k+1)(k+2) : 4 = k(k+1)(k+2)[(k+3) - (k-1)] \quad , k \geq 1, k \in \mathbb{N}$$

$$= (-(k-1)k(k+1)(k+2) + k(k+1)(k+2)(k+3)) : 4 \quad (3)$$

Để tính C ta thay k từ $1, 2, 3, \dots, 99$ vào biểu thức (3) ta tính được dễ dàng

Ví dụ: $D = 3.5.7 + 5.7.9 + \dots + (2n+1)(2n+3)(2n+5), n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

Ta tách: $(2k+1)(2k+3)(2k+5) = (2k+1)(2k+3)(2k+5)[(2k+7) - (2k+1)] : 8$

$$= ((2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7) - (2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)) : 8 \quad (4)$$

Để tính D ta thay k từ $1, 2, 3, \dots, n$ vào biểu thức (4) ta tính dễ dàng

4) Đơn thức dạng lũy thừa

Ví Dụ: Tính $E = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Ta dùng hằng đẳng thức: $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$

$x = 1 \quad 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$

$x = 2 \quad 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$

...

$x = n \quad (n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$

Cộng vế theo vế

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3E + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$3E = n^3 + 3n^2 + 3n - \left(\frac{3 \cdot n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ngoài ra ta có thể dự đoán được số hạng tổng quát, có thể kết hợp quy nạp để khẳng định. Có thể dùng vòng lặp MTCT để giải quyết các bài toán này.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Ví dụ 2: Cho $u_n = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Ví dụ 3: $\lim \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2}$ bằng bao nhiêu?

Ví dụ 4: Tính giới hạn: $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$.

Ví dụ 5: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{2}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Ví dụ 6: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Ví dụ 7: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right); n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \frac{1}{n}; v_n = 5 - \frac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim u_n, \lim v_n$.

b) $\lim (u_n + v_n), \lim (u_n - v_n), \lim (u_n \cdot v_n), \lim \frac{u_n}{v_n}$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{5n+1}{2n}$;

b) $\lim \frac{6n^2+8n+1}{5n^2+3}$;

c) $\lim \frac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2}$;

d) $\lim \left(2 - \frac{1}{3^n} \right)$;

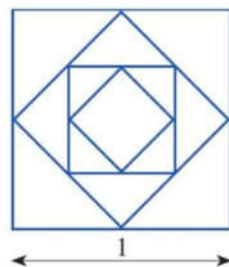
e) $\lim \frac{3^n + 2^n}{4 \cdot 3^n}$;

g) $\lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{3^n}$.

Bài 3. a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , với $u_1 = \frac{2}{3}, q = -\frac{1}{4}$.

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,(6)$ dưới dạng phân số.

Bài 4. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như *Hình 3*.



Hình 3

Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n ;

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Bài 5. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất

phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kì

bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

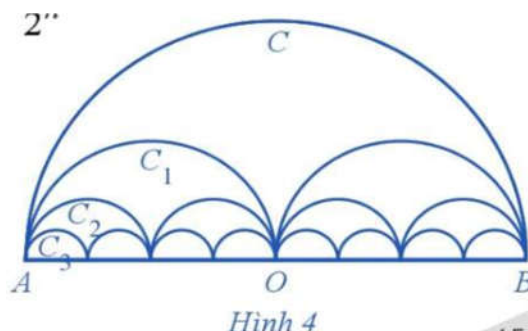
Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n .

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Bài 6. Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$, C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$, ..., C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ... (Hình 4).



Hình 4

Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

a) Tính p_n, S_n .

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1}$ là:

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\infty$. C. 0. D. -1.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ là:

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{2}{7}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 3: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

- A. $a = 10$. B. $a = 8$. C. $a = 6$. D. $a = 4$.

Câu 5: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}$.

- A. $L = \frac{3}{2}$. B. $L = \frac{1}{2}$. C. $L = 2$. D. $L = 1$.

Câu 6: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2}$.

- A. $L = -\frac{3}{2}$. B. $L = \frac{1}{5}$. C. $L = \frac{1}{2}$. D. $L = 0$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n + 1} > 0$.

- A. $a \leq 0; a \geq 1$. B. $0 < a < 1$. C. $a < 0; a > 1$. D. $0 \leq a < 1$.

Câu 8: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - n^3)(3n^2 + 1)}{(2n - 1)(n^4 - 7)}$.

- A. $L = -\frac{3}{2}$. B. $L = 1$. C. $L = 3$. D. $L = +\infty$.

Câu 9: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2}$ là:

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 10: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1}$ là:

- A. $\frac{3}{4}$. B. $+\infty$. C. 0 D. $\frac{5}{7}$.

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - n^4}{4n - 5}$ là:

- A.** 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 12: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- A.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n^3}{2n^2-1}$. **B.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **C.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. **D.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Câu 13: Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

- A.** $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$. **B.** $u_n = \frac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$. **C.** $u_n = \frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. **D.** $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+1}$.

Câu 14: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n - 3)$.

- A.** $L = 3$. **B.** $L = -\infty$. **C.** $L = 5$. **D.** $L = +\infty$.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = -\infty$.

- A.** 17. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 16: Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^4 + 4n^2 - n + 1)$.

- A.** $L = 7$. **B.** $L = -\infty$. **C.** $L = 3$. **D.** $L = +\infty$.

Câu 17: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})$ bằng:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 18: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-1} - \sqrt{3n^2+2})$ là:

- A.** -2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 19: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n})$ là:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+a^2n} - \sqrt{n^2+(a+2)n+1}) = 0$.

- A.** 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2-n+1} - \sqrt{2n^2-3n+2})$ là:

- A.** 0. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 22: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n-1} - \sqrt{2n^2+n})$ là:

- A.** -1. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-8n-n+a^2}) = 0$.

- A.** 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 24: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-2n+3} - n)$ là:

- A.** -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 25: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2+an+5} - \sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -1$.

- A.** 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Câu 26: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2})$ bằng:

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 27: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n)$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 0. D. 1.

Câu 28: Giá trị của giới hạn $\lim[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})]$ là:

- A. -1. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

Câu 29: Giá trị của giới hạn $\lim[n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3})]$ bằng:

- A. -1. B. 2. C. 4. D. $+\infty$.

Câu 30: Giá trị của giới hạn $\lim[n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6})]$ là:

- A. $\sqrt{7}-1$. B. 3. C. $\frac{7}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 31: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là:

- A. 1. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 32: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

- A. 1. B. 0. C. 3. D. $+\infty$.

Câu 33: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ là:

- A. 2. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 34: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ bằng:

- A. $-\frac{25}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. 1. D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 35: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ bằng:

- A. -1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 36: Biết rằng $\lim\left(\frac{(\sqrt{5})^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+(\sqrt{5})^{n+1}-3}+\frac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\frac{a\sqrt{5}}{b}+c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức

$$S=a^2+b^2+c^2.$$

- A. $S=26$. B. $S=30$. C. $S=21$. D. $S=31$.

Câu 37: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$ là:

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 38: Kết quả của giới hạn $\lim[3^n-\sqrt{5}^n]$ là:

- A. 3. B. $-\sqrt{5}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 39: Kết quả của giới hạn $\lim (3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n)$ là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. -1 . C. $-\infty$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 40: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n}$ là:

- A. 0. B. 1. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 41: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2}$ là:

- A. $+\infty$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\infty$.

Câu 42: Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2018)$ để $\lim \sqrt[n]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{1024}$.

- A. 2007. B. 2008. C. 2017. D. 2016.

Câu 43: Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n-1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. -1 . C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 44: Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n} - 1} \right)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. -1 .

Câu 45: Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2}$ là:

- A. 0. B. 2. C. 3. D. $+\infty$.

Câu 46: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 4$. C. $u_1 = \frac{9}{2}$. D. $u_1 = 5$.

Câu 47: Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$

- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 14$. C. $S = 16$. D. $S = 15$.

Câu 48: Tính tổng $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.

- A. $S = \sqrt{2} + 1$. B. $S = 2$. C. $S = 2\sqrt{2}$. D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 49: Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$.

A. $S = 3$.

B. $S = 4$.

C. $S = 5$.

D. $S = 6$.

Câu 50: Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, \dots$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{8}$.

Câu 51: Tính tổng $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) + \dots$.

A. 1.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 52: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} (|a| < 1, |b| < 1)$ bằng:

A. 0.

B. $\frac{1-b}{1-a}$.

C. $\frac{1-a}{1-b}$.

D. Không tồn tại.

Câu 53: Rút gọn $S = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots$ với $\cos x \neq \pm 1$.

A. $S = \sin^2 x$.

B. $S = \cos^2 x$.

C. $S = \frac{1}{\sin^2 x}$.

D. $S = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 54: Rút gọn $S = 1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \sin^{2n} x + \dots$ với $\sin x \neq \pm 1$.

A. $S = \sin^2 x$.

B. $S = \cos^2 x$.

C. $S = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$.

D. $S = \tan^2 x$.

Câu 55: Thu gọn $S = 1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

A. $S = \frac{1}{1 - \tan \alpha}$.

B. $S = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}$.

C. $S = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$.

D. $S = \tan^2 \alpha$.

Câu 56: Cho m, n là các số thực thuộc $(-1; 1)$ và các biểu thức:

$$M = 1 + m + m^2 + m^3 + \dots$$

$$N = 1 + n + n^2 + n^3 + \dots$$

$$A = 1 + mn + m^2 n^2 + m^3 n^3 + \dots$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A = \frac{MN}{M + N - 1}$.

B. $A = \frac{MN}{M + N + 1}$.

C. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} - \frac{1}{MN}$.

D. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{MN}$.

Câu 57: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng

$$T = a + b.$$

A. 17.

B. 68.

C. 133.

D. 137.

Câu 58: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

A. 3456.

B. 3465.

C. 3645.

D. 3546.

Câu 59: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B=5,231231\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính

$$T = a - b.$$

A. 1409.

B. 1490.

C. 1049.

D. 1940.

Câu 60: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$.

B. $a - b > 2^{14}$.

C. $a - b > 2^{13}$.

D. $a - b > 2^{12}$.

Câu 61: Tính giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 1.

Câu 62: Tính giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. Không có giới hạn.

Câu 63: Tính giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n-1)(2n+1)} \right]$.

A. 1.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Câu 64: Tính giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$.

A. $\frac{3}{4}$.

B. 1.

C. 0.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 65: Tính giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right]$.

A. $\frac{11}{18}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 66: Cho dãy (u_n) với $u_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n = 0$.

B. $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

C. $\lim u_n = 1$.

D. $\lim u_n$ không tồn tại.

Câu 67: Tìm giới hạn của dãy:
$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

A. 2.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. Không có giới hạn.

Câu 68: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{2 + U_n^2}{2U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

- A.** 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** Không có giới hạn.

Câu 69: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 \cdot U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

- A.** 2. **B.** $1 + \sqrt{2}$. **C.** $\frac{1 + \sqrt{7}}{2}$. **D.** Không có giới hạn.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa .

Ứng hộ chính chủ để được bảo hành và thêm nhiều ưu đãi khác

Tránh mua các trang và cá nhân khác

BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ**A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM****1. Định nghĩa**

Ta viết khoảng K thay cho các khoảng $(a; b), (-\infty; b), (a; +\infty), (-\infty; +\infty)$.

Tổng quát ta có:

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, với c là hằng số.

Chú ý:

Hàm số $f(x)$ có thể không xác định tại $x = x_0$ nhưng vẫn tồn tại giới hạn của hàm số đó khi x dần tới x_0 .

2. Phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số

Ta thừa nhận định lí sau:

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbb{R}$) thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

3. Giới hạn một phía

-Trong trường hợp tổng quát, ta có các định nghĩa sau:

■ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì,

$a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

■ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì,

$x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

Định lí sau đây cho ta mối liên hệ giữa "giới hạn hai phía" $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ với giới hạn bên trái $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và giới hạn bên phải $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có

$$f(x_n) \rightarrow L.$$

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Chú ý

Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC (MỘT PHÍA) CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow a^+$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow a$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow a^+$.

Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Chú ý: Ta có hai giới hạn cơ bản sau:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty; \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty.$$

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

-Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Các trường hợp $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Chú ý: Ta có ba giới hạn cơ bản sau:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \text{ với } k \text{ là số nguyên dương.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty \text{ với } k \text{ là số nguyên dương chẵn.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty \text{ với } k \text{ là số nguyên dương lẻ.}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dãy số có giới hạn hữu hạn

1. Phương pháp

Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên $K \ni x_0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 7)$.

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1}$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow -1} |4x^3 - 2x - 3|$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2}$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}}$

Dạng 2. Giới hạn tại vô cực

1. Phương pháp

Giới hạn hữu hạn tại vô cực

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n) , $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ ta đều có $\lim f(x) = L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Giới hạn vô cực tại vô cực

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n) , $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ ta đều có $\lim f(x) = +\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

Một số giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0 \text{ (} c \text{ là hằng số, } k \text{ nguyên dương).}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số nguyên lẻ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(x)] = -\infty$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x)$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - 2x^2 + 1)$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Ví dụ 4: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1})$

Dạng 3. giới hạn một bên

1. Phương pháp

Ta cần nắm các tính chất sau

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_0 < x_n < b, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), a < x_n < x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{2x-6}$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}}$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 + 2x}$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{x}}{5x - \sqrt{x}}$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Dạng 3. Dạng vô định $\frac{0}{0}$

1. Phương pháp

✓ Nhận dạng vô định $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$.

✓ Phân tích tử và mẫu thành các nhân tử và giản ước

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)A(x)}{(x - x_0)B(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} \text{ và tính } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)}.$$

Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm là x_0 thì $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$

Đặc biệt:

- Nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, mà $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $f(x)$ được phân tích thành $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)
 - $a + b + c + d = 0$ thì pt có một nghiệm là $x_1 = 1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner
 - $a - b + c - d = 0$ thì pt có một nghiệm là $x_1 = -1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner
- Nếu $u(x)$ và $v(x)$ có chứa dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hiệp, sau đó phân tích chúng thành tích để giản ước.

$A - B$ lượng liên hiệp là: $A + B$.

$\sqrt{A} - \sqrt{B}$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.

$\sqrt{A} - \sqrt{B}$ lượng liên hiệp là: $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.

$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A} \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B^2}\right)$.

$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{A} \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B^2}\right)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

Ví dụ 2: Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2}$.

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{t \rightarrow a} \frac{t^4 - a^4}{t - a}$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1}$

Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x + 7} - 3}$

Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{\sqrt{x} - 2}$

Ví dụ 9: Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2}{4 - \sqrt{2x^2 + 8}}$

Ví dụ 10: Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[4]{x^2 + 12} - 2}{x^2 - 4}$

Ví dụ 11: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{x^2 - 1}$

Dạng 4. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

1. Phương pháp

✓ Nhận biết dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} \text{ khi } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \pm\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)} \text{ khi } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \pm\infty.$$

- ✓ Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến ở mẫu (Hoặc phân tích thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước)
- ✓ Nếu $u(x)$ hoặc $v(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (Với k là mũ cao nhất của biến x trong dấu căn), sau đó chia tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x (thường là bậc cao nhất ở mẫu).
- ✓ Cách tính giới hạn dạng này hoàn toàn tương tự giới hạn dãy số.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3}{x - 2x^4}$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2}$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2}$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}}$

Ví dụ 5: Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1 - x + 2}}$.

Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x + 5}}{2x - 7}$

Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 5) \sqrt{\frac{x}{x^3 - 1}}$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^2 + 1)^3 (1 - 2x)^{94}}{2x^{100} + 3}$

Dạng 5. Dạng vô định $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$

1. Phương pháp

- ✓ Nếu biểu thức chứa biến số dưới dấu căn thì nhân và chia với biểu thức liên hợp
- ✓ Nếu biểu thức chứa nhiều phân thức thì quy đồng mẫu và đưa về cùng một biểu thức.
- ✓ Thông thường, các phép biến đổi này có thể cho ta khử ngay dạng vô định $\infty - \infty; 0 \cdot \infty$ hoặc chuyển về dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 3})$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 5} - x)$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x + 1} - 1 \right)$

Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 5} = 0$.

Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2} - x)$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$

Ví dụ 9: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-7})$

Ví dụ 10: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x} - x)$.

Ví dụ 11: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 5} = 1$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} x^2$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

Bài 2. Biết rằng hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$. Trong trường hợp này có tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ hay không? Giải thích.

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 3)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+1}{3x-4}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x-11}{2x+3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{1}{x-6}$

g) $\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{x-7}$

Bài 5. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Bài 6. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ là:

A. 37.

B. 38.

C. 39.

D. 40.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ là:

A. $\sin \frac{1}{2}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 0.

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là:

- A.** 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}$ là:

- A.** 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}$ là:

- A.** $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$ là:

- A.** $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{(2x - 1)(x^4 - 3)}}$ là:

- A.** $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}}$ là:

- A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1}$ là:

- A.** $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1)$ là:

- A.** 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 12: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|)$ là:

- A.** 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 13: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ là:

- A.** 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2} - 1$. **D.** $-\infty$.

Câu 14: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2})$ là:

- A.** $\sqrt[3]{3} + 1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3} - 1$. **D.** $-\infty$.

Câu 15: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{4x^2 + 7x + 2x})$ là:

- A.** 4. **B.** $-\infty$. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Câu 16: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. 3. D. Không xác định.

Câu 17: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ là:

- A. $-\frac{3}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 18: Biết rằng $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = a\sqrt{3} + b$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. 9. B. 25. C. 5. D. 13.

Câu 19: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right|$ là:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 20: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 - x}{\sqrt{27 - x^3}}$ là:

- A. $\frac{1}{3}$. B. 0. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21})^{\sqrt[3]{1 - 2x}} - \pi^{21}}{x}$ là:

- A. $-\frac{2\pi^{21}}{7}$. B. $-\frac{2\pi^{21}}{9}$. C. $-\frac{2\pi^{21}}{5}$. D. $\frac{1 - 2\pi^{21}}{7}$.

Câu 22: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2}$ là:

- A. 0. B. $-\infty$. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 23: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x + 4} - 2}$ là:

- A. -1. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 24: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{13}{12}$. C. $\frac{11}{12}$. D. $-\frac{13}{12}$.

Câu 25: Biết rằng $b > 0$, $a + b = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $1 < a < 3$. B. $b > 1$. C. $a^2 + b^2 > 10$. D. $a - b < 0$.

Câu 26: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là:

- A. -2. B. $+\infty$. C. 3. D. 2.

Câu 27: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là:

- A. -2. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 2.

- Câu 28:** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5}$ là:
A. -2 . **B.** $+\infty$. **C.** 0 . **D.** $-\infty$.
- Câu 29:** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là:
A. -2 . **B.** $+\infty$. **C.** 3 . **D.** -1 .
- Câu 30:** Biết rằng $\frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$.
A. $P_{\min} = 1$. **B.** $P_{\min} = 3$. **C.** $P_{\min} = 4$. **D.** $P_{\min} = 5$.
- Câu 31:** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:
A. -2 . **B.** -1 . **C.** -2 . **D.** $+\infty$.
- Câu 32:** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ là:
A. $-\frac{1}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{1}{5}$.
- Câu 33:** Biết rằng $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx} > 0$ là hữu hạn (với a, b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng.
A. $a \geq 0$. **B.** $L = -\frac{3}{a+b}$. **C.** $L = \frac{3}{b-\sqrt{a}}$. **D.** $b > 0$.
- Câu 34:** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$ là:
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 0 . **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1 .
- Câu 35:** Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2+1}+ax)$ là $+\infty$.
A. $a > \sqrt{2}$. **B.** $a < \sqrt{2}$. **C.** $a > 2$. **D.** $a < 2$.
- Câu 36:** Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2)$ là:
A. 1 . **B.** $+\infty$. **C.** -1 . **D.** $-\infty$.
- Câu 37:** Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ là:
A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0 . **D.** 1 .
- Câu 38:** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}$ là:
A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{15}{2}$. **D.** 1 .
- Câu 39:** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:
A. $-\infty$. **B.** $+\infty$.

C. $-\frac{15}{2}$.

D. Không xác định.

Câu 40: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2}$ là:

A. $-\infty$.

B. 3.

C. $+\infty$.

D. Không xác định.

Câu 41: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 42: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là:

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là:

A. $+\infty$.

B. 2.

C. 4.

D. $-\infty$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là:

A. $+\infty$.

B. -1.

C. 0.

D. 1.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{với } x \geq 2 \\ x-1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là:

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. Không tồn tại.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}+3 & \text{với } x \geq 2 \\ ax-1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

A. $a = 1$.

B. $a = 2$.

C. $a = 3$.

D. $a = 4$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3 \\ 3-2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$.

B. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$.

D. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -15$.

Câu 48: Biết rằng $a+b=4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right)$.

A. 1.

B. 2.

C. 1.

D. -2.

Câu 49: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x)$ là:

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt{2}-1$.

D. $-\infty$.

Câu 50: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ là:

- A.** 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\infty$.

Câu 51: Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5}) = a\sqrt{5} + b$. Tính $S = 5a + b$.

- A.** $S = 1$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = -5$.

Câu 52: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x})$ là:

- A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 53: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2})$ là:

- A.** $\sqrt[3]{3} + 1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3} - 1$. **D.** $-\infty$.

Câu 54: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^3 - x^2})$ là:

- A.** $\frac{5}{6}$. **B.** $+\infty$. **C.** -1 . **D.** $-\infty$.

Câu 55: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1})$ là:

- A.** 0. **B.** $+\infty$ **C.** -1 . **D.** $-\infty$.

Câu 56: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ là:

- A.** $+\infty$ **B.** -1 . **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 57: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}$ là:

- A.** 1. **B.** $+\infty$ **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 58: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x + 1}{3x^3 + x^2 + 2}}$ là:

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$.

Câu 59: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right)$ là:

- A.** 0. **B.** -1 . **C.** π . **D.** $+\infty$

Câu 60: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$ là:

- A.** 3. **B.** $+\infty$ **C.** 0. **D.** $-\infty$.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa.

Tránh mua các trang và cá nhân khác

BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC**A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. KHÁI NIỆM****1. Hàm số liên tục tại một điểm**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nhận xét: Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0 .

2. Hàm số liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu hàm số đó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Chú ý: Khái niệm hàm số liên tục trên các tập hợp có dạng $(a; b], [a; b), (a; +\infty), [a; +\infty), (-\infty; a), (-\infty; a], (-\infty; +\infty)$ được định nghĩa tương tự.

Nhận xét: Đồ thị hàm số liên tục trên một khoảng là "đường liền" trên khoảng đó.

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN**1. Tính liên tục của một số hàm sơ cấp cơ bản**

-Trong trường hợp tổng quát, ta có định lý sau:

Các hàm đa thức và hai hàm số lượng giác $y = \sin x, y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Các hàm phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác $y = \tan x, y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Hàm căn thức $y = \sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

2. Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lý sau:

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 ;

b) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**Dạng 1: Hàm số liên tục tại một điểm****1. Phương pháp**

Ta cần phải nắm vững định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x}$ với $x \neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục tại $x = 0$?

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{với } x \neq 1 \text{ và } a \in \mathbb{R} \\ 3 & \text{với } x = 1 \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ là bao nhiêu?

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} & \text{với } x \neq 3 \text{ và } x \neq -2 \\ b+3 & \text{với } x = 3 \text{ và } b \in \mathbb{R} \end{cases}$. Tìm b để $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a-2 & \text{khi } x < 2 \\ \sin \frac{\pi}{x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 2$.

Ví dụ 5: Tìm số a để hàm số sau liên tục tại điểm x_0 .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ ax+2 & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}; x_0 = 2.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+5}} & \text{với } -5 < x < 4 \\ mx+2 & \text{với } x = 4 \\ \frac{\sqrt{x}}{3} & \text{với } x > 4 \end{cases}$. Tìm giá trị của m để $f(x)$ liên tục tại $x = 4$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-4x+3} & \text{nếu } x < 1 \\ \frac{1}{6} \cos \pi x + a^2 - x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Dạng 2. Hàm số liên tục trên tập xác định

1. Phương pháp

- Để chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các nhận xét để suy ra kết luận.
- Khi nói xét tính liên tục của hàm số (mà không nói rõ gì hơn) thì ta hiểu phải xét tính liên tục trên tập xác định của nó.
- Tìm các điểm gián đoạn của hàm số tức là xét xem trên tập xác định của nó hàm số không liên tục tại các điểm nào
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trên (a, b) và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -4 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Dạng 3. Số nghiệm của phương trình trên một khoảng

1. Phương pháp

✓ Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm

- Tìm hai số a và b sao cho $f(a).f(b) < 0$
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$
- Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a; b)$

✓ Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất k nghiệm

- Tìm k cặp số a_i, b_i sao cho các khoảng $(a_i; b_i)$ rời nhau và

$$f(a_i).f(b_i) < 0, i = 1, \dots, k$$
- Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_i \in (a_i; b_i)$.

✓ Khi phương trình $f(x) = 0$ có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :

- $f(a), f(b)$ không còn chứa tham số hoặc chứa tham số nhưng dấu không đổi.
- Hoặc $f(a), f(b)$ còn chứa tham số nhưng tích $f(a).f(b)$ luôn âm.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $m(x-1)(x+2) + 2x + 1 = 0$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

$$a) (1 - m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$$

$$b) \cos x + m \cos 2x = 0$$

$$c) m(2 \cos x - \sqrt{2}) = 2 \sin 5x + 1$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$a) x^3 - 3x + 1 = 0$$

$$b) 2x + 6\sqrt{1-x} = 3$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

$$a) x^5 - 3x + 3 = 0$$

$$b) x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

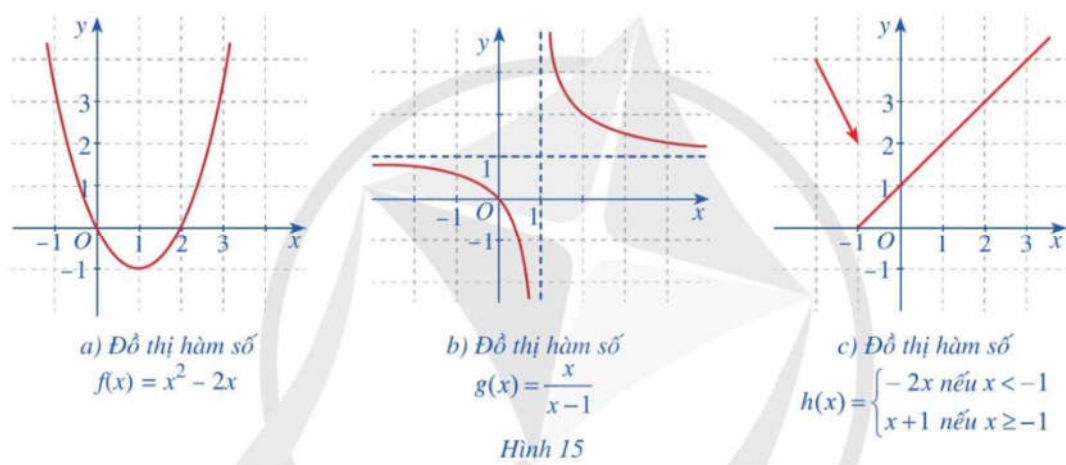
Ví dụ 5. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ với $a \neq 0$ và

$$2a + 6b + 19c = 0.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số $f(x) = 2x^3 + x + 1$ tại điểm $x = 2$.

Bài 2. Trong các hàm số có đồ thị ở Hình 15a, 15b, 15c, hàm số nào liên tục trên tập xác định của hàm số đó? Giải thích.



Bài 3. Bạn Nam cho rằng: "Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 , còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0 , thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ không liên tục tại x_0 ". Theo em, ý kiến của bạn Nam đúng hay sai? Giải thích.

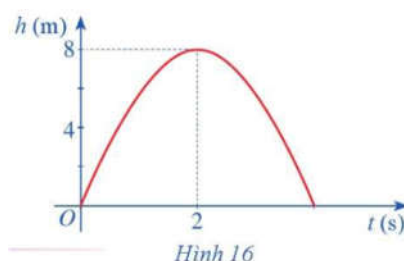
Bài 4. Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau trên tập xác định của hàm số đó:

- a) $f(x) = x^2 + \sin x$ b) $g(x) = x^4 - x^2 + \frac{6}{x-1}$;
- c) $h(x) = \frac{2x}{x-3} + \frac{x-1}{x+4}$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x \neq 4 \\ 2a + 1 & x = 4 \end{cases}$

- a) Với $a = 0$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 4$.
- b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 4$?
- c) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên tập xác định của nó?

Bài 6. Hình 16 biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên theo thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.



- a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.
- b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t)$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 2: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 6$.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ k + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

- A. $k = \frac{1}{2}$. B. $k = 2$. C. $k = -\frac{1}{2}$. D. $k = 0$.

Câu 4: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x}{\sqrt{x + 1} - 2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$ (với m là tham số). Khẳng

định nào dưới đây đúng?

- A. $m \in (-3; 0)$. B. $m \leq -3$. C. $m \in [0; 5)$. D. $m \in [5; +\infty)$.

Câu 5: Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại:

- A. mọi điểm trừ $x = 0, x = 1$. B. mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.
C. mọi điểm trừ $x = -1$. D. mọi điểm trừ $x = 0$.

Câu 6: Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1 - m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 8: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0; 4] \\ 1 + m & \text{khi } x \in (4; 6] \end{cases}$ tục trên $[0; 6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m < 2$. B. $2 \leq m < 3$. C. $3 < m < 5$. D. $m \geq 5$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 10: Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. B. a là một số vô tỉ. C. $a > 5$. D. $a < 0$.

Câu 11: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. B. $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.
C. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$. D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x - 3} - x} & \text{khi } x > 3 \\ 1 - a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

A. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $a_{\max} = 3$. B. $a_{\max} = 0$. C. $a_{\max} = 1$. D. $a_{\max} = 2$.

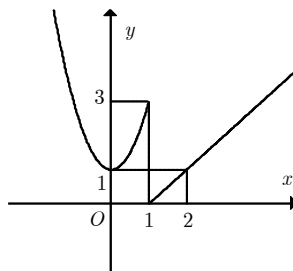
Câu 14: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$.
C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 15: Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x - 1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số liên tục tại $x = -1$.
B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty, -1); (1; +\infty)$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1,1)$.

Câu 16: Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 3$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 0$.

C. mọi điểm trừ $x = 1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 1$.

C. mọi điểm trừ $x = 3$.

D. mọi điểm trừ $x = 1$ và $x = 3$.

Câu 19: Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 20: Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $S = -1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 1$.

D. $S = 2$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x \cos x & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $x \in \mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 0$.

C. mọi điểm trừ $x = 1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0; x = 1$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$.

D. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 23: Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ sao cho $f(-1) = 2$, $f(4) = 7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ trên đoạn $[-1; 4]$:

A. Vô nghiệm.

B. Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm.

D. Có đúng hai nghiệm.

Câu 26: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m - 2)x + m - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$?

A. 19.

B. 18.

C. 4.

D. 3.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa.

Tránh mua các trang và cá nhân khác

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 3

PHẦN 1: GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 là:

A. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

B. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

C. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Câu 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 6n + 1}{8n^2 + 5}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 1}{-3n^3 + 5n^2 - 2}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - n + 3}}{8n - 5}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{2^{n+1}}{3^n} \right)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 5^n + 2^{n+2}}{6 \cdot 5^n}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n^3}}{6^n}$.

Câu 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} (4x^2 - 5x + 6)$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$.

Câu 4: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 8}{5x - 2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{3x - 2}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4}$

g) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 + 4}{2x + 4}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + a & x < 2 \\ 4 & x = 2 \\ -3x + b & x > 2 \end{cases}$

a) Với $a = 0, b = 1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$.

b) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục tại $x = 2$?

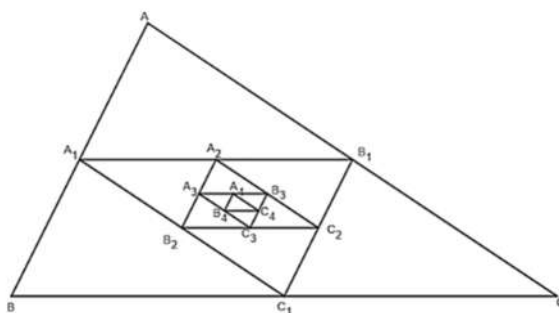
c) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục trên tập xác định?

Câu 6: Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (Hình 18). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$



Hình 18

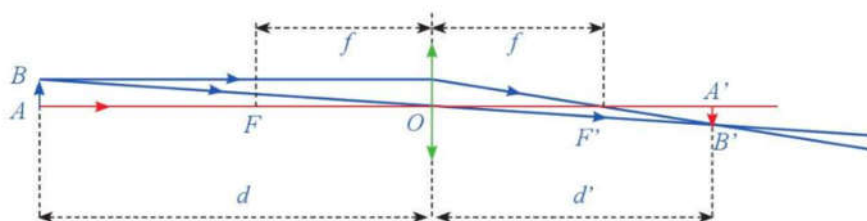
Câu 7: Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$



- Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .
- Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Câu 8: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như Hình 19. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

- Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.
- Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.



Hình 19

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG V

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n-1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$ bằng:
- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. 1.
- Câu 2:** Giá trị đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2})$ là:
- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. 1.
- Câu 3:** Giá trị đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 5^n)$ là:
- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 2. D. -2.
- Câu 4:** Tính giới hạn $T = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n})$
- A. $T = 0$ B. $T = \frac{1}{4}$ C. $T = \frac{1}{8}$ D. $T = \frac{1}{16}$
- Câu 5:** Cho dãy số (u_n) có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5}$.
- A. $\frac{-1}{5}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $+\infty$
- Câu 6:** Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \frac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng
- A. -12. B. -2. C. 0. D. -6.
- Câu 7:** Tìm $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} \right)$
- A. $L = \frac{5}{2}$. B. $L = +\infty$. C. $L = 2$. D. $L = \frac{3}{2}$.
- Câu 8:** Tính $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right]$.
- A. $I = +\infty$ B. $I = \frac{3}{2}$ C. $I = 1,499$ D. $I = 0$
- Câu 9:** Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại?
- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{3n+1}$ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1}$ C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{3n-1}$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-1}$
- Câu 10:** Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{4n^2 + 3} - \sqrt[3]{8n^3 + n} \right)$.
- A. $+\infty$. B. 1. C. $-\infty$. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 11:** Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ bằng
- A. 2. B. 4. C. $\frac{1}{4}$. D. 0.

Câu 12: Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$

- A. $L = -\infty$ B. $L = 0$ C. $L = +\infty$ D. $L = 1$

Câu 13: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{-x+1}$ bằng

- A. 2 B. 4 C. -1 D. -4

Câu 14: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{2x-4}$ bằng

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 15: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$. C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Câu 16: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. -1.

Câu 17: Xác định $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$.

- A. 0. B. $-\infty$. C. Không tồn tại. D. $+\infty$.

Câu 18: Cho số thực a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

- A. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $a = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. C. $a = \frac{1}{2}$. D. $a = -\frac{1}{2}$.

Câu 19: Cho các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$, hỏi $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$ bằng

- A. 5. B. 2. C. -6. D. 3.

Câu 20: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = 1$. C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = -\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x} = 0$.

Câu 21: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

- A. $-\infty$. B. $\frac{3}{16}$. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 22: Cho $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{3x+1}-1)}{x}$ và $J = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x+1}$. Tính $I - J$.

- A. 6. B. 3. C. -6. D. 0.

Câu 23: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1}$

- A. $+\infty$. B. 2. C. $-\infty$. D. -2.

Câu 24: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

- A. $L = 1$ B. $L = -1$ C. $L = 0$ D. $L = \frac{\pi}{2}$

Câu 25: Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 - x + 2})$.

- A. $I = 1/2$. B. $I = 46/31$. C. $I = 17/11$. D. $I = 3/2$.

Câu 26: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ bằng

- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 27: Tính $\lim_{x \rightarrow a^{505}} \frac{x^4 - a^{2020}}{x - a^{505}}$.

- A. $2a^{2010}$. B. $4a^{1515}$. C. $+\infty$. D. $4a^{505}$.

Câu 28: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$ bằng

- A. $\frac{5}{4}$. B. $-\frac{5}{4}$. C. $\frac{1}{4}$. D. 2.

Câu 29: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ bằng.

- A. 1. B. -1. C. $\frac{5}{4}$. D. $-\frac{5}{4}$.

Câu 30: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-3}}$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\sqrt{2}$.

Câu 31: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \frac{-3}{2}$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = +\infty$.
C. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$.

Câu 32: Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{x^2 - 3x}$.

- A. $K = -\frac{2}{3}$. B. $K = \frac{2}{3}$. C. $K = \frac{4}{3}$. D. $K = 0$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 1$ thì $2a + b$ bằng:

- A. 2. B. 5. C. -2. D. -5.

Câu 34: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{6x-2}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 1.

Câu 35: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 2} - x)$

- A. -4. B. -2. C. 4. D. 2.

Câu 36: Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$.

- A. Không tồn tại. B. -1. C. ± 1 . D. 1.

Câu 37: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2018} - 1}$.

- A. -1. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 38: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

I. $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

II. $f(x)$ không liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) \geq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

- A. Chỉ I đúng. B. Chỉ II đúng. C. Cả I và II đúng. D. Cả I và II sai.

Câu 39: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục với mọi $x \neq 1$.

(II). $f(x) = \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(III). $f(x) = \frac{|x|}{x}$ liên tục tại $x = 1$.

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (I) và (II). C. Chỉ (I) và (III). D. Chỉ (II) và (III).

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất ?

- A. Hàm số liên tục tại $x = 4$.
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trên tập xác định nhưng gián đoạn tại $x = 4$.
C. Hàm số không liên tục tại $x = 4$.
D. Tất cả đều sai.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1} + 2 & \text{khi } x > 1 \\ 3x^2 + x - 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất ?

- A. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm.
C. Hàm số không liên tục tại $x = 1$.
D. Tất cả đều sai.

Câu 42: số $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - m & \text{khi } x \geq 0 \\ mx + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$.

B. $m = \pm 2$.

C. $m = -2$.

D. $m = 0$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại

$x_0 = 2$, tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $-x^2 + ax + \frac{7}{4} > 0$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là?

A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

B. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{1-x}{1+x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

A. $m = 1$.

B. $m = -2$.

C. $m = -1$.

D. $m = 0$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng

A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[0; 1]$.

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.

C. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

D. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$.

B. $f(\sqrt{2}) < 0$.

C. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm

số gián đoạn tại $x = 1$.

A. $m \neq 2$.

B. $m \neq 1$.

C. $m \neq 2$.

D. $m \neq 3$.

Câu 49: Tìm tham số thực m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx + 1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$.

A. $m = 4$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 5$.

Câu 50: Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2ax - 1, & x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $a - b$.

A. 0 B. -1 C. -5 D. 7

Câu 51: Giá trị của m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x - m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

A. -5. B. 1. C. -1. D. 5.

Câu 52: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -2ax + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

A. $a = 3$. B. $a = 2$. C. $a = -2$. D. $a = -1$.

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{khi } x > 1 \\ m.e^{x-1} + 1 - 2mx^2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 0$.

Câu 54: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} & \text{khi } x > -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = -1$.

A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = -4$. D. $m = 4$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1, & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}, & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.

A. $a = 1$. B. $a = 3$. C. $a = 2$. D. $a = 4$.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

PHẦN 2: TỰ LUẬN

Câu 57: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{-3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 7}.$

b) $\lim \frac{n^3 + 4}{5n^3 + n + 8}.$

c) $\lim \frac{(n+1)(2n-1)}{(3n+2)(n+3)}.$

Câu 58: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} + 3\sqrt{n^2 + 1}}{n+1}.$ b) $\lim \frac{\sqrt[3]{8n^3 + n} + 2n + 1}{3n+1}.$ c) $\lim \frac{n\sqrt{n^2 + 1} + 2n^2 + 3}{3n^2 + n + 1}.$

Câu 59: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{n(2n+1)(3n+2)}{(6n+1)^3}.$ b) $\lim \frac{(2n+1)(n-2)+n}{n^3 + n}.$

Câu 60: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + n} - 3n^2}{n^2 + 1}.$ b) $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n} - 3n + 1}{n^2 + 2}.$

Câu 61: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{(n+1)(2n^2 + n) - n^2 + 1}{(n+1)(n^2 + 2) - 3n^3}.$ b) $\lim \frac{(3n^2 + 2)(n+3) + n^2}{2n^3 - 1}.$

Câu 62: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{1 - 4^n}{1 + 4^n}.$ b) $\lim \frac{2^n - 5 \cdot 3^n}{3^n + 1}.$ c) $\lim \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}.$

Câu 63: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n \right).$ b) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right).$

Câu 64: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(n + 1 - \sqrt{n^2 + n} \right).$ b) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n}.$

Câu 65: Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\sqrt{4n^2 + n} - \sqrt[3]{2n^2 - 8n^3} \right).$ b) $\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n}.$

Câu 66: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{-2x^2 + 6x - 4}$
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{-x^2 + 3x - 2}$

Câu 67: Tìm giới hạn các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5x^2 + 4x^6}{(1-x)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$

Câu 68: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x^3 + 8}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + x - 6}$

Câu 69: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 30}{2x^2 - 9x - 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-x^2 + 4x + 5}$

Câu 70: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{x^2 - 3x - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$

Câu 71: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + x - 18}{x^3 - 8}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3}$

Câu 72: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$

Câu 73: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right)$

Câu 74: Tìm giới hạn các hàm số sau

a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{49 - x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x + 2}}{x^2 - 3x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 7} - 3}{x^3 - 4x^2 + 3}$

Câu 75: Tìm giới hạn các hàm số sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 3}}{-x^2 + 3x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x + 2}}{x^3 - 8}$

Câu 76: Tìm giới hạn các hàm số sau

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{2x^3 + 5x + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 - x}}{2x + x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x + 12} + x}{x^2 + 2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x^3 + x^2 - 2}$

Câu 77: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x}{x-1}$$

Câu 78: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{1-3x-5x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$$

Câu 79: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(2x^2-1)}{(5x-1)(x^2+2x)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3-2x^2-1}{4x^4+3x-2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3-2x+2}{-2x^3+2x^2-1}$$

Câu 80: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2x}}{3x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+3}}{x^2+1}$$

Câu 81: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$$

Câu 82: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 1)$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 1)$$

Câu 83: Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 2)$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2+3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \quad (\text{tại } x = 5)$$

Câu 84: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x+2}{x^3+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{khi } x < 2 \\ 5 & \text{khi } x = 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

Câu 85: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -4 & \text{khi } x = -2 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 86: Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$

b) $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$

Câu 87: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^5 - 3x + 3 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

CHƯƠNG IV. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

BÀI 1: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

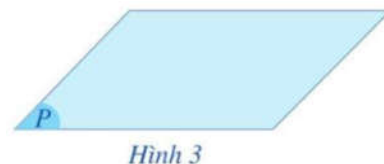
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Mặt phẳng

Người ta thường biểu diễn một mặt phẳng bằng một hình bình hành và dùng các chữ cái đặt trong dấu ngoặc đơn () để đặt tên cho mặt phẳng ấy.

Ví dụ: mặt phẳng (P) (Hình 3) mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β),...

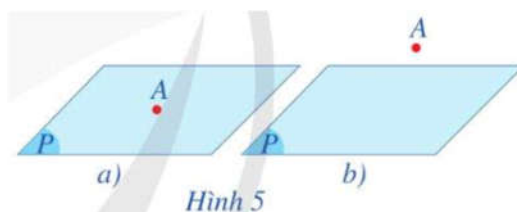


Trong thực tiễn có nhiều ví dụ minh họa cho mặt phẳng. Chẳng hạn: tấm gương phẳng, mặt bàn, bảng treo tường, ... Cho ta hình ảnh một phần mặt phẳng trong không gian.

2. Điểm thuộc mặt phẳng

Nhận xét: Với mỗi điểm A và mặt phẳng (P), chỉ xảy ra một trong hai khả năng sau:

- Điểm A thuộc mặt phẳng (P), ta kí hiệu $A \in (P)$ (Hình 5a).
- Điểm A không thuộc mặt phẳng (P) hay A nằm ngoài (P), ta kí hiệu $A \notin (P)$ (Hình 5b).



3. Hình biểu diễn của một hình trong không gian

a) Khái niệm

Một cách tổng quát, ta quy ước:

Hình được vẽ trong mặt phẳng để giúp ta hình dung được về một hình trong không gian gọi là *hình biểu diễn* của hình không gian đó.

b) Quy tắc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

Để việc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian được thuận lợi và thống nhất, ta quy ước như sau:

- 1) Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng;
- 2) Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau);
- 3) Hình biểu diễn giữ nguyên tính liên thuộc giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng;
- 4) Những đường nhìn thấy được vẽ bằng nét liền, những đường không nhìn thấy được vẽ bằng nét đứt.

Chú ý: Các quy tắc khác sẽ được đề cập sau.

II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

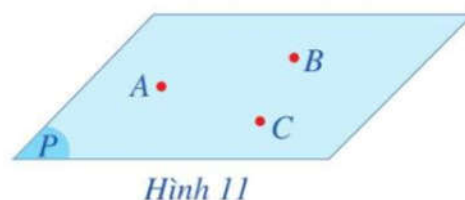
Tính chất 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Tính chất 2

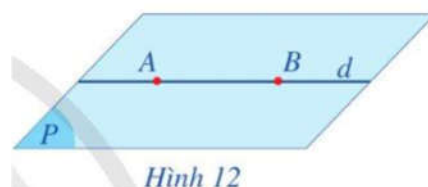
Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Như vậy, mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Mặt phẳng đó được kí hiệu $mp(ABC)$ hay đơn giản là (ABC) (Hình 11).



Tính chất 3

Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.



Như vậy, nếu một đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A, B của mặt phẳng (P) thì mọi điểm của đường thẳng d đều nằm trong mặt phẳng (P) . Khi đó, ta nói d nằm trong (P) , hoặc (P) chứa d , hoặc (P) đi qua d , kí hiệu:

$d \subset (P)$ hay $(P) \supset d$ (Hình 12).

Tính chất 4

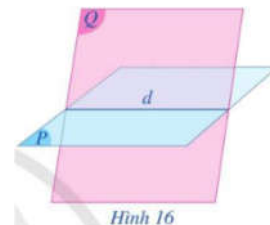
Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Tính chất 5

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Nếu hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) có điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất d chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng d đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) , kí hiệu

$d = (P) \cap (Q)$ (Hình 16).



Hình 16

Nhận xét:

- Có thể xác định giao tuyến của hai mặt phẳng bằng cách đi tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến cần tìm.
- Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) (với giả thiết a cắt (P)), ta có thể làm như sau:
 - Chọn một đường thẳng b thích hợp trong mặt phẳng (P) và tìm giao điểm M của hai đường thẳng a và b . Khi đó, M là giao điểm cần tìm.

Tính chất 6

Trên mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

III. MỘT SỐ CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẪNG

Định lý 1

Cho điểm A không thuộc đường thẳng d . Khi đó, qua điểm A và đường thẳng d có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu $\text{mp}(A, d)$ hoặc (A, d) .

Định lý 2

Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Khi đó, qua a và b có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu $\text{mp}(a, b)$.

Nhận xét: Từ Tính chất 2 và hai định lý trên, ta thấy mặt phẳng hoàn toàn được xác định theo một trong ba cách sau:

- Đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.
- Đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

IV. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

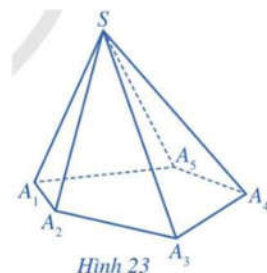
1. Hình chóp

Trong mặt phẳng (P) , cho đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$). Lấy điểm S nằm ngoài (P) . Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n tam giác: $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ gọi là hình chóp, kí hiệu $S.A_1A_2 \dots A_n$.

Chú ý

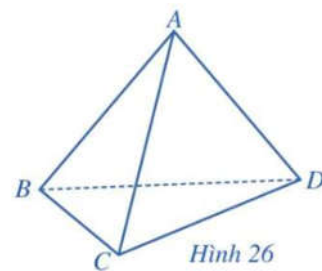
- Trong hình chóp $S.A_1A_2 \dots A_n$
 - Điểm S gọi là đỉnh;
 - Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ gọi là mặt đáy;

- Các cạnh của mặt đáy gọi là *cạnh đáy*, các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ gọi là các *cạnh bên*;
- Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ gọi là các *mặt bên*.
- Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là *hình chóp tam giác*, *hình chóp tứ giác*, *hình chóp ngũ giác*, ... Hình 23 minh họa cho hình chóp ngũ giác $S.A_1A_2A_3A_4A_5$.



2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn là *tứ diện*), kí hiệu là $ABCD$.



Chú ý

- Trong hình tứ diện $ABCD$ (Hình 26)
- Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh*.
- Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh*. Hai cạnh không có điểm chung gọi là *hai cạnh đối diện*.
- Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các *mặt*.
- Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là *đỉnh đối diện* với mặt đó.
- Hình tứ diện có các mặt là tam giác đều là *hình tứ diện đều*.
- Mỗi hình chóp tam giác là một hình tứ diện. Ngược lại, nếu ta quy định rõ đỉnh và mặt đáy trong một hình tứ diện thì hình tứ diện đó trở thành hình chóp tam giác.

Nhận xét: Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có thể chỉ ra ba điểm đó cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

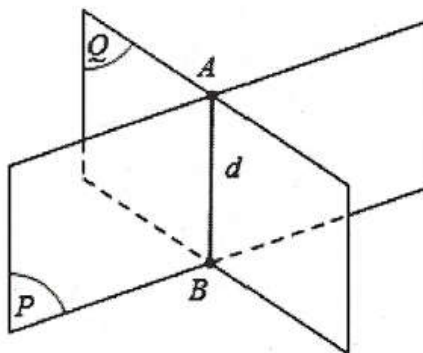
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta đi tìm hai điểm chung của chúng.

Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó chính là giao tuyến



Chú ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) thường được tìm như sau:

- Tìm hai đường thẳng a và b lần lượt thuộc mặt phẳng (P) và (Q) cùng nằm trong một mặt phẳng (R) .
- Giao điểm $M = a \cap b$ chính là điểm chung của mặt phẳng (P) và (Q) .

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là tứ giác lồi $ABCD$ có các cạnh đối không song song với nhau. Gọi M là điểm trên cạnh SA . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

- a. (SAC) và (SBD)
- b. (SAB) và (SCD)
- c. (SBC) và (SAD)
- d. (BCM) và (SAD)
- e. (CDM) và (SAB)
- f. (BDM) và (SAC)

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, AD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

- a. (ABN) và (CDM) ;
- b. (ABN) và (BCP) .

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M nằm bên trong tam giác ABD , điểm N nằm bên trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

- a) (AMN) và (BCD) .
- b) (DMN) và (ABC) .

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD và SO . Tìm giao tuyến của

- a) Mặt phẳng (MNP) và (SAB) .
- b) Mặt phẳng (MNP) và (SBC) .

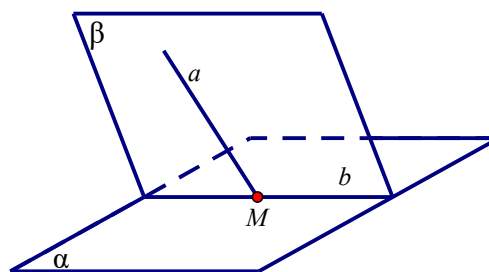
3. Bài tập trắc nghiệm

Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng a và mặt phẳng (α) , ta tìm giao điểm của a và một đường thẳng b nằm trong (α) .

$$\left. \begin{array}{l} a \cap b = M \\ b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow M = a \cap (\alpha)$$



Phương pháp:

- Bước 1: Xác định mp (β) chứa a .
- Bước 2: Tìm giao tuyến $b = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Bước 3: Trong $(\beta): a \cap b = M$, mà $b \subset (\alpha)$, suy ra $M = a \cap (\alpha)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng (α) . S là điểm không nằm trên (α) .

- Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD. Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC).
- Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α) , cho tứ giác ABCD. Gọi S là điểm không thuộc (α) , M là điểm nằm trong tam giác SCD.

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD).
- Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

Ví dụ 3. Cho tứ diện SABC. Trên cạnh SA lấy điểm M, trên cạnh SC lấy điểm N, sao cho MN không song song với AC. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB.

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD.

- Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC).
- Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC.

Dạng 3. Thiết diện

1. Phương pháp

Tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt cắt với hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó chính là thiết diện cần tìm. Mỗi đoạn giao tuyến là cạnh của thiết diện.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD, M là một điểm trên cạnh SC, N và P lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh bằng a. Kéo dài BC một đoạn $CE = a$. Kéo dài BD một đoạn $DF = a$. Gọi M là trung điểm của AB.

- Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF).
- Tính diện tích của thiết diện.

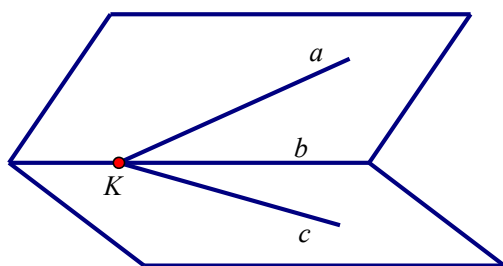
Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang với đáy lớn AD. Gọi M là một điểm trên cạnh SB. Tìm thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (AMD).

Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng ba đường thẳng đồng quy

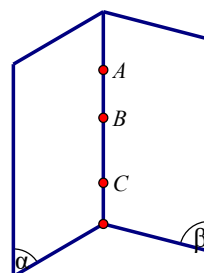
1. Phương pháp

- Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau và giao điểm đó nằm trên đường thẳng thứ 3 (Hình a).

- Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt (Hình b).



Hình a.



Hình b.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD, S$ là điểm không thuộc $(ABCD), M$ và N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SC .

a) Xác định giao điểm $I = AN \cap (SBD)$.

b) Xác định giao điểm $J = MN \cap (SBD)$.

c) Chứng minh I, J, B thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E, AD \cap BC = F$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC .

a) Tìm giao điểm $Q = SD \cap (MNP)$.

b) Giả sử $MN \cap PQ = H$. Chứng minh S, H, E thẳng hàng.

c) Chứng minh SF, MQ, NP đồng quy.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $SABC$. Gọi I, J và K lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SB, SC và AB , sao cho IJ không song song với BC, IK không song song với SA .

a. Tìm giao điểm D của (IJK) và BC .

b. Gọi E là giao điểm của DK và AC . Chứng minh ba đường thẳng SA, KI, EJ đồng quy.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang. Gọi O là giao điểm của AC và BD, K là một điểm trên cạnh SD .

a. Tìm giao điểm E của mặt phẳng (ABK) với CD .

b. Tìm giao điểm F của mặt phẳng (ABK) với SC .

c. Chứng minh các đường thẳng AF, BK và SO đồng quy.

Dạng 5. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng.

1. Phương pháp

Áp dụng kết quả:

$$\left. \begin{array}{l} I = a \cap b \\ a \subset (P), b \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \end{array} \right\} \Rightarrow I \in c$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi K là trung điểm của cạnh BC , H là một điểm cố định trên cạnh AC . Mặt phẳng (P) đi động chứa HK , cắt các cạnh BD và AD lần lượt tại M và N .

- Giả sử cho trước điểm M không là trung điểm của BD , hãy xác định điểm N .
- Tìm tập hợp giao điểm I của hai đường HM và KN khi M đi động trên cạnh BD .

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và AC , sao cho MN không song song với BC . Mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN , cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F .

- Chứng minh EF luôn đi qua điểm cố định.
- Tìm tập hợp giao điểm của ME và NF .
- Tìm tập hợp giao điểm của MF và NE .

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Khi trát tường, dụng cụ không thể thiếu của người thợ là thước dẹt dài (Hình 28). Công dụng của thước dẹt này là gì? Giải thích.



Hình 28

Bài 2. Hình 29 là hình ảnh của chặn giấy bằng gỗ có bốn mặt phân biệt là các tam giác. Vẽ hình biểu diễn của chặn giấy bằng gỗ đó.



Hình 29

Bài 3. Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng ba đường thẳng a, b, c cùng đi qua một điểm, hay còn gọi là ba đường thẳng đồng quy.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O và AB cắt CD tại P . Điểm M thuộc cạnh SA (M khác S, M khác A). Gọi N là giao điểm của MP và SB, I là giao điểm của MC và DN . Chứng minh rằng S, O, I thẳng hàng.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC sao cho $MA = 2MS, NS = 2NC$.

- Xác định giao điểm của MN với mặt phẳng (ABC) .
- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (BMN) với mặt phẳng (ABC) .

Bài 6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy không là hình thang. Gọi M là trung điểm của SA .

- Xác định giao điểm của CD với mặt phẳng (SAB) .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SBC) .

Bài 7. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA .

- a) Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI) .
- b) Gọi G là giao điểm của AM và BN . Chứng minh rằng: $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$.
- c) Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, ABC . Chứng minh rằng các đường thẳng CP, DQ cùng đi qua điểm G và $\frac{GP}{GC} = \frac{GQ}{GD} = \frac{1}{3}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- Câu 2:** Trong không gian, cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?
A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 3:** Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?
A. Ba điểm phân biệt. **B.** Một điểm và một đường thẳng.
C. Hai đường thẳng cắt nhau. **D.** Bốn điểm phân biệt.
- Câu 4:** Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$?
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.
- Câu 5:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
A. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.
B. Nếu A, B, C thẳng hàng và $(P), (Q)$ có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q) .
C. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.
D. Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q) .
- Câu 6:** Trong mặt phẳng (α) , cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Điểm S không thuộc mặt phẳng (α) . Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và 2 trong 4 điểm nói trên?
A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.
- Câu 7:** Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?
A. 10. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 14.
- Câu 8:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?
A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.
B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

- C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
 D. Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

- Câu 9:** Cho 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng thuộc một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi. Khẳng định nào sau đây đúng?
 A. 3 đường thẳng trên đồng quy.
 B. 3 đường thẳng trên trùng nhau.
 C. 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác.
 D. Các khẳng định ở A, B, C đều sai.
- Câu 10:** Thiết diện của 1 tứ diện có thể là:
 A. Tam giác. B. Tứ giác.
 C. Ngũ giác. D. Tam giác hoặc tứ giác.
- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Khẳng định nào sau đây **sai**?
 A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
 B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
 C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).
 D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường trung bình của $ABCD$.
- Câu 12:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:
 A. AM (M là trung điểm của AB). B. AN (N là trung điểm của CD).
 C. AH (H là hình chiếu của B trên CD). D. AK (K là hình chiếu của C trên BD).
- Câu 13:** Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD . Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC . Khi EF và BC cắt nhau tại I , thì I **không** phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?
 A. (BCD) và (DEF) . B. (BCD) và (ABC) . C. (BCD) và (AEF) . D. (BCD) và (ABD) .
- Câu 14:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là:
 A. đường thẳng MN .
 B. đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).
 C. đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).
 D. đường thẳng AM .
- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:
 A. SD .
 B. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).
 C. SG (G là trung điểm AB).
 D. SF (F là trung điểm CD).
- Câu 16:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $IJCD$ là hình thang.

B. $(SAB) \cap (IBC) = IB$.

C. $(SBD) \cap (JCD) = JD$.

D. $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$).

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

A. SI (I là giao điểm của AC và BM).

B. SJ (J là giao điểm của AM và BD).

C. SO (O là giao điểm của AC và BD).

D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

Câu 18: Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC . Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là:

A. IK .

B. BC .

C. AK .

D. DK .

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Trên cạnh SB lấy điểm M . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SAC) .

A. SI .

B. AE (E là giao điểm của DM và SI).

C. DM .

D. DE (E là giao điểm của DM và SI).

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD . Gọi I và J lần lượt là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD . Gọi H, K lần lượt là giao điểm của IJ với CD của MH và AC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (IJM) là:

A. KI .

B. KJ .

C. MI .

D. MH .

Câu 21: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

A. CD và NP .

B. CD và MN .

C. CD và MP .

D. CD và AP .

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là:

A. điểm F .

B. giao điểm của đường thẳng EG và AF .

C. giao điểm của đường thẳng EG và AC .

D. giao điểm của đường thẳng EG và CD .

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC . Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD) . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM}$.

B. $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IM}$.

C. $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM}$.

D. $IA = 2,5IM$.

Câu 24: Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là:

A. giao điểm của SD và AB .

B. giao điểm của SD và AM .

C. giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).

D. giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).

Câu 25: Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng ở trong một mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB . Trên SC lấy điểm K sao cho IK không song song với AC (K không trùng với các đầu mút). Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. E nằm ngoài đoạn BC về phía B .

B. E nằm ngoài đoạn BC về phía C .

C. E nằm trong đoạn BC .

D. E nằm trong đoạn BC và $E \neq B, E \neq C$.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC , E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE .

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD .

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD . Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:

A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.

B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và $HK \parallel MN$.

C. Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.

D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Câu 28: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a ($a > 0$). Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng:

A. a^2 .

B. $\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{4}$.

D. $\frac{a^2}{16}$.

Câu 29: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 30: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC ; P là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q . Biết MP cắt NQ tại I . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C .

B. I, B, D .

C. I, A, B .

D. I, C, D .

- Câu 32:** Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB , LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?
- A.** K, I, J . **B.** M, I, J . **C.** N, I, J . **D.** M, K, J .
- Câu 33:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD , I là điểm ở trên đoạn thẳng AG , BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A.** $AM = (ACD) \cap (ABG)$. **B.** A, J, M thẳng hàng.
C. J là trung điểm của AM . **D.** $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.
- Câu 34:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I , EG cắt AD tại H . Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?
- A.** CD, EF, EG . **B.** CD, IG, HF . **C.** AB, IG, HF . **D.** AC, IG, BD .
- Câu 35:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M . Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB) . Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.** Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một song song.
B. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một cắt nhau.
C. Ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.
D. Ba đường thẳng AB, CD, MN cùng thuộc một mặt phẳng.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. Ủng hộ chính chủ để được bảo hành và nhiều ưu đãi khác.

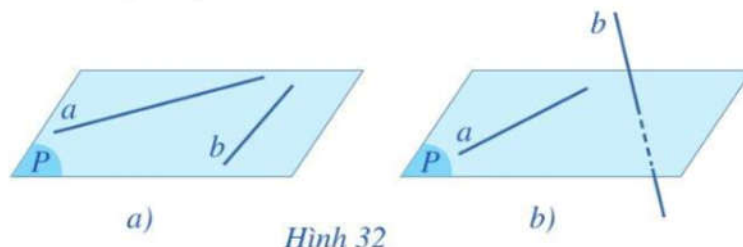
Tránh mua các trang và cá nhân khác

Bài 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN**A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG PHÂN BIỆT**

Trong mục này, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả sử hai đường thẳng là phân biệt.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng a và b phân biệt trong không gian. Khi đó chỉ xảy ra một trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa a và b . Khi đó ta nói a và b *đồng phẳng* (Hình 32a).

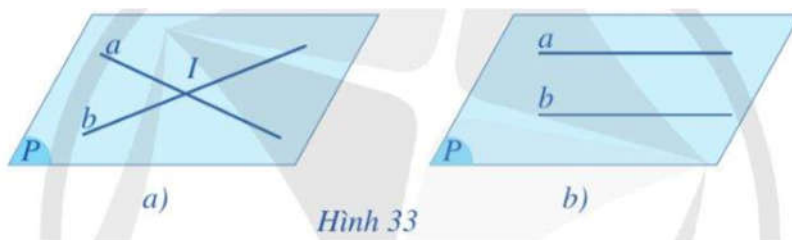


Hình 32

Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa a và b . Khi đó ta nói a và b *chéo nhau*, hay a *chéo* với b (Hình 32b).

Khi hai đường thẳng a và b (phân biệt) đồng phẳng, ta đã biết có hai khả năng xảy ra:

- a và b có một điểm chung duy nhất I . Ta nói a và b cắt nhau tại I và kí hiệu là $a \cap b = \{I\}$. Ta còn có thể viết $a \cap b = I$ (Hình 33a).



Hình 33

- a và b không có điểm chung. Ta nói a và b song song với nhau và kí hiệu là $a // b$ (Hình 33b).

Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng song song a và b . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu là $\text{mp}(a, b)$.

II. TÍNH CHẤT**Định lý 1**

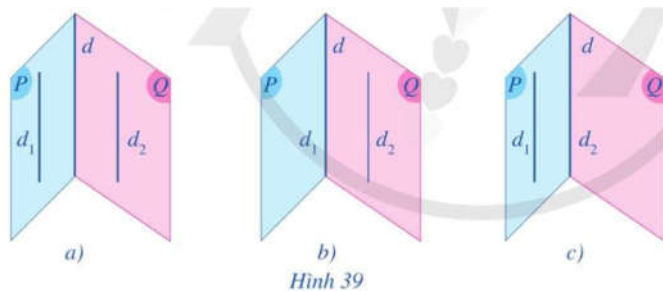
Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Định lý 2 (về giao tuyến của ba mặt phẳng).

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy, hoặc đôi một song song với nhau.

Từ Định lý 2, ta suy ra hệ quả sau:

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó (Hình 39).



Định lý 3

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Khi hai đường thẳng a và b cùng song song với đường thẳng c , ta kí hiệu $a//b//c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy

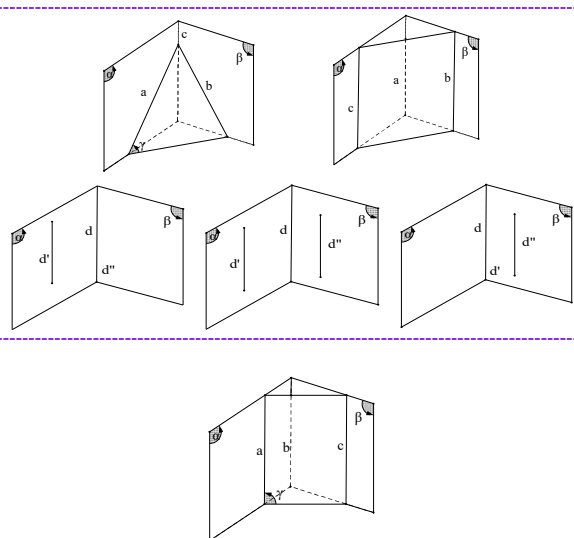
1. Phương pháp

- Nếu ba mp phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng qui hoặc đôi một song song với nhau.

❖ **Hệ quả:** Nếu hai mp phân biệt lần lượt chứa hai đt song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đt đó hoặc trùng với một trong hai đt đó.

- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\begin{cases} a \neq b \\ a // c \Rightarrow a // b \\ b // c \end{cases}$$



2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q, R, S là bốn điểm lần lượt trên các cạnh AB, BC, CD, DA. CMR nếu bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng thì:

a) PQ, SR, AC hoặc song song hoặc đồng qui.

b) PS, RQ, BD hoặc song song hoặc đồng qui

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AC. Trên cạnh PD lấy điểm P sao cho $DP = 2PB$.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (ABD), (BCD).

b) Trên cạnh AD lấy điểm Q sao cho $DQ = 2QA$. Chứng minh: PQ song song với mặt phẳng (ABC), ba đường thẳng DC, QN, PM đồng qui.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và SB.

- a/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)
- b/ Chứng minh: ON song song với mặt phẳng (SAD)
- c/ Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC)

Dạng 2. Tìm giao điểm và thiết diện của hình chóp

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M, P và I lần lượt là trung điểm của AB, SC và SB . Một mặt phẳng (α) qua MP và song song với AC và cắt các cạnh SA, BC tại N, Q .

- a) Chứng minh đường thẳng BC song song với mặt phẳng (IMP) .
- b) Xác định thiết diện của (α) và hình chóp. Thiết diện này là hình gì?
- c) Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ) .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và song song với đường thẳng AC .

- a) Tìm giao tuyến của (α) với $mp(ABCD)$.
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với $mp(\alpha)$.
- c) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AD, BC, SA .

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC) ; (IMN) và (SAB) .
- b) Tìm giao điểm của SB và (IMN) .
- c) Tìm thiết diện của mặt phẳng (IDN) với hình chóp $S.ABCD$.

Câu 4: Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và N là trung điểm SA .

- a) Tìm giao điểm của AC và mặt phẳng (SBD)
- b) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (NBC) . Thiết diện là hình gì?

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Quan sát phòng học của lớp và nêu lên hình ảnh của hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau.

Bài 2. Quan sát Hình 43 và cho biết vị trí tương đối của hai trong ba cột tuabin gió có trong hình.

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 43

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SD . Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC) ; (MNP) và $(ABCD)$

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng đường thẳng G_1G_2 song song với đường thẳng CD .

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB . Chứng minh rằng đường thẳng NC song song với đường thẳng MD .

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA ; I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ .

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) .

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD . Trên cạnh AC lấy điểm K . Gọi M là giao điểm của BK và AI , N là giao điểm của DK và AJ . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BD .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
- C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
- B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
- C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
- D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.
- D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.

- B.** Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Câu 5: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b . Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng AD và BC ?

- A.** Có thể song song hoặc cắt nhau. **B.** Cắt nhau.
C. Song song với nhau. **D.** Chéo nhau.

Câu 6: Cho ba mặt phẳng phân biệt (α) , (β) , (γ) có $(\alpha) \cap (\beta) = d_1$; $(\beta) \cap (\gamma) = d_2$; $(\alpha) \cap (\gamma) = d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 :

- A.** Đôi một cắt nhau. **B.** Đôi một song song.
C. Đồng quy. **D.** Đôi một song song hoặc đồng quy.

Câu 7: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c , biết $a \parallel b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c :

- A.** Trùng nhau hoặc chéo nhau. **B.** Cắt nhau hoặc chéo nhau.
C. Chéo nhau hoặc song song. **D.** Song song hoặc trùng nhau.

Câu 8: Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a \parallel b$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A.** Nếu $a \parallel c$ thì $b \parallel c$.
B. Nếu c cắt a thì c cắt b .
C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.
D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b .

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và điểm M ở ngoài a và ngoài b . Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng qua M cắt cả a và b ?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 10: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A.** IJ song song với CD .
B. IJ song song với AB .
C. IJ chéo CD .
D. IJ cắt AB .

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD . Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

- A.** MP và RT . **B.** MQ và RT . **C.** MN và RT . **D.** PQ và RT .

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- A.** EF . **B.** DC . **C.** AD . **D.** AB .

- Câu 14:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB ; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ .
- A. $MP \parallel NQ$. B. $MP \equiv NQ$.
C. MP cắt NQ . D. MP, NQ chéo nhau.
- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. d qua S và song song với BC . B. d qua S và song song với DC .
C. d qua S và song song với AB . D. d qua S và song song với BD .
- Câu 16:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng:
- A. qua I và song song với AB . B. qua J và song song với BD .
C. qua G và song song với CD . D. qua G và song song với BC .
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là
- A. SC .
B. đường thẳng qua S và song song với AB .
C. đường thẳng qua G và song song với DC .
D. đường thẳng qua G và cắt BC .
- Câu 18:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:
- A. Tam giác IBC .
B. Hình thang $IBCI$ (I là trung điểm SD).
C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).
D. Tứ giác $IBCD$.
- Câu 19:** Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC . Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T) . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. (T) là hình chữ nhật.
B. (T) là tam giác.
C. (T) là hình thoi.
D. (T) là tam giác; hình thang hoặc hình bình hành.
- Câu 20:** Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S , $SB = 8$. Thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng:
- A. $6\sqrt{2}$. B. $8\sqrt{2}$. C. $10\sqrt{2}$. D. $9\sqrt{2}$.
- Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Gọi P là giao điểm của SC và (AND) . Gọi I là giao điểm của AN và DP . Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?
- A. Hình bình hành. B. Hình chữ nhật.
C. Hình vuông. D. Hình thoi.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD . Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$.

- A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC . Cho $PR \parallel AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S . Chọn khẳng định đúng?

- A. $AD = 3DS$. B. $AD = 2DS$. C. $AS = 3DS$. D. $AS = DS$.

Câu 24: Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD . Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}$.

- A. 2. B. 3. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó có tam giác BCD không cân. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN . Gọi A_1 là giao điểm của AG và (BCD) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. A_1 là tâm đường tròn tam giác BCD .
B. A_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD .
C. A_1 là trực tâm tam giác BCD .
D. A_1 là trọng tâm tam giác BCD .

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa.

Tránh mua các trang và cá nhân khác

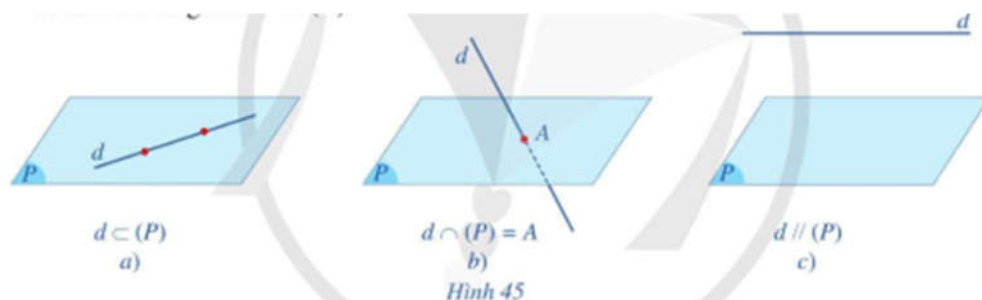
BÀI 3: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Nhận xét: Có ba khả năng có thể xảy ra đối với số điểm chung của d và (P) (Hình 45) là:

- d và (P) có từ hai điểm trở lên. Khi đó đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) hay (P) chứa d và kí hiệu là $d \subset (P)$ hay $(P) \supset d$ (Hình 45a).
- d và (P) có một điểm chung duy nhất A . Khi đó ta nói d và (P) cắt nhau tại điểm A và kí hiệu là $d \cap (P) = \{A\}$ hay $d \cap (P) = A$ (Hình 45b).
- d và (P) không có điểm chung. Khi đó ta nói d song song với (P) hay (P) song song với d và kí hiệu là $d // (P)$ hay $(P) // d$ (Hình 45c).

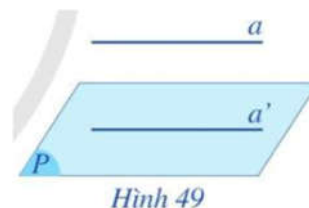


Đường thẳng được gọi là song song với mặt phẳng nếu chúng không có điểm chung

II. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT

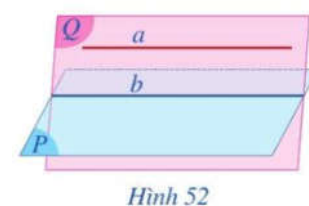
Định lý 1 (dấu hiệu nhận biết một đường thẳng song song với một mặt phẳng) (Hình 49)

Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và a song song với đường thẳng a' nằm trong (P) thì a song song với (P) .



Định lý 2 (Tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng) (Hình 52):

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a .



- Trong trường hợp tổng quát, ta có hệ quả của Định lý 2:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Chú ý: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song hoặc đồng quy

1. Phương pháp

$$\left. \begin{array}{l} a // b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a // (P)$$

Nếu không có sẵn đường thẳng b trong mặt phẳng (P) thì ta tìm đường thẳng b bằng cách chọn một mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) , giao tuyến của (P) và (Q) chính là đường thẳng b cần tìm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành ABCD và ABEF.

- Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).
- Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABF. Chứng minh $GG' // (DCEF)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD, G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MG // (ACD)$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD. Chứng minh rằng $MN // (ABD)$ và $MN // (ACD)$.

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC; (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD, cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình bình hành; F, G lần lượt là trung điểm của AB và CD.

- Chứng minh rằng FG song song với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh rằng SB, SC song song với mặt phẳng (FGE).

Ví dụ 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh SB, song song với cạnh AB, cắt các cạnh SA, SD, SC lần lượt tại Q, P và N. Hãy xác định hình tính của tứ giác MNPQ?

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện qua một điểm và song song với một đường thẳng

1. Phương pháp

Ngoài hai cách đã đề cập ở Bài 1 và Bài 2 ta có hai cách sau để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cách 1. Dùng định lí 2.

$$\left. \begin{array}{l} a // (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d // a$$

Cách 2. Dùng hệ quả 2.

$$\left. \begin{array}{l} (P) // a \\ (Q) // a \\ (P) \cap (Q) = d \end{array} \right\} \Rightarrow d // a$$

Tìm thiết diện là tìm các đoạn giao tuyến theo phương pháp tìm giao tuyến được nêu ở trên, cho đến khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

- Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $SB \parallel (OMN)$, $SC \parallel (OMN)$.
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (OMN) . Thiết diện là hình gì?

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M , song song với AB và CD .

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD) .
- Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm bất kì trên SB, CD . Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC .

- Tìm các giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (SBC) , (SCD) , (SAC) .
- Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) .

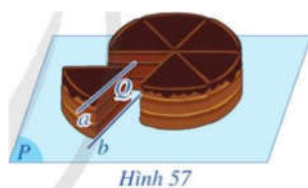
Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC , H, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAC, SBC .

- Chứng minh $AB \parallel (SMN)$, $HK \parallel (SAB)$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (CHK) và (ABC) .
- Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) đi qua MN và $(P) \parallel SC$. Thiết diện là hình gì?

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Trong phòng học của lớp, hãy nêu những hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng.

Bài 2. Trong Hình 57, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gọi nên hình ảnh mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (P) ; mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b trong đó a song song với mặt phẳng (P) . Cho biết hai đường thẳng a, b có song song với nhau hay không.



Hình 57

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song với mặt phẳng (ACD) .

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Bài 5. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACF) .

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC .

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
 b) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SCD) và NG song song với mặt phẳng (SAC) .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P) ?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 2:** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel b$, $b \parallel (\alpha)$. Khi đó:
- A. $a \parallel (\alpha)$. B. $a \subset (\alpha)$.
 C. a cắt (α) . D. $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.
- Câu 3:** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:
- A. $a \parallel b$. B. a, b chéo nhau.
 C. $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau. D. a, b cắt nhau.
- Câu 4:** Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
 B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a .
 C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
 D. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .
- Câu 5:** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. a và b không có điểm chung.
 B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
 C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
 D. a và b chéo nhau.
- Câu 6:** Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b .
 B. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b .
 C. Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b .
 D. Các khẳng định A, B, C đều sai.
- Câu 7:** Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khi đó:
- A. $d \parallel d'$. B. d cắt d' . C. d và d' chéo nhau. D. $d \equiv d'$.
- Câu 8:** Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.
- Câu 9:** Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây sai?
- A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
 B. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
 C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b (với M là điểm cho trước).
 D. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .

- Câu 10:** Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Gọi (P) là mặt phẳng qua a , (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?
- A.** Một mặt phẳng (P) , một mặt phẳng (Q) .
B. Một mặt phẳng (P) , vô số mặt phẳng (Q) .
C. Một mặt phẳng (Q) , vô số mặt phẳng (P) .
D. Vô số mặt phẳng (P) và (Q) .
- Câu 11:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.** $MN \parallel mp(ABCD)$. **B.** $MN \parallel mp(SAB)$. **C.** $MN \parallel mp(SCD)$. **D.** $MN \parallel mp(SBC)$.
- Câu 12:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:
- A.** MN nằm trên $mp(ABCD)$. **B.** MN cắt $mp(ABCD)$.
C. MN song song $mp(ABCD)$. **D.** MN và $mp(ABCD)$ chéo nhau.
- Câu 13:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.** $MN \parallel (BCD)$. **B.** $GQ \parallel (BCD)$.
C. MN cắt (BCD) . **D.** Q thuộc mặt phẳng (CDP) .
- Câu 14:** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A.** $OO_1 \parallel (BEC)$. **B.** $OO_1 \parallel (AFD)$.
C. $OO_1 \parallel (EFM)$. **D.** MO_1 cắt (BEC) .
- Câu 15:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC . Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?
- A.** P, Q, R, S . **B.** M, P, R, S . **C.** M, R, S, N . **D.** M, N, P, Q .
- Câu 16:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC , (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD . Mệnh đề nào sau đây đúng về thiết diện của (α) của tứ diện?
- A.** Thiết diện là hình vuông. **B.** Thiết diện là hình thang cân.
C. Thiết diện là hình bình hành. **D.** Thiết diện là hình chữ nhật.
- Câu 17:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là:
- A.** $\frac{400}{9}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.
- Câu 18:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD . M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD . (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình vuông

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm thuộc cạnh SA (không trùng với S hoặc A). (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD . Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình tam giác.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC sao cho $IA = 2ID$ và $JB = 2JC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB . Thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình tam giác. **D.** Tam giác đều.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa .

Tránh mua các trang và cá nhân khác

BÀI 4: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

II. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT

Định lý 1 (dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song):

Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .

Định lý 2 (Tính chất về hai mặt phẳng song song):

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Từ định lý trên, ta có thể chứng minh được các hệ quả sau:

Hệ quả 1. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a và song song với mặt phẳng (Q) .

Hệ quả 2. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý 3

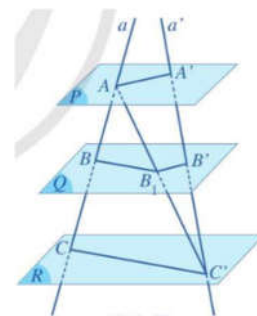
Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) . Nếu mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (P) thì cũng cắt mặt phẳng (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.

III. ĐỊNH LÝ THALES

Định lý 4 (Định lý Thalès)

Nếu a, b là hai cát tuyến bất kỳ cắt ba mặt phẳng song song $(P), (Q), (R)$ lần

lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' thì $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.



B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Bạn Chung cho rằng: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) luôn song song với (Q) . Phát biểu của bạn Chung có đúng không? Vì sao?

Bài 2. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng (P) . Một mặt phẳng cắt a, b, c, d lần lượt tại bốn điểm A', B', C', D' . Chứng minh rằng $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB .

a) Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ với mặt phẳng (ABD) .

Bài 4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng $(AFD) \parallel (BEC)$.

b) Gọi M là trọng tâm của tam giác ABE . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD) . Lấy N là giao điểm của (P) và AC . Tính $\frac{AN}{NC}$

BÀI 5: HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP**A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. HÌNH LĂNG TRỤ****1. Định nghĩa**

Ta có định nghĩa sau:

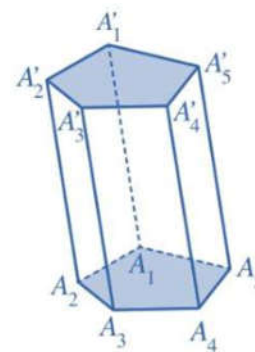
Hình gồm hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A_1'A_2' \dots A_n'$ và các hình bình hành

$A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \dots, A_nA_1A_1'A_n'$ được gọi là hình lăng trụ, kí hiệu là $A_1A_2 \dots A_n.A_1'A_2' \dots A_n'$

Chú ý: Nếu đáy của lăng trụ là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình lăng trụ tương ứng gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác (Hình 71),...

Trong hình lăng trụ $A_1A_2 \dots A_n.A_1'A_2' \dots A_n'$:

- Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và $A_1'A_2' \dots A_n'$ gọi là hai mặt đáy;
- Các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \dots, A_nA_1A_1'A_n'$, gọi là các mặt bên
- Các cạnh của hai mặt đáy gọi là các cạnh đáy;
- Các đoạn thẳng $A_1A_1', A_2A_2', \dots, A_nA_n'$ gọi là các cạnh bên;
- Các đỉnh của hai mặt đáy gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.



Hình 71

2. Tính chất

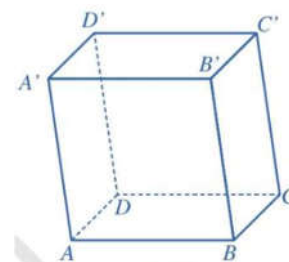
- Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- Hai mặt đáy của hình lăng trụ là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

II. HÌNH HỘP

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Trong mỗi hình hộp, ta gọi:

- Hai mặt không có đỉnh chung là hai mặt đối diện;
- Hai cạnh song song không nằm trong một mặt là hai cạnh đối diện;
- Hai đỉnh không thuộc cùng một mặt là hai đỉnh đối diện;
- Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện là đường chéo.

**2. Tính chất**

Hình hộp là một hình lăng trụ nên hình hộp có các tính chất của hình lăng trụ, ngoài ra:

- Các mặt của hình hộp là các hình bình hành.
- Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp song song với nhau.

Nhận xét: Ta có thể coi hai mặt đối diện bất kì của một hình hộp là hai mặt đáy của nó.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(ACB') \parallel (A'C'D)$.

b) Gọi G_1, G_2 lần lượt là giao điểm của BD' với các mặt phẳng (ACB') và $(A'C'D)$. Chứng minh rằng G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ACB' và $A'C'D$.

c) Chứng minh rằng $BG_1 = G_1G_2 = D'G_2$.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, AA', C'D', AD'$. Chứng minh rằng:

a) $NQ \parallel A'D'$ và $NQ = \frac{1}{2} A'D'$;

- b) Tứ giác $MNQC$ là hình bình hành;
 c) $MN \parallel (ACD')$;
 d) $(MNP) \parallel (ACD')$.

Bài 3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và $A'B'$.

- a) Chứng minh rằng $EF \parallel (BCC'B')$.
 b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng CF với mặt phẳng $(AC'B)$. Chứng minh rằng I là trung điểm đoạn thẳng CF .

C. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

1. Phương pháp

Áp dụng kết quả sau:

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel c, b \parallel d \\ a, b \subset (P) \\ c, d \subset (Q) \\ a \cap b = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

Áp dụng: Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) .

$$\left. \begin{array}{l} a \subset (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AD, SD .

- a. Chứng minh $(EFB) \parallel (SCD)$. Từ đó chứng minh $CI \parallel (EFB)$.
 b. Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD) . Tìm giao điểm K của FI với giao tuyến này, chứng minh $(SBF) \parallel (KCD)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và CD .

- a. Chứng minh mặt phẳng (OMN) và mặt phẳng (SBC) song song với nhau.
 b. Giả sử hai tam giác SAD và ABC đều là tam giác cân tại A . Gọi AE và AF lần lượt là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB . Chứng minh EF song song với mặt phẳng (SAD) .

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.

- a. Chứng minh hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.
 b. Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G và G' lần lượt của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.
 c. Chứng minh G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và tìm thiết diện qua một điểm và song song với một mặt phẳng
1. Phương pháp

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ (\alpha) \cap (P) = a \\ (\alpha) \cap (Q) = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M là trung điểm của AD . Gọi (α) và (β) là mặt phẳng qua điểm M và lần lượt song song với mặt phẳng (SBD) và (SAC) .

- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $mp(\alpha)$.
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi $mp(\beta)$.
- Gọi H và K lần lượt là giao điểm của (α) và (β) với AC và BD . Chứng minh tứ giác $OHMK$ là hình bình hành.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' . Chứng minh:

- Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
- $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh AD và BC lần lượt là P và Q .

- Cho trước điểm P , hãy nói cách dựng điểm Q .
- Gọi K là giao điểm của MN và PQ . Chứng minh rằng $KP = KQ$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC , lấy điểm $P \in SA$.

- Tìm giao tuyến (SAB) và (SCD) .
- Tìm giao điểm SD và (MNP) .
- Tìm thiết diện hình chóp và mặt phẳng (MNP) . Thiết diện là hình gì?
- Gọi $J \in MN$. Chứng minh rằng $OJ \parallel (SAD)$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.
- Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.
- Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
- Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Câu 2: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $mp(\alpha) \parallel mp(\beta)$?

- $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó).

- B.** $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) .
- C.** $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) .
- D.** $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β) .

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Nếu mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .
- B.** Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β) .
- C.** Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- D.** Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong $mp(\alpha)$.

Câu 4: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , đường thẳng $a \parallel (\alpha)$. Có mấy vị trí tương đối của a và (β) .

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) . Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên (P) và (Q) . Gọi I là trung điểm của MN . Chọn khẳng định đúng.

- A.** Tập hợp các điểm I là đường thẳng song song và cách đều (P) và (Q) .
- B.** Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) .
- C.** Tập hợp các điểm I là một mặt phẳng cắt (P) .
- D.** Tập hợp các điểm I là một đường thẳng cắt (P) .

Câu 6: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) ?

- A.** $a \parallel b$ và $b \subset (P)$. **B.** $a \parallel b$ và $b \parallel (P)$.
- C.** $a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$. **D.** $a \subset (Q)$ và $b \subset (P)$.

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$.
- B.** Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì a và b chéo nhau.
- C.** Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- D.** Nếu $(\gamma) \cap (\alpha) = a, (\gamma) \cap (\beta) = b$ và $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$.

Câu 8: Cho đường thẳng $a \subset mp(P)$ và đường thẳng $b \subset mp(Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$. **B.** $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.
- C.** $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$. **D.** a và b chéo nhau.

Câu 9: Hai đường thẳng a và b nằm trong $mp(\alpha)$. Hai đường thẳng a' và b' nằm trong $mp(\beta)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Nếu $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- B.** Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$.
- C.** Nếu $a \parallel b$ và $a' \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- D.** Nếu a cắt b và $a \parallel a', b \parallel b'$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Câu 10: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Hai đường thẳng p và q lần lượt nằm trong (P) và (Q) . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** p và q cắt nhau.
B. p và q chéo nhau.
C. p và q song song.
D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $(NOM) \text{ c\acute{a}t } (OPM)$. **B.** $(MON) // (SBC)$.
C. $(PON) \cap (MNP) = NP$. **D.** $(NMP) // (SBD)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

- A.** Hình hình hành. **B.** Tam giác cân. **C.** Tam giác vuông. **D.** Tam giác đều.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

- A.** $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{14}{9}$. **C.** $\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6$, $CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

- A.** $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm O , $AB=8$, $SA=SB=6$. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB) . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là:

- A.** $5\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.** Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau.
B. Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.
C. Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều.
D. Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

Câu 17: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.** Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
C. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.
D. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Câu 18: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Các cạnh bên của hình chóp cắt đôi một song song.
B. Các cạnh bên của hình chóp cắt là các hình thang.
C. Hai đáy của hình chóp cắt là hai đa giác đồng dạng.
D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

- Câu 19:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?
- A.** Trong hình chóp cụt thì hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- B.** Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
- C.** Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân.
- D.** Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.
- Câu 20:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.** $\Delta \parallel AB$. **B.** $\Delta \parallel AC$. **C.** $\Delta \parallel BC$. **D.** $\Delta \parallel AA'$.
- Câu 21:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Đường thẳng $B'C$ song song với mặt phẳng nào sau đây?
- A.** (AHC') . **B.** $(AA'H)$. **C.** (HAB) . **D.** $(HA'C)$.
- Câu 22:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (AHC') song song với đường thẳng nào sau đây?
- A.** CB' . **B.** BB' . **C.** BC . **D.** BA' .
- Câu 23:** Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?
- A.** $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$. **B.** $AA_1 \parallel (BCC_1)$.
- C.** $AB \parallel (A_1B_1C_1)$. **D.** AA_1B_1B là hình chữ nhật.
- Câu 24:** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?
- A.** $ABCD$ là hình bình hành.
- B.** Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B đồng quy.
- C.** $(ADD_1A_1) \parallel (BCC_1B_1)$.
- D.** AD_1CB là hình chữ nhật.
- Câu 25:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD' . Khẳng định nào dưới đây **sai**?
- A.** $(AA'B'B) \parallel (DD'C'C)$. **B.** $(BA'D') \parallel (ADC')$.
- C.** $A'B'CD$ là hình bình hành. **D.** $BB'D'D$ là một tứ giác.
- Câu 26:** Nếu thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?
- A.** 3 cạnh. **B.** 4 cạnh. **C.** 5 cạnh. **D.** 6 cạnh.
- Câu 27:** Nếu thiết diện của một hình hộp và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?
- A.** 4 cạnh. **B.** 5 cạnh. **C.** 6 cạnh. **D.** 7 cạnh.
- Câu 28:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB . Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?
- A.** Tam giác. **B.** Hình thang. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.
- Câu 29:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T) . Khẳng định nào sau đây không **sai**?
- A.** (T) là hình chữ nhật.

- B. (T) là hình bình hành.
- C. (T) là hình thoi.
- D. (T) là hình vuông.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

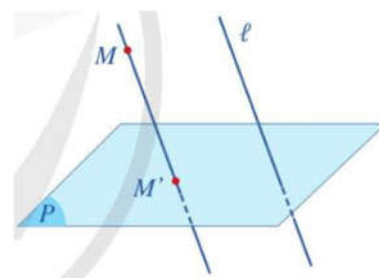
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa .

Tránh mua các trang và cá nhân khác

BÀI 6: PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN**A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. PHÉP CHIẾU SONG SONG****1. Định nghĩa**

-Ta có định nghĩa sau:

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P) . Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) sao cho MM' song song hoặc trùng với ℓ gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ .



-Mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng chiếu, đường thẳng ℓ gọi là phương chiếu, điểm M' gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của điểm M qua phép chiếu song song nói trên.

2. Tính chất

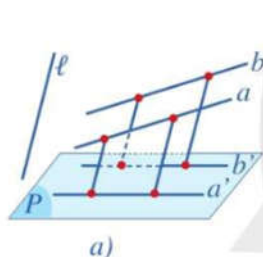
Trong trường hợp tổng quát, ta có định lý sau:

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

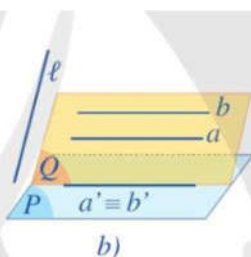
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng; biến tia thành tia; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lý sau (Hình 80, Hình 81):

- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

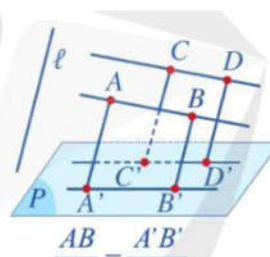


a)



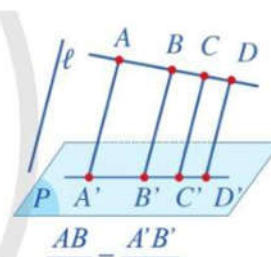
b)

Hình 80



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

a)



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

b)

Hình 81

Chú ý: Đối với hình chiếu song song của đường tròn, người ta chứng minh được rằng: Hình chiếu song song của một đường tròn trên một mặt phẳng theo phương ℓ cho trước là một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

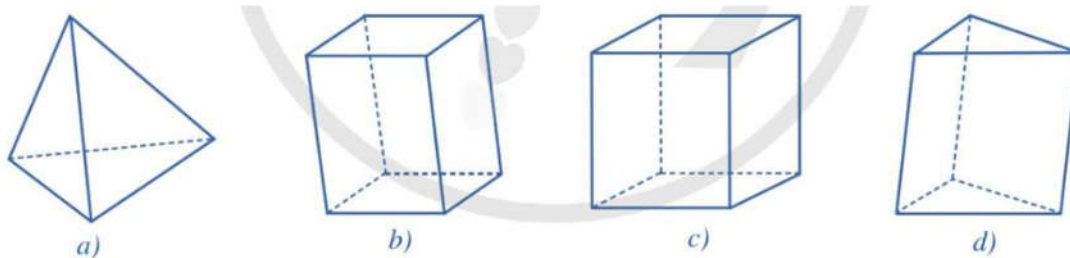
II. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN**1. Khái niệm**

Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Chú ý: Muốn vẽ đúng hình biểu diễn của một hình không gian ta phải áp dụng các tính chất của phép chiếu song song.

2. Hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

Các hình sau đây thường được sử dụng làm hình biểu diễn của: hình tứ diện (Hình 86a); hình hộp (Hình 86b); hình hộp chữ nhật (Hình 86c); hình lăng trụ tam giác (Hình 86d).

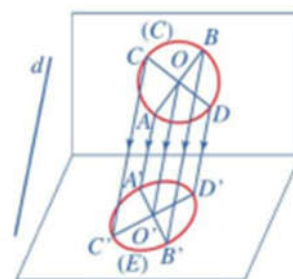


Hình 86

Chú ý

1.

- Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, ...).
- Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật, ...).
- Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn cho một hình thang tùy ý cho trước, sao cho tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.
- Ta thường dùng đường elip làm hình biểu diễn của đường tròn, tâm của elip biểu diễn cho tâm của đường tròn (Hình 87).



Hình 87

2. Phép chiếu song song nói chung không giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song (hay không cùng nằm trên một đường thẳng) và không giữ nguyên độ lớn của một góc. Từ đó suy ra nếu trên hình $\mathcal{H}$ có hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song thì tỉ số của chúng không nhất thiết phải giữ nguyên trên hình biểu diễn. Cũng như vậy, độ lớn của một góc trên hình $\mathcal{H}$ không nhất thiết được giữ nguyên trên hình biểu diễn.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

1. Phương pháp

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, ta cần chú ý một số điểm sau:

- Nếu trên hình H có hai đoạn thẳng cùng phương thì trên hình H' hình chiếu của hai đoạn thẳng đó phải cùng phương.
- Trung điểm của một đoạn thẳng có hình chiếu là trung điểm của đoạn thẳng hình chiếu.
- Trong tam giác có một góc tù, ta cần chú ý chân đường cao kẻ từ đỉnh của góc nhọn không nằm trên cạnh đối diện mà nằm ở trên phần kéo dài của cạnh ấy.
- Một góc bất kì có thể biểu diễn cho mọi góc (nhọn, vuông, tù).
- Một tam giác bất kì có thể là hình biểu diễn của mọi tam giác (cân, đều, vuông).
- Hình bình hành có thể dùng làm hình biểu diễn cho các hình có tính chất của hình bình hành (vuông, thoi, chữ nhật, ...)
- Một đường tròn được biểu diễn bởi một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Hãy chọn mặt phẳng chiếu (P) và phương chiếu d để hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là:

- Một tam giác cân.
- Một tam giác vuông.

Ví dụ 2. Vẽ hình chiếu của hình chóp $S.ABCD$ lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu SA (SA không song song với (P)).

Ví dụ 3. Vẽ hình biểu diễn của tam giác ABC có góc A tù, đường cao BH.

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn của đường tròn có hai đường kính vuông góc.

Ví dụ 5. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Ví dụ 6. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác đều.

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song

1. Phương pháp

Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song thường là dựa vào các tính chất của phép chiếu song song để chứng minh một vấn đề nào đó. Cần chú ý rằng trong các bài toán dạng này, việc tìm phương chiếu đóng vai trò khá quan trọng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD.

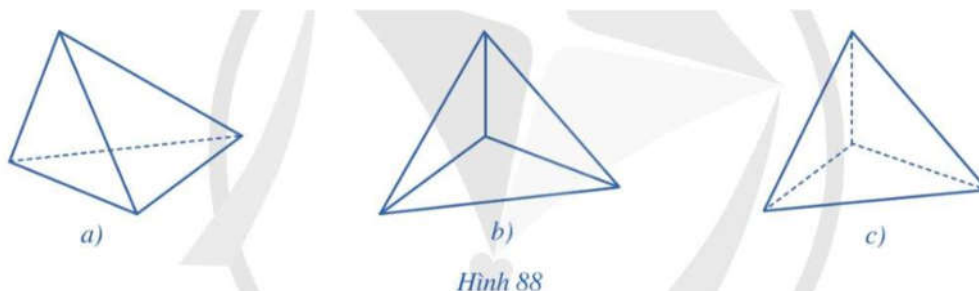
a. Chứng minh hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là trọng tâm của tam giác BCD.

b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AC. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N theo phép chiếu nói trên.

Ví dụ 2. Cho hai hình bình hành ABCD và BCC'B' nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Tìm điểm M trên đoạn DB', và điểm N trên đường chéo AC sao cho $MN \parallel BC'$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Trong các Hình 88a, 88b, 88c, hình nào là hình biểu diễn cho hình tứ diện?



Bài 2. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (ABCD) theo phương $A'B$.

Bài 3. Vẽ hình biểu diễn của các vật trong Hình 89 và Hình 90.



Hình 89



Hình 90

Bài 4. Vẽ hình biểu diễn của:

- Một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn;
- Một lục giác đều.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

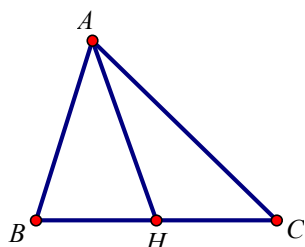
Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.
- Hình chiếu song song của một hình bình hành là một hình bình hành.

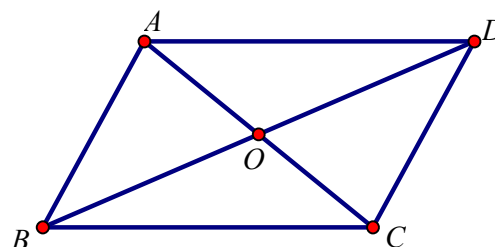
C. Phép chiếu song song biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không cùng phương với phương chiếu.

D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

Câu 2: Trên hình $\mathcal{A}$ có $\begin{cases} AH \perp BC \\ HB = HC \end{cases}$ và hình $\mathcal{B}$ có $\begin{cases} AB \parallel CD, AD \parallel BC \\ AC \perp BD \end{cases}$



Hình $\mathcal{A}$

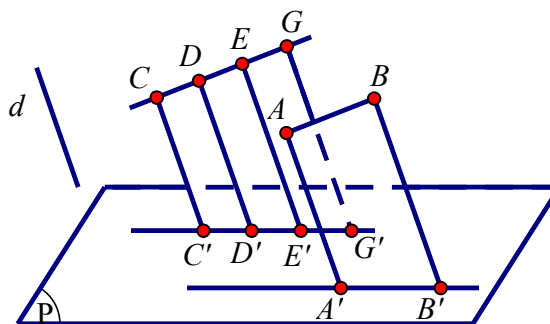


Hình $\mathcal{B}$

Hãy Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A.** ABC là tam giác đều.
- B.** ABC là tam giác cân tại A
- C.** ABCD là hình thoi.
- D.** B và C đúng.

Câu 3: Trên hình $\mathcal{C}$, ta có phép chiếu song song theo phương d và mặt phẳng chiếu (P); $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; A', B', C', D', E', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, E, G qua phép chiếu nói trên.



Hình $\mathcal{C}$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'} = 1$.
- B.** $\frac{C'D'}{D'E'} = \frac{CD}{DE}$.
- C.** $D'G' = A'B'$.
- D.** Tất cả A, B, C đều đúng.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
- B.** Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.
- C.** Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.
- D.** Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

Câu 5: Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là hai đường thẳng a' và b'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** a' và b' luôn luôn cắt nhau.
- B.** a' và b' có thể trùng nhau.
- C.** a và b không thể song song.
- D.** a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

- Câu 6:** Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b'. Khi đó:
- A.** a và b phải song song với nhau.
 - B.** a và b phải cắt nhau.
 - C.** a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
 - D.** a và b không thể song song.
- Câu 7:** Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D có hình chiếu song song trên mặt phẳng (P) lần lượt là bốn điểm A', B', C', D'. Những trường hợp nào sau đây không thể xảy ra?
- A.** A'B'C'D' là bốn đỉnh của một hình bình hành.
 - B.** D' là trọng tâm tam giác A'B'C'.
 - C.** D' là trung điểm cạnh A'B'.
 - D.** Hai điểm B', C' nằm giữa hai điểm A' và D'.
- Câu 8:** Hình chiếu song song của một hình thang ABCD không thể là hình nào dưới đây?
- A.** Hình bình hành.
 - B.** Hình tam giác cân.
 - C.** Đoạn thẳng.
 - D.** Bốn điểm thẳng hàng.

File word và đáp án chi tiết vui lòng liên hệ zalo: 0834 332 133

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10 11,12 và bộ đề kiểm tra kết thúc chuyên đề, giữa kì, cuối kì có lời giải chi tiết của Thầy giáo, Tác giả Trần Đình Cư vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa .

Tránh mua các trang và cá nhân khác

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 4 SÁCH GIÁO KHOA

- Câu 1:** Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi:
- Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
 - Hai đường thẳng không có điểm chung.
 - Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.
 - Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba.
- Câu 2:** Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?
- 1.
 - 2.
 - 3.
 - 4.
- Câu 3:** Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi:
- Đường thẳng đó song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
 - Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.
 - Đường thẳng đó không có điểm chung với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
 - Đường thẳng đó không có điểm chung với hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.
- Câu 4:** Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi:
- Có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng còn lại.
 - Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng.
 - Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.
 - Hai mặt phẳng không có điểm chung.
- Câu 5:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BD . Điểm P thuộc cạnh AC sao cho $PA = 2PC$.
- Xác định giao điểm E của đường thẳng MP với mặt phẳng (BCD) .
 - Xác định giao điểm Q của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP) .
 - Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACD) với mặt phẳng (MNP) .
 - Gọi I là giao điểm của MQ và NP, G là trọng tâm của tam giác ABD . Chứng minh rằng C, I, G thẳng hàng.
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (AMN) với mỗi mặt phẳng sau:
- (SCD) ; b) (SBC) .
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$) và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB . Chứng minh rằng:
- $MN // (SCD)$
 - $DM // (SBC)$;
 - Lấy điểm I thuộc cạnh SD sao cho $\frac{SI}{SD} = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng: $SC // (AIC)$.
- Câu 8:** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy M, M' lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $BC, B'C'$; lấy các điểm G, G', K lần lượt thuộc các đoạn $AM, A'M', A'B$ sao cho $\frac{AG}{AM} = \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{A'K}{A'B} = \frac{2}{3}$.
- Chứng minh rằng $C'M // (A'BM')$.

b) Chứng minh rằng $G'K \parallel (BCC'B')$.

c) Chứng minh rằng $(GG'K) \parallel (BCC'B')$.

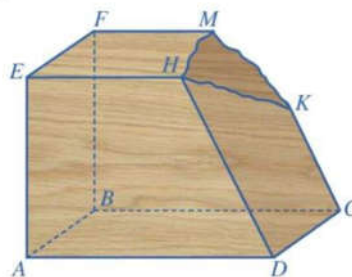
d) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua K và song song với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng (α) cắt cạnh CC' tại điểm I . Tính $\frac{IC}{IC'}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Lấy M, M' lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $BC, B'C'$; lấy các điểm G, G', K lần lượt thuộc các đoạn $AM, A'M', A'B$ sao cho $\frac{AG}{AM} = \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{A'K}{A'B} = \frac{2}{3}$.

a) Chứng minh rằng $C'M \parallel (A'BM')$.

b) Chứng minh rằng $G'K \parallel (BCC'B')$.

Câu 10: Một khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD) \parallel (EFMH), CK \parallel DH$. Khối gỗ bị hỏng một góc (Hình 91). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (R) đi qua K và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.



Hình 91

a) Hãy giúp bác thợ mộc xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ để cắt được chính xác.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm DH, BF với mặt phẳng (R) . Biết $BF = 60 \text{ cm}, DH = 75 \text{ cm}, CK = 40 \text{ cm}$. Tính FJ .

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG IV

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Trong các hình chóp, hình chóp có ít cạnh nhất có số cạnh là bao nhiêu?
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.
- Câu 2:** Cho $ABCD$ là một tứ giác lồi. Hình nào sau đây không thể là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$?
A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Thiết diện của mặt phẳng (α) tùy ý với hình chóp không thể là:
A. Lục giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Tứ giác. **D.** Tam giác.
- Câu 4:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- Câu 5:** Trong không gian, cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?
A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 6:** Trong mặt phẳng (α) , cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Điểm S không thuộc mặt phẳng (α) . Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và 2 trong 4 điểm nói trên?
A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.
- Câu 7:** Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?
A. Ba điểm phân biệt. **B.** Một điểm và một đường thẳng.
C. Hai đường thẳng cắt nhau. **D.** Bốn điểm phân biệt.
- Câu 8:** Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$.
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.
- Câu 9:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
A. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.
B. Nếu A, B, C thẳng hàng và $(P), (Q)$ có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q) .
C. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.
D. Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q) .
- Câu 10:** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- A. CD và NP . B. CD và MN . C. CD và MP . D. CD và AP .

Câu 11: Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- A. Ba điểm. B. Một điểm và một đường thẳng.
C. Hai đường thẳng cắt nhau. D. Bốn điểm.

Câu 12: Cho tam giác ABC . Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh tam giác ABC ?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 13: Trong $mp(\alpha)$, cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Điểm $S \notin mp(\alpha)$. Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm nói trên?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 8.

Câu 14: Cho năm điểm A, B, C, D, E trong đó không có bốn điểm nào ở trên cùng một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong số năm điểm đã cho?

- A. 10. B. 12. C. 8. D. 14.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

- A. SD . B. SO , O là tâm hình bình hành $ABCD$.
C. SG , G là trung điểm AB . D. SF , F là trung điểm CD .

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD // BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

- A. SI , I là giao điểm AC và BM . B. SJ , J là giao điểm AM và BD .
C. SO , O là giao điểm AC và BD . D. SP , P là giao điểm AB và CD .

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. $mp(\alpha)$ qua AB cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình thang. C. Hình lục giác. D. Hình chữ nhật.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (α) đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. (T) là hình chữ nhật. B. (T) là hình bình hành.
C. (T) là hình thoi. D. (T) là hình vuông.

Câu 19: Cho tam giác ABC ở trong $mp(\alpha)$ và phương l . Biết hình chiếu của tam giác ABC lên $mp(P)$ là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(\alpha) // (P)$ B. $(\alpha) \equiv (P)$
C. $(\alpha) // l$ hoặc $(\alpha) \supset l$ D. A, B, C đều sai.

Câu 20: Phép chiếu song song theo phương l không song song với a hoặc b , mặt phẳng chiếu là (P) , hai đường thẳng a và b biến thành a' và b' . Quan hệ nào giữa a và b không được bảo toàn đối với phép chiếu song song?

- A. Cắt nhau B. Chéo nhau C. Song song D. Trùng nhau

Câu 21: Hình chiếu của hình chữ nhật không thể là hình nào trong các hình sau?

- A. Hình thang B. Hình bình hành C. Hình chữ nhật D. Hình thoi

- Câu 22:** Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$, điểm $E \notin (\alpha)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm A, B, C, D, E ?
A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.
- Câu 23:** Cho bốn điểm không đồng phẳng, ta có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ bốn điểm đã cho?
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.
- Câu 24:** Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là.
A. 5 mặt, 5 cạnh. **B.** 6 mặt, 5 cạnh. **C.** 6 mặt, 10 cạnh. **D.** 5 mặt, 10 cạnh.
- Câu 625 :** Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng xác định bởi các điểm A, B, C, D ?
A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.
- Câu 25:** Cho 2 đường thẳng a, b cắt nhau và không đi qua điểm A . Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi a, b và A ?
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 26:** Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt BD tại I . Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây?
A. (BCD) . **B.** (ABD) . **C.** (CMN) . **D.** (ACD) .
- Câu 27:** Cho bốn điểm không đồng phẳng, ta có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ bốn điểm đã cho?
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.
- Câu 28:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng
A. SN . **B.** SC . **C.** SB . **D.** SM .
- Câu 29:** Cho hai đường thẳng phân biệt a và b cùng thuộc mp (α) . Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 30:** Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?
A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.
B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
D. Nếu ba điểm phân biệt M, N, P cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
- Câu 31:** Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là:
A. 5 mặt, 5 cạnh. **B.** 6 mặt, 5 cạnh. **C.** 6 mặt, 10 cạnh. **D.** 5 mặt, 10 cạnh.
- Câu 32:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:
A. SI , I là giao điểm AC và BM . **B.** SJ , J là giao điểm AM và BD .
C. SO , O là giao điểm AC và BD . **D.** SP , P là giao điểm AB và CD .

- Câu 33:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng
- A. SN . B. SC . C. SB . D. SM .
- Câu 34:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) là đường thẳng
- A. SN . B. SA . C. MN . D. SM .
- Câu 35:** Hình hộp có số mặt chéo là:
- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.
- Câu 36:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng
- A. SN . B. SC . C. SB . D. SM .
- Câu 37:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) là đường thẳng
- A. SN . B. SA . C. MN . D. SM .
- Câu 38:** Trong không gian cho hai đường thẳng song song a và b . Kết luận nào sau đây đúng?
- A. Nếu c cắt a thì c cắt b .
 B. Nếu c chéo a thì c chéo b .
 C. Nếu c cắt a thì c chéo b .
 D. Nếu đường thẳng c song song với a thì c song song hoặc trùng b .
- Câu 39:** Xét các mệnh đề sau trong không gian, hỏi mệnh đề nào **sai**?
- A. Mặt phẳng (P) và đường thẳng a không nằm trên (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song nhau.
 B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
 D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- Câu 40:** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:
- A. Trong không gian hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung
 B. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau
 C. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau
 D. Trong không gian hình biểu diễn của một góc thì phải là một góc bằng nó
- Câu 41:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?
- A. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì cắt nhau.
 B. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.
 C. Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.
 D. Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.
- Câu 42:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn là CD . Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N

là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD) . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A.** MN và SD cắt nhau. **B.** $MN \parallel CD$.
- C.** MN và SC cắt nhau. **D.** MN và CD chéo nhau.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. I là trung điểm của SA , thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

- A.** $\triangle IBC$.
B. Hình thang $IJBC$ (J là trung điểm của SD).
C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm của SB).
D. Tứ giác $IBCD$.

Câu 44: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD . Chọn câu **sai**.

- A.** $G_1G_2 = \frac{2}{3}AB$.
- B.** BG_1 , AG_2 và CD đồng qui.
- C.** $G_1G_2 \parallel (ABD)$.
- D.** $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

Câu 45: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Mệnh đề nào dưới đây đúng

- A.** GE và CD chéo nhau. **B.** $GE \parallel CD$.
- C.** GE cắt AD . **D.** GE cắt CD .

Câu 46: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và CC' . Khi đó CB' song song với

- A.** AM . **B.** $A'N$. **C.** $(BC'M)$. **D.** $(AC'M)$.

Câu 47: Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm $\triangle ABD$ và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng

- A.** $(ACD)_{..}$ **B.** $(ABC)_{..}$ **C.** $(ABD)_{..}$ **D.** $(BCD)_{..}$

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Mặt phẳng (P) đi qua M, N và song song với SD cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

- A.** Hình vuông. **B.** Hình thang vuông. **C.** Hình thang cân. **D.** Hình bình hành.

Câu 49: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB . Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng đi qua M và song song với BC và AD , thiết diện thu được là hình gì?

- A.** Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Ngũ giác.

Câu 50: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A , M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD . Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

- A.** Hình tam giác **B.** Hình bình hành **C.** Hình vuông **D.** Hình chữ nhật

Câu 51: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, khẳng định nào **đúng** về hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$.

- A.** $(A'BD) \perp (CB'D')$. **B.** $(A'BD) \parallel (CB'D')$.
C. $(A'BD) \equiv (CB'D')$. **D.** $(A'BD) \cap (CB'D') = BD'$.

Câu 52: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$. **B.** $(BDA') \parallel (D'B'C)$.

C. $(BA'D') \parallel (ADC)$.

D. $(ACD') \parallel (A'C'B)$.

Câu 53: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

B. $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$.

C. $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$.

D. $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (NOM) cắt (OPM) .

B. $(MON) \parallel (SBC)$.

C. $(PON) \cap (MNP) = NP$.

D. $(NMP) \parallel (SBD)$.

Câu 55: Cho đường thẳng $a \subset (\alpha)$ và đường thẳng $b \subset (\beta)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a \parallel b$.

B. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a \parallel (\beta)$ và $b \parallel (\alpha)$.

C. $a \parallel b \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$.

D. a và b chéo nhau.

Câu 56: Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tương ứng tại A', B', C', D' sao cho $AA' = 3, BB' = 5, CC' = 4$. Tính DD' .

A. 4.

B. 6.

C. 2.

D. 12.

Câu 57: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy AD và BC . Gọi M là trọng tâm tam giác SAD , N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $NA = \frac{NC}{2}$, P là điểm thuộc đoạn CD sao cho $PD = \frac{PC}{2}$. Khi đó, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (MNP) là một đường thẳng song song với BC .

B. MN cắt (SBC) .

C. $(MNP) \parallel (SAD)$.

D. $MN \parallel (SBC)$ và $(MNP) \parallel (SBC)$

PHẦN 2: TỰ LUẬN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là tứ giác có cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAC) và (SBD) .

b) (SAC) và (MBD) .

c) (MBC) và (SAD) .

d) (SAB) và (SCD) .

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm I thuộc đoạn SA . Một đường thẳng không song song với AC cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại J và K . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) Mặt phẳng (IJK) và (SAC) .

b) Mặt phẳng (IJK) và (SAB) .

c) Mặt phẳng (IJK) và (SBC) .

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB .

a) Chứng minh: $MN // CD$

b) Tìm giao điểm P của SC với (AND) . Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I .

Chứng minh $SI // AB // CD$. Tứ giác $SIBA$ là hình gì? Vì sao?

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD .

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Từ đó suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD .

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng $(SBC), (SAD)$.

b) Gọi P là trung điểm của SA . Chứng minh SB, SC đều song song với (MNP) .

c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, SBC . Chứng minh rằng: $G_1G_2 // (SAC)$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, AD lần lượt lấy M, N, P sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$. Chứng minh:

a) MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) SD song song với mặt phẳng (MNP) .

c) NP song song với mặt phẳng (SCD) .

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

a) Chứng minh rằng $(OMN) // (SBC)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, ON . Chứng minh $PQ // (SBC)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD .

a) Chứng minh rằng $(OMN) // (SBC)$.

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD . Chứng minh rằng $IJ // (SAB)$.