

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI SỐ

10

NÂNG CAO



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐOÀN QUỲNH (Tổng Chủ biên) - NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên)
NGUYỄN XUÂN LIÊM - ĐẶNG HÙNG THẮNG - TRẦN VĂN VUÔNG

ĐẠI SỐ

10

NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

MỘT SỐ LƯU Ý KHI SỬ DỤNG SÁCH GIÁO KHOA

1) Những kí hiệu dùng trong sách :

Hn Phần hoạt động của học sinh.

☐ Kí hiệu kết thúc một chứng minh hoặc ví dụ.

2) Không nên viết vào sách để sách có thể dùng lâu dài.

3) Ngoài máy tính bỏ túi CASIO *fx* – 500 *MS* đã được giới thiệu trong sách, học sinh có thể dùng các loại máy tính bỏ túi khác có cùng tính năng như

SHARP EL – 506W, SHARP EL – 509W,...

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng Biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu : PHẠM BẢO KHUÊ – HOÀNG XUÂN VINH

Biên tập tái bản : HOÀNG VIỆT

Biên tập kĩ thuật : NGUYỄN KIM TOÀN

Trình bày bìa và minh hoạ : BÙI QUANG TUẤN

Sửa bản in : HOÀNG VIỆT

Chế bản : CÔNG TY CỔ PHẦN THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - Bộ Giáo dục và Đào tạo

ĐẠI SỐ 10 - NÂNG CAO

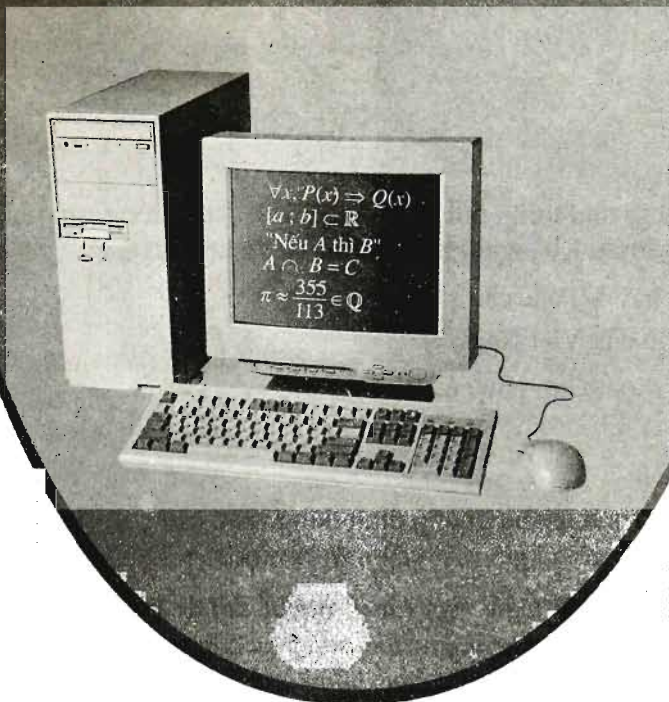
Mã số: NH001T0

In 19.000 cuốn; (QĐ 12GK); khổ 17x24cm.

In tại Công ty cổ phần In Bắc Giang.

Số in: 16. Số xuất bản: 01-2010/CXB/732-1485/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 05 năm 2010.



Chương này sẽ cung cấp những kiến thức mở đầu về logic toán và tập hợp. Các khái niệm và các phép toán về **mệnh đề** và **tập hợp** sẽ giúp chúng ta diễn đạt các nội dung toán học thêm rõ ràng và chính xác, đồng thời giúp chúng ta hiểu đầy đủ hơn về suy luận và chứng minh trong toán học. Bởi vậy, chương này có ý nghĩa quan trọng đối với việc học tập môn Toán.

1. Mệnh đề là gì ?

Trong khoa học cũng như trong đời sống hàng ngày, ta thường gặp những câu nêu lên một khẳng định. Khẳng định đó có thể đúng hoặc sai.

Ví dụ 1. Chúng ta hãy xét các câu sau đây.

- (a) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
- (b) Thượng Hải là một thành phố của Ấn Độ.
- (c) $1 + 1 = 2$.
- (d) 27 chia hết cho 5.

Các câu (a) và (c) là những câu khẳng định đúng. Các câu (b) và (d) là những câu khẳng định sai. Người ta gọi mỗi câu trên là một *mệnh đề logic*. □

Một mệnh đề logic (gọi tắt là mệnh đề) là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai. Một câu khẳng định đúng gọi là một mệnh đề đúng. Một câu khẳng định sai gọi là một mệnh đề sai. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

CHÚ Ý

Câu không phải là câu khẳng định hoặc câu khẳng định mà không có tính đúng - sai (tính hoặc đúng, hoặc sai) thì không phải là mệnh đề. Chẳng hạn, câu "Hôm nay trời đẹp quá !" là một câu cảm thán do đó không phải là mệnh đề.

2. Mệnh đề phủ định

Ví dụ 2. Hai bạn An và Bình đang tranh luận với nhau.

Bình nói : "2003 là số nguyên tố".

An khẳng định : "2003 không phải là số nguyên tố".

Nếu kí hiệu P là mệnh đề Bình nêu thì mệnh đề của An có thể diễn đạt là "Không phải P " và được gọi là *mệnh đề phủ định* của P . □



Cho mệnh đề P . Mệnh đề " $\text{Không phải } P$ " được gọi là **mệnh đề phủ định** của P và kí hiệu là $\bar{P}$. Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\bar{P}$ là hai câu khẳng định trái ngược nhau. Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.

CHÚ Ý

Mệnh đề phủ định của P có thể diễn đạt theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, xét mệnh đề P : " $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ". Khi đó, mệnh đề phủ định của P có thể phát biểu là $\bar{P}$: " $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ" hoặc $\bar{P}$: " $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ".

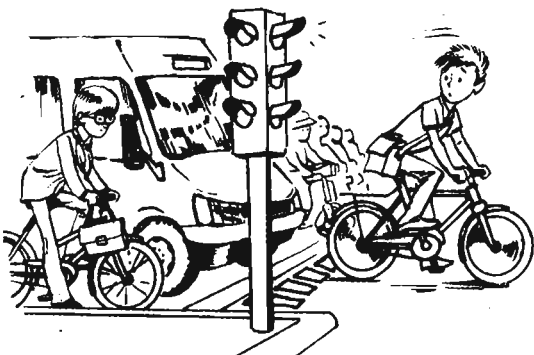
[H1] Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau đây và xác định xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai.

- (a) Pa-ri là thủ đô của nước Anh.
- (b) 2002 chia hết cho 4.

3. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo

Ví dụ 3. Xét mệnh đề "Nếu An vượt đèn đỏ thì An vi phạm luật giao thông".

Mệnh đề trên có dạng "Nếu P thì Q " trong đó P là mệnh đề "An vượt đèn đỏ", Q là mệnh đề "An vi phạm luật giao thông". Ta gọi đó là **mệnh đề kéo theo**. $\square$



Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề " $\text{Nếu } P \text{ thì } Q$ " được gọi là **mệnh đề kéo theo** và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Tuỳ theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " P kéo theo Q " hay " P suy ra Q " hay "Vì P nên Q "...

Ta thường gặp các tình huống sau :

- Cả hai mệnh đề P và Q đều đúng. Khi đó $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng.
- Mệnh đề P đúng và mệnh đề Q sai. Khi đó $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai.

Ví dụ 4. Mệnh đề "Vì 50 chia hết cho 10 nên 50 chia hết cho 5" là mệnh đề đúng. Mệnh đề "Vì 2002 là số chẵn nên 2002 chia hết cho 4" là mệnh đề sai. $\square$

H2 Cho tứ giác $ABCD$. Xét mệnh đề P : "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật" và mệnh đề Q : "Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau". Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ theo nhiều cách khác nhau.

|| Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC . Mệnh đề đảo của mệnh đề "Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì nó là tam giác cân" là mệnh đề "Nếu tam giác ABC là tam giác cân thì nó là tam giác đều".

4. Mệnh đề tương đương

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC . Xét mệnh đề P : "Tam giác ABC là tam giác cân" và mệnh đề Q : "Tam giác ABC có hai đường trung tuyến bằng nhau". Mệnh đề R : "Tam giác ABC là tam giác cân nếu tam giác đó có hai đường trung tuyến bằng nhau và ngược lại" còn có thể phát biểu là : "Tam giác ABC là tam giác cân nếu và chỉ nếu tam giác đó có hai đường trung tuyến bằng nhau", mệnh đề đó có dạng " P nếu và chỉ nếu Q ". Ta gọi R là một **mệnh đề tương đương**. $\square$

|| Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề có dạng " P nếu và chỉ nếu Q " được gọi là **mệnh đề tương đương** và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.

|| Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

Đôi khi, người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là " P khi và chỉ khi Q ".

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng nếu cả hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai. Khi đó, ta nói rằng hai mệnh đề P và Q tương đương với nhau.

H3

a) Cho tam giác ABC . Mệnh đề "Tam giác ABC là một tam giác có ba góc bằng nhau nếu và chỉ nếu tam giác đó có ba cạnh bằng nhau" là mệnh đề gì ? Mệnh đề đó đúng hay sai ?

b) Xét các mệnh đề P : "36 chia hết cho 4 và chia hết cho 3";

Q : "36 chia hết cho 12".

i) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ và $P \Leftrightarrow Q$.

ii) Xét tính đúng - sai của mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$.

5. Khái niệm mệnh đề chứa biến

Ví dụ 7. Xét các câu sau đây.

(1) " n chia hết cho 3", (với n là số tự nhiên).

(2) " $y > x + 3$ ", (với x và y là hai số thực).

Mỗi câu trên đều là một câu khẳng định chứa một hay nhiều biến nhận giá trị trong một tập hợp X nào đó. Tính đúng - sai của chúng tùy thuộc vào giá trị cụ thể của các biến đó. Nếu cho các biến những giá trị cụ thể trong tập X thì ta được những mệnh đề. Chẳng hạn, nếu kí hiệu câu (1) là $P(n)$ thì $P(6)$ là "6 chia hết cho 3", đó là mệnh đề đúng; nếu kí hiệu câu (2) là $Q(x; y)$ thì $Q(1; 2)$ là " $2 > 1 + 3$ ", đó là mệnh đề sai. $\square$

Các câu kiểu như câu (1) và câu (2) được gọi là những **mệnh đề chứa biến**.

H4 Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: " $x > x^2$ " với x là số thực. Hỏi mỗi mệnh đề $P(2)$ và $P\left(\frac{1}{2}\right)$ đúng hay sai?

6. Các kí hiệu $\forall$ và $\exists$

a) Kí hiệu $\forall$

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó khẳng định

"Với mọi x thuộc X , $P(x)$ đúng" (hay " $P(x)$ đúng với mọi x thuộc X ") (1) là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu với x_0 bất kì thuộc X , $P(x_0)$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề này sai nếu có $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề sai.

Mệnh đề (1) được kí hiệu là

" $\forall x \in X, P(x)$ " hoặc " $\forall x \in X : P(x)$ ".

Kí hiệu $\forall$ đọc là "với mọi".

Ví dụ 8

a) Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: " $x^2 - 2x + 2 > 0$ " với x là số thực. Khi đó mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ " đúng vì với bất kì $x \in \mathbb{R}$ ta đều có

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0.$$

b) Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: " $2^n + 1$ là số nguyên tố" với n là số tự nhiên. Khi đó, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ " sai vì với $n = 3$ thì $P(3)$: " $2^3 + 1$ là số nguyên tố" là mệnh đề sai. $\square$

H5 Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: " $n(n+1)$ là số lẻ" với n là số nguyên. Phát biểu mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n)$ ". Mệnh đề này đúng hay sai?

b) Kí hiệu $\exists$

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó, khẳng định

"Tồn tại x thuộc X để $P(x)$ đúng" (2)

là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu có $x_0 \in X$ để $P(x_0)$ là mệnh đề đúng. Mệnh đề này sai nếu với x_0 bất kì thuộc X , $P(x_0)$ là mệnh đề sai (nói cách khác là không có x_0 nào thuộc X để $P(x_0)$ là mệnh đề đúng).

Mệnh đề (2) được kí hiệu là

" $\exists x \in X, P(x)$ " hoặc " $\exists x \in X : P(x)$ ".

Kí hiệu $\exists$ đọc là "tồn tại".

Ví dụ 9

a) Cho mệnh đề chứa biến $P(n) : "2^n + 1$ chia hết cho $n"$ với n là số tự nhiên. Khi đó, mệnh đề " $\exists n \in \mathbb{N}, P(n)$ " đúng vì với $n = 3$ thì $P(3) : "2^3 + 1$ chia hết cho 3" là mệnh đề đúng.

b) Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : "(x-1)^2 < 0"$ với x là số thực. Khi đó, mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ " là mệnh đề sai vì với bất kì $x_0 \in \mathbb{R}$, ta đều có $(x_0 - 1)^2 \geq 0$. $\square$

H6 Cho mệnh đề chứa biến $Q(n) : "2^n - 1$ là số nguyên tố" với n là số nguyên dương. Phát biểu mệnh đề " $\exists n \in \mathbb{N}^*, Q(n)$ ". Mệnh đề này đúng hay sai?

7. Mệnh đề phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall, \exists$

Ví dụ 10. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố" là "Tồn tại số tự nhiên n để $2^{2^n} + 1$ không phải là số nguyên tố". $\square$

|| Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".

Ví dụ 11. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Trong lớp em có bạn không thích môn Toán" là "Tất cả các bạn trong lớp em đều thích môn Toán". $\square$

|| Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

H7 Nêu mệnh đề phủ định của mệnh đề "Tất cả các bạn trong lớp em đều có máy tính".

Câu hỏi và bài tập

1. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề ? Nếu là mệnh đề thì em hãy cho biết nó đúng hay sai.
a) Hãy đi nhanh lên ! ; b) $5 + 7 + 4 = 15$; c) Năm 2002 là năm nhuận.
2. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xác định xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai.
a) Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm.
b) $2^{10} - 1$ chia hết cho 11.
c) Có vô số số nguyên tố.
3. Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề :
 P : "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông",
 Q : "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc".
Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.
4. Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: " $n^2 - 1$ chia hết cho 4" với n là số nguyên. Xét xem mỗi mệnh đề $P(5)$ và $P(2)$ đúng hay sai.
5. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :
a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 - 1$ là bội của 3 ; b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$;
c) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3$; d) $\exists n \in \mathbb{N}, 2^n + 1$ là số nguyên tố ;
e) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 2$.



CÁC SỐ PHÉC-MA

Các số $F_n = 2^{2^n} + 1$ được gọi là các số Phéc-ma. Mệnh đề F : " $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố" do nhà toán học lỗi lạc Phéc-ma (P. Fermat, 1601 – 1665) nêu ra khi ông nhận xét thấy các số $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65\,537$ đều là số nguyên tố. Nhà toán học thiên tài Ô-le (L. Euler, 1707 – 1783) đã chứng tỏ mệnh đề F sai bằng cách chỉ ra với $n = 5$ ta có $F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ chia hết cho 641, không phải là số nguyên tố.

1. Định lí và chứng minh định lí

Ví dụ 1. Xét định lí "Nếu n là số tự nhiên lẻ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 4".

Định lí này được hiểu một cách đầy đủ là "Với mọi số tự nhiên n , nếu n là số lẻ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 4".

*Trong toán học, **định lí** là một mệnh đề đúng. Nhiều định lí được phát biểu dưới dạng*

$$"\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)", \quad (1)$$

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là những mệnh đề chứa biến, X là một tập hợp nào đó.

Chứng minh định lí dạng (1) là dùng suy luận và những kiến thức đã biết để khẳng định rằng mệnh đề (1) là đúng, tức là cần chứng tỏ rằng với mọi x thuộc X mà $P(x)$ đúng thì $Q(x)$ đúng.

Có thể chứng minh định lí dạng (1) một cách trực tiếp hoặc gián tiếp.

• Phép chứng minh trực tiếp gồm các bước sau :

- Lấy x tùy ý thuộc X mà $P(x)$ đúng ;
- Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để chỉ ra rằng $Q(x)$ đúng.

Ví dụ 2. Hãy chứng minh trực tiếp định lí nêu ở ví dụ 1.

Chứng minh. Cho n là số tự nhiên lẻ tùy ý. Khi đó, $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.

Suy ra $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1)$ chia hết cho 4. □

Đôi khi việc chứng minh trực tiếp một định lí gặp khó khăn. Khi đó, ta dùng cách chứng minh gián tiếp. Một cách chứng minh gián tiếp hay được dùng là chứng minh bằng phản chứng.

• Phép chứng minh phản chứng gồm các bước sau :

- Giả sử tồn tại x_0 thuộc X sao cho $P(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai, tức là mệnh đề (1) là mệnh đề sai ;
- Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để đi đến mâu thuẫn.

Ví dụ 3. Chứng minh bằng phản chứng định lí "Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Khi đó, mọi đường thẳng cắt a thì phải cắt b ".

Chứng minh. Giả sử tồn tại đường thẳng c cắt a nhưng song song với b . Gọi M là giao điểm của a và c . Khi đó, qua M có hai đường thẳng a và c phân biệt cùng song song với b . Điều này mâu thuẫn với tiên đề O-clít. $\square$

[H1] Chứng minh bằng phản chứng định lí "Với mọi số tự nhiên n , nếu $3n + 2$ là số lẻ thì n là số lẻ".

2. Điều kiện cần, điều kiện đủ

Cho định lí dưới dạng

$$" \forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x) ". \quad (1)$$

$P(x)$ được gọi là giả thiết và $Q(x)$ là kết luận của định lí.

Định lí dạng (1) còn được phát biểu :

$P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$

hoặc

$Q(x)$ là điều kiện cần để có $P(x)$.

Ví dụ 4. Xét định lí "Với mọi số tự nhiên n , nếu n chia hết cho 24 thì nó chia hết cho 8".

Khi đó, ta nói " n chia hết cho 24 là điều kiện đủ để n chia hết cho 8" hoặc cũng nói " n chia hết cho 8 là điều kiện cần để n chia hết cho 24". $\square$

[H2] Định lí trong ví dụ 4 có dạng " $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$ ". Hãy phát biểu hai mệnh đề chứa biến $P(n)$ và $Q(n)$.

3. Định lí đảo, điều kiện cần và đủ

Xét mệnh đề đảo của định lí dạng (1)

$" \forall x \in X, Q(x) \Rightarrow P(x) ". \quad (2)$

Mệnh đề (2) có thể đúng, có thể sai. Nếu mệnh đề (2) đúng thì nó được gọi là **định lí đảo** của định lí dạng (1). Lúc đó định lí dạng (1) sẽ được gọi là **định lí thuận**. Định lí thuận và đảo có thể viết gộp thành một định lí

$" \forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x) ".$

Khi đó, ta nói

$P(x)$ là điều kiện cần và đủ để có $Q(x)$.

Ngoài ra, ta còn nói " $P(x)$ nếu và chỉ nếu $Q(x)$ " hoặc " $P(x)$ khi và chỉ khi $Q(x)$ " hoặc "Điều kiện cần và đủ để có $P(x)$ là có $Q(x)$ ".

H3 Xét định lí "Với mọi số nguyên dương n , n không chia hết cho 3 khi và chỉ khi n^2 chia cho 3 dư 1".

Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lí trên.

Câu hỏi và bài tập

6. Phát biểu mệnh đề đảo của định lí "Trong một tam giác cân, hai đường cao ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau". Mệnh đề đảo đó đúng hay sai?
7. Chứng minh định lí sau bằng phản chứng :
"Nếu a, b là hai số dương thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ".
8. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu định lí "Nếu a và b là hai số hữu tỉ thì tổng $a + b$ cũng là số hữu tỉ".
9. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu định lí "Nếu một số tự nhiên chia hết cho 15 thì nó chia hết cho 5".
10. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lí "Một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối diện của nó là 180° ".
11. Chứng minh định lí sau bằng phản chứng :
"Nếu n là số tự nhiên và n^2 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5".



ĐÔI NÉT VỀ GIOÓC-GIỜ BUN NGƯỜI SÁNG LẬP RA LÔGIC TOÁN

Gioóc-giờ Bun sinh ngày 2-11-1815 ở Luân Đôn. Ông là con trai một nhà bán tạp hoá nhỏ. Vì nhà nghèo nên từ năm 16 tuổi ông đã phải tìm việc làm để kiếm tiền đỡ đần cha mẹ. Ông bắt đầu dạy học từ khi đó. Năm 20 tuổi, ông mở một trường tư ở quê nhà. Vừa cặm cụi dạy học, ông vừa ra sức tự học, tích lũy vốn kiến thức toán học.



Gioóc-giơ Bun
(George Boole, 1815 – 1864)

Hoàn toàn bằng các kiến thức tự học, ông đã bắt tay vào nghiên cứu với một niềm say mê lớn lao trong hoàn cảnh kinh tế khó khăn thiếu thốn. Với năng khiếu, sự thông minh và niềm say mê toán học, ông đã đạt được một số kết quả và bắt đầu nổi tiếng nhờ những công trình của mình như : "Giải tích toán học của lôgic", "Các định luật của tư duy". Nhờ đó, ông được bổ nhiệm làm Giáo sư toán của trường Nữ hoàng ở Ai-len (Ireland) từ năm 1849 cho đến cuối đời. Một điều khá thú vị là người con gái của ông chính là nữ văn sĩ Ê-ten Bun (Eten Boole), tác giả của cuốn tiểu thuyết "Ruồi trâu" rất nổi tiếng.

Ông mất ngày 8-12-1864, thọ 49 tuổi. Cuộc đời và sự nghiệp của ông là một tấm gương sáng đáng để chúng ta noi theo về tinh thần khắc phục khó khăn, lao động cần cù, kiên nhẫn học tập và say mê nghiên cứu, sáng tạo.

Luyện tập

12. Điền dấu "x" vào ô thích hợp trong bảng sau :

Câu	Không là mệnh đề	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
$2^4 - 1$ chia hết cho 5.			
153 là số nguyên tố.			
Cắm đá bóng ở đây !			
Bạn có mấy tính không ?			

13. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :

- a) Tứ giác $ABCD$ đã cho là một hình chữ nhật ;
- b) 9801 là số chính phương.

14. Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề

P : "Tứ giác $ABCD$ có tổng hai góc đối là 180° " ;

Q : "Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

15. Xét hai mệnh đề

P : "4686 chia hết cho 6" ; Q : "4686 chia hết cho 4".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

16. Cho tam giác ABC . Xét mệnh đề "Tam giác ABC là tam giác vuông tại A nếu và chỉ nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ". Khi viết mệnh đề này dưới dạng $P \Leftrightarrow Q$, hãy nêu mệnh đề P và mệnh đề Q .

17. Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: " $n = n^2$ " với n là số nguyên. Điền dấu "x" vào ô vuông thích hợp.

a) $P(0)$ Đúng ☐ Sai ☐

b) $P(1)$ Đúng ☐ Sai ☐

c) $P(2)$ Đúng ☐ Sai ☐

d) $P(-1)$ Đúng ☐ Sai ☐

e) $\exists n \in \mathbb{Z}, P(n)$ Đúng ☐ Sai ☐

g) $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n)$ Đúng ☐ Sai ☐.

18. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :

a) Mọi học sinh trong lớp em đều thích môn Toán ;

b) Có một học sinh trong lớp em chưa biết sử dụng máy tính ;

c) Mọi học sinh trong lớp em đều biết đá bóng ;

d) Có một học sinh trong lớp em chưa bao giờ được tắm biển.

19. Xác định xem các mệnh đề sau đây đúng hay sai và nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề đó :

a) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$;

b) $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ là một số chính phương ;

c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x-1$;

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

20. Chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây.

Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ " khẳng định rằng :

- (A) Bình phương của mỗi số thực bằng 2.
- (B) Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 2.
- (C) Chỉ có một số thực có bình phương bằng 2.
- (D) Nếu x là một số thực thì $x^2 = 2$.

21. Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội tuyển bóng rổ, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến " x cao trên 180 cm".

Chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây.

Mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " khẳng định rằng :

- (A) Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180 cm.
- (B) Trong số các cầu thủ của đội tuyển bóng rổ có một số cầu thủ cao trên 180 cm.
- (C) Bất cứ ai cao trên 180 cm đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.
- (D) Có một số người cao trên 180 cm là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

§ 3

TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. Tập hợp

Ở lớp dưới, chúng ta đã làm quen với khái niệm tập hợp. Nhớ lại rằng

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Ta hiểu khái niệm tập hợp qua các ví dụ như : Tập hợp tất cả các học sinh lớp 10 của trường em, tập hợp các số nguyên tố,... . Thông thường, mỗi tập hợp gồm các phần tử cùng có chung một hay một vài tính chất nào đó.

Nếu a là phần tử của tập hợp X , ta viết $a \in X$ (đọc là : a thuộc X). Nếu a không phải là phần tử của X , ta viết $a \notin X$ (đọc là : a không thuộc X). Để cho gọn, đôi khi "tập hợp" sẽ được gọi tắt là "tập".

Ta thường cho một tập hợp bằng hai cách sau đây.

1) Liệt kê các phần tử của tập hợp.

H1 Viết tập hợp tất cả các chữ cái có mặt trong dòng chữ "Không có gì quý hơn độc lập tự do".

2) Chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

H2

a) Xét tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 20\}$. Hãy viết tập A bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

b) Cho tập hợp $B = \{-15; -10; -5; 0; 5; 10; 15\}$. Hãy viết tập B bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Nói chung, khi nói đến tập hợp là nói đến các phần tử của nó. Tuy nhiên, người ta cũng xét cả tập hợp không chứa phần tử nào. Tập hợp như vậy gọi là **tập rỗng** và được kí hiệu là $\emptyset$.

2. Tập con và tập hợp bằng nhau

a) Tập con

|| Tập A được gọi là **tập con** của tập B và kí hiệu là $A \subset B$ nếu mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B .

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Nếu $A \subset B$ thì ta còn nói tập A bị chứa trong tập B hay tập B chứa tập A và còn viết là $B \supset A$.

Từ định nghĩa tập con, dễ thấy tính chất bắc cầu sau

$$(A \subset B \text{ và } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

Cũng dễ thấy mỗi tập hợp là tập con của chính nó.

Người ta coi $\emptyset$ là tập con của mọi tập hợp, tức là $\emptyset \subset A$ với mọi tập A .

H3 Cho hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 6\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 12\}$. Hỏi $A \subset B$ hay $B \subset A$?

b) Tập hợp bằng nhau

|| Hai tập hợp A và B được gọi là **bằng nhau** và kí hiệu là $A = B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và mỗi phần tử của B cũng là một phần tử của A .

Từ định nghĩa này, ta có

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A).$$

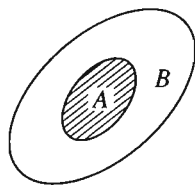
Hai tập hợp A và B không bằng nhau (hay khác nhau) được kí hiệu là $A \neq B$. Như vậy, hai tập hợp A và B khác nhau nếu có một phần tử của A không là phần tử của B hoặc có một phần tử của B không là phần tử của A .

H4 Xét định lí "Trong mặt phẳng, tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó".

Đây có phải là bài toán chứng minh hai tập hợp bằng nhau không ? Nếu có, hãy nêu hai tập hợp đó.

c) Biểu đồ Ven

Các tập hợp có thể được minh hoạ trực quan bằng hình vẽ nhờ biểu đồ Ven do nhà toán học người Anh Giôn Ven (John Venn) lần đầu tiên đưa ra vào năm 1881. Trong biểu đồ Ven, người ta dùng những hình giới hạn bởi một đường khép kín để biểu diễn tập hợp.



Chẳng hạn, hình 1.1 thể hiện tập A là tập con của tập B .

Hình 1.1

Ví dụ 1. Chúng ta đã biết tập hợp số nguyên dương $\mathbb{N}^*$, tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$, tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$, tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ và tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

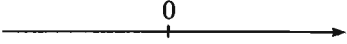
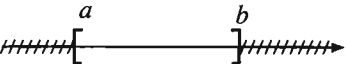
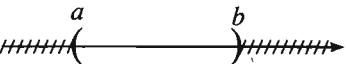
Ta có các quan hệ sau

$$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

H5 Vẽ biểu đồ Ven mô tả các quan hệ trên.

3. Một số các tập con của tập hợp số thực

Trong các chương sau, ta thường sử dụng các tập con sau đây của tập số thực $\mathbb{R}$.

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số (phần không bị gạch chéo)
Tập số thực $(-\infty ; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng $[a ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty ; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng $[a ; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng $(-\infty ; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng $(a ; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

Trong các kí hiệu trên, kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực ; a và b được gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng.

H6 Hãy ghép mỗi ý ở cột trái với một ý ở cột phải có cùng một nội dung thành cặp.

a) $x \in [1 ; 5]$;	1) $1 < x \leq 5$;
b) $x \in (1 ; 5]$;	2) $x < 5$;
c) $x \in [5 ; +\infty)$;	3) $x \geq 5$;
d) $x \in (-\infty ; 5)$;	4) $1 \leq x \leq 5$;
	5) $1 < x < 5$.

4. Các phép toán trên tập hợp

a) Phép hợp

|| *Hợp của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \cup B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.*

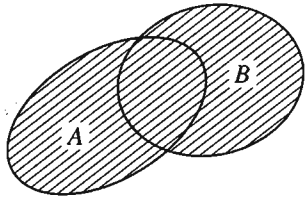
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Trên biểu đồ Ven (h.1.2), phần gạch chéo biểu diễn hợp của hai tập hợp A và B.

Ví dụ 2. Cho đoạn $A = [-2 ; 1]$ và khoảng $B = (1 ; 3)$.
Ta có

$$A \cup B = [-2 ; 3).$$

□



Hình 1.2

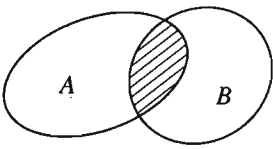
b) Phép giao

|| *Giao của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \cap B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc cả A và B.*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Trên biểu đồ Ven (h.1.3), phần gạch chéo biểu diễn giao của hai tập hợp A và B.

Nếu hai tập hợp A và B không có phần tử chung, nghĩa là $A \cap B = \emptyset$ thì ta gọi A và B là hai tập hợp rời nhau.



Hình 1.3

Ví dụ 3. Cho nửa khoảng $A = (0 ; 2]$ và đoạn $B = [1 ; 4]$. Ta có

$$A \cap B = [1 ; 2].$$

□

[H7] Gọi A là tập hợp các học sinh giỏi Toán của trường em, B là tập hợp các học sinh giỏi Văn của trường em. Hãy mô tả hai tập $A \cup B$ và $A \cap B$.

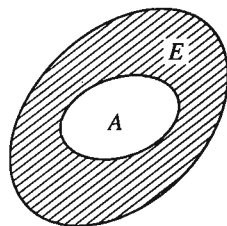
c) Phép lấy phần bù

Cho A là tập con của tập E. **Phần bù** của A trong E, kí hiệu là $C_E A^{(1)}$, là tập hợp tất cả các phần tử của E mà không là phần tử của A.

(1) C là chữ đầu tiên của từ tiếng Anh "complement" có nghĩa phần bù, bổ sung.

Trên biểu đồ Ven (h.1.4), phần gạch chéo biểu diễn phần bù của tập A trong E .

Ví dụ 4. Phần bù của tập các số tự nhiên trong tập các số nguyên là tập các số nguyên âm. Phần bù của tập các số lẻ trong tập các số nguyên là tập các số chẵn. $\square$



Hình 1.4

H8 a) Phần bù của tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ là tập nào ?

b) Giả sử A là tập hợp các học sinh nam trong lớp em, B là tập hợp các học sinh trong lớp em và D là tập hợp các học sinh nam trong trường em. Hãy mô tả các tập hợp : $C_B A$; $C_D A$.

CHÚ Ý

Với hai tập hợp A, B bất kì, người ta còn xét hiệu của hai tập hợp A và B .

|| **Hiệu** của hai tập hợp A và B , kí hiệu là $A \setminus B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B .

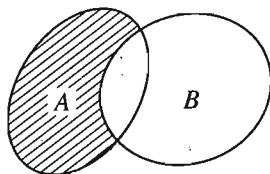
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Trên biểu đồ Ven (h.1.5), phần gạch chéo biểu diễn hiệu của hai tập A và B .

Ví dụ 5. Cho nửa khoảng $A = (1 ; 3]$ và đoạn $B = [2 ; 4]$. Khi đó, $A \setminus B = (1 ; 2)$.

Từ định nghĩa ta thấy, nếu $A \subset E$ thì

$$C_E A = E \setminus A.$$



Hình 1.5

Câu hỏi và bài tập

22. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$;

b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$.

23. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó :

$$a) A = \{2; 3; 5; 7\}; \quad b) B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\};$$

$$c) C = \{-5; 0; 5; 10; 15\}.$$

24. Xét xem hai tập hợp sau có bằng nhau không :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\} \text{ và } B = \{5; 3; 1\}.$$

25. Giả sử $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{2; 6\}$, $C = \{4; 6\}$ và $D = \{4; 6; 8\}$. Hãy xác định xem tập nào là tập con của tập nào.

26. Cho A là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em và B là tập hợp các học sinh đang học môn Tiếng Anh của trường em. Hãy diễn đạt bằng lời các tập hợp sau :

$$a) A \cap B; \quad b) A \setminus B; \quad c) A \cup B; \quad d) B \setminus A.$$

27. Gọi A, B, C, D, E và F lần lượt là tập hợp các tứ giác lồi, tập hợp các hình thang, tập hợp các hình bình hành, tập hợp các hình chữ nhật, tập hợp các hình thoi và tập hợp các hình vuông. Hỏi tập nào là tập con của tập nào ? Hãy diễn đạt bằng lời tập $D \cap E$.

28. Cho $A = \{1; 3; 5\}$ và $B = \{1; 2; 3\}$. Tìm hai tập hợp $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ và $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Hai tập hợp nhận được là bằng nhau hay khác nhau ?

29. Điền dấu "x" vào ô trống thích hợp.

$$a) \forall x \in \mathbb{R}, x \in (2,1; 5,4) \Rightarrow x \in (2; 5) \quad \text{Đúng} \quad \boxed{} \quad \text{Sai} \quad \boxed{}$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, x \in (2,1; 5,4) \Rightarrow x \in (2; 6) \quad \text{Đúng} \quad \boxed{} \quad \text{Sai} \quad \boxed{}$$

$$c) \forall x \in \mathbb{R}, -1,2 \leq x < 2,3 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \quad \text{Đúng} \quad \boxed{} \quad \text{Sai} \quad \boxed{}$$

$$d) \forall x \in \mathbb{R}, -4,3 < x \leq -3,2 \Rightarrow -5 \leq x \leq -3 \quad \text{Đúng} \quad \boxed{} \quad \text{Sai} \quad \boxed{}$$

30. Cho đoạn $A = [-5; 1]$ và khoảng $B = (-3; 2)$. Tìm $A \cup B$ và $A \cap B$.

Luyện tập

31. Xác định hai tập hợp A và B , biết rằng :

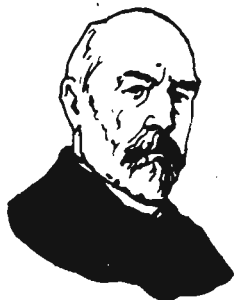
$$A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}, B \setminus A = \{2; 10\} \text{ và } A \cap B = \{3; 6; 9\}.$$

32. Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$, $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 9\}$ và $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Hãy tìm $A \cap (B \setminus C)$ và $(A \cap B) \setminus C$. Hai tập hợp nhận được bằng nhau hay khác nhau ?

33. Cho A và B là hai tập hợp. Dùng biểu đồ Ven để kiểm nghiệm rằng :
- a) $(A \setminus B) \subset A$; b) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$; c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.
34. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm :
- a) $A \cap (B \cup C)$; b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
35. Điền dấu "x" vào ô trống thích hợp.
- a) $a \subset \{a ; b\}$ Đúng ☐ Sai ☐
- b) $\{a\} \subset \{a ; b\}$ Đúng ☐ Sai ☐.
36. Cho tập hợp $A = \{a ; b ; c ; d\}$. Liệt kê tất cả các tập con của A có :
- a) Ba phần tử ; b) Hai phần tử ; c) Không quá một phần tử.
37. Cho hai đoạn $A = [a ; a + 2]$ và $B = [b ; b + 1]$. Các số a, b cần thoả mãn điều kiện gì để $A \cap B \neq \emptyset$?
38. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau :
- (A) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$; (B) $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}^*$.
- (C) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$; (D) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{Z}$.
39. Cho hai nửa khoảng $A = (-1 ; 0]$ và $B = [0 ; 1)$. Tìm $A \cup B$, $A \cap B$ và $C_{\mathbb{R}}A$.
40. Cho $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$;
- B là tập hợp các số nguyên có chữ số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8 ;
- $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$;
- $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Chứng minh rằng $A = B$, $A = C$ và $A \neq D$.
41. Cho hai nửa khoảng $A = (0 ; 2]$, $B = [1 ; 4)$. Tìm $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ và $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.
42. Cho $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{b, c, e\}$.
- Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :
- (A) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; (B) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- (C) $(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (D) $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C$.



TIỂU SỬ NHÀ TOÁN HỌC CAN-TO



Ghê-oóc Can-to
(Georg Cantor, 1845 – 1918)

Can-to sinh ngày 3-3-1845 tại Xanh Pê-tec-bua trong một gia đình có bố là một thương gia, mẹ là một nghệ sĩ. Tài năng và lòng say mê toán học của ông hình thành rất sớm. Sau khi tốt nghiệp phổ thông một cách xuất sắc, ông ôm ấp hoài bão đi sâu vào toán học. Bố của ông muốn ông trở thành một kĩ sư vì nghề này kiếm được nhiều tiền hơn. Nhưng ông đã quyết tâm học sâu về toán và cuối cùng, ông thuyết phục được cha bằng lòng cho ông theo học ngành Toán. Ông viết thư cho cha đại ý như sau : "Con rất sung sướng vì cha đã đồng ý cho con theo đuổi hoài bão của con. Tâm hồn con, cơ thể con

sống theo hoài bão ấy". Ông bảo vệ luận án Tiến sĩ tại trường đại học Bec-lin vào năm 1867. Từ năm 1869 đến 1905, ông dạy ở trường đại học Ha-lơ (Halle). Ông là người sáng lập nên lí thuyết tập hợp. Ngay sau khi ra đời, lí thuyết tập hợp đã là cơ sở cho một cuộc cách mạng trong viết sách và giảng dạy toán. Những công trình toán học của ông đã để lại dấu ấn sâu sắc cho các thế hệ các nhà toán học lớp sau. Năm 1925, Hin-be (D. Hilbert), nhà toán học lỗi lạc của thế kỉ XX đã viết : "Tôi đã tìm thấy trong các công trình của ông vẻ đẹp của hoa và trí tuệ. Tôi nghĩ rằng đó là đỉnh cao của hoạt động trí tuệ của con người". Từ năm 40 tuổi, tuy có những thời kì đau ốm phải nằm viện nhưng ông vẫn không ngừng sáng tạo. Một trong những công trình quan trọng của ông đã được hoàn thành trong khoảng thời gian giữa hai cơn đau. Ông mất ngày 6-1-1918 tại một bệnh viện ở Ha-lơ, thọ 73 tuổi.

1. Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp, ta không biết được giá trị đúng của đại lượng ta đang quan tâm mà chỉ biết giá trị gần đúng của nó. Cả hai kết quả đo chiều dài chiếc bàn ở hình bên chỉ là các giá trị gần đúng với chiều dài thực của chiếc bàn.



[H1] Theo Tổng cục Thống kê, dân số nước ta tại thời điểm ngày 1-4-2003 là 80 902,4 nghìn người, trong đó số nam là 39 755,4 nghìn người, số nữ là 41 147,0 nghìn người; thành thị có 20 869,5 nghìn người và nông thôn có 60 032,9 nghìn người.

Hỏi các số liệu nói trên là số đúng hay số gần đúng?

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

a) Sai số tuyệt đối

Giả sử $\bar{a}$ là giá trị đúng của một đại lượng và a là giá trị gần đúng của $\bar{a}$. Giá trị $|\bar{a} - a|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa $\bar{a}$ và a . Ta gọi $|\bar{a} - a|$ là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a và kí hiệu là Δ_a , tức là

$$\Delta_a = |\bar{a} - a|.$$

Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\bar{a}$ nên không thể tính được chính xác Δ_a . Tuy nhiên, ta có thể đánh giá được Δ_a không vượt quá một số dương d nào đó.

Ví dụ 1. Giả sử $\bar{a} = \sqrt{2}$ và một giá trị gần đúng của nó là $a = 1,41$. Ta có :

$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 \Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1,41 > 0;$$

$$(1,42)^2 = 2,0164 > 2 \Rightarrow 1,42 > \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1,41 < 0,01.$$

Do đó

$$\Delta_a = |\bar{a} - a| = |\sqrt{2} - 1,41| < 0,01.$$

Vậy sai số tuyệt đối của 1,41 không vượt quá 0,01.

□

Nếu $\Delta_a \leq d$ thì $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$. Khi đó, ta quy ước viết

$$\bar{a} = a \pm d.$$

Như vậy, khi viết $\bar{a} = a \pm d$, ta hiểu số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$.

Bởi vậy, d càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng a so với số đúng $\bar{a}$ càng ít. Thành thử d được gọi là **độ chính xác của số gần đúng**.

H2 Kết quả đo chiều dài một cây cầu được ghi là $152 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m}$. Điều đó có nghĩa như thế nào?

b) Sai số tương đối

Ví dụ 2. Kết quả đo chiều cao một ngôi nhà được ghi là $15,2 \text{ m} \pm 0,1 \text{ m}$.

Ta muốn so sánh độ chính xác của phép đo này với phép đo chiều dài cây cầu nói trong **H2**.

Thoạt nhìn, ta thấy dường như phép đo này có độ chính xác cao hơn phép đo xét trong **H2**. □

Để so sánh độ chính xác của hai phép đo đặc hay tính toán, người ta đưa ra khái niệm sai số tương đối.

Sai số tương đối của số gần đúng a , kí hiệu là δ_a , là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, tức là

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}.$$

Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$. Do đó $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$.

Nếu $\frac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đặc hay tính toán càng cao.

Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

• Trở lại ví dụ 2 ở trên, ta thấy : Trong phép đo chiều dài cây cầu thì sai số tương đối không vượt quá $\frac{0,2}{152} \approx 0,13\%$. Trong phép đo chiều cao ngôi nhà thì sai số tương đối không vượt quá $\frac{0,1}{15,2} \approx 0,66\%$.

Như vậy, phép đo chiều dài cây cầu có độ chính xác cao hơn. □

H3 Số $\bar{a}$ được cho bởi giá trị gần đúng $a = 5,7824$ với sai số tương đối không vượt quá $0,5\%$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của $\bar{a}$.

3. Số quy tròn

Trong thực tế đo đạc và tính toán, nhiều khi người ta chỉ cần biết giá trị gần đúng của một đại lượng với độ chính xác nào đó (kể cả khi có thể biết được giá trị đúng của nó). Khi đó để cho gọn, các số thường được *quy tròn*.

Tuỳ mức độ cho phép, ta có thể quy tròn một số đến hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, ... hay đến hàng phần chục, hàng phần trăm, hàng phần nghìn, ... (gọi là hàng quy tròn) theo nguyên tắc sau :

- Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.
- Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0 và cộng thêm một đơn vị vào chữ số ở hàng quy tròn.

Ví dụ 3. Nếu quy tròn số 7216,4 đến hàng chục thì chữ số ở hàng quy tròn là 1, chữ số ngay sau đó là 6 ; do $6 > 5$ nên ta có số quy tròn là 7220. $\square$

Ví dụ 4. Nếu quy tròn số 2,654 đến hàng phần trăm (tức là chữ số thứ hai sau dấu phẩy) thì chữ số ngay sau hàng quy tròn là 4 ; do $4 < 5$ nên số quy tròn là 2,65. $\square$

Ta thấy trong ví dụ 3 và ví dụ 4, sai số tuyệt đối lần lượt là

$$|7216,4 - 7220| = 3,6 < 5 ;$$

$$|2,654 - 2,65| = 0,004 < 0,005.$$

Nhận xét. Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Như vậy, độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

H4 Quy tròn số 7216,4 đến hàng đơn vị, số 2,654 đến hàng phần chục rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

CHÚ Ý

1) Khi quy tròn số đúng $\bar{a}$ đến một hàng nào thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó. Chẳng hạn, số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14 ; số gần đúng của $\sqrt{2}$ chính xác đến hàng phần nghìn là 1,414.

2) Nếu kết quả cuối cùng của bài toán yêu cầu chính xác đến hàng $\frac{1}{10^n}$ thì trong quá trình tính toán, ở kết quả của các phép tính trung gian, ta cần lấy chính xác ít nhất đến hàng $\frac{1}{10^{n+1}}$.

3) Cho số gần đúng a với độ chính xác d (tức là $\bar{a} = a \pm d$). Khi được yêu cầu quy tròn số a mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

Chẳng hạn, cho $\bar{a} = 1,236 \pm 0,002$ và ta phải quy tròn số 1,236. Ta thấy $0,001 < 0,002 < 0,01$ nên hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm. Vậy ta phải quy tròn số 1,236 đến hàng phần trăm. Kết quả là $\bar{a} \approx 1,24$.

4. Chữ số chắc và cách viết chuẩn số gần đúng

a) Chữ số chắc

Cho số gần đúng a của số $\bar{a}$ với độ chính xác d . Trong số a , một chữ số được gọi là **chữ số chắc** (hay **đáng tin**) nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

Nhận xét. Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.

Ví dụ 5. Trong một cuộc điều tra dân số, người ta báo cáo số dân của tỉnh A là

$$1\,379\,425 \text{ người} \pm 300 \text{ người}.$$

Vì $\frac{100}{2} = 50 < 300 < 500 = \frac{1000}{2}$ nên chữ số hàng nghìn (chữ số 9) là chữ số chắc. Vậy các chữ số chắc là 1, 3, 7 và 9 □

b) Dạng chuẩn của số gần đúng

Trong cách viết $\bar{a} = a \pm d$, ta biết ngay độ chính xác d của số gần đúng a (tức là $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$). Ngoài cách viết trên, người ta còn quy ước dạng viết chuẩn của số gần đúng và khi cho một số gần đúng dưới dạng chuẩn, ta cũng biết được độ chính xác của nó.

• Nếu số gần đúng là số thập phân không nguyên thì dạng chuẩn là dạng mà mọi chữ số của nó đều là chữ số chắc.

Ví dụ 6. Cho một giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$ được viết dưới dạng chuẩn là 2,236 ($\sqrt{5} \approx 2,236$). Ở đây, hàng thấp nhất có chữ số chắc là hàng phần nghìn nên độ chính xác của nó là $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0,0005$. Do đó, ta biết được :
 $2,236 - 0,0005 \leq \sqrt{5} \leq 2,236 + 0,0005$.

• Nếu số gần đúng là số nguyên thì dạng chuẩn của nó là $A \cdot 10^k$, trong đó A là số nguyên, 10^k là hàng thấp nhất có chữ số chắc ($k \in \mathbb{N}$).

(Từ đó, mọi chữ số của A đều là chữ số chắc).

Ví dụ 7. Số dân của Việt Nam (năm 2005) vào khoảng $83 \cdot 10^6$ người (83 triệu người). Ở đây, $k = 6$ nên độ chính xác của số gần đúng này là $\frac{1}{2} \cdot 10^6 = 500\,000$.

Do đó, ta biết được số dân của Việt Nam trong khoảng từ 82,5 triệu người đến 83,5 triệu người.

CHÚ Ý

Các số gần đúng trong "Bảng số với bốn chữ số thập phân" (bảng Bra-đi-xơ) hoặc máy tính bỏ túi đều được cho dưới dạng chuẩn.

Ví dụ 8. Dùng máy tính bỏ túi để tính $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, ta được kết quả là 3,14626437. Ta hiểu số gần đúng này được viết dưới dạng chuẩn, nó có độ chính xác là $\frac{1}{2} \cdot 10^{-8}$.

(Đối với một số loại máy tính như *CASIO fx - 500 MS*, ta có thể sử dụng chức năng định trước độ chính xác của kết quả đã được cài sẵn trong máy).

CHÚ Ý

Với quy ước về dạng chuẩn số gần đúng thì hai số gần đúng 0,14 và 0,140 viết dưới dạng chuẩn có ý nghĩa khác nhau. Số gần đúng 0,14 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,005 còn số gần đúng 0,140 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0005.

5. Kí hiệu khoa học của một số

Mỗi số thập phân khác 0 đều viết được dưới dạng $\alpha \cdot 10^n$, trong đó $1 \leq |\alpha| < 10, n \in \mathbb{Z}$.

(Quy ước rằng nếu $n = -m$, với m là số nguyên dương thì $10^{-m} = \frac{1}{10^m}$).

Dạng như thế được gọi là **kí hiệu khoa học** của số đó. Người ta thường dùng kí hiệu khoa học để ghi những số rất lớn hoặc rất bé. Số mũ n của 10 trong kí hiệu khoa học của một số cho ta thấy độ lớn (bé) của số đó.

Ví dụ 9. Khối lượng của Trái Đất viết dưới dạng kí hiệu khoa học là

$$5,98.10^{24} \text{ kg.}$$

Khối lượng nguyên tử của Hidrô viết dưới dạng kí hiệu khoa học là

$$1,66.10^{-24} \text{ g.}$$

□

Câu hỏi và bài tập

43. Các nhà toán học cổ đại Trung Quốc đã dùng phân số $\frac{22}{7}$ để xấp xỉ số π . Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng này, biết $3,1415 < \pi < 3,1416$.
44. Một tam giác có ba cạnh đo được như sau : $a = 6,3 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$; $b = 10 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$ và $c = 15 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$. Chứng minh rằng chu vi P của tam giác là $P = 31,3 \text{ cm} \pm 0,5 \text{ cm}$.
45. Một cái sân hình chữ nhật với chiều rộng là $x = 2,56 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}$ và chiều dài là $y = 4,2 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}$.
Chứng minh rằng chu vi P của sân là $P = 13,52 \text{ m} \pm 0,04 \text{ m}$.
46. Sử dụng máy tính bỏ túi :
- a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.
- b) Viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{100}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.
47. Biết rằng tốc độ ánh sáng trong chân không là $300\,000 \text{ km/s}$. Hỏi một năm ánh sáng đi được trong chân không là bao nhiêu (giả sử một năm có 365 ngày) ? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).
48. Một đơn vị thiên văn xấp xỉ bằng $1,496.10^8 \text{ km}$. Một trạm vũ trụ di chuyển với vận tốc trung bình là $15\,000 \text{ m/s}$. Hỏi trạm vũ trụ đó phải mất bao nhiêu giây mới đi được một đơn vị thiên văn ? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).
49. Vũ trụ có tuổi khoảng 15 tỉ năm. Hỏi Vũ trụ có bao nhiêu ngày tuổi (giả sử một năm có 365 ngày) ? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).

LOÀI NGƯỜI ĐÃ SỬ DỤNG CÁC HỆ ĐẾM CƠ SỐ NÀO ?

Đa số các dân tộc trên thế giới dùng hệ đếm thập phân để biểu diễn các số. Tuy nhiên, ngoài hệ thập phân còn có các hệ đếm cơ số khác.

Cho b là một số nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó, mọi số nguyên dương n có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$,

ở đây $k \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_k$ là các số nguyên không âm nhỏ hơn b và $a_k \neq 0$. Người ta kí hiệu $n = (a_k \dots a_1 a_0)_b$ và gọi đó là biểu diễn của n trong hệ đếm cơ số b .

Hệ đếm sớm nhất của loài người không phải là hệ đếm thập phân mà là hệ đếm cơ số 60 của người Ba-bi-lon. Vào thời cổ đại, cũng có các bộ tộc dùng hệ đếm cơ số 5. Người Mai-a ở Nam Mỹ có một nền văn hoá khá độc đáo từng sử dụng hệ đếm cơ số 20. Tại Đan Mạch ngày nay, người ta vẫn còn dùng hệ đếm cơ số 20. Người Anh rất thích dùng hệ đếm cơ số 12, người ta tính 12 bút chì là một tá bút chì, 24 bút chì là hai tá bút chì.

Đến khi có máy tính điện tử thì hệ nhị phân lại được ưa chuộng. Trong hệ nhị phân để ghi các con số, ta chỉ cần hai chữ số 0 và 1. Có thể dùng số 1 biểu diễn việc đóng mạch, số 0 biểu diễn việc ngắt mạch ; hoặc 1 biểu diễn trạng thái bị từ hoá, 0 là trạng thái không bị từ hoá, Từ đó cho thấy hệ nhị phân rất thích hợp cho việc biểu diễn các thông tin trên máy tính.

Chẳng hạn, do $69 = 2^6 + 2^2 + 2^0$ nên 69 được viết trong hệ nhị phân là $(1000101)_2$. Số 351 có biểu diễn trong hệ nhị phân là $(101011111)_2$ vì $(101011111)_2 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 351$. Số 100 000 được viết dưới dạng nhị phân là $(11000011010100000)_2$.

Nhược điểm của hệ nhị phân là các số viết trong hệ nhị phân đều dài và khó đọc. Để khắc phục điều này trong máy tính, người ta dùng hai hệ đếm bổ trợ là hệ đếm cơ số 8 và hệ đếm cơ số 16. Độ dài một số viết ra trong hệ đếm cơ số 8 chỉ bằng khoảng $\frac{1}{3}$ độ dài viết trong hệ nhị phân và không khác mấy so với viết trong hệ thập phân.

Tương tự như vậy, độ dài một số viết ra trong hệ đếm cơ số 16 chỉ bằng khoảng $\frac{1}{4}$ độ dài viết trong hệ nhị phân. Việc chuyển đổi giữa hệ nhị phân sang hệ đếm cơ số 8 hay 16 và ngược lại rất đơn giản. Vì thế, hệ đếm cơ số 8 và 16 đã trợ giúp đắc lực cho việc giao tiếp giữa người và máy tính.



LỊCH SỬ CỦA VIỆC TÍNH GẦN ĐÚNG SỐ π

Số π là số vô tỉ, nó có biểu diễn thập phân là số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Trong lịch sử toán học đã xuất hiện một "cuộc đua" nhằm đạt kỉ lục về việc tính gần đúng số π với nhiều chữ số (nghĩa là với độ chính xác càng cao). Người đầu tiên tính số π tới bảy chữ số là Tô Xung Chi, nhà toán học Trung Quốc (thế kỉ V). Nhà toán học Ru-đôn-phơ (C. Rudolff, 1499 – 1545) người Đức đã tính số π tới 35 chữ số. Ông rất tự hào về điều này và để lại di chúc khắc 35 chữ số này trên bia mộ của ông. Ngày nay với sự trợ giúp của máy tính, các kỉ lục về tính số π với nhiều chữ số liên tiếp bị vượt qua trong một thời gian ngắn. Chúng ta xem bảng sau đây sẽ rõ.

Năm	Quốc tịch người tính số π	Số chữ số của số π
1957	Mĩ	100 265
1973	Pháp	1 triệu
1983	Nhật	16 triệu
1986	Mĩ	30 triệu
1987	Nhật	1335 triệu
1989	Mĩ	4 tỉ
2002	Nhật	1241 tỉ

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương I

50. Chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây.

Cho mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là :

- (A) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$; (B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$;
(C) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$; (D) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$.

51. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu các định lí sau đây.

a) Nếu tứ giác $MNPQ$ là một hình vuông thì hai đường chéo MP và NQ bằng nhau.

- b) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song với nhau.
- c) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- 52.** Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu các định lí sau đây.
- a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau.
- b) Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.
- 53.** Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của các định lí sau đây rồi sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" hoặc "nếu và chỉ nếu" hoặc "khi và chỉ khi" để phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.
- a) Nếu n là số nguyên dương lẻ thì $5n + 6$ cũng là số nguyên dương lẻ.
- b) Nếu n là số nguyên dương chẵn thì $7n + 4$ cũng là số nguyên dương chẵn.
- 54.** Chứng minh các định lí sau đây bằng phương pháp phản chứng.
- a) Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b phải nhỏ hơn 1.
- b) Cho n là số tự nhiên, nếu $5n + 4$ là số lẻ thì n là số lẻ.
- 55.** Gọi E là tập hợp các học sinh của một trường trung học phổ thông. Xét các tập con sau của E : tập hợp các học sinh lớp 10, kí hiệu là A ; tập hợp các học sinh học Tiếng Anh, kí hiệu là B . Hãy biểu diễn các tập hợp sau đây theo A, B và E .
- a) Tập hợp các học sinh lớp 10 học Tiếng Anh của trường đó.
- b) Tập hợp các học sinh lớp 10 không học Tiếng Anh của trường đó.
- c) Tập hợp các học sinh không học lớp 10 hoặc không học Tiếng Anh của trường đó.
- 56.** a) Ta biết rằng $|x - 3|$ là khoảng cách từ điểm x tới điểm 3 trên trục số.
- Hãy biểu diễn trên trục số các điểm x mà $|x - 3| \leq 2$.
- b) Điền tiếp vào chỗ còn trống (...) trong bảng dưới đây.

$x \in [1 ; 5]$	$1 \leq x \leq 5$	$ x - 3 \leq 2$
$x \in \dots$	$1 \leq x \leq 7$	$ x - \dots \leq \dots$
$x \in \dots$	$\dots \leq x \leq 3,1$	$ x - \dots \leq 0,1$

57. Điền tiếp vào chỗ còn trống (...) trong bảng dưới đây.

$2 \leq x \leq 5$	$x \in [2 ; 5]$
$-3 \leq x \leq 2$	$x \in \dots$
$\dots$	$x \in [-1 ; 5]$
$\dots$	$x \in (-\infty ; 1]$
$-5 < x$	$x \in \dots$

58. Cho biết giá trị gần đúng của số π với 10 chữ số thập phân là

$$\pi \approx 3,141\,592\,653\,5.$$

a) Giả sử ta lấy giá trị 3,14 làm giá trị gần đúng của π . Chứng tỏ sai số tuyệt đối không vượt quá 0,002.

b) Giả sử ta lấy giá trị 3,1416 làm giá trị gần đúng của π . Chứng tỏ sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0001.

59. Một hình lập phương có thể tích là $V = 180,57 \text{ cm}^3 \pm 0,05 \text{ cm}^3$. Xác định các chữ số chắc của V .

60. Cho hai nửa khoảng $A = (-\infty ; m]$ và $B = [5 ; +\infty)$. Tìm $A \cap B$ (biện luận theo m).

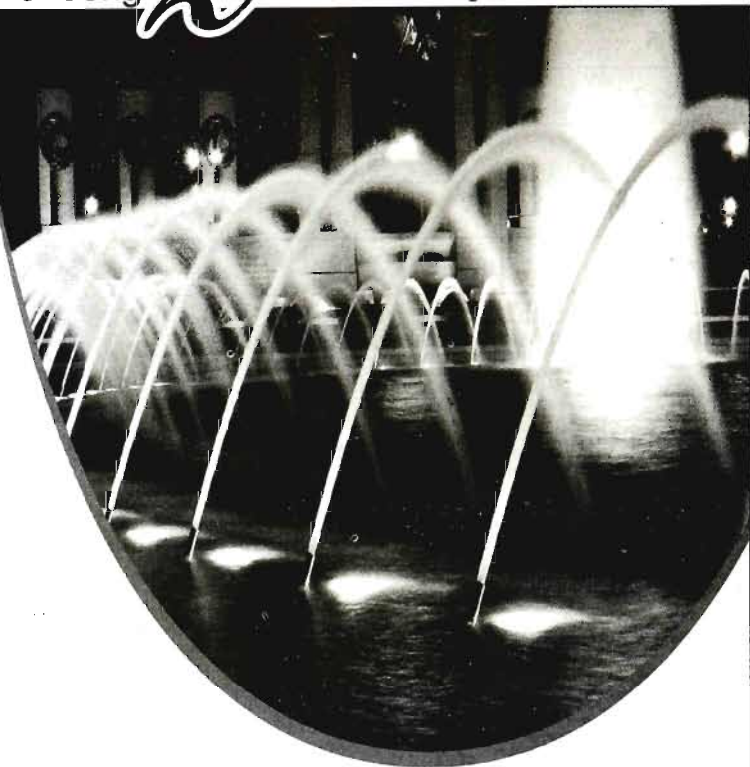
61. Cho hai khoảng $A = (m ; m + 1)$ và $B = (3 ; 5)$. Tìm m để $A \cup B$ là một khoảng. Hãy xác định khoảng đó.

62. Hãy viết kí hiệu khoa học của các kết quả sau :

a) Người ta coi trên đầu mỗi người có 150 000 sợi tóc. Hỏi một nước có 80 triệu dân thì tổng số sợi tóc của mọi người dân của nước đó là bao nhiêu ?

b) Biết rằng sa mạc Sa-ha-ra rộng khoảng 8 triệu km^2 . Giả sử trên mỗi mét vuông bề mặt ở đó có 2 tỉ hạt cát và toàn bộ sa mạc phủ bởi cát. Hãy cho biết số hạt cát trên bề mặt sa mạc này.

c) Biết rằng 1 mm^3 máu người chứa khoảng 5 triệu hồng cầu và mỗi người có khoảng 6 lít máu. Tính số hồng cầu của mỗi người.



Hàm số là một trong các khái niệm cơ bản của toán học. Những gì chúng ta đã biết về hàm số ở lớp dưới, nhất là về **hàm số bậc nhất và bậc hai** sẽ được hoàn thiện thêm một bước ở chương này. Kỹ năng vẽ và đọc đồ thị của hàm số, tức là nhận biết các tính chất của hàm số thông qua đồ thị của nó là một yêu cầu quan trọng trong chương mà chúng ta cần chú ý rèn luyện.

1. Khái niệm về hàm số

a) Hàm số

Ở lớp dưới, chúng ta đã làm quen với khái niệm hàm số. Sau đây, ta nhắc lại và bổ sung thêm về khái niệm này.

ĐỊNH NGHĨA

Cho một tập hợp khác rỗng $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

Hàm số f xác định trên $\mathcal{D}$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số x thuộc $\mathcal{D}$ với một và chỉ một số, kí hiệu là $f(x)$; số $f(x)$ đó gọi là giá trị của hàm số f tại x .

Tập $\mathcal{D}$ gọi là tập xác định (hay miền xác định), x gọi là biến số hay đối số của hàm số f .

Để chỉ rõ kí hiệu biến số, hàm số f còn được viết là $y = f(x)$, hay đầy đủ hơn là $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Ví dụ 1. Trích bảng thông báo lãi suất tiết kiệm của một ngân hàng :

Loại kỳ hạn (tháng)	VND (%/ năm) lãi cuối kỳ, áp dụng từ 08 – 11 – 2005
1	6,60
2	7,56
3	8,28
6	8,52
9	8,88
12	9,00

Bảng trên cho ta *quy tắc* để tìm số phần trăm lãi suất s tùy theo loại kì hạn k tháng. Kí hiệu *quy tắc* ấy là f , ta có hàm số $s = f(k)$ xác định trên tập

$$T = \{1; 2; 3; 6; 9; 12\}.$$

b) Hàm số cho bằng biểu thức

Nếu $f(x)$ là một biểu thức của biến x thì với mỗi giá trị của x , ta tính được một giá trị tương ứng duy nhất của $f(x)$ (nếu nó xác định). Do đó, ta có hàm số $y = f(x)$. Ta nói hàm số đó được *cho bằng biểu thức* $f(x)$.

Khi cho hàm số bằng biểu thức, ta quy ước rằng :

Nếu không có giải thích gì thêm thì tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho giá trị của biểu thức $f(x)$ được xác định.

[H1] Với mỗi hàm số cho ở phần a) và b) sau đây, hãy chọn kết luận đúng trong các kết luận đã cho.

a) Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x-2)}$ là :

(A) $\mathbb{R}_+$; (B) $\{x \mid x \neq 1 \text{ và } x \neq 2\}$; (C) $\mathbb{R}_+ \setminus \{1; 2\}$; (D) $(0; +\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số (hàm dấu) $d(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ là :

(A) $\mathbb{R}_-$; (B) $\mathbb{R}$; (C) $\mathbb{R}_+$; (D) $\{-1; 0; 1\}$.

CHÚ Ý

Trong kí hiệu hàm số $y = f(x)$, ta còn gọi x là biến số độc lập, y là biến số phụ thuộc của hàm số f . *Biến số độc lập và biến số phụ thuộc của một hàm số có thể được kí hiệu bởi hai chữ cái tùy ý khác nhau.* Chẳng hạn, $y = x^2 - 2x - 3$ và $u = t^2 - 2t - 3$ là hai cách viết biểu thị cùng một hàm số.

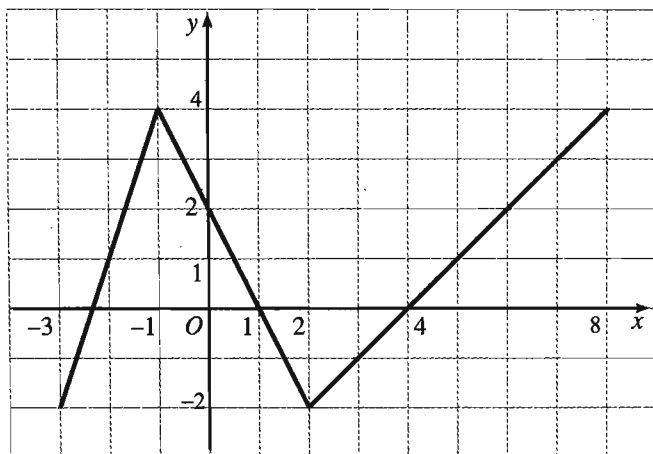
c) Đồ thị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Ta đã biết : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp (G) các điểm có tọa độ $(x; f(x))$ với $x \in \mathcal{D}$, gọi là *đồ thị của hàm số* f . Nói cách khác,

$$M(x_0; y_0) \in (G) \Leftrightarrow x_0 \in \mathcal{D} \text{ và } y_0 = f(x_0).$$

Qua đồ thị của một hàm số, ta có thể nhận biết được nhiều tính chất của hàm số đó.

Ví dụ 2. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-3 ; 8]$ được cho bằng đồ thị như trong hình 2.1.



Hình 2.1

Dựa vào đồ thị đã cho, ta có thể nhận biết được (với độ chính xác nào đó) :

- Giá trị của hàm số tại một số điểm, chẳng hạn $f(-3) = -2$, $f(1) = 0$;
- Các giá trị đặc biệt của hàm số, chẳng hạn, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-3 ; 8]$ là -2 ;
- Dấu của $f(x)$ trên một khoảng, chẳng hạn nếu $1 < x < 4$ thì $f(x) < 0$. □

2. Sự biến thiên của hàm số

a) Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

· Khi nghiên cứu một hàm số, người ta thường quan tâm đến sự *tăng* hay *giảm* của giá trị hàm số khi đối số tăng.

Ví dụ 3. Xét hàm số $f(x) = x^2$. Gọi x_1 và x_2 là hai giá trị tùy ý của đối số.

Trường hợp 1 : Khi x_1 và x_2 thuộc nửa khoảng $[0 ; +\infty)$, ta có

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Trường hợp 2 : Khi x_1 và x_2 thuộc nửa khoảng $(-\infty ; 0]$, ta có

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow |x_1| > |x_2| \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
 □

[H2] Ở ví dụ 3, khi đối số tăng, trong trường hợp nào thì :

- a) Giá trị của hàm số tăng ?
- b) Giá trị của hàm số giảm ?

Từ đây, ta luôn hiểu K là một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nào đó của $\mathbb{R}$.

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f xác định trên K .

Hàm số f gọi là **đồng biến** (hay **tăng**) trên K nếu

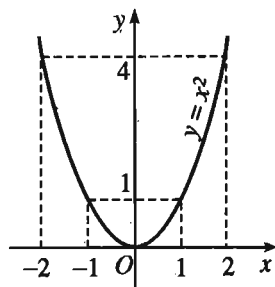
$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

Hàm số f gọi là **nghịch biến** (hay **giảm**) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

• Trong ví dụ 3, ta thấy hàm số $y = x^2$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Qua đồ thị của nó (h. 2.2) ta thấy : Từ trái sang phải, nhánh trái của parabol (ứng với $x \in (-\infty; 0]$) là đường cong đi xuống, thể hiện sự nghịch biến của hàm số ; nhánh phải của parabol (ứng với $x \in [0; +\infty)$) là đường cong đi lên, thể hiện sự đồng biến của hàm số.



Hình 2.2

Tổng quát, ta có :

Nếu một hàm số đồng biến trên K thì trên đó, đồ thị của nó đi lên ;

Nếu một hàm số nghịch biến trên K thì trên đó, đồ thị của nó đi xuống.

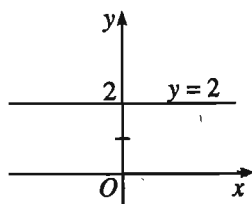
(Khi nói đồ thị đi lên hay đi xuống, ta luôn kể theo chiều tăng của đối số, nghĩa là kể từ trái sang phải).

H3 Hàm số cho bởi đồ thị trên hình 2.1 đồng biến trên khoảng nào, nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng $(-3; -1)$, $(-1; 2)$ và $(2; 8)$?

CHÚ Ý

Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ với mọi x_1 và x_2 thuộc K , tức là $f(x) = c$ với mọi $x \in K$ (c là hằng số) thì ta có **hàm số không đổi** (còn gọi là **hàm số hằng**) trên K .

Chẳng hạn, $y = 2$ là một hàm số không đổi xác định trên $\mathbb{R}$. Nó có đồ thị là đường thẳng song song với trục Ox (h.2.3).



Hình 2.3

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Khảo sát sự biến thiên của hàm số là xét xem hàm số đồng biến, nghịch biến, không đổi trên các khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nào trong tập xác định của nó.

Đối với hàm số cho bằng biểu thức, để khảo sát sự đồng biến hay nghịch biến của hàm số đó trên một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) K ta có thể dựa vào định nghĩa (xem ví dụ 3), hoặc dựa vào nhận xét sau :

Điều kiện " $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ " có nghĩa là $x_2 - x_1$ và $f(x_2) - f(x_1)$ cùng dấu. Do đó

Hàm số f đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Hàm số f nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Như vậy, để khảo sát sự biến thiên của hàm số f trên K , ta có thể xét dấu của tỉ số $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ trên K .

Ví dụ 4. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = ax^2$ (với $a > 0$) trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$.

Giải. Với hai số x_1 và x_2 khác nhau, ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1),$$

suy ra
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1).$$

Do $a > 0$ nên :

– Nếu $x_1 < 0$ và $x_2 < 0$ thì $a(x_2 + x_1) < 0$; điều đó chứng tỏ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$;

– Nếu $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$ thì $a(x_2 + x_1) > 0$; điều đó chứng tỏ hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$. □

Người ta thường ghi lại kết quả khảo sát sự biến thiên của một hàm số bằng cách lập *bảng biến thiên* của nó. Hàm số trong ví dụ 4 có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = ax^2$ $(a > 0)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Trong bảng biến thiên, mũi tên đi lên thể hiện tính đồng biến, mũi tên đi xuống thể hiện tính nghịch biến của hàm số.

Cụ thể hơn, hàng thứ hai trong bảng được hiểu như sau : $f(0) = 0$ và khi x tăng trên khoảng $(0 ; +\infty)$ thì $f(x)$ nhận mọi giá trị trong khoảng $(0 ; +\infty)$ theo chiều tăng, còn khi x tăng trong khoảng $(-\infty ; 0)$ thì $f(x)$ cũng nhận mọi giá trị trong khoảng $(0 ; +\infty)$ nhưng theo chiều giảm.

H4 Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = ax^2$ (với $a < 0$) trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$ và lập bảng biến thiên của nó.

3. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Có những hàm số có một số tính chất đặc biệt, dễ nhận thấy mà ta có thể lợi dụng để việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của nó đơn giản và dễ dàng hơn. Tính chất *chẵn - lẻ* của hàm số là một ví dụ.

a) Khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ

ĐỊNH NGHĨA

- Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$.

Hàm số f gọi là hàm số **chẵn** nếu với mọi x thuộc $\mathcal{D}$, ta có $-x$ cũng thuộc $\mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số f gọi là hàm số **lẻ** nếu với mọi x thuộc $\mathcal{D}$, ta có $-x$ cũng thuộc $\mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ là hàm số lẻ.

Giải. Tập xác định của hàm số là đoạn $[-1 ; 1]$ nên dễ thấy

$$\forall x, x \in [-1 ; 1] \Rightarrow -x \in [-1 ; 1] \quad \text{và}$$

$$f(-x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = -f(x).$$

Vậy f là hàm số lẻ.

□

H5 Chứng minh rằng hàm số $g(x) = ax^2$ ($a \neq 0$) là hàm số chẵn.

b) Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ

Giả sử hàm số f với tập xác định $\mathcal{D}$ là hàm số chẵn và có đồ thị (G) . Với mỗi điểm $M(x_0 ; y_0)$ sao cho $x_0 \in \mathcal{D}$, ta xét điểm đối xứng với nó qua trục tung là $M'(-x_0 ; y_0)$.

Từ định nghĩa hàm số chẵn, ta có $-x_0 \in \mathcal{D}$ và $f(-x_0) = f(x_0)$. Do đó

$$M \in (G) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow y_0 = f(-x_0) \Leftrightarrow M' \in (G).$$

Điều đó chứng tỏ (G) có trục đối xứng là trục tung.

Nếu f là hàm số lẻ thì lí luận tương tự, ta suy ra (G) có tâm đối xứng là gốc tọa độ O .

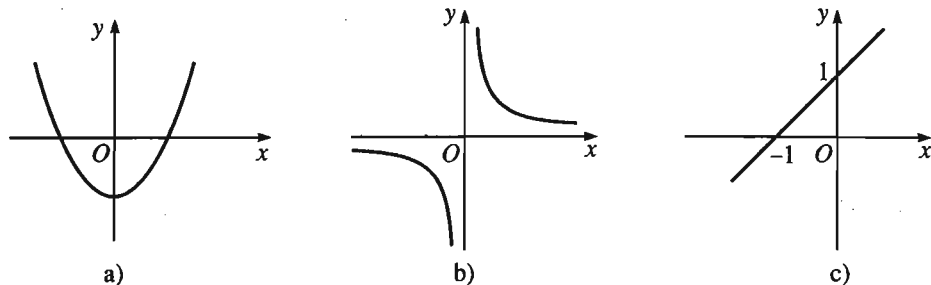
Vậy ta đã chứng minh được định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

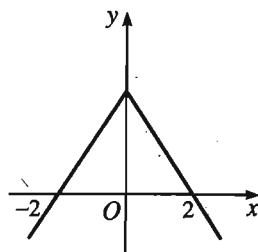
Hình 2.4a cho hình ảnh đồ thị của một hàm số chẵn. Hình 2.4b cho hình ảnh đồ thị của một hàm số lẻ. Tuy nhiên, có nhiều hàm số không chẵn và không lẻ. Chẳng hạn, hàm số $y = x + 1$ (h.2.4.c) không chẵn và không lẻ.



Hình 2.4

H6 Cho hàm số f xác định trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ có đồ thị như trên hình 2.5. Hãy ghép mỗi ý ở cột trái dưới đây với một ý ở cột phải để được một mệnh đề đúng.

1) Hàm số f là	a) Hàm số chẵn
2) Hàm số f đồng biến	b) Hàm số lẻ
3) Hàm số f nghịch biến	c) Trên khoảng $(-\infty; 0)$
	d) Trên khoảng $(0; +\infty)$
	e) Trên khoảng $(-\infty; +\infty)$



Hình 2.5

Sơ lược về tịnh tiến đồ thị song song với trục tọa độ

a) Tịnh tiến một điểm

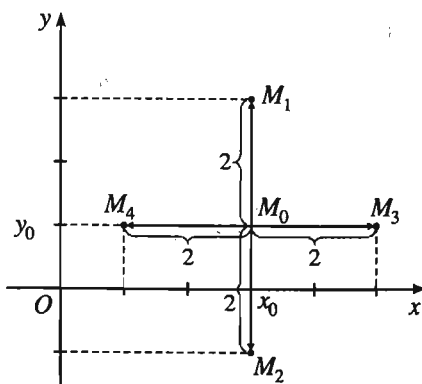
Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm $M_0(x_0; y_0)$. Với số $k > 0$ đã cho, ta có thể dịch chuyển điểm M_0 :

- Lên trên hoặc xuống dưới (theo phương của trục tung) k đơn vị;
- Sang trái hoặc sang phải (theo phương của trục hoành) k đơn vị.

Khi dịch chuyển điểm M_0 như thế, ta còn nói rằng **tịnh tiến điểm M_0 song song với trục tọa độ**.

H7 Giả sử M_1, M_2, M_3 và M_4 là các điểm có được khi tịnh tiến điểm $M_0(x_0; y_0)$ theo thứ tự lên trên, xuống dưới, sang phải và sang trái 2 đơn vị (h.2.6).

Hãy cho biết tọa độ của các điểm M_1, M_2, M_3 và M_4 .



Hình 2.6

b) Tịnh tiến một đồ thị

Cho số $k > 0$. Nếu ta tịnh tiến tất cả các điểm của đồ thị (G) lên trên k đơn vị thì tập hợp các điểm thu được tạo thành hình (G_1) . Điều đó được phát biểu là:

Tịnh tiến đồ thị (G) lên trên k đơn vị thì được hình (G_1) , hoặc Hình (G_1) có được khi tịnh tiến đồ thị (G) lên trên k đơn vị.

Ta cũng phát biểu tương tự khi tịnh tiến (G) xuống dưới, sang trái hay sang phải.

Vấn đề là : Nếu (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thì (G_1) có là đồ thị của một hàm số không ? Nếu có thì (G_1) là đồ thị của hàm số nào ?

Định lí sau đây sẽ trả lời câu hỏi đó (ta thừa nhận định lí này).

ĐỊNH LÍ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đồ thị (G) của hàm số $y = f(x)$; p và q là hai số dương tùy ý. Khi đó :

1) Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + q$;

2) Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - q$;

3) Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$;

4) Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.

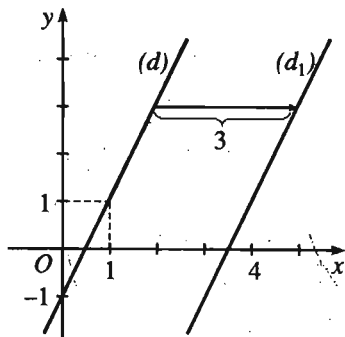
Ví dụ 6. Nếu tịnh tiến đường thẳng (d) : $y = 2x - 1$ sang phải 3 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

Giải. Kí hiệu $f(x) = 2x - 1$. Theo định lí trên, khi tịnh tiến (d) sang phải 3 đơn vị, ta được (d_1) , đó là đồ thị của hàm số

$$y = f(x - 3) = 2(x - 3) - 1,$$

tức là hàm số $y = 2x - 7$ (h.2.7).

□



Hình 2.7

Ví dụ 7. Cho đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{1}{x}$ Hỏi muốn có đồ thị của hàm số

$y = \frac{-2x+1}{x}$ thì ta phải tịnh tiến (H) như thế nào ?

Giải. Kí hiệu $g(x) = \frac{1}{x}$. ta có $\frac{-2x+1}{x} = -2 + \frac{1}{x} = g(x) - 2$. Vậy muốn có đồ thị của hàm số $y = \frac{-2x+1}{x}$, ta phải tịnh tiến (H) xuống dưới 2 đơn vị. $\square$

H8 Hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây :

Khi tịnh tiến parabol $y = 2x^2$ sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số :

(A) $y = 2(x+3)^2$; (B) $y = 2x^2 + 3$; (C) $y = 2(x-3)^2$; (D) $y = 2x^2 - 3$.

Câu hỏi và bài tập

Hàm số

1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

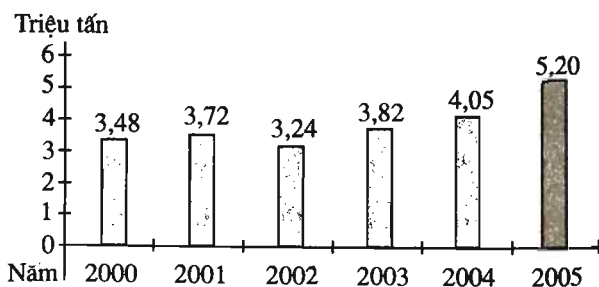
a) $y = \frac{3x+5}{x^2-x+1}$;

b) $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$;

c) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$;

d) $y = \frac{x^2-2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

2. Biểu đồ hình 2.8 cho biết số triệu tấn gạo xuất khẩu của Việt Nam trong các năm từ 2000 đến 2005. Biểu đồ này cho ta một hàm số. Hãy cho biết tập xác định và nêu một vài giá trị của hàm số đó.



Hình 2.8

Sự biến thiên của hàm số

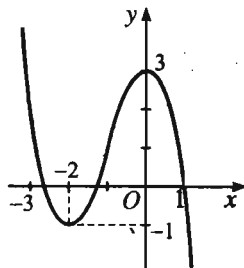
3. Hình 2.9 là đồ thị của một hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$. Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó.

4. Khảo sát sự biến thiên của mỗi hàm số sau và lập bảng biến thiên của nó:

a) $y = x^2 + 2x - 2$ trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$;

b) $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$;

c) $y = \frac{2}{x-3}$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.



Hình 2.9

Hàm số chẵn, hàm số lẻ

5. Mỗi hàm số sau là hàm số chẵn hay hàm số lẻ?

a) $y = x^4 - 3x^2 + 1$;

b) $y = -2x^3 + x$;

c) $y = |x + 2| - |x - 2|$;

d) $y = |2x + 1| + |2x - 1|$.

Tính tiến đồ thị

6. Cho đường thẳng $(d): y = 0,5x$. Hỏi ta sẽ được đồ thị của hàm số nào khi tịnh tiến (d) :

a) Lên trên 3 đơn vị?

b) Xuống dưới 1 đơn vị?

c) Sang phải 2 đơn vị?

d) Sang trái 6 đơn vị?

Luyện tập

7. Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực dương với căn bậc hai của nó có phải là một hàm số không? Vì sao?

8. Giả sử (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ và A là một điểm trên trục hoành có hoành độ bằng a . Từ A , ta dựng đường thẳng (d) song song (hoặc trùng) với trục tung.

a) Khi nào thì (d) có điểm chung với (G) ? (Hướng dẫn. Xét hai trường hợp a thuộc $\mathcal{D}$ và a không thuộc $\mathcal{D}$);

b) (d) có thể có bao nhiêu điểm chung với (G) ? Vì sao ?

c) Đường tròn có thể là đồ thị của hàm số nào không ? Vì sao ?

9. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \frac{3x+1}{x^2-9}$;

b) $y = \frac{x}{1-x^2} - \sqrt{-x}$;

c) $y = \frac{x-3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$;

d) $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2(x-2) & \text{nếu } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$

a) Cho biết tập xác định của hàm số f .

b) Tính $f(-1), f(0,5), f(\frac{\sqrt{2}}{2}), f(1), f(2)$.

11. Trong các điểm $A(-2 ; 8), B(4 ; 12), C(2 ; 8), D(5 ; 25 + \sqrt{2})$, điểm nào thuộc, điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số $f(x) = x^2 + \sqrt{x-3}$? Vì sao ?

12. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{x-2}$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$;

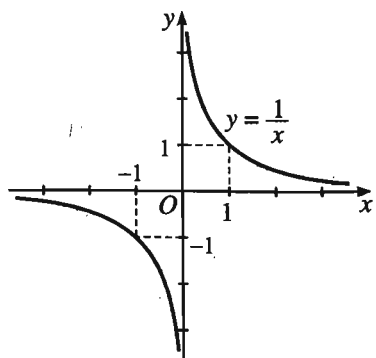
b) $y = x^2 - 6x + 5$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 3)$ và $(3 ; +\infty)$;

c) $y = x^{2005} + 1$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

13. Hàm số $y = \frac{1}{x}$ có đồ thị như hình 2.10.

a) Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó.

b) Bằng tính toán, hãy khảo sát sự biến thiên của hàm số trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$ và kiểm tra lại kết quả so với bảng biến thiên đã lập.



Hình 2.10

14. Tập con S của tập số thực $\mathbb{R}$ gọi là *đối xứng* nếu với mọi x thuộc S , ta đều có $-x$ thuộc S . Em có nhận xét gì về tập xác định của một hàm số chẵn (lẻ) ? Từ nhận xét đó, em có kết luận gì về tính chẵn - lẻ của hàm số $y = \sqrt{x}$? Tại sao ?
15. Gọi (d) là đường thẳng $y = 2x$ và (d') là đường thẳng $y = 2x - 3$. Ta có thể coi (d') có được là do tịnh tiến (d) :
- Lên trên hay xuống dưới bao nhiêu đơn vị ?
 - Sang trái hay sang phải bao nhiêu đơn vị ?
16. Cho đồ thị (H) của hàm số $y = -\frac{2}{x}$.
- Tịnh tiến (H) lên trên 1 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?
 - Tịnh tiến (H) sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?
 - Tịnh tiến (H) lên trên 1 đơn vị, sau đó tịnh tiến đồ thị nhận được sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?

Bài đọc thêm

ÁNH XẠ

Ánh xạ là một khái niệm rất quan trọng. Cũng như tập hợp, khái niệm ánh xạ có mặt trong tất cả các lĩnh vực toán học. Khái niệm hàm số thực chất cũng chỉ là một trường hợp riêng của khái niệm ánh xạ mà thôi.

1. Định nghĩa

Cho hai tập hợp tùy ý khác rỗng X và Y .

• Một **ánh xạ** f từ X đến Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một và chỉ một phần tử xác định của Y . Phần tử xác định ấy gọi là ảnh của x qua ánh xạ f , và kí hiệu là $f(x)$.

• Tập hợp X gọi là **tập nguồn**, tập hợp Y gọi là **tập đích** của ánh xạ.

Ánh xạ f từ X đến Y được viết là $f: X \rightarrow Y$

$$x \mapsto f(x).$$

Ví dụ 1. Cho $X = \{a; b; c; d\}$ và $Y = \{0; 1\}$. Gọi f là quy tắc cho ở hình bên. Ta có ánh xạ

$$f: X \rightarrow Y$$

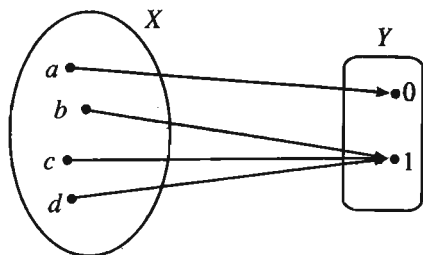
$$a \mapsto 0$$

$$b \mapsto 1$$

$$c \mapsto 1$$

$$d \mapsto 1.$$

□



Ví dụ 2. Cho X là tập hợp các lớp học của một trường phổ thông, Y là tập hợp các giáo viên của trường đó và f là quy tắc đặt tương ứng mỗi lớp học với giáo viên chủ nhiệm lớp đó. Ta có ánh xạ $f: X \rightarrow Y$. □

Ví dụ 3. Cho X là tập hợp các học sinh của một trường học, Y là tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ và f là quy tắc đặt tương ứng mỗi học sinh với số đo chiều cao (tính bằng xentimet) của học sinh đó. Khi đó, f là một ánh xạ từ X đến Y . □

2. Chú ý

1) Nếu cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ thì :

- Mỗi phần tử $x \in X$ đều phải có ảnh của nó trong Y và ảnh đó là duy nhất ;
- Mỗi phần tử thuộc Y có thể là ảnh của một hay nhiều phần tử của X , nhưng cũng có thể không là ảnh của phần tử nào cả.

2) Trường hợp $X \subset \mathbb{R}$ và $Y = \mathbb{R}$ thì mỗi ánh xạ từ X đến Y là một hàm số xác định trên X .

§ 2 HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. Nhắc lại về hàm số bậc nhất

• Ta đã biết : **Hàm số bậc nhất** là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax + b$, trong đó a và b là những hằng số với $a \neq 0$.

Hàm số bậc nhất có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Khi $a > 0$, hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $a < 0$, hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ ($a > 0$)	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ ($a < 0$)	$+\infty$	$-\infty$

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng gọi là đường thẳng $y = ax + b$. Nó có hệ số góc bằng a và có đặc điểm sau :

- Không song song và không trùng với các trục tọa độ ;
- Cắt trục tung tại điểm $B(0 ; b)$ và cắt trục hoành tại điểm $A(-\frac{b}{a} ; 0)$.

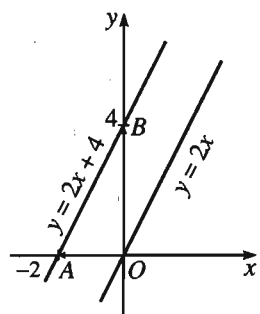
Ví dụ 1. Đồ thị của hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B(0 ; 4)$.

Từ đẳng thức $2x + 4 = 2(x + 2)$ để suy ra rằng đường thẳng $y = 2x + 4$ có thể thu được từ đường thẳng $(d) : y = 2x$ bằng một trong hai cách sau (h. 2.11) :

- Tịnh tiến (d) lên trên 4 đơn vị ;
- Tịnh tiến (d) sang trái 2 đơn vị.

□

Hình 2.11

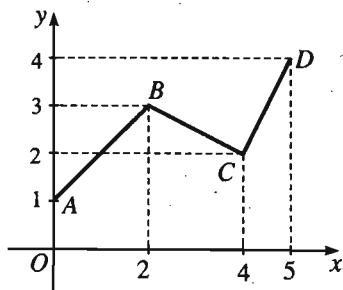


- Cho hai đường thẳng $(d) : y = ax + b$ và $(d') : y = a'x + b'$, ta có :
 (d) song song với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$;
 (d) trùng với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$;
 (d) cắt $(d') \Leftrightarrow a \neq a'$.

2. Hàm số $y = |ax + b|$

a) Hàm số bậc nhất trên từng khoảng

$$\text{Xét hàm số } y = f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x+4 & \text{nếu } 2 \leq x \leq 4 \\ 2x-6 & \text{nếu } 4 < x \leq 5. \end{cases}$$



Hình 2.12

Rõ ràng, hàm số trên không phải là hàm số bậc nhất. Nó là sự "lắp ghép" của ba hàm số bậc nhất khác nhau. Hàm số này là một ví dụ về *hàm số bậc nhất trên từng khoảng*.

Muốn vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất trên từng khoảng, ta vẽ đồ thị của từng hàm số tạo thành. Chẳng hạn, đồ thị của hàm số nêu trên là đường gấp khúc $ABCD$ (h.2.12), trong đó :

AB là phần đường thẳng $y = x + 1$ ứng với $0 \leq x < 2$;

BC là phần đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ứng với $2 \leq x < 4$;

CD là phần đường thẳng $y = 2x - 6$ ứng với $4 < x \leq 5$.

[H1] Cho biết tập xác định, lập bảng biến thiên của hàm số nói trên và tìm giá trị lớn nhất của nó.

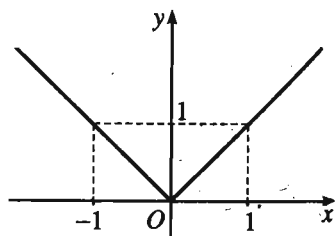
b) Đồ thị và sự biến thiên của hàm số $y = |ax + b|$ với $a \neq 0$

Sau đây, ta sẽ tìm hiểu tính chất của các hàm số dạng $y = |ax + b|$ thông qua đồ thị của nó. Hàm số $y = |ax + b|$ về thực chất cũng là hàm số bậc nhất trên từng khoảng.

Ví dụ 2. Xét hàm số $y = |x|$.

Để thấy hàm số $y = |x|$ xác định với mọi x và là một hàm số chẵn. Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$



Hình 2.13

Do đó, đồ thị của hàm số này là sự "lắp ghép" của hai đồ thị : đồ thị của hàm số $y = x$ (chỉ lấy phần ứng với $x \geq 0$) và đồ thị của hàm số $y = -x$ (chỉ lấy phần ứng với $x < 0$). Đó là hai tia phân giác của hai góc phần tư I và II (h.2.13). Để thấy chúng đối xứng với nhau qua Oy . □

[H2] Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số $y = |x|$ và tìm giá trị nhỏ nhất của nó.

Ví dụ 3. Xét hàm số $y = |2x - 4|$.

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có :

– Nếu $2x - 4 \geq 0$, tức là $x \geq 2$ thì $|2x - 4| = 2x - 4$;

– Nếu $2x - 4 < 0$, tức là $x < 2$ thì $|2x - 4| = -(2x - 4) = -2x + 4$.

Do đó, hàm số đã cho có thể viết là

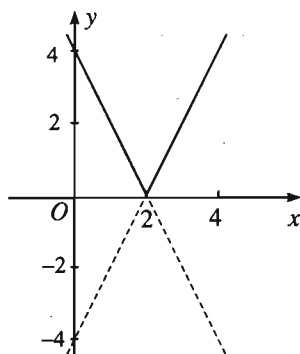
$$y = \begin{cases} 2x - 4 & \text{nếu } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{nếu } x < 2. \end{cases}$$

□

H3 Hãy nêu cách vẽ đồ thị của hàm số cho trong ví dụ 3 rồi lập bảng biến thiên của nó.

CHÚ Ý

Qua hai ví dụ trên đây, ta thấy có thể vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax + b|$ bằng một cách khác đơn giản hơn như sau : Vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$ rồi xoá đi hai phần đường thẳng nằm ở phía dưới trục hoành. (Hình 2.14 là đồ thị của hàm số cho trong ví dụ 3).



Hình 2.14

Câu hỏi và bài tập

Hàm số bậc nhất

17. Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau :

a) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$;

b) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$;

c) $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2$;

d) $y = \sqrt{2}x - 2$;

e) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 1$;

g) $y = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1\right)$.

Hàm số $y = |ax + b|$

$$18. \text{ Cho hàm số } y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{nếu } -2 \leq x < -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 3 & \text{nếu } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định và vẽ đồ thị của hàm số đó.

b) Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(-2 ; -1)$, $(-1 ; 1)$ và $(1 ; 3)$ và lập bảng biến thiên của nó.

19. a) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = f_1(x) = 2|x|$ và $y = f_2(x) = |2x + 5|$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Cho biết phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số f_1 thành đồ thị hàm số f_2 .

Bài đọc thêm

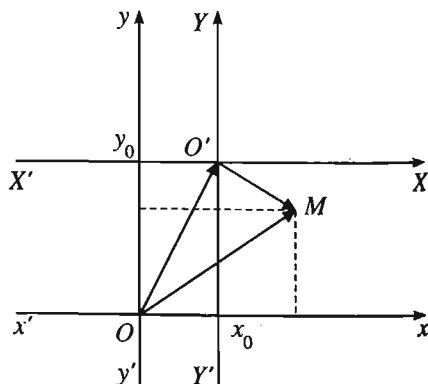
PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

Ta biết rằng đồ thị của một hàm số bao giờ cũng gắn với một hệ tọa độ nhất định. Ví dụ, đồ thị của hàm số $y = x$ là đường phân giác (d) của góc phần tư I và III trong hệ tọa độ Oxy . Ta hãy xét một hệ tọa độ mới $O'XY$, trong đó gốc O' của nó, đối với hệ tọa độ Oxy , có tọa độ $(x_0 ; y_0)$; các trục $X'X$ và $Y'Y$ song song cùng hướng và cùng đơn vị theo thứ tự với trục $x'x$ và $y'y$ (h.2.15). Câu hỏi đặt ra là trong hệ tọa độ mới ấy, liệu (d) có còn là đồ thị của hàm số $Y = X$ nữa hay không? Nếu không thì nó sẽ là đồ thị của hàm số nào?

Có thể thấy rằng: Nếu $O' \notin (d)$, có nghĩa là (d) không đi qua gốc tọa độ mới thì (d) không thể là đồ thị của hàm số $Y = X$. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, muốn biết (d) là đồ thị của hàm số nào, ta cần tìm hiểu mối quan hệ giữa các tọa độ cũ và mới của mỗi điểm trong mặt phẳng.

Gọi M là một điểm tùy ý. Đối với hệ tọa độ Oxy , M có tọa độ là $(x ; y)$. Đối với hệ tọa độ $O'XY$, tọa độ của M là $(X ; Y)$. Ta cần tìm mối quan hệ giữa $(x ; y)$ và $(X ; Y)$. Để ý

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}.$$



Hình 2.15

Về tọa độ, từ đẳng thức vectơ ở trên, ta có

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \quad (*)$$

Đó là công thức đổi tọa độ bởi phép tịnh tiến hệ tọa độ theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$.

Giả sử (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đối với hệ toạ độ Oxy . Muốn biết (G) là đồ thị của hàm số nào đối với hệ toạ độ $O'X'Y'$, ta phải tìm quan hệ giữa X và Y . Muốn vậy, thay thế x và y trong hệ thức $y = f(x)$ bởi công thức (*), ta có

$$Y + y_0 = f(X + x_0) \text{ hay } Y = f(X + x_0) - y_0.$$

Vậy đối với hệ tọa độ $O'XY$, (G) là đồ thị của hàm số $Y = f(X + x_0) - y_0$.

Luyện tập

- 20.** Có phải mỗi đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ đều là đồ thị của một hàm số nào đó không ? Vì sao ?
- 21.** a) Tìm hàm số $y = f(x)$, biết rằng đồ thị của nó là đường thẳng đi qua điểm $(-2 ; 5)$ và có hệ số góc bằng $-1,5$;
b) Vẽ đồ thị của hàm số tìm được.
- 22.** Tìm bốn hàm số bậc nhất có đồ thị là bốn đường thẳng đôi một cắt nhau tại bốn đỉnh của một hình vuông nhận gốc O làm tâm đối xứng, biết rằng một đỉnh của hình vuông này là $A(3 ; 0)$.
- 23.** Gọi (G) là đồ thị của hàm số $y = 2|x|$.
a) Khi tịnh tiến (G) lên trên 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?
b) Khi tịnh tiến (G) sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?
c) Khi tịnh tiến liên tiếp (G) sang phải 2 đơn vị, rồi xuống dưới 1 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?
- 24.** Vẽ đồ thị của hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ và nêu nhận xét về quan hệ giữa chúng :
a) $y = |x - 2|$; b) $y = |x| - 3$.

25. Một hãng taxi quy định giá thuê xe đi mỗi kilômét là 6 nghìn đồng đối với 10 km đầu tiên và 2,5 nghìn đồng đối với các kilômét tiếp theo. Một hành khách thuê taxi đi quãng đường x kilômét phải trả số tiền là y nghìn đồng. Khi đó, y là một hàm số của đối số x , xác định với mọi $x \geq 0$.
- a) Hãy biểu diễn y như một hàm số bậc nhất trên từng khoảng ứng với đoạn $[0; 10]$ và khoảng $(10; +\infty)$.
- b) Tính $f(8)$, $f(10)$ và $f(18)$.
- c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và lập bảng biến thiên của nó.
26. Cho hàm số $y = 3|x - 1| - |2x + 2|$.
- a) Bằng cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối, hãy viết hàm số đã cho dưới dạng hàm số bậc nhất trên từng khoảng. (*Hướng dẫn.* Xét các khoảng hay đoạn $(-\infty; -1)$, $[-1; 1)$ và $[1; +\infty)$).
- b) Vẽ đồ thị rồi lập bảng biến thiên của hàm số đã cho.

§ 3 HÀM SỐ BẬC HAI

1. Định nghĩa

|| **Hàm số bậc hai** là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng
 $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số với $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) mà chúng ta đã học ở lớp dưới là một trường hợp riêng của hàm số bậc hai và có đồ thị là một parabol.

Trong bài này, chúng ta sẽ thấy rằng : Nếu tịnh tiến parabol $y = ax^2$ một cách thích hợp thì ta sẽ được đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Do đó, đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ cũng gọi là một parabol.

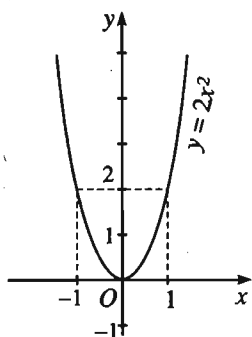
2. Đồ thị của hàm số bậc hai

a) Nhắc lại về đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

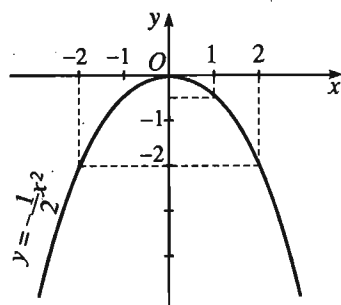
Ta đã biết, đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là parabol (P_0) có các đặc điểm sau :

- 1) Đỉnh của parabol (P_0) là gốc tọa độ O ;
- 2) Parabol (P_0) có trục đối xứng là trục tung ;
- 3) Parabol (P_0) hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$ và xuống dưới khi $a < 0$.

Chẳng hạn, hình 2.16 là parabol $y = 2x^2$, hình 2.17 là parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$.



Hình 2.16



Hình 2.17

b) Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Ta đã biết

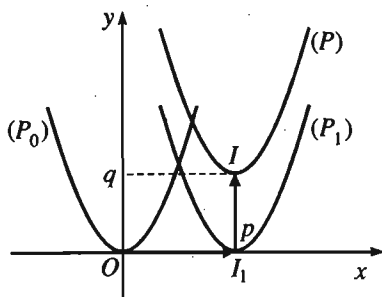
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Do đó, nếu đặt

$$\Delta = b^2 - 4ac, p = -\frac{b}{2a} \text{ và } q = -\frac{\Delta}{4a}$$

thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có dạng
 $y = a(x - p)^2 + q$.

Gọi (P_0) là parabol $y = ax^2$. Ta thực hiện hai phép tịnh tiến liên tiếp như sau :



Hình 2.18

- Tịnh tiến (P_0) sang phải p đơn vị nếu $p > 0$, sang trái $|p|$ đơn vị nếu $p < 0$, ta được đồ thị hàm số $y = a(x - p)^2$. Gọi đồ thị này là (P_1) .
- Tiếp theo, tịnh tiến (P_1) lên trên q đơn vị nếu $q > 0$, xuống dưới $|q|$ đơn vị nếu $q < 0$, ta được đồ thị hàm số $y = a(x - p)^2 + q$. Gọi đồ thị này là (P) . Vậy (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

Ta nhận thấy (P_1) và (P) đều là những hình "giống hệt" parabol (P_0) (hình 2.18 ứng với trường hợp $p > 0, q > 0$).

H1 Biết rằng trong phép tịnh tiến thứ nhất, đỉnh O của (P_0) biến thành đỉnh I_1 của (P_1) . Từ đó, hãy cho biết tọa độ của I_1 và phương trình trục đối xứng của (P_1) .

H2 Trong phép tịnh tiến thứ hai, đỉnh I_1 của (P_1) biến thành đỉnh I của (P) . Tìm tọa độ của I và phương trình trục đối xứng của (P) .

Kết luận

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$, xuống dưới khi $a < 0$.

Trên đây, ta đã biết đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cũng là một parabol "giống" như parabol $y = ax^2$, chỉ khác nhau về vị trí trong mặt phẳng tọa độ. Do đó trong thực hành, ta thường vẽ trực tiếp parabol $y = ax^2 + bx + c$ mà không cần vẽ parabol $y = ax^2$. Cụ thể, ta làm như sau :

- Xác định đỉnh của parabol ;
- Xác định trục đối xứng và hướng bề lõm của parabol ;
- Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục tọa độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục đối xứng) ;
- Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để "nối" các điểm đó lại.

3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Từ đồ thị của hàm số bậc hai, ta suy ra bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2+bx+c$ $(a > 0)$	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2+bx+c$ $(a < 0)$	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Như vậy :

Khi $a > 0$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -\frac{b}{2a})$, đồng biến trên khoảng $(-\frac{b}{2a} ; +\infty)$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.
Khi $a < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; -\frac{b}{2a})$, nghịch biến trên khoảng $(-\frac{b}{2a} ; +\infty)$ và có giá trị lớn nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Ví dụ. Áp dụng kết quả trên, hãy cho biết sự biến thiên của hàm số

$y = -x^2 + 4x - 3.$

Vẽ đồ thị của hàm số đó.

Giải. Ta tính được $-\frac{b}{2a} = 2$ và $-\frac{\Delta}{4a} = 1.$

Vậy đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ là parabol có đỉnh $I(2 ; 1)$, nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới.

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 2)$, nghịch biến trên khoảng $(2 ; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

Bảng biến thiên này cho thấy hàm số có giá trị lớn nhất là 1 khi $x = 2$.

Để vẽ đồ thị, ta lập bảng tọa độ của một số điểm thuộc đồ thị như sau

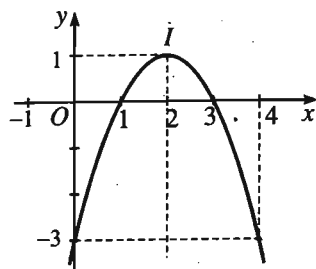
x	0	1	2	3	4
y	-3	0	1	0	-3

"Nối" các điểm đó lại, ta được parabol $y = -x^2 + 4x - 3$ như hình 2.19.

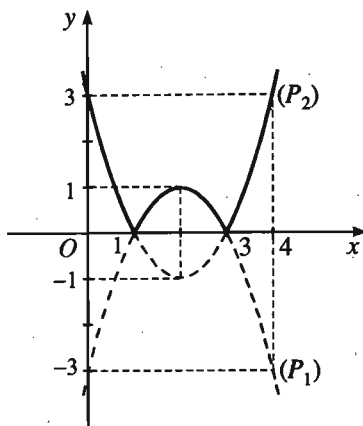
Nhận xét. Ta cũng có thể vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ tương tự như cách vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax + b|$.

Chẳng hạn, để vẽ đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 4x - 3|$, ta lần lượt làm như sau (h.2.20) :

- Vẽ parabol $(P_1) : y = -x^2 + 4x - 3$;
- Vẽ parabol $(P_2) : y = -(-x^2 + 4x - 3)$ bằng cách lấy đối xứng (P_1) qua trục Ox .
- Xoá đi các điểm của (P_1) và (P_2) nằm ở phía dưới trục hoành.



Hình 2.19



Hình 2.20

H3 Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ có đồ thị là parabol (P) .

a) Tìm tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng và hướng bề lõm của (P) . Từ đó suy ra sự biến thiên của hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

b) Vẽ parabol (P) .

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$.

Câu hỏi và bài tập

27. Cho các hàm số :

a) $y = -x^2 - 3$;

b) $y = (x - 3)^2$;

c) $y = \sqrt{2}x^2 + 1$;

d) $y = -\sqrt{2}(x + 1)^2$.

Không vẽ đồ thị, hãy mô tả đồ thị của mỗi hàm số trên bằng cách điền vào chỗ trống (...) theo mẫu :

- Đỉnh của parabol là điểm có tọa độ ...
- Parabol có trục đối xứng là đường thẳng ...
- Parabol có bề lõm hướng (lên trên / xuống dưới) ...

28. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + c$. Tìm a và c trong mỗi trường hợp sau :
- y nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$, và có giá trị nhỏ nhất là -1 ;
 - Đỉnh của parabol (P) là $I(0 ; 3)$ và một trong hai giao điểm của (P) với trục hoành là $A(-2 ; 0)$.
29. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = a(x - m)^2$. Tìm a và m trong mỗi trường hợp sau :
- Parabol (P) có đỉnh là $I(-3 ; 0)$ và cắt trục tung tại điểm $M(0 ; -5)$;
 - Đường thẳng $y = 4$ cắt (P) tại hai điểm $A(-1 ; 4)$ và $B(3 ; 4)$.
30. Viết mỗi hàm số cho sau đây thành dạng $y = a(x - p)^2 + q$. Từ đó hãy cho biết đồ thị của nó có thể được suy ra từ đồ thị của hàm số nào nhờ các phép tịnh tiến đồ thị song song với các trục tọa độ. Hãy mô tả cụ thể các phép tịnh tiến đó :
- $y = x^2 - 8x + 12$;
 - $y = -3x^2 - 12x + 9$.
31. Hàm số $y = -2x^2 - 4x + 6$ có đồ thị là parabol (P) .
- Tìm tọa độ đỉnh và phương trình trục đối xứng của (P) .
 - Vẽ parabol (P) .
 - Dựa vào đồ thị, hãy cho biết tập hợp các giá trị của x sao cho $y \geq 0$.

Luyện tập

32. Với mỗi hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ và $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$, hãy
- Vẽ đồ thị của hàm số ;
 - Tìm tập hợp các giá trị x sao cho $y > 0$;
 - Tìm tập hợp các giá trị của x sao cho $y < 0$.

33. Lập bảng theo mẫu sau đây rồi điền vào ô trống các giá trị thích hợp (nếu có).

Hàm số	Hàm số có giá trị lớn nhất / nhỏ nhất khi $x = ?$	Giá trị lớn nhất	Giá trị nhỏ nhất
$y = 3x^2 - 6x + 7$			
$y = -5x^2 - 5x + 3$			
$y = x^2 - 6x + 9$			
$y = -4x^2 + 4x - 1$			

34. Gọi (P) là đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$. Hãy xác định dấu của hệ số a và biệt số Δ trong mỗi trường hợp sau :

- a) (P) nằm hoàn toàn ở phía trên trục hoành ;
- b) (P) nằm hoàn toàn ở phía dưới trục hoành ;
- c) (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh của (P) nằm phía trên trục hoành.

35. Vẽ đồ thị rồi lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau :

- a) $y = |x^2 + \sqrt{2}x|$;
- b) $y = -x^2 + 2|x| + 3$;
- c) $y = 0,5x^2 - |x - 1| + 1$.

36. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau :

- a) $y = \begin{cases} -x + 1 & \text{nếu } x \leq -1 \\ -x^2 + 3 & \text{nếu } x > -1 \end{cases}$;
- b) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 3)^2 & \text{nếu } x \leq -1, \\ 2 & \text{nếu } x > -1. \end{cases}$

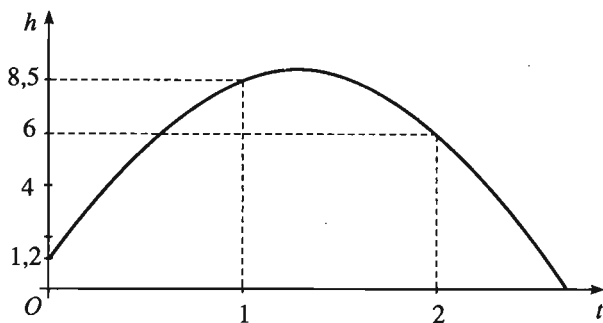
37. Bài toán bóng đá

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên ; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ độ cao 1,2 m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5 m và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao 6 m (h.2.21).

a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

b) Xác định độ cao lớn nhất của quả bóng (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

c) Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm) ?



Hình 2.21

38. Bài toán về cổng Ac-xơ (Arch)

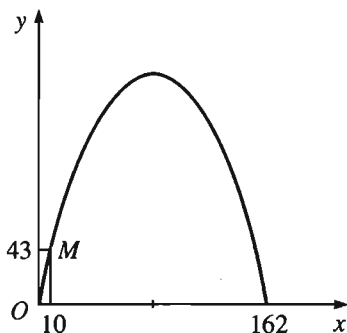
Khi du lịch đến thành phố Xanh Lu-i (Mĩ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Ac-xơ. Giả sử ta lập một hệ tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như trên hình 2.22 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí $(162; 0)$. Biết một điểm M trên cổng có tọa độ là $(10; 43)$.

a) Tìm hàm số bậc hai có đồ thị chứa cung parabol nói trên.

b) Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Cổng Ac-xơ ở Mĩ



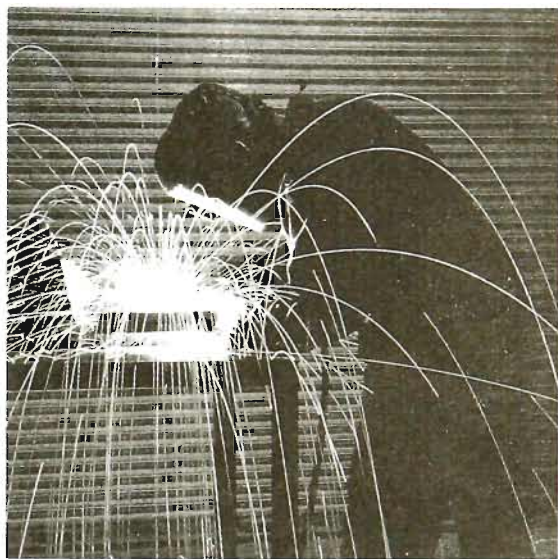
Hình 2.22



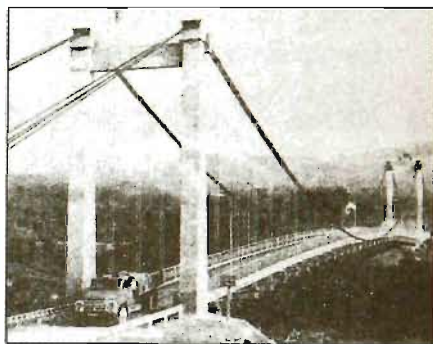
MỘT SỐ HÌNH ẢNH ĐƯỜNG PARABOL TRONG THỰC TẾ

Parabol là một đường cong đơn giản nhưng rất đẹp. Bởi vậy, chúng ta có thể thấy nó xuất hiện trong nhiều công trình kiến trúc ở Việt Nam và trên thế giới.

Ngoài ra, parabol còn có nhiều tính chất lí thú mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong Hình học.



Thợ hàn.

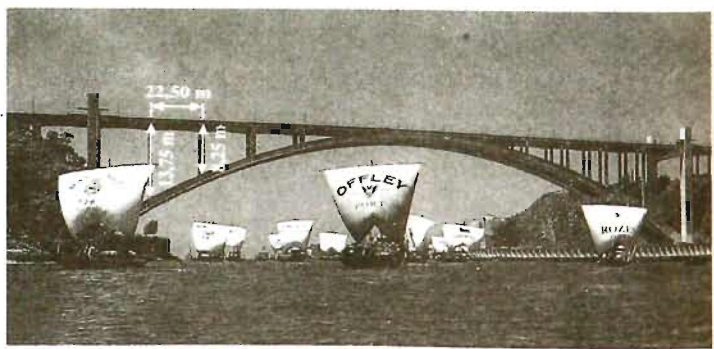


*Cầu treo Bình Thành
trên tuyến quốc lộ 19 nối thành phố Huế
với huyện miền núi A-lưới.*

Ảnh VNTTX.



*Bể phun nước ở Tuần Châu,
tỉnh Quảng Ninh.*



Cầu A-ra-bi-đa ở Poóc-tô Bô Đào Nha.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương II

39. Với mỗi câu hỏi sau đây, hãy chọn phân kết luận mà em cho là đúng.

a) Trên khoảng $(-1; 1)$, hàm số $y = -2x + 5$

(A) Đồng biến ; (B) Nghịch biến ; (C) Cả hai kết luận (A) và (B) đều sai.

b) Trên khoảng $(0; 1)$, hàm số $y = x^2 + 2x - 3$

(A) Đồng biến ; (B) Nghịch biến ; (C) Cả hai kết luận (A) và (B) đều sai.

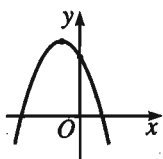
c) Trên khoảng $(-2; 1)$, hàm số $y = x^2 + 2x - 3$

(A) Đồng biến ; (B) Nghịch biến ; (C) Cả hai kết luận (A) và (B) đều sai.

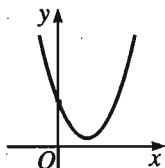
40. a) Tìm điều kiện của a và b , sao cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$ là hàm số lẻ.

b) Tìm điều kiện của a , b và c , sao cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ là hàm số chẵn.

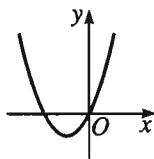
41. Dựa vào vị trí đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$, hãy xác định dấu của các hệ số a , b , c trong mỗi trường hợp dưới đây (h.2.23) :



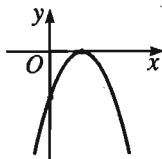
a)



b)



c)



d)

Hình 2.23

42. Trong mỗi trường hợp cho dưới đây, hãy vẽ đồ thị của các hàm số trên cùng một mặt phẳng tọa độ rồi xác định tọa độ giao điểm của chúng :

a) $y = x - 1$ và $y = x^2 - 2x - 1$;

b) $y = -x + 3$ và $y = -x^2 - 4x + 1$;

c) $y = 2x - 5$ và $y = x^2 - 4x - 1$.

43. Xác định các hệ số a , b và c để cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đó.

44. Vẽ đồ thị của các hàm số sau rồi lập bảng biến thiên của nó :

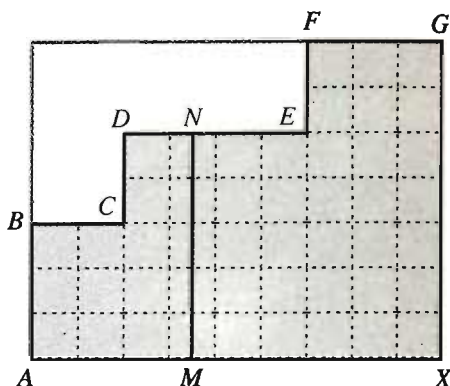
a) $y = \left| \frac{3}{2}x - 2 \right|$;

b) $y = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x < 0 \\ x^2 - x & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$;

c) $y = \left| \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \right|$;

d) $y = x|x| - 2x - 1$.

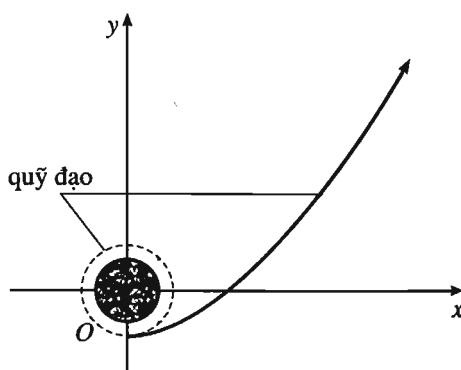
45. Trên hình 2.24, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AX . Từ M , kẻ đường thẳng song song với AB , cắt một trong ba đoạn thẳng BC , DE , FG tại điểm N . Gọi S là diện tích của miền tô đậm nằm ở bên trái MN . Gọi độ dài đoạn AM là x ($0 \leq x \leq 9$). Khi đó, S là một hàm số của x . Hãy nêu biểu thức xác định hàm số $S(x)$.



Hình 2.24

46. Bài toán tàu vũ trụ

Khi một con tàu vũ trụ được phóng lên Mặt Trăng, trước hết nó bay vòng quanh Trái Đất. Sau đó, đến một thời điểm thích hợp, động cơ bắt đầu hoạt động đưa con tàu bay theo quỹ đạo là một nhánh parabol lên Mặt Trăng (trong hệ toạ độ Oxy như trên hình 2.25, x và y tính bằng nghìn kilômét). Biết rằng khi động cơ bắt đầu hoạt động, tức là khi $x = 0$ thì $y = -7$. Sau đó, $y = -4$ khi $x = 10$ và $y = 5$ khi $x = 20$.



Hình 2.25

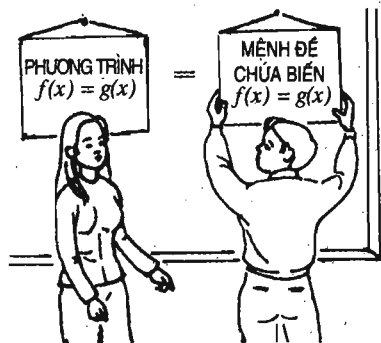
a) Tìm hàm số bậc hai có đồ thị chứa nhánh parabol nói trên.

b) Theo lịch trình, để đến được Mặt Trăng, con tàu phải đi qua điểm $(100 ; y)$ với $y = 294 \pm 1,5$. Hỏi điều kiện đó có được thoả mãn hay không ?



Từ thuở xa xưa, trong lịch sử phát triển của toán học, phương trình đã là vấn đề trung tâm của đại số học. Trong Đại số 10 nâng cao, các vấn đề về **phương trình và hệ phương trình bậc nhất và bậc hai** cũng là một nội dung trọng tâm của chương trình. Chúng được trình bày chính xác hơn, đầy đủ hơn, hệ thống hơn so với lớp dưới. Trong đó, điều đáng lưu ý và tương đối khó là vấn đề giải và biện luận phương trình. Bởi vậy, chương này đòi hỏi những kỹ năng thành thạo trong việc giải các phương trình và hệ phương trình bậc nhất và bậc hai trên cơ sở các phương pháp cơ bản mà sách giáo khoa đã cung cấp.

Ở lớp dưới, ta đã làm quen với khái niệm phương trình, chẳng hạn, $2x - 1 = \sqrt{x}$ là một phương trình. Để có một cách hiểu mới, ta xem " $2x - 1 = \sqrt{x}$ " là một mệnh đề chứa biến. Giá trị của biến x làm cho mệnh đề đó đúng chính là nghiệm của phương trình. Sau đây, chúng ta sẽ định nghĩa phương trình theo quan điểm đó.



1. Khái niệm phương trình một ẩn

ĐỊNH NGHĨA

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là $\mathcal{D}_f$ và $\mathcal{D}_g$. Đặt $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

Mệnh đề chứa biến " $f(x) = g(x)$ " được gọi là **phương trình một ẩn**; x gọi là **ẩn số** (hay **ẩn**) và $\mathcal{D}$ gọi là **tập xác định của phương trình**.

Số $x_0 \in \mathcal{D}$ gọi là một **nghiệm** của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu " $f(x_0) = g(x_0)$ " là mệnh đề đúng.

CHÚ Ý 1

Để thuận tiện trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác định $\mathcal{D}$ của phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x \in \mathcal{D}$. Điều kiện đó gọi là **điều kiện xác định của phương trình**, gọi tắt là **điều kiện của phương trình**.

Để đơn giản, ta coi các hàm số được nói đến trong bài này đều được cho bằng biểu thức. Vậy theo quy ước về tập xác định của hàm số cho bởi biểu thức, điều kiện của phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f(x)$ và $g(x)$ cùng được xác định và các điều kiện khác của ẩn (nếu có yêu cầu).

Ví dụ 1

a) Điều kiện của phương trình $\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} = 3$ là $x^3 - 2x^2 + 1 \geq 0$.

b) Khi tìm nghiệm nguyên của phương trình $2 - \frac{1}{x} = \sqrt{x}$, ta hiểu điều kiện của phương trình là $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$ và $x \geq 0$ (hay x nguyên dương). $\square$

CHÚ Ý 2

1) Khi giải một phương trình (tức là tìm tập nghiệm của phương trình), nhiều khi ta chỉ cần, hoặc chỉ có thể tính giá trị gần đúng của nghiệm (với độ chính xác nào đó). Giá trị đó gọi là *nghiệm gần đúng* của phương trình.

Chẳng hạn, bằng máy tính bỏ túi, ta tính nghiệm gần đúng (chính xác đến hàng phần nghìn) của phương trình $x^3 = 7$ là $x \approx 1,913$.

2) Các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là hoành độ các giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

2. Phương trình tương đương

Ta đã biết : Hai phương trình (cùng ẩn) được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng một tập nghiệm. Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

H1 Mọi khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x-1=0$.

b) $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x=1$.

c) $|x|=1 \Leftrightarrow x=1$.

• Khi muốn nhấn mạnh hai phương trình có cùng tập xác định $\mathcal{D}$ (hay có cùng điều kiện xác định mà ta cũng kí hiệu là $\mathcal{D}$) và tương đương với nhau, ta nói

– Hai phương trình tương đương với nhau *trên* $\mathcal{D}$, hoặc

– Với điều kiện $\mathcal{D}$, hai phương trình tương đương với nhau.

Chẳng hạn với $x > 0$, hai phương trình $x^2 = 1$ và $x = 1$ tương đương với nhau.

• Trong các phép biến đổi phương trình, đáng chú ý nhất là các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình. Ta gọi chúng là các **phép biến đổi tương đương**. Như vậy

Phép biến đổi tương đương biến một phương trình thành phương trình tương đương với nó.

Chẳng hạn, việc thực hiện các phép biến đổi đồng nhất ở mỗi vế của một phương trình và không thay đổi tập xác định của nó là một phép biến đổi tương đương.

Dưới đây là định lí về một số phép biến đổi tương đương thường dùng.

ĐỊNH LÍ 1

Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$; $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathcal{D}$ ($h(x)$ có thể là một hằng số). Khi đó trên $\mathcal{D}$, phương trình đã cho tương đương với mỗi phương trình sau :

$$1) f(x) + h(x) = g(x) + h(x) ;$$

$$2) f(x) h(x) = g(x) h(x) \text{ nếu } h(x) \neq 0 \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho kết luận thứ nhất. Kết luận thứ hai được chứng minh tương tự.

Thật vậy, cả ba hàm số f , g , và h đều xác định trên $\mathcal{D}$ nên nếu x_0 thuộc $\mathcal{D}$ thì $f(x_0)$, $g(x_0)$ và $h(x_0)$ là những số xác định. Do đó, áp dụng tính chất của đẳng thức số, ta có :

$$f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) + h(x_0) = g(x_0) + h(x_0).$$

Điều đó chứng tỏ rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình này thì cũng là nghiệm của phương trình kia và ngược lại. Vậy hai phương trình $f(x) = g(x)$ và $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ tương đương với nhau. $\square$

Từ định lí trên, ta dễ thấy : Hai quy tắc biến đổi phương trình đã học ở lớp dưới (quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân với một số khác 0) là những phép biến đổi tương đương.

H2 Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ?

a) Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2$. Chuyển $\sqrt{x-2}$ sang vế phải thì được phương trình tương đương.

b) Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2}$. Lược bỏ $\sqrt{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình thì được phương trình tương đương.

3. Phương trình hệ quả

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$\sqrt{x} = 2 - x. \quad (1)$$

Bình phương hai vế, ta được phương trình mới

$$x = 4 - 4x + x^2. \quad (2)$$

Tập nghiệm của (1) là $S_1 = \{1\}$, của (2) là $S_2 = \{1; 4\}$. Hai phương trình (1) và (2) không tương đương. Tuy nhiên, ta thấy $S_2 \supset S_1$; trong trường hợp này, ta nói (2) là *phương trình hệ quả* của phương trình (1). $\square$

Tổng quát,

$$\left\| \begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x) \text{ gọi là } \textbf{phương trình hệ quả} \text{ của phương trình} \\ f(x) = g(x) \text{ nếu tập nghiệm của nó chứa tập nghiệm của phương} \\ \text{trình } f(x) = g(x). \end{array} \right.$$

Khi đó, ta viết

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x).$$

Từ định nghĩa này, ta suy ra : Nếu hai phương trình tương đương thì mỗi phương trình đều là hệ quả của phương trình còn lại.

Trong ví dụ 2, giá trị $x = 4$ là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1). Ta gọi 4 là *nghiệm ngoại lai* của phương trình (1).

H3 Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) $\sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x-2 = 1.$

b) $\frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \Rightarrow x = 1.$

Trong các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả, ta thường sử dụng phép biến đổi được nêu trong định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2.$$

CHÚ Ý

1) Có thể chứng minh được rằng : Nếu hai vế của một phương trình *luôn cùng dấu* thì khi bình phương hai vế của nó, ta được phương trình tương đương.

2) Nếu phép biến đổi một phương trình dẫn đến phương trình hệ quả thì sau khi giải phương trình hệ quả, ta phải *thử lại* các nghiệm tìm được vào phương trình đã cho để phát hiện và loại bỏ nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 3. Giải phương trình $|x - 1| = x - 3$.

Giải. Bình phương hai vế, ta được phương trình hệ quả

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 6x + 9.$$

Giải phương trình này, ta được $x = 2$. Thử lại, ta thấy 2 không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. $\square$

4. Phương trình nhiều ẩn

Trong thực tế, ta còn gặp những phương trình có nhiều hơn một ẩn. Đó là các phương trình dạng $F = G$, trong đó F và G là những biểu thức của nhiều biến. Chẳng hạn,

$$2x^2 + 4xy - y^2 = -x + 2y + 3 \quad (3)$$

là một *phương trình hai ẩn* (x và y) ;

$$x + y + z = 3xyz \quad (4)$$

là một *phương trình ba ẩn* (x , y và z).

Nếu phương trình hai ẩn x và y trở thành mệnh đề đúng khi $x = x_0$ và $y = y_0$ (với x_0 và y_0 là số) thì ta gọi **cặp số** $(x_0 ; y_0)$ là **một nghiệm** của nó. Chẳng hạn, cặp số $(1 ; 0)$ là một nghiệm của phương trình (3).

Khái niệm *nghiệm* của phương trình ba ẩn, bốn ẩn,... cũng được hiểu tương tự. Chẳng hạn, bộ ba số $(1 ; 1 ; 1)$ là một nghiệm của phương trình (4).

Đối với phương trình nhiều ẩn, các khái niệm tập xác định (điều kiện xác định), tập nghiệm, phương trình tương đương, phương trình hệ quả,... cũng tương tự như đối với phương trình một ẩn.

5. Phương trình chứa tham số

Chúng ta còn xét cả những phương trình, trong đó ngoài các ẩn còn có những chữ khác. Các chữ này được xem là những số đã biết và được gọi là **tham số**.

Chẳng hạn, phương trình $m(x + 2) = 3mx - 1$ (với ẩn x) là một *phương trình chứa tham số m* .

H4 Tìm tập nghiệm của phương trình $mx + 2 = 1 - m$ (với m là tham số) trong mỗi trường hợp: a) $m = 0$; b) $m \neq 0$.

Rõ ràng nghiệm và tập nghiệm của một phương trình chứa tham số phụ thuộc vào tham số đó. Khi giải phương trình chứa tham số, ta phải chỉ ra tập nghiệm của phương trình tùy theo các giá trị có thể của tham số. Để nhấn mạnh ý đó, khi giải phương trình chứa tham số, ta thường nói là **giải và biện luận phương trình**.

Câu hỏi và bài tập

1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$;

b) $3x - \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 6$;

c) $\frac{\sqrt{3-x}}{x-3} = x + \sqrt{x-3}$;

d) $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{-x}$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $x + \sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x-1}$;

b) $x + \sqrt{x-1} = 0,5 + \sqrt{x-1}$;

c) $\frac{x}{2\sqrt{x-5}} = \frac{3}{\sqrt{x-5}}$;

d) $\frac{x}{2\sqrt{x-5}} = \frac{2}{\sqrt{x-5}}$.

3. Giải các phương trình sau:

a) $x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$;

b) $x + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-3}{x-2}$;

c) $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$;

d) $(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0$.

4. Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế của phương trình:

a) $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x}$;

b) $\sqrt{x-1} = x-3$;

c) $2|x-1| = x+2$;

d) $|x-2| = 2x-1$.

Ta đã biết cách giải :

– Phương trình bậc nhất (ẩn x) là phương trình có dạng $ax + b = 0$ (a và b là hai số đã cho với $a \neq 0$) ;

– Phương trình bậc hai (ẩn x) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b và c là ba số đã cho với $a \neq 0$) ; $\Delta = b^2 - 4ac$ gọi là *biệt thức*, $\Delta' = b'^2 - ac$ (với $b = 2b'$) gọi là *biệt thức thu gọn* của phương trình bậc hai.

Trong bài này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải và biện luận các phương trình bậc nhất và bậc hai có chứa tham số.

1. Giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$

Kết quả giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$ được nêu trong bảng sau đây.

1) $a \neq 0$	: Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
2) $a = 0$ và $b \neq 0$	: Phương trình vô nghiệm.
3) $a = 0$ và $b = 0$	: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$m^2x + 2 = x + 2m. \quad (1)$$

Giải. Ta biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow m^2x - x = 2m - 2 \\ &\Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2(m - 1). \end{aligned} \quad (1a)$$

Xét các trường hợp sau đây.

1) Khi $m \neq \pm 1$ (tức là $m \neq 1$ và $m \neq -1$), ta có $m^2 - 1 \neq 0$ nên (1a) có nghiệm

$$x = \frac{2(m-1)}{m^2-1} = \frac{2}{m+1}.$$

Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

2) Khi $m = 1$, phương trình (1a) trở thành $0x = 0$; phương trình này nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) cũng nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3) Khi $m = -1$, phương trình (1a) trở thành $0x = -4$; phương trình này vô nghiệm nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Kết luận

$m \neq \pm 1$: (1) có nghiệm $x = \frac{2}{m+1}$ (tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{2}{m+1} \right\}$).

$m = -1$: (1) vô nghiệm (tập nghiệm là $S = \emptyset$).

$m = 1$: (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ (tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$). □

2. Giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$

Kết quả giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ được nêu trong bảng sau đây.

1) $a = 0$: Trở về giải và biện luận phương trình $bx + c = 0$.

2) $a \neq 0$:

• $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm (phân biệt)

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{và} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ;$$

• $\Delta = 0$: phương trình có một nghiệm (kép) $x = -\frac{b}{2a}$;

• $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

[H1] Trong trường hợp nào thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$:

a) Có một nghiệm duy nhất ?

b) Vô nghiệm ?

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0. \quad (2)$$

Giải. Với $m = 0$, phương trình (2) trở thành $4x - 3 = 0$; nó có nghiệm $x = \frac{3}{4}$.

Với $m \neq 0$, (2) là phương trình bậc hai với biệt thức thu gọn là

$$\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = 4 - m.$$

Do đó :

– Nếu $m > 4$ thì $\Delta' < 0$ nên (2) vô nghiệm ;

– Nếu $m = 4$ thì $\Delta' = 0$ nên (2) có một nghiệm $x = \frac{m-2}{m} = \frac{1}{2}$;

– Nếu $m < 4$ và $m \neq 0$ thì $\Delta' > 0$ nên (2) có hai nghiệm

$$x = \frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m} \quad \text{và} \quad x = \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m}.$$

Kết luận.

$m > 4$: (2) vô nghiệm ;

$m = 0$: (2) có nghiệm $x = \frac{3}{4}$;

$0 \neq m \leq 4$: (2) có hai nghiệm $x = \frac{m-2 \pm \sqrt{4-m}}{m}$

(hai nghiệm này trùng nhau và bằng $\frac{1}{2}$ khi $m = 4$).

H2 Giải và biện luận phương trình $(x-1)(x-mx+2)=0$ theo tham số m .

Ví dụ 3. Cho phương trình

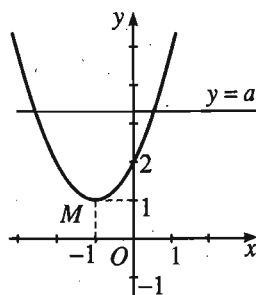
$$3x + 2 = -x^2 + x + a. \quad (3)$$

Bằng đồ thị, hãy biện luận số nghiệm của phương trình (3) tùy theo các giá trị của tham số a .

Giải. Trước hết, ta đưa phương trình (3) về dạng

$$x^2 + 2x + 2 = a. \quad (4)$$

Số nghiệm của phương trình (3) cũng là số nghiệm của phương trình (4) và bằng số giao điểm của parabol $(P) : y = x^2 + 2x + 2$ với đường thẳng $(d) : y = a$. Quan sát đồ thị (h.3.1), ta thấy đỉnh của parabol (P) là điểm $M(-1 ; 1)$, khi a thay đổi thì đường thẳng (d) cũng thay đổi nhưng luôn song song (hoặc trùng) với trục hoành. Từ đó, ta suy ra :



Hình 3.1.

– Với $a < 1$, phương trình (3) vô nghiệm (đường thẳng (d) và parabol (P) không có điểm chung) ;

– Với $a = 1$, phương trình (3) có một nghiệm (kép) (đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P)) ;

– Với $a > 1$, phương trình (3) có hai nghiệm (đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt). □

CHÚ Ý

Khi viết phương trình (3) dưới dạng $x^2 + 3x + 2 = x + a$, ta thấy kết quả trên còn cho biết số giao điểm của parabol $y = x^2 + 3x + 2$ với đường thẳng $y = x + a$.

3. Ứng dụng của định lí Vi-ét

- Ở lớp dưới, chúng ta đã học định lí Vi-ét đối với phương trình bậc hai.

Hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0$$

khi và chỉ khi chúng thoả mãn các hệ thức

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Định lí Vi-ét có nhiều ứng dụng quan trọng, chẳng hạn như :

1) *Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai ;*

2) *Phân tích đa thức thành nhân tử :*

Nếu đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì nó có thể phân tích thành nhân tử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (xem bài tập 9) ;

3) *Tìm hai số biết tổng và tích của chúng :*

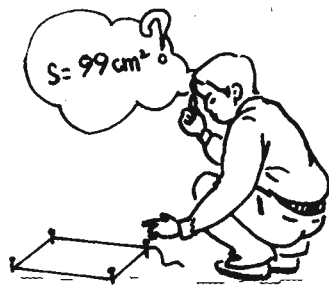
Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

H3 Có thể khoan một sợi dây dài 40 cm thành một hình chữ nhật có diện tích S cho trước trong mỗi trường hợp sau đây được hay không ?

a) $S = 99 \text{ cm}^2$; b) $S = 100 \text{ cm}^2$; c) $S = 101 \text{ cm}^2$.

• Sau đây, ta sẽ tìm hiểu một ứng dụng quan trọng khác của định lí Vi-ét là xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai.

Định lí Vi-ét cho phép ta nhận biết dấu các nghiệm của một phương trình bậc hai mà không cần tìm các nghiệm đó. Ta có nhận xét sau đây.



Nhận xét

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 \leq x_2$). Đặt $S = -\frac{b}{a}$ và $P = \frac{c}{a}$. Khi đó :

- Nếu $P < 0$ thì $x_1 < 0 < x_2$ (hai nghiệm trái dấu) ;
- Nếu $P > 0$ và $S > 0$ thì $0 < x_1 \leq x_2$ (hai nghiệm dương) ;
- Nếu $P > 0$ và $S < 0$ thì $x_1 \leq x_2 < 0$ (hai nghiệm âm).

Ví dụ 4. Phương trình $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ có $a = 1 - \sqrt{2} < 0$ và $c = \sqrt{2} > 0$ nên $P < 0$.

Vậy phương trình đó có hai nghiệm trái dấu. □

CHÚ Ý

Trong ví dụ 4, cả hai kết luận phương trình có hai nghiệm và hai nghiệm đó trái dấu đều được suy ra từ $P < 0$.

Trường hợp $P > 0$, ta phải tính Δ (hay Δ') để xem phương trình có nghiệm hay không rồi mới tính S để xác định dấu các nghiệm.

Ví dụ 5. Xét dấu các nghiệm của phương trình sau (nếu có)

$$(2 - \sqrt{3})x^2 + 2(1 - \sqrt{3})x + 1 = 0. \quad (*)$$

Giải. Ta có

$$a = 2 - \sqrt{3} > 0 \text{ và } c = 1 > 0 \Rightarrow P > 0;$$

$$\Delta' = (1 - \sqrt{3})^2 - (2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \Delta' > 0 \text{ (vậy } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt);}$$

$$a = 2 - \sqrt{3} > 0 \text{ và } -b' = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1 > 0 \Rightarrow S > 0.$$

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm dương. □

H4 Với mỗi phương trình cho trong a) và b) dưới đây, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định đã cho:

a) Phương trình $-0,5x^2 + 2,7x + 1,5 = 0$

(A) Có hai nghiệm trái dấu ;

(B) Có hai nghiệm dương ;

(C) Có hai nghiệm âm ;

(D) Vô nghiệm.

b) Phương trình $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

(A) Có hai nghiệm trái dấu ;

(B) Có hai nghiệm dương ;

(C) Có hai nghiệm âm ;

(D) Vô nghiệm.

• Việc xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai giúp ta xác định được số nghiệm của phương trình trùng phương.

Ta đã biết, đối với phương trình trùng phương

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad (4)$$

nếu đặt $y = x^2$ ($y \geq 0$) thì ta đi đến phương trình bậc hai đối với y

$$ay^2 + by + c = 0. \quad (5)$$

Do đó, muốn biết số nghiệm của phương trình (4), ta chỉ cần biết số nghiệm của phương trình (5) và dấu của chúng.

H5 Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) Nếu phương trình (4) có nghiệm thì phương trình (5) có nghiệm ;

b) Nếu phương trình (5) có nghiệm thì phương trình (4) có nghiệm.

Ví dụ 6. Cho phương trình

$$\sqrt{2}x^4 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})x^2 - \sqrt{12} = 0. \quad (6)$$

Không giải phương trình, hãy xét xem phương trình (6) có bao nhiêu nghiệm ?

Giải. Đặt $y = x^2$ ($y \geq 0$), ta đi đến phương trình

$$\sqrt{2}y^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})y - \sqrt{12} = 0. \quad (7)$$

Phương trình (7) có $a = \sqrt{2} > 0$ và $c = -\sqrt{12} < 0$ nên có hai nghiệm trái dấu. Vậy phương trình (7) có một nghiệm dương duy nhất, suy ra phương trình (6) có hai nghiệm đối nhau. □

Câu hỏi và bài tập

5. Xem các bài giải sau đây và cho biết mỗi bài giải đó đúng hay sai. Vì sao ?

a) $\frac{(x-2)(x-1)}{\sqrt{x}-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x}-1} (x-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x}-1} = 0$ hoặc $x-1=0$.

Ta có $\frac{x-2}{\sqrt{x}-1} = 0 \Leftrightarrow x=2$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1; 2\}$.

b) $\sqrt{x^2-2} = 1-x \Leftrightarrow x^2-2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2-2 = 1-2x+x^2$
 $\Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

6. Giải và biện luận các phương trình :

a) $(m^2+2)x-2m=x-3$;

b) $m(x-m)=x+m-2$;

c) $m(x-m+3)=m(x-2)+6$;

d) $m^2(x-1)+m=x(3m-2)$.

7. Dựa vào hình 3.1 (trang 74), tìm các giá trị của a để phương trình (3) cho trong ví dụ 3 có nghiệm dương. Khi đó, hãy tìm nghiệm dương của (3).

8. Giải và biện luận các phương trình :

a) $(m-1)x^2+3x-1=0$;

b) $x^2-4x+m-3=0$.

9. a) Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Chứng minh rằng ta có thể phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

b) Áp dụng. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

$f(x) = -2x^2 - 7x + 4$ và $g(x) = (\sqrt{2}+1)x^2 - 2(\sqrt{2}+1)x + 2$.

10. Không giải phương trình $x^2-2x-15=0$, hãy tính :

a) Tổng các bình phương hai nghiệm của nó ;

b) Tổng các lập phương hai nghiệm của nó ;

c) Tổng các lũy thừa bậc bốn hai nghiệm của nó.

Hướng dẫn. $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2$.

11. Trong các khẳng định sau đây, có duy nhất một khẳng định đúng. Hãy chọn khẳng định đúng đó.

Phương trình $(\sqrt{3}-1)x^4 + x^2 + 2(1-\sqrt{3}) = 0$:

- (A) Vô nghiệm ;
- (B) Có hai nghiệm $x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1+\sqrt{3})(\sqrt{33-16\sqrt{3}}-1)}$;
- (C) Có bốn nghiệm $x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1+\sqrt{3})(\sqrt{33-16\sqrt{3}}-1)}$ và $x = \pm \sqrt{3}$;
- (D) Có hai nghiệm $x = \pm \sqrt{3}$.

Bài đọc thêm

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI
 BẰNG MÁY TÍNH CASIO fx - 500MS

Máy tính CASIO fx - 500MS có thể giúp ta tìm nghiệm đúng hoặc nghiệm gần đúng (với chín chữ số thập phân) của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số bằng số.

Để giải phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, trước hết ta ấn các phím **MODE** **MODE** **1** **▷** **2** để vào chương trình giải. Sau đó, ta nhập từng hệ số bằng cách ấn phím tương ứng với hệ số đó và phím **=**.

• Để giải phương trình $2x^2 - 5x - 3 = 0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

$$\text{MODE} \text{ MODE } 1 \blacktriangleright 2 \text{ = } (-) 5 \text{ = } (-) 3 \text{ = }$$

Khi đó, kết quả là $x_1 = 3$. Ấn tiếp phím **=**, ta được $x_2 = -0,5$.

• Để giải phương trình $9x^2 - 12x + 4 = 0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

$$\text{MODE} \text{ MODE } 1 \blacktriangleright 2 \text{ 9 = } (-) 12 \text{ = } 4 \text{ = }$$

Khi đó, kết quả là $x \approx 0,666\,666\,666$. Ấn tiếp hai phím **SHIFT** **d/c**, ta được $x = \frac{2}{3}$.

Đó là nghiệm kép của phương trình.

- Để giải phương trình $5x^2 + 4x + 1 = 0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

$$\boxed{\text{MODE}} \boxed{\text{MODE}} \boxed{1} \boxed{\triangleright} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{=} \boxed{4} \boxed{=} \boxed{1} \boxed{=}$$

Khi đó, trên màn hình xuất hiện giá trị $x_1 = -0.4$ cùng với kí hiệu $R \Leftrightarrow I$ ở góc trên bên phải. Điều đó có nghĩa là phương trình đã cho không có nghiệm thực.

- Để giải phương trình $x^2 + 5,3x - 1,46 = 0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

$$\boxed{\text{MODE}} \boxed{\text{MODE}} \boxed{1} \boxed{\triangleright} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{=} \boxed{5,3} \boxed{=} \boxed{(-)} \boxed{1,46} \boxed{=}$$

Khi đó, kết quả là $x_1 \approx 0,262\,473\,175$. Ấn tiếp phím $\boxed{=}$, ta được $x_2 \approx -5,562\,473\,176$. Đó là các nghiệm gần đúng của phương trình.

Luyện tập

12. Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số) :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2(m+1)x - m(x-1) = 2m+3 ; & \text{b) } m^2(x-1) + 3mx = (m^2+3)x - 1 ; \\ \text{c) } 3(m+1)x + 4 = 2x + 5(m+1) ; & \text{d) } m^2x + 6 = 4x + 3m. \end{array}$$

13. a) Tìm các giá trị của p để phương trình $(p+1)x - (x+2) = 0$ vô nghiệm.

b) Tìm các giá trị của p để phương trình $p^2x - p = 4x - 2$ có vô số nghiệm.

14. Tính nghiệm gần đúng của các phương trình sau (chính xác đến hàng phần trăm) :

$$\text{a) } x^2 - 5,60x + 6,41 = 0 ; \quad \text{b) } \sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{3}x - 2\sqrt{2} = 0.$$

15. Tìm độ dài các cạnh của một tam giác vuông, biết rằng cạnh thứ nhất dài hơn cạnh thứ hai là 2 m, cạnh thứ hai dài hơn cạnh thứ ba là 23 m.

16. Giải và biện luận các phương trình sau (m và k là tham số) :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (m-1)x^2 + 7x - 12 = 0 ; & \text{b) } mx^2 - 2(m+3)x + m+1 = 0 ; \\ \text{c) } [(k+1)x - 1](x-1) = 0 ; & \text{d) } (mx-2)(2mx-x+1) = 0. \end{array}$$

17. Biện luận số giao điểm của hai parabol $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ theo tham số m .

18. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 40$.

19. Giải phương trình $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$, biết rằng nó có hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ bằng 17.

20. Không giải phương trình, hãy xét xem mỗi phương trình trùng phương sau đây có bao nhiêu nghiệm.

a) $x^4 + 8x^2 + 12 = 0$;

b) $-1,5x^4 - 2,6x^2 + 1 = 0$;

c) $(1 - \sqrt{2})x^4 + 2x^2 + 1 - \sqrt{2} = 0$;

d) $-x^4 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 = 0$.

21. Cho phương trình $kx^2 - 2(k+1)x + k+1 = 0$.

a) Tìm các giá trị của k để phương trình trên có ít nhất một nghiệm dương.

b) Tìm các giá trị của k để phương trình trên có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1. *Hướng dẫn.* Đặt $x = y + 1$.

§ 3 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

1. Phương trình dạng $|ax + b| = |cx + d|$

a) *Cách giải 1*

Chúng ta đã biết $|X| = |Y| \Leftrightarrow X = \pm Y$ (với X và Y là hai số tùy ý). Tương tự, ta có

$$|ax + b| = |cx + d| \Leftrightarrow ax + b = \pm (cx + d).$$

Như vậy, muốn giải phương trình $|ax + b| = |cx + d|$, ta chỉ việc giải hai phương trình $ax + b = cx + d$ và $ax + b = -(cx + d)$ rồi lấy tất cả các nghiệm thu được.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình

$$|mx - 2| = |x + m|. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Để giải phương trình (1), ta phải giải hai phương trình :

$$mx - 2 = x + m; \quad (1a)$$

$$mx - 2 = -(x + m). \quad (1b)$$

Ta có $(1a) \Leftrightarrow (m-1)x = m+2$.

Do đó, (1a) vô nghiệm khi $m = 1$ và có nghiệm $x = \frac{m+2}{m-1}$ khi $m \neq 1$.

Ta có (1b) $\Leftrightarrow (m+1)x = -m+2$.

Do đó, (1b) vô nghiệm khi $m = -1$ và có nghiệm $x = \frac{-m+2}{m+1}$ khi $m \neq -1$.

Để kết luận về nghiệm của phương trình đã cho, ta lập bảng sau đây.

	Nghiệm của (1a)	Nghiệm của (1b)	Nghiệm của (1)
$m = 1$	vô nghiệm	$\frac{-m+2}{m+1} = \frac{1}{2}$	
$m = -1$	$\frac{m+2}{m-1} = -\frac{1}{2}$	vô nghiệm	
$m \neq \pm 1$	$\frac{m+2}{m-1}$	$\frac{-m+2}{m+1}$	

H1 Điền vào cột cuối trong bảng trên rồi phát biểu kết luận về nghiệm của phương trình (1).

b) Cách giải 2

Do hai vế của phương trình $|ax+b| = |cx+d|$ luôn không âm nên khi bình phương hai vế của nó, ta được phương trình tương đương. Như vậy, có thể giải phương trình nêu ở ví dụ 1 như sau

$$(1) \Leftrightarrow (mx-2)^2 = (x+m)^2 \Leftrightarrow (m^2-1)x^2 - 6mx + 4 - m^2 = 0.$$

H2 Giải tiếp phương trình trên bằng cách xét các trường hợp $m = -1$, $m = 1$ và $m \neq \pm 1$ rồi so sánh với kết quả thu được từ cách 1.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta phải chú ý đến điều kiện xác định của phương trình.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{mx+1}{x-1} = 2. \quad (2)$$

Giải. Điều kiện của phương trình là $x - 1 \neq 0$, tức là $x \neq 1$. Với điều kiện đó, ta có

$$\begin{aligned}(2) \quad & \Leftrightarrow mx + 1 = 2(x - 1) \\ & \Leftrightarrow (m - 2)x = -3.\end{aligned}\tag{2a}$$

1) Với $m \neq 2$, ta có $m - 2 \neq 0$. Phương trình (2a) có nghiệm $x = \frac{-3}{m-2}$. Giá trị này là nghiệm của (2) nếu nó thoả mãn điều kiện $x \neq 1$. Ta có

$$\frac{-3}{m-2} \neq 1 \Leftrightarrow -3 \neq m-2 \Leftrightarrow m \neq -1.$$

Do đó :

Khi $m \neq 2$ và $m \neq -1$ thì $x = \frac{-3}{m-2}$ là nghiệm của (2) ;

Khi $m = -1$ thì giá trị $x = \frac{-3}{m-2}$ bị loại. Phương trình (2) vô nghiệm.

2) Với $m = 2$, phương trình (2a) trở thành $0x = -3$. Phương trình này vô nghiệm nên phương trình (2) vô nghiệm.

Kết luận

Khi $m \neq -1$ và $m \neq 2$, phương trình (2) có nghiệm $x = \frac{-3}{m-2}$.

Khi $m = -1$ hoặc $m = 2$, phương trình (2) vô nghiệm. □

Ví dụ 3. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{x^2 - 2(m+1)x + 6m - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}.\tag{3}$$

Giải. Điều kiện của phương trình là $x - 2 > 0$, hay $x > 2$. Với điều kiện đó, ta có

$$\begin{aligned}(3) \Leftrightarrow & \frac{x^2 - 2(m+1)x + 6m - 2}{\sqrt{x-2}} = \frac{x-2}{\sqrt{x-2}} \\ \Leftrightarrow & x^2 - (2m+3)x + 6m = 0.\end{aligned}\tag{3a}$$

Phương trình (3a) luôn có hai nghiệm là $x = 3$ và $x = 2m$.

– Giá trị $x = 3$ thoả mãn điều kiện $x > 2$ nên nó là nghiệm của phương trình (3) với mọi m .

– Để giá trị $x = 2m$ là nghiệm của (3), nó phải thoả mãn điều kiện $x > 2$. Ta có $2m > 2 \Leftrightarrow m > 1$. Điều đó có nghĩa là :

– Nếu $m > 1$ thì $x = 2m$ là nghiệm của (3) ;

– Nếu $m \leq 1$ thì $x = 2m$ không thoả mãn điều kiện của ẩn và bị loại.

Tổng hợp các kết quả trên, ta đi đến kết luận :

Khi $m > 1$, phương trình (3) có hai nghiệm $x = 3$ và $x = 2m$;

(hai nghiệm này trùng nhau khi $m = \frac{3}{2}$).

Khi $m \leq 1$, phương trình (3) có một nghiệm duy nhất $x = 3$. □

H3 Hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án cho sau đây.

Với giá trị nào của tham số a thì phương trình $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x - a} = 0$ có hai nghiệm phân biệt ?

(A) $a < -3$;

(B) $-3 \leq a < -1$;

(C) $a \geq -1$;

(D) Không có giá trị nào của a .

Câu hỏi và bài tập

22. Giải các phương trình :

a) $\frac{2(x^2 - 1)}{2x + 1} = 2 - \frac{x + 2}{2x + 1}$;

b) $\frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{5x - 3}{3x + 5}$.

23. Giải phương trình $\frac{m - 3}{x - 4} = m^2 - m - 6$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $m = 3$;

b) $m \neq 3$.

24. Giải và biện luận các phương trình (a và m là những tham số) :

a) $|2ax + 3| = 5$;

b) $\frac{2mx - m^2 + m - 2}{x^2 - 1} = 1$.

Luyện tập

25. Giải và biện luận các phương trình (m , a và k là những tham số) :

a) $|mx - x + 1| = |x + 2|$;

b) $\frac{a}{x-2} + \frac{1}{x-2a} = 1$;

c) $\frac{mx - m - 3}{x + 1} = 1$;

d) $\frac{3x + k}{x - 3} = \frac{x - k}{x + 3}$.

26. Giải và biện luận các phương trình sau (m và a là những tham số):

a) $(2x + m - 4)(2mx - x + m) = 0$;

b) $|mx + 2x - 1| = |x|$;

c) $(mx + 1)\sqrt{x - 1} = 0$;

d) $\frac{2a - 1}{x - 2} = a - 2$;

e) $\frac{(m + 1)x + m - 2}{x + 3} = m$;

f) $\left| \frac{ax + 1}{x - 1} \right| = a$.

27. Bằng cách đặt ẩn phụ, giải các phương trình sau :

a) $4x^2 - 12x - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 15 = 0$;

b) $x^2 + 4x - 3|x + 2| + 4 = 0$;

c) $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left| 2x - \frac{1}{x} \right| - 6 = 0$.

28. Tìm các giá trị của tham số m sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$|mx - 2| = |x + 4|.$$

29. Với giá trị nào của a thì phương trình sau vô nghiệm ?

$$\frac{x + 1}{x - a + 1} = \frac{x}{x + a + 2}.$$



VÀI NÉT VỀ LỊCH SỬ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ



N. Hen-rich A-ben
(N. Henrik Abel, 1802 – 1829)



E. Ga-loa
(E. Galois, 1811 – 1832)

Lí thuyết phương trình đại số có lịch sử rất lâu đời. Từ 2000 năm trước Công nguyên, người Ai Cập đã biết giải các phương trình bậc nhất, người Ba-bi-lon đã biết giải các phương trình bậc hai và tìm được những bảng đặc biệt để giải phương trình bậc ba. Tất nhiên, các hệ số của phương trình được xét đều là những số đã cho nhưng cách giải của người xưa chứng tỏ rằng họ cũng biết đến các quy tắc tổng quát. Trong nền toán học cổ của người Hi Lạp, lí thuyết phương trình đại số được phát triển trên cơ sở hình học, liên quan đến việc phát minh ra tính vô ước của một số đoạn thẳng. Vì lúc đó người Hi Lạp chỉ biết các số nguyên dương và phân số dương nên đối với họ, phương trình $x^2 = 2$ vô nghiệm. Tuy nhiên, phương trình đó lại giải được trong phạm vi các đoạn thẳng vì nghiệm của nó là đường chéo của hình vuông có cạnh bằng 1 (đơn vị dài).

Đến thế kỉ VII, lí thuyết phương trình bậc nhất và bậc hai được các nhà toán học Ấn Độ phát triển. Phương pháp giải phương trình bậc hai bằng cách bổ sung thành bình phương của một nhị thức là một sáng kiến của người Ấn Độ. Người Ấn Độ cũng sử dụng rộng rãi các số âm. Họ cũng đưa vào các chữ số mà nay ta gọi là chữ số Ả Rập với cách viết theo vị trí của các chữ số.

Đến thế kỉ XVI, các nhà toán học Ita-li-a là Tác-ta-gli-a (N. Tartaglia, 1500 – 1557), Các-đa-nô (G. Cardano, 1501 – 1576) và Fe-ra-ri (L. Ferrari, 1522 – 1565) đã giải được các phương trình bậc ba và bậc bốn, tức là tìm được công thức tính nghiệm của phương trình qua các hệ số của nó.

Đến đầu thế kỉ XIX, nhà toán học A-ben, người Na Uy mới chứng minh được rằng không thể giải phương trình tổng quát bậc lớn hơn bốn bằng các phương tiện thuần túy đại số. Sau cùng, Ga-loa (nhà toán học Pháp) đã giải quyết được trọn vẹn vấn đề giải các phương trình đại số.

Nhắc lại rằng *phương trình bậc nhất hai ẩn* (x và y) là phương trình dạng

$$ax + by = c \quad (a, b \text{ và } c \text{ là những số đã cho, } a^2 + b^2 \neq 0). \quad (1)$$

Ta đã biết phương trình (1) có vô số nghiệm ; trong mặt phẳng toạ độ Oxy , tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một đường thẳng gọi là đường thẳng $ax + by = c$. Chúng ta cũng đã làm quen với *hệ phương trình bậc nhất hai ẩn* và cách giải chúng bằng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế.

Trong bài này, chúng ta sẽ nghiên cứu kĩ hơn về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Cho hai phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ (tức là $a^2 + b^2 \neq 0$ và $a'^2 + b'^2 \neq 0$). Khi đó, ta có *hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn* sau :

$$(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình trong hệ được gọi là một **nghiệm** của hệ.

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Các khái niệm *hệ phương trình tương đương*, *hệ phương trình hệ quả* cũng tương tự như đối với phương trình.

Đối với hệ phương trình, chúng ta cũng có những phép biến đổi tương đương, tức là phép biến đổi một hệ phương trình thành một hệ phương trình khác tương đương với nó. Biến đổi hệ phương trình bằng cách áp dụng quy tắc cộng đại số hoặc quy tắc thế mà ta đã học chính là những phép biến đổi tương đương các hệ phương trình.

H1 Giải các hệ phương trình sau :

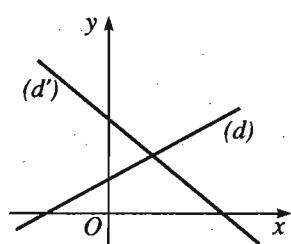
a) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} -2x + 6y = 2 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$;

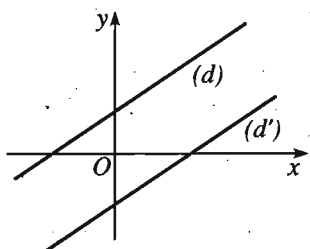
c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

• Giả sử (d) là đường thẳng $ax + by = c$ và (d') là đường thẳng $a'x + b'y = c'$. Khi đó (h.3.2) :

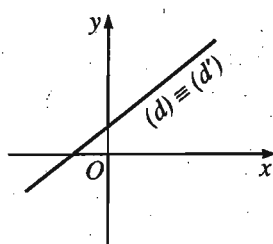
- 1) Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (d)$ và (d') cắt nhau ;
- 2) Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d)$ và (d') song song với nhau ;
- 3) Hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d)$ và (d') trùng nhau.



a)



b)



c)

Hình 3.2

2. Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

a) Xây dựng công thức

Xét hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$(I) \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

– Nhân hai vế của phương trình (1) với b' , hai vế của phương trình (2) với $-b$ rồi cộng các vế tương ứng, ta được

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b. \quad (3)$$

– Nhân hai vế của phương trình (1) với $-a'$, hai vế của phương trình (2) với a rồi cộng các vế tương ứng, ta được

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c. \quad (4)$$

– Trong (3) và (4), ta đặt $D = ab' - a'b$, $D_x = cb' - c'b$ và $D_y = ac' - a'c$.

Khi đó, ta có hệ phương trình *hệ quả*

$$(II) \begin{cases} D.x = D_x \\ D.y = D_y. \end{cases}$$

Đối với hệ (II), ta xét các trường hợp sau đây.

1) $D \neq 0$, lúc này hệ (II) có một nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right). \quad (5)$$

Ta thấy đây cũng là nghiệm của hệ phương trình (I).

[H2] Hãy thử lại rằng (5) là một nghiệm của hệ (I) để khẳng định kết luận trên.

2) $D = 0$, lúc này hệ (II) trở thành

$$\begin{cases} 0x = D_x \\ 0y = D_y. \end{cases}$$

– Nếu $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ (II) vô nghiệm nên hệ (I) vô nghiệm.

– Nếu $D_x = D_y = 0$ thì hệ (II) có vô số nghiệm. Tuy nhiên, muốn tìm nghiệm của hệ (I), ta phải trở về hệ (I) (do (II) chỉ là hệ phương trình hệ quả).

Theo giả thiết, hai số a và b không cùng bằng 0 nên ta có thể giả sử $a \neq 0$ (trường hợp $b \neq 0$ cũng giải tương tự). Ta có

$$D = ab' - a'b = 0 \Rightarrow b' = \frac{a'}{a}b;$$

$$D_y = ac' - a'c = 0 \Rightarrow c' = \frac{a'}{a}c.$$

Bởi vậy, hệ (I) có thể viết thành

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \frac{a'}{a}(ax + by) = \frac{a'}{a}c. \end{cases}$$

Do đó, tập nghiệm của hệ (I) trùng với tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$ (ta đã biết cách giải phương trình này).

Kết quả trên có thể tóm tắt như sau :

$$\begin{cases} ax + by = c & (a^2 + b^2 \neq 0) \\ a'x + b'y = c' & (a'^2 + b'^2 \neq 0) \end{cases}$$

1) $D \neq 0$: Hệ có một nghiệm duy nhất $(x; y)$, trong đó

$$x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}.$$

2) $D = 0$:

- $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm.
- $D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

b) Thực hành giải và biện luận

Trong thực hành giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, định thức là một công cụ đem lại nhiều thuận tiện.

*Biểu thức $pq' - p'q$, với p, q, p', q' là những số, được gọi là một **định thức cấp hai** và kí hiệu là*

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} \text{ (chú ý cách tính } \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} = pq' - p'q).$$

Như vậy, các biểu thức D, D_x và D_y mà chúng ta gặp khi giải hệ (I) đều là những định thức cấp hai :

$$D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, D_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}, D_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Ta thấy trong mỗi định thức trên đều có hai *hàng* và hai *cột*.

H3 a) *Tim từ thích hợp để điền vào chỗ trống :*

Trong định thức D , cột thứ nhất gồm các hệ số của ... ; cột thứ hai gồm các hệ số của ...

b) *Phát biểu các câu tương tự đối với D_x và D_y .*

Ta có thể sử dụng định thức để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ 4x + 3y = 2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) = 23 \neq 0;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -9 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-9) \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = -23; \text{ suy ra } x = \frac{D_x}{D} = -1;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 4 \cdot (-9) = 46; \text{ suy ra } y = \frac{D_y}{D} = 2.$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $(x; y) = (-1; 2)$. □

H4 *Bằng định thức, giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 7x + 4y = 2. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2. \end{cases}$$

Giải. Trước hết, ta tính các định thức

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1);$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m + 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m - 1)(m + 2);$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m + 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$$

Ta phải xét các trường hợp sau :

1) $D \neq 0$, tức là $m \neq \pm 1$. Ta có

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(m - 1)(m + 2)}{(m - 1)(m + 1)} = \frac{m + 2}{m + 1};$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{m - 1}{(m - 1)(m + 1)} = \frac{1}{m + 1}.$$

Hệ có một nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{m + 2}{m + 1}; \frac{1}{m + 1} \right)$.

2) $D = 0$, tức là $m = 1$ hoặc $m = -1$.

– Nếu $m = 1$ thì $D = D_x = D_y = 0$ và hệ trở thành $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2. \end{cases}$ Ta có

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$$

– Nếu $m = -1$ thì $D = 0$, nhưng $D_x \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Kết luận :

Với $m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y) = \left(\frac{m+2}{m+1} ; \frac{1}{m+1} \right)$;

Với $m = -1$, hệ vô nghiệm ;

Với $m = 1$, hệ có vô số nghiệm $(x ; y)$ tính theo công thức

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$$

□

3. Ví dụ về giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

trong đó các hệ số của ba ẩn x, y, z trong mỗi phương trình của hệ không đồng thời bằng 0.

Giải hệ phương trình trên là tìm tất cả các bộ ba số $(x ; y ; z)$ đồng thời nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình (tức là tìm tất cả các nghiệm chung của các phương trình trong hệ)

$$(III) \begin{cases} x + y + z = 2 & (6) \\ x + 2y + 3z = 1 & (7) \\ 2x + y + 3z = -1. & (8) \end{cases}$$

Cách giải. Từ (6) ta có

$$z = 2 - x - y. \quad (9)$$

Thay thế z trong (9) vào (7) và (8), ta được

$$x + 2y + 3(2 - x - y) = 1 \Leftrightarrow 2x + y = 5 ;$$

$$2x + y + 3(2 - x - y) = -1 \Leftrightarrow x + 2y = 7.$$

Ta thu được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc

$$(IV) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

□

H5 Giải tiếp hệ (IV) để tìm x và y rồi thế vào (9) để tìm z và kết luận về nghiệm của hệ (III).

Nhận xét. Qua ví dụ trên, ta thấy : Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn là *khử bớt ẩn* để quy về giải các phương trình hay hệ phương trình có số ẩn ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số hay phương pháp thế giống như đối với hệ phương trình hai ẩn.

H6 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 13 \\ 4x - 2y - 3z = 3 \\ -x + 2y + 4z = -1. \end{cases}$$

Câu hỏi và bài tập

30. Cho một hệ hai phương trình hai ẩn. Biết rằng phương trình thứ hai trong hệ nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

- (A) Hệ đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn ;
- (B) Hệ đã cho vô nghiệm ;
- (C) Tập nghiệm của hệ đã cho trùng với tập nghiệm của phương trình thứ nhất ;
- (D) Cả ba khẳng định trên đều sai.

31. Bằng định thức, giải các hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 ; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0. \end{cases}$$

32. Giải các hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y-1} = 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y-1} = 4 ; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{3(x+y)}{x-y} = -7 \\ \frac{5x-y}{y-x} = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

33. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a)
$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1; \end{cases}$$

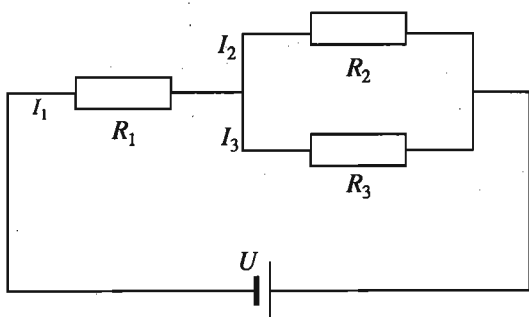
b)
$$\begin{cases} 2ax + 3y = 5 \\ (a + 1)x + y = 0. \end{cases}$$

34. Giải hệ phương trình sau (có thể dùng máy tính bỏ túi để kiểm tra kết quả – Xem bài đọc thêm trang 94) :

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24. \end{cases}$$

35. Hình 3.3 cho một mạch điện kín.

Biết $R_1 = 0,25 \Omega$, $R_2 = 0,36 \Omega$, $R_3 = 0,45 \Omega$ và $U = 0,6 \text{ V}$. Gọi I_1 là cường độ dòng điện của mạch chính, I_2 và I_3 là cường độ dòng điện của hai mạch rẽ. Tính I_1 , I_2 và I_3 (chính xác đến hàng phần trăm).



Hình 3.3

Hướng dẫn. I_1 , I_2 và I_3 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 = U \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0. \end{cases}$$

Bài đọc thêm

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BẰNG MÁY TÍNH CASIO fx - 500MS

Máy tính CASIO fx - 500MS có thể giúp ta tìm nghiệm đúng hoặc nghiệm gần đúng (với chín chữ số thập phân) của hệ phương trình bậc nhất với các hệ số bằng số.

1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Để giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

ta phải vào chương trình tương ứng bằng cách ấn liên tiếp các phím **[MODE]** **[MODE]** **[1]** **[2]**. Sau đó, nhập từng hệ số $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ bằng cách ấn phím tương ứng với mỗi hệ số đó và phím **[=]**.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - 4y = -10. \end{cases}$$

Ta ấn lần lượt các phím sau :

[MODE] **[MODE]** **[1]** **[2]** **3** **[=]** **1** **[=]** **11** **[=]** **5** **[=]** **(-)** **4** **[=]** **(-)** **10** **[=]**

Khi đó, trên màn hình xuất hiện $x = 2$. Ấn tiếp phím **[=]**, trên màn hình xuất hiện $y = 5$. Như vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (2; 5)$. □

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + 4y = 8. \end{cases}$$

Ta ấn lần lượt các phím sau :

[MODE] **[MODE]** **[1]** **[2]** **2** **[=]** **(-)** **5** **[=]** **3** **[=]** **3** **[=]** **4** **[=]** **8** **[=]**

Khi đó, trên màn hình xuất hiện $x = 2.260\,869\,565$. Để tìm giá trị của x dưới dạng phân số, ta ấn tiếp hai phím **[SHIFT]** **[d/c]**, ta được $x = \frac{52}{23}$. Ấn tiếp phím **[=]**, trên màn hình xuất hiện $y = 0.304\,347\,826$. Khi ấn tiếp hai phím **[SHIFT]** **[d/c]**, ta được $y = \frac{7}{23}$.

Như vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = \left(\frac{52}{23}; \frac{7}{23}\right)$ và nghiệm gần đúng với chín chữ số thập phân của hệ phương trình đó là

$$\begin{cases} x \approx 2,260\,869\,565 \\ y \approx 0,304\,347\,826. \end{cases}$$
□

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + 2\sqrt{3}y = 7 \\ -x + 5,43y = 15. \end{cases}$$

Ta ấn lần lượt các phím sau :

[MODE] **[MODE]** **[1]** **[2]** **5** **[=]** **2** **[√]** **3** **[=]** **7** **[=]** **(-)** **1** **[=]** **5,43** **[=]** **15** **[=]**

Khi đó, trên màn hình xuất hiện $x = -0.455\,722\,15$. Ấn tiếp phím **[=]**, trên màn hình xuất hiện $y = 2.678\,504\,208$. Như vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất và nghiệm gần đúng với chín chữ số thập phân của hệ phương trình đó là

$$\begin{cases} x \approx -0,455\,722\,15 \\ y \approx 2,678\,504\,208. \end{cases}$$
□

Chú ý rằng hệ phương trình trên không có nghiệm hữu tỉ. Do đó, sau khi có giá trị gần đúng $x \approx -0,455\,722\,15$ (hoặc $y \approx 2,678\,504\,208$), nếu ta ấn tiếp hai phím **[SHIFT]** **[d/c]** thì trên màn hình vẫn chỉ có giá trị gần đúng đó mà thôi.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + 3y = 8 \\ -2x - \frac{3}{2}y = 5. \end{cases}$$

Ta ấn lần lượt các phím sau :

[MODE] **[MODE]** **[1]** **[2]** **[4]** **[=]** **[3]** **[=]** **[8]** **[=]** **[(-)]** **[2]** **[=]** **[(-)]** **[3]** **[a^{b/c}]** **[2]** **[=]** **[5]** **[=]**

Khi đó, trên màn hình xuất hiện **Math ERROR**. Điều đó có nghĩa là hệ phương trình vô nghiệm hoặc vô định. □

Để xoá **Math ERROR**, ta ấn phím **[AC]**.

2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Để giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

ta phải vào chương trình tương ứng bằng cách ấn liên tiếp các phím **[MODE]** **[MODE]** **[1]** **[3]**. Sau đó, việc nhập từng hệ số $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3$ cũng giống như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hãy giải hệ phương trình sau và đối chiếu kết quả thu được với đáp số :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 7 \\ 3x + 4y - 8z = 9 \\ -x + 2y - 4z = 3. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số : } (x; y; z) = \left(\frac{3}{5}; -\frac{17}{7}; -\frac{74}{35} \right).$$
□

Luyện tập

36. Cho một hệ hai phương trình hai ẩn. Biết rằng phương trình thứ hai trong hệ vô nghiệm. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

- (A) Hệ đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn ;
- (B) Hệ đã cho vô nghiệm ;
- (C) Tập nghiệm của hệ đã cho trùng với tập nghiệm của phương trình thứ nhất ;
- (D) Cả ba khẳng định trên đều sai.

37. Tìm nghiệm gần đúng của các hệ phương trình sau (chính xác đến hàng phần trăm, có thể dùng máy tính bỏ túi) :

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + (\sqrt{3} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{3} + 1)x + 3y = 5. \end{cases}$$

38. Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi $2p$ (mét). Nếu mở rộng miếng đất đó bằng cách tăng một cạnh thêm 3 m và cạnh kia thêm 2 m thì diện tích miếng đất tăng thêm 246 m^2 . Tính các kích thước của miếng đất đó (biện luận theo p).

39. Giải và biện luận các hệ phương trình :

$$\text{a) } \begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} mx + y = 4 - m \\ 2x + (m - 1)y = m. \end{cases}$$

40. Với giá trị nào của a thì mỗi hệ phương trình sau có nghiệm ?

$$\text{a) } \begin{cases} (a + 1)x - y = a + 1 \\ x + (a - 1)y = 2; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (a + 2)x + 3y = 3a + 9 \\ x + (a + 4)y = 2. \end{cases}$$

41. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a; b)$ sao cho hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ 6x + by = 4. \end{cases}$$

42. Cho hai đường thẳng $(d_1) : x + my = 3$ và $(d_2) : mx + 4y = 6$. Với giá trị nào của m thì :

a) Hai đường thẳng cắt nhau ?

b) Hai đường thẳng song song với nhau ?

c) Hai đường thẳng trùng nhau ?

43. Giải hệ phương trình (có thể dùng máy tính bỏ túi để kiểm tra kết quả)

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 3. \end{cases}$$

44. Bài toán máy bơm nước

Một gia đình muốn mua một chiếc máy bơm nước. Có hai loại với cùng lưu lượng nước bơm được trong một giờ ; loại thứ nhất giá 1,5 triệu đồng, loại thứ hai giá 2 triệu đồng. Tuy nhiên, nếu dùng máy bơm loại thứ nhất thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1200 đồng, trong khi dùng máy bơm loại thứ hai thì chỉ phải trả 1000 đồng cho mỗi giờ bơm.

Kí hiệu $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là số tiền (tính bằng nghìn đồng) phải trả khi sử dụng máy bơm loại thứ nhất và loại thứ hai trong x giờ (bao gồm tiền điện và tiền mua máy bơm).

a) Hãy biểu diễn $f(x)$ và $g(x)$ dưới dạng các biểu thức của x .

b) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

c) Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị ấy. Hãy phân tích ý nghĩa kinh tế của giao điểm đó.

§ 5 MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

Để giải một hệ phương trình bậc hai với hai ẩn, ta cũng thường dùng các phương pháp quen thuộc như phương pháp thế, phương pháp cộng đại số và phương pháp đặt ẩn phụ. Tất nhiên, việc chọn phương pháp nào phụ thuộc vào các phương trình cụ thể. Sau đây là một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$(I) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5. \end{cases}$$

Cách giải. Dùng phương pháp thế, tính x theo y từ phương trình thứ nhất rồi thế vào phương trình thứ hai, ta được

$$(Ia) \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 10y^2 - 30y + 20 = 0. \end{cases}$$

[H1] Giải tiếp hệ (Ia) rồi suy ra nghiệm của hệ (I).

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$(II) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ xy + x + y = 2. \end{cases}$$

Cách giải. Ta có nhận xét rằng vế trái của mỗi phương trình trong hệ đã cho là một biểu thức đối xứng đối với x và y (nghĩa là : Khi thay thế x bởi y và y bởi x thì biểu thức không thay đổi). Trong trường hợp này, ta dùng cách đặt ẩn phụ

$$S = x + y \text{ và } P = xy.$$

$$\text{Khi đó, } x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = S^2 - P.$$

Do đó, từ hệ (II), ta có hệ phương trình (ẩn là S và P)

$$\begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2. \end{cases}$$

$$\text{Để thấy hệ này có hai nghiệm là } \begin{cases} S = -3 \\ P = 5 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} S = 2 \\ P = 0. \end{cases}$$

Do đó

$$(II) \Leftrightarrow (IIa) \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 5 \end{cases} \text{ hoặc } (IIb) \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0. \end{cases}$$

H2 Giải hai hệ phương trình (IIa) và (IIb) rồi kết luận về nghiệm của (II).

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$(III) \begin{cases} x^2 - 2x = y \\ y^2 - 2y = x. \end{cases}$$

Cách giải. Ta có nhận xét : Trong hệ (III), nếu thay thế đồng thời x bởi y và y bởi x thì phương trình thứ nhất biến thành phương trình thứ hai và ngược lại, phương trình thứ hai biến thành phương trình thứ nhất.

Đối với hệ phương trình có tính chất đó, ta thường giải bằng cách trừ từng vế hai phương trình trong hệ. Cụ thể, đối với hệ (III) ta trừ từng vế hai phương trình trong hệ và được

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2) - 2(x - y) &= -(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ hoặc } x + y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$(III) \Leftrightarrow (IIIa) \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 2x = y \end{cases} \text{ hoặc } (IIIb) \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 - 2x = y. \end{cases}$$

Ta chỉ còn phải giải hai hệ (IIIa) và (IIIb) mà ta đã biết cách giải.

H3 Giải các hệ phương trình (IIIa) và (IIIb) rồi suy ra nghiệm của hệ (III).

CHÚ Ý

1) Các hệ phương trình có tính chất như trong hai ví dụ 2 và 3 được gọi chung là *hệ phương trình đối xứng* (đối với hai ẩn).

2) Nếu một hệ phương trình đối xứng có nghiệm là $(a; b)$ thì nó cũng có nghiệm là $(b; a)$. Nhận xét này rất hữu ích khi gặp các bài toán về hệ phương trình đối xứng.

H4 Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y = 5x \\ 2y^2 + x = 5y. \end{cases}$ Biết rằng hệ đã cho có bốn nghiệm và hai

trong bốn nghiệm đó là $(2; 2)$ và $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$. Tìm các nghiệm còn lại mà không cần biến đổi hệ phương trình. Hãy nêu rõ cách tìm.

Câu hỏi và bài tập

45. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 164; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

46. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ y^2 - 3y = 2x. \end{cases}$

47. Tìm quan hệ giữa S và P để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P. \end{cases}$$

(S và P là hai số cho trước).

48. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 55 \\ xy = 24. \end{cases}$

49. Tìm hàm số bậc hai $y = f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) Parabol $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm $(0; -4)$.

2) $f(2) = 6$.

3) Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ bằng 5.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III

- 50.** Phương trình dạng $ax + b = 0$ có thể có nghiệm trong các trường hợp nào ?
- 51.** Giả sử ba phương trình $f(x)g(x) = 0$, $f(x) = 0$ và $g(x) = 0$ (với cùng tập xác định) có các tập nghiệm lần lượt là S , S_1 và S_2 . Hãy chọn kết luận đúng trong hai kết luận sau :
- a) $S = S_1 \cap S_2$; b) $S = S_1 \cup S_2$.
- 52.** Hệ phương trình dạng $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ ($a^2 + b^2 \neq 0$ và $a'^2 + b'^2 \neq 0$) có thể có nghiệm trong các trường hợp nào ?
- Áp dụng.* Tìm a để hệ phương trình $\begin{cases} ax+y=a^2 \\ x+ay=1 \end{cases}$ có nghiệm.
- 53.** Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm kép x_0 . Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :
- (A) Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ luôn có thể viết dưới dạng bình phương của một nhị thức bậc nhất ;
(B) Parabol $y = ax^2 + bx + c$ luôn có đỉnh thuộc trục hoành ;
(C) Phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ luôn có một nghiệm kép là $\frac{1}{x_0}$.
- 54.** Giải và biện luận phương trình $m(mx - 1) = x + 1$.
- 55.** Cho phương trình $p(x + 1) - 2x = p^2 + p - 4$. Tìm các giá trị của p để :
- a) Phương trình đó nhận 1 là nghiệm ;
b) Phương trình đó có nghiệm ;
c) Phương trình đó vô nghiệm.
- 56.** Ba cạnh của một tam giác vuông có độ dài là ba số tự nhiên liên tiếp. Tìm ba số đó.
- 57.** Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2x - 1 = 0$.
- a) Giải và biện luận phương trình đã cho.
b) Tìm các giá trị của m sao cho phương trình đó có hai nghiệm trái dấu.
c) Tìm các giá trị của m sao cho tổng các bình phương hai nghiệm của phương trình đó bằng 1.

58. Với giá trị nào của a thì hai phương trình sau có nghiệm chung ?

$$x^2 + x + a = 0 \text{ và } x^2 + ax + 1 = 0.$$

59. Cho các phương trình :

$$x^2 + 3x - m + 1 = 0, \quad (1) \quad 2x^2 - x + 1 - 2p = 0. \quad (2)$$

a) Biện luận số nghiệm của mỗi phương trình đã cho bằng đồ thị.

b) Kiểm tra lại kết quả trên bằng phép tính.

60. Giải các hệ phương trình :

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^2 + y^2 - xy = 3; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2(x+y)^2 - xy = 1 \\ x^2y + xy^2 = 0. \end{cases}$$

61. Giải và biện luận các hệ phương trình :

$$\text{a) } \begin{cases} mx + 3y = m - 1 \\ 2x + (m - 1)y = 3; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + (a - 2)y = a \\ (a + 3)x + (a + 3)y = 2a. \end{cases}$$

62. Giải và biện luận các hệ phương trình :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = m; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = m. \end{cases}$$

63. Tìm a , b và c để parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là điểm $I(1; -4)$ và đi qua điểm $M(2; -3)$. Hãy vẽ parabol nhận được.

64. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Lấy một điểm M ở giữa B và C . Qua M , ta kẻ các đường thẳng ME và MF lần lượt song song với các cạnh AC và AB ($E \in AB$, $F \in AC$). Hỏi phải lấy điểm M cách B bao nhiêu để $ME + MF = l$ (l là độ dài cho trước) ? Biện luận theo l , a , b và c .