

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHẠM HỒNG THÁI

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

GIẢI PHÁP HỖ TRỢ HỌC SINH
HẠN CHẾ MỘT SỐ SAI LÂM THƯỜNG GẶP
KHI GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Người thực hiện: Nguyễn Phương Chi

Chức vụ: Giáo viên

SKKN thuộc lĩnh vực: Toán học

Mục	NỘI DUNG	Trang
1	MỞ ĐẦU	1
1.1	Lý do chọn đề tài	1
1.2	Mục đích nghiên cứu	2
1.3	Đối tượng nghiên cứu	2
1.4	Phương pháp nghiên cứu	2
2	NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM	2
2.1	Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm	2
2.2	Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm	3
2.3	Cách giải quyết vấn đề: Một số sai lầm thường gặp	4
2.3.1	Sai lầm giữa khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp	4
2.3.2	Xét thiếu các trường hợp trong bài toán giải bằng phương pháp gián tiếp	10
2.3.3	Bài toán đếm số các số thoả mãn tính chất α	12
2.3.4	Sai lầm khi áp dụng cách giải dạng bài tập này cho bài tập khác có nội dung tương tự	14
2.4	Hiệu quả sáng kiến kinh nghiệm	18
2.4.1	Kết quả chung	18
2.4.2	Kết quả kiểm tra	19
3	KẾT LUẬN – KIẾN NGHỊ	19
3.1	Kết luận	19
3.2	Kiến nghị	19
	Tài liệu tham khảo	21

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

(Ban hành kèm theo Thông tư số 18/TT-BKHCN ngày 01 tháng 8 năm 2013 của Bộ trưởng Bộ Khoa học và Công nghệ)

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

Kính gửi: Sở giáo dục và đào tạo Hà Nội.

Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Tên sáng kiến
Nguyễn Phương Chi	30/05/1983	Trường THPT Phạm Hồng Thái – Ba Đình – Hà Nội	Giáo viên toán	Cử nhân Toán Thạc sĩ Đo lường đánh giá trong giáo dục	Giải pháp hỗ trợ học sinh hạn chế một số sai lầm thường gặp khi giải toán Đại số tổ hợp

- Lĩnh vực áp dụng sáng kiến (*nêu rõ lĩnh vực có thể áp dụng sáng kiến và vấn đề mà sáng kiến giải quyết*) Toán học – Một số hạn chế của học sinh khi giải toán Đại số tổ hợp.

- Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử, (ghi ngày nào sớm hơn) 18/10/2022.

- Mô tả bản chất của sáng kiến (*Mô tả ngắn gọn, đầy đủ và rõ ràng các bước thực hiện giải pháp cũng như các điều kiện cần thiết để áp dụng giải pháp; nếu là giải pháp cải tiến giải pháp đã biết trước đó tại cơ sở thì cần nêu rõ tình trạng của giải pháp đã biết, những nội dung đã cải tiến, sáng tạo để khắc phục những nhược điểm của giải pháp đã biết. Bản mô tả nội dung sáng kiến có thể minh họa bằng các bản vẽ, thiết kế, sơ đồ, ảnh chụp mẫu sản phẩm... nếu cần thiết*): **Sáng kiến khai thác kỹ ở các sai lầm thường gặp của học sinh khi giải Toán tổ hợp, từ đó đưa ra giải pháp hỗ trợ học sinh nhận diện sai lầm và hạn chế sai lầm đó.**

1. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Qua quá trình theo dõi học tập của học sinh và từ các kết quả của các kì thi gần đây. Tôi nhận thấy học sinh rất yếu kém về loại bài tập này. Sự yếu kém đó thể hiện ở nhiều khía cạnh.

Một là: Học sinh có thể đưa ra được kết quả đúng nhưng lời giải sai về mặt lập luận và logic.

Hai là: Khi gặp bài toán có sự ***lựa chọn*** một số ít trong nhiều thì học sinh thường lúng túng trong việc chọn chỉnh hợp hay tổ hợp, mà đã có sự lựa chọn công thức thì phải biết đối với bài toán nào thì tương ứng sử dụng công thức phù hợp. Và không thể thiếu một phương pháp giải mang lại tính ưu việt là sử dụng bài toán ngược vậy khi đó sai lầm mắc phải là gì?

Ba là: Khi gặp bài toán về thành lập số đặc biệt có mặt chữ số 0 thì đa phần học sinh rất lúng túng vì chữ số 0 không thể nằm ở số hạng đầu nên việc chọn cách giải sẽ rất khó khăn.

Bổn là: Một số bài toán tương tự nhau về mặt hình thức nhưng khi chỉ thay đổi về bố cục lại không thể áp dụng lẫn nhau được nên vấn đề nắm vững phương pháp giải từng dạng bài toán là vấn đề nan giải.

Đề tài này chủ yếu chỉ ra một số sai lầm thường mắc phải của học sinh khi giải toán Đại số tổ hợp bằng cách giúp các em nắm vững hai khái niệm chỉnh hợp, tổ hợp và phân biệt sự giống nhau và khác nhau giữa hai khái niệm này. Thông qua các ví dụ trình bày cách giải sai để các em hiểu sâu sắc hơn các khái niệm. Việc trình bày lời giải đúng để giúp các em biết áp dụng định nghĩa vào giải quyết bài tập một cách chính xác.

2. Cách giải quyết vấn đề: Một số sai lầm thường gặp

Giáo viên sẽ dự đoán các sai lầm của học sinh từ đó đưa ra các ví dụ, bài tập dưới dạng bài tập tự luận hoặc bài tập trắc nghiệm với các phương án nhiễu là các sai lầm mắc phải, thông qua đó vừa phân tích chỉ ra các lỗi vừa rèn luyện cho các em kỹ năng làm bài.

Sau đây tôi xin được trình bày một số ví dụ, trong từng ví dụ phân tích chỉ rõ sai lầm như thế nào dẫn đến lời giải sai, chốt lại lời giải đúng.

2.1. Sai lầm giữa khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp

Cần phân biệt rõ cho học sinh các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp, cụ thể: Từ định nghĩa cho một tập A có n phần tử

- Mỗi một hoán vị là một bộ sắp xếp tất cả n phần tử của A
- Mỗi một chỉnh hợp là một bộ sắp xếp các phần tử của một tập con của tập A.

Do đó một hoán vị chập n của tập A là một chỉnh hợp chập n của tập A

$$(A_n^n = P_n = n!).$$

Sự giống nhau và khác nhau của chỉnh hợp chập k của n và tổ hợp chập k của n ($1 \leq k \leq n$)

- **Giống nhau:** Đều là một tập con gồm k phần tử của tập A.
- **Khác nhau:** Mỗi một chỉnh hợp chập k của n phần tử là một tập con gồm k phần tử có sắp thứ tự, kể cả thứ tự của một tập n phần tử

Mỗi một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con gồm k phần tử không kể thứ tự của một tập n phần tử.

Tức là muốn hình thành các chỉnh hợp chập k của n phần tử ta có thể tiến hành theo 2 bước liên tiếp

Bước 1: Tìm tất cả các tổ hợp chập k của n.

Bước 2: Tìm tất cả các hoán vị trong từng tổ hợp.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử của A ($A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $1 \leq k \leq n$) lớn hơn số tổ hợp chập k của n phần tử của A ($C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, $1 \leq k \leq n$).

2.2. Xét thiếu các trường hợp trong bài toán giải bằng phương pháp gián tiếp

2.3. Bài toán đếm số các số thoả mãn tính chất α

2.4 Sai lầm khi áp dụng cách giải dạng bài tập này cho bài tập khác có nội dung tương tự

Tóm lại

Khi giải toán về hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp học sinh thường gặp phải một số sai lầm sau:

- Nhầm lẫn giữa tổ hợp và chỉnh hợp
- Xét thiếu các trường hợp trong bài toán giải bằng phương pháp gián tiếp
- Bài toán đếm các số thỏa mãn một tính chất nào đó
- Áp dụng cách giải giữa các bài toán có nội dung tương tự

Do đó trong mỗi phần thông qua các ví dụ tôi đã chỉ rõ những sai lầm thường gặp và cách khắc phục. Mục đích giúp các em học sinh củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em, trả lời một cách thỏa đáng câu hỏi “Tại sao kết quả giải cách này không giống kết quả cách giải kia? Tại sao cách giải trước áp dụng đúng nhưng qua bài khác tương tự thì không? Cách nào đúng, cách nào sai? Sai lầm ở đâu?..”. Qua đó luyện tập cho học sinh thói quen suy nghĩ, quan sát, lập luận để học sinh phát huy trí thông minh, óc sáng tạo, khả năng phân tích, tổng hợp, tư duy độc lập và thông qua việc thảo luận, tranh luận mà học sinh phát triển khả năng nói lưu loát, biết lí luận chặt chẽ khi giải toán. Ngoài ra có rất nhiều bài toán được giải nhiều cách khác nhau sẽ giúp các em học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải và áp dụng vào giải toán một cách thành thạo và chính xác.

3. Hiệu quả sáng kiến kinh nghiệm.

3.1. Kết quả chung

Sáng kiến này tôi đã áp dụng cho học sinh lớp 11A3, lớp 11D8 và lớp 10A1 tôi đang dạy tại trường THPT Phạm Hồng Thái. Kết quả là các em lớp 11A3 và 10A1 đều yêu thích dạng toán này, rất tích cực trong tìm tòi lời giải và giải toán. Đặc biệt ở lớp 10A1, có học sinh mạnh dạn một mình một ý kiến bảo vệ đến cùng để tìm ra lời giải đúng nhất cho bài. Còn với lớp 11D8- ban D, các con đã giảm được áp lực tâm lý khi giải bài toán tổ hợp.

Khi tôi thực hiện chuyên đề này đa số học sinh rất hiểu bài và không còn sự lúng túng trong việc chọn cách giải cho một bài toán, qua đó kích thích được tính tò mò ham học hỏi của học sinh, phát hiện ra điều kỳ diệu của Đại số tổ hợp và tạo được sự yêu thích của học sinh đối với đề tài này.

3.2. Kết quả kiểm tra

Trong năm học 2022-2023, tôi đã so sánh kết quả thực nghiệm của lớp 11A3 khi không áp dụng đề tài với lớp 10A1 (theo chương trình sách giáo khoa mới) khi áp dụng đề tài; *trên cùng một bài kiểm tra*. Đây là hai lớp TN có khả năng tiếp thu tương đương nhau (Số mỗi lớp 45). Kết quả: Các em học sinh lớp 11A3 đạt kết quả tốt hơn các em học sinh lớp 10A1, cụ thể:

Điểm Lớp	0	1-2	3	4	5	6	7	8	9	10
11A3			3 7.5%	2 5%	8 20%	3 7.5%	8 20%	7 17.5%	5 12.5%	4 10%
11D8		3 7.5%	2 5%	8 20%	3 7.5%	8 20%	5 12.5%	5 12.5%	4 10%	2 5%
10A1			2 2%	3 3%	3 9.5%	6 15%	8 25.5%	6 15%	5 12.5%	7 17.5%

Từ kết quả thực nghiệm đã minh chứng được việc đưa chuyên đề: "**Khắc phục một số sai lầm thường gặp của học sinh khi giải toán Đại số tổ hợp**" vào giảng dạy là cần thiết, nhằm nâng cao chất học tập cũng như chất lượng thi học sinh giỏi và thi THPT Quốc gia.

4. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

4.1. Kết luận

Đại số tổ hợp là một dạng toán thực sự khó, chính vì lý do đó mà học sinh dễ buông xuôi, không chịu đầu tư và học hỏi. Giải pháp giảng dạy này của tôi đã kích thích được tính tò mò, ham học hỏi và tạo được sự yêu thích của học sinh đối với phần kiến thức Đại số tổ hợp nói riêng và bộ môn Toán nói chung. Thông qua đó phát huy được ở học sinh tư duy phân tích tổng hợp, tư duy logic, tư duy trừu tượng, có phong cách nghiên cứu làm nền tảng cho việc học tập và nghiên cứu sau này. Từ đây các em có thể tự mình làm các chuyên đề dạng khác để thấy được mối quan hệ biện chứng, tính độc lập và tính phụ thuộc của các kiến thức khoa học.

Qua đề tài này tôi rất mong được ủng hộ và góp ý nhiệt thành của quý đồng nghiệp để đề tài này trở thành một công cụ thiết thực cho việc dạy và học nhằm đẩy mạnh việc đổi mới nâng cao chất lượng dạy học theo xu thế hiện nay. Khi trình bày không tránh khỏi nhiều điều sai sót rất mong được đóng góp ý kiến để hoàn chỉnh hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

4.2. Kiến nghị

Đối với sở GD&ĐT Hà Nội: Tổ chức nhiều chuyên đề cấp tỉnh về nâng cao chất lượng dạy - học bộ môn toán cho giáo viên được tham gia, vào thời điểm phù hợp.

Đối với Nhà trường: Nên có sự động viên khuyến khích giáo viên đổi mới PPDH dưới nhiều hình thức khác nhau.

Đối với giáo viên

Phải thường xuyên tự học, tự bồi dưỡng để nâng cao năng lực chuyên môn, nghiệp vụ sư phạm, đổi mới phương pháp dạy học môn Toán. Hạn chế tối đa phương pháp dạy học truyền thống lấy giáo viên làm trung tâm.

Phải luôn tìm tòi, sáng tạo để từng bước cải tiến phương pháp dạy học cho phù hợp với từng tiết học, bài học và những đối tượng học sinh khác nhau.

- Những thông tin cần được bảo mật (nếu có):

.....
- Các điều kiện cần thiết để áp dụng sáng kiến:

+ Cần có thời gian để học sinh được nghiên cứu nội dung bài học trước tại nhà theo hướng dẫn của giáo viên.

+ Cần có thời gian để học sinh được trao đổi, tranh luận, phản biện về bài làm của bạn, của mình tại lớp, từ đó khắc sâu kiến thức.

+ Giáo viên cần chuẩn bị trước tài liệu để học sinh nghiên cứu theo chủ đề.

- Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả (*So sánh lợi ích kinh tế, xã hội thu được khi áp dụng giải pháp so với trường hợp không áp dụng giải pháp đó, hoặc so với những giải pháp tương tự đã biết ở cơ sở*)

Sáng kiến này tôi đã áp dụng cho học sinh lớp 11A3, lớp 11D8 và lớp 10A1 tôi đang dạy tại trường THPT Phạm Hồng Thái. Kết quả là các em lớp 11A3 và 10A1 đều yêu thích dạng toán này, rất tích cực trong tìm tòi lời giải và giải toán. Đặc biệt ở lớp 10A1, có học sinh mạnh dạn một mình một ý kiến bảo vệ đến cùng để tìm ra lời giải

đúng nhất cho bài. Còn với lớp 11D8- ban D, các con đã giảm được áp lực tâm lý khi giải bài toán tổ hợp.

- Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tổ chức, cá nhân đã tham gia áp dụng sáng kiến lần đầu hoặc áp dụng thử nếu có: *(So sánh lợi ích kinh tế, xã hội thu được khi áp dụng giải pháp so với trường hợp không áp dụng giải pháp đó, hoặc so với những giải pháp tương tự đã biết ở cơ sở)*

Khi tôi thực hiện chuyên đề này đa số học sinh rất hiểu bài và không còn sự lúng túng trong việc chọn cách giải cho một bài toán, qua đó kích thích được tính tò mò ham học hỏi của học sinh, phát hiện ra điều kỳ diệu của Đại số tổ hợp và tạo được sự yêu thích của học sinh đối với đề tài này.

Danh sách những người đã tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu (nếu có):

Số TT	Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Nơi công tác (hoặc nơi thường trú)	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Nội dung công việc hỗ trợ
1	45 học sinh lớp 11A3	Năm học 2022-2023	Trường THPT Phạm Hồng Thái	Học sinh	THPT	Thực hiện các phiếu học tập
2	45 học sinh lớp 11D8	Năm học 2022-2023	Trường THPT Phạm Hồng Thái	Học sinh	THPT	Thực hiện các phiếu học tập
3	45 học sinh lớp 10A1	Năm học 2022-2023	Trường THPT Phạm Hồng Thái	Học sinh	THPT	Thực hiện các phiếu học tập
4	Tạ Lê Hải Anh	1980	THPT Phạm Hồng Thái	Giáo viên toán	Thạc sĩ	Cùng phối hợp triển khai sáng kiến tại lớp mình dạy
5	Nguyễn Thị Thanh Loan	1980	THPT Phạm Hồng Thái	Giáo viên toán	Thạc sĩ	Cùng phối hợp triển khai sáng kiến tại lớp mình dạy

Tôi xin cam đoan mọi thông tin nêu trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Hà Nội, ngày 15 tháng 03 năm 2023
Người nộp đơn
(Ký và ghi rõ họ tên)

Nguyễn Phương Chi

PHIẾU NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ

Họ tên tác giả: Nguyễn Phương Chi
 Tên SKKN: Giải pháp hỗ trợ học sinh hạn chế một số sai lầm thường gặp khi giải toán Đại số 10 hợp
 Môn (hoặc Lĩnh vực): Toán

STT	Tiêu chuẩn	Điểm tối đa
1	Sáng kiến có tính mới	
1.1	Hoàn toàn mới, được áp dụng đầu tiên	<u>30</u>
1.2	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ khá	20
1.3	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ trung bình	10
1.4	Không có tính mới hoặc sao chép từ các giải pháp đã có trước đây	0

Nhận xét: SKKN được làm mới trong năm học này (30đ)

2	Sáng kiến có tính áp dụng	
2.1	Có khả năng áp dụng trong phạm vi toàn ngành hoặc rộng hơn	30
2.2	Có khả năng áp dụng trong đơn vị và có thể nhân ra một số đơn vị có cùng điều kiện	<u>20</u>
2.3	Có khả năng áp dụng trong đơn vị	10
2.4	Không có khả năng áp dụng trong đơn vị	0

Nhận xét: SKKN có khả năng áp dụng trong đơn vị và một số lớp (20đ)

3	Sáng kiến có tính hiệu quả	
3.1	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội, có tính lan tỏa	30
3.2	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội	20
3.3	Có hiệu quả, lợi ích phù hợp với mức độ phù hợp tại đơn vị	10
3.4	Không có hiệu quả cụ thể	0

Nhận xét: Có hiệu quả hẳn trong dạy học Đ.S.T.H nếu áp dụng SKKN (25đ)

4	Diễn trình bày	
	Trình bày khoa học, hợp lý	<u>10</u>
	Trình bày chưa khoa học, chưa hợp lý	5

Nhận xét: Trình bày hợp lý (10đ)

Tổng cộng: 85 điểm Đánh giá: ☒ Đạt (≥ 70 điểm) ☐ Không đạt

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN CƠ SỞ



HIỆU TRƯỞNG

Nguyễn Hồng Sơn

1. MỞ ĐẦU

1.1. Lí do chọn đề tài

Toán học là môn khoa học đề cập đến logic của con số, cấu trúc, không gian và các phép biến đổi. Toán học có trong mọi thứ xung quanh chúng ta, có trong tất cả mọi thứ chúng ta làm, là thước đo cho mọi thứ trong cuộc sống hàng ngày.

Tính từ khi lịch sử bắt đầu được ghi lại, phát hiện Toán học đã đi đầu trong mọi xã hội văn minh. Toán học là môn được sử dụng ngay cả trong những nền văn hóa nguyên thủy nhất. Nhu cầu của Toán học sinh ra dựa trên mong muốn của xã hội. Xã hội càng phát triển, nhu cầu tính toán phức tạp hơn. Các bộ tộc nguyên thủy ít dùng toán học nhưng để **tính toán** vị trí của mặt trời và vật lý săn bắn vẫn phải dựa vào Toán học.

Toán học là một ngành, một môn học đòi hỏi suy luận và trí thông minh cao. Nó chứa tất cả những gì thách thức đến bộ não của chúng ta. Học toán hay nghiên cứu Toán học là vận dụng khả năng suy luận và trí óc thông minh của chúng ta.

Môn Toán học là nền tảng cho tất cả các ngành khoa học tự nhiên khác. Có thể nói rằng không có toán học, sẽ không có ngành khoa học nào cả.

Trong môn Toán ở trường phổ thông, Đại số tổ hợp là nội dung không thể thiếu và đã được đưa vào trong chương trình sách giáo khoa lớp 11- chương trình GDPT 2018 và sách giáo khoa lớp 10 mới năm học 2022-2023. Đại số tổ hợp không những trang bị cho học sinh khả năng suy luận cao, tính logic, chặt chẽ và chính xác mà còn là một trong những kiến thức được đưa vào thi TN THPT Quốc gia, thi học sinh giỏi, là nền móng để xây dựng toán xác suất trong chương trình THPT cũng như đại học... Đây thật sự là phần rất hay, khó và phù hợp để ra dưới dạng các câu hỏi trắc nghiệm trong kì thi TN THPT quốc gia hiện nay

Hơn nữa bài tập phần Đại số Tổ hợp mang tính phân loại học sinh, không đòi hỏi nhiều kiến thức, nhưng yêu cầu sự quan sát tinh tế, tư duy sáng tạo. Dạy Toán là dạy kiến thức, tư duy, tính cách do đó khi dạy Đại số tổ hợp, ngoài việc đưa ra kiến thức và phương pháp giải học sinh còn phải ***tìm tòi nhiều cách giải khác nhau, tìm ra những sai lầm trong giải toán, mở rộng bài toán mới*** để giúp học sinh phát triển kĩ năng, tư duy, sáng tạo và vận dụng một cách linh hoạt, sáng tạo nhất, thông minh nhất trong việc học toán, cũng như trong cuộc sống.

Mặt khác rèn luyện kỹ năng giải Toán Tổ hợp còn góp phần vào việc đổi mới phương pháp dạy học theo quan điểm "*lấy học sinh làm trung tâm*". Theo đó thầy chỉ đóng vai trò là người hướng dẫn để học sinh tự tìm tòi phát hiện ra kết quả, phát hiện ra mâu thuẫn và sai lầm trong quá trình giải quyết một bài toán .

Với những lí do trên tôi mạnh dạn chọn đề tài "***Giải pháp hỗ trợ học sinh hạn chế một số sai lầm thường gặp khi giải toán Đại số tổ hợp***". Trong sáng kiến kinh nghiệm này rất mong được sự ủng hộ và góp ý nhiệt thành của quý đồng nghiệp, nhằm biến nó thành một công cụ đích thực cho việc dạy và học toán Đại số tổ hợp.

1.2. Mục đích nghiên cứu

- Đối với giáo viên

Trên cơ sở lí luận phương pháp dạy học, đề tài đi sâu đề xuất một số giải pháp hỗ trợ học sinh hạn chế sai lầm thường gặp khi giải toán Đại số tổ hợp.

- Đối với học sinh

Thông qua các con đường, biện pháp phát triển tính tích cực, độc lập trong nhận thức, đặc biệt tư duy giúp các em hạn chế một số nhầm lẫn đáng tiếc khi giải bài tập phần Đại số tổ hợp. Từ đó kích thích hứng thú học tập, khơi dậy xúc cảm đối với bộ môn.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

- Tìm hiểu lí luận dạy học nói chung, dạy học phần Đại số Tổ hợp nói riêng để làm rõ nội hàm các khái niệm.

- Nghiên cứu phần đại số Tổ hợp, chương trình sách giáo khoa lớp 10 mới ở cả 3 bộ sách: bộ Cánh diều, bộ Kết nối tri thức, bộ Chân trời sáng tạo.

- Đề xuất một số giải pháp nhằm hạn chế sai lầm thường gặp của học sinh THPT khi giải toán Đại số tổ hợp.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

- Về lí thuyết: Đề tài sử dụng nhiều phương pháp khác nhau, chủ yếu là:

+ Phương pháp nghiên cứu tổng hợp để tiếp cận nghiên cứu, đi sâu vào các vấn đề về lí luận dạy học nói chung, dạy phần Đại số tổ hợp nói riêng để lí giải rõ từng khái niệm, từng bài toán được đề cập đến trong đề tài.

+ Phương pháp so sánh để tìm ra những nét chung và những nét nổi trội khi vận dụng các biện pháp nhằm hạn chế sai lầm của học sinh khi giải Toán Đại số tổ hợp.

- Về thực tiễn:

+ Dự giờ đồng nghiệp dạy khối 10 theo chương trình sách giáo khoa mới và khối 11 theo chương trình sách giáo khoa ban cơ bản theo chương trình GDPT 2018.

+ Thực nghiệm sư phạm: thực nghiệm đề tài vào giảng dạy nội dung phần Đại số tổ hợp do bản thân trực tiếp đứng lớp ở cả khối lớp 10 và khối lớp 11 trường Trung học phổ thông Phạm Hồng Thái, Hà Nội.

+ Sử dụng phương pháp thống kê toán học trên cơ sở so sánh các giá trị thu được giữa lớp thực nghiệm và lớp đối chứng để đánh giá hiệu quả của những biện pháp dạy học mà đề tài đưa ra.

+ Trong quá trình giảng dạy giáo viên dự đoán, tổng hợp được các sai lầm của học sinh thường mắc phải thông qua các bài toán đã được phân theo dạng, phân tích chỉ rõ nguyên nhân dẫn đến sai lầm từ đó lựa chọn phương án giải phù hợp nhất. Cuối cùng trình bày lại thông qua các ví dụ cụ thể.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm

Căn cứ vào yêu cầu và mục tiêu của hệ thống giáo dục bậc THPT theo chương trình sách giáo khoa mới 2022, chương trình giáo dục phổ thông 2018.

Căn cứ vào tình hình học tập của học sinh khối 10 trường THPT Phạm Hồng Thái - bộ sách Cánh Diều, khối 11 chương trình GDPT 2018 trong việc học tập bộ môn đại số và giải tích.

Căn cứ vào định nghĩa Đại số tổ hợp: Chỉnh hợp, Tổ hợp và công thức tính số chỉnh hợp, số tổ hợp.

a. Định nghĩa chỉnh hợp:

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là một **chỉnh hợp chập k của n phần tử** của tập A .

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử: $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

• Công thức trên cũng đúng cho trường hợp $k = 0$ hoặc $k = n$.

• Khi $k = n$ thì $A_n^n = P_n = n!$

b. Định nghĩa tổ hợp:

Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k ($1 \leq k \leq n$) phần tử của A được gọi là một **tổ hợp chập k của n phần tử**.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Qui ước: $C_n^0 = 1$

Tính chất: $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^k = C_{n-k}^k$;
 $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$; $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_{n-1}^{k-1}$

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Qua quá trình theo dõi học tập của học sinh và từ các kết quả của các kì thi gần đây. Tôi nhận thấy học sinh rất yếu kém về loại bài tập này. Sự yếu kém đó thể hiện ở nhiều khía cạnh.

Một là: Học sinh có thể đưa ra được kết quả đúng nhưng lời giải sai về mặt lập luận và logic.

Hai là: Khi gặp bài toán có sự **lựa chọn** một số ít trong nhiều thì học sinh thường lúng túng trong việc chọn chỉnh hợp hay tổ hợp, mà đã có sự lựa chọn công thức thì phải biết đối với bài toán nào thì tương ứng sử dụng công thức phù hợp. Và không thể thiếu một phương pháp giải mang lại tính ưu việt là sử dụng bài toán ngược vậy khi đó sai lầm mắc phải là gì?

Ba là: Khi gặp bài toán về thành lập số đặc biệt có mặt chữ số 0 thì đa phần học sinh rất lúng túng vì chữ số 0 không thể nằm ở số hạng đầu nên việc chọn cách giải sẽ rất khó khăn.

Bốn là: Một số bài toán tương tự nhau về mặt hình thức nhưng khi chỉ thay đổi về bố cục lại không thể áp dụng lẫn nhau được nên vấn đề nắm vững phương pháp giải từng dạng bài toán là vấn đề nan giải.

Đề tài này chủ yếu chỉ ra một số sai lầm thường mắc phải của học sinh khi giải toán Đại số tổ hợp bằng cách giúp các em nắm vững hai khái niệm chỉnh hợp, tổ hợp và phân biệt sự giống nhau và khác nhau giữa hai khái niệm này. Thông qua các ví dụ trình bày cách giải sai để các em hiểu sâu sắc hơn các khái niệm. Việc trình bày lời giải đúng để giúp các em biết áp dụng định nghĩa vào giải quyết bài tập một cách chính xác.

2.3. Cách giải quyết vấn đề: Một số sai lầm thường gặp

Giáo viên sẽ dự đoán các sai lầm của học sinh từ đó đưa ra các ví dụ, bài tập dưới dạng bài tập tự luận hoặc bài tập trắc nghiệm với các phương án nhiều là các sai lầm mắc phải, thông qua đó vừa phân tích chỉ ra các lỗi vừa rèn luyện cho các em kỹ năng làm bài.

Sau đây tôi xin được trình bày một số ví dụ, trong từng ví dụ phân tích chỉ rõ sai lầm như thế nào dẫn đến lời giải sai, chốt lại lời giải đúng.

2.3.1. Sai lầm giữa khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp

Cần phân biệt rõ cho học sinh các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp, cụ thể: Từ định nghĩa cho một tập A có n phần tử

- Mỗi một hoán vị là một bộ sắp xếp tất cả n phần tử của A
- Mỗi một chỉnh hợp là một bộ sắp xếp các phần tử của một tập con của tập A.

Do đó một hoán vị chập n của tập A là một chỉnh hợp chập n của tập A

$$(A_n^n = P_n = n!).$$

Sự giống nhau và khác nhau của chỉnh hợp chập k của n và tổ hợp chập k của n ($1 \leq k \leq n$)

- **Giống nhau:** Đều là một tập con gồm k phần tử của tập A.

- **Khác nhau:** Mỗi một chỉnh hợp chập k của n phần tử là một tập con gồm k phần tử có sắp thứ tự, kể cả thứ tự của một tập n phần tử

Mỗi một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con gồm k phần tử không kể thứ tự của một tập n phần tử.

Tức là muốn hình thành các chỉnh hợp chập k của n phần tử ta có thể tiến hành theo 2 bước liên tiếp

Bước 1: Tìm tất cả các tổ hợp chập k của n.

Bước 2: Tìm tất cả các hoán vị trong từng tổ hợp.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử của A ($A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 1 \leq k \leq n$) lớn hơn số tổ hợp chập k của n phần tử của A ($C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, 1 \leq k \leq n$).

Ví dụ 1: Một đội bóng có 11 người trực tiếp thi đấu (Kể cả thủ môn). Trong một trận đấu trung kết với 120 phút thi đấu đội phải đá luân lưu để phân thắng bại. Hỏi huấn luyện viên có bao nhiêu cách chọn ra 5 người để thực hiện loạt đá luân lưu?

Một học sinh đã giải như sau:

Chọn 5 người từ 11 người trong đội bóng. Vậy số cách chọn là C_{11}^5

Học sinh đã giải sai kết quả. Em hãy phân tích sai lầm mà học sinh đã mắc phải trong lời giải trên?

Giáo viên hướng dẫn và giúp học sinh chốt lại nguyên nhân sai lầm: Khi chọn 5 người từ 11 người để thực hiện loạt đá luân lưu, trong 5 người được chọn cần phải ưu tiên chọn thứ tự đá lần 1, 2, 3, 4, 5. Vậy kết quả phải là: $C_{11}^5 \cdot 5!$ hay A_{11}^5

Qua ví dụ này giúp các em khắc sâu sự khác biệt giữa hai khái niệm đồng thời dẫn dắt học sinh có được lối tư duy sâu khi áp dụng

Ví dụ 2: Trong một hộp có 4 viên bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Cần chọn ra 4 viên từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số 4 viên đó không có đủ 3 màu?

Sai lầm 1

Số cách chọn 4 viên không có màu trắng là $C_{10}^4 = 210$ cách.

Số cách chọn 4 viên không có màu vàng là $C_9^4 = 126$ cách.

Số cách chọn 4 viên không có màu đỏ là $C_{11}^4 = 330$ cách.

Theo quy tắc cộng có $120 + 126 + 330 = 666$ cách.

Nguyên nhân sai lầm 1:

Cách giải trên sai ở chỗ đã tính lặp lại 2 lần số các viên cùng một màu đỏ hoặc cùng màu trắng hoặc cùng màu vàng.

Sai lầm 2

Số cách chọn 4 viên chỉ có một màu: $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4$

Số cách chọn 4 viên có 2 màu:

Số cách chọn 4 viên không có màu trắng là $C_{10}^4 = 210$ cách.

Số cách chọn 4 viên không có màu vàng là $C_9^4 = 126$ cách.

Số cách chọn 4 viên không có màu đỏ là $C_{11}^4 = 330$ cách

Vậy có: $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 + C_{10}^4 + C_9^4 + C_{11}^4$

Nguyên nhân sai lầm 2:

Cách giải này thay cho việc trừ đi số cách chọn lặp lại 2 lần số viên cùng một màu đỏ hoặc cùng màu trắng hoặc màu vàng thì học sinh lại cộng thêm vào

Lời giải đúng:

Cách 1: (Chọn trực tiếp)

- Số cách chọn 4 bi cùng một màu là: $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 = 1 + 5 + 15 = 21$

- Số cách chọn 4 bi chỉ có hai màu đỏ và trắng là:

$$C_4^2.C_5^2 + C_4^3.C_5^1 + C_4^1.C_5^3 = 6.10 + 4.5 + 4.10 = 120$$

- Số cách chọn 4 bi chỉ có hai màu trắng và vàng là:

$$C_5^2.C_6^2 + C_5^3.C_6^1 + C_5^1.C_6^3 = 10.15 + 10.6 + 5.20 = 310$$

- Số cách chọn 4 bi chỉ có hai màu vàng và đỏ là:

$$C_6^2.C_4^2 + C_6^3.C_4^1 + C_6^1.C_4^3 = 6.5 + 20.4 + 6.4 = 194$$

Theo quy tắc cộng có $120 + 310 + 194 = 645$ cách.

Cách 2: (Chọn gián tiếp)

- Số cách chọn tùy ý 4 viên là C_{15}^4 cách.

- Tính số cách chọn 4 viên đủ 3 màu:

+) Trong đó 2 đỏ, 1 trắng, 1 vàng 1 có $C_4^2.C_5^1.C_6^1$ cách

+) Trong đó 1 đỏ, 2 trắng, 1 vàng 1 có $C_4^1.C_5^2.C_6^1$ cách

+) Trong đó 1 đỏ, 1 trắng, 2 vàng 1 có $C_4^1.C_5^1.C_6^2$ cách

- Số cách chọn cần tìm là: $C_{15}^4 - (C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2) = 645$ cách

Cách 3:

- Số cách chọn 4 viên có 2 màu:

Số cách chọn 4 viên không có màu trắng là $C_{10}^4 = 210$ cách.

Số cách chọn 4 viên không có màu vàng là $C_9^4 = 126$ cách.

Số cách chọn 4 viên không có màu đỏ là $C_{11}^4 = 330$ cách

- Số cách chọn 4 viên chỉ có một màu: $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 = 645$

Vì trong cách chọn 4 viên 2 màu đã lặp lại 2 lần số bi có cùng 1 màu. Vậy có:

$$C_{10}^4 + C_9^4 + C_{11}^4 - C_4^4 - C_5^4 - C_6^4 = 645$$

Ví dụ 3: (Bài tập toán đại số tổ hợp - TS Nguyễn Văn Nhân) Một tổ có 8 học sinh nam, 7 học sinh nữ. Chọn ra 1 nhóm gồm 6 HS sao cho có ít nhất 2 nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải 1: (có vẻ “hay” vì rất ngắn gọn và ... “độc đáo”)

Bước 1: chọn ra 2 nữ (vì có ít nhất 2 nữ) có: C_7^2 (cách)

Bước 2: Chọn 4 bạn còn lại trong 13 bạn có: C_{13}^4 (cách)

(khi đó 6 bạn còn lại trong 13 bạn được chọn luôn thỏa mãn có ít nhất 2 nữ).

Vậy có: $C_7^2 \cdot C_{13}^4 = 15015$ (cách)

Lời giải 2: (trực tiếp): chia cụ thể các trường hợp:

TH1: 2 nữ, 4 nam: $C_7^2 \cdot C_8^4$ (cách)

TH2: 3 nữ, 3 nam: $C_7^3 \cdot C_8^3$ (cách)

TH3: 4 nữ, 2 nam: $C_7^4 \cdot C_8^2$ (cách)

TH4: 5 nữ, 1 nam: $C_7^5 \cdot C_8^1$ (cách)

TH5: 6 nữ: C_7^6 (cách)

Vậy có tất cả: $C_7^2 \cdot C_8^4 + C_7^3 \cdot C_8^3 + C_7^4 \cdot C_8^2 + C_7^5 \cdot C_8^1 + C_7^6 = 4585$ (cách)

Lời giải 3: (gián tiếp)

Bước 1: chọn 6 HS bất kì: C_{15}^6 (cách)

Bước 2: chọn 5 HS nam, 1 HS nữ: $C_8^5 \cdot C_7^1$ (cách)

Bước 3: chọn 6 HS nam: C_8^6 (cách)

Vậy số cách chọn thỏa mãn là: $C_{15}^6 - (C_8^5 \cdot C_7^1 + C_8^6) = 4585$ (cách)

Nhận xét: Hai lời giải 2 và 3 là lời giải đúng đã được phân tích rõ ràng. Lời giải 1 xem có vẻ hợp lý, ngắn gọn,...nhưng tại sao đáp án không như lời giải 2 và 3? Vậy sai lầm ở đâu?

Phân tích: Sai lầm là học sinh đã **phân biệt thứ tự** vì chọn liên tiếp

Tôi đưa ra sơ đồ minh họa cho lời giải 1:

Nếu: 8 nam có tên lần lượt: A, B, C, D, E, F, G, H.

7 nữ có tên lần lượt: **K, L, M, N, O, P, Q**

+ Giả sử nếu chọn ra 2 nữ: **K, L** và chọn 4 người còn lại bất kì trong 13 người còn lại là: A, B, **M, N**.

+ Lần sau chọn 2 nữ **M, N** thì chọn 4 người còn lại bất kì trong 13 người còn lại là: A, B, **K, L**

Dấu hiệu học sinh sai lầm là: có 1 lần chọn sau sẽ trùng với lần chọn trước với 6 người: **K, L, A, B, M, N**.

Kết luận: Cách này không sử dụng được vì bị trùng lặp. Vậy Tổ hợp và chỉnh hợp rất dễ phân biệt, nếu bài toán yêu cầu tính thứ tự thì ta dùng **chỉnh hợp**, còn không yêu cầu thứ tự (tùy ý) thì ta dùng **tổ hợp**.

Bên cạnh những bài toán có nhiều lời giải đúng là rất nhiều bài toán có nhiều sai lầm có thể mắc phải. Sau đây là 3 ví dụ và tôi đưa ra dưới dạng bài trắc nghiệm với 3 phương án sai xuất phát từ 3 sai lầm và một phương án đúng với nhiều cách giải.

Ví dụ 4: Một nhóm học sinh có 5 bạn. Giáo viên cần chọn ra 3 học sinh thì có số cách chọn là

- A. C_5^3 B. $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$ C. $C_5^1 \cdot C_4^2$ D. $C_5^2 \cdot C_3^1$

Lời giải 1: Mỗi cách chọn 3 bạn nam trong 5 bạn là số tổ hợp chập 3 của 5.

Số cách chọn là $C_5^3 = 10$ (cách)

Lời giải 2: Đầu tiên chỉ chọn 1 bạn thì có C_5^1 (cách).

Tiếp theo chọn 1 bạn trong 4 bạn còn lại có: C_4^1 (cách)

Cuối cùng thì chọn 1 bạn còn lại trong 3 bạn thì có: C_3^1 (cách)

Vậy có: $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 5.4.3 = 60$ (cách)

Lời giải 3: Đầu tiên chỉ chọn 1 bạn thì có C_5^1 (cách).

Tiếp theo chọn 2 bạn còn lại trong 4 bạn thì có: C_4^2 (cách)

Vậy có: $C_5^1 \cdot C_4^2 = 5.6 = 30$ (cách)

Lời giải 4: Đầu tiên chỉ chọn 2 bạn thì có C_5^2 (cách).

Tiếp theo chọn 1 bạn còn lại trong 3 bạn thì có: C_3^1 (cách)

Vậy có: $C_5^2 \cdot C_3^1 = 10.3 = 30$ (cách)

Nhận xét: *Mọi nhìn đều thấy các lời giải tương đối hợp lý nhưng các kết quả lại khác nhau. Vậy đâu là lời giải đúng?*

Phân tích:

Lời giải 1: Tất nhiên là lời giải đúng.

Vậy sai lầm là gì khiến cho các lời giải còn lại đều sai?

Lời giải 2: Sai lầm là học sinh đã **phân biệt thứ tự**, trong khi đề bài không yêu cầu tính thứ tự.

Giả sử 5 bạn tên là A, B, C, D, E.

Đầu tiên chọn 1 bạn trong 5 bạn, dĩ nhiên là có 5 cách.

Nếu lần đầu chọn A (thì còn lại B, C, D, E), lần 2 chọn B (còn lại C, D, E), lần 3 chọn C thì ta có 3 bạn là A, B, C.

Nếu lần đầu chọn B (thì còn lại A, C, D, E), lần 2 chọn C (còn lại A, D, E), lần 3 chọn A thì ta có 3 bạn là A, B, C.

.....

Như vậy số cách chọn ra 3 bạn A, B, C đã bị lặp.

Các lời giải còn lại cũng giải thích tương tự.

Vậy các lời giải 2,3,4 đã đưa yêu cầu thứ tự vào nên dẫn đến sai.

Ví dụ 5: (Sai lầm thường gặp- Trần Phương) Một tổ có 12 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Cần chọn 6 học sinh (3 nam, 3 nữ) để ghép thành 3 đôi để biểu diễn văn nghệ. Số cách chọn là

A. $C_{12}^3 \cdot C_{10}^3$

B. $A_{12}^3 \cdot A_{10}^3$

C. $3!.3!. C_{12}^3 \cdot C_{10}^3$

D. $3!. C_{12}^3 \cdot C_{10}^3$

Giải:

Lời giải 1: Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là C_{12}^3 (cách)

Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là C_{10}^3 (cách)

Vậy số cách chọn 3 đôi nam nữ là: $C_{12}^3 \cdot C_{10}^3$ (cách)

Lời giải này mới chỉ chọn 6 học sinh gồm 3 nam, 3 nữ.

Lời giải 2: Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là A_{12}^3 (cách)

Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là A_{10}^3 (cách)

Vậy số cách chọn 3 đôi nam nữ là: $A_{12}^3 \cdot A_{10}^3$ (cách)

Lời giải thứ hai sai lầm ở chỗ sắp thứ tự giữa các học sinh và thiếu cách ghép đôi 1 nam 1 nữ

Lời giải 3: Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là C_{12}^3 (cách)

Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là C_{10}^3 (cách)

Số cách ghép đôi là $3!.3$

Do đó số cách chọn 6 học sinh gồm 3 nam và 3 nữ ghép thành đôi là:

$3!.3!. C_{12}^3 . C_{10}^3$ (cách)

Có rất nhiều học sinh mắc phải sai lầm này kể cả khi đọc lời giải nghe có vẻ hợp lí. Tuy nhiên ở đây số cách ghép đôi đã bị lặp lại.

Lời giải 4: Lời giải đúng

Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là C_{12}^3 (cách)

Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là C_{10}^3 (cách)

Do đó số cách chọn 6 học sinh (3 nam, 3 nữ) là: $C_{12}^3 . C_{10}^3$ (cách)

Trong 6 học sinh chọn ra thì có $3!$ (cách) ghép giữa các đôi nhảy với nhau (là hoán vị của 3 học sinh nam hoặc 3 học sinh nữ)

Vậy số cách chọn thỏa mãn là: $3!. C_{12}^3 . C_{10}^3$ (cách)

Nếu như không đưa ra và phân tích các cách giải thì nhìn vào mỗi cách trên cách giải nào cũng có vẻ hợp lí (có phương án để lựa chọn đối với câu hỏi trắc nghiệm). Đồng thời đưa ra những cách làm sai lầm chốt lại phương án đúng giúp học sinh dễ dàng nhận ra những thiếu sót, sai lầm mắc phải từ đó các em sẽ ghi nhớ tốt.

Ví dụ 6: Lớp 10A1 Trường THPT Phạm Hồng Thái có 44 học sinh. Cần bầu một ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 2 ủy viên. Số cách lập ra ban cán sự là

A. C_{44}^4

B. $A_{44}^1 A_{43}^1 A_{42}^1 A_{41}^1$

C. $C_{44}^2 . C_{42}^2$

D. $A_{44}^2 . C_{42}^2$

Sai lầm thường gặp

Sai lầm 1: Học sinh hiểu đơn giản chọn 4 bạn từ 44 bạn nên số cách lập ra ban cán sự gồm 4 người C_{44}^4

Sai lầm 2: Chọn lớp trưởng có A_{44}^1 , chọn một lớp phó có A_{43}^1 , chọn ủy viên thứ nhất có A_{42}^1 , chọn ủy viên thứ 2 có A_{41}^1 . Vậy số cách chọn theo yêu cầu là: $A_{44}^1 A_{43}^1 A_{42}^1 A_{41}^1$

Nguyên nhân: Khi chọn 1 lớp trưởng, 1 lớp phó thì có thứ tự nhưng khi chọn 2 ủy viên lại không cần thứ tự nên số cách chọn 2 ủy viên là C_{42}^2 hoặc $C_{42}^1 C_{41}^1$

Sai lầm 3: Chọn 2 học sinh để 1 làm lớp trưởng, 1 làm lớp phó có C_{44}^2 cách chọn; Chọn 2 ủy viên trong 38 học sinh còn lại có C_{42}^2

Theo quy tắc nhân có $C_{44}^2 C_{42}^2$ cách.

Nguyên nhân sai lầm:

Chọn 2 học sinh để 1 làm lớp trưởng, 1 làm lớp phó, khi đó cách chọn này **có thứ tự**. Chẳng hạn khi đã chọn 2 học sinh A và B để 1 làm lớp trưởng, 1 làm lớp phó thì có hai cách: A làm lớp trưởng còn B làm lớp phó và B làm lớp trưởng còn A làm lớp phó. Nên mỗi cách chọn là một chỉnh hợp chập 2 của 40 phần tử do đó số cách chọn là $A_{40}^2 = 1560$

Lời giải đúng:

Trước tiên đề định hướng cách giải cho học sinh, giáo viên cần phân tích: Để chọn được một ban cán sự cần thực hiện 3 công đoạn chọn một lớp trưởng, chọn một lớp phó và chọn 2 uỷ viên. Do đó ta có lời giải

Cách 1:

Công đoạn 1: Chọn 1 lớp trưởng có 44 cách.

Công đoạn 2: Chọn 1 lớp phó trong 43 học sinh sau khi đã chọn lớp trưởng có 43 cách.

Công đoạn 3: Chọn 2 uỷ viên trong 42 học sinh còn lại (3 uỷ viên cần chọn **không có thứ tự** nên dùng tổ hợp) có C_{42}^2

Theo quy tắc nhân có $44 \cdot 43 \cdot C_{42}^2$ cách

Cách 2:

Để chọn được một ban cán sự có thể thực hiện 2 công đoạn chọn 2 học sinh để 1 làm lớp trưởng 1 làm lớp phó và chọn 2 uỷ viên. Do đó ta có lời giải

Công đoạn 1: Chọn 2 học sinh để 1 làm lớp trưởng, 1 làm lớp phó, khi đó cách chọn này **có thứ tự** nên số cách chọn là $A_{44}^2 = 1560$

Công đoạn 2: Chọn 2 học sinh trong 42 học sinh còn lại làm uỷ viên, cách chọn này **không có thứ tự** nên số cách chọn là C_{42}^2 .

Vậy số cách chọn ban đại diện lớp là $A_{44}^2 \cdot C_{42}^2$ cách.

Cách 3:

Để chọn được một ban cán sự cũng có thể thực hiện 2 công đoạn. Trước tiên chọn cùng 1 lúc 4 học sinh sau đó rồi mới phân công chức vụ. Do đó ta có lời giải:

Chọn 4 học sinh để làm một ban cán sự cách chọn này **không có thứ tự** nên số cách chọn là C_{44}^4 cách. Với mỗi cách chọn 4 học sinh trên chọn 2 học sinh để 1 làm lớp trưởng, 1 làm lớp phó, khi đó cách chọn này **có thứ tự** nên số cách chọn là $A_4^2 = 12$ cách, tiếp theo chọn 2 học sinh còn lại làm uỷ viên có 1 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $C_{44}^4 \times A_4^2 \times 1$ cách.

Ví dụ 7: Có bao nhiêu cách chia 8 đồ vật đôi một khác nhau cho 3 người sao cho có một người được 2 đồ vật và hai người còn lại mỗi người được 3 đồ vật?

Cách giải

Bước 1: Chọn 2 đồ vật trong 8 đồ vật và chọn 1 người trong 3 người để đưa 2 đồ vật đó có $C_8^2 \cdot C_3^1$ cách.

Bước 2: Chia 6 đồ vật còn lại cho 2 người còn lại, mỗi người được 3 đồ vật có $C_6^3 \cdot C_3^3$ cách. **Chú ý rằng, việc đổi thứ tự 2 người còn lại không cho cách chọn mới.**

Vậy có $C_8^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1680$ cách chọn.

Sai lầm thường gặp: $C_8^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 \cdot 2!$ cách chọn.

Ví dụ 8: (Sai lầm thường gặp - Trần Phương) Cần chọn từ 9 học sinh nữ và 7 học sinh nam ra 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp nhảy nam- nữ. Hỏi có bao nhiêu cách ghép? Một học sinh đã giải như sau :

Số cách chọn 3 nam là $A_7^3 = 210$ cách

Số cách chọn 3 nữ là $A_9^3 = 504$ cách.

Số cách chọn 3 cặp nhảy là : $210 \times 504 = 105840$ cách

Học sinh đã giải sai, em hãy chỉ ra sai lầm ở đâu và giải lại cho đúng?

HD: Quá trình chọn 3 nam từ 7 nam và 3 nữ từ 9 nữ không cần tính đến thứ tự.
Lời giải đúng là :

Số cách chọn 3 nam là $C_7^3 = 35$ cách

Số cách chọn 3 nữ là $C_9^3 = 84$ cách.

Số cách chọn 3 nam và 3 nữ là $35 \times 84 = 2940$ cách

Do đó số cách ghép 3 cặp nhảy nam- nữ là $3! \times 2940 = 17640$

Ví dụ 9: Trên mặt phẳng cho một đa giác lồi có n cạnh

a) Tìm số đường chéo của đa giác?

b) Xét các tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho. Hỏi trong số các tam giác đó có bao nhiêu tam giác mà 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác đã cho?

HD

a) **Cách 1:** Số đoạn thẳng nối 2 đỉnh của đa giác là C_n^2 số cạnh của đa giác là 10 nên số đường chéo của đa giác là $C_n^2 - n$.

Cách 2: Từ một đỉnh của đa giác kẻ tới $n-3$ đỉnh kia (trừ đỉnh đó và hai đỉnh kề nó) được $n-3$ đường thẳng nên kẻ được tất cả $n(n-3)$ đường thẳng. Mỗi đường thẳng nói trên đã được tính lặp 2 lần chẳng hạn từ đỉnh A đã nối tới D sau đó từ đỉnh D lại nối tới A. Do đó số đường chéo phân biệt của đa giác lồi n cạnh là: $\frac{n(n-3)}{2}$.

b) Số các tam giác phân biệt có 3 đỉnh lấy từ n đỉnh của đa giác lồi là C_n^3 tam giác. Ứng với một cạnh của đa giác có $n-2$ cách chọn đỉnh để tạo thành một tam giác, do đó có $n(n-2)$ tam giác có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác đã cho. Trong đó có n tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh liên tiếp của đa giác nhưng bị tính lặp 2 lần chẳng hạn $\triangle ABC \equiv \triangle CBA$ nên số tam giác phân biệt có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác đã cho là: $n(n-2) - n = n(n-3)$. Nên số tam giác mà 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác đã cho là $C_n^3 - n(n-3)$

2.3.2. Xét thiếu các trường hợp trong bài toán giải bằng phương pháp gián tiếp

Ví dụ 1: (Chinh phục bài tập Tổ hợp - xác suất-Nguyễn Quang Sơn) Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó. Người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra 15 phút sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra?

Giải

Lời giải 1:

Bước 1: chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^{10} (cách)

Bước 2: chọn 10 câu không thỏa mãn đầu bài (có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó).

TH1: chọn 10 câu dễ và trung bình trong 16 câu có C_{16}^{10} (cách)

TH2: chọn 10 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^{10} (cách)

TH3: chọn 10 câu trung bình và khó trong 11 câu có C_{11}^{10} (cách)

Vậy có: $C_{20}^{10} - (C_{16}^{10} + C_{13}^{10} + C_{11}^{10}) = 176451$ đề kiểm tra

Lời giải 2:

Chia từng trường hợp cụ thể:

TH1: 1 khó, 1 TB và 8 dễ: $C_4^1 \cdot C_7^1 \cdot C_9^8$

TH2: 1 khó, 2 TB và 7 dễ: $C_4^1 \cdot C_7^2 \cdot C_9^7$

TH3: 1 khó, 3 TB và 6 dễ: $C_4^1 \cdot C_7^3 \cdot C_9^6$

.....

Nhận xét: Tất nhiên 2 lời giải trên là 2 lời giải đúng nhưng lời giải 2 thì mang cách giải thủ công nên làm dài và mất thời gian. Khi dạy chúng ta hướng các em sử dụng bài toán gián tiếp. Tuy nhiên khi sử dụng phương pháp này học sinh lại có thể mắc phải các sai lầm tương tự như trong các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2: Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó. Người ta chọn ra 7 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra?

Chú ý rằng so với ví dụ 1 thì ví dụ 2 chỉ thay đổi 1 chút là thay vì chọn ra 10 câu thì chọn ra 7 câu. Nghe qua thì có vẻ cách làm chẳng có gì khác, tuy nhiên sự thay đổi đó có thể gây sai lầm. Vậy hãy xem các lời giải sau:

Lời giải 1:

Bước 1: Chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^7 (cách)

Bước 2: Chọn 7 câu không thỏa mãn đầu bài

TH1: Chọn 7 câu dễ và trung bình trong 16 câu có C_{16}^7 (cách)

TH2: Chọn 7 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^7 (cách)

TH3: chọn 7 câu trung bình và khó trong 11 câu có C_{11}^7 (cách)

Vậy có: $C_{20}^7 - (C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7) = 64034$ đề kiểm tra

Lời giải 2:

Bước 1: Chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^7 (cách)

Bước 2: Chọn 7 câu không thỏa mãn đầu bài (có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó).

TH1: Chọn 7 câu dễ trong 9 câu dễ có C_9^7 (cách)

TH2: Chọn 7 câu trung bình trong 7 câu trung bình có 1 (cách)

TH3: Chọn 7 câu dễ và trung bình trong 16 câu có C_{16}^7 (cách)

TH4: Chọn 7 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^7 (cách)

TH5: Chọn 7 câu trung bình và khó trong 11 câu có C_{11}^7 (cách)

Vậy có: $C_{20}^7 - (1 + C_9^7 + C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7) = 63997$ đề kiểm tra

Nhận xét: Cũng là bài toán tương tự bài toán trên, lời giải 1 rất giống lời giải đúng của bài toán trên nhưng 2 lời giải lại cho 2 đáp án khác nhau. Vậy đâu là lời giải đúng?

Phân tích:

Lời giải 2: là đúng vì đã loại trừ tất cả các khả năng không cần thiết yêu cầu của bài toán

Lời giải 1: HS sai lầm ở chỗ là loại trừ không hết các điều kiện không thỏa mãn bài toán.

Ở ví dụ 1 thì số câu được chọn nhiều hơn số câu của 1 loại dễ hoặc TB hoặc khó (tức là chọn 10 câu, trong đó có 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó). Trong khi ví dụ 2 thì số câu được chọn có ít hơn 1 trong số câu của 1 loại dễ hoặc TB hoặc khó (tức là chọn 7 câu, trong đó có 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó). Cho nên

trong 7 câu được chọn HS sót ở chỗ 7 câu đó có thể toàn là câu dễ hoặc toàn là câu khó.

Do đó kết quả sẽ nhiều hơn đáp án đúng.

2.3.3. Bài toán đếm số các số thỏa mãn tính chất α

Ví dụ 1: (Bài 71 sgk Đại số và giải tích 11).

Với các chữ số 0,1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm năm chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0)

Sai lầm thường gặp:

Lời giải 1 (Lời giải sai):

- Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$

Chọn số ở vị trí e có 4 cách chọn từ tập $\{0,2,4,6\}$

Chọn các số ở vị trí a,b,c,d có C_6^4 cách

$\Rightarrow$ Có $4 \cdot C_6^4 = 60$ số chẵn trong đó có cả số có chữ số 0 đứng đầu

Tìm các số chẵn có số có chữ số 0 đứng đầu

Vì chữ số 0 đứng đầu nên chọn số ở vị trí e có 3 cách chọn từ tập $\{2,4,6\}$

Chọn 3 số ở vị trí b,c,d có C_5^3 cách (Trừ số ở vị trí e và số 0)

$\Rightarrow$ Có $1 \cdot 3 \cdot C_5^3 = 30$ số có chữ số 0 đứng đầu

- Vậy số các số cần tìm là $60 - 30 = 30$ số

Nguyên nhân sai lầm:

Lời giải trên sai ở chỗ đã không kể đến thứ tự khi chọn 4 số a,b,c,d bởi vì mỗi một hoán vị của 4 số đó đã cho thêm một số khác.

Tương tự khi tìm các số chẵn có số có chữ số 0 đứng đầu cũng không kể đến thứ tự khi chọn 3 số ở vị trí b,c,d

Lời giải 2 (Lời giải sai):

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$

Chọn số ở vị trí e có 4 cách chọn từ tập $\{0,2,4,6\}$

Chọn số ở vị trí a có 5 cách chọn trừ e và 0

Chọn số ở vị trí b có 5 cách chọn trừ e và a

Chọn số ở vị trí c có 4 cách chọn

Chọn số ở vị trí d có 3 cách chọn

Theo quy tắc nhân có $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1200$ số

Nguyên nhân sai lầm

- Trong trường hợp $e \neq 0$ thì chọn số ở vị trí a có 5 cách là đúng

- Trong trường hợp $e = 0$ thì chọn số ở vị trí a có 5 cách là sai vì lúc này chọn số ở vị trí a có 6 cách chọn chỉ trừ e

Lời giải 3 (Lời giải đúng):

- Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$

Chọn số ở vị trí e có 4 cách chọn từ tập $\{0,2,4,6\}$

Chọn các số ở vị trí a,b,c,d có A_6^4 cách

$\Rightarrow$ Có $4 \cdot A_6^4 = 4 \cdot 360 = 1440$ số chẵn trong đó có cả số có chữ số 0 đứng đầu.

- Tìm các số chẵn có số có chữ số 0 đứng đầu

Vì chữ số 0 đứng đầu nên chọn số ở vị trí e có 3 cách chọn từ tập $\{2, 4, 6\}$

Chọn 3 số ở vị trí b, c, d có A_5^3 cách (Trừ số ở vị trí e và số 0)

$\Rightarrow$ Có 1.3. $A_5^3 = 3.60 = 180$ số có chữ số 0 đứng đầu

Vậy số các số cần tìm là $1440 - 180 = 1260$ số

Lời giải 4 (Lời giải đúng):

Cách 1: Dùng quy tắc nhân

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ vì số cần tìm là số chẵn nên các số cần tìm có dạng $\overline{abcd0}$, $\overline{abcd2}$, $\overline{abcd4}$, $\overline{abcd6}$.

Tìm số các số dạng $\overline{abcd0}$,

Chọn số ở vị trí a có 6 cách chọn trừ 0

Chọn số ở vị trí b có 5 cách chọn trừ 0 và a

Chọn số ở vị trí c có 4 cách chọn

Chọn số ở vị trí d có 3 cách chọn

Theo quy tắc nhân có $6.5.4.3 = 360$ số

- Tìm số các số dạng $\overline{abcd2}$

Chọn số ở vị trí a có 5 cách chọn trừ e và 0

Chọn số ở vị trí b có 5 cách chọn trừ e và a

Chọn số ở vị trí c có 4 cách chọn

Chọn số ở vị trí d có 3 cách chọn

Theo quy tắc nhân có $5.5.4.3 = 300$ số

- Tương tự mỗi dạng $\overline{abcd4}$, $\overline{abcd6}$ cho ta 300 số

Theo quy tắc cộng có $360 + 300 + 300 + 300 = 1260$ số chẵn gồm năm chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0)

Cách 2 (Sử dụng kiến thức chỉnh hợp):

Cần làm cho học sinh thấy rõ mỗi một số cần tìm là một chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử của tập đã cho, chẳng hạn từ các số 0, 1, 2, 5, 7 có thể thành lập được các số chẵn chẳng hạn các số 12570, 12750, 70152, 75012... là các số cần tìm.

Hay nói cách khác mỗi số cần tìm là một tập con có tính thứ tự.

- Tìm các số các số dạng $\overline{abcd0}$, có $A_6^4 = 360$ số.

- Tìm các số chẵn dạng $\overline{abcde}$ với $e \in \{2, 4, 6\}$

Chọn số ở vị trí e có 3 cách chọn vì $e \in \{2, 4, 6\}$

Chọn số ở vị trí a có 5 cách chọn.

Chọn b, c, d có $A_5^3 = 900$ cách.

Theo quy tắc cộng có $360 + 900 = 1260$ số

Ghi nhớ

- Khi thành lập các số từ một tập hợp cần chú ý xem tập hợp đó có chứa số 0 hay không. Nếu chứa số 0 nên chia thành hai trường hợp.

- Với loại toán này nên sử dụng kiến thức về hoán vị, chỉnh hợp thì lời giải sẽ ngắn gọn hơn

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho chín chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

a) Từ tập hợp sáu chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số mỗi số có năm chữ số đôi một khác nhau?

b) Từ tập hợp sáu chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số mỗi số có năm chữ số đôi một khác nhau và trong đó nhất thiết có mặt chữ số 5?

Bài 2: (Giải Toán Tổ hợp và xác suất ở trường THPT-Trần Đức Huyền – Đặng Phương Thảo) Từ bảy chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau, trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5?

Bài 3: Từ các chữ số 1, 2, 3, 5, 7, 8. Có thể lập được bao nhiêu số mỗi số có 3 chữ số đôi một khác nhau sao cho

a) Số tạo thành là số chẵn

b) Số tạo thành không có mặt chữ số 7

a) Số tạo thành nhỏ hơn số 278

HD: a) Có $2.A_5^2$ số; b) Có A_5^3 số

Bài 4: Viết các số có 6 chữ số từ các chữ số : 1, 2, 3, 4, 5 như sau: Trong mỗi số có một chữ số xuất hiện 2 lần, các chữ số còn lại xuất hiện 1 lần. Hỏi có bao nhiêu số như vậy?

Bài 5: Xét một số gồm 9 chữ số trong đó có 5 chữ số 1 và 4 chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế nếu 5 chữ số 1 kề nhau.

2.3.4 Sai lầm khi áp dụng cách giải dạng bài tập này cho bài tập khác có nội dung tương tự

Ví dụ 1: Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 1?

Giải

Cách 1: Gọi số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ tập A là: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, $a_1 \neq 0$

Số cách chọn a_1 có 5 cách

Số cách chọn $a_2 a_3 a_4 a_5$ là số chỉnh hợp chập 4 của 5 có: A_5^4 (cách)

Suy ra : có 5. $A_5^4 = 600$ (số)

Trong 600 số trên thì:

Số không có chữ số 0 được lập từ tập $A_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ là số hoán vị của 5 số thuộc A_1 nên có $P_5 = 120$ (số)

Số không có chữ số 1 được lập từ tập $A_2 = \{0; 2; 3; 4; 5\}$

Số cách chọn $a_1 \neq 0$ có 4 cách

Số cách chọn $a_2 a_3 a_4 a_5$ là số hoán vị của 4 có P_4 (cách)

Suy ra có: $4.P_4 = 96$ (số)

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có: $600 - (120 + 96) = 384$ (số)

Cách 2:

Chọn 5 ô

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Số cách chọn số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 1, chính là số cách xếp 5 chữ số từ tập A vào 5 ô liên tiếp nhau:

Vì nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 1 nên ta chọn số 0 và 1 xếp trước

Vì số 0 không được đứng ở vị trí đầu tiên nên có 4 cách xếp.

Số 1 có 4 cách xếp vào 4 vị trí còn lại.

Số cách xếp 3 số còn lại chính là số chỉnh hợp chập 3 của 4: A_4^3

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có: $4 \cdot 4 \cdot A_4^3 = 384$ (số)

Nhận xét: Hai cách giải đều đúng và cách 2 là cách có tính khả thi nhất, áp dụng được cho nhiều bài.

Giải thích:

Cách 2: ngắn gọn, dễ hiểu và cô đọng hơn, học sinh dễ áp dụng và dễ trình bày hơn.

Cách 1: Áp dụng được vì trong 600 số đó chỉ có 3 loại số trong cách thành lập số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau

Loại 1: Số không có chữ số 0.

Loại 2: Số không có chữ số 1.

Loại 3: Số có cả chữ số 0 và 1.

Nên lấy 600 số gồm 3 loại trừ cho loại 1 và loại 2 thì còn lại loại 3.

Ví dụ 2: Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 1?

Giải

Cách 1: Gọi số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau được lập từ tập A là: $\overline{a_1 a_2 a_3}$, $a_1 \neq 0$

Số cách chọn a_1 có 4 cách

Số cách chọn $a_2 a_3$ là số chỉnh hợp chập 2 của 4 có: A_4^2 (cách)

Suy ra có: $4 \cdot A_4^2 = 48$ (số)

Trong 48 số trên thì: Số không có chữ số 0 được lập từ tập $A_1 = \{1; 2; 3; 4\}$ là số chỉnh hợp chập 3 của 4: $A_4^3 = 24$ (số)

Số không có chữ số 1 được lập từ tập $A_2 = \{0; 2; 3; 4\}$

Số cách chọn $a_1 \neq 0$ có 3 cách

Số cách chọn $a_2 a_3$ là số chỉnh hợp chập 2 của 3 có: A_3^2 (cách)

Suy ra có: $3 \cdot A_3^2 = 18$ (số)

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có: $48 - (24 + 18) = 6$ (số)

Cách 2:

1	2	3
---	---	---

Số cách chọn số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 3, chính là số cách xếp 3 chữ số từ tập A vào 3 ô liên tiếp nhau:

Vì nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 1 nên ta chọn số 0 và 1 xếp trước

Vì số 0 không được đứng ở vị trí đầu tiên nên có 2 cách xếp.

Số 1 có 2 cách xếp vào 2 vị trí còn lại.

Số cách xếp 1 số còn lại chính là số chỉnh hợp chập 1 của 3: có A_3^1 (cách)

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có: $2 \cdot 2 \cdot A_3^1 = 12$ (số)

Nhân xét: Kết quả hai cách giải khác nhau. Tại sao cũng là bài toán tương tự mà cách giải trên áp dụng đúng nhưng bài toán sau áp dụng lại không giống với cách giải kia. Vậy cách nào đúng, cách nào sai và sai lầm ở đâu?

Giải thích: Cách 2 đúng, cách 1 sai vì trong 48 số đó có hơn 3 loại số nên cách giải này vẫn áp dụng được nhưng không nên chọn vì dễ mắc sai lầm.

Sơ đồ minh họa:

số gồm có: $\begin{cases} \text{số không có chữ số 0} \\ \text{số không có chữ số 1} \\ \text{số không có chữ số 0 và 1} \\ \text{số có chữ số 0 và 1} \end{cases}$

Trong bài 2 này nếu bỏ ra chữ số 0 và 1 thì còn lại 3 số 2; 3; 4 nên lập được số có 3 chữ số khác nhau không có số 0 và 1. Chính vì thế mà trong 48 số đó có tới 4 loại số.

Khi trừ đi số không có chữ số 0 thì:

Trong 48 số chỉ còn: $\begin{cases} \text{số không có chữ số 0} \\ \text{số không có chữ số 1} \\ \text{số không có chữ số 0 và 1} \\ \text{số có chữ số 0 và 1} \end{cases}$ (phần gạch ngang là phần loại trừ)

Khi trừ đi tiếp số không có chữ số 1 thì trong 48 số chỉ còn:

$\begin{cases} \text{số không có chữ số 0} \\ \text{số không có chữ số 1} \\ \text{số không có chữ số 0 và 1} \\ \text{số có chữ số 0 và 1} \end{cases}$ (phần 2 gạch chéo là phần loại trừ 2 lần)

Trên sơ đồ ta nhìn thấy số không có chữ số 0 và 1 bị trừ đi hai lần nên dẫn đến trường hợp mất số. Số không có chữ số 0 và 1 có tất cả 6 số và bị trừ đi hai lần nên kết quả của cách 1 bị mất đi 6 số so với kết quả của cách 2 là 12 số.

Còn trong bài 1 nếu bỏ ra chữ số 0 và 1 thì còn lại 4 số 2; 3; 4; 5 nên không thể lập được số có 5 chữ số khác nhau. Chính vì thế mà trong bài 1 chỉ có 3 loại số nên cách giải 1 áp dụng cho bài 1 hoàn toàn đúng.

Ví dụ 3: Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5?

Giải

Lời giải 1: Gọi số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ tập A là: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, $a_1 \neq 0$

Số cách chọn a_1 có 6 cách.

Số cách chọn $a_2 a_3 a_4 a_5$ là số chỉnh hợp chập 4 của 6 có: A_6^4 (cách)

Suy ra: có $6 \cdot A_6^4 = 2160$ (số)

Trong 2160 số trên thì số không có chữ số 5 được lập từ tập $A_1 = \{0; 1; 2; 3; 4; 6\}$

Số cách chọn $a_1 \neq 0$ có 5 cách.

Số cách chọn $a_2 a_3 a_4 a_5$ là số chỉnh hợp chập 4 của 5 có: A_5^4 (cách)

Suy ra: có $5 \cdot A_5^4 = 600$ (số)

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có: $2160 - 600 = 1560$ (số)

Lời giải 2:

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Số cách chọn số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5, chính là số cách xếp 5 chữ số từ tập A vào 5 ô liên tiếp nhau

Vì muốn có mặt chữ số 5 thì số 5 có 5 vị trí xếp.

4 chữ số còn lại là số chỉnh hợp chập 4 của 6: Có A_6^4 (cách)

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có: $5 \cdot A_6^4 = 1800$ (số)

Nhận xét: Kết quả hai cách giải khác nhau. Vậy cách nào đúng, cách nào sai và sai lầm ở đâu?

Giải thích: Cách giải 1 đúng cách giải 2 sai.

Đến đây chúng ta đã thấy xuất hiện sự mâu thuẫn là tại sao bài 2 và bài 3 có cùng dạng nhưng tại sao đối với bài 2 thì cách 1 sai, cách 2 đúng. Còn bài 3 thì cách 1 đúng, cách 2 sai. Sai lầm do số 5 đặt ở vị trí **ô số 1** thì khác, **ô số 2,3,4,5** thì khác. Số 0 đã làm bài toán phức tạp thêm. Vậy vấn đề được đặt ra ở đây là khi nào chọn cách giải nào cho đúng với bài toán đặt ra.

Thực ra cách giải 2 ở đây bị thiếu chứ không phải là không áp dụng được.

Tôi xin bổ sung cho cách giải 2 để cách giải 2 trở thành cách giải đúng, mang tính khả thi hơn và được áp dụng rộng hơn so với cách 1.

Phần bổ sung cho cách giải 2: Ta xem phần bài giải trên là trường hợp cho tất cả: số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5 nhưng số đầu tiên có thể là số 0 hoặc không phải là số 0.

Số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5 và chữ số 0 xếp đầu tiên.

$a_1 = 0$ nên 4 vị trí còn lại có 4 cách xếp số 5.

Số cách xếp 3 số còn lại từ 5 số chính là số chỉnh hợp chập 3 của 5: có A_5^3 (cách). Suy ra có: $4 \cdot A_5^3 = 240$ (số)

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có: $1800 - 240 = 1560$ (số)

Tóm lại

Khi giải toán về hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp học sinh thường gặp phải một số sai lầm sau:

- Nhầm lẫn giữa tổ hợp và chỉnh hợp
- Xét thiếu các trường hợp trong bài toán giải bằng phương pháp gián tiếp
- Bài toán đếm các số thỏa mãn một tính chất nào đó
- Áp dụng cách giải giữa các bài toán có nội dung tương tự

Do đó trong mỗi phần thông qua các ví dụ tôi đã chỉ rõ những sai lầm thường gặp và cách khắc phục. Mục đích giúp các em học sinh củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em, trả lời một cách thỏa đáng câu hỏi “Tại sao kết quả giải cách này không giống kết quả cách giải kia? Tại sao cách giải trước áp dụng đúng nhưng qua bài khác tương tự thì không? Cách nào đúng, cách nào sai? Sai lầm ở đâu?..”. Qua đó luyện tập cho học sinh thói quen suy nghĩ, quan sát, lập luận để học sinh phát huy trí thông minh, óc sáng tạo, khả năng phân tích, tổng hợp, tư duy độc lập và thông qua việc thảo luận, tranh luận mà học sinh phát triển khả năng nói lưu loát, biết lí luận chặt chẽ khi giải toán. Ngoài ra có rất nhiều bài toán được giải nhiều cách khác nhau sẽ giúp các em học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải và áp dụng vào giải toán một cách thành thạo và chính xác.

2.4. Hiệu quả sáng kiến kinh nghiệm.

2.4.1. Kết quả chung

Sáng kiến này tôi đã áp dụng cho học sinh lớp 11A3, lớp 11D8 và lớp 10A1 tôi đang dạy tại trường THPT Phạm Hồng Thái. Kết quả là các em lớp 11A3 và 10A1 đều yêu thích dạng toán này, rất tích cực trong tìm tòi lời giải và giải toán. Đặc biệt ở lớp 10A1, có học sinh mạnh dạn một mình một ý kiến bảo vệ đến cùng để tìm ra lời giải đúng nhất cho bài. Còn với lớp 11D8- ban D, các con đã giảm được áp lực tâm lý khi giải bài toán tổ hợp.



Khi tôi thực hiện chuyên đề này đa số học sinh rất hiểu bài và không còn sự lúng túng trong việc chọn cách giải cho một bài toán, qua đó kích thích được tính tò mò ham học hỏi của học sinh, phát hiện ra điều kỳ diệu của Đại số tổ hợp và tạo được sự yêu thích của học sinh đối với đề tài này.

2.4.2. Kết quả kiểm tra

Trong năm học 2022-2023, tôi đã so sánh kết quả thực nghiệm của lớp 11A3 khi không áp dụng đề tài với lớp 10A1 (theo chương trình sách giáo khoa mới) khi áp dụng đề tài; *trên cùng một bài kiểm tra*. Đây là hai lớp TN có khả năng tiếp thu tương đương nhau (Số số mỗi lớp 45). Kết quả: Các em học sinh lớp 11A3 đạt kết quả tốt hơn các em học sinh lớp 10A1, cụ thể:

Điểm Lớp	0	1-2	3	4	5	6	7	8	9	10
11A3			3 7.5%	2 5%	8 20%	3 7.5%	8 20%	7 17.5%	5 12.5%	4 10%
11D8		3 7.5%	2 5%	8 20%	3 7.5%	8 20%	5 12.5%	5 12.5%	4 10%	2 5%
10A1			2 2%	3 3%	3 9.5%	6 15%	8 25.5%	6 15%	5 12.5%	7 17.5%

Từ kết quả thực nghiệm đã minh chứng được việc đưa chuyên đề: "**Khắc phục một số sai lầm thường gặp của học sinh khi giải toán Đại số tổ hợp**" vào giảng dạy là cần thiết, nhằm nâng cao chất học tập cũng như chất lượng thi học sinh giỏi và thi THPT Quốc gia.

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận

Đại số tổ hợp là một dạng toán thực sự khó, chính vì lý do đó mà học sinh dễ buông xuôi, không chịu đầu tư và học hỏi. Giải pháp giảng dạy này của tôi đã kích thích được tính tò mò, ham học hỏi và tạo được sự yêu thích của học sinh đối với phần kiến thức Đại số tổ hợp nói riêng và bộ môn Toán nói chung. Thông qua đó phát huy được ở học sinh tư duy phân tích tổng hợp, tư duy logic, tư duy trừu tượng, có phong cách nghiên cứu làm nền tảng cho việc học tập và nghiên cứu sau này. Từ đây các em có thể tự mình làm các chuyên đề dạng khác để thấy được mối quan hệ biện chứng, tính độc lập và tính phụ thuộc của các kiến thức khoa học.

Qua đề tài này tôi rất mong được ủng hộ và góp ý nhiệt thành của quý đồng nghiệp để đề tài này trở thành một công cụ thiết thực cho việc dạy và học nhằm đẩy mạnh việc đổi mới nâng cao chất lượng dạy học theo xu thế hiện nay. Khi trình bày không tránh khỏi nhiều điều sai sót rất mong được đóng góp ý kiến để hoàn chỉnh hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

3.2. Kiến nghị

Đối với sở GD&ĐT Hà Nội: Tổ chức nhiều chuyên đề cấp tỉnh về nâng cao chất lượng dạy - học bộ môn toán cho giáo viên được tham gia, vào thời điểm phù hợp.

Đối với Nhà trường: Nên có sự động viên khuyến khích giáo viên đổi mới PPDH dưới nhiều hình thức khác nhau.

Đối với giáo viên

Phải thường xuyên tự học, tự bồi dưỡng để nâng cao năng lực chuyên môn, nghiệp vụ sư phạm, đổi mới phương pháp dạy học môn Toán. Hạn chế tối đa phương pháp dạy học truyền thống lấy giáo viên làm trung tâm.

Phải luôn tìm tòi, sáng tạo để từng bước cải tiến phương pháp dạy học cho phù hợp với từng tiết học, bài học và những đối tượng học sinh khác nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa Toán 10 (2022), bộ Cánh diều, Nxb Đại học Sư phạm .
2. Sách giáo khoa Toán 10 (2022), bộ Kết nối tri thức với cuộc sống, Nxb Giáo dục Việt Nam.
3. Sách giáo khoa Toán 10 (2022), bộ Chân trời sáng tạo, Nxb Giáo dục Việt Nam.
4. Sách giáo khoa Đại số và giải tích 11, chương trình GDPT 2018, Nxb Giáo dục Việt Nam.
5. Sách bài tập Đại số và giải tích 11, chương trình GDPT 2018, Nxb Giáo dục Việt Nam.
6. Trần Phương, Đại số và tổ hợp, Nxb Trí Đức.

**XÁC NHẬN
CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ**

Hà Nội, ngày 15 tháng 3 năm 2023
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,
không sao chép nội dung của người khác.

Nguyễn Phương Chi