

Mục lục

Chương 2.	DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN	1
Bài 1.	DÃY SỐ	1
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
	☞ Dạng toán 1. Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức tổng quát	2
	☞ Dạng toán 2. Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức truy hồi	3
	☞ Dạng toán 3. Dự đoán và chứng minh công thức tổng quát của dãy số bằng phương pháp quy nạp (đọc thêm)	4
	☞ Dạng toán 4. Xét sự tăng giảm của dãy số	7
	☞ Dạng toán 5. Xét tính bị chặn của dãy số	9
	☞ Dạng toán 6. Vận dụng thực tiễn	11
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	12
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	18
Bài 2.	CẤP SỐ CỘNG	20
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	20
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	21
	☞ Dạng toán 1. Chứng minh dãy số là một cấp số cộng	21
	☞ Dạng toán 2. Công sai, số hạng đầu và số hạng tổng quát của cấp số cộng	22
	☞ Dạng toán 3. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng	24
	☞ Dạng toán 4. Tính chất của cấp số cộng	27
	☞ Dạng toán 5. Vận dụng, thực tiễn	29
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	31
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	35
Bài 3.	CẤP SỐ NHÂN	37
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	37
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	38
	☞ Dạng toán 1. Chứng minh dãy số là một cấp số nhân	38
	☞ Dạng toán 2. Công bội, số hạng đầu, số hạng tổng quát	39

📁	Dạng toán 3. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân	40
📁	Dạng toán 4. Tính chất của cấp số nhân	42
📁	Dạng toán 5. Vận dụng, thực tiễn	44
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	46
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	52

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. DÃY SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

⚙️ **Định nghĩa dãy số:** Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu $u = u(n)$.

⚠️ Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) . Do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, trong đó

- u_1 là số hạng đầu;
- u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

⚙️ **Định nghĩa dãy số hữu hạn:**

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Ta thường gặp một trong các cách sau đây:

- ① Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- ② Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát;
- ③ Dãy số cho bằng phương pháp mô tả;
- ④ Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi, nghĩa là
 - Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).
 - Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

- ① Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

② Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. DÃY SỐ BỊ CHẶN

- ① Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ② Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ③ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m < u_n < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B // PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức tổng quát

≡ Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

≡ **Ví dụ 2.** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$.

- Viết năm số hạng đầu của dãy.
- Dãy số có bao nhiêu số hạng nhân giá trị nguyên?

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy số. b) Tìm số hạng thứ 100 và 200.
- c) Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy? d) Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

DT**2****Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức truy hồi**

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2) \end{cases}$.

- a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.
- b) Tính u_8 .

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

≡ Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases}$ (dãy số Phi-bô-na-xi).

- a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.
- b) Tính u_7 .

Dự đoán và chứng minh công thức tổng quát của dãy số bằng phương pháp quy nạp (đọc thêm)

≡ **Ví dụ 7.** Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

- Tìm 5 số hạng đầu của dãy số trên.
- Dự đoán công thức và chứng minh quy nạp công thức tổng quát của dãy số trên.



1. **Identify the problem.** The first step is to identify the problem or issue that needs to be addressed. This involves gathering information and understanding the context of the problem.

≡ Ví dụ 10. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi

- a) Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.

b) Dự đoán công thức tính số lượng vi khuẩn sau n giờ và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

☀ **Phương pháp 1:** Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

⚙️ **Phương pháp 2:** Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

≡ Ví dụ 11. Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với

a) $u_n = n^2$.

b) $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

c) $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5}.$

d) $u_n = \frac{n}{3^n}$.

e) $u_n = (-1)^n$.

f) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3}$.

≡ Ví dụ 12. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25 \text{ với } n \geq 2.$$

- a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.
- b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M , ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m , ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
- Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 ; dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

≡ Ví dụ 13. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

a) $u_n = \frac{1}{2^n}$.

b) $u_n = 2 \sin n^2$

c) $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$.

d) $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$.

e) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

f) $u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}$.

b) $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$

➤ Ví dụ 17. Biết rằng năm 2016, dân số của Việt Nam là 93,422 triệu người. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là 1,07% thì số dân P_n (triệu người) của Việt Nam sau n năm, kể từ năm 2016, được tính bằng công thức $P_n = 93,422(1 + 0,0107)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2026, dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

Ví dụ 18. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Goi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chi Hương sau n tháng.

- a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.
- b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

a) $u_n = \frac{1+n}{\sqrt{n^2+1}}$.

b) $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$.

c) $u_n = (-1)^n \sqrt{4^n}$.

d) $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$.

e) $u_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{2n\pi}{3}$.

2 Cho dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

a) Tìm 4 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) .

b) Số $\frac{105}{54}$ là số hạng thứ mấy của dãy số (u_n) ?



$$\text{a) } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

a) $u_n = n^3 - 2n + 1$.

b) $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

c) $u_n = \frac{\sqrt{2}}{3^n}$.

d) $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

6 Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 5$.

b) $u_n = \frac{3n+1}{2n+5}$.

c) $u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$.

d) $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$.

7 Việt Nam là quốc gia nằm ở phía Đông bán đảo Đông Dương thuộc khu vực Đông Nam Á. Với dân số ước tính 93,7 triệu dân vào đầu năm 2018, tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,2%. Giả sử tỉ lệ tăng dân số từ năm 2018 đến năm 2030 không thay đổi thì dân số nước ta đầu năm 2030 khoảng bao nhiêu?

- 8 Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

- a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.
b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

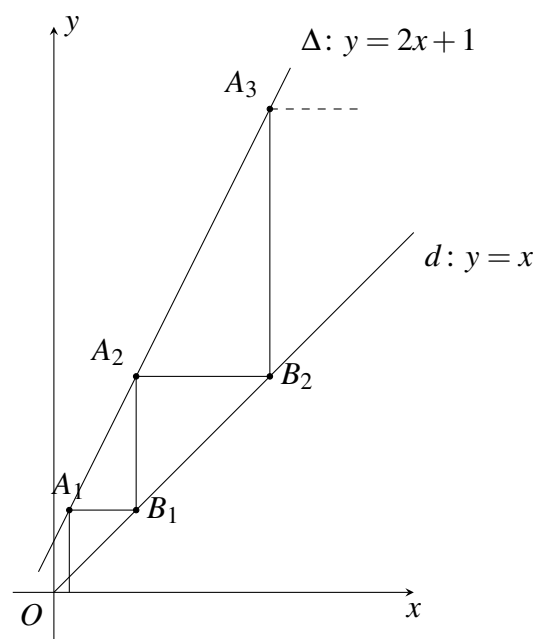
- 9 Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

- a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.
b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.
c) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy P_n .

10 Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$. Trên Δ lấy điểm A_1 có hoành độ bằng $\frac{1}{3}$.

Qua A_1 kẻ một đường thẳng song song với trục hoành cắt đường thẳng $d: y = x$ tại điểm B_1 ; gọi A_2 là giao điểm của Δ với đường thẳng đi qua B_1 và song song với trục tung. Với điểm A_2 , lại thực hiện các bước tương tự như đã làm với điểm A_1 ta sẽ được điểm A_3 . Với điểm A_3 , lại làm như thế ta được điểm A_4 . Cứ tiếp tục mãi quá trình trên, ta sẽ được một dãy vô hạn các điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ nằm trên Δ (hình bên).

Với mỗi số nguyên dương n , gọi u_n là hoành độ của điểm A_n . Hãy cho dãy số (u_n) bằng hệ thức truy hồi.



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $u_3 = -6$. B. $u_2 = 4$. C. $u_4 = -8$. D. $u_1 = -2$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

- A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$. D. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

Câu 3. Cho các dãy số sau, dãy số nào là dãy tăng?

- A. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}$. B. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$. C. $-1; 3; 5; 3$. D. $2; 4; 6; 8$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (2017 + n)^n$. Số hạng đầu tiên của dãy là

- A. 2018. B. 2018^2 . C. 1. D. 2017.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$. Tìm u_5 .

- A. 11. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tìm số hạng thứ hai của dãy số (u_n) .

- A. $u_2 = 2$. B. $u_2 = \sqrt{10}$. C. $u_2 = 10$. D. $u_2 = \sqrt{2}$.

Câu 7. Dãy (u_n) gồm có 5 phân tử cho bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Phần tử thứ 5 của dãy bằng

- A. 7. B. 5. C. 9. D. 3.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 2, u_2 = 3$ và $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Tìm số hạng thứ tư của dãy số đó.

- A. $u_4 = 19$. B. $u_4 = 17$. C. $u_4 = 13$. D. $u_4 = 14$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

- A. $u_7 = 13$. B. $u_7 = 21$. C. $u_7 = 17$. D. $u_7 = 7$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-4}{2n+5}$. Số $\frac{14}{17}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?

- A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 8.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $u_{n+2} = 2^2$. B. $u_{n+2} = 2^n + 2$. C. $u_{n+2} = 2 \cdot 2^n$. D. $u_{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

Câu 13. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm.

- A. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. B. $u_n = \sin n$. C. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$. D. $(-1)^n (2^n + 1)$.

Câu 14. Dãy số nào có công thức số hạng tổng quát dưới đây là dãy số tăng?

- A. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. B. $u_n = (-3)^n$. C. $u_n = 2020 - 3n$. D. $u_n = 2018 + 2n$.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.
 B. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.
 C. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$.
 D. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 16. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là dãy số bị chặn?

- A. $u_n = \frac{n}{n+1}$. B. $u_n = \sqrt{n^2+1}$. C. $u_n = 2^n + 1$. D. $u_n = n + \frac{1}{n}$.

Câu 17. Cho dãy (u_n) là: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. Số hạng tổng quát (u_n) là

- A. $\frac{n+1}{n}$. B. $\frac{n-1}{n}$. C. $\frac{n}{n+1}$. D. $\frac{n^2-n}{n+1}$.

Câu 18. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

- A. $u_n = -2(n+1)$. B. $u_n = -2n$. C. $u_n = 2n - 4$. D. $u_n = n - 2$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A. $u_n = 2^n$. B. $u_n = 2^{n+1}$. C. $u_n = 2$. D. $u_n = n^{n-1}$.

Câu 20. Một vi sinh đặc biệt X có cách sinh sản vô tính kì lạ, sau một giờ thì đẻ một lần, đặc biệt sống được tới giờ thứ n (với n là số nguyên dương) thì ngay lập tức thời điểm đó nó đẻ một lần ra 2^n con X khác, tuy nhiên do chu kì của con X ngắn nên ngay sau khi đẻ xong lần thứ 2, nó lập tức chết. Hỏi rằng, nếu tại thời điểm ban đầu có đúng 1 con thì sau 5 giờ có bao nhiêu con sinh vật X đang sống?

- A. 256. B. 96. C. 336. D. 32.

—HẾT—

§2. CẤP SỐ CỘNG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d . Nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.
- Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

2. Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

3. Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Gọi u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Cho (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu là u_1 và công sai d . Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Khi đó:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \cdots$$

hoặc

$$S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d)$$

1

DT

Ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một số không đổi (công sai).

≡ Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Vì sao?

a) $10, -2, -14, -26, -38;$

b) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{7}{2};$

c) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5};$

d) 1, 4, 7, 10, 13.

≡ **Ví dụ 2.** Viết 5 số hạng đầu của mỗi dãy (u_n) sau và xem nó có phải là một cấp số cộng hay không? Nếu dãy là một cấp số cộng, hãy tìm công sai.

a) $u_n = 3n + 2$

b) $u_n = 3^n - 1$

c) $u_n = (n+2)^2 - n^2$

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n, \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

≡ Ví dụ 3.

- b) Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$.

Công sai, số hạng đầu và số hạng tổng quát của cấp số cộng

≡ Ví dụ 4.

- c) Số 2024 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35. \end{cases}$

DT

3

Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Tổng của n số hạng đầu tiên: Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó

$$\bullet S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \dots$$

$$\bullet \text{ Vì } u_n = u_1 + (n-1)d \text{ nên công thức trên có thể viết lại là } S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Ví dụ 7. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Ví dụ 8. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

≡ Ví dụ 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

$$\text{a) } \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$

c) $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45. \end{cases}$



≡ **Ví dụ 10.** Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$ và cấp số cộng có công sai là một số nguyên âm.

Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \text{ và cấp số cộng} \\ \text{một số nguyên âm.} \end{cases}$

≡ Ví dụ 11. Tính các tổng sau

b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Tính chất của cấp số cộng

1. **Introduction**
 2. **Background**
 3. **Methodology**
 4. **Results**
 5. **Conclusion**

- c) $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$ cũng là một cặp số công.

Ví dụ 17. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.

C // BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$, công sai $d = -2$. Viết ba số hạng đầu của cấp số cộng đó.
- 2 Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Hãy viết năm số hạng đầu của cấp số cộng này.
- 3 Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5n - 1$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của nó.
- 4 Cho dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng này.
- 5 Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng $(u_n) : 10, 5, \dots$

- 6 Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.

- 7 Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng $2, 5, 8, \dots$ để được kết quả bằng 345?

- 8 Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế, Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70 800 000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

- 9 Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

- 10 Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

- 11 Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

- 12 Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức:

$$x_n = 75 + 5(n - 1).$$

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

- a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?
- b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?



- Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.
- Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?



D

Câu 1. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số cộng?

- A.** 2; 8; 32. **B.** 3; 7; 11; 16.
C. (u_n) với $u_n = 4 + 3n$. **D.** (v_n) với $v_n = n^3$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 3 - 5n$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) .

- A.** $d = 3$. **B.** $d = -5$. **C.** $d = -3$. **D.** $d = 5$.

Câu 3. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

- A.** -21 . **B.** 23 . **C.** -17 . **D.** -19 .

Câu 4. Cho cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = -4$. Giá trị của số hạng thứ 17 bằng bao nhiêu?

- A.** $u_{17} = -63$. **B.** $u_{17} = 65$. **C.** $u_{17} = -85$. **D.** $u_{17} = -75$.

Câu 5. Tìm giá trị của x, y sao cho dãy số $-2, x, 4, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

- A.** $x = 2, y = 8$. **B.** $x = 1, y = 7$. **C.** $x = 2, y = 10$. **D.** $x = -6, y = 2$.

Câu 6. Cấp số công (u_n) có $u_6 = 12$, $u_{10} = 24$. Tìm số hạng đầu u_1 .

- A.** $u_1 = 3$. **B.** $u_1 = 2$. **C.** $u_1 = 5$. **D.** $u_1 = -3$.

Câu 7. Cho cấp số công (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} bằng

- A.** 235. **B.** 242. **C.** 4. **D.** 11.

Câu 8. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_7 = 1 \\ u_1 + u_6 = 16. \end{cases}$

- A.** $u_1 = \frac{171}{17}, d = -\frac{14}{17}$.
B. $u_1 = -\frac{14}{17}, d = \frac{171}{17}$.
C. $u_1 = 2, d = 3$.
D. $u_1 = 3, d = 2$.

Câu 9. Cho $9, x, -1, y$ là 4 số lập thành cấp số cộng, khi đó giá trị của x, y là

- A.** $\begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 7u_1 \\ S_5 = 75 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ hai của cấp số cộng này.

- A.** $u_2 = 9$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 3$. **D.** $u_2 = 12$.

Câu 11. Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

- A.** $n = 14$. **B.** $n = 15$. **C.** $n = 13$. **D.** $n = 12$.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = -2$. Tính $S_{2017} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2017}$.

- A.** $S_{2017} = -4060211$. **B.** $S_{2017} = -4060221$.
C. $S_{2017} = 4072323$. **D.** $S_{2017} = 4073232$.

Câu 13. Tính tổng $S = 1 + 5 + 9 + \dots + 397$ ta được kết quả

- A.** 19298. **B.** 19090. **C.** 19920. **D.** 19900.

Câu 14. Một cấp số cộng có 15 số hạng. Biết tổng của 15 số hạng đó bằng 120 và công sai bằng -4 . Tìm số hạng đầu.

- A.** $u_1 = -20$. **B.** $u_1 = 36$. **C.** $u_1 = 540$. **D.** $u_1 = 64$.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2, d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?

- A.** 223. **B.** 225. **C.** 224. **D.** 226.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) , biết: $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + 4$ với $n \geq 1$. Tìm u_{1000} .

- A. 3900. B. 4000. C. 3999. D. 4200.

Câu 17. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$

- A. $u_1 = -36, d = 13$. B. $u_1 = 36, d = 13$.
C. $u_1 = 36, d = -13$. D. $u_1 = -36, d = -13$.

Câu 18. Người ta trồng 1275 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ 2 có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây, ... hàng thứ k có k cây ($k \geq 1$). Hỏi có bao nhiêu hàng?

- A. 51. B. 52. C. 53. D. 50.

Câu 19. Bé An luyện tập khiêu vũ cho buổi dạ hội cuối khóa. Bé bắt đầu luyện tập trong 1 giờ vào ngày đầu tiên. Mỗi ngày tiếp theo, bé tăng thêm 5 phút luyện tập so với ngày trước đó. Hỏi sau một tuần, tổng thời gian bé An đã luyện tập là bao nhiêu phút?

- A. 505 phút. B. 450 phút. C. 525 phút. D. 425 phút.

Câu 20. Chu vi của một đa giác là 158 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm. Biết cạnh lớn nhất là 44 cm. Số các cạnh của đa giác đó là bao nhiêu?

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Câu 21. Bác Bình muốn trồng cây cà phê trên một ngọn đồi như sau: Từ trên đỉnh đồi trồng hàng thứ nhất 2 cây; đi xuống hàng thứ hai 5 cây; đi xuống hàng thứ ba 8 cây; ...; đi xuống hàng cuối cùng dưới chân đồi trồng 26 cây. Theo cách trồng như trên bác bình trồng được bao nhiêu cây cà phê?

- A. 224 cây. B. 112 cây. C. 126 cây. D. 121 cây.

Câu 22. Một công ty trả lương cho anh A mức lương là 4,5 triệu đồng/quý và kể từ quý làm việc thứ 2 thì mức lương sẽ tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hỏi tổng số tiền sau 3 năm làm việc anh A nhận được là bao nhiêu?

- A. 56 triệu. B. 72 triệu. C. 74,3 triệu. D. 73,8 triệu.

Câu 23. Ông X vay của công ty A một khoản tiền 72 triệu đồng và ông này trả nợ cho công ty A như sau: Ở quý thứ nhất ông trả 3 triệu đồng và kể từ quý thứ 2 mức trả sẽ tăng thêm 0,2 triệu đồng mỗi quý. Hỏi sau bao lâu thì ông X trả hết nợ?

- A. 5 năm. B. 6 năm. C. 3 năm. D. 4 năm.

Câu 24. Một đa giác có n cạnh và có chu vi bằng 158 cm. Biết số đo các cạnh của đa giác lập thành một cấp số cộng và công sai $d = 3$ cm và cạnh lớn nhất có độ dài là 44 cm. Đa giác có số cạnh n bằng

- A. $n = 5$. B. $n = 7$. C. $n = 6$. D. $n = 4$.

Câu 25. Tính tổng tất các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

- A. $\frac{14}{9}$. B. $\frac{10}{9}$. C. $\frac{12}{9}$. D. $\frac{8}{9}$.

—HẾT—

§3. CẤP SỐ NHÂN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . Nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.
- Khi $q = 0$ cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $q = 1$ cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

2. Số hạng tổng quát

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

3. Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Giả sử u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thì

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

- Nếu $q \neq 1$ thì

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

- Nếu $q = 1$ thì

$$S_n = nu_1$$

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân? Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n \cdot 5^{2n-1}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy số sau là cấp số nhân. Hãy tìm công bội và số hạng đầu của cấp số nhân đó.

a) Dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$.

b) Dãy (v_n) với $v_n = \frac{5}{3^n}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 5 \cdot u_n + 8$, với $n > 1$. Chứng minh (v_n) với $v_n = u_n + 2$ là cấp số nhân.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

≡ Ví dụ 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội dương, biết $u_1 = 3$ và $u_5 = 48$.

- Tính u_8 .
- Hỏi số 1536 là số hạng thứ mấy?

≡ Ví dụ 5. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

≡ Ví dụ 6. Tìm số hạng đầu u_1 , công bội q và số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân (u_n) biết

$$\text{a) } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351. \end{cases}$$



DT 3 Tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

≡ Ví dụ 7. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_n = 12 \cdot 2^{n-1}$.

- a) Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q .
b) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.
c) Tính tổng $S' = u_3 + u_4 + \dots + u_{12}$.

≡ Ví dụ 8. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

≡ Ví dụ 9. Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

≡ Ví dụ 10. Tính tổng sau: $A = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{512}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

≡ Ví dụ 11. Cho n là số tự nhiên ≥ 2 , tính tổng sau: $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \cdots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 12. Tìm a để ba số $a - 2$; $a - 4$; $a + 2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 13. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Ví dụ 14. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Ví dụ 15. Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 16. Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 17. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 18. Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

Ví dụ 19. Độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ có hai góc không quá 60° .

Ví dụ 20. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5$ mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có khoảng bao nhiêu mét khối gỗ?

≡ Ví dụ 21. Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

≡ Ví dụ 22. Một cửa hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

≡ Ví dụ 23. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là 1,2%. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (x_n) , với $x_n = n^2$.

b) Dãy số (y_n) , với $y_n = \sqrt{5}^{2n-3}$.

c) Dãy số (z_n) , với $z_n = \frac{2}{n}$.

d) Dãy số (w_n) , với $w_n = \frac{3^n + 1}{3^{n+1}}$.

2 Trong các dãy số sau dãy nào là cấp số nhân? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

a) 1; 4; 16; 64; 256.

b) 2; -2; 3; -3; 4; -4.

c) $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$.

3. Biết ba số $-\frac{1}{5}; b; -\frac{1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm b .

4. Giữa các số 160 và 5, hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân và tìm cấp số nhân đó.

5. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trong các trường hợp sau:

a)
$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$$

TOÁN 11 – CÁNH DIỀU

47

- 6 Cho ba số khác nhau lập thành cấp số cộng, bình phương của các số đó lập thành cấp số nhân. Tìm các số đó.

- 7 Tìm công bội của tất cả các cấp số nhân sao cho tổng bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng 15 và tổng các bình phương của chúng bằng 85.

Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Cho 3 số có tổng bằng 28 lập thành cấp số nhân. Tìm cấp số nhân đó biết nếu số thứ nhất giảm 4 thì ta được 3 số lập thành cấp số cộng.

- 10** Tìm số đo bốn góc của một tứ giác, biết số đo các góc đó lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối gấp tám lần số hạng đầu tiên.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 11** Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 125 cm^3 và diện tích toàn phần là 175 cm^2 . Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 12** Một người muốn có 100 triệu sau 18 tháng phải gửi mỗi tháng vào ngân hàng bao nhiêu tiền, biết lãi suất $0,6\%$ / tháng (lãi kép)?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 13 Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 14 Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 15 Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là 12288m^2 , tính diện tích mặt trên cùng.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 16 Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức như sau: Hàng tháng từ đầu mỗi tháng người đó sẽ gửi cố định số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,6% trên tháng. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong quá trình gửi, thì sau 10 năm số tiền mà người đó nhận được cả vốn lẫn lãi khoảng bao nhiêu?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 17 Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- A. 2; 4; 8; 16; 32; 63. B. 1; -2; 4; -8; 16; -32.
C. 1; 3; 9; 27; 54; 162. D. 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$.

Câu 2. Trong các dãy (u_n) cho bởi số hạng tổng quát dưới đây, dãy nào là một cấp số nhân có công bội bằng 2?

- A. $u_n = 2n + 3$. B. $u_n = 2^n$. C. $u_n = 2^n + 3$. D. $u_n = n + 2$.

Câu 3. Tìm công bội của cấp số nhân (u_n) biết số hạng tổng quát $u_n = 3^{2n}$.

- A. $q = 9$. B. $q = 2$. C. $q = 3$. D. $q = 6$.

Câu 4. Dãy số nào sau đây **không** phải là một cấp số nhân?

- A. $(u_n) : 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}$. B. $u_n = 2^n + 2$.
C. $u_n = 2^n + 2^{n+1}$. D. $(u_n) : 7; 7; 7; 7; 7; \dots$

Câu 5. Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = 2$. Tìm u_2 .

- A. $u_2 = 6$. B. $u_2 = 5$. C. $u_2 = -6$. D. $u_2 = 1$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

- A. $u_7 = 192$. B. $u_7 = -9$. C. $u_7 = -192$. D. $u_7 = 384$.

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 2, q = \frac{1}{3}$. Tìm u_{10} .

- A. $\frac{2}{3^8}$. B. $\frac{2}{3^{10}}$. C. $\frac{3}{2^9}$. D. $\frac{2}{3^9}$.

Câu 8. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$.

- A. $S_{10} = -1023$. B. $S_{10} = 1025$. C. $S_{10} = -1025$. D. $S_{10} = 1023$.

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 15$ và $u_8 = -1875$. Công bội của cấp số nhân là

- A. $q = 3$. B. $q = -3$. C. $q = -5$. D. $q = 5$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{10} = 8u_7 \\ u_1 + u_4 = 144 \end{cases}$. Tính công bội q của cấp số nhân (u_n) .

- A. $q = 2$. B. $q = -3$. C. $q = 3$. D. $q = -2$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) : $u_1 = 1, q = 2$. Hỏi 2048 là số hạng thứ mấy?

- A. 12. B. 9. C. 11. D. 10.

Câu 12. Cho cấp số nhân với $u_1 = 3, q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

- A. u_5 . B. u_6 . C. u_7 . D. u_8 .

Câu 13. Xác định x để 3 số $2x - 1; 2x; 2x + 3$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

- A. $x = -\frac{3}{4}$. B. $x = -\frac{4}{3}$. C. $x = \frac{3}{4}$. D. $x = \frac{4}{3}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Tính số đo góc A .

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{7}$. C. $\frac{2\pi}{7}$. D. $\frac{4\pi}{7}$.

Câu 15. Ba số thực a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $D = ac - 5b$ biết rằng $abc = -27$.

- A. $D = -6$. B. $D = -24$. C. $D = 6$. D. $D = 24$.

Câu 16. Cho các số $x + 6y; 5x + 2y; 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, đồng thời các số $x - 1; y + 2; x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Khi đó $x + 2y$ bằng

- A. 10. B. -10. C. 14. D. -14.

Câu 17. Ba cạnh của một tam giác vuông lập thành cấp số nhân. Tính tỉ số cạnh góc vuông nhỏ chia cho cạnh huyền.

- A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Câu 18. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

- A. $S = \frac{5}{2}$. B. $S = \frac{1023}{2048}$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{1023}{512}$.

Câu 19. Trong một cấp số nhân gồm các số hạng dương, hiệu của số hạng thứ năm và số hạng thứ tư là 576, hiệu của số hạng thứ hai và số hạng đầu tiên là 9. Tìm tổng S_3 của 3 số hạng đầu của cấp số nhân này.

- A. $S_3 = 21$. B. $S_3 = -63$. C. $S_3 = 63$. D. $S_3 = -21$.

Câu 20. Giá trị của tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2018}$ bằng

- A. $S = \frac{3^{2019} - 1}{2}$. B. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2}$. C. $S = \frac{3^{2020} - 1}{2}$. D. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2}$.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có hạng đầu $u_1 = 2$ và tổng của 8 số hạng đầu tiên $S_8 = 6560$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

- A. $q = 3$. B. $q = -3$. C. $q = \frac{1}{3}$. D. $q = \pm 3$.

Câu 22. Ba số lập thành một cấp số nhân. Nếu số hạng thứ hai cộng thêm 2 ta được một cấp số cộng. Sau đó cộng thêm 9 với số hạng thứ ba ta lại được một cấp số nhân. Tính tổng ba số đó.

- A. $-\frac{16}{25}$. B. $\frac{52}{25}$. C. $\frac{4}{25}$. D. $\frac{64}{25}$.

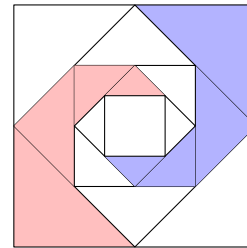
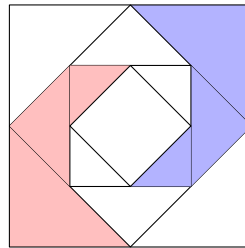
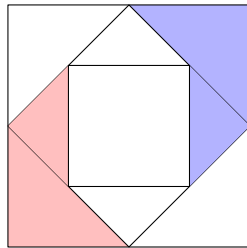
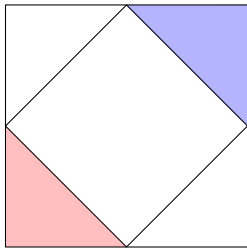
Câu 23. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm kể từ khi bắt đầu gửi tiền gần với kết quả nào sau đây?

- A. 212 triệu. B. 210 triệu. C. 216 triệu. D. 220 triệu.

Câu 24. Ông A mua một chiếc ô tô trị giá 1 tỷ đồng, do chưa đủ tiền nên ông chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12%/năm và trả trước 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm kể từ lúc mua xe, ông trả hết nợ, biết kỳ trả nợ đầu tiên sau ngày mua ô tô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

- A. 23.573.000 đồng. B. 23.537.000 đồng. C. 23.703.000 đồng. D. 24.443.000 đồng.

Câu 25. Một thợ thủ công muốn vẽ trang trí một hình vuông kích thước $4\text{m} \times 4\text{m}$ bằng cách vẽ một hình vuông mới với các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ban đầu, và tô kín màu lên hai tam giác đối diện (như hình vẽ). Quá trình vẽ và tô theo quy luật đó được lặp lại 5 lần. Tính số tiền nước sơn để người thợ đó hoàn thành trang trí hình vuông trên? Biết tiền nước sơn 1m^2 là 60000 đồng.



- A. 575 000 đồng. B. 387 500 đồng. C. 465 000 đồng. D. 232 500 đồng.

—HẾT—

Mục lục

Chương 2.	DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN	1
Bài 1.	DÃY SỐ	1
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
	✎ Dạng toán 1. Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức tổng quát	2
	✎ Dạng toán 2. Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức truy hồi	3
	✎ Dạng toán 3. Dự đoán và chứng minh công thức tổng quát của dãy số bằng phương pháp quy nạp (đọc thêm)	3
	✎ Dạng toán 4. Xét sự tăng giảm của dãy số	5
	✎ Dạng toán 5. Xét tính bị chặn của dãy số	7
	✎ Dạng toán 6. Vận dụng thực tiễn	8
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	9
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	14
Bài 2.	CẤP SỐ CỘNG	19
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	19
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	20
	✎ Dạng toán 1. Chứng minh dãy số là một cấp số cộng	20
	✎ Dạng toán 2. Công sai, số hạng đầu và số hạng tổng quát của cấp số cộng	20
	✎ Dạng toán 3. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng	22
	✎ Dạng toán 4. Tính chất của cấp số cộng	24
	✎ Dạng toán 5. Vận dụng, thực tiễn	26
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	27
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	29
Bài 3.	CẤP SỐ NHÂN	36
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	36
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	37
	✎ Dạng toán 1. Chứng minh dãy số là một cấp số nhân	37
	✎ Dạng toán 2. Công bội, số hạng đầu, số hạng tổng quát	37

📁	Dạng toán 3. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân	39
📁	Dạng toán 4. Tính chất của cấp số nhân	41
📁	Dạng toán 5. Vận dụng, thực tiễn	43
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	44
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	51
	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ	58
A	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1	58
B	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2	58
C	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3	58

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. DÃY SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

⚙️ **Định nghĩa dãy số:** Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu $u = u(n)$.

⚠️ Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) . Do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, trong đó

- u_1 là số hạng đầu;
- u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

⚙️ **Định nghĩa dãy số hữu hạn:**

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Ta thường gặp một trong các cách sau đây:

- ① Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- ② Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát;
- ③ Dãy số cho bằng phương pháp mô tả;
- ④ Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi, nghĩa là
 - Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).
 - Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

- ① Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

② Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Dãy số bị chặn

- ① Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ② Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ③ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức tổng quát

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3^2 - 1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{3}{3^3 - 1} = \frac{3}{26}.$$

□

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$.

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy.
- b) Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên?

Lời giải.

a) Ta có năm số hạng đầu của dãy $u_1 = \frac{1^2 + 3 \cdot 1 + 7}{1 + 1} = \frac{11}{2}; u_2 = \frac{17}{3}; u_3 = \frac{25}{4}; u_4 = 7; u_5 = \frac{47}{6}$.

b) Ta có: $u_n = n + 2 + \frac{5}{n + 1}$, do đó u_n nguyên khi và chỉ khi $\frac{5}{n + 1}$ nguyên hay $n + 1$ là ước của 5. Điều đó xảy ra khi $n + 1 = 5 \Leftrightarrow n = 4$. Vậy dãy số có duy nhất một số hạng nguyên là $u_4 = 7$.

□

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n + 1}{n + 2}$.

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.
- b) Tìm số hạng thứ 100 và 200.
- c) Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?
- d) Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Lời giải.

a) Năm số hạng đầu của dãy là: $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$.

b) Số hạng thứ 100: $u_{100} = \frac{2 \cdot 100 + 1}{100 + 2} = \frac{67}{34}$.

Số hạng thứ 200: $u_{200} = \frac{2 \cdot 200 + 1}{200 + 2} = \frac{401}{202}$.

c) Giả sử $u_n = \frac{167}{84} \Rightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

d) Ta có: $u_n = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2} \Rightarrow u_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 \vdots (n+2) \Leftrightarrow n = 1$.

Vậy dãy số có duy nhất một số hạng là số nguyên.

DT 2 Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức truy hồi

≡ Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

💬 Lời giải.

Ta có $u_1 = -1; u_2 = u_1 + 3 = 2; u_3 = u_2 + 3 = 5$.

≡ Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2) \end{cases}$.

a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.

b) Tính u_8 .

💬 Lời giải.

Dạng khai triển của dãy số đã cho là $1; 3; 7; 15; \dots$

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7, u_4 = 15, u_5 = 31, u_6 = 63, u_7 = 127, u_8 = 255$.

≡ Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases}$ (dãy số Phi-bô-na-xi).

a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.

b) Tính u_7 .

💬 Lời giải.

Dạng khai triển của dãy số đã cho là $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \dots$

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13$.

DT 3 Dự đoán và chứng minh công thức tổng quát của dãy số bằng phương pháp quy nạp (đọc thêm)

≡ Ví dụ 7. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

a) Tìm 5 số hạng đầu của dãy số trên.

b) Dự đoán công thức và chứng minh quy nạp công thức tổng quát của dãy số trên.

💬 Lời giải.

a) 5 số hạng đầu của dãy số trên là: $3, 8, 13, 18, 23$.

b) Ta có $u_2 = 8 = 5.2 - 2, u_3 = 13 = 5.3 - 2, u_4 = 18 = 5.4 - 2$

Dự đoán: $\forall n \geq 1$, ta có $u_n = 5n - 2$ (1).

Chứng minh:

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 3 = 5.1 - 2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k$ tức là ta có: $u_k = 5k - 2$.

Ta chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh: $u_{k+1} = 5.(k + 1) - 2$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$$u_{k+1} = u_k + 5 = (5k - 2) + 5 = 5k + 5 - 2 = 5(k + 1) - 2.$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$ do đó (1) đúng với mọi $n \geq 1$. □

≡ Ví dụ 8. Cho dãy số (u_n) biết: $u_1 = 10, u_{n+1} = 2u_n$, với mọi $n \geq 1$.

a) Tính u_2, u_3, u_4, u_5 .

b) Dùng quy nạp để chứng minh $u_n = 10.2^{n-1}, \forall n \geq 1$.

💬 Lời giải.

a) Ta có $u_2 = 20, u_3 = 40, u_4 = 80, u_5 = 160$.

b) Chứng minh $u_n = 10.2^{n-1}$ (*).

Với $n = 1$ ta có $u_1 = 10$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử (*) đúng với $n = k, k \geq 1$, nghĩa là $u_k = 10.2^{k-1}$.

Ta sẽ chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh $u_{k+1} = 10.2^k$.

$$Ta\ có\ u_{k+1} = 2u_k = 2.10.2^{k-1} = 10.2^k.$$

Vậy (*) đúng với $n = k + 1$.

Kết luận: $u_n = 10.2^{n-1}, \forall n \geq 1$. □

≡ Ví dụ 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy.

b) Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$.

💬 Lời giải.

a) Ta có 5 số hạng đầu của dãy là: $u_1 = 1; u_2 = 2u_1 + 3 = 5; u_3 = 2u_2 + 3 = 13; u_4 = 2u_3 + 3 = 29; u_5 = 2u_4 + 3 = 61$.

b) Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

• Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} - 3 = 1 \Rightarrow$ bài toán đúng với $n = 1$.

• Giả sử $u_k = 2^{k+1} - 3$, ta chứng minh $u_{k+1} = 2^{k+2} - 3$.

Thật vậy, theo công thức truy hồi ta có: $u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3$. □

≡ Ví dụ 10. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn ecoli sẽ nhân đôi 1 lần.

a) Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.

- b) Dự đoán công thức tính số lượng vi khuẩn sau n giờ và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

 **Lời giải.**

Đặt $u_1 = 5$, gọi số vi khuẩn sau n lần phân chia là u_{n+1} , khi đó ta có dãy số (u_n) :

$$u_1 = 5, u_{n+1} = 2u_n$$

a) Ta có $u_2 = 10, u_3 = 20, u_4 = 40$.

b) Ta sẽ chứng minh $u_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ (*)

Với $n = 1$ ta có $u_1 = 5$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử (*) đúng với $n = k, k \geq 1$, nghĩa là $u_k = 5 \cdot 2^{k-1}$

Ta sẽ chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh $u_{k+1} = 5 \cdot 2^k$

Ta có $u_{k+1} = 2u_k = 2 \cdot 5 \cdot 2^{k-1} = 5 \cdot 2^k$.

Vậy (*) đúng với $n = k + 1$.

Kết luận: $u_n = 5 \cdot 2^{n-1} \forall n \geq 1$.

Vì cứ 30 phút vi khuẩn sẽ phân chia 1 lần nên sau n giờ, vi khuẩn sẽ phân chia $2n$ lần. Do đó, công thức tính số vi khuẩn có được sau n giờ là $u_{2n+1} = 5 \cdot 2^{2n}$.

□

DT

4

Xét sự tăng giảm của dãy số

 **Phương pháp 1:** Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

 **Phương pháp 2:** Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

 **Ví dụ 11.** Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với

a) $u_n = n^2$.

b) $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

c) $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5}$.

d) $u_n = \frac{n}{3^n}$.

e) $u_n = (-1)^n$.

f) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3}$.

 **Lời giải.**

a) Xét $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) là dãy tăng.

b) Ta có: $u_n = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(2 - \frac{1}{n+1+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

c) Ta có $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5} = 1 - \frac{6}{4^n + 5}$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{6}{4^{n+1} + 5}\right) - \left(1 - \frac{6}{4^n + 5}\right) = \frac{6}{4^n + 5} - \frac{6}{4^{n+1} + 5} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

d) Ta có $u_n = \frac{n}{3^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Xét thương } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3 \cdot n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

e) Ta có:

$$u_1 = (-1)^1 = -1.$$

$$u_2 = (-1)^2 = 1.$$

$$u_3 = (-1)^3 = -1.$$

Vậy (u_n) là dãy không tăng không giảm.

f) Ta có $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3} = \frac{-3}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}$.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-3}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} - \frac{-3}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}} - \frac{3}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

□

≡ Ví dụ 12. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25 \text{ với } n \geq 2.$$

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

💬 Lời giải.

a) Ta có: $s_1 = 200; s_2 = 225; s_3 = 250; s_4 = 275; s_5 = 300$.

Vậy lương của anh Thanh vào năm thứ 5 là 300 triệu đồng.

b) Ta có $s_n - s_{n-1} = 25 > 0 \forall n \geq 2$ do đó (s_n) là dãy số tăng.

Điều này cho thấy ý nghĩa thực tế là một người có nhiều năm làm việc thì nhận được lương nhiều hơn người mới vào làm việc.

□

- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M , ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m , ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
- Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 ; dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

Ví dụ 13. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

a) $u_n = \frac{1}{2^n}.$

b) $u_n = 2 \sin n^2$

c) $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}.$

d) $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}.$

e) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$

f) $u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}.$

Lời giải.

a) $0 < u_n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn.

b) Ta có: $-2 \leq u_n = 2 \sin n^2 \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra (u_n) với $u_n = 2 \sin n^2$ bị chặn dưới bởi -2 và bị chặn trên bởi 2 .

c) Ta có $u_n = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{4}{3n+3} < 1, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên.

Mặt khác, $\frac{3n-1}{3n+1} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

d) Ta có

$$u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2-3)}. \quad (1)$$

Để thấy, với mọi $n \geq 1$ ta có, $-1 \leq \frac{1}{2n^2-3} \leq \frac{1}{5}$.

Do đó từ (1) suy ra $-2 \leq u_n \leq 1, \forall n \geq 1$.

Từ đó suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

e) Ta có $u_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm nên $u_{n+1} \leq u_1 = \frac{1}{2}$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

f) Ta có $u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có $\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{2n-1}{n} \leq \frac{2n}{n} = 2$ nên dãy số bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải.

Ta có $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số bị chặn dưới.

Mặt khác $u_n = \frac{8n+3}{3n+5} < \frac{8n+3}{3n} = \frac{8}{3} + \frac{1}{n} < \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$. Do đó dãy số bị chặn trên bởi $\frac{11}{3}$.

Vậy dãy số đã cho bị chặn. □

Ví dụ 15. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n}{n^2+9}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Với mọi $n \geq 1$, ta có $\frac{3n}{n^2+9} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2+9 \leq 6n \Leftrightarrow (n-3)^2 \leq 0$ (đúng).

Vậy dãy số đã cho bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$. □

Ví dụ 16. Xét tính bị chặn của dãy (u_n) được cho bởi

a) $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$

b) $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$

Lời giải.

a) Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{2}$.

Mặt khác $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$.

Suy ra $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$. Vậy dãy số đã cho bị chặn.

b) Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Ta có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$u_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \text{ với mọi số nguyên dương } n.$$

Cho nên (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn. □

DT

6

Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 17. Biết rằng năm 2016, dân số của Việt Nam là 93,422 triệu người. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là 1,07% thì số dân P_n (triệu người) của Việt Nam sau n năm, kể từ năm 2016, được tính bằng công thức $P_n = 93,422(1 + 0,0107)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2026, dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

Lời giải.

Từ năm 2016 đến năm 2026 là 10 năm, nên $n = 10$. Thay vào công thức đã cho ta được

$P_{10} \approx 1.03,9$ triệu người. □

Ví dụ 18. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

- a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.
b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

Lời giải.

a) Đặt $A_0 = 100$ (triệu đồng). Khi đó

- $A_1 = A_0 + \frac{0,8}{100}A_0 - 2 = 1,008A_0 - 2 = 98,8$ (triệu đồng).
- $A_2 = A_1 + \frac{0,8}{100}A_1 - 2 = 1,008A_1 - 2 = 97,5904$ (triệu đồng).
- $A_3 = A_2 + \frac{0,8}{100}A_2 - 2 = 1,008A_2 - 2 = 96,3711232$ (triệu đồng).
- $A_4 = A_3 + \frac{0,8}{100}A_3 - 2 = 1,008A_3 - 2 = 95,1420932$ (triệu đồng).
- $A_5 = A_4 + \frac{0,8}{100}A_4 - 2 = 1,008A_4 - 2 = 93,9032332$ (triệu đồng).
- $A_6 = A_5 + \frac{0,8}{100}A_5 - 2 = 1,008A_5 - 2 = 92,6544632$ (triệu đồng).

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) là $A_n = 1,008A_{n-1} - 2$, với $n \geq 1$.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tìm 4 số hạng đầu tiên của các dãy số (u_n) biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \frac{1+n}{\sqrt{n^2+1}}$.

b) $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$.

c) $u_n = (-1)^n \sqrt{4^n}$.

d) $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

e) $u_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{2n\pi}{3}$.

Lời giải.

a) $u_n = \frac{1+n}{\sqrt{n^2+1}}$.

+ Với $n = 1$ suy ra $u_1 = \sqrt{2}$.

+ Với $n = 2$ suy ra $u_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

+ Với $n = 3$ suy ra $u_3 = \frac{2\sqrt{10}}{5}$.

+ Với $n = 4$ suy ra $u_4 = \frac{5\sqrt{17}}{17}$.

b) $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$.

+ Với $n = 1$ suy ra $u_1 = \frac{1}{3}$.

+ Với $n = 2$ suy ra $u_2 = \frac{3}{5}$.

$$+ \text{ Với } n = 3 \text{ suy ra } u_3 = \frac{7}{9}.$$

$$+ \text{ Với } n = 4 \text{ suy ra } u_4 = \frac{15}{17}.$$

c) $u_n = (-1)^n \sqrt{4^n}$.

$$+ \text{ Với } n = 1 \text{ suy ra } u_1 = -2.$$

$$+ \text{ Với } n = 2 \text{ suy ra } u_2 = 4.$$

$$+ \text{ Với } n = 3 \text{ suy ra } u_3 = -8.$$

$$+ \text{ Với } n = 4 \text{ suy ra } u_4 = 16.$$

d) $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$.

$$+ \text{ Với } n = 1 \text{ suy ra } u_1 = 0.$$

$$+ \text{ Với } n = 2 \text{ suy ra } u_2 = 1.$$

$$+ \text{ Với } n = 3 \text{ suy ra } u_3 = 0.$$

$$+ \text{ Với } n = 4 \text{ suy ra } u_4 = \frac{1}{2}.$$

e) $u_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{2n\pi}{3}$.

$$+ \text{ Với } n = 1 \text{ suy ra } u_1 = 0.$$

$$+ \text{ Với } n = 2 \text{ suy ra } u_2 = \frac{1}{2}.$$

$$+ \text{ Với } n = 3 \text{ suy ra } u_3 = \frac{3}{2}.$$

$$+ \text{ Với } n = 4 \text{ suy ra } u_4 = -\frac{1}{2}.$$

□

2 Cho dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

- a) Tìm 4 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) .
- b) Số $\frac{105}{54}$ là số hạng thứ mấy của dãy số (u_n) ?

Lời giải.

a) Tìm 4 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) .

$$+ \text{ Với } n = 1 \text{ suy ra } u_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2} = 1.$$

$$+ \text{ Với } n = 2 \text{ suy ra } u_1 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}.$$

$$+ \text{ Với } n = 3 \text{ suy ra } u_1 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 + 2} = \frac{7}{5}.$$

$$+ \text{ Với } n = 4 \text{ suy ra } u_1 = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4 + 2} = \frac{3}{2}.$$

b) Số $\frac{105}{54}$ là số hạng thứ mấy của dãy số (u_n) ?

Ta có $u_n = \frac{105}{54} \Rightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{105}{54} \Rightarrow n = 52$.

Vậy số $\frac{105}{54}$ là số hạng thứ 52 của dãy số (u_n) .

□

- 3 Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$. Hãy viết dạng khai triển của dãy số. Tính u_{50} và u_{99} .

Lời giải.

Dạng khai triển của dãy số đã cho là $0; \frac{1}{7}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{n-1}{3n+1}; \dots$

Ta có $u_{50} = \frac{50-1}{3 \cdot 50+1} = \frac{49}{151}$ và $u_{99} = \frac{99-1}{3 \cdot 99+1} = \frac{49}{149}$. □

- 4 Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 3, u_2 = \sqrt{10}, u_3 = \sqrt{11}, u_4 = \sqrt{12}, u_5 = \sqrt{13}$.

Ta thấy $u_n > 0$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Từ công thức $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ suy ra

$$u_{n+1}^2 = 1 + u_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2^2 - u_1^2 &= 1 \\ u_3^2 - u_2^2 &= 1 \\ u_4^2 - u_3^2 &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n^2 - u_{n-1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n^2 - u_1^2 = n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 = u_1^2 + n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 = n + 8 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{n+8}.$$

- b) Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 13, u_4 = 29, u_5 = 61$.
Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$ suy ra

$$u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + 3 = 2(u_n + 3), \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1} + 3}{u_n + 3} = 2, \forall n \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_2 + 3}{u_1 + 3} &= 2 \\ \frac{u_3 + 3}{u_2 + 3} &= 2 \\ \frac{u_4 + 3}{u_3 + 3} &= 2 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u_n + 3}{u_{n-1} + 3} &= 2. \end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n + 3}{u_1 + 3} = 2^{n-1} \Rightarrow u_n + 3 = 2^{n-1}(u_1 + 3) \Leftrightarrow u_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^{n+1} - 3.$$

□

5 Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) , biết

a) $u_n = n^3 - 2n + 1$.

b) $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

c) $u_n = \frac{\sqrt{2}}{3^n}$.

d) $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^3 - 2(n+1) + 1 - (n^3 - 2n + 1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 - n^3 + 2n \\ &= 3n - 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

b) Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} - 2 \right) - \left(\frac{1}{n} - 2 \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

c) Ta có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Xét thương } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} : \frac{\sqrt{2}}{3^n} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

d) Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

□

6 Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 5$.

b) $u_n = \frac{3n+1}{2n+5}$.

c) $u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$.

d) $u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1}$.

Lời giải.

a) Dãy số bị chặn dưới bởi 5, không bị chặn trên.

b) Dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0. Vì $u_n < \frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} < \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ nên dãy số bị chặn trên bởi $\frac{5}{2}$. Vậy dãy số bị chặn.

c) Ta có $|u_n| \leq 1$ nên dãy số bị chặn trên bởi 1, bị chặn dưới bởi -1.

d) Dãy số bị chặn dưới bởi 0. Vì $u_n < \frac{n^2+2n}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} \leq 3$ nên dãy số bị chặn trên. Vậy dãy số bị chặn.

□

- 7 Việt Nam là quốc gia nằm ở phía Đông bán đảo Đông Dương thuộc khu vực Đông Nam Á. Với dân số ước tính 93,7 triệu dân vào đầu năm 2018, tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,2%. Giả sử tỉ lệ tăng dân số từ năm 2018 đến năm 2030 không thay đổi thì dân số nước ta đầu năm 2030 khoảng bao nhiêu?

Lời giải.

Từ năm 2018 đến năm 2030 là 12 năm.

Dân số nước ta tính đến năm 2030 với tỉ lệ tăng dân số không đổi 1,2% là

$$S = 93,7 \cdot (1 + 1,2\%)^{12} \approx 108,12 \text{ triệu dân.}$$

□

- 8 Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

- 9 Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy P_n .

Lời giải.

Đặt $P_0 = 100$ (triệu đồng). Ta có

a) Số tiền của chị Mai sau 1 tháng là $P_1 = P_0 + P_0 \cdot \frac{0,5}{100} + 6 = 106,5$ (triệu đồng)

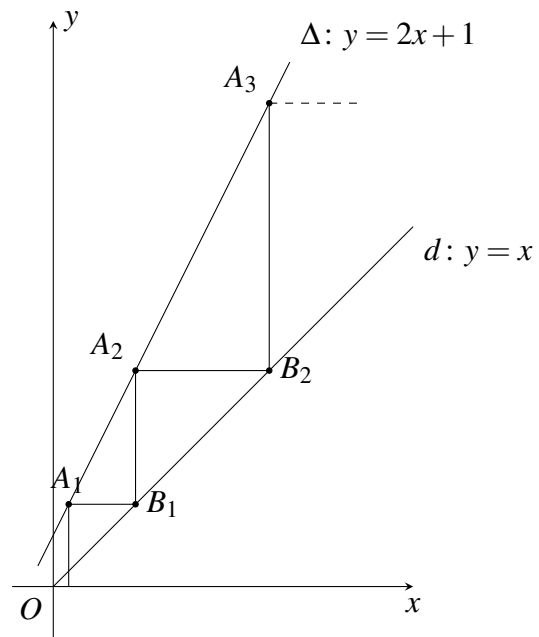
b) Số tiền của chị Mai sau 2 tháng là $P_2 = P_1 + P_1 \cdot \frac{0,5}{100} + 6 = 113,0325$ (triệu đồng).

Số tiền của chị Mai sau 3 tháng là $P_3 = P_2 + P_2 \cdot \frac{0,5}{100} + 6 = 119,598$ (triệu đồng).

c) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy P_n là $P_n = 1,005 \cdot P_{n-1} + 6$.

□

- 10** Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$. Trên Δ lấy điểm A_1 có hoành độ bằng $\frac{1}{3}$. Qua A_1 kẻ một đường thẳng song song với trục hoành cắt đường thẳng $d: y = x$ tại điểm B_1 ; gọi A_2 là giao điểm của Δ với đường thẳng đi qua B_1 và song song với trục tung. Với điểm A_2 , lại thực hiện các bước tương tự như đã làm với điểm A_1 ta sẽ được điểm A_3 . Với điểm A_3 , lại làm như thế ta được điểm A_4 . Cứ tiếp tục mãi quá trình trên, ta sẽ được một dãy vô hạn các điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ nằm trên Δ (hình bên). Với mỗi số nguyên dương n , gọi u_n là hoành độ của điểm A_n . Hãy cho dãy số (u_n) bằng hệ thức truy hồi.



Lời giải.

- Với mỗi $n \geq 1$, kí hiệu a_n và b_n tương ứng là tung độ của điểm A_n và điểm B_n . Khi đó:

- Do A_n nằm trên Δ nên $a_n = 2u_n + 1$;
- Do B_n nằm trên đường thẳng đi qua A_n và song song với trục hoành nên $b_n = a_n = 2u_n + 1$
- Do B_n nằm trên đường thẳng đi qua A_{n+1} và song song với trục tung nên hoành độ của nó bằng u_{n+1} . Từ đó, do B_n nằm trên d nên $u_{n+1} = b_n = 2u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$.

Vậy, dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = 2u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$. □

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $u_3 = -6$. B. $u_2 = 4$. C. $u_4 = -8$. D. $u_1 = -2$.

Lời giải.

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC:

$$u_1 = -2 \cdot 1 = -2; u_2 = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 = 4; u_3 = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 = -6; u_4 = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án $u_4 = -8$ sai.

Chọn đáp án **C**. □

Câu 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

- A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$. D. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

Lời giải.

Dùng MTCT chức năng CALC: ta có $u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3^2 - 1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{3}{3^3 - 1} = \frac{3}{26}$.

Chọn đáp án **C**. □

Câu 3. Cho các dãy số sau, dãy số nào là dãy tăng?

- A. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}$. B. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$. C. $-1; 3; 5; 3$. D. $2; 4; 6; 8$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (2017 + n)^n$. Số hạng đầu tiên của dãy là

- A. 2018. B. 2018^2 . C. 1. D. 2017.

Lời giải.

Số hạng đầu tiên của dãy là $u_1 = (2017 + 1)^1 = 2018$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$. Tìm u_5 .

- A. 11. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải.

Với $n = 5 \Rightarrow u_5 = 11$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tìm số hạng thứ hai của dãy số (u_n) .

- A. $u_2 = 2$. B. $u_2 = \sqrt{10}$. C. $u_2 = 10$. D. $u_2 = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = u_{1+1} = \sqrt{1 + u_1^2} = \sqrt{10} \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 7. Dãy (u_n) gồm có 5 phần tử cho bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Phần tử thứ 5 của dãy bằng

- A. 7. B. 5. C. 9. D. 3.

Lời giải.

Cách 1: (nếu chưa học tới cấp số cộng) Đây là dãy số cho bởi công thức truy hồi, ta cứ thay vào công thức thì được

$$u_1 = 1; u_2 = 3; u_3 = 5; u_4 = 7; u_5 = 9.$$

Cách 2: (nếu đã học tới cấp số cộng) Đây là cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$ nên ta có

$$u_5 = u_1 + 4d = 1 + 4 \cdot 2 = 9.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 8. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 2, u_2 = 3$ và $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Tìm số hạng thứ tư của dãy số đó.

- A. $u_4 = 19$. B. $u_4 = 17$. C. $u_4 = 13$. D. $u_4 = 14$.

Lời giải.

Từ $u_3 = 2 \cdot 3 + 2 = 8 \Rightarrow u_4 = 2 \cdot 8 + 3 = 19$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 9. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

- A. $u_7 = 13$. B. $u_7 = 21$. C. $u_7 = 17$. D. $u_7 = 7$.

Lời giải.

Ta có $u_3 = u_1 + u_2 = 2, u_4 = u_2 + u_3 = 3, u_5 = u_3 + u_4 = 5, u_6 = u_4 + u_5 = 8, u_7 = u_5 + u_6 = 13$.

Chọn đáp án **A**

Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-4}{2n+5}$. Số $\frac{14}{17}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?

A. 4.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

Lời giải.

Ta có $\frac{3n-4}{2n+5} = \frac{14}{17} \Leftrightarrow 23n = 138 \Leftrightarrow n = 6$.

Vậy $\frac{14}{17}$ là số hạng thứ 6 của dãy.

Chọn đáp án **D**

Câu 11. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 8.

Lời giải.

Ta cần tìm n sao cho $u_n = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow 15n+15 = 16n+8 \Leftrightarrow n = 7$.

Nhận xét: Có thể dùng chức năng CALC để kiểm tra nhanh.

Chọn đáp án **A**

Câu 12. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $u_{n+2} = 2^2$.

B. $u_{n+2} = 2^n + 2$.

C. $u_{n+2} = 2 \cdot 2^n$.

D. $u_{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

Lời giải.

Ta có $u_n = 2^n \Rightarrow u_{n+2} = 2^{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

Chọn đáp án **D**

Câu 13. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm.

A. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

B. $u_n = \sin n$.

C. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$.

D. $(-1)^n (2^n + 1)$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, vì $\sqrt{n} > \sqrt{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ nên $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{(n+1-n)(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{[n-(n-1)](\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Ta thấy $\sqrt{n+1} > \sqrt{n-1} \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ hay $u_{n+1} < u_n$.

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ là dãy số giảm.

Chọn đáp án **A**

Câu 14. Dãy số nào có công thức số hạng tổng quát dưới đây là dãy số tăng?

A. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

B. $u_n = (-3)^n$.

C. $u_n = 2020 - 3n$.

D. $u_n = 2018 + 2n$.

Lời giải.

Xét từng dãy số

- $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ta có $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_2 = \frac{1}{4}$ nên dãy này không tăng.

- $u_n = (-3)^n$, ta có $u_2 = 9$ và $u_3 = -27$ nên dãy này không tăng.
- $u_n = 2020 - 3n$, ta có $u_1 = 2017$ và $u_2 = 2014$ nên dãy số không tăng.
- $u_n = 2018 + 2n$, ta có $u_{n+1} = 2020 + 2n$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$. Do đó dãy này là dãy số tăng.

Chọn đáp án **D**



Câu 15. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.
- B. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.
- C. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$.
- D. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

Lời giải.

$$u_n = \sin \frac{\pi}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{(n+1)+1} = \sin \frac{\pi}{n+2}$$

$\Rightarrow$ số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$ là sai.

$$u_n = \sin \frac{\pi}{n+1} \Rightarrow -1 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow (u_n) \text{ là dãy số bị chặn là đúng.}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sin \frac{\pi}{n+2} - \sin \frac{\pi}{n+1} < 0 \left(0 < \frac{\pi}{n+2} < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$\Rightarrow$ dãy số (u_n) là một dãy số tăng là sai và dãy số (u_n) không tăng không giảm cũng sai.

Chọn đáp án **D**



Câu 16. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là dãy số bị chặn?

- A. $u_n = \frac{n}{n+1}$.
- B. $u_n = \sqrt{n^2+1}$.
- C. $u_n = 2^n + 1$.
- D. $u_n = n + \frac{1}{n}$.

Lời giải.

$$\text{Xét } u_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $u_n = \frac{n}{n+1}$ là dãy số bị chặn.

Chọn đáp án **A**



Câu 17. Cho dãy (u_n) là: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. Số hạng tổng quát (u_n) là

- A. $\frac{n+1}{n}$.
- B. $\frac{n-1}{n}$.
- C. $\frac{n}{n+1}$.
- D. $\frac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**



Câu 18. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

- A. $u_n = -2(n+1)$.
- B. $u_n = -2n$.
- C. $u_n = 2n-4$.
- D. $u_n = n-2$.

Lời giải.

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án $u_n = n-2$, $u_n = -2(n+1)$. Ta kiểm tra $u_2 = 0$

Xét đáp án $u_n = -2n$ $u_n = n-2$: $u_n = 2n \Rightarrow u_2 = 4 \neq 0 \Rightarrow u_n = n-2$ loại.

Xét đáp án $u_n = 2n - 4$: $u_n = 2n - 4 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$ nhận.

Nhận xét: Dãy 2; 4; 6 có công thức là $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) nên dãy $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$ có được bằng cách “tính tiến” $2n$ sang trái 4 đơn vị, tức là $2n - 4$

Chọn đáp án **C** □

Câu 19. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2^n$.

B. $u_n = 2^{n+1}$.

C. $u_n = 2$.

D. $u_n = n^{n-1}$.

Lời giải.

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 = 2 \cdot 2 = 4 \\ u_3 = 2u_2 = 2 \cdot 4 = 8 \end{cases}$

Xét đáp án $u_n = n^{n-1}$ với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1^{1-1} = 1^0 = 1$ loại.

Xét đáp án $u_n = 2^n$, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án $u_n = 2^{n+1}$ với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4$ loại.

Để thấy đáp án $u_n = 2$ không thỏa mãn

Chọn đáp án **A** □

Câu 20. Một vi sinh đặc biệt X có cách sinh sản vô tính kì lạ, sau một giờ thì đẻ một lần, đặc biệt sống được tới giờ thứ n (với n là số nguyên dương) thì ngay lập tức thời điểm đó nó đẻ một lần ra 2^n con X khác, tuy nhiên do chu kì của con X ngắn nên ngay sau khi đẻ xong lần thứ 2, nó lập tức chết. Hỏi rằng, nếu tại thời điểm ban đầu có đúng 1 con thì sau 5 giờ có bao nhiêu con sinh vật X đang sống?

A. 256.

B. 96.

C. 336.

D. 32.

Lời giải.

Gọi s_n là số lượng con X được sinh ra tại thời gian thứ n , $n \in \mathbb{N}^*$ và $s_0 = 1$. Ta có

$$s_0 = 1,$$

$$s_1 = 2s_0 = 2,$$

$$s_2 = 2s_1 + 4s_0 = 8,$$

$$s_3 = 2s_2 + 4s_1 = 24,$$

$$s_4 = 2s_3 + 4s_2 = 80,$$

$$s_5 = 2s_4 + 4s_3 = 256.$$

Khi đó, sau 5 giờ thì số con sinh vật X đang sống bằng $s_4 + s_5 = 336$.

Chọn đáp án **C** □

—HẾT—

§2. CẤP SỐ CỘNG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d . Nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.
- Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

2. Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

3. Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Gọi u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Cho (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu là u_1 và công sai d . Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Khi đó:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \cdots$$

hoặc

$$S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d)$$

Ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một số không đổi (công sai).

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Vì sao?

a) $10, -2, -14, -26, -38;$

b) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{7}{2};$

c) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5};$

d) $1, 4, 7, 10, 13.$

Ví dụ 2. Viết 5 số hạng đầu của mỗi dãy (u_n) sau và xem nó có phải là một cấp số cộng hay không? Nếu dãy là một cấp số cộng, hãy tìm công sai.

a) $u_n = 3n + 2$

b) $u_n = 3^n - 1$

c) $u_n = (n + 2)^2 - n^2$

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n, \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có: $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) + 2 - (3n + 2) = 3$. Vậy (u_n) là cấp số cộng.

b) Ta có: $u_1 = 2, u_2 = 8, u_3 = 26$.

Khi đó $u_2 - u_1 = 6, u_3 - u_2 = 18 \neq u_2 - u_1$.

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

c) Ta có $u_n = (n + 2)^2 - n^2 = 4n + 4$. Khi đó $u_{n+1} - u_n = 4(n + 1) + 4 - (4n + 4) = 4$.

Vậy (u_n) là cấp số cộng.

d) Ta có: $u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = 2$.

Khi đó $u_2 - u_1 = -1, u_3 - u_2 = 1 \neq u_2 - u_1$.

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

□

Ví dụ 3. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số cộng. Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$.

Lời giải.

a) Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n + 1) - 5 - 19n + 5 = 19n + 19 - 5 - 19n + 5 = 19$.

Do đó dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$, số hạng đầu $u_1 = 14$.

b) Ta có $u_{n+1} - u_n = -3(n + 1) + 1 + 3n - 1 = -3n - 3 + 1 + 3n - 1 = -3$.

Do đó dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$, số hạng đầu $u_1 = -2$.

□

Ví dụ 4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = 3$.

- Viết công thức số hạng tổng quát u_n .
- Số 832 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?
- Số 2024 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

Lời giải.

- $u_n = u_1 + (n - 1)d = 3n + 1$.
- $u_n = 832 \Leftrightarrow 3n + 1 = 832 \Leftrightarrow 3n = 831 \Leftrightarrow n = 277$.
Vậy 832 là số hạng thứ 277 của cấp số cộng.
- $u_n = 2024 \Leftrightarrow 3n + 1 = 2024 \Leftrightarrow 3n = 2023 \Leftrightarrow n = \frac{2023}{3}$ (loại).
Vậy 2024 không phải là 1 số hạng của cấp số cộng trên.

□

Ví dụ 5. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó.

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1 , công sai d . Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_8 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 + 7d = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24.

□

Ví dụ 6. Tìm số hạng đầu, công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết

- $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$
- $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$
- $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$
- $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$
- $\begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72}. \end{cases}$
- $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35. \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{a) } \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.

$$\text{b) } \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5u_1 + 5d \\ u_1 + 12d = 2u_1 + 10d + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.

$$c) \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - u_1 - 5d = -7 \\ u_1 + 7d - u_1 - 6d = 2u_1 + 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = -5$, công sai là $d = 2$.

$$d) \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - u_1 - 6d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = -17, d = 2$.

$$e) \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_3 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = \frac{5}{6} \\ u_4 = \frac{13}{12}. \end{cases}$$

Khi đó ta có $u_4 = u_3 + d \Leftrightarrow d = u_4 - u_3 = \frac{13}{12} - \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$. Mặt khác $u_3 = u_1 + 2d \Leftrightarrow u_1 = u_3 - 2d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = \frac{1}{3}$, công sai là $d = \frac{1}{4}$.

$$f) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = 9 \\ (u_2 - d)^2 + u_2^2 + (u_2 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 3 \\ (3 - d)^2 + 9 + (3 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 3 \\ d^2 = 4. \end{cases}$$

Do $d^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ d = 2 \end{cases}$. Với $u_2 = 3$ và $d = 2$ thì $u_1 = u_2 - d = 1$. Với $u_2 = 3$ và $d = -2$ thì $u_1 = u_2 - d = 5$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = 5, d = -2$.

□

DT

3

Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Tổng của n số hạng đầu tiên: Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó

$$\bullet S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \dots$$

$$\bullet \text{ Vì } u_n = u_1 + (n-1)d \text{ nên công thức trên có thể viết lại là } S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Ví dụ 7. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai là d .

$$\text{Ta có } S_6 = 6u_1 + \frac{6 \cdot 5}{2}d \Leftrightarrow 6u_1 + 15d = 18. \quad (1)$$

$$S_{10} = 10u_1 + \frac{10 \cdot 9}{2}d \Leftrightarrow 10u_1 + 45d = 110. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình } \begin{cases} 6u_1 + 15d = 18 \\ 10u_1 + 45d = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } S_{20} = 20u_1 + \frac{20 \cdot 19}{2}d = 20 \cdot (-7) + 190 \cdot 4 = 620.$$

□

≡ Ví dụ 8. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

💬 Lời giải.

$$\text{Ta có } S_{30} = \frac{30(u_1 + u_{30})}{2} = \frac{30(u_1 + 2d + u_{30} - 2d)}{2} = \frac{30(u_3 + u_{28})}{2} = \frac{30 \cdot 100}{2} = 1500. \quad \square$$

≡ Ví dụ 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a) $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$

b) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$

c) $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45. \end{cases}$

💬 Lời giải.

a) $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 155 \\ 3u_1 + 3d = 21. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

Từ (2), ta có $3u_1 + 3d = 21 \Rightarrow d = 7 - u_1$, thay vào (1)

$$u_1^2 + 7^2 + (14 - u_1)^2 = 155 \Leftrightarrow 2u_1^2 - 28u_1 + 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ u_1 = 5. \end{cases}$$

Với $u_1 = 9$ thì $d = -2$. Với $u_1 = 5$ thì $d = 2$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 9$, công sai là $d = -2$ hoặc $u_1 = 5, d = 2$.

b) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = 12 \\ 5u_1 + 10d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 3$.

c) $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10d = 5 \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d)(u_1 + 4d) = 45. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

Từ (2), suy ra $u_1 = 1 - 2d$, thay vào (2) ta có

$$(1 - 2d)(1 - d)(1 + d)(1 + 2d) = 45 \Leftrightarrow 4d^4 - 5d^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = 4 \\ d^2 = -\frac{11}{4} \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}) \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ d = -2. \end{cases}$$

Với $d = 2$ thì $u_1 = 1 - 2d = -3$. Với $d = -2$ thì $u_1 = 1 - 2d = 5$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = -3$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = 5, d = -2$.

d)

□

≡ Ví dụ 10. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$ và cấp số cộng có công sai là một số nguyên âm.

💬 Lời giải.

$$\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \quad (1) \quad (2).$$

Từ (1), suy ra $u_1 + u_4 = u_2 + u_3 = 10$ và $u_1 = 5 - \frac{3}{2}d$.

Từ (2), ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_1 + u_4}{u_1 \cdot u_4} + \frac{u_2 + u_3}{u_2 \cdot u_3} &= \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{u_1(u_1 + 3d)} + \frac{10}{(u_1 + d)(u_1 + 2d)} = \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow \frac{10}{\left(5 - \frac{3}{2}d\right)\left(5 + \frac{3}{2}d\right)} + \frac{10}{\left(5 - \frac{1}{2}d\right)\left(5 + \frac{1}{2}d\right)} &= \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25 - \frac{9}{4}d^2} + \frac{10}{25 - \frac{1}{4}d^2} = \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow 10\left(25 - \frac{9}{4}d^2 + 25 - \frac{1}{4}d^2\right) &= \frac{25}{24}\left(25 - \frac{9}{4}d^2\right)\left(25 - \frac{1}{4}d^2\right) \\ \Leftrightarrow \frac{75}{128}d^4 - \frac{1925}{48}d^2 + \frac{3625}{24} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = \frac{580}{9} \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \pm \frac{2\sqrt{145}}{3} \\ d = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $d = -2$ thì $u_1 = 8$. Suy ra $u_n = u_1 + (n-1)d = 10 - 2n$ □

≡ Ví dụ 11. Tính các tổng sau

a) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$. b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

💬 Lời giải.

a) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$.

Xét cấp số cộng (u_k) , $k \in \mathbb{N}^*$ với số hạng đầu là $u_1 = 1$ và công sai là $d = 2$.

Ta có $u_k = u_1 + (k-1)d \Leftrightarrow 2n+1 = 1 + 2(k-1) \Leftrightarrow k = n+1$.

Vậy $S = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{(n+1)(1 + 2n+1)}{2} = (n+1)^2$.

b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = 199 + 195 + \dots + 3$.

Xét cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 199$ và công sai $d = u_2 - u_1 = 195 - 199 = -4$.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 3 = 199 - 4(n-1) \Leftrightarrow n = 50$.

Khi đó $S = \frac{n(u_1 + u_{50})}{2} = \frac{50(199 + 3)}{2} = 5050$. □

DT

4

Tính chất của cấp số cộng

① Nếu $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì $a + c = 2b$.

② Lưu ý:

- Nếu cho ba số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là

$$a - d; \quad a; \quad a + d$$

- Nếu cho bốn số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là

$$a - 3d; \quad a - d; \quad a + d; \quad a + 3d.$$

≡ Ví dụ 12. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

💬 Lời giải.

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - d, x, x + d$ trong đó d là công sai của cấp số cộng.

Khi đó ta có $x - d + x + x + d = 27 \Leftrightarrow 3x = 27 \Leftrightarrow x = 9$.

$$\text{Mà } (x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 = 293 \Leftrightarrow (9-d)^2 + 81 + (9+d)^2 = 293 \Leftrightarrow 2d^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 5 \\ d = -5. \end{cases}$$

Với $d = 5$ thì ba số hạng của cấp số cộng là 4, 9, 14. Với $d = -5$ thì ba số hạng của cấp số cộng là 14, 9, 4.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 9, 14. □

≡ Ví dụ 13. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

💬 Lời giải.

Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$ với $2d$ là công sai của cấp số cộng.

$$\text{Khi đó ta có } x - 3d + x - d + x + d + x + 3d = 10 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Mặt khác

$$(x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 30 \Leftrightarrow 4x^2 + 20d^2 = 30 \Leftrightarrow d^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ d = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Với $x = \frac{5}{2}$ thì $d = \frac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4.

Với $x = \frac{5}{2}$ thì $d = -\frac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 3, 2, 1.

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4. □

≡ Ví dụ 14. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

💬 Lời giải.

Gọi ba góc của tam giác lần lượt là A, B, C . Khi đó ta có $A + B + C = \pi$.

Do ba góc A, B, C của tam giác theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $A + C = 2B$.

$$\text{Do đó } 2B + B = \pi \Rightarrow 3B = \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}.$$

Do tam giác ABC vuông nên giả sử $C = \frac{\pi}{2}$ khi đó công sai d của cấp số cộng là $d = C - B = \frac{\pi}{6}$.

$$\text{Vậy góc } A \text{ của tam giác là } A = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}. \quad \square$$

≡ Ví dụ 15. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$

b) $2(a + b + c)^3 = 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)].$

c) $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$ cũng là một cấp số cộng.

💬 Lời giải.

a) Vì a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c.$

Do đó

$$a^2 + 2bc = (2b - c)^2 + 2bc = 4b^2 - 2bc + c^2 = 2b(2b - c) + c^2 = 2ba + c^2 = c^2 + 2ab.$$

Vậy $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$ (đpcm).

b) Vì a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c.$

Do đó

$$\text{VT} = 2(a + b + c)^3 = 2(3b)^3 = 54b^3$$

$$\begin{aligned}
 VP &= 9 \left[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) \right] \\
 &= 9 \left[(2b-c)^2(b+c) + b^2(2b-c+c) + c^2(2b-c+b) \right] \\
 &= 9 \left[(4b^2 - 4bc + c^2)(b+c) + b^2(2b) + c^2(3b-c) \right] \\
 &= 9 \left[4b^3 - 4b^2c + bc^2 + 4b^2c - 4bc^2 + c^3 + 2b^3 + 3bc^2 - c^3 \right] \\
 &= 9 \cdot (6b^3) = 54b^3 = VT.
 \end{aligned}$$

Vậy $2(a+b+c)^3 = 9 \left[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) \right]$ (đpcm).

c) Vì ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b \Rightarrow a=2b-c$.
Xét

$$\begin{aligned}
 2(a^2+ac+c^2) - (a^2+ab+b^2) &= a^2 + a(2c-b) + 2c^2 - b^2 \\
 &= (2b-c)^2 + (2b-c)(2c-b) + 2c^2 - b^2 \\
 &= b^2 + bc + c^2 \\
 \Rightarrow (b^2 + bc + c^2) + (a^2 + ab + b^2) &= 2(a^2 + ac + c^2).
 \end{aligned}$$

Vậy ba số: $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$ cũng là một cấp số cộng.

□

DT

5

Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 16. Một người trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: “Hàng thứ nhất có một cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ...”. Hỏi có bao nhiêu hàng cây được trồng như thế?

Lời giải.

Gọi u_n là số cây trồng ở hàng thứ n .

Theo đề bài ta có $u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 3, \dots$

Để thấy u_n là cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Giả sử với 3003 cây trồng được n_o hàng. Khi đó ta có

$$\frac{[2u_1 + (n_o - 1)d]n_o}{2} = 3003 \Leftrightarrow \frac{[2 \cdot 1 + (n_o - 1)]n_o}{2} = 3003 \Leftrightarrow n_o^2 + n_o - 6006 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n_o = 77 \text{ (thỏa mãn)} \\ n_o = -78 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy có 77 hàng được trồng.

□

Ví dụ 17. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.

Lời giải.

Gọi $u_1, u_2, \dots, u_n$ là số tiền tiết kiệm của ngày 1/1, 2/1, ..., 8/3.

Theo đề bài ta có (u_n) lập thành cấp số cộng với công sai $d = 500$.

Từ ngày 1/1 đến ngày 8/3, bạn A tiết kiệm được ít nhất là $\frac{[2 \cdot 500 + (67 - 1) \cdot 500] \cdot 67}{2} = 1139000 > 800000$.

Vậy bạn A đủ tiền để mua quà cho mẹ mừng 8/3.

□

≡ Ví dụ 18. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

💬 Lời giải.

* Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 80000$, công sai $d = 5000$ ta được số tiền phải trả khi khoan đến mét thứ n là

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

* Khi khoan đến mét thứ 50, số tiền phải trả là

$$S_{50} = \frac{50[2 \cdot 80000 + (50-1) \cdot 5000]}{2} = 10125000 \text{ đồng.}$$

□

≡ Ví dụ 19. Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

💬 Lời giải.

Số tiền anh Nam nhận được mỗi năm tăng theo quy luật của một cấp số cộng với $u_1 = 100$ (triệu đồng) và $d = 20$.

Suy ra tổng số tiền anh Nam nhận trong 10 năm là $S_{10} = \frac{10}{2}(2u_1 + 9d) = 1900$ tương ứng 1 tỉ 900 triệu đồng.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$, công sai $d = -2$. Viết ba số hạng đầu của cấp số cộng đó.

💬 Lời giải.

Ba số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) là: $u_1 = 9$; $u_2 = u_1 + d = 9 + (-2) = 7$; $u_3 = u_2 + d = 7 + (-2) = 5$.

□

- 2** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Hãy viết năm số hạng đầu của cấp số cộng này.

💬 Lời giải.

Năm số hạng đầu của cấp số cộng này là:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2, u_2 = u_1 + d = 2 + 3 = 5, u_3 = u_2 + d = 5 + 3 = 8, \\ u_4 &= u_3 + d = 8 + 3 = 11, u_5 = u_4 + d = 11 + 3 = 14. \end{aligned}$$

□

- 3** Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5n - 1$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của nó.

💬 Lời giải.

Ta có $u_n - u_{n-1} = (5n - 1) - [5(n-1) - 1] = 5$, với mọi $n \geq 2$.

Do đó (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 5 \cdot 1 - 1 = 4$ và công sai $d = 5$.

□

- 4** Cho dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng này.

- 5** Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n) : $10, 5, \dots$

💬 Lời giải.

Cấp số cộng này có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công sai $d = -5$.

Do đó năm số hạng đầu là: 10, 5, 0, -5, -10.

Số hạng thứ 100 là $u_{100} = u_1 + (100 - 1)d = 10 + 99 \cdot (-5) = -485$. □

- 6** Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.

Lời giải.

Giả sử u_1 là số hạng đầu và d là công sai của cấp số cộng đó.

Ta có: $u_{10} = u_1 + 9d = 48$

$u_{18} = u_1 + 17d = 88$.

Giải hệ này ta được $u_1 = 3$ và $d = 5$.

Vậy số hạng thứ 100 của cấp số cộng này là $u_{100} = u_1 + 99d = 3 + 99 \cdot 5 = 498$. □

- 7** Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng 2, 5, 8, ... để được kết quả bằng 345?

Lời giải.

Cấp số cộng này có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có

$$345 = S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n - 1)d] = \frac{n}{2} [2 \cdot 2 + (n - 1) \cdot 3] = \frac{n}{2} (3n + 1).$$

Do đó $3n^2 + n - 690 = 0$.

Giải phương trình bậc hai này ta được $n = -\frac{230}{15}$ (loại) và $n = 15$.

Vậy phải lấy tổng của 15 số hạng đầu của cấp số cộng đã cho để được tổng bằng 345. □

- 8** Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế, ... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70 800 000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Lời giải.

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 20$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng.

Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là: $S_{20} = \frac{[2 \cdot 20 + (20 - 1) \cdot 1] \cdot 20}{2} = 590$.

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên số vé bán ra là 590.

Vậy giá tiền của một vé là: $70\,800\,000 : 590 = 120\,000$ (đồng). □

- 9** Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Lời giải.

Giá của chiếc xe ô tô sau một năm sử dụng là $680 - 55 = 625$ (triệu đồng).

Giá của chiếc xe ô tô sau mỗi năm sử dụng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1 = 625$ và công sai $d = -55$ (do giá xe giảm).

Do đó, giá của chiếc ô tô sau 5 năm sử dụng là $u_5 = u_1 + (5 - 1)d = 625 + 4 \cdot (-55) = 405$ (triệu đồng). □

- 10** Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Lời giải.

Số ghế ở mỗi hàng của hội trường lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Giả sử cần thiết kế tối thiểu n hàng ghế để hội trường có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi. Ta

có: $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2.15 + (n-1).3) \geq 870$ Biến đổi bất phương trình này, ta được

$$n(30 + 3n - 3) \geq 1740 \Leftrightarrow 3n^2 + 27n - 1740 \geq 0 \Rightarrow n \geq 20.$$

Vậy cần thiết kế tối thiểu 20 hàng ghế để thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

- 11** Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Lời giải.

Ta có: 1,2 triệu người = 1200 nghìn người.

Dân số mỗi năm của thành phố từ năm 2020 đến năm 2030 lập thành một cấp số cộng, gồm 11 số hạng ($2030 - 2020 + 1 = 11$), với số hạng đầu $u_1 = 1200$ và công sai $d = 30$.

Ta có: $u_{11} = u_1 + (11 - 1)d = 1200 + 10 \cdot 30 = 1500$.

Vậy dân số của thành phố này vào năm 2030 khoảng 1500 nghìn người hay 1,5 triệu người. $\square$

- 12** Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức:

$$x_n = 75 + 5(n - 1).$$

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

- a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?
- b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?
- 13** Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:
- Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.
 - Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
- b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?
- 14** Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene aabb có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene AABB có chiều cao bao nhiêu?

Lời giải.

$\square$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. 2; 8; 32.

B. 3; 7; 11; 16.

C. (u_n) với $u_n = 4 + 3n$.

D. (v_n) với $v_n = n^3$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (4 + 3(n+1)) - (4 + 3n) = 3$. Suy ra dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3$.
Chọn đáp án **C** □

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 3 - 5n$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) .

- A. $d = 3$. B. $d = -5$. C. $d = -3$. D. $d = 5$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $u_{n+1} = 3 - 5(n+1) = -2 - 5n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -5, \forall n \geq 1$.

Suy ra (u_n) là cấp số cộng, công sai $d = -5$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 3. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

- A. -21 . B. 23 . C. -17 . D. -19 .

Lời giải.

$$u_{11} = u_1 + 10d = -17.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 4. Cho cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = -4$. Giá trị của số hạng thứ 17 bằng bao nhiêu?

- A. $u_{17} = -63$. B. $u_{17} = 65$. C. $u_{17} = -85$. D. $u_{17} = -75$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_{17} = 1 + 16 \cdot (-4) = -63.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 5. Tìm giá trị của x, y sao cho dãy số $-2, x, 4, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

- A. $x = 2, y = 8$. B. $x = 1, y = 7$. C. $x = 2, y = 10$. D. $x = -6, y = 2$.

Lời giải.

$$\text{Dãy số } -2, x, 4, y \text{ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2+4}{2} \\ 4 = \frac{x+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 6. Cấp số cộng (u_n) có $u_6 = 12, u_{10} = 24$. Tìm số hạng đầu u_1 .

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 2$. C. $u_1 = 5$. D. $u_1 = -3$.

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng có công sai là d . Ta có hệ

$$\begin{cases} u_6 = u_1 + 5d \\ u_{10} = u_1 + 9d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = u_1 + 5d \\ 24 = u_1 + 9d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} bằng

- A. 235 . B. 242 . C. 4 . D. 11 .

Lời giải.

Với d là công bội của cấp số cộng ta có:

$$u_3 - u_{15} = 84 \Leftrightarrow u_1 + 2d - u_1 - 14d = 84 \Leftrightarrow d = -7. \text{ Từ đó suy ra, } u_{17} = u_1 + 16d = 11.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 8. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_7 = 1 \\ u_1 + u_6 = 16. \end{cases}$

A. $u_1 = \frac{171}{17}, d = -\frac{14}{17}.$

B. $u_1 = -\frac{14}{17}, d = \frac{171}{17}.$

C. $u_1 = 2, d = 3.$

D. $u_1 = 3, d = 2.$

Lời giải.

$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_7 = 1 \\ u_1 + u_6 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = 1 \\ 2u_1 + 5d = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 9. Cho 9, x , -1 , y là 4 số lập thành cấp số cộng, khi đó giá trị của x, y là

A. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}.$

B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}.$

C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$

D. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}.$

Lời giải.

Vì các số 9, x , -1 , y lập thành cấp số cộng nên ta có :

$$x = \frac{9 + (-1)}{2} = 4, \frac{x + y}{2} = -1 \Rightarrow y = -2 - x = -6.$$

Chọn đáp án **A**

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 7u_1 \\ S_5 = 75 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ hai của cấp số cộng này.

A. $u_2 = 9.$

B. $u_2 = 6.$

C. $u_2 = 3.$

D. $u_2 = 12.$

Lời giải.

Từ $u_4 = 7u_1$ suy ra $u_1 + 3d = 7u_1 \Leftrightarrow d = 2u_1.$

$$\text{Mà } S_5 = 75 \Leftrightarrow \frac{5(2u_1 + 4d)}{2} = 75 \Leftrightarrow 25u_1 = 75 \Leftrightarrow u_1 = 3, d = 6.$$

Do đó $u_2 = 9.$

Chọn đáp án **A**

Câu 11. Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

A. $n = 14.$

B. $n = 15.$

C. $n = 13.$

D. $n = 12.$

Lời giải.

Cấp số cộng có k số hạng gồm có $u_1 = -3$ và số hạng cuối $u_k = 23$.

$$\text{Ta có } u_k = u_1 + (k-1)d \Leftrightarrow 23 = -3 + 2(k-1) \Leftrightarrow k = 14. \text{ Do đó } n = k - 2 = 12.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = -2$. Tính $S_{2017} = u_1 + u_2 + \dots + u_{2017}.$

A. $S_{2017} = -4060211.$

B. $S_{2017} = -4060221.$

C. $S_{2017} = 4072323.$

D. $S_{2017} = 4073232.$

Lời giải.

$$S_n = u_1 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \Rightarrow S_{2017} = 3 \cdot 2017 + \frac{2017 \cdot 2016}{2} \cdot (-2) = -4060221.$$

Chọn đáp án **B**

Câu 13. Tính tổng $S = 1 + 5 + 9 + \dots + 397$ ta được kết quả

- A. 19298. B. 19090. C. 19920. D. 19900.

Lời giải.

$S = 1 + 5 + 9 + \dots + 397$ là tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 4$.

$$S_{100} = \frac{100}{2} (2 \cdot 1 + 99 \cdot 4) = 19900.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 14. Một cấp số cộng có 15 số hạng. Biết tổng của 15 số hạng đó bằng 120 và công sai bằng -4 . Tìm số hạng đầu.

- A. $u_1 = -20$. B. $u_1 = 36$. C. $u_1 = 540$. D. $u_1 = 64$.

Lời giải.

Từ công thức $S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d]$.

thay $n = 15$, $S_{15} = 120$, $d = -4$ ta có $120 = \frac{15}{2} [2u_1 + 14 \cdot (-4)]$. Từ đó tìm được $u_1 = 36$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$, $d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?

- A. 223. B. 225. C. 224. D. 226.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 2018 = 2 + (n-1) \cdot 9 \Leftrightarrow n = 225$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 16. Cho dãy số (u_n) , biết: $u_1 = 3$, $u_{n+1} = u_n + 4$ với $n \geq 1$. Tìm u_{1000} .

- A. 3900. B. 4000. C. 3999. D. 4200.

Lời giải.

Dãy (u_n) là dãy CSC có $u_1 = 3$ và $d = 4$.

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 3 + 4(n-1).$$

$$\text{Vậy } u_{1000} = 3 + 4 \cdot 999 = 3999.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 17. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$

- A. $u_1 = -36, d = 13$. B. $u_1 = 36, d = 13$.
C. $u_1 = 36, d = -13$. D. $u_1 = -36, d = -13$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $\begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13. \end{cases}$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 18. Người ta trồng 1275 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ 2 có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây, ... hàng thứ k có k cây ($k \geq 1$). Hỏi có bao nhiêu hàng?

- A. 51. B. 52. C. 53. D. 50.

Lời giải.

Tổng số cây là tổng của k số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 1$ và số hạng thứ k là $u_k = k$.

Ta có $S_k = \frac{k(k+1)}{2} = 1275 \Leftrightarrow k = 50$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 19. Bé An luyện tập khiêu vũ cho buổi dạ hội cuối khóa. Bé bắt đầu luyện tập trong 1 giờ vào ngày đầu tiên. Mỗi ngày tiếp theo, bé tăng thêm 5 phút luyện tập so với ngày trước đó. Hỏi sau một tuần, tổng thời gian bé An đã luyện tập là bao nhiêu phút?

- A. 505 phút. B. 450 phút. C. 525 phút. D. 425 phút.

Lời giải.

Thời gian luyện tập của bé An là một cấp số cộng với $u_1 = 60$ phút và $d = 5$ phút.

Vậy, sau một tuần tổng thời gian bé An luyện tập là $S_7 = \frac{7}{2}(2 \cdot 60 + 6 \cdot 5) = 525$ phút.

Chọn đáp án **C** □

Câu 20. Chu vi của một đa giác là 158 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm. Biết cạnh lớn nhất là 44 cm. Số các cạnh của đa giác đó là bao nhiêu?

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Lời giải.

Trường hợp 1: Số cạnh của đa giác là 3.

Gọi độ dài các cạnh là a, b, c với $a \geq b \geq c$. Theo đề suy ra $a = 44, b = 41, c = 38$. Suy ra chu vi tam giác là $a + b + c = 123$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: Số cạnh của đa giác là 4.

Gọi độ dài các cạnh là a, b, c, d với $a \geq b \geq c \geq d$. Theo đề suy ra $a = 44, b = 41, c = 38, d = 35$. Suy ra chu vi tứ giác là $a + b + c + d = 158$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án **A** □

Câu 21. Bác Bình muốn trồng cây cà phê trên một ngọn đồi như sau: Từ trên đỉnh đồi trồng hàng thứ nhất 2 cây; đi xuống hàng thứ hai 5 cây; đi xuống hàng thứ ba 8 cây; ...; đi xuống hàng cuối cùng dưới chân đồi trồng 26 cây. Theo cách trồng như trên bác bình trồng được bao nhiêu cây cà phê?

- A. 224 cây. B. 112 cây. C. 126 cây. D. 121 cây.

Lời giải.

Gọi $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n$ lần lượt là số cây hàng thứ nhất; hàng thứ hai; hàng thứ ba; ...; hàng thứ n . Ta có $u_1 = 2; u_2 = 5 \Rightarrow d = 3$.

Theo cách trồng của bác Bình số cây mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Thật vậy, ta có:

- $u_1 = 2$ cây.
- $u_2 = u_1 + d = 2 + 3 = 5$ cây.
- $u_3 = u_1 + 2d = 5 + 3 = 8$ cây.
- ...
- $u_n = u_1 + (n-1)d = 26$ cây.

Suy ra $2 + (n-1) \cdot 3 = 26 \Leftrightarrow n = 9$. Vậy có 9 hàng cây.

Do đó, số cây cà phê bác Bình trồng được là

$$S_9 = \frac{9(2+26)}{2} = 126 \text{ cây.}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 22. Một công ty trả lương cho anh A mức lương là 4,5 triệu đồng/quý và kể từ quý làm việc thứ 2 thì mức lương sẽ tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hỏi tổng số tiền sau 3 năm làm việc anh A nhận được là bao nhiêu?

- A. 56 triệu. B. 72 triệu. C. 74,3 triệu. D. 73,8 triệu.

Lời giải.

3 năm có 12 quý.

Gọi số tiền Anh A lãnh ở quý n là u_n . Khi đó (u_n) lập thành cấp số cộng có $u_1 = 4,5$ và công sai $d = 0,3$.

Tổng số tiền sau 3 năm anh A nhận được là

$$S_{12} = u_1 + u_2 + \dots + u_{12} = 12 \cdot 4,5 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 0,3}{2} = 73,8 \text{ (triệu).}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 23. Ông X vay của công ty A một khoản tiền 72 triệu đồng và ông này trả nợ cho công ty A như sau: Ở quý thứ nhất ông trả 3 triệu đồng và kể từ quý thứ 2 mức trả sẽ tăng thêm 0,2 triệu đồng mỗi quý. Hỏi sau bao lâu thì ông X trả hết nợ?

- A. 5 năm. B. 6 năm. C. 3 năm. D. 4 năm.

Lời giải.

Gọi n là số quý mà ông X trả hết nợ.

Gọi số tiền ông X trả mỗi quý lần lượt là $u_1, u_2, \dots, u_n$. Và (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 3$, công sai $d = 0,2$.

$$\text{Khi đó } u_1 + u_2 + \dots + u_n = 72 \Leftrightarrow n \cdot 3 + \frac{n(n-1) \cdot 0,2}{2} = 72 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 16 \\ n = -45 \text{ (loại).} \end{cases}$$

Tức là trong khoảng 4 (năm) thì ông X trả hết nợ.

Chọn đáp án **D** □

Câu 24. Một đa giác có n cạnh và có chu vi bằng 158 cm. Biết số đo các cạnh của đa giác lập thành một cấp số cộng và công sai $d = 3$ cm và cạnh lớn nhất có độ dài là 44 cm. Đa giác có số cạnh n bằng

- A. $n = 5$. B. $n = 7$. C. $n = 6$. D. $n = 4$.

Lời giải.

Gọi u_i ($1 \leq i \leq n$) là độ dài cạnh thứ i trong cấp số cộng tạo bởi độ dài các cạnh của đa giác.

Ta có $u_n = 44$, $d = 3$ nên $u_1 = u_n - (n-1)d = 44 - (n-1) \cdot 3 = 47 - 3n$.

Chu vi của đa giác là tổng các cạnh của đa giác và bằng

$$\frac{n(u_1 + u_n)}{2} = 158 \Leftrightarrow n(91 - 3n) = 316 \Leftrightarrow 3n^2 - 91n + 316 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = \frac{79}{3} \text{ (loại).} \end{cases}$$

Vậy $n = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D** □

Câu 25. Tính tổng tất các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m+3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

A. $\frac{14}{9}$.

B. $\frac{10}{9}$.

C. $\frac{12}{9}$.

D. $\frac{8}{9}$.

 **Lời giải.**

Đặt $u = x^2$, phương trình đã cho trở thành $u^2 - 2(m+2)u + 2m+3 = 0$. Ta có

$$\Delta' = (m+2)^2 - (2m+3) = (m+1)^2.$$

Suy ra $\begin{cases} u = 1 \\ u = 2m+3 \end{cases}$. Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} 2m+3 > 0 \\ 2m+3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

ta có bốn nghiệm của phương trình đã cho là $\pm 1, \pm\sqrt{2m+3}$. Giả sử $0 < a < b$, khi đó bốn số $-b, -a, a, b$ lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$b - a = 2a \Leftrightarrow b = 3a.$$

Do đó ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $\sqrt{2m+3} < 1$. Khi đó 4 nghiệm của phương trình đã cho lập thành một cấp số cộng nếu

$$\begin{aligned} 1 &= 3\sqrt{2m+3} \\ \Rightarrow 1 &= 9(2m+3) \\ \Rightarrow m &= -\frac{13}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $1 < \sqrt{2m+3}$. Khi đó 4 nghiệm của phương trình đã cho lập thành một cấp số cộng nếu

$$\begin{aligned} \sqrt{2m+3} &= 3 \\ \Rightarrow 2m+3 &= 9 \\ \Rightarrow m &= 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy tổng các giá trị của m là $-\frac{13}{9} + 3 = \frac{14}{9}$.

Chọn đáp án **A**



—HẾT—

§3. CẤP SỐ NHÂN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . Nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.
- Khi $q = 0$ cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $q = 1$ cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

2. Số hạng tổng quát

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

3. Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Giả sử u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thì

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

- Nếu $q \neq 1$ thì

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

- Nếu $q = 1$ thì

$$S_n = nu_1$$

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân? Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n \cdot 5^{2n-1}$.

Lời giải.

a) Ta có $u_n \neq 0$ và $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2(n+1)+1}}{(-3)^{2n+1}} = 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = -27$, công bội $q = 9$.

b) Dãy số (u_n) có $u_1 = 5, u_2 = 250, u_3 = 9375$ và $u_2^2 \neq u_1 \cdot u_3$ nên (u_n) không là cấp số nhân.

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy số sau là cấp số nhân. Hãy tìm công bội và số hạng đầu của cấp số nhân đó.

a) Dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$.

b) Dãy (v_n) với $v_n = \frac{5}{3^n}$.

Lời giải.

a) Với $\forall n \geq 1$, ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{2(n+1)}}{(-1)^n \cdot 3^{2n}} = -9 \Leftrightarrow u_{n+1} = -9 \cdot u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = -9$, công bội $q = -9$.

b) Với $\forall n \geq 1$, ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5}{3^{n+1}}}{\frac{5}{3^n}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = \frac{5}{3}$, công bội $q = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = 5 \cdot u_n + 8$, với $n > 1$. Chứng minh (v_n) với $v_n = u_n + 2$ là cấp số nhân.

Lời giải.

Từ $v_n = u_n + 2 \Rightarrow u_n = v_n - 2$ và $u_{n+1} = v_{n+1} - 2$. Khi đó

$$u_{n+1} = 5 \cdot u_n + 8 \Leftrightarrow v_{n+1} - 2 = 5(v_n - 2) + 8 \Leftrightarrow v_{n+1} = 5v_n.$$

Vậy (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 5$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 2 = 3$.

Ví dụ 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội dương, biết $u_1 = 3$ và $u_5 = 48$.

- a) Tính u_8 .
- b) Hỏi số 1536 là số hạng thứ mấy?

Lời giải.

Theo bài ra ta có: $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 48 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$, theo giả thiết, suy ra $q = 2$

a) $u_8 = u_1 \cdot q^7 = 3 \cdot 2^7 = 384$.

- b) Số hạng thứ n của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Theo bài ra ta có

$$1536 = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 512 = 2^9 \Rightarrow n - 1 = 9 \Rightarrow n = 8.$$

Vậy số đã cho là số hạng thứ 8.

□

Ví dụ 5. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

Lời giải.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} u_1 = 160 \\ u_6 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 160 \\ u_1 q^5 = 5 \end{cases} \Rightarrow q^5 = \frac{5}{160} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

Vậy 4 số cần tìm là $u_2 = u_1 \cdot q = 80$, $u_3 = u_2 \cdot q = 40$, $u_4 = u_3 \cdot q = 20$, $u_5 = u_4 \cdot q = 10$.

□

Ví dụ 6. Tìm số hạng đầu u_1 , công bội q và số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân (u_n) biết

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_1 \cdot q + u_5 \cdot q = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 + u_1 \cdot q^4 = 51 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{51}{q^4 + 1} = \frac{51}{17} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q^5 = 165 \\ u_1 \cdot q^2(1 + q) = 60 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^5) = 165 \\ \frac{q^4 - q^3 + q^2 - q + 1}{q^2} = \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^5) = 165 \\ 4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình $4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0 \Leftrightarrow 4\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 4\left(q + \frac{1}{q}\right) - 7 = 0$.

Đặt $q + \frac{1}{q} = t$, với $|t| \geq 2$, ta có $4t^2 - 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}$. (loại)

Ta có $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = 2. \end{cases}$

- Với $q = 2$ thì $u_1 = \frac{165}{q^5 + 1} = 5$.
- Với $q = \frac{1}{2}$ thì $u_1 = \frac{165}{q^5 + 1} = 160$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_4 \cdot q - u_2 \cdot q = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 72 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{72}{q^3 - q} = \frac{72}{6} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_1 \cdot q^3 + u_2 \cdot q^3 + u_3 \cdot q^3 = 351 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ q^3 = 27 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{13}{1 + q + q^2} = \frac{13}{13} = 1 \\ q = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

□

DT

3

Tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

Ví dụ 7. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_n = 12 \cdot 2^{n-1}$.

- a) Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q . b) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.
c) Tính tổng $S' = u_3 + u_4 + \dots + u_{12}$.

Lời giải.

a) Ta có : $u_1 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 12$, dễ thấy $q = 2$.

b) Tổng của 10 số hạng đầu tiên là : $S_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 12276$.

c) $S' = u_3 + u_4 + \dots + u_{12} = u_3 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12 \cdot 2^2 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 49104$.

□

≡ Ví dụ 8. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

💬 Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ
$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 889 \\ u_1 q^{n-1} = 448 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^{n-1} = 64 \\ \frac{q^n - 1}{q - 1} = 127 \end{cases} \Rightarrow q = 2.$$

□

≡ Ví dụ 9. Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

💬 Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ
$$\begin{cases} q = 3 \\ u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 728 \\ u_1 q^{n-1} = 486 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^n - u_1 = 1456 \\ u_1 q^n = 1458 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 2.$$

□

≡ Ví dụ 10. Tính tổng sau: $A = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{512}.$

💬 Lời giải.

Ta có các số hạng trong tổng lập thành cấp số nhân với

$$\begin{cases} u_1 = 2, q = -\frac{1}{2} \\ u_n = \frac{1}{512} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2, q = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{1024} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2, q = -\frac{1}{2} \\ n = 11 \end{cases}$$

Suy ra $A = S_{11} = u_1 \cdot \frac{q^{11} - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{638}{512}.$

□

≡ Ví dụ 11. Cho n là số tự nhiên ≥ 2 , tính tổng sau: $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2.$

💬 Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \cdots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2 \\
 &= (2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n}) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}\right) + 2n \\
 &= 2^2 \cdot \frac{2^{2n} - 1}{3} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^{2n} - 1}{4} + 2n \\
 &= \frac{2^{2n+2} - 4}{3} + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3} + 2n = \frac{2^{2n} - \frac{1}{2^{2n}} - 3}{3} + 2n
 \end{aligned}$$

□

DT

4

Tính chất của cấp số nhân

≡ Ví dụ 12. Tìm a để ba số $a - 2$; $a - 4$; $a + 2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

💬 Lời giải.

Ba số $a - 2$; $a - 4$; $a + 2$ lập thành cấp số nhân điều kiện là

$$(a - 4)^2 = (a - 2)(a + 2) \Leftrightarrow 8a = 20 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}.$$

Vậy $a = \frac{5}{2}$.

□

≡ Ví dụ 13. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

💬 Lời giải.

Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 19 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 216 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 19 \\ (u_1q)^3 = 216 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 19 \\ u_1q = 6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$u_1 + 6 + \frac{36}{u_1} = 19 \Leftrightarrow u_1^2 - 13u_1 + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ u_1 = 4 \end{cases}$$

- Với $u_1 = 9$, suy ra $q = \frac{2}{3}$, ta được ba số 9; 6; 4.
- Với $u_1 = 4$, suy ra $q = \frac{3}{2}$, ta được ba số 4; 6; 9.

□

≡ Ví dụ 14. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

💬 Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} 2a + 4b = 3a + b \\ (ab + 5)^2 = (a + 1)^2(b + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ (3b^2 + 5)^2 = (3b + 1)^2(b + 1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ (b - 1)(3b^2 + 2b + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \quad \square$$

≡ Ví dụ 15. Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{2}{y} = \frac{2}{y-z} + \frac{2}{y-x} &\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{2y-x-z}{y^2-xy-yz+xz} \\ &\Leftrightarrow y^2-xy-yz+xz = 2y^2-xy-yz \Leftrightarrow y^2 = zx. \end{aligned}$$

Vậy, ba số x, y, z lập thành một cấp số nhân. □

≡ Ví dụ 16. Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Lời giải.

Gọi 3 số cần tìm là x, y, z . Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ x + z = 2y \\ (x + 2)(z + 9) = (y + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x + z = 14 \\ (x + 2)(z + 9) = 100. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Từ (1) $\Rightarrow z = 14 - x$ (3). Thay vào (2) ta được phương trình

$$(x + 2)(23 - x) = 100 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 18. \end{cases}$$

- Với $x = 3 \Rightarrow z = 11$.
- Với $x = 18 \Rightarrow z = -4$.

Vậy bộ ba số cần tìm là $(3; 7; 11)$ và $(18; 7; -4)$. □

≡ Ví dụ 17. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó.

Lời giải.

Gọi 3 số cần tìm là x, y, z . Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 114 \\ xz = y^2. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Lại có cấp số cộng có $u_1 = x, u_4 = y, u_{25} = z$. Gọi d là công sai của cấp số cộng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + 3d \\ u_{25} = u_1 + 24d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3d \\ z = x + 24d. \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Thay (3), (4) vào (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} x+x+3d+x+24d=114 \\ x(x+24d)=(x+3d)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+9d=38 \\ d(2x-d)=0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Từ (6) $\Rightarrow d=0$ hoặc $d=2x$. Thay vào (5)

- Với $d=0 \Rightarrow x=38 \Rightarrow y=z=38$, loại do điều kiện ba số khác nhau.
- Với $d=2x \Rightarrow 19x=38 \Rightarrow x=2 \Rightarrow d=4 \Rightarrow y=14, z=98$.

Vậy các số cần tìm là (2; 14; 98). □

DT**5****Vận dụng, thực tiễn**

≡ Ví dụ 18. Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

💬 Lời giải.

Từ giả thiết gọi bốn góc là $A=u_1, B=u_2, C=u_3, D=u_4$ lập thành cấp số nhân.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} A+B+C+D=360^\circ \\ D=9B \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2+q^3)=360 \\ u_1 \cdot q^3=9u_1q \end{cases} \Rightarrow q=3 \Rightarrow u_1=9.$$

Vậy 4 góc đó là $9^\circ, 27^\circ, 81^\circ, 243^\circ$. □

≡ Ví dụ 19. Độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ có hai góc không quá 60° .

💬 Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow A \leq B \leq C$.

Từ giả thiết gọi ba cạnh là $a=u_1, b=u_2, c=u_3$ lập thành cấp số nhân. Suy ra $b^2=ac$.

Theo định lí cosin ta có

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \geq 2ac - 2ac \cos B \text{ (Cô-si)}$$

Thay $b^2=ac$, ta được đánh giá

$$ac \geq 2ac - 2ac \cos B \Leftrightarrow 1 \geq 2 - 2 \cos B \Leftrightarrow \cos B \geq \frac{1}{2}$$

Suy ra $B \leq 60^\circ$. Từ $A \leq B \leq C$, suy ra $A \leq 60^\circ$. (đpcm) □

≡ Ví dụ 20. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5$ mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có khoảng bao nhiêu mét khối gỗ?

💬 Lời giải.

Đặt $u_0 = 4 \cdot 10^5$ và $r = 4\% = 0,04$. Khi đó năm thứ nhất, trữ lượng gỗ là

$$u_1 = 4 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 \cdot 0,04 = 4,16 \cdot 10^5 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Gọi u_n là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ $n, n \geq 1$. Khi đó ta có

$$u_{n+1} = u_n + u_n \cdot r = u_n(1+r), n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu u_1 và công bội $q = 1+r$.

Sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 4,16 \cdot 10^5 \cdot (1+0,04)^4 = 4,8666 \cdot 10^5$ mét khối gỗ. □

≡ Ví dụ 21. Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

💬 Lời giải.

Đặt $M_0 = 150$ (triệu đồng) và $r = \frac{0,58}{100}$. Ta có Số tiền người đó nhận được ở tháng thứ nhất là

$$M_1 = M_0 + M_0 \cdot r = M_0(1 + r)$$

Gọi M_n là số tiền mà người đó nhận được ở tháng thứ n , $n \geq 1$ thì

$$M_{n+1} = M_n + M_n \cdot r = M_n(1 + r)$$

Suy ra (M_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu là M_1 và công bội $q = 1 + r$. Từ đây, ta tính được số tiền người đó nhận được sau n tháng là

$$M_n = M_1 \cdot q^{n-1} = M_0(1 + r) \cdot (1 + r)^{n-1} = M_0(1 + r)^n.$$

Yêu cầu bài toán $M_n = 180 \Rightarrow 180 = M_0(1 + r)^n$. Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được $n \approx 31,526$. Vậy sau ít nhất 32 tháng, người đó nhận được số tiền 180 triệu đồng. □

≡ Ví dụ 22. Một cửa hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

💬 Lời giải.

Sau lần tăng giá thứ nhất thì giá của mặt hàng A là: $M_1 = 100 + 100 \cdot 10\% = 110$.

Sau lần tăng giá thứ hai thì giá của mặt hàng A là: $M_2 = 110 + 110 \cdot 10\% = 121$. □

≡ Ví dụ 23. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là 1,2%. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

💬 Lời giải.

Đặt $P_0 = 2000000 = 2 \cdot 10^6$ và $r = 1,2\% = 0,012$. Số dân của tỉnh M sau năm thứ nhất là

$$P_1 = P_0 + P_0 r = P_0(1 + r)$$

Gọi P_n là số dân của tỉnh M sau n năm nữa. Ta tính được

$$P_{n+1} = P_n + P_n r = P_n(1 + r)$$

Suy ra (P_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu P_1 và công bội $q = 1 + r$. Do đó số dân của tỉnh M sau 10 năm nữa là

$$P_{10} = M_1(1 + r)^9 = M_0(1 + r)^{10} \approx 2227000.$$
□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (x_n) , với $x_n = n^2$.

b) Dãy số (y_n) , với $y_n = \sqrt{5}^{2n-3}$.

c) Dãy số (z_n) , với $z_n = \frac{2}{n}$.

d) Dãy số (w_n) , với $w_n = \frac{3^n + 1}{3^{n+1}}$.

💬 Lời giải.

- a) Cách 1: Ba số hạng đầu của dãy số (x_n) là 1, 4, 9. Vì $4 = 1 \cdot 4$; $9 \neq 4 \cdot 4$ nên dãy số (x_n) không phải là cấp số nhân.
- Cách 2: Ta có $x_{n+1} = (n+1)^2$ nên $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ (phụ thuộc vào n không phải là số không đổi). Do đó, (x_n) không phải là cấp số nhân.
- b) Ta có $y_{n+1} = (\sqrt{5})^{2(n+1)-3} = \sqrt{5}^{2n-1}$ nên $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \sqrt{5}^2 = 5$ (là số không đổi). Do đó, (y_n) là cấp số nhân với công bội $q = 5$.
- c) Ta có $z_{n+1} = \frac{2}{n+1}$ nên $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n}{n+1}$ (phụ thuộc vào n , không phải là số không đổi). Do đó (z_n) không phải là một cấp số nhân.
- d) Ba số hạng đầu của dãy số (w_n) là $\frac{4}{9}, \frac{10}{27}, \frac{28}{81}$. Vì $\frac{10}{27} = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{6}, \frac{28}{81} \neq \frac{10}{27} \cdot \frac{5}{6}$ nên dãy số (w_n) không phải là cấp số nhân.

□

2 Trong các dãy số sau dãy nào là cấp số nhân? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

a) 1; 4; 16; 64; 256.

b) 2; -2; 3; -3; 4; -4.

c) $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$.

Lời giải.

- a) Dãy số đã cho có số sau bằng số hạng kề trước nhân với 4 nên là cấp số nhân có công bội bằng 4
- b) Vì $\frac{2}{-2} \neq \frac{-2}{3}$ nên dãy đã cho không là cấp số nhân
- c) Mỗi số hạng đứng sau của dãy số bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $-\frac{1}{3}$ nên dãy đã cho là cấp số nhân với công bội $-\frac{1}{3}$

□

3 Biết ba số $-\frac{1}{5}; b; -\frac{1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm b .

Lời giải.

Vì dãy đã cho là cấp số nhân nên ta có $b^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{125}\right) = \frac{1}{625} \Leftrightarrow b = \pm \frac{1}{25}$.

Vậy với $b = \pm \frac{1}{25}$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

4 Giữa các số 160 và 5, hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân và tìm cấp số nhân đó.

Lời giải.

Do đây là cấp số nhân, từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_6 = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_1 \cdot q^5 = 160 \end{cases}$

$\Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$.

Vậy cấp số nhân đó là 5; 10; 20; 40; 80; 160.

□

5 Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trong các trường hợp sau:

a)
$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 \cdot q + u_2 \cdot q^3 = 90 \\ u_2 - u_2 \cdot q^4 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 \cdot q(1 + q^2) = 90 \\ u_2 \cdot (1 - q^4) = 240 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{240}{1 - q^4} \\ \frac{1 - q^2}{q} = \frac{240}{90} = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{240}{q(1 - q^4)} \\ 3q^2 + 8q - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3}, u_1 = 729 \\ q = -3, u_1 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 \cdot q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q^2 + q^4) = 65 \\ u_1(1 + q^6) = 325 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 + 1 = 5 \\ u_1 = \frac{325}{1 + q^6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ u_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 5 \\ q = -2 \\ u_1 = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_2 \cdot q^2 + u_2 \cdot q^4 = -42 \\ u_2 \cdot q + u_2 \cdot q^3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2(1 + q^2 + q^4) = -42 \\ u_2(q + q^3) = 20. \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{1 + q^2 + q^4}{q + q^3} = -\frac{21}{10} \Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \Leftrightarrow 10\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 21\left(q + \frac{1}{q}\right) + 10 = 0.$$

Đặt $q + \frac{1}{q} = t$, với $|t| \geq 2$, ta có $10t^2 + 21t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{2} \\ t = \frac{2}{5}. \text{(loại)} \end{cases}$

Ta có $t = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ q = -2. \end{cases}$

- Với $q = -2$ thì $u_2 = -2$, do đó $u_1 = 1$.
- Với $q = -\frac{1}{2}$ thì $u_2 = -32$, do đó $u_1 = 64$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 = 15 \\ u_1^2 + u_1^2 \cdot q^2 + u_1^2 \cdot q^4 + u_1^2 \cdot q^6 = 85 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2 + q^3) = 15 \\ u_1^2(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q)(1 + q^2) = 15 \\ u_1^2(1 + q^2)(1 + q^4) = 85 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} u_1^2(1 + q)^2(1 + q^2)^2 = 225 \\ u_1^2(1 + q^2)(1 + q^4) = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1 + q)^2(1 + q^2)^2 = 225 \\ \frac{1 + q^4}{(1 + q)^2(1 + q^2)} = \frac{85}{225} = \frac{17}{45} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1 + q^4}{(1 + q)^2(1 + q^2)} = \frac{17}{45} &\Leftrightarrow 45 + 45q^4 = (17 + 17q^2)(1 + 2q + q^2) \\ &\Leftrightarrow 45 + 45q^4 = 17 + 34q + 17q^2 + 17q^2 + 34q^3 + 17q^4 \\ &\Leftrightarrow 28q^4 - 34q^3 - 34q^2 - 34q + 28 = 0 \\ &\Leftrightarrow 28\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 34\left(q + \frac{1}{q}\right) - 34 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $q + \frac{1}{q} = t$, với $|t| \geq 2$, ta có $28t^2 - 34t - 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{9}{7} \end{cases}$. (loại)

Ta có $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = 2. \end{cases}$

- Với $q = 2$ thì $u_1 = \frac{15}{(1 + q)(1 + q^2)} = 1$.
- Với $q = \frac{1}{2}$ thì $u_1 = \frac{15}{(1 + q)(1 + q^2)} = 8$.

□

- 6 Cho ba số khác nhau lập thành cấp số cộng, bình phương của các số đó lập thành cấp số nhân. Tìm các số đó.

Lời giải.

Gọi ba số cần tìm là a, b, c . Ta nhận thấy nếu một bộ a, b, c thỏa mãn đề bài thì mọi bộ $ka, kb, kc (k \neq 0)$ cũng thỏa mãn nên ta chuẩn hóa bài toán bằng cách xét $b = 1$.

Khi đó ta có,

$$\begin{cases} a + c = 2b \\ a^2 \cdot c^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ a^2 \cdot c^2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 1 - \sqrt{2}, c = 1 + \sqrt{2}$ hoặc $a = 1 + \sqrt{2}, c = 1 - \sqrt{2}$ nên ta có hai bộ số thỏa đề bài là

$$k(1 - \sqrt{2}), k, k(1 + \sqrt{2});$$

$$k(1 + \sqrt{2}), k, k(1 - \sqrt{2}).$$

□

- 7 Tìm công bội của tất cả các cấp số nhân sao cho tổng bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng 15 và tổng các bình phương của chúng bằng 85.

Lời giải.

Gọi bốn số hạng đầu tiên của số nhân đó theo thứ tự là u_1, u_2, u_3, u_4 (q là công bội). Từ giả thiết

$$\text{ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \left(\frac{q^4 - 1}{q - 1} \right) = 15 \\ u_1^2 \left(\frac{q^8 - 1}{q^2 - 1} \right) = 85 \end{cases}$$

Từ đó ta được

$$\frac{(q^4 - 1)^2 (q^2 - 1)}{(q - 1)^2 (q^8 - 1)} = \frac{225}{85} \Leftrightarrow 14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q + 14 = 0$$

Giải phương trình trên ta được $q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$. □

- 8 Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Lời giải.

Gọi (u_n) là cấp số nhân, (v_n) là cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = \frac{148}{9} \\ u_1 = v_1 \\ u_2 = v_4 \\ u_3 = v_8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = \frac{148}{9} \\ u_1 = v_1 \\ u_1 q = v_1 + 3d \\ u_1 q^2 = v_1 + 7d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = \frac{148}{9} \\ u_1 = v_1 \\ u_1(q - 1) = 3d \\ u_1(q - 1)(q + 1) = 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = \frac{148}{9} \\ u_1 = v_1 \\ q + 1 = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{4}{3} \\ u_1 = 4 \end{cases}$$

Vậy 4 số hạng đó là: $4; \frac{16}{3}; \frac{64}{9}; \frac{256}{27}$. □

- 9 Cho 3 số có tổng bằng 28 lập thành cấp số nhân. Tìm cấp số nhân đó biết nếu số thứ nhất giảm 4 thì ta được 3 số lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

$$\text{Gọi ba số cần tìm là } a, b, c. \text{ Theo giả thiết ta có } \begin{cases} b^2 = ac \\ a + b + c = 28 \\ 2b = a - 4 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ a + b + c = 28 \\ -a + 2b - c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ b = 8 \\ a = 20 - c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 64 = 20c - c^2 \text{ Suy ra } \begin{cases} c = 16 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 16 \end{cases}$$

Vậy ba số đó là 16, 8, 4 hoặc 4, 8, 16. □

- 10 Tìm số đo bốn góc của một tứ giác, biết số đo các góc đó lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối gấp tám lần số hạng đầu tiên.

Lời giải.

Giả sử cấp số nhân có số hạng đầu là u_1 , công bội là q , $u_1, q > 0$. Theo đề bài ta có

$$u_4 = 8.u_1 \Leftrightarrow u_1.q^3 = 8.u_1 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2.$$

Mà

$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360^\circ \Leftrightarrow u_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 360^\circ \Leftrightarrow u_1 \cdot \frac{1-2^4}{1-2} = 360^\circ \Leftrightarrow u_1 = 24^\circ.$$

Vậy số đo bốn góc của tứ giác là $24^\circ, 48^\circ, 96^\circ, 192^\circ$. □

- 11** Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 125 cm^3 và diện tích toàn phần là 175 cm^2 . Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải.

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là $\frac{a}{q}, q, aq$.

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là $V = \frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$. Diện tích toàn phần của

hình hộp chữ nhật là $S_{tp} = 2\left(\frac{a}{q} \cdot a + a \cdot aq + aq \cdot \frac{a}{q}\right) = 2a^2\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right)$.

Theo giả thiết, ta có $50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 175 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$

Với $q = 2$ hoặc $q = \frac{1}{2}$ thì kích thước của hình hộp chữ nhật là $2,5 \text{ cm}; 5 \text{ cm}; 10 \text{ cm}$. Suy ra tổng của ba kích thước này là $2,5 + 5 + 10 = 17,5 \text{ cm}$. □

- 12** Một người muốn có 100 triệu sau 18 tháng phải gửi mỗi tháng vào ngân hàng bao nhiêu tiền, biết lãi suất $0,6\%$ / tháng (lãi kép)?

Lời giải.

Gọi a là số tiền gửi mỗi tháng.

Cuối tháng thứ 1 số tiền là $a + a \cdot 0,006 = a \cdot 1,006$.

Cuối tháng thứ 2 số tiền là $[a(1,006 + 1)] \cdot 1,006 = a(1,006)^2 + a \cdot 1,006$.

Cuối tháng thứ n số tiền là

$$a(1,006)^n + a(1,006)^{n-1} + \dots + a \cdot 1,006 = a \cdot 1,006 [(1,006)^{n-1} + (1,006)^{n-2} + \dots + 1] \\ = \frac{a}{0,006} (1,006) [(1,006)^n - 1].$$

Áp dụng công thức trên, ta tính được

$$a = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 0,006}{1,006 [(1,006)^{18} - 1]} \approx 5246111,01.$$

Vậy số tiền phải gửi mỗi tháng là 5246112 (đồng). □

- 13** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Lời giải.

Gọi giá xe X năm 2020 là $A = 900.000.000$ đồng và $r = 2\%$. Khi đó

- Giá xe X năm 2021 là $A_1 = A - A \cdot r = A(1 - r)$.
- Giá xe X năm 2022 là $A_2 = A_1 - A_1 \cdot r = A(1 - r)^2$.
- Giá xe X năm 2023 là $A_3 = A_2 - A_2 \cdot r = A(1 - r)^3$.

- Giá xe X năm 2024 là $A_4 = A_3 - A_3 \cdot r = A(1 - r)^4$.
- Giá xe X năm 2025 là $A_5 = A_4 - A_4 \cdot r = A(1 - r)^5$.

Vậy giá xe X năm 2025 là $A_5 = 900.000.000 \cdot (1 - 2\%)^5 \approx 813.529.000$ đồng. $\square$

- 14** Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Lời giải.

Lúc đầu có 10^{22} tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^{22}$ và công bội $q = 2$. Do cứ 20 phút phân đôi một lần nên sau 3 giờ sẽ có 9 lần phân chia tế bào. Ta có u_{10} là số tế bào nhận được sau 3 giờ. Vậy số tế bào nhận được sau 3 giờ là $u_{10} = u_1 q^9 = 512 \cdot 10^{12}$. $\square$

- 15** Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là 12288 m^2 , tính diện tích mặt trên cùng.

Lời giải.

Gọi u_0 là diện tích đế tháp và u_n là diện tích bề mặt trên của tầng thứ n , với $1 \leq n \leq 11$. Theo giả thiết, ta có $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n, 0 \leq n \leq 10$. Dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân với số hạng đầu $u_0 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.
Diện tích mặt trên cùng của tháp là

$$u_{11} = u_0 \cdot q^{11} = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 6 \text{ m}^2$$

$\square$

- 16** Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức như sau: Hàng tháng từ đầu mỗi tháng người đó sẽ gửi cố định số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,6% trên tháng. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong quá trình gửi, thì sau 10 năm số tiền mà người đó nhận được cả vốn lẫn lãi khoảng bao nhiêu?

Lời giải.

Theo bài ra, ta có

- Cuối tháng 1, người đó có $5 \cdot 1,006$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.
- Cuối tháng 2, người đó có $(5 + 5 \cdot 1,006) \cdot 1,006 = 5 \cdot 1,006 \cdot (1 + 1,006)$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.
- Cuối tháng 3, người đó có $(5 + 5 \cdot 1,006 \cdot (1 + 1,006)) \cdot 1,006 = 5 \cdot 1,006 \cdot (1 + 1,006 + 1,006^2)$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.
- ...
- Cuối tháng n , người đó có $5 \cdot 1,006 \cdot (1 + 1,006 + 1,006^2 + \dots + 1,006^{n-1}) = 5 \cdot 1,006 \cdot \frac{1,006^n - 1}{0,006}$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.

Do 10 năm = 120 tháng nên sau 10 năm tổng cộng số tiền người đó nhận được là

$$5 \cdot 1,006 \cdot \frac{1,006^{120} - 1}{0,006} = 880,26 \text{ triệu đồng.}$$

$\square$

- 17 Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Lời giải.

Gọi u_n là số tiền sau mỗi tháng ông An còn nợ ngân hàng. Lãi suất mỗi tháng là 1%. Ta có:
 $u_1 = 1000000000$ đồng.

$$u_2 = u_1 + u_1 \cdot 1\% - a = u_1(1 + 1\%) - a \text{ (đồng)}$$

$$u_3 = u_1(1 + 1\%) - a + [u_1(1 + 1\%) - a] \cdot 1\% - a = u_1(1 + 1\%)^2 - a(1 + 1\%) - a$$

...

$$u_n = u_1(1 + 1\%)^{n-1} - a(1 + 1\%)^{n-2} - a(1 + 1\%)^{n-3} - a(1 + 1\%)^{n-4} - \dots - a$$

Ta thấy dãy $a(1 + 1\%)^{n-2}; a(1 + 1\%)^{n-3}; a(1 + 1\%)^{n-4}; \dots$; lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = a$ và công bội $q = 1 + 1\% = 99\%$ có tổng $n - 2$ số hạng đầu là:

$$S_{n-2} = \frac{a(1 - (99\%)^{n-2})}{1 - 99\%} = 100a[1 - (99\%)^{n-2}].$$

Suy ra $u_n = u_1(1 + 1\%)^{n-1} - 100a[1 - (99\%)^{n-2}]$. Vì sau 2 năm = 24 tháng thì ông An trả xong số tiền nên $n = 24$ và $u_{24} = 0$. Do đó ta có:

$$u_{24} = u_1(1 + 1\%)^{23} - 100a[1 - (99\%)^{22}] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1000000000 \cdot (99\%)^{23} - 100a[1 - (99\%)^{22}] = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 40006888,25$$

Vậy mỗi tháng ông An phải trả 40006 888,25 đồng. □

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. 2; 4; 8; 16; 32; 63.

B. 1; -2; 4; -8; 16; -32.

C. 1; 3; 9; 27; 54; 162.

D. 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Vì $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} \neq \frac{63}{32}$ nên dãy số ở phương án A không là cấp số nhân.

Vì $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} \neq \frac{54}{27}$ nên dãy số ở phương án C không là cấp số nhân.

Vì $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$ nên dãy số ở phương án D không là cấp số nhân.

Vì $\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \frac{-32}{16} = -2$ nên dãy số ở phương án B là cấp số nhân.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 2. Trong các dãy (u_n) cho bởi số hạng tổng quát dưới đây, dãy nào là một cấp số nhân có công bội bằng 2?

A. $u_n = 2n + 3$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = 2^n + 3$.

D. $u_n = n + 2$.

Lời giải.

(u_n) là một cấp số nhân có công bội là 2 $\Leftrightarrow u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Kiểm tra các đáp án với vài số hạng đầu của dãy số thì ta thấy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 2^n$ là một cấp số nhân.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 3. Tìm công bội của cấp số nhân (u_n) biết số hạng tổng quát $u_n = 3^{2n}$.

- A. $q = 9$. B. $q = 2$. C. $q = 3$. D. $q = 6$.

Câu 4. Dãy số nào sau đây **không** phải là một cấp số nhân?

- A. $(u_n) : 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}$. B. $u_n = 2^n + 2$.
C. $u_n = 2^n + 2^{n+1}$. D. $(u_n) : 7; 7; 7; 7; 7; \dots$

Lời giải.

Xét dãy số $u_n = 2^n + 2$, có $u_1 = 4, u_2 = 6, u_3 = 10$.

Suy ra $\frac{u_3}{u_2} = \frac{5}{3} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2}$.

Vậy $u_n = 2^n + 2$ không phải cấp số nhân.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 5. Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3, q = 2$. Tìm u_2 .

- A. $u_2 = 6$. B. $u_2 = 5$. C. $u_2 = -6$. D. $u_2 = 1$.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3, q = 2$, có số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 1$. Vậy $u_2 = u_1 \cdot q = 6$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

- A. $u_7 = 192$. B. $u_7 = -9$. C. $u_7 = -192$. D. $u_7 = 384$.

Lời giải.

$u_7 = u_1 q^6 = 3(-2)^6 = -192$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 2, q = \frac{1}{3}$. Tìm u_{10} .

- A. $\frac{2}{3^8}$. B. $\frac{2}{3^{10}}$. C. $\frac{3}{2^9}$. D. $\frac{2}{3^9}$.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2, q = \frac{1}{3} \Rightarrow u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 2 \cdot \frac{1}{3^9}$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 8. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$.

- A. $S_{10} = -1023$. B. $S_{10} = 1025$. C. $S_{10} = -1025$. D. $S_{10} = 1023$.

Lời giải.

Ta có: $S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = 1023$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 15$ và $u_8 = -1875$. Công bội của cấp số nhân là

- A. $q = 3$. B. $q = -3$. C. $q = -5$. D. $q = 5$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_5 = u_1 \cdot q^4 = 15 \\ u_8 = u_1 \cdot q^7 = -1875 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 = 15 \\ q^3 = -125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{125} \\ q = -5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{10} = 8u_7 \\ u_1 + u_4 = 144 \end{cases}$. Tính công bội q của cấp số nhân (u_n) .

A. $q = 2$.

B. $q = -3$.

C. $q = 3$.

D. $q = -2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_{10} = 8u_7 \Leftrightarrow u_7 \cdot q^3 = 8u_7 \Leftrightarrow \begin{cases} u_7 = 0 \\ q = 3 \end{cases}.$$

Vậy $q = 3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) : $u_1 = 1, q = 2$. Hỏi 2048 là số hạng thứ mấy?

A. 12.

B. 9.

C. 11.

D. 10.

Lời giải.

Phương pháp

Cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

Cách giải:

Giả sử 2048 là số hạng thứ n ta có: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2048 \Leftrightarrow n - 1 = 11 \Leftrightarrow n = 12$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 12. Cho cấp số nhân với $u_1 = 3, q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

A. u_5 .

B. u_6 .

C. u_7 .

D. u_8 .

Lời giải.

Ta có, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ nên $u_7 = 3 \cdot (-2)^6 = 192$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 13. Xác định x để 3 số $2x - 1; 2x; 2x + 3$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = -\frac{3}{4}$.

B. $x = -\frac{4}{3}$.

C. $x = \frac{3}{4}$.

D. $x = \frac{4}{3}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Tính số đo góc A .

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{7}$.

C. $\frac{2\pi}{7}$.

D. $\frac{4\pi}{7}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có A, B, C lập thành cấp số nhân với $q = 2$ nên $B = 2A; C = 4A$

Mà ABC là một tam giác nên $A + 2A + 4A = \pi \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{7}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 15. Ba số thực a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $D = ac - 5b$ biết rằng $abc = -27$.

A. $D = -6$.

B. $D = -24$.

C. $D = 6$.

D. $D = 24$.

Lời giải.

Do a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân suy ra $ac = b^2$.

Do đó $b^3 = -27 \Rightarrow b = -3$ và $ac = 9$. Vậy $D = 9 - 5 \cdot (-3) = 24$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 16. Cho các số $x + 6y$; $5x + 2y$; $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, đồng thời các số $x - 1$; $y + 2$; $x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Khi đó $x + 2y$ bằng

- A. 10. B. -10. C. 14. D. -14.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x + 6y) + (8x + y) = 2(5x + 2y) \\ (x - 1)(x - 3y) = (y + 2)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 9x + 7y = 10x + 4y \\ x^2 - x - 3yx + 3y = y^2 + 4y + 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3y & (1) \\ x^2 - x - 3yx + 3y = y^2 + 4y + 4 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Thay (1) vào (2) $\Rightarrow (3y)^2 - (3y) - 3y(3y) + 3y = y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow x + 2y = -10$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 17. Ba cạnh của một tam giác vuông lập thành cấp số nhân. Tính tỉ số cạnh góc vuông nhỏ chia cho cạnh huyền.

- A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Lời giải.

Giả sử độ dài 3 cạnh a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân, trong đó c là cạnh huyền và $a \leq b < c$. Ta có $b^2 = ac$ (1) và $c^2 = a^2 + b^2$ (2). Thế (1) vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & a^2 + ac = c^2 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{a}{c} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{c} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Vì $\frac{a}{c} > 0$ nên $\frac{a}{c} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 18. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

- A. $S = \frac{5}{2}$. B. $S = \frac{1023}{2048}$. C. $S = 2$. D. $\frac{1023}{512}$.

Lời giải.

Ta có các số hạng của dãy số (u_n) là $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^n}$. Khi đó (u_n) lập thành một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Suy ra } S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^9} = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 19. Trong một cấp số nhân gồm các số hạng dương, hiệu của số hạng thứ năm và số hạng thứ tư là 576, hiệu của số hạng thứ hai và số hạng đầu tiên là 9. Tìm tổng S_3 của 3 số hạng đầu của cấp số nhân này.

A. $S_3 = 21$.

B. $S_3 = -63$.

C. $S_3 = 63$.

D. $S_3 = -21$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_5 - u_4 = 576 \\ u_2 - u_1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 (q - 1) = 576 \\ u_1 (q - 1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 64 \\ u_1 (q - 1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 4 \\ u_1 = 3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_3 = 3 \cdot \frac{4^3 - 1}{4 - 1} = 63.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 20. Giá trị của tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2018}$ bằng

A. $S = \frac{3^{2019} - 1}{2}$.

B. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2}$.

C. $S = \frac{3^{2020} - 1}{2}$.

D. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy S là tổng của 2019 số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = 1$, công bội $q = 3$. Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân ta có $S = 1 \cdot \frac{1 - 3^{2019}}{1 - 3} = \frac{3^{2019} - 1}{2}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có hạng đầu $u_1 = 2$ và tổng của 8 số hạng đầu tiên $S_8 = 6560$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$.

B. $q = -3$.

C. $q = \frac{1}{3}$.

D. $q = \pm 3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_n &= \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ suy ra } S_8 = 6560 = \frac{2(q^8 - 1)}{q - 1} \Leftrightarrow 3280 = q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 \\ &\Leftrightarrow (q - 3) \left[(q^3 + 2q^2)^2 + (3q^2 + \frac{20}{3}q)^2 + \frac{689}{9}q^2 + 364q + 1093 \right] = 0, \end{aligned}$$

từ đó suy ra $q = 3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 22. Ba số lập thành một cấp số nhân. Nếu số hạng thứ hai cộng thêm 2 ta được một cấp số cộng. Sau đó cộng thêm 9 với số hạng thứ ba ta lại được một cấp số nhân. Tính tổng ba số đó.

A. $-\frac{16}{25}$.

B. $\frac{52}{25}$.

C. $\frac{4}{25}$.

D. $\frac{64}{25}$.

Lời giải.

- Gọi 3 số cần tìm là a, b, c . Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} ac = b^2 \\ a + c = 2(b + 2) \\ a(c + 9) = (b + 2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac = b^2 \\ c = 2b - \frac{4}{9}(b + 1) + 4 \\ a = \frac{4}{9}(b + 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{- Từ } ac = b^2 \\ & \Rightarrow \frac{4}{9}(b + 1) \cdot \left[2b - \frac{4}{9}(b + 1) + 4 \right] = b^2 \\ & \Rightarrow (4b + 4)(14b + 32) = 81b^2 \\ & \Rightarrow 25b^2 - 184b - 128 = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ b = -\frac{16}{25} \end{cases} \end{aligned}$$

- Từ đó ta có 2 dãy số thỏa mãn là 4; 8; 16 và $\frac{4}{25}; -\frac{16}{25}; \frac{64}{25}$.
- Do đó tổng cần tìm là 28 hoặc $\frac{52}{25}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 23. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm kể từ khi bắt đầu gửi tiền gần với kết quả nào sau đây?

- A.** 212 triệu. **B.** 210 triệu. **C.** 216 triệu. **D.** 220 triệu.

Lời giải.

Số tiền người đó nhận được sau 6 tháng đầu: $100 \cdot (1 + 2\%)^2$.
Số tiền người đó nhận được sau 6 tháng tiếp theo là: $[100 \cdot (1 + 2\%)^2 + 100] \cdot (1 + 2\%)^2 \approx 212,28$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 24. Ông A mua một chiếc ô tô trị giá 1 tỷ đồng, do chưa đủ tiền nên ông chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12%/năm và trả trước 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm kể từ lúc mua xe, ông trả hết nợ, biết kỳ trả nợ đầu tiên sau ngày mua ô tô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

- A.** 23.573.000 đồng. **B.** 23.537.000 đồng. **C.** 23.703.000 đồng. **D.** 24.443.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền thực tế ông A phải trả góp là 500 triệu đồng.
Với lãi suất đã cho, sau 12 tháng, tổng số tiền phải trả là $500.000.000 \times (1 + 1\%)^{24}$.
Mỗi tháng ông A góp X đồng. Với lãi suất đã cho thì sau 2 năm ông A góp được

$$\begin{aligned} X + X \cdot (1 + 1\%) + X \cdot (1 + 1\%)^2 + \dots + X(1 + 1\%)^{23} &= X \cdot \frac{(1 + 1\%)^{24} - 1}{1 + 1\% - 1} \\ &= 100X \cdot [(1 + 1\%)^{24} - 1]. \end{aligned}$$

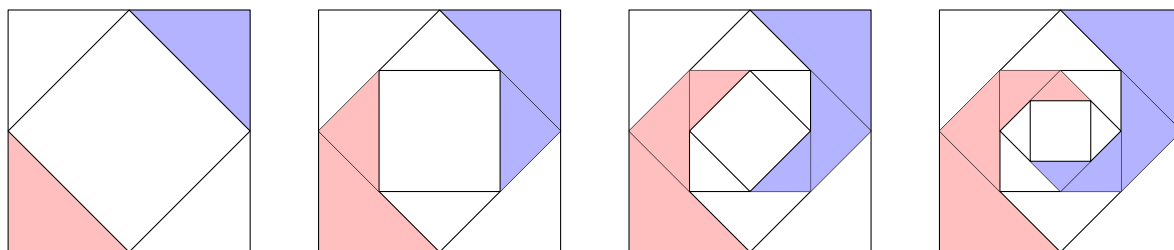
Sau 2 năm ông A trả hết nợ, tức là ta có phương trình

$$500.000.000(1 + 1\%)^{24} = 100X \cdot [(1 + 1\%)^{24} - 1] \Leftrightarrow X \approx 23.537.000.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 25. Một thợ thủ công muốn vẽ trang trí một hình vuông kích thước $4\text{m} \times 4\text{m}$ bằng cách vẽ một hình vuông mới với các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ban đầu, và tô kín màu lên hai tam

giác đối diện (như hình vẽ). Quá trình vẽ và tô theo quy luật đó được lặp lại 5 lần. Tính số tiền nước sơn để người thợ đó hoàn thành trang trí hình vuông trên? Biết tiền nước sơn 1 m^2 là 60 000 đồng.



A. 575 000 đồng.

B. 387 500 đồng.

C. 465 000 đồng.

D. 232 500 đồng.

🗨️ **Lời giải.**

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông. Độ dài cạnh hình vuông theo lần vẽ thứ n theo quy luật trên là $2^{-\frac{n}{2}}a$. Tổng diện tích của hai tam giác được tô màu sau lần vẽ thứ n theo quy luật trên là $S_n = \frac{1}{2} \left(2^{-\frac{n}{2}}\right)^2 a^2 = 2^{-n-1}a^2$.

Gọi $u_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n = 2^{-2}a^2 + 2^{-3}a^2 + \dots + 2^{-n-1}a^2 = 2^{-1} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) a^2$.

Theo đề bài ta có $n = 5$ và $a = 4$ nên $u_5 = \frac{31}{4} \text{ m}^2$.

Vậy số tiền nước sơn là $\frac{31}{4} \cdot 60000 = 465000$ đồng.

Chọn đáp án **C**



—HẾT—

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ

A // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. C	2. C	3. D	4. A	5. A	6. B	7. C	8. A	9. A	10. D
11. A	12. D	13. A	14. D	15. D	16. A	17. B	18. C	19. A	20. C

B // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. C	2. B	3. C	4. A	5. B	6. D	7. D	8. D	9. A	10. A
11. D	12. B	13. D	14. B	15. B	16. C	17. C	18. D	19. C	20. A
21. C	22. D	23. D	24. D	25. A					

C // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3

1. B	2. B	3. A	4. B	5. A	6. A	7. D	8. D	9. C	10. C
11. A	12. C	13. C	14. C	15. D	16. B	17. B	18. D	19. C	20. A
21. A	22. B	23. A	24. B	25. C					