

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**PHÂN TÍCH VÀ SỬA CHỮA SAI LẦM CỦA HỌC SINH
KHI GIẢI BÀI TOÁN ĐẾM, TỪ ĐÓ XÂY DỰNG
PHƯƠNG ÁN NHIỀU CHO BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

Môn: Toán.

Cấp học: Trung học phổ thông.

Tên tác giả: Nguyễn Như Tùng.

Đơn vị công tác: THPT Phan Đình Phùng.

Chức vụ: Tổ trưởng chuyên môn.

NĂM HỌC: 2020 – 2021

MỤC LỤC

	Trang
PHẦN I. ĐẶT VẤN ĐỀ	2
1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI	2
2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU	2
3. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU	3
4. PHẠM VI NGHIÊN CỨU	3
5. NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU	3
6. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU	3
7. GIẢ THUYẾT KHOA HỌC	4
8. DỰ BÁO NHỮNG ĐÓNG GÓP MỚI CỦA ĐỀ TÀI	4
PHẦN II. NỘI DUNG	5
1. CƠ SỞ LÝ LUẬN	5
2. THỰC TRẠNG VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU	10
3. THỰC TRẠNG CỦA ĐỀ TÀI	14
4. CÁC GIẢI PHÁP	16
4.1. Phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh, từ đó xây dựng phương án nhiều cho bài tập trắc nghiệm tương ứng trong các bài toán đếm ở mức độ nhận biết	16
4.2. Phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh, từ đó xây dựng phương án nhiều cho bài tập trắc nghiệm tương ứng trong các bài toán đếm ở mức độ thông hiểu	22
4.3. Phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh, từ đó xây dựng phương án nhiều cho bài tập trắc nghiệm tương ứng trong các bài toán đếm ở mức độ vận dụng thấp	28
4.4. Phân tích và sửa chữa những sai lầm thường gặp trong các bài toán đếm ở mức độ vận dụng cao	37
5. THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM	47
PHẦN III. KẾT LUẬN	49
PHỤ LỤC	50
TÀI LIỆU THAM KHẢO	51

PHẦN I. ĐẶT VẤN ĐỀ

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Đảng và nhà nước ta đặc biệt coi trọng sự nghiệp giáo dục và đào tạo (GD&ĐT), coi con người là mục tiêu, là động lực của sự phát triển. GD&ĐT là quốc sách hàng đầu cho nên muốn tiến hành công nghiệp hoá, hiện đại hoá thắng lợi phải phát triển mạnh GD&ĐT. Đây chính là những cơ hội, những thách thức mới đòi hỏi ngành GD&ĐT phải có nhiều đổi mới, trong đó có đổi mới về hình thức thi và đổi mới về chương trình giáo dục.

Trong chương trình môn toán THPT, bài toán Tổ hợp – xác suất là một trong các chủ đề có mặt trong các kỳ thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng mà nay là kỳ thi THPTQG do Bộ giáo dục và Đào tạo quy định. Thực tế cho thấy, học toán Tổ hợp – xác suất luôn khó đối với học sinh. Học sinh phân vân giữa các công thức “na ná” như nhau, không hiểu rõ bản chất bài toán nên hiểu lầm dẫn đến sai kết quả. Lâu dần các em sẽ trở nên chán nản và không muốn học Tổ hợp – xác suất nữa. Chính vì vậy, dạy học như thế nào cho phù hợp và mang lại hiệu quả là điều mà bản thân tôi thường xuyên trăn trở.

Đứng trước sự chuyển mình rõ rệt của hình thức thi môn Toán từ tự luận sang trắc nghiệm khách quan như hiện nay, đòi hỏi cả giáo viên và học sinh phải thay đổi phương pháp dạy và học để đáp ứng với yêu cầu đổi mới.

Thực tiễn dạy học nhiều năm chủ đề Tổ hợp–xác suất tôi nhận thấy đa phần học sinh còn giải toán một cách máy móc, tương tự mà chưa hiểu thấu đáo và tường tận vấn đề, dẫn đến việc học sinh gặp những sai lầm. Có nhiều học sinh làm toán nhưng không phân biệt được tính đúng sai, khi sai mà vẫn ngỡ là mình đúng, lúc đúng thì vẫn hoài nghi về kết quả. Có thể nói đây là một chương khá khó đối với học sinh và cả giáo viên. Trước những sai lầm thường gặp của học sinh, tôi đã từng trăn trở và tìm cách tháo gỡ những khó khăn này để giúp học sinh nhận ra lỗi sai của mình, hướng các em tìm đến kết quả chính xác cho bài toán, từ đó góp phần giúp học sinh “tinh táo” và phản ứng tốt trước các phương án nhiễu của bài tập trắc nghiệm.

Xuất phát từ những lí do trên, tôi đã tìm tòi và tích lũy trong quá trình giảng dạy và viết thành sáng kiến kinh nghiệm với đề tài: ***“Phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh khi giải bài toán đếm, từ đó xây dựng phương án nhiễu cho bài tập trắc nghiệm”***

Trong phạm vi bài viết của mình, tôi chưa thể trình bày được toàn bộ các sai lầm của học sinh khi giải các bài toán đếm, tôi cũng không gán cho mỗi sai lầm một tên gọi riêng mà đề tài chú trọng việc chỉ ra những sai lầm của học sinh dựa trên bốn mức độ: nhận biết, thông hiểu, vận dụng thấp, vận dụng cao. Từ đó, đề tài đưa ra cách sửa chữa những sai lầm cho học sinh, đồng thời đưa các kết quả của sai lầm làm phương án nhiễu để tạo nên các câu hỏi trắc nghiệm tương ứng.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Tôi nghiên cứu đề tài này nhằm mục đích

- Nâng cao chất lượng dạy học môn Đại số và giải tích 11 nói riêng và môn Toán bậc THPT nói chung.
- Giúp học sinh nhận ra những sai lầm thường gặp khi giải bài toán đếm, để sửa chữa các sai lầm đó kịp thời, chính xác.
- Làm cho học sinh có niềm say mê đối với toán tổ hợp xác suất nói chung và với bài toán đếm nói riêng.
- Góp phần giúp học sinh có thêm kỹ năng làm tốt bài tập trắc nghiệm, đáp ứng được yêu cầu đổi mới của hình thức thi THPT QG môn toán như hiện nay.

3. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

- Các tài liệu liên quan đến đề tài, SGK Đại số và giải tích 11 ban cơ bản, các diễn đàn internet; các tạp chí toán học tuổi trẻ.
- Các bài toán về tổ hợp xác suất trong đề thi THPT Quốc gia, các đề thi thử THPT Quốc gia của các trường, đề tham khảo, đề minh họa THPTQG của Bộ GD&ĐT.
- Học sinh và giáo viên trường Trung Học Phổ Thông.

4. PHẠM VI NGHIÊN CỨU

- Đề tài tập trung nghiên cứu những sai lầm thường gặp của học sinh khi giải bài toán đếm trong chương II: **Tổ hợp – xác suất Đại số và giải tích 11 – Ban Cơ bản**.
- Nghiên cứu về cách sửa chữa sai lầm cho học sinh khi giải bài toán đếm, nghiên cứu xây dựng phương án nhiều cho bài tập trắc nghiệm.
- Thời gian tiến hành nghiên cứu trong năm học 2020 – 2021.

5. NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU

- Nghiên cứu cơ sở lí luận và thực tiễn dạy học ở trường THPT, nơi tôi đang công tác.
- Nghiên cứu các bài toán đếm, nội dung chương II: Tổ hợp–xác suất, Đại số và giải tích 11;
- Khảo sát và đánh giá thực trạng dạy và học chương II: Tổ hợp– xác suất của SGK Đại số và giải tích 11 ban cơ bản, thực trạng khi làm bài toán đếm.
- Phân tích và sửa chữa những sai lầm thường gặp của học sinh khi giải bài toán đếm theo bốn mức độ: nhận biết, thông hiểu, vận dụng thấp, vận dụng cao, từ đó xây dựng phương án nhiều trong bài tập trắc nghiệm tương ứng.
- Áp dụng đề tài vào lớp thực nghiệm và lớp đối chứng để đánh giá kết quả thực nghiệm.
- Rút ra những kết luận cần thiết.

6. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Để phục vụ mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu, tôi đã sử dụng các nhóm phương pháp sau:

6.1. Nhóm phương pháp nghiên cứu lí luận

- Nghiên cứu nghị quyết 29 về “Đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo”;
- Quyết định số 16/2006/ QĐ–BGDDT ngày 5/5/2006 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

6.2. Nhóm phương pháp nghiên cứu thực tiễn

Phương pháp điều tra, quan sát

- Điều tra về thực trạng tình hình dạy học ở trường THPT;
- Điều tra về khả năng giải bài toán đếm trong chương II: Tổ hợp–xác suất, Đại số và giải tích 11, điều tra về làm bài trắc nghiệm bài toán đếm;

Phương pháp trao đổi

- Dự giờ các đồng nghiệp, trao đổi cùng đồng nghiệp;

Phương pháp thu thập tài liệu

- Thu thập và chọn lọc các tài liệu có trong thư viện nhà trường, của đồng nghiệp, các trang mạng có tài liệu liên quan đến đề tài;

Phương pháp thực nghiệm sư phạm

- Áp dụng việc phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh, từ đó xây dựng các phương án nhiều trong bài tập trắc nghiệm tương ứng vào lớp 11A6 và 12A1, nơi tôi đang công tác;

7. GIẢI THUYẾT KHOA HỌC

Trong thực tiễn dạy học, bản thân tôi đã áp dụng đề tài vào giảng dạy và thu được kết quả rất khả quan, các em sửa chữa sai lầm được kịp thời và giảm đáng kể việc chọn phải các đáp án nhiễu trong các bài tập trắc nghiệm.

8. DỰ BÁO NHỮNG ĐÓNG GÓP MỚI CỦA ĐỀ TÀI

Nếu đề tài thành công thì sẽ góp phần giúp học sinh có hứng thú hơn khi học Tổ hợp – xác suất nói chung và giải các bài toán đếm nói riêng, đồng thời giúp học sinh bình tĩnh, tự tin trước các bài toán đếm, hạn chế lựa chọn phải phương án gây nhiễu trong các phương án trả lời, từ đó nâng cao kết quả nhận thức cũng như kết quả làm bài. Đồng thời, học sinh có thể vận dụng kiến thức, kỹ năng đã học để giải quyết các vấn đề trong đời sống thực tiễn một cách chính xác và linh động. Đề tài là nguồn tài liệu để các thầy cô giáo dạy và học sinh học ôn thi THPT QG.

PHẦN II. NỘI DUNG

1. CƠ SỞ LÝ LUẬN

Dạy học là một quá trình sáng tạo và giáo viên là những kỹ sư tâm hồn. Bởi thế, dạy học là một công việc vừa mang tính khoa học, vừa mang tính nghệ thuật, ở đó đòi hỏi ngoài kiến thức chuyên môn vững vàng thì người giáo viên cần phải có phương pháp dạy học phù hợp theo hướng tích cực, nhằm giúp học sinh lĩnh hội kiến thức một cách hiệu quả nhất. Bên cạnh đó, khi dạy học, điều mà người giáo viên phải thật sự quan tâm, phải thật sự chú ý đó là những sai lầm thường gặp của học sinh, để từ đó người giáo viên phát hiện kịp thời giúp học sinh sửa chữa sai lầm đồng thời cũng là một trong những cách vô cùng hiệu quả giúp học sinh tránh được các đáp án nhiễu trong bài tập trắc nghiệm khách quan.

G. Polia cho rằng: Chỉ ra những sai lầm của học sinh cùng với việc phân tích nguyên nhân của những sai lầm đó là việc làm quan trọng nhằm kích thích việc tiếp thu tri thức của học sinh, bởi vì “Con người phải biết học ở những sai lầm và thiếu sót của mình”. A. Stoliar phát biểu: “Không được tiếc thời gian để phân tích trên giờ học các sai lầm của học sinh”. Theo J.A.Komenxki thì: “Bất kì một sai lầm nào của cũng có thể làm cho học sinh kém đi nếu như giáo viên không chú ý ngay đến sai lầm đó, và hướng dẫn học sinh nhận ra, sửa chữa khắc phục sai lầm”. Đó cũng chính là những cơ sở để khẳng định phân tích và sửa chữa những sai lầm thường gặp của học sinh trong học tập nói chung và trong giải bài toán đếm (Chương II ” Tổ hợp– xác suất” – Đại số và giải tích 11) nói riêng trở thành một đòi hỏi đối với những người làm công tác giảng dạy môn toán cấp THPT.

1.1. Sai lầm và sự cần thiết của sửa chữa sai lầm

a. Khái niệm về sai lầm

Theo từ điển tiếng Việt thì sai lầm là điều trái với yêu cầu khách quan hoặc với lẽ phải, dẫn đến những hậu quả không hay.

b. Sự cần thiết của việc sửa chữa sai lầm

Trong cuộc sống cũng như trong học tập, ai cũng không hoàn hảo, ai cũng mắc phải sai lầm. Nhưng quan trọng chúng ta học được những gì từ những sai lầm đó, Heraclitus đã từng nói “Không ai có thể tắm hai lần trên cùng một dòng sông”. Mắc phải sai lầm là điều mà ai cũng muốn tránh và quan trọng hơn là thái độ khi mắc phải sai lầm. Bình tĩnh đón nhận, và xử lý để không mắc phải sai lầm tương tự. Tìm trong cái sai lầm những điều cần phát huy để tìm ra những điều tốt đẹp hơn.

Ở bậc phổ thông học sinh mắc phải sai lầm không phải là ít, những sai lầm trong cuộc sống nói chung và trong học tập nói riêng đều có nguyên nhân. Có rất nhiều kiểu sai lầm mà học sinh có thể mắc phải. Chẳng hạn sai lầm về hiểu sai bản chất của các khái niệm, tính chất, sai lầm về bỏ quên trường hợp, sai lầm vì hình vẽ không mô tả hết trạng thái dữ kiện của giả thiết, sai lầm do hiểu sai đề bài, sai lầm do tính toán, sai lầm do đếm lặp lại... Nếu những sai lầm này không được sửa chữa thì lâu dần học sinh sẽ cảm thấy thiếu tự tin về bản thân, ảnh hưởng đến thái độ, quá trình và thành tích học

tập. Tôi thường quan niệm *sai thì sửa, hỏng ta làm lại*, bởi vậy sửa chữa những sai lầm cho học sinh là việc làm hết sức cần thiết. Học sinh sẽ học được rất nhiều và nhớ rất lâu về kiến thức khi được sửa chữa các sai lầm. Khi sửa chữa các sai lầm cho học sinh sẽ rèn luyện được đức tính cẩn thận, lường hết mọi khả năng xảy ra và hơn nữa rèn luyện được đức tính kiên trì, nhẫn nại, khắc phục mọi khó khăn trong cuộc sống. Đây chính là những điều quan trọng nhất mà học sinh học được qua các sai lầm nói chung và sai lầm trong làm toán nói riêng.

c. Vai trò của giáo viên trong việc sửa chữa sai lầm

Trong dạy học giáo viên là người thiết kế, ủy thác, điều khiển và thể chế hóa. Với vai trò đó, giáo viên có thể tạo nên những điều kiện cần thiết kích thích hoạt động của học sinh. Chẳng hạn, giáo viên trình bày nội dung kiến thức một cách dễ dàng, dễ hiểu, sinh động, sâu sắc, mở rộng kiến thức thì làm tăng giá trị môn học, tạo sự hấp dẫn đối với học sinh; giáo viên cũng có thể làm cho các em ngạc nhiên bằng tính bất ngờ của kiến thức mới, buộc học sinh phải bộc lộ sức lực của bản thân, cho học sinh thấy ý nghĩa của kiến thức các em đã học. Tất cả những điều đó tạo nên xúc cảm, hình thành thái độ tích cực của học sinh. Tuy nhiên không phải lúc nào học sinh cũng làm đúng, không phải học sinh nào cũng hiểu được bản chất vấn đề. Trong thực tế dạy học, có rất nhiều học sinh có những sai lầm dẫn đến kết quả không như mong đợi. Vậy lúc này người có vai trò quan trọng để giúp học sinh nhận ra lỗi sai, đồng thời giúp các em có cơ hội để sửa chữa sai lầm kịp thời nhất đó là giáo viên. Từ những sai lầm được giáo viên chỉ ra, chắc chắn học sinh sẽ khắc sâu kiến thức một cách hiệu quả nhất. Như vậy ta có thể khẳng định vai trò của giáo viên đối với việc phân tích và sửa chữa sai lầm cho học sinh là rất quan trọng, cần thiết và vô cùng to lớn.

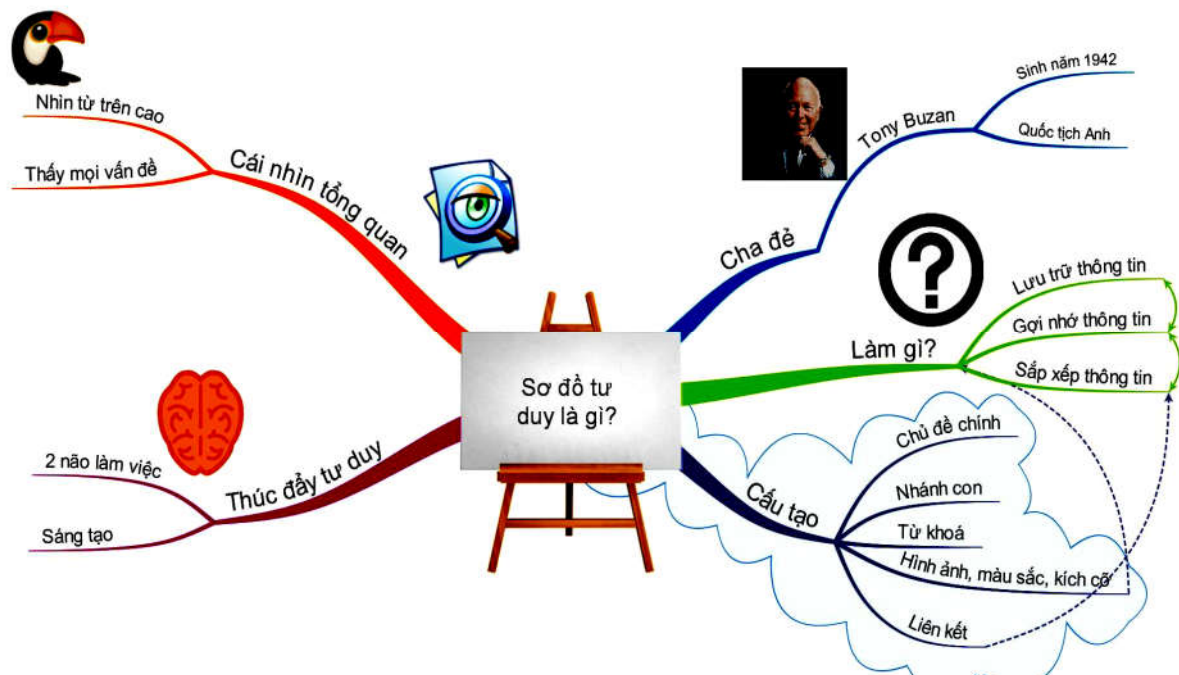
d. Yêu cầu của việc sửa chữa sai lầm

Khi sửa chữa sai lầm cho học sinh chúng ta tập trung vào khắc phục và sửa chữa sai lầm với thái độ cầu tiến, không chê bai, chì chiết học sinh. Đây chính là cơ hội để dìu dắt và dẫn đường học sinh nắm vững kiến thức một cách thật sự hiệu quả. Vậy sửa lúc nào và bằng cách nào? Đó là điều mà tôi luôn trăn trở. Theo tôi khi sửa chữa sai lầm cho học sinh cần thực hiện theo ba phương châm: *tính kịp thời, tính giáo dục và tính chính xác*.

e. Ý nghĩa của sơ đồ tư duy trong việc sửa chữa sai lầm

Sơ đồ tư duy – Mind map (SĐTD) còn gọi là bản đồ tư duy, lược đồ tư duy,... là hình thức ghi chép nhằm tìm tòi đào sâu, mở rộng một ý tưởng, hệ thống hóa một chủ đề hay một mạch kiến thức,... bằng cách kết hợp việc sử dụng đồng thời hình ảnh, đường nét, màu sắc, chữ viết với sự tư duy tích cực. Đặc biệt đây là một sơ đồ mở, không yêu cầu tỉ lệ, chi tiết chặt chẽ như bản đồ địa lí, có thể vẽ thêm hoặc bớt các nhánh, mỗi người vẽ một kiểu khác nhau, dùng màu sắc, các cụm từ diễn đạt khác nhau, cùng một chủ đề nhưng mỗi người có thể “thể hiện” nó dưới dạng SĐTD theo một cách riêng, do đó việc lập SĐTD phát huy được tối đa khả năng sáng tạo của mỗi người. Có thể nói, SĐTD là con đường dẫn học sinh đến với phương pháp “học cách học”. Tác giả của

SĐTD là Tony Buzan, ông là người đã thúc đẩy làn sóng cách mạng học tập bùng nổ tại nhiều nước trên thế giới và khu vực, trong đó có Việt Nam.



Như vậy sơ đồ tư duy là bản đồ thông tin cho bộ não, giúp nó hoạt động nhẹ nhàng, lưu trữ nhiều và nhớ thông tin được lâu hơn.

Sử dụng sơ đồ tư duy trong quá trình dạy học có nhiều ưu điểm và mang lại hiệu quả đáng mong đợi. Khi sửa chữa sai lầm cho học sinh cũng vậy, việc sử dụng sơ đồ tư duy để giải thích lối đi có lý, dẫn học sinh đến lời giải đúng cho bài toán có tác dụng to lớn, nó giúp học sinh có phương pháp tiếp nhận lời giải đúng một cách chủ động, tích cực, ngắn gọn, dễ hiểu, bởi khi giáo viên sử dụng sơ đồ tư duy đã chọn lọc thông tin, từ ngữ, sắp xếp bố cục để ghi thông tin cần thiết và logic. Cũng nhìn từ sơ đồ tư duy học sinh nhận thấy trong quá trình làm toán mình còn bị vướng mắc ở điểm nào. Vì vậy sử dụng sơ đồ tư duy sẽ dần giúp học sinh hình thành cách ghi chép hiệu quả.

1.2. Hình thức trắc nghiệm và yêu cầu của nó

a. Khái niệm về trắc nghiệm

“Trắc nghiệm là một phương pháp khoa học cho phép dùng một loạt những tác động xác định để nghiên cứu một hay nhiều đặc điểm nhân cách phân biệt được bằng thực nghiệm với mục đích đi tới những mệnh đề lượng hóa tối đa có thể được về mức độ biểu hiện tương đối của đặc điểm cần nghiên cứu” (Theo tác giả Phạm Gia Đức, trong bài “Đổi mới PPDH môn toán trường THPT” – Tạp chí Nghiên cứu giáo dục –1995):

Về khái niệm trắc nghiệm, một số tác giả cho phép bài trắc nghiệm có thể chứa đựng những câu hỏi tự luận, đòi hỏi các câu trả lời là một đoạn văn, một bài diễn giải, một tiểu luận,... Việc đánh giá kết quả trả lời những câu hỏi tự luận phụ thuộc khá nhiều vào người chấm. Do đó có sự phân biệt giữa trắc nghiệm khách quan và trắc nghiệm chủ quan.

*** Trắc nghiệm khách quan**

Trắc nghiệm khách quan là dạng trắc nghiệm trong đó mỗi câu hỏi có kèm theo câu trả lời sẵn. Loại câu hỏi này cung cấp cho học sinh một phần hay tất cả thông tin cần thiết và đòi hỏi học sinh phải lựa chọn một câu để trả lời hoặc chỉ cần điền thêm một vài từ, được xem là trắc nghiệm khách quan vì hệ thống cho điểm là khách quan, không phụ thuộc quan điểm người chấm, đặc biệt như hiện nay nhờ ứng dụng công nghệ thông tin mà chúng ta đã sử dụng máy tính để chấm điểm

*** Trắc nghiệm chủ quan**

Là dạng trắc nghiệm dùng những câu hỏi mở, còn gọi là câu hỏi tự luận (ngược với trắc nghiệm khách quan), đòi hỏi học sinh tự xây dựng câu trả lời. Câu trả lời có thể là một đoạn văn ngắn, một bài tóm tắt, một bài diễn giải thậm chí là một tiểu luận. Dạng này được xem là trắc nghiệm chủ quan vì việc đánh giá, cho điểm câu trả lời có thể tùy thuộc rất nhiều vào chủ quan người chấm, từ khâu xây dựng đáp án, biểu điểm, xác định các tiêu chí đánh giá đến khâu đối chiếu bài trả lời với đáp án, biểu điểm... Do đó độ tin cậy của kết quả không cao.

b. Các hình thức câu hỏi trắc nghiệm khách quan thông thường

Câu hỏi trắc nghiệm khách quan có thể được trình bày dưới nhiều hình thức khác nhau. Hình thức nào cũng có những ưu khuyết điểm của nó. Vấn đề quan trọng đối với người soạn thảo là biết công dụng của mỗi loại để lựa chọn hình thức thích hợp nhất cho việc khảo sát kiến thức hay khả năng mà ta dự định đo lường. Các hình thức thường dùng trong dạy học gồm:

- Câu hỏi đúng – sai.
- Câu hỏi nhiều lựa chọn.
- Câu ghép đôi.
- Câu điền khuyết.
- Câu trả lời ngắn.

Theo đề án đổi mới thi của Bộ Giáo dục – Đào tạo, từ năm 2017 trong kỳ thi THPT quốc gia, đề thi môn Toán (cùng với Ngoại ngữ, Khoa học tự nhiên, Khoa học xã hội) sẽ được ra dưới hình thức trắc nghiệm khách quan dạng câu hỏi nhiều lựa chọn.

c. Câu hỏi trắc nghiệm khách quan nhiều lựa chọn

Câu hỏi loại này gồm có 2 phần: Phần dẫn và phần lựa chọn. Phần dẫn là một câu hỏi hay một câu bổ lững (chưa được hoàn tất). Phần lựa chọn gồm một số (thường là 4 hoặc 5) câu trả lời hoặc câu bổ sung để học sinh lựa chọn.

Phần dẫn phải tạo ra cơ sở cho sự lựa chọn bằng cách đặt ra một vấn đề hay đưa ra một ý tưởng rõ ràng giúp cho sự lựa chọn được dễ dàng.

Phần lựa chọn gồm nhiều phương án, trong đó có một phương án đúng (hoặc đúng nhất). Những phương án còn lại là câu nhiễu hoặc mồi nhử hoặc gài bẫy, học sinh phải nắm vững kiến thức mới phân biệt được. Điều quan trọng là làm sao những mồi nhử đều hấp dẫn ngang nhau đối với những học sinh chưa đọc kỹ hay chưa hiểu kỹ kiến thức.

Cũng có khi phần dẫn của câu trắc nghiệm là một câu phủ định. Trong trường hợp ấy người ra đề cần chú ý tạo dấu ấn để học sinh khỏi nhầm lẫn như gạch chân, in đậm, in chữ hoa,...

d. Trắc nghiệm môn Toán và những ảnh hưởng đến phương pháp dạy học

Sẽ là sai lầm nếu nói rằng cách thi không ảnh hưởng gì đến cách học. Chắc chắn là với đề thi trắc nghiệm thì đòi hỏi học sinh phải học rộng hơn, không còn khái niệm học tủ như thi tự luận nữa.

Nếu đề tự luận chủ yếu tập trung vào giải toán thì đề trắc nghiệm còn chú ý đến kiến thức lý thuyết, các công thức. Cần nắm chắc lý thuyết để giải nhanh các câu hỏi này và không bị nhầm lẫn vì thông thường, trong các câu hỏi lý thuyết, các phương án trả lời sẽ tựa tựa nhau và đều “*đường như là có lý*”.

Như vậy đổi cách thi thì ta cũng phải thay đổi cách học. Tuy nhiên sẽ là rất sai lầm nếu chúng ta trắc nghiệm hóa mọi hoạt động dạy và học, cũng như kiểm tra và thi cử. Ở đây cần lưu ý là trong quá trình hình thành kiến thức ta cần có những bài giảng kỹ càng và học sinh cũng học ở mức hiểu và ghi nhớ. Vì thế, trong quá trình học kiến thức mới, không nên lạm dụng hình thức trắc nghiệm để kiểm tra, mà nên dùng hình thức vấn đáp và tự luận. Các hình thức này mới giúp chúng ta nắm được học sinh có thực sự hiểu vấn đề không. Hơn nữa chúng ta hoàn toàn có thể có câu hỏi trắc nghiệm khi ta trình bày xong một đơn vị kiến thức, hay giải xong một bài toán. Bởi ở đó chắc chắn học sinh còn mắc phải những sai lầm mà chúng ta cần giúp các em nhận ra các sai lầm đó. Tôi nghĩ có như vậy mới hợp lý hóa giữa bước chuyển mình của hình thức thi môn toán từ tự luận sang trắc nghiệm trong kỳ thi THPT như hiện nay.

1.3. Một số kiến thức dùng trong đề tài

a. Quy tắc cộng:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động, hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện mà không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất. Thì để hoàn thành công việc có $m + n$ cách thực hiện.

b. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì để hoàn thành công việc có $m.n$ cách thực hiện.

c. Hoán vị

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Số các hoán vị: $P_n = n!$

d. Chỉnh hợp: Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} (1 \leq k \leq n)$.

e. Tổ hợp

Nếu tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một

tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

$$\text{Số các tổ hợp chập } k \text{ của } n \text{ phần tử: } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} (0 \leq k \leq n).$$

2. THỰC TRẠNG VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

2.1. Xuất phát từ yêu cầu của đổi mới phương pháp dạy học, từ thực trạng thay đổi hình thức thi THPT QG

Quyết định số 16/2006/QĐ-BGDĐT ngày 5/5/2006 của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã nêu rõ: “Phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động sáng tạo của học sinh; phù hợp với đặc trưng của môn học, đặc điểm đối tượng học sinh, điều kiện của từng lớp học bồi dưỡng cho học sinh phương pháp tự học khả năng hợp tác; rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn; tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú và trách nhiệm học tập cho học sinh”.

Ngày 28/9, Bộ GD&ĐT đã chính thức chốt phương án thi THPT Quốc gia năm 2017, trong đó môn Toán chuyển từ thi hình thức tự luận sang hình thức trắc nghiệm khách quan. Nên quá trình dạy và học cũng phải có những điều chỉnh và chuyển hướng nhất định nhằm thích ứng với việc đổi mới.

Năm 2017, nội dung đề thi chủ yếu trong chương trình lớp 12 THPT, năm 2018 nội dung đề thi nằm trong chương trình lớp 11 và lớp 12 THPT, từ năm 2019 trở đi, nội dung đề thi nằm trong chương trình 3 năm THPT. Vì vậy nhiệm vụ trước mắt của mỗi giáo viên là ngoài việc tập trung dạy học và ôn thi cho HS về kiến thức lớp 12 thì còn phải ôn tập và hệ thống lại kiến thức của chương trình lớp 11, trong đó phải kể đến chương II, Tổ hợp– xác suất, Đại số và giải tích 11, và bài toán đếm là một trong những nội dung cốt lõi của chương này.

2.2. Xuất phát từ thực trạng dạy và học bộ môn

Ngay từ khi Bộ giáo dục công bố phương án thi THPT Quốc gia năm 2017 cho đến nay, ở đơn vị tôi đang công tác, nhà trường cùng phối hợp với tổ chuyên môn đã nhanh chóng triển khai các buổi họp chuyên môn, thảo luận về đổi mới phương pháp, chuẩn kiến thức, kỹ năng và phân tích cấu trúc, yêu cầu của đề thi mới. Triển khai và rút kinh nghiệm sau mỗi giai đoạn, đặc biệt sau kì thi THPT QG năm 2017, tạo điều kiện cho giáo viên và học sinh thích nghi nhanh với việc dạy và học theo phương án thi mới.

Tuy nhiên, đứng trước sự chuyển mình rõ rệt của hình thức thi đó vẫn còn nhiều giáo viên đang mang nặng trong mình phương pháp dạy học phù hợp với hình thức thi tự luận. Trong quá trình học tập học sinh mắc phải những sai lầm là điều không thể tránh khỏi, có những luồng kiến thức sai lầm với học sinh trở thành tất yếu. Nhưng trong quá trình dạy học, giáo viên vẫn còn chưa thật sự chú ý đến các sai lầm của học sinh– mà chính các sai lầm ấy lại là các “con mồi” đứng trong các phương án trả lời của bài tập trắc nghiệm. Một số giáo viên trong quá trình dạy học đã không tiếc thời gian để phân tích sai lầm cho học sinh, nhưng phân tích rồi để

đó, việc làm này có tác dụng nhưng còn lãng phí. Hơn nữa khi học sinh làm bài tập trắc nghiệm, rất nhiều giáo viên chỉ quan tâm đến học sinh đã làm đúng với lời giải thích và bước đi có lý, mà lơ đi những lỗi đi tương chừng có lý mà học sinh đã mắc phải mỗi nhữ chứa trong đó. Bên cạnh đó, một số giáo viên sử dụng tài liệu chưa tuyển chọn, ra hệ thống bài tập trắc nghiệm chưa tinh, các phương án gây nhiễu trong đó nhiều khi còn mang tính hình thức mà không có độ gây nhiễu cao. Học sinh tiếp cận với hình thức thi trắc nghiệm còn nhiều ngỡ ngàng và lúng túng, nhiều em tâm thế chưa vững vàng.

Các tài liệu tham khảo về dạng toán này chưa đáp ứng được về mặt phương pháp. Hiện nay dạy học đang hướng đến phát triển năng lực của người học. Phát triển dạy học theo chủ đề nhằm xây chuỗi kiến thức và phát triển nhận thức học sinh qua 4 mức độ: **Nhận biết, thông hiểu, vận dụng, vận dụng cao.**

Thực tế giảng dạy cho thấy, bài toán đếm là bài toán khá khó và không có phương pháp tổng quát. Khi gặp các bài toán đếm học sinh thường gặp phải những sai lầm do nhiều nguyên nhân: Do hiểu sai khái niệm, do không phân biệt được các khái niệm, do tương tự hóa các bài toán, do kỹ năng tính toán, do giải quyết bài toán chưa triệt để, cũng có thể do phân chia trường hợp nhỏ nhưng không lấp đầy nội hàm bài toán, không đảm bảo tính độc lập và tính đầy đủ. Mỗi khi giải sai học sinh thường chán nản và không biết tại sao lại sai. Do đó mà lâu dần mất hứng thú với phần kiến thức này và cũng từ đó mà không hứng thú với môn học. Thực tế hiện nay số học sinh “chán ghét” môn toán nói chung cũng khá nhiều, thờ ơ với chương Tổ hợp xác suất cũng không ít, đa phần ngại suy nghĩ để làm một bài toán đếm. Các kiến thức na ná giống nhau khiến các em hay có sự nhầm lẫn giữa các luồng kiến thức. Cộng với cách tiếp cận làm bài trắc nghiệm của môn toán chưa nhiều khiến các em có nhiều ngỡ ngàng. Có nhiều học sinh cảm thấy bất lực trước các thử thách mới của đề thi trắc nghiệm và không có hứng thú học tập.

2.3. Số liệu điều tra khảo sát

2.3.1. Các nguồn thông tin điều tra khảo sát và quá trình điều tra khảo sát

a. Qua kết quả dạy thao giảng, kiểm tra toàn diện và dự giờ đột xuất của học kỳ I, năm học 2020 – 2021

- Các tiết dạy đang còn ôm đồm kiến thức, dạy lý thuyết còn sơ sài, chưa có điểm nhấn, có những tiết dạy giáo viên không làm nổi bật được ranh giới giữa các khái niệm.
- Trong học tập học sinh gặp rất nhiều sai lầm do nhiều nguyên nhân.
- Giáo viên chưa thật sự chú trọng trong việc sửa chữa sai lầm cho học sinh.
- Một số giáo viên đã sửa chữa sai lầm cho học sinh nhưng nhiều lúc chưa kịp thời, tính giáo dục chưa cao, thái độ của giáo viên khi sửa chữa sai lầm còn nóng nảy.
- GV đã đưa câu hỏi trắc nghiệm vào dạy học nhưng chưa biết tận dụng cái sẵn có sau mỗi bài làm tự luận của học sinh.
- Kỹ năng làm bài tập trắc nghiệm của học sinh chưa cao; khả năng phản ứng trước các phương án trả lời còn mập mờ;

b. Khảo sát phỏng vấn, điều tra giáo viên và học sinh

Về giáo viên

Trong số 14 giáo viên giảng dạy môn toán tại cơ sở tôi đang công tác với câu hỏi:

Câu 1. Trong chương II, Tổ hợp– xác suất, Đại số và giải tích 11 khi dạy học các bài toán đếm, đồng chí nhận thấy học sinh có gặp phải sai lầm nhiều không?

- A. Sai lầm rất phổ biến. B. Sai lầm tương đối nhiều.
C. Sai lầm ở mức bình thường. D. Rất ít sai lầm.

Câu 2. Các đồng chí đã chú trọng trong việc sửa chữa các sai lầm đó ở mức độ nào?

- A. Rất chú trọng. B. Thỉnh thoảng chú trọng. C. Chưa chú trọng.

Câu 3. Dạy học phù hợp với hình thức thi trắc nghiệm về bài toán đếm các đồng chí thường sử dụng hình thức nào sau đây?

A. Cho HS làm bài tập tự luận, sau đó ra bài tập TN tương tự, học sinh làm rồi dừng lại ở đáp án đúng.

B. Ra bài tập tự luận, phân tích những sai lầm đó của hs, khắc phục sai lầm sau đó có ngay câu hỏi trắc nghiệm, cũng như hệ thống câu hỏi trắc nghiệm từ bài toán đó.

C. Kết hợp hai hình thức trên.

Về học sinh

– Tiến hành phỏng vấn thái độ học tập của học sinh đã học tổ hợp xác suất nói chung và giải bài toán đếm nói riêng (học sinh đang học lớp 12 năm học 2020–2021) với các câu hỏi, kèm phương án lựa chọn.

Câu hỏi 1. Khi giải bài toán đếm trong chương II, Tổ hợp– xác suất, sai lầm của em ở mức độ nào?

- A. Thường xuyên sai lầm. B. Thỉnh thoảng sai lầm.
C. Ít khi sai lầm. D. Không sai lầm

Câu hỏi 2. Sau mỗi lần giải sai bài toán đếm, thái độ của em là

- A. Rất bình thường. B. Bình thường.
C. Có chút lo lắng. D. Rất lo lắng và chán nản.

Câu hỏi 3. Em đã thích nghi và thuần thục khi làm bài tập dưới hình thức trắc nghiệm về bài toán đếm nhiều chưa?

- A. Rất thuần thục. B. Tương đối.
C. Ít thuần thục. D. Không thuần thục.

– Lưu giữ đề kiểm tra, kết quả bài kiểm tra về bài toán đếm của 36 học sinh lớp 11A1 năm học 2019–2020, nay là lớp 12A1 năm học 2020–2021.

– Tiến hành kiểm tra, đánh giá năng lực hiện tại của 36 học sinh lớp 12A1 năm học 2020–2021 với đề kiểm tra 10 câu hỏi trắc nghiệm làm trong vòng 18 phút, trong đề các bài toán đủ bốn mức: nhận biết, thông hiểu, vận dụng, vận dụng cao.

– Ma trận đề kiểm tra đánh giá năng lực học sinh (học sinh đang học lớp 12A1, năm học 2020–2021)

<i>Nội dung</i>		Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng thấp	Vận dụng cao	Tỉ lệ
<i>Quy tắc đếm, Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp</i>		Câu 1, câu 2,	Câu 3, Câu 4 Câu 5	Câu 6 Câu 7 Câu 8	Câu 9, Câu 10	
<i>Tổng</i>	Số câu Tỉ lệ	2 20 %	3 30%	3 30%	2 20%	100%

2.3.2. Kết quả điều tra khảo sát

a. Kết quả khảo sát giáo viên

Câu 1

Ý kiến giáo viên	A. Sai lầm rất phổ biến	B. Sai lầm tương đối nhiều	C. Sai lầm ở mức bình thường	D. Rất ít sai lầm
Tỉ lệ	50,34%	29,24%	20,42%	0%

Câu 2

Ý kiến giáo viên	A. Rất chú trọng	B. Thỉnh thoảng chú trọng	C. Không chú trọng
Tỉ lệ	2%	20%	78%

Câu 3

Ý kiến GV	A. Cho HS làm bài tập tự luận, sau đó ra bài tập TN tương tự, học sinh làm rồi dừng lại ở đáp án đúng.	B. Ra bài tập tự luận, phân tích những sai lầm đó của HS, khắc phục sai lầm sau đó có ngay câu hỏi trắc nghiệm, cũng như hệ thống câu hỏi trắc nghiệm từ bài toán đó.	C. Kết hợp hai hình thức A và B
Tỉ lệ	90%	5%	5%

b. Kết quả khảo sát học sinh

Kết quả phỏng vấn.

Câu 1:

Ý kiến học sinh	A. Thường xuyên sai lầm	B. Thỉnh thoảng sai lầm	C. Ít khi sai lầm	D. Không sai lầm
Tỉ lệ	70%	25%	5%	0%

Câu 2

Ý kiến học sinh	A Rất bình thường	B Bình thường	C Có chút lo lắng	D Rất lo lắng và chán nản
Tỉ lệ	0%	30%	20%	70%

Câu 3

	A	B	C	D
Ý kiến học sinh	Rất thuần thực	Tương đối thuần thực	Ít thuần thực	Không thuần thực
Tỉ lệ	5%	25%	40%	30%

Kết quả kiểm tra kiến thức

Với đề kiểm tra theo ma trận như trên thì kết quả tôi thu được bởi bảng sau, đối chứng với kết quả bài làm năm học 2019–2020.

Kết quả Lớp	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu
11A1(2019–2020)	4%	35%	56%	5%
12A1(2020–2021)	3%	32%	49%	16%

3. THỰC TRẠNG CỦA ĐỀ TÀI

Qua quá trình điều tra khảo sát thực tế, tôi nhận thấy học sinh THPT nói chung và học sinh nơi tôi đang công tác nói riêng đang đứng trước những thực trạng như sau:

3.1. Sơ lược về thực trạng học sinh học môn toán nói chung và học chương II, Tổ hợp– xác suất, Đại số và giải tích 11 nói riêng ở trường THPT nơi tôi đang công tác

Môn toán là môn học khó đối với học sinh, ở đơn vị tôi đang công tác thực trạng học sinh không thích học môn toán không phải là ít. Trong đó học sinh chán ghét, ngại học chương II– Tổ hợp– xác suất, Đại số và giải tích 11 lại càng phổ biến, kể cả những học sinh khá giỏi. Qua điều tra khảo sát cả học sinh và giáo viên về phương pháp dạy và học, thái độ học tập của học sinh, đồng thời khảo sát qua bài kiểm tra đánh giá năng lực học sinh tôi nhận thấy một thực trạng rất đáng báo động đó là các em chán ghét khi giải bài toán đếm, vì thường mắc phải sai lầm. Đặc biệt khi làm sai lại chưa được tháo gỡ một cách kịp thời. Khi làm bài tập dưới hình thức trắc nghiệm vẫn còn lúng túng, trong quá trình kiểm tra theo giỏi thì có một bộ phận học sinh tỏ ra bất cần, vì luôn cho đây là bài toán khó, nhiều em đánh chừng và chờ vào sự may mắn.

3.2. Thực trạng dạy học bài toán đếm trong chương II, Tổ hợp– xác suất, Đại số và giải tích 11**3.2.1. Về phía giáo viên**

Dạy học chương II, Tổ hợp – xác suất, Đại số và giải tích 11 nói chung và giải bài toán đếm nói riêng ở trường tôi đã có nhiều đồng chí tìm nhiều phương pháp dạy để gây hứng thú, giúp các em có niềm say mê,...tuy nhiên việc sửa chữa sai lầm cho học sinh còn có nhiều bất cập. Đa số giáo viên vẫn chưa dành nhiều thời gian để sửa chữa sai lầm cho học sinh, khi sửa chữa sai lầm thì vẫn còn thái độ phê bình, chê bai học sinh, làm học sinh mất niềm tin vào bản thân và luôn có thái độ lo lắng và sợ sai trước khi giải quyết một bài toán đếm. Một số giáo viên cũng

chưa thay đổi kịp phương pháp dạy, còn nặng nề về phương pháp và lối tư duy của hình thức thi tự luận. Cách trình bày dài dòng, lối tư duy lủng củng cũng khiến các em mất nhiều thời gian cho một câu hỏi, do đó kết quả thi trắc nghiệm còn thấp. Khi dạy một bài tập trắc nghiệm, nếu học sinh làm sai giáo viên thường yêu cầu giải lại hoặc gợi ý cách giải để học sinh tìm đúng đáp án, còn nếu đúng rồi thì giáo viên không cần quan tâm đến những đáp án khác nữa, điều này làm cho học sinh có suy nghĩ là ngoài đáp án câu hỏi thì những phương án khác cho thế nào cũng được, miễn là khác với đáp án đúng.

Giáo viên đã chú trọng đổi mới phương pháp dạy học để phù hợp với hình thức thi trắc nghiệm môn toán trong kỳ thi THPT QG như hiện nay, nhưng quá trình dạy một số giáo viên thường túm sẵn cho mình một lượng bài tập trắc nghiệm, cho học sinh làm và nếu học sinh nào chọn đúng đáp án thì khi đó trình bày lời giải để lý giải cho phương án học sinh lựa chọn và dừng lại ở đó.

3.2.2. Về phía học sinh

Qua khảo sát thực tiễn số học sinh “chán ghét” môn toán nói chung cũng khá nhiều, thờ ơ với chương Tổ hợp xác suất cũng không ít, đa phần ngại suy nghĩ để làm một bài toán đếm, thiếu chủ động và sáng tạo, học sinh lười suy nghĩ và không muốn làm việc. Khi giải bài toán đếm khả năng nhận biết và phân biệt các khái niệm còn hạn chế, việc hiểu các khái niệm và vận dụng vào giải toán thì rất thấp, dẫn đến có nhiều sai lầm chứa đựng trong đó. Thái độ học tập của các em khối 11 còn sơ sài và ỉ lại là khi nào thi ôn tiếp. Thái độ của các em 12 lo âu vì không biết học lại bằng cách nào, bởi nhìn lại thấy mông lung với loại toán nhạy cảm này. Phân tích số liệu điều tra khảo sát của cùng một đối tượng học sinh (lớp 11A1 năm học 2019–2020, nay là lớp 12A1 năm học 2020–2021) thì tôi nhận thấy khi giải bài toán đếm các em còn sai lầm nhiều, kể cả ở mức nhận biết, số liệu cho thấy năm 2019–2020 khi các em vừa học xong, trực tiếp kiểm tra thì số lượng học sinh khá giỏi đạt thấp, vẫn còn những học sinh đang ở mức yếu, những kết quả các em lựa chọn trong các câu hỏi đều rơi vào những sai lầm mà các em thường gặp, lên lớp 12A1 (năm học hiện tại 2020–2021), tôi tiếp tục khảo sát cùng đề kiểm tra năm ngoái thì số lượng học sinh giỏi, khá, trung bình giảm xuống, và số lượng học sinh yếu tăng lên. Điều đó cho thấy, sai lầm ở các em nếu không được sửa chữa kịp thời thì vẫn là sai lầm, còn chất lượng giảm xuống là do trong quá trình học không được khắc sâu nên sau thời gian một năm khi tôi khảo sát lại nhiều em đã quên kiến thức.

Đứng trước những thực trạng dạy và học chương II Tổ hợp– xác suất, đại số và giải tích 11 nói chung và bài toán đếm nói riêng trong quá trình dạy học, trước thực trạng về số liệu điều tra khảo sát của giáo viên và của đối tượng học sinh lớp 11 năm học 2019–2020, nay là học sinh lớp 12 năm học 2020–2021, tôi đã từng trăn trở và tìm ra một lối đi có lý để giúp đối tượng học sinh lớp 11 năm học 2020–2021 có phần tiến bộ, nắm vững, khắc sâu kiến thức và giảm thiểu các sai lầm thường gặp, đồng thời làm tốt bài tập trắc nghiệm, năm học 2020–2021 khi giảng dạy khối 11 tôi đã trực tiếp thực hiện một số giải pháp sau:

4. CÁC GIẢI PHÁP

Qua thực tiễn dạy học chương “Tổ hợp– xác suất, Đại số và giải tích 11” tôi nhận thấy khi giải bài toán đếm học sinh gặp sai lầm nhiều và ở các mức độ khác nhau với các đối tượng học sinh khác nhau. Nhìn chung, không phải chỉ những bài toán vận dụng khó học sinh mới sai lầm mà ngay cả những kiến thức cơ bản và đơn thuần học sinh cũng sai. Có nhiều nguyên nhân để dẫn đến học sinh hiểu sai vấn đề, với mỗi bài toán học sinh lại gặp những sai lầm cụ thể khác nhau như sai lầm do không phân biệt được khái niệm, sai lầm do hiểu sai khái niệm, sai lầm do hiểu sai đề bài, sai lầm do phân chia trường hợp riêng, sai lầm do chưa hoàn thành triệt để công việc hay sai lầm do hiểu sai về biến cố đối... Việc phân tích và sửa chữa sai lầm cho học sinh là việc làm hết sức cần thiết và có tác dụng to lớn, hơn nữa nó càng có giá trị khi đưa các sai lầm đó vào làm các phương án nhiều trong bài tập trắc nghiệm. Ta biết rằng câu hỏi trắc nghiệm hay không phải là câu hỏi quá khó hay đánh đố, mà câu hỏi trắc nghiệm hay là câu hỏi có những phương án trả lời mà trong đó độ gây nhiễu cao, hay nói cách khác những phương án đưa ra đều dựa trên những sai lầm thường gặp của học sinh.

Sau đây tôi xin trình bày kiến thức theo bốn mức độ mà ở đó học sinh thường gặp phải một số sai lầm, đồng thời phân tích, sửa chữa và xây dựng phương án nhiều trong các câu hỏi trắc nghiệm tương ứng.

4.1. Phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh, từ đó xây dựng phương án nhiều cho bài tập trắc nghiệm tương ứng trong các bài toán đếm ở mức độ nhận biết

Trước hết về khái niệm nhận biết, nhận biết là sự nhớ các dữ liệu, thông tin đã có trước đây. Từ sự hồi tưởng đó người học tái hiện được thông tin nhắc lại một loạt dữ liệu, từ các sự kiện đơn giản đến các lí thuyết phức tạp. Đây là mức độ, yêu cầu thấp nhất của trình độ nhận thức, thể hiện ở chỗ các em có thể và chỉ cần nhớ hoặc nhận ra khi được đưa ra hoặc dựa trên những thông tin có tính chất đặc thù của một khái niệm, một sự vật, một hiện tượng. Có nghĩa các em chỉ cần phát biểu đúng định nghĩa, định lý hoặc định luật nhưng chưa giải thích và vận dụng được chúng. Mức độ nhận biết có thể được cụ thể hóa bằng các yêu cầu: nhận ra nhớ lại các khái niệm, nhận dạng được (mà không cần giải thích) các khái niệm hoặc liệt kê, xác định mối quan hệ giữa các yếu tố.

Xét về mức độ nhận biết nói chung, mức độ nhận biết đối với những bài toán đếm trong chương tổ hợp xác suất nói riêng cũng vậy đây là mức độ nhận thức thấp nhất trong quá trình học tập của học sinh, ở mức độ này đối tượng học sinh yếu và trung bình có thể tiếp thu được. Nhưng qua thực tế dạy học tôi nhận thấy trong các bài toán nhận biết học sinh vẫn gặp phải một số sai lầm. Với những bài toán ở mức độ này sai lầm mà học sinh mắc phải chủ yếu vẫn là do hiểu sai khái niệm, không phân biệt được khái niệm, do kỹ năng tính toán... Theo A.A.Stoliar thì không ít học sinh còn yếu trong việc nắm vững cú pháp của ngôn ngữ toán học, học sinh hay nhầm lẫn với khái niệm được định nghĩa...

Theo Nguyễn Bá Kim thì “Định nghĩa một khái niệm là một thao tác tư duy nhằm

phân biệt lớp đối tượng xác định các khái niệm này và các đối tượng khác, thường bằng cách vạch ra nội hàm của khái niệm đó”.

Trong quá trình dạy học chủ đề “Tổ hợp – xác suất” nói chung và dạy học sinh về bài toán đếm nói riêng, nhiều học sinh vẫn chưa hiểu được bản chất của khái niệm quy tắc cộng và quy tắc nhân nên còn nhầm lẫn giữa chúng, học sinh còn đồng nhất giữa khái niệm hoán vị n phần tử và số các hoán vị của n phần tử, khái niệm chỉnh hợp chập k của n phần tử với số các chỉnh hợp chập k của n phần tử, khái niệm tổ hợp chập k của n phần tử với số các tổ hợp chập k của n phần tử, không phân biệt được chỉnh hợp và tổ hợp.

Những sai lầm thường gặp trong các bài toán nhận biết chủ yếu rơi vào học sinh yếu kém, để giúp các em trọng. Khi dạy học khái niệm, định nghĩa người giáo viên phải diễn đạt chính xác, từ ngôn ngữ thông thường đến ngôn ngữ toán học, phải mẫu mực về phương pháp tư duy.

Chẳng hạn, khi dạy học quy tắc cộng và quy tắc nhân:

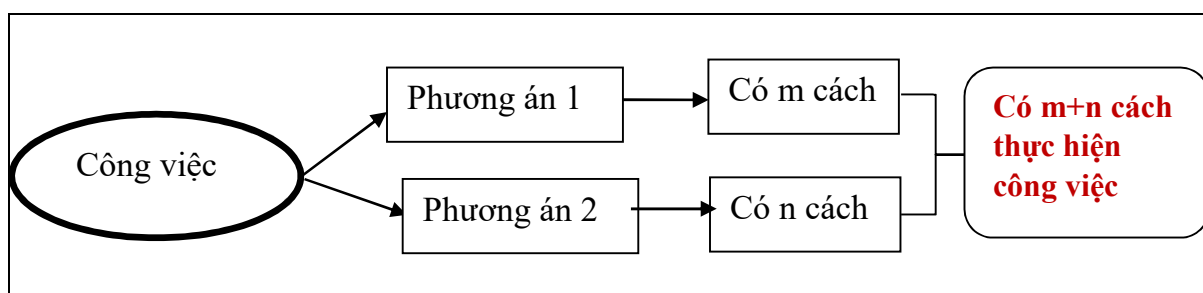
Quy tắc cộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động, hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện mà không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất. Thì để hoàn thành công việc có $m + n$ cách thực hiện.

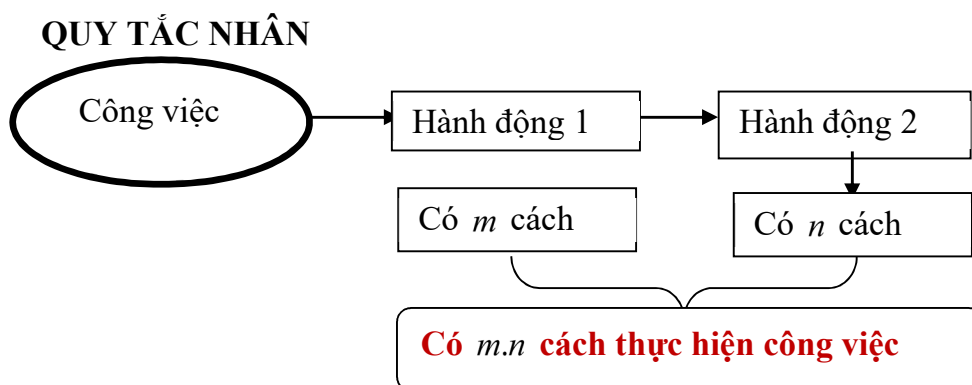
Quy tắc nhân: Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì để hoàn thành công việc có $m \cdot n$ cách thực hiện.

Do không hiểu rõ khái niệm nên giữa hai quy tắc này học sinh rất dễ nhầm lẫn, bởi vậy trong quá trình dạy học giáo viên cần gạch chân và nói kỹ cụm từ “**một trong hai hành động**” – quy tắc cộng và cụm từ “**hai hành động liên tiếp**” – quy tắc nhân; giải thích rõ cho học sinh thấy: nếu chỉ cần **một trong hai hành động** thì công việc đó đã hoàn thành thì dùng quy tắc cộng; còn công việc đó chỉ có thể hoàn thành khi phải thực hiện **hai hành động liên tiếp** thì dùng quy tắc nhân. Việc nhấn mạnh, khắc sâu các cụm từ trên nhằm giúp học sinh phân biệt được quy tắc cộng và quy tắc nhân. Tuy nhiên, thiết nghĩ trong trường hợp này dùng bản đồ tư duy lại thật sự hiệu quả và khắc sâu vào bộ nhớ của học sinh.

Ta có thể cho học sinh ghi nhớ và nắm vững bản chất của hai quy tắc đếm thông qua sơ đồ tư duy như sau:

QUY TẮC CỘNG





Với những cách để giảm thiểu sai lầm giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân như trên việc tạo ra câu hỏi trắc nghiệm đối với dạng bài tập ở mức nhận biết thì cũng đơn giản, bởi ở mức độ này thì yêu cầu là Nhận biết nên có phần đơn giản hơn.

TN1.1. Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động, hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện mà không trùng với bất kỳ cách nào của hành động thứ nhất, thì để hoàn thành công việc đó có số cách thực hiện là: A. $m + n$. B. $m.n$. C. n^m . D. m^n .

TN 1.2. Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì số cách để hoàn thành công việc đó là:

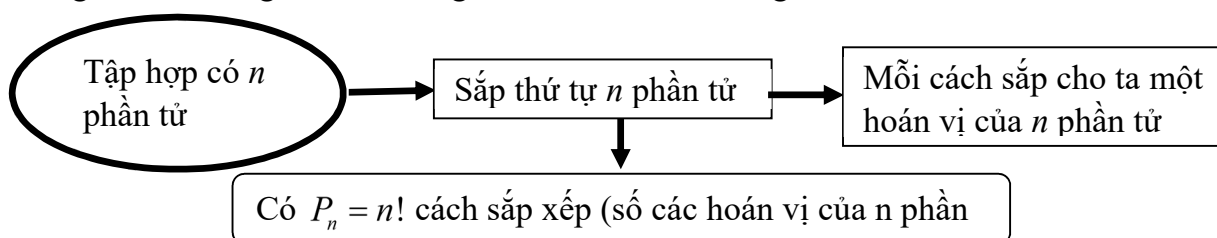
A. $m + n$. B. $m.n$. C. n^m . D. m^n .

Đối với khái niệm hoán vị của n phần tử và số các hoán vị của n phần tử học sinh vẫn còn gặp phải những sai lầm cơ bản, thông thường học sinh thường đồng nhất giữa khái niệm hoán vị và kí hiệu số các hoán vị. Có rất nhiều học sinh phát biểu: “hoán vị của n phần tử kí hiệu là $P_n = n!$ ”. Nguyên nhân do nhiều học sinh vẫn chưa hiểu được bản chất của khái niệm hoán vị nên thường nhầm lẫn giữa ký hiệu giữa đối tượng và đối tượng được định nghĩa. Theo A.A.Stoliar, không ít học sinh còn yếu trong việc nắm vững cú pháp của ngôn ngữ toán học, học sinh hay nhầm lẫn với khái niệm được định nghĩa...

Bởi thế đứng trước sai lầm cơ bản này người giáo viên phải nói rõ được bản chất của hoán vị: Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). **Mỗi kết quả** của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là **một hoán vị** của n phần tử đó.

Nhấn mạnh: **Mỗi kết quả sắp xếp n phần tử là một hoán vị**, có bao nhiêu kết quả đó chính là số các hoán vị. **Số các hoán vị kí hiệu là P_n $P_n = n!$**

Hơn nữa ta dùng sơ đồ sau đây sẽ khắc sâu cho học sinh để giảm sai lầm và đồng nhất giữa đối tượng được định nghĩa và số các đối tượng.



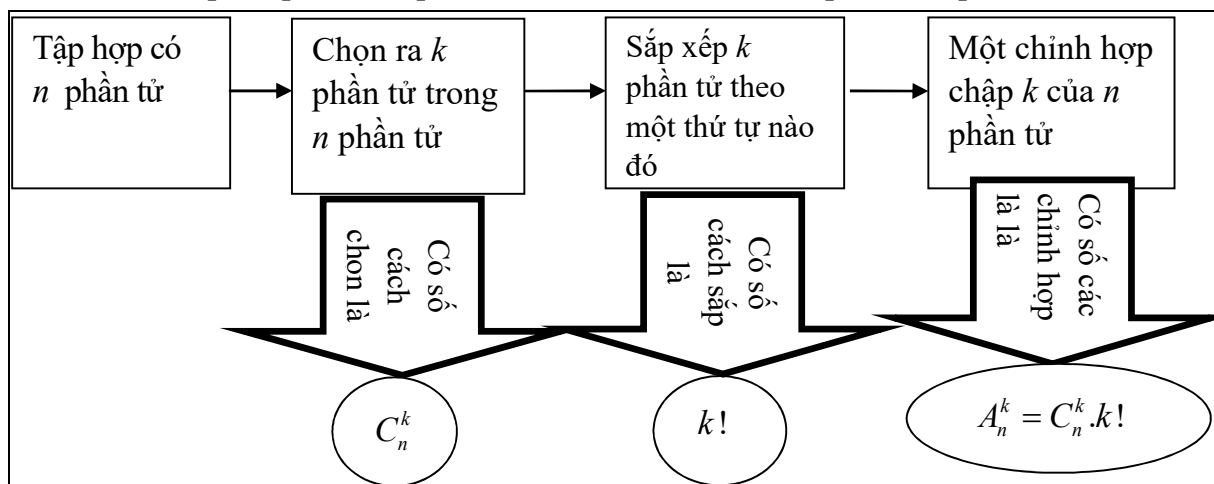
Với cách tháo gỡ sai lầm của học sinh như trên tôi tin sẽ giúp các em phân biệt được hoán vị của n phần tử và số các hoán vị của n phần tử. Câu hỏi trắc nghiệm sau là kết

quả của việc lấy sai lầm của học sinh làm phương án nhiều.

TN 1.3. Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mệnh đề nào sau đây *sai*?

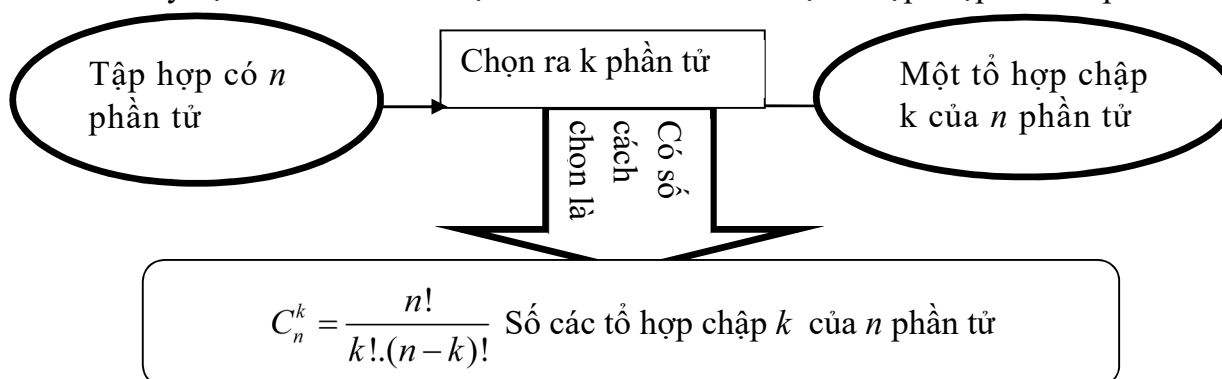
- A. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.
- B. Hoán vị n phần tử của A kí hiệu là P_n , $P_n = n!$.
- C. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó, ta được một hoán vị các phần tử của tập hợp A.
- D. Số các hoán vị của A kí hiệu là P_n , $P_n = n!$.

Tương tự như hoán vị thì khi học về khái niệm chỉnh hợp học sinh cũng nhầm lẫn giữa khái niệm chỉnh hợp và kí hiệu số các chỉnh hợp chập k của n phần tử. Vì vậy ngoài việc diễn đạt ngôn từ một cách gãy gọn và chính xác thì để giúp học sinh tránh khỏi những sai lầm cơ bản sơ đồ tư duy sau đây sẽ giúp học sinh nắm vững và phân biệt được khái niệm chỉnh hợp chập k của n phần tử và số các hoán vị chập k của n phần tử.

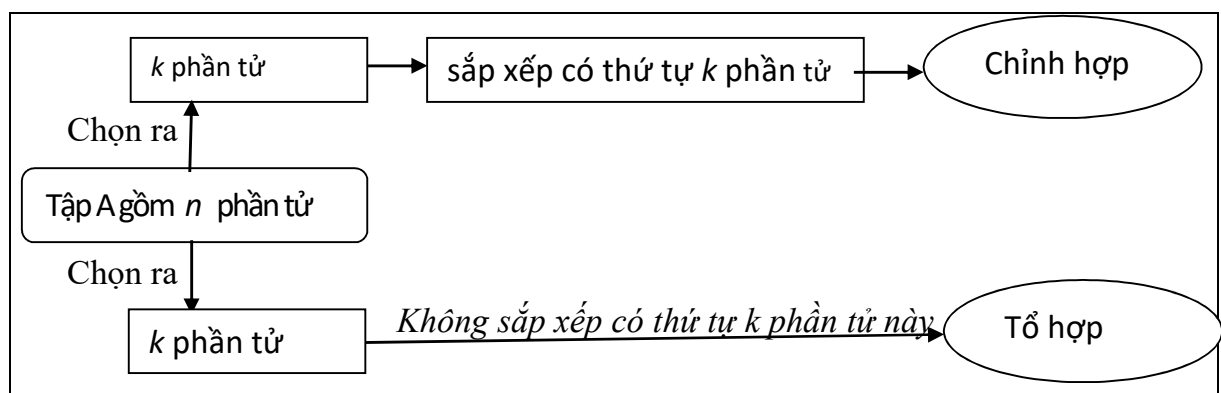


Nhìn vào sơ đồ học sinh có thể nhớ và hiểu được khái niệm chỉnh hợp chập k của n phần tử một cách ngắn gọn: Từ tập hợp gồm n phần tử, chọn ra k phần tử, sắp xếp k phần tử này theo một thứ tự nào đó thì được một chỉnh hợp chập k của n phần tử, đồng thời cũng từ sơ đồ mà học sinh có thể phân biệt chỉnh hợp chập k của n phần tử và số và số các chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Nhầm lẫn và đồng nhất giữa khái niệm tổ hợp và số các tổ hợp chập k của n phần tử cũng là một sai lầm rất phổ biến của học sinh, và sơ đồ tư duy sau đây là một trong các cách hiệu quả để giúp học sinh nắm vững khái niệm một cách chính xác. Nhìn vào sơ đồ tư duy học sinh sẽ trả lời được câu hỏi: Thế nào là một tổ hợp chập k của n phần tử.



Như vậy trong mỗi khái niệm về hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp học sinh nhầm lẫn giữa đối tượng được định nghĩa với số các đối tượng được định nghĩa. Ngoài ra học sinh còn hay nhầm lẫn giữa “khái niệm về chỉnh hợp chập k của n phần tử” và “khái niệm tổ hợp chập k của n phần tử”. Hai khái niệm này na ná giống nhau, học sinh có thể học thuộc khái niệm nhưng lại không biết được chúng nên giáo viên cần làm rõ ngay từ khi học sinh tiếp cận với hai khái niệm này. Điểm nhấn giữa hai khái niệm chỉnh hợp và tổ hợp để phân biệt chúng đó là: Chỉnh hợp có tính đến thứ tự, còn tổ hợp thì không tính đến thứ tự. Tuy nhiên, nếu chỉ diễn giải bằng lời vẫn có vẽ hàn lâm, học sinh không hình dung được, nếu hình dung cũng có vẽ mơ hồ. Vậy để học sinh không bị nhầm lẫn giữa hai khái niệm này, giáo viên cho hai khái niệm vào cùng một sơ đồ để học sinh thấy rõ sự khác biệt đó. Đây cũng là cách để học sinh dễ ghi nhớ và nắm vững kiến thức, đồng thời không bị nhầm lẫn giữa các khái niệm.



Hơn thế nữa nếu học sinh phân biệt được chỉnh hợp và tổ hợp thì khi làm toán đếm mới có thể biết vận dụng vào làm các bài toán sau này.

Khắc phục sai lầm các bài toán đếm ở mức nhận biết bằng phương pháp sử dụng sơ đồ tư duy có tác dụng rất lớn. Tuy nhiên trên thực tế dạy học thì việc học sinh vẫn còn vấp phải sai lầm là điều không thể tránh khỏi. Dưới đây là một số câu hỏi ở mức nhận biết mà ta cho các sai lầm đó vào các phương án trả lời trong câu hỏi trắc nghiệm, nhằm lần nữa giúp học sinh biết nhận ra các sai lầm để tìm cho mình phương án trả lời chính xác cho bài tập trắc nghiệm.

TN1.4. Cho tập hợp A gồm có 5 phần tử. Số cách chọn 3 phần tử trong 5 phần tử là

- A. 10. B. 60. C. 15. D. 8.

TN1.5. Cho tập hợp A gồm có 5 phần tử. Số cách chọn 3 phần tử trong 5 phần tử và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó là:

- A. 10. B. 60. C. 15. D. 8.

TN1.6. (Câu 3. Đề minh họa THPT QG 2018): Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

- A. A_{10}^8 . B. A_{10}^2 . C. C_{10}^2 . D. 8.

Nhận xét chung

Như vậy khi học các kiến thức về quy tắc cộng, quy tắc nhân, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp là các cơ sở lý thuyết để học sinh đi làm bài toán đếm. Nhưng trong thực tế dạy

học những đơn vị kiến thức này học sinh vẫn còn mắc phải những hiểu nhầm, hiểu sai, hiểu không trọn vẹn về chúng, lâu dần các em mất hứng thú học tập. Với kinh nghiệm dạy học bản thân tôi thấy việc phân tích rõ những chỗ học sinh thường nhầm lẫn là cần thiết. Dùng sơ đồ tư duy để trình bày kiến thức sẽ giúp học sinh nhận biết các khái niệm và phân biệt các khái niệm ở mức nhận biết một cách dễ dàng. Ngoài ra, việc sử dụng sơ đồ tư duy còn góp phần nâng cao chất lượng dạy học, gây hứng thú học tập cho học sinh, giúp các em giảm thiểu được những sai lầm ở mức nhận biết.

4.2. Phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh, từ đó xây dựng phương án nhiều cho bài tập trắc nghiệm tương ứng trong các bài toán đếm ở mức độ thông hiểu

Về khái niệm thông hiểu, đó là khả năng nắm chắc hoặc giải thích và chứng minh được ý nghĩa của sự vật, hiện tượng. Người học có thể chuyển thông tin từ dạng này sang dạng khác bằng cách giải thích thông tin và ước lượng xu hướng tương lai. Biểu thị, minh họa, giải thích được ý nghĩa các khái niệm, hiện tượng; lựa chọn sắp xếp bổ sung những thông tin cần thiết để giải quyết một vấn đề nào đó theo một cấu trúc logic cũng là một cách thông hiểu.

Trong dạy học nói chung và đối với chương trình cấp THPT nói riêng có rất nhiều học sinh sai lầm ở mức độ này. Môn toán không là trường hợp ngoại lệ và các bài toán đếm thì sai lầm lại càng phổ biến hơn. Với mức độ thông hiểu này học sinh vẫn có thể nhầm lẫn như một số ví dụ sau:

Ví dụ 2.1. Cho 10 điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$.

- a) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ– không nhận điểm đầu và điểm cuối thuộc tập mười điểm trên?
- b) Có bao nhiêu đoạn thẳng có hai điểm mút thuộc tập mười điểm trên?
 - a) **Lời giải 1.** Cứ chọn hai điểm bất kỳ trong mười điểm trên thì cho ta một vectơ, do đó số các vectơ khác vectơ–không, có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập mười điểm trên là $C_{10}^2 = 45$,

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Học sinh không nắm vững kiến thức về vectơ, hai điểm bất kỳ cho ta hai vectơ đối nhau chứ không phải một vectơ.

Lời giải 2: Để được một vectơ khác vectơ– không thì cứ một điểm thì nối được với chín điểm còn lại, và ngược lại từ chín điểm này nối ngược lại với điểm ban đầu. Do đó có $1.9.2=18$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Học sinh nhầm lẫn là đã cố định một điểm và đi xét các vectơ luôn nhận điểm đó làm điểm đầu hoặc điểm cuối, do đó trong trường hợp này đếm đã bị thiếu.

Lời giải 3

Cũng với lý luận như lời giải 2, một học sinh khác lại tính cứ mỗi điểm thì cùng với 9 điểm khác cho ta 18 vectơ, mà có 10 điểm có thể đổi vai trò cho nhau nên có $10.9.2=180$ vectơ.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Đọc qua thì dường như suy luận đang có lý, nhưng thực chất thì trong phép đếm

này đã bị lặp, do khi chọn điểm đầu có 10 cách và điểm cuối có 9 cách là đã chứa đựng trường hợp ngược lại trong đó rồi, ví dụ khi chọn điểm đầu là A_1 thì điểm cuối lần lượt là $A_1, A_3, \dots$, tức trong đó đã có vector $\overrightarrow{A_1 A_2} \dots$ và khi điểm đầu là A_1 tức đã chứa vector $\overrightarrow{A_2 A_1}$, ... vậy ở đây kết quả không thể là 180 vector được.

Cách khắc phục

Cứ hai điểm bất kỳ trong 10 điểm trên thì cho ta hai vector đối nhau. Vậy số các vector thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $A_{10}^2 = 90$ (vector);

Cũng có thể lý luận: số cách chọn điểm đầu là 10, số cách chọn điểm cuối của vector là 9. Vậy số vector được lập là $10 \cdot 9 = 90$ (vector).

Nhận xét: Như vậy với câu hỏi a, do học sinh hiểu sai về cách tạo thành một vector từ các điểm và hiểu sai về sự đếm lặp, đếm thiếu nên dẫn đến một số kết quả sai.

b) Trong câu b, cũng không ít học sinh giải sai với lý luận chọn điểm thứ nhất của đoạn thẳng thì có 10 cách, điểm đầu mút thứ hai cho đoạn thẳng là 9, vậy số các đoạn thẳng là $10 \cdot 9 = 90$.

Cũng có một số học sinh lý luận được cứ chọn hai điểm bất kỳ từ tập mười điểm trên cho ta một đoạn thẳng nên số đoạn thẳng tạo thành là số tổ hợp chập 2 của 10 phần tử $C_{10}^2 = 45$, và đây mới là lời giải đúng cho bài toán.

Từ những sai lầm đó, ta có thể có những câu hỏi trắc nghiệm chứa đựng những đáp án nhiễu, là mỗi nhữ mà những học sinh chưa hiểu rõ vẫn đề có thể mắc phải như sau:

TN 2.1. Cho 10 điểm $A_1, A_1, A_3, \dots, A_{10}$. Có bao nhiêu vector khác vector – không nhận điểm đầu và điểm cuối thuộc tập mười điểm trên

A. 45. B. 90. C. 18. D. 180.

TN 2.1.1. Cho 10 điểm $A_1, A_1, A_3, \dots, A_{10}$. Có bao nhiêu đoạn thẳng có hai điểm mút thuộc tập mười điểm trên?

A. 45. B. 90. C. 18. D. 180.

Ví dụ 2.2. Lớp 11A1 có 38 học sinh trong đó có 18 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh để một bạn làm lớp trưởng và một bạn làm bí thư trong đó bí thư phải là học sinh nam và không có học sinh nào kiêm nhiệm hai chức vụ.

Với ví dụ này có học sinh trình bày lời giải như sau:

Lời giải 1:

Chọn 1 bạn làm lớp trưởng: có 38 cách.

Chọn 1 bạn làm bí thư có 20 cách (vì bí thư phải là học sinh nam).

Do đó số cách chọn là $38 \cdot 20 = 760$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Rõ ràng lời giải này sai, vì khi chọn 1 bạn làm lớp trưởng mà là học sinh nam, giải sử là N_1 , thì khi chọn 1 bạn làm bí thư không thể chọn N_1 nữa, nghĩa là trong trường hợp này đã đếm lặp, do đó kết quả của lời giải trên chưa đúng.

Lời giải 2:

Chọn một bạn làm bí thư: có 20 cách.

Chọn một bạn làm lớp trưởng: có 37 cách.

Vậy có $20+37=57$ cách chọn.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Để hoàn thành công việc cần thực hiện hai hành động liên tiếp, do đó mới chọn học sinh làm chức vụ bí thư cũng chưa hoàn thành công việc, và việc chọn một bạn học sinh làm lớp trưởng cũng không thể hoàn thành công việc. Do đó sử dụng quy tắc cộng trong trường hợp trên là sai.

Lời giải 3:

Chọn một bạn làm bí thư có 20 cách.

Chọn một bạn lớp trưởng có 18 cách.

Theo quy tắc nhân có $20.18=360$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Ở đây học sinh đã nhầm tưởng với lý lẽ, chọn bạn nam làm bí thư thì có 20 cách và khi đã chọn bạn nam làm bí thư rồi thì lớp trưởng phải là nữ nên có 18 cách chọn. Vậy kết quả là $20.18=360$ cách.

Như vậy cả ba lời giải đều sai, ở mỗi lời giải đều có một cái sai đặc trưng. Tuy nhiên ta sẽ hướng các em cùng đến với lời giải sau để khắc phục những sai lầm đó.

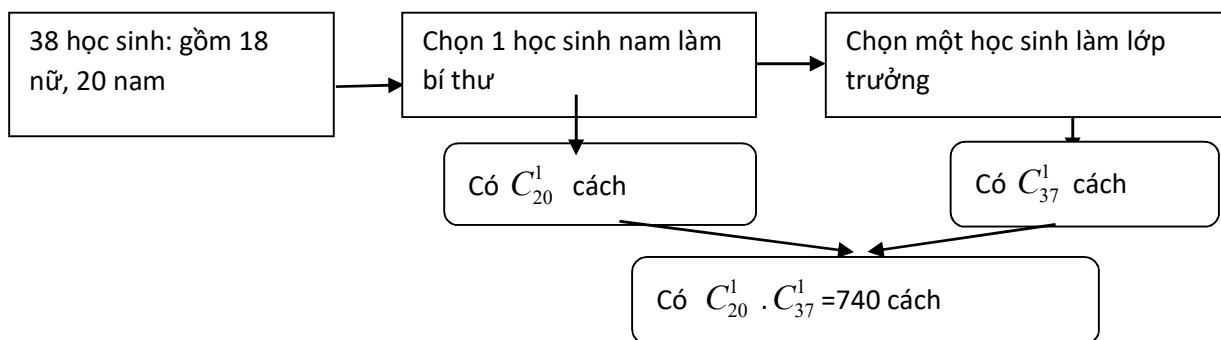
Cách khắc phục bài toán

Do chức vụ bí thư phải có sự ràng buộc là nam nên ta tiến hành chọn bí thư trước.

Chọn một bạn học sinh làm bí thư trong 20 bạn nên có 20 cách chọn.

Khi đó số cách chọn 1 bạn làm lớp trưởng là 37 học sinh còn lại (trừ đi học sinh đã được chọn làm bí thư). Vậy số cách chọn hai học sinh một bạn làm lớp trưởng, một bạn làm bí thư và bí thư phải là học sinh nam là $20.37=740$ cách chọn.

Qua mỗi lời giải đều có một sự sai lầm khác nhau. Để hướng các em đến kết quả chính xác cho bài toán ta có thể cho các em nhìn thấy sơ đồ tư duy sau đây:



Như vậy qua phân tích ta thấy những kết quả trên có thể là những cái bẫy để ta đưa vào câu hỏi trắc nghiệm.

TN2.2.1. Lớp 11A1 có 38 học sinh trong đó có 18 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh để một bạn làm lớp trưởng và một bạn làm bí thư trong đó bí thư phải là học sinh nam và không có học sinh nào kiêm nhiệm hai chức vụ.

A. 760.

B. 57.

C. 360.

D. 740.

TN2.2.2. Lớp 11A1 có 38 học sinh trong đó có 18 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn

ra 2 học sinh để một bạn làm lớp trưởng và một bạn làm bí thư, biết không có học sinh nào kiêm nhiệm hai chức vụ.

A. 760.

B. 57.

C. 360.

D. 740.

Ví dụ 2.3. Có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh

a) Làm 3 công việc khác nhau.

b) Cùng làm một công việc.

Lời giải 1

Chọn 3 học sinh trong tổng số 9 học sinh và có 3 học sinh rồi thì mỗi người chỉ làm được một việc nên số cách chọn là: $C_9^3 = 84$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Ở đây, học sinh mới chỉ chọn ra 3 học sinh chứ chưa đếm cách giao việc, vì 3 việc làm khác nhau nên chỉ cần học sinh đổi việc cho nhau thì cho ta một cách chọn khác nhau.

Lời giải 2.

Chọn 3 học sinh từ 9 học sinh có $A_9^3 = 504$ cách chọn. Từ 3 học sinh đó đi giao cho 3 nhiệm vụ khác nhau có $3!$ cách. Vậy số cách chọn 3 học sinh để làm 3 công việc khác nhau là: $A_9^3 = 504 \cdot 3! = 3024$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Học sinh đã hiểu sai vấn đề là chọn 3 học sinh từ 9 học sinh thì đó chính là tổ hợp chập 3 của 9 chứ không phải chỉnh hợp chập 3 của 9. Nếu chọn 3 học sinh và ngầm giao 3 nhiệm vụ khác nhau trong đó rồi thì số cách chọn là $A_9^3 = 504$, nhưng trong lời giải lại tiếp tục giao việc cho 3 học sinh nên đã dẫn đến đếm lặp. Do đó cho lời giải sai.

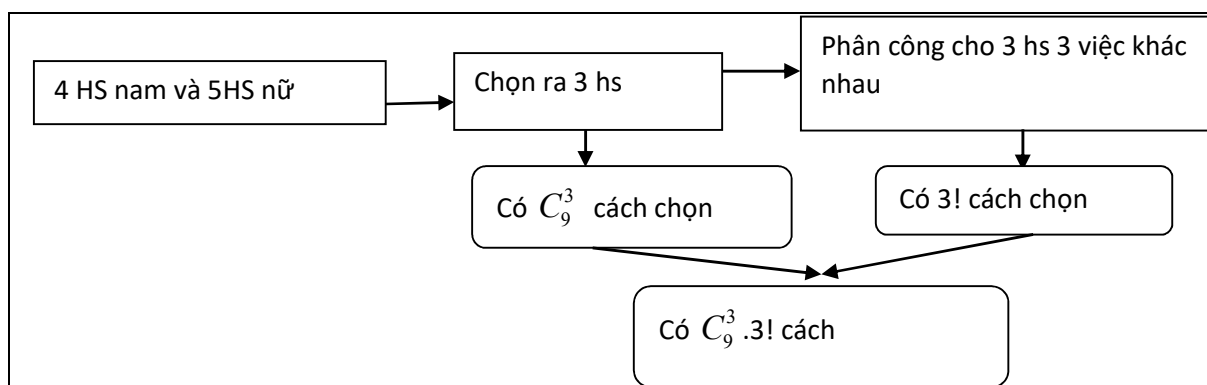
Lời giải 3

Chọn 3 học sinh từ 9 học sinh có $C_9^3 = 84$ cách chọn, từ 3 học sinh này có 3 cách giao 3 việc khác nhau nên số cách chọn 3 học sinh từ 9 học sinh để làm 3 việc khác nhau là: $C_9^3 = 84 \cdot 3 = 252$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Mặc dù đã đếm đúng số cách chọn ra 3 học sinh trong số 9 học sinh, nhưng khi đếm số cách giao việc cho 3 học sinh lại bị thiếu, nên dẫn đến bài toán cho đáp án sai.

Qua việc phân tích lời giải trên tôi thấy để hướng các em đến với lời giải đúng là việc làm cần thiết đối với giáo viên. Để sửa chữa những sai lầm đó, người giáo viên vẽ sơ đồ tư duy thực hiện công việc vừa giúp học sinh nhận ra mình sai ở đâu, đồng thời nhìn thấy ngay cách khắc phục bài toán.

Sơ đồ tư duy và cách khắc phục



Cách khắc phục

Chọn 3 học sinh từ 9 học sinh có $C_9^3 = 84$, từ 3 học sinh này có $3!$ cách giao cho 3 việc khác nhau. Vậy số cách chọn ra 3 học sinh trong tổng số 9 học sinh để làm 3 việc khác nhau là: $C_9^3 \cdot 3! = 504$.

Nhận xét: Như vậy, qua phân tích các sai lầm của học sinh ta thấy, học sinh chưa nắm vững việc sử dụng chỉnh hợp, tổ hợp, quy tắc nhân hợp lý, lúc đếm thừa, khi lại đếm thiếu và dẫn đến kết quả không như mong đợi.

Từ những sai lầm đó của học sinh, thì việc xây dựng các đáp án nhiều trong câu hỏi trắc nghiệm không còn là khó khăn đối với người dạy toán nữa.

TN2.3.1. Một tổ gồm có 9 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh để làm 3 công việc khác nhau.

- A. 84. B. 3024. C. 252. D. 504.

Sau khi phân tích lời giải trong câu a và vẽ sơ đồ tư duy tóm tắt nội dung lời giải bài toán thì kiểm tra mức độ tiếp nhận kiến thức của học sinh qua bài toán trắc nghiệm sau:

TN2.3.2. Một tổ gồm có 9 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh để cùng làm một công việc.

- A. 84. B. 3024. C. 252. D. 504.

Ví dụ 2.4. Một tổ có 4 bạn nam và 5 bạn nữ. Cần chọn ra 3 đôi nam nữ để thi hát dân ca ví dặm. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải 1

Sau ví dụ 2.3, vì học sinh nhận được sự tương tự sau khi chọn ra số học sinh rồi còn liên quan đến thứ tự sắp xếp nên có lời giải đầy lý luận như sau:

Từ 4 bạn nam cần chọn ra 3 bạn nam, từ 5 bạn nữ chọn ra 3 bạn nữ. Vì sau khi chọn lại cần sắp xếp các bạn nam nữ thành các đôi khác nhau nên ta dùng công thức tính số chỉnh hợp. Số cách chọn là: $A_4^3 \cdot A_5^3 = 1440$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Thật sự ở đây học sinh đã tương tự hóa ở ví dụ 2.3, nhưng sự tương tự đã không chính xác và dẫn đến sai lầm. Việc sắp xếp 3 bạn nam và 3 bạn nữ thành 3 đôi như thế sẽ có sự trùng lặp. Giả sử 3 bạn nam được chọn theo thứ tự là A, B, C và 3 bạn nữ được chọn theo thứ tự là 1, 2, 3 ta sẽ có các đôi (A1), (B2), (C3), nhưng khi các bạn nam được chọn theo thứ tự A, C, B và các bạn nữ được chọn

theo thứ tự 1, 3, 2 thì ta cũng có các đôi như trước.

Lời giải 2

Số cách chọn ra 3 học sinh nam là C_4^3 , số cách chọn ra 3 học sinh nữ là C_5^3 . Vậy số cách chọn ra 3 cặp nam nữ để thi hát dân ca là $C_4^3.C_5^3 = 40$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Sai lầm của học sinh ở chỗ là chỉ mới dừng lại ở việc chọn ra 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ chứ chưa hoàn thành triệt để công việc là đi ghép cặp.

Lời giải 3

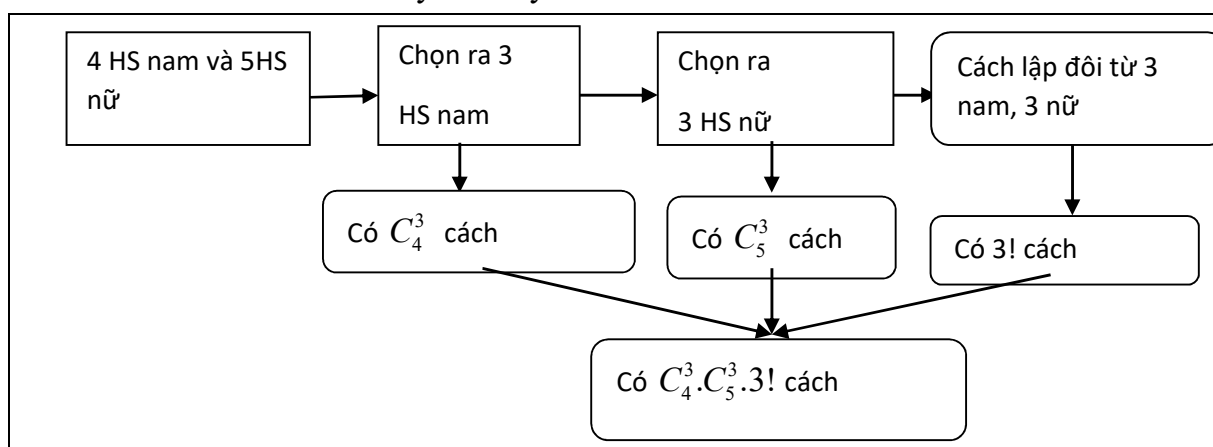
Số cách chọn ra 3 học sinh nam là C_4^3 , số cách chọn ra 3 học sinh nữ là C_5^3 . Số cách ghép 3 nam với 3 nữ thành cặp là 3 cách. Vậy số cách chọn ra 3 cặp nam nữ để thi hát dân ca là : $C_4^3.C_5^3.3 = 120$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Học sinh đã đếm được số cách chọn ra 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ, nhưng đếm số cách xếp cặp đôi lại bị thiếu nên kết quả của bài toán bị sai.

Qua phân tích các lời giải trên ta thấy đa số các em không hiểu bản chất của chỉnh hợp và tổ hợp để sử dụng trong từng hoàn cảnh của bài toán.

Cách khắc phục

Để khắc phục những sai lầm trên, giáo viên chỉ cần đưa toàn bộ những hành động cần tiến hành vào sơ đồ tư duy sau đây:



Nhìn vào sơ đồ tư duy ta thấy

Công việc lập các đôi được thực hiện bởi 3 hành động liên tiếp:

+ Chọn 3 nam từ 4 nam có C_4^3 cách chọn.

+ Chọn 3 nữ từ 5 nữ có C_5^3 cách chọn.

+ Từ 3 bạn nam, 3 bạn nữ này ta có 3! cách lập các đôi nam nữ.

Theo quy tắc nhân ta có : $C_4^3.C_5^3.3!=240$ cách chọn.

Như vậy kết quả lời giải đúng là đáp án và các sai lầm của học sinh là các phương án nhiễu cho câu hỏi trắc nghiệm như sau:

TN2.4.1. Có 4 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 đôi nam nữ để thi hát dân ca.

A. 1440.

B.40.

C.240.

D. 120.

Nhận xét chung: Qua việc phân tích và sửa chữa những sai lầm thường gặp của học sinh ở mức độ thông hiểu ta thấy được tính hiệu quả trong đó. Khi giáo viên phát hiện và sửa chữa được sai lầm kịp thời cũng giống như chúng ta đang uốn tre khi còn non vậy. Điều đặc biệt quan trọng là với những bài toán ở mức thông hiểu khi được sửa chữa kịp thời và dùng sơ đồ tư duy làm trung tâm để cho lời giải đúng thì học sinh rất dễ nhận thấy từng bước đi của bài toán. Đồng thời, điều mà mỗi giáo viên hướng các em tới để phù hợp với yêu cầu đổi mới của hình thức thi trắc nghiệm hoàn toàn được tháo gỡ vì ngay sau đó những câu hỏi trắc nghiệm được hình thành. Lúc này, các phương án trả lời đã có độ gây nhiễu cao. Hơn nữa, sau mỗi bài toán không chỉ được một câu hỏi trắc nghiệm mà giáo viên có thể xây dựng được những câu hỏi trắc nghiệm khác, có khi phương án nhiễu trở thành đáp án nếu ta thay đổi nội dung câu dẫn. Với lối đi này tiết kiệm được nhiều thời gian trong quá trình dạy học phù hợp với hình thức thi trắc nghiệm như hiện nay.

4.3. Phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh, từ đó xây dựng phương án nhiễu cho bài tập trắc nghiệm tương ứng trong các bài toán đếm ở mức độ vận dụng thấp

Về khái niệm vận dụng thì đây là mức độ nhận thức mà đòi hỏi khả năng sử dụng các kiến thức đã học vào một hoàn cảnh cụ thể mới: vận dụng nhận biết, hiểu biết thông tin để giải quyết vấn đề đặt ra, là khả năng đòi hỏi các em phải biết vận dụng kiến thức, biết sử dụng phương pháp, nguyên lý hay ý tưởng để giải quyết một vấn đề nào đó. Đây là mức độ giải quyết vấn đề cao hơn, thường được cụ thể hóa bằng những yêu cầu sau: so sánh các phương án giải quyết vấn đề; phát hiện lời giải có mâu thuẫn, sai lầm và chỉnh sửa được. Giải quyết những tình huống mới bằng cách vận dụng các khái niệm định lý, định luật, tính chất đã biết.

Với các bài toán vận dụng thấp, những sai lầm phổ biến của học sinh có thể gặp phải ở đây là: do hoàn thành chưa triệt để công việc, khi phân chia các trường hợp nhỏ để sử dụng quy tắc cộng nhưng lại chưa đảm bảo tính đầy đủ và tính độc lập, khi phân chia công việc thành các công đoạn để sử dụng quy tắc nhân thì chưa thích hợp, cũng có những trường hợp do hiểu sai về phần bù mà cho những kết quả chưa chính xác...

Khi giải bài toán đếm việc phân chia trường hợp là một cách làm rất hữu ích, nó cho cách giải quyết vấn đề nhanh gọn, súc tích. Chính vì lẽ đó việc phân chia trường hợp là thường xuyên trong các bài toán đếm. Một bài toán phức tạp có thể đơn giản hóa được bằng cách phân chia ra các trường hợp. Tuy nhiên, trong thực tế dạy học tôi nhận thấy, rất nhiều học sinh chưa nắm vững tiêu chí của sự phân chia nên dẫn đến sai lầm.

Ví dụ 3.1. Có 20 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 20. Hỏi có bao nhiêu cách rút để tích các số trên 2 tấm bìa chia hết cho 3.

Lời giải 1

Trong 20 số được đánh trên 20 thẻ có 6 số chia hết cho 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18 và 14 số không chia hết cho 3.

TH1: Chọn được một tấm bìa đánh số hết cho 3 và một tấm bìa trong các tấm bìa còn lại:

Có: $C_6^1 \cdot C_{19}^1$ cách.

TH2: Chọn được hai tấm bìa đánh số chia hết cho 3. Có: C_6^2 cách.

Vậy số cách rút hai tấm bìa để tích các số đánh trên hai tấm bìa chia hết cho 3 là:

$$C_6^1 \cdot C_{19}^1 + C_6^2 = 129 \text{ cách.}$$

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Như vậy, trong lời giải trên rõ ràng trường hợp 1 đã bao hàm trường hợp 2, mặt khác trong trường hợp 1 thì học cũng đã đếm lặp như trong lời giải 1, cụ thể là trong quá trình tính toán các cặp gồm hai thẻ đều ghi số chia hết cho 3 đã bị đếm lặp hai lần. Hay nói tổng quát do học sinh chưa nắm vững tiêu chí của sự phân chia ở đây, việc sử dụng quy tắc cộng chưa đảm bảo tính độc lập nên đã đếm thừa.

Lời giải 2

Vì để hai tích hai số chia hết cho 3 thì có ít nhất một trong hai số đó phải chia hết cho 3. Do đó chọn một tấm bìa được đánh số chia hết cho 3, và chọn một tấm bìa bất kì trong các tấm bìa còn lại thì chắc chắn tích đó sẽ chia hết cho 3. Vậy số cách chọn là $C_6^1 \cdot C_{19}^1 = 114$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Đọc qua lời giải tưởng chừng rất hợp lý, nhưng thực chất ở đây là một lời giải sai do đếm lặp. Vì giả sử ở hành động 1 đã chọn thẻ 6 và hành động hai có thể chọn nhầm thẻ 9, tức cặp thẻ được chọn ở đây là (6,9), và trường hợp hành động 1 chọn phải thẻ 9, thì chắc chắn trong hành động 2 có lần chọn thẻ 6, hay cặp thẻ được chọn trong trường hợp này là (9,6), mà thực chất cặp thẻ (6,9) và (9,6) là một.

Lời giải 3

Có 6 tấm bìa đánh các số 3, 6, 9, 12, 15, 18 chia hết cho 3 và 14 tấm bìa còn lại đánh các số chia hết cho 3. Để tích hai số đánh trên hai tấm bìa chia hết cho ba Chọn 2 tấm đánh số có tích chia hết cho 3: Có $C_6^2 = 15$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Đề bài yêu cầu tích của hai số đánh trên tấm bìa chia hết cho 3, nhưng học sinh lại hiểu sai vấn đề là các số trên mỗi tấm bìa buộc phải chia hết cho 3 nên kết quả là bị đếm thiếu. Như vậy ở đây ngoài kiến thức về tổ hợp xác suất thì học sinh do không nắm vững tiêu chí để tích của hai số chia hết cho 3 nên có thể có những sai lầm như vậy. Sai lầm này không phổ biến lắm, nhưng không phải là không có.

Qua phân tích những lời giải sai đó, ta sẽ tìm hướng xử lí tối ưu và tìm ra đáp án cho bài toán như sau:

Cách khắc phục

Cách 1:

TH1: Chọn được một tấm bìa đánh số chia hết cho 3 và một tấm bìa trong các tấm bìa đánh số không chia hết cho 3: Có: $C_6^1 \cdot C_{14}^1$ cách.

TH2: Chọn được hai tấm bìa được đánh số chia hết cho 3. Có: C_6^2 cách.

Vậy số cách rút được hai tấm bìa thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $C_6^1.C_{14}^1 + C_6^2 = 99$ cách.

Cách 2. Giải bù trừ là một trong những cách đếm tương đối hiệu quả cho bài toán đếm này.

Xét tích của hai số nguyên bất kỳ

KN1: Ít nhất một trong hai số chia hết cho 3.

KN2: Không có số nào chia hết cho 3.

Số cách chọn 2 thẻ bất kì trong 20 thẻ là $C_{20}^2 = 190$.

Chọn 2 thẻ mà trong đó không có thẻ nào đánh số chia hết cho 3 là C_{14}^2 .

Vậy số cách chọn 2 thẻ mà tích của chúng chia hết cho 3 là $C_{20}^2 - C_{14}^2 = 99$.

Nhận xét: Như vậy, sau phân tích lời giải sai thì sẽ hình thành được lời giải đúng, đó chính là lỗi khắc phục cho những sai lầm, với bài toán này giáo viên có thể dùng lý luận và lời giải trên để thuyết phục học sinh.

Thực chất bài toán đếm này chính là tôi xây dựng từ việc đếm số phần tử của biến cố trong một bài toán rất quen thuộc với mỗi giáo viên đang trực tiếp giảng dạy môn toán cấp THPT của tỉnh Hà Nội, và tôi chắc chắn rằng trong bài toán này những cũng có không ít giáo viên vẫn còn mắc phải sai lầm.

(Có 20 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên 2 tấm. Tính xác suất của biến cố: “Tích các số trên 2 tấm bìa chia hết cho 3”. Đề thi khảo sát chất lượng giáo viên tỉnh Hà Nội năm 2014).

Dựa trên các sai lầm đó của các em ta có thể xây dựng được câu hỏi trắc nghiệm như sau:

TN3.1.1. Có 20 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên 2 tấm. Hỏi có bao nhiêu cách rút để tích các số trên 2 tấm bìa chia hết cho 3.

A. 15. B. 129. C. 99. D. 114.

TN3.1.2. Có 20 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên 2 tấm. Hỏi có bao nhiêu cách rút để tích các số trên 2 tấm bìa không chia hết cho 3.

A. 175. B. 61. C. 91. D. 76.

TN3.1.3. Có 20 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên 2 tấm. Hỏi có bao nhiêu cách rút để tích các số trên 2 tấm bìa chia hết cho 5.

A. 171. B. 177. C. 6. D. 70.

TN3.1.4. Có 20 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên 2 tấm. Hỏi có bao nhiêu cách rút để tích các số trên 2 tấm bìa chia hết cho 4.

A. 95. B. 85. C. 105. D. 45.

Qua ví dụ 3.1 ta nhận thấy, trong quá trình dạy học, làm một bài toán đếm không đơn thuần là tìm cho nó một con số chính xác mà ẩn đằng sau nó là cả một hệ thống ứng dụng, việc lấy kết quả của những lời giải sai làm phương án nhiễu cho câu hỏi trắc nghiệm tương ứng cực kỳ có hiệu quả. Không những vậy, từ bài toán đó ta hoàn toàn có thể xây dựng những câu hỏi mở rộng hoặc tương tự hoặc phủ định các ý được hỏi trong bài toán, cũng từ đó ta có các bài tập trắc nghiệm tương ứng.

Ví dụ 3.2. (THTT số 396/ tháng 6 năm 2010) Một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 6 thẻ để tổng số ghi trên 6 thẻ đó là một số lẻ?

Lời giải 1

Số cách lấy 6 thẻ bất kỳ trong 11 thẻ là $C_{11}^6 = 462$.

Số cách lấy 6 thẻ có tổng là số chẵn là: $C_6^6 = 1$.

Vậy số cách lấy 6 thẻ sao cho tổng các số đánh trên 6 thẻ là một số lẻ là: $462 - 1 = 461$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Học sinh đã đếm bù trừ nhưng đã hiểu sai vấn đề là để tổng các số ghi trên 6 thẻ là một số chẵn thì 6 thẻ đó đều phải đánh số chẵn.

Lời giải 2

Để tổng các số ghi trên 6 thẻ phải là số lẻ thì trong 6 thẻ được chọn phải có thẻ được đánh số lẻ.

Vì trong 11 thẻ được đánh số từ 1 đến 11 thì có 6 thẻ đánh số lẻ và 5 thẻ đánh số chẵn nên lấy 6 thẻ bất kỳ trong 11 thẻ thì chắc chắn đã có thẻ mang số lẻ. Vậy số cách chọn 6 thẻ sao cho tổng các số đánh trên 6 thẻ là một số lẻ là $C_{11}^6 = 462$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Học sinh khẳng định trong 6 thẻ phải có thẻ đánh số lẻ thì đúng nhưng lại thừa, do nếu số các thẻ được đánh số lẻ là số chẵn thì tổng các số ghi trên thẻ là chẵn chứ không phải là lẻ nữa. Chẳng hạn chọn các thẻ đánh số 1,2,3,4,6,8 thì tổng các số này là một số chẵn.

Từ những sai lầm trên của học sinh ta thấy, chủ yếu là học sinh không hiểu được bản chất bài toán: Trong 11 số từ 1 đến 11, có 5 số chẵn và 6 số lẻ, cần chọn ra 6 số sao cho tổng của chúng phải là số lẻ.

Cũng có không ít học sinh ghép nhóm các 6 số sao cho tổng là lẻ. Nhưng phương pháp này thật sự không khả quan, và nó càng khó khăn khi ta thay đổi số liệu bài toán.

Điều đặc biệt quan tâm trong ví dụ này là: Số thẻ đánh số lẻ phải là lẻ thì tổng của chúng mới là lẻ được.

Từ các sai lầm trên ta có hướng xử lý như sau:

Cách khắc phục

Muốn tổng số ghi trên 6 thẻ là một số lẻ thì số thẻ đánh số lẻ phải là lẻ. Do đó có 6 thẻ đánh số lẻ thì có thể xảy ra: 1 thẻ lẻ và 5 thẻ chẵn; 3 thẻ lẻ và 3 thẻ chẵn, 5 thẻ lẻ và 1 thẻ chẵn. Khi đó số cách lấy 6 thẻ sao cho tổng các số được đánh trên 6 thẻ đó là một số lẻ là: $C_6^1.C_5^5 + C_6^3.C_5^3 + C_6^5.C_5^1 = 236$ cách.

Như vậy từ những sai lầm trên ta hoàn toàn có thể có câu hỏi trắc nghiệm như sau:

TN3.2.1. Một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 6 thẻ để tổng số ghi trên 6 thẻ đó là một số lẻ?

A. 462.

B. 461.

C. 236.

D. 226.

Ta cũng dễ dàng mở rộng ví dụ như sau:

TN 3.2.2. Một hộp đựng 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Hỏi có bao nhiêu cách

lấy ra 6 thẻ để tổng số ghi trên 6 thẻ đó là một số lẻ?

A. 19440.

B. 38550.

C. 210.

D. 19110.

Nhận xét: Từ việc học sinh hiểu được bản chất của vấn đề thì ta hoàn toàn có thể tăng dần số thẻ lên để học sinh tiếp tục nghiên cứu và phát triển dạng toán sâu hơn.

Ví dụ 3.3. (*Đề thi Đại học, Cao đẳng khối B–2005*)

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam, 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và một nữ.

Lời giải 1

Số cách chọn 4 nam trong 12 nam là: C_{12}^4 .

Số cách chọn 1 nữ trong 3 nữ là C_3^1 .

Vậy số cách lập đội gồm 4 nam và 1 nữ là $C_{12}^4 \cdot C_3^1 = 1485$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Học sinh chỉ mới dừng lại ở việc đếm số cách để lập đội gồm có 4 nam và 1 nữ, chưa hoàn thành triệt để công việc là phân công đội thanh niên về giúp đỡ 3 tỉnh.

Lời giải 2

Số cách chia 12 học sinh nam thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 học sinh là $C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4$.

Số cách chia 3 học sinh nữ thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 1 học sinh là $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$.

Số cách ghép đội, mỗi đội gồm 4 nam và 1 nữ là $3!$ (Vì mỗi đội được ghép gồm 1 nhóm nam gồm 4 học sinh và 1 nhóm nữ gồm 1 học sinh)

Vậy số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi đội gồm có 4 nam và 1 nữ là: $C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 \cdot 3! = 1247400$ cách lập.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Với lý lẽ dường như là thuyết phục, và có không ít học sinh đã gật đầu với lời giải này. Tuy nhiên, đây vẫn là một sai lầm của học sinh. Với cách lập luận trình tự các hành động, lập 3 nhóm nam: mỗi nhóm 4 nam, lập 3 nhóm nữ: mỗi nhóm 1 nữ, sau đó ghép cặp mỗi nhóm nam tương ứng với mỗi nhóm nữ, rồi áp dụng quy tắc nhân. Nhưng học sinh đã nhầm lẫn ở chỗ. Khi học sinh đếm cách lập 3 nhóm nam được chọn từ 12 học sinh và lập 3 nhóm nữ được chọn từ 3 học sinh nữ thì học sinh đã ấn định tính thứ tự các nhóm ngầm trong đó rồi, nên tiếp tục tính số cách ghép nhóm nam nữ để được đội là bị lặp nên kết quả sai.

Lời giải 3

Số cách chia 12 học sinh nam thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 học sinh là $C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4$.

Số cách chia 3 học sinh nữ thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 1 học sinh là $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$.

Số cách ghép đội, mỗi đội gồm 4 nam và 1 nữ là $3!$ cách (Vì mỗi đội được ghép gồm 1 nhóm nam có 4 học sinh nam và 1 nhóm nữ có 1 học sinh nữ).

Số cách phân công 3 đội về 3 tỉnh là: $3!$ cách.

Vậy số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao

cho mỗi đội gồm có 4 nam và 1 nữ là: $C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 \cdot 3! \cdot 3! = 7484400$ cách lập.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Cũng tương tự như lời giải 2, trong lời giải 3 học sinh cứ liên tiếp đếm lặp. Vì khi chia nhóm đã ngầm tính thứ tự nên việc học sinh đếm thêm số cách lập đội đã lập và cũng do đã có tính thứ tự trong khi lập nhóm khi phân về 3 tỉnh mà tiếp tục tính nữa thì tính lặp tiếp.

Từ những sai lầm phổ biến trên của học sinh giáo viên có thể định hướng và đi đến lời giải đúng như sau:

Cách khắc phục

Đầu tiên ta chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ nhất. Theo quy tắc nhân có $C_{12}^4 \cdot C_3^1 = 1485$ cách.

Sau đó chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ hai. 4 nam sẽ được chọn trong 8 nam còn lại và 1 nữ sẽ được chọn trong hai nữ còn lại. Vậy theo quy tắc nhân có số cách chọn là: $C_8^4 \cdot C_2^1 = 140$.

Và còn lại 4 nam và 1 nữ thì phân công cho tỉnh thứ ba.

Vậy theo quy tắc nhân số cách phân công thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $1485 \cdot 140 = 207900$.

Từ lời giải đúng và các lời giải sai ta có câu hỏi trắc nghiệm như sau:

TN3.3.1. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam, 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và một nữ.

A. 207900.

B. 1247400.

C. 7484400.

D. 1485.

Ví dụ 3.4. Một trường THPT có 15 học sinh giỏi tỉnh khối 10, 14 học sinh giỏi tỉnh khối 11 và 16 học sinh giỏi tỉnh khối 12. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 học sinh đi dự đại biểu đoàn cấp trên sao cho 4 học sinh được chọn có học sinh cả 3 khối.

Lời giải 1

Chọn 1 học sinh khối 10: Có C_{15}^1 cách chọn.

Chọn 1 học sinh khối 11: Có C_{14}^1 cách chọn.

Chọn 1 học sinh khối 12: Có C_{16}^1 cách chọn.

Một học sinh còn lại chọn trong 42 học sinh còn lại, có C_{42}^1 cách chọn.

Vậy số cách chọn 4 học sinh sao cho có cả 3 khối là: $C_{15}^1 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{16}^1 \cdot C_{42}^1 = 141120$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Đa phần học sinh vẫn hay có lời giải như trên, bởi khi đã chọn mỗi khối 1 học sinh thì đã thỏa mãn điều kiện là có đủ học sinh cả ba khối, còn một học sinh còn lại thì chọn bất kì đều thỏa mãn yêu cầu bài toán. Học sinh không nhận ra là mình đã tính lặp trong đó. Chẳng hạn ta kí hiệu 15 học sinh khối 10 lần lượt là $A_1, A_1, \dots, A_{15}$; 14 học sinh khối 11 lần lượt là: $B_1, B_2, \dots, B_{14}$; 16 học sinh khối 12 lần lượt là $B_1, B_2, \dots, B_{16}$. Giả sử 3 học sinh được chọn thuộc 3 khối là A_1, B_1, C_1 và một học sinh khác bất kỳ là A_1 thì cũng trùng với cách chọn 3 học sinh được chọn thuộc 3 khối là A_1, B_1, C_1 và một học sinh bất kỳ đó là A_1 . Như vậy lời giải trên đã bị đếm lặp.

Lời giải 2

Số cách chọn 4 học sinh bất kỳ trong tổng số 45 học sinh là: $C_{45}^4 = 148995$ cách chọn.

Số cách chọn 4 học sinh chỉ thuộc một khối hoặc hai khối là :
 $C_{15}^4 + C_{14}^4 + C_{16}^4 + C_{29}^4 + C_{31}^4 + C_{30}^4 = 86807$ cách chọn.

Vậy số cách chọn 4 học sinh có đủ cả 3 khối là $148995 - 86807 = 62188$ cách chọn.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Đọc qua lời giải xem chừng là có lý: Vì mỗi khối đều có số học sinh lớn hơn 4. Vậy khi chọn 4 học sinh bất kỳ thì 4 học sinh đó có thể chỉ cùng thuộc 1 khối, hoặc thuộc hai trong ba khối hoặc thuộc cả ba khối. Do đó lấy tổng số cách lấy 4 học sinh bất kỳ trong tổng số 45 cách và trừ đi số cách chọn 4 học sinh chỉ thuộc một khối hoặc thuộc hai trong ba khối thì ra số cách chọn 4 học sinh có đủ cả 3 khối.

Tuy nhiên, kết quả của bài toán trên lại không đúng. Vậy sai lầm ở đâu? đó là khi chọn 4 học sinh bất kỳ trong tổng số học sinh của hai khối thì đã chứa trường hợp là 4 học sinh đó có thể thuộc cùng một khối. Ví dụ trong 29 học sinh gồm 15 học sinh khối 10 là $A_1, A_1, \dots, A_{15}$ và 14 học sinh khối 11 là $B_1, B_2, \dots, B_{14}$ thì 4 học sinh được chọn ra có thể là chỉ toàn khối 10: $A_1, A_1, A_3, A_4, \dots$ hoặc 4 học sinh đó chỉ toàn là học sinh khối 11: $B_2, B_3, B_4, B_5, \dots$

Lời giải 3

Số cách chọn 4 học sinh bất kỳ trong tổng số 45 học sinh là: $C_{45}^4 = 148995$ cách.

Vì khi chọn 4 học sinh trong tổng số học sinh thuộc hai trong 3 khối thì đã chứa trường hợp 4 học sinh đó có thể thuộc một khối hoặc thuộc hai khối, do đó số cách chọn 4 học sinh chỉ thuộc một khối hoặc hai khối là:
 $C_{29}^4 + C_{31}^4 + C_{30}^4 = 82621$ cách chọn.

Khi đó số cách chọn 4 học sinh có đủ cả ba khối là: $148995 - 82621 = 66374$ cách chọn.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

So với lời giải thứ 2, lời giải 3 xem chừng như có lý hơn. Tuy nhiên, đây cũng chưa phải là kết quả đáng tin cậy. Bởi khi ta chọn 4 học sinh bất kỳ trong tổng số 29 học sinh gồm 15 học sinh khối 10 và 14 học sinh khối 11 đã chứa trường hợp 4 học sinh được chọn có thể cùng thuộc khối 10 hoặc cùng thuộc khối 11, tiếp tục khi chọn 4 học sinh trong tổng số 31 học sinh gồm 15 học sinh khối 10 và 16 học sinh khối 12 thì cũng chứa trường hợp là 4 học sinh đó cùng thuộc khối 10,.... Nghĩa là ta đã tính lặp số cách chọn 4 học sinh thuộc một khối đến hai lần. Hay nói cách khác ta đã đếm sai phần bù (đếm thừa), nên kết quả số cách chọn 4 học sinh có đủ 3 khối đã bị thiếu.

Qua sự phân tích cụ thể các sai lầm trên của học sinh, việc tìm ra lời giải đúng sẽ đơn giản hơn nhiều.

Cách khắc phục

Cách 1. Giáo viên có thể định hướng và cho học sinh tìm lời giải cho bài toán

bằng cách lập bảng như sau:

HS Khối 10 (15)	HS Khối 11(14)	HS Khối 12 (16)	Số cách chọn
1	1	2	$C_{15}^1 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{16}^2$
2	1	1	$C_{15}^2 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{16}^1$
1	2	1	$C_{15}^1 \cdot C_{14}^2 \cdot C_{16}^1$
Vậy có tất cả: $C_{15}^1 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{16}^2 + C_{15}^2 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{16}^1 + C_{15}^1 \cdot C_{14}^2 \cdot C_{16}^1 = 70560$			

Cách 2. Ngoài cách đếm trực tiếp bằng cách lập bảng như trên thì việc đếm bù trừ cũng thật sự rất hiệu quả đối với loại toán đếm này:

Số cách chọn 4 học sinh bất kỳ trong tổng số 45 học sinh là: $C_{45}^4 = 148995$ cách chọn.

Số cách chọn 4 học sinh bất kỳ trong tổng số hai trong ba khối là: $C_{29}^4 + C_{31}^4 + C_{30}^4 = 82621$ cách chọn.

Vì khi chọn 4 học sinh bất kỳ trong tổng số học sinh của hai trong ba khối đã chứa trường hợp 4 học sinh đó cùng thuộc một khối hoặc cùng thuộc hai khối, và trường hợp 4 học sinh đó cùng thuộc một khối đều đã bị đếm lặp hai lần. Do đó số cách chọn 4 học sinh chỉ thuộc một khối hoặc hai trong ba khối là $C_{29}^4 + C_{31}^4 + C_{30}^4 - (C_{15}^4 + C_{14}^4 + C_{16}^4) = 78435$ cách chọn.

Vậy số cách chọn 4 học sinh có cả ba khối là $148995 - 78435 = 70560$ cách chọn.

Nhận xét: Như vậy với hai cách tính trực tiếp hoặc gián tiếp đều cho kết quả đúng cho bài toán. Cũng với những suy luận đầy lí lẽ với cách tính trực tiếp cũng như gián tiếp ở những lời giải 1, lời giải 2, lời giải 3 là những sai lầm thường gặp và phổ biến của học sinh khi giải toán tổ hợp xác suất ở mức vận dụng thấp. Có thể nói, việc nhận biết kiến thức còn thiếu sót, việc hiểu được kiến thức lại là một vấn đề và việc đề vận dụng kiến thức vào giải toán vẫn gặp phải những sai lầm là những điều không thể tránh khỏi của học sinh khi làm toán tổ hợp xác suất.

Với ví dụ này, chúng ta dễ dàng có câu hỏi trắc nghiệm như sau:

TN3.4.1. Một trường THPT có 15 học sinh giỏi tỉnh khối 10, 14 học sinh giỏi tỉnh khối 11 và 16 học sinh giỏi tỉnh khối 12. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 học sinh đi dự đại biểu đoàn cấp trên sao cho 4 học sinh được chọn có học sinh cả 3 khối.

- A. 66374. B. 141120. C. 62188. D. 70560.

Từ ví dụ trên ta có thể cho học sinh giải bài tập tương tự:

TN3.4.2. Một trường THPT có 15 học sinh giỏi tỉnh khối 10, 14 học sinh giỏi tỉnh khối 11 và 16 học sinh giỏi tỉnh khối 12. Có bao nhiêu cách chọn 9 hs có đủ 3 khối.

- A. $C_{45}^9 - (C_{29}^9 + C_{31}^9 + C_{30}^9) - C_{15}^9 + C_{14}^9 + C_{16}^9$.
 B. $C_{45}^9 - (C_{29}^9 + C_{31}^9 + C_{30}^9)$.
 C. $C_{45}^9 - (C_{29}^9 + C_{31}^9 + C_{30}^9) + C_{15}^9 + C_{14}^9 + C_{16}^9$.
 D. $C_{45}^9 - (C_{29}^9 + C_{31}^9 + C_{30}^9) + 2C_{15}^9 + C_{14}^9 + C_{16}^9$.

Có học sinh đã chọn đáp án A, với lời giải thích như sau:

- Số cách chọn 9 học sinh trong tổng số 45 học sinh là: C_{45}^9 .
- Số cách chọn 9 học sinh chỉ một khối là: $(C_{15}^9 + C_{14}^9 + C_{16}^9)$.
- Số cách chọn 9 học sinh thuộc hai trong 3 khối là: $(C_{29}^9 + C_{31}^9 + C_{30}^9)$.

Vì khi chọn 9 học sinh trong số 45 học sinh thì có 3 khả năng là 9 học sinh đó cùng một khối, thuộc hai khối hoặc có đủ cả ba khối. Do đó, số cách chọn 9 học sinh sao cho có đủ học sinh cả ba khối là: $C_{45}^9 - (C_{15}^9 + C_{14}^9 + C_{16}^9) - (C_{29}^9 + C_{31}^9 + C_{30}^9)$.

Một số học sinh khác lại chọn B, với những lí luận:

Vì khi chọn 9 học sinh bất kì thuộc hai trong 3 khối đã chứa trường hợp là 9 học sinh được chọn có thể ở cùng một khối rồi, nên ta không phải đếm trường hợp số học sinh thuộc một khối rồi nữa mà ta đã trừ trong đó, nên kết quả đúng của bài toán là:

$$C_{45}^9 - (C_{29}^9 + C_{31}^9 + C_{30}^9).$$

Cũng không ít học sinh đã chọn đáp án D.

Ai đúng, ai sai, sai ở đâu? Hay cùng chưa có lời giải đúng?

Đọc qua lời giải, người đọc cảm thấy “*đường như là có lí*”, và nếu không suy xét kĩ thì với năng lực của học sinh trung bình và trung bình khá sẽ công nhận lời giải thứ nhất đúng, rồi lại được giải thích qua lời giải thứ hai cũng phân vân và muốn gật đầu.

Nhưng xét bài toán ta nhận thấy, lí luận của lời giải hai hợp lý hơn nhưng lại vẫn chưa chính xác, vậy sai lầm ở đâu?

Ta có, khi chọn 9 học sinh bất kì trong tổng số 29 học sinh khối 10 và khối 11 thì ta đã tính trường hợp 9 học sinh này có thể chỉ là khối 10, hoặc chỉ là khối 11 rồi, tương tự như vậy với khối 10 và khối 12, khối 11 và khối 12. Do đó trong quá trình tính bù trừ, thì ta đã trừ lặp số cách chọn học sinh thuộc một khối đến hai lần, do đó kết quả đúng phải là:

$$C_{45}^9 - (C_{29}^9 + C_{31}^9 + C_{30}^9) + C_{15}^9 + C_{14}^9 + C_{16}^9.$$

Sau khi phân tích và sửa chữa sai lầm cho học sinh, để kiểm tra xem học sinh đã hiểu thấu đáo chưa, giáo viên có thể ra câu hỏi như sau:

TN3.4.3. Một trường THPT có 15 học sinh giỏi tỉnh khối 10, 14 học sinh giỏi tỉnh khối 11 và 16 học sinh giỏi tỉnh khối 12. Có bao nhiêu cách chọn 15 hs có đủ 3 khối.

- A.** $C_{45}^{15} - (C_{29}^{15} + C_{31}^{15} + C_{30}^{15}) - (C_{15}^{15} + C_{14}^{15} + C_{16}^{15})$.
- B.** $C_{45}^{15} - (C_{29}^{15} + C_{31}^{15} + C_{30}^{15}) + C_{15}^{15} + C_{14}^{15} + C_{16}^{15}$.
- C.** $C_{45}^{15} - (C_{29}^{15} + C_{31}^{15} + C_{30}^{15}) + C_{15}^{15} + C_{16}^{15}$.
- D.** $C_{45}^{15} - (C_{29}^{15} + C_{31}^{15} + C_{30}^{15})$.

Đây là một câu trắc nghiệm tương tự như TN 3.4.2 và đã có rất nhiều học sinh bế tắc trước những con mồi trong phương án trả lời nếu như chưa được phân tích làm rõ các sai lầm thông qua **ví dụ 3.4**, nhưng cũng có không ít học sinh vận dụng không linh hoạt việc phân tích và sửa chữa các sai lầm trên nên dẫn đến vẫn còn mơ hồ trong việc tìm lối đi để có đáp án chính xác.

Thực chất trong quá trình đi làm bài toán gián tiếp, học sinh đã tính phần bù trong lý thuyết tập hợp, phần bù trong các ví dụ trên chủ yếu là học sinh cũng liệt kê các trường hợp ra rồi tính tổng và trừ đi cái ta không cần đếm. Trong các ví dụ 3.1, 3.4 và các câu hỏi trắc nghiệm tương ứng, việc sử dụng phương pháp gián tiếp rất hiệu quả. Tuy nhiên nếu không hiểu đúng về phần bù thì cũng thật là “tai hại”.

Ví dụ 3.5. Một hộp chứa 5 viên bi đỏ, 7 viên bi vàng, 8 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 8 viên bi. Có bao nhiêu cách lấy để 8 bi được chọn có nhiều nhất 4 bi đỏ.

Lời giải 1: Số cách chọn 8 bi bất kì trong tổng số 20 bi là: $C_{20}^8 = 125970$.

Số cách lấy để có ít nhất 4 bi đỏ là: $C_5^4.C_{15}^4 + C_5^5.C_{15}^3 = 7280$.

Vậy số cách lấy để 8 bi được chọn có nhiều nhất 4 bi đỏ là: $125970 - 7280 = 118690$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Ở đây học sinh đã hiểu lầm là phần bù của nhiều nhất là ít nhất, hay nói về ngôn ngữ xác suất thì học sinh hiểu biến cố đối của biến cố chứa từ “nhiều nhất” sẽ là biến cố có chứa từ “ít nhất”. Nhưng thực chất ở đây, hai tập này không phải bù nhau mà chúng giao nhau khác rỗng.

Lời giải 2. Vì số bi đỏ ít nhất là 4 nên có thể chọn thỏa mãn:

TH1: Số bi đỏ là 1: $C_5^1.C_{15}^7$.

TH2: Số bi đỏ là 2: $C_5^2.C_{15}^6$.

TH3: Số bi đỏ là 3: $C_5^3.C_{15}^5$.

TH4: Số bi đỏ là 4: $C_5^4.C_{15}^4$.

Vậy áp dụng quy tắc cộng ta có: $C_5^1.C_{15}^7 + C_5^2.C_{15}^6 + C_5^3.C_{15}^5 + C_5^4.C_{15}^4 = 119080$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Ở đây học sinh đã đếm thiếu, số bi đỏ nhiều nhất 4 nên khi tính học sinh luôn nghĩ phải có bi đỏ, phần thiếu ở đây là 8 bi được chọn có thể không có bi đỏ thì vẫn đảm bảo yêu cầu bài toán.

Cách khắc phục

Số cách chọn 8 bi ngẫu nhiên là $C_{20}^8 = 125970$.

Số cách chọn 8 bi mà có 5 bi đỏ là $C_5^5.C_{15}^3 = 455$.

Vậy số cách chọn 8 bi mà có nhiều nhất 4 bi đỏ là: $125970 - 455 = 125515$.

TN 3.5.1. Một hộp chứa 5 viên bi đỏ, 7 viên bi vàng, 8 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 8 viên bi. Có bao nhiêu cách lấy để 8 bi được chọn có nhiều nhất 4 bi đỏ.

A.125970.

B.125515.

C.119080.

D.118690.

Nhận xét chung: Như vậy, với mức độ vận dụng thấp, để giải bài toán đếm này đa phần học sinh cũng đi theo hai phương pháp chủ yếu là đếm trực tiếp và đếm gián tiếp (lấy phần bù), ở mỗi phương pháp có một ưu thế riêng và cũng có một hạn chế nhất định, không có phương pháp nào là vạn năng cả. Tuy nhiên, việc vận dụng chúng vào giải quyết các bài toán thì các em lại gặp phải không ít các sai lầm. Bài toán đếm rất đa dạng và phong phú, đặc biệt ở mức độ vận dụng thấp những bài toán gắn liền với những công việc ta thực hiện hằng ngày. Thông qua những sai lầm thường gặp khi giải bài toán

đếm ở mức vận dụng thấp ta thấy để vận dụng quy tắc cộng thì cần phải đảm bảo tính độc lập và tính đầy đủ, để sử dụng quy tắc nhân cần đảm bảo tính liên tục giữa các hành động và hợp lý, cần kiểm tra các hành động để hoàn thành công việc đã được thực hiện đầy đủ chưa.

4.4. Phân tích và sửa chữa những sai lầm thường gặp trong các bài toán đếm ở mức độ vận dụng cao

Vận dụng cao là khả năng biết khái quát hóa, trừu tượng hóa những tình huống đơn giản, đơn lẻ quen thuộc sang tình huống mới phức tạp hơn.

Đối với toán đếm, các bài toán đếm chủ yếu xoay quanh các hành động (liên tiếp hoặc không liên tiếp). Trong quá trình giải toán học sinh thường thực hiện công việc qua một số hành động mà quên đi các hành động khác, do đó mà công việc thực tế chưa hoàn thành. Việc hoàn thành chưa triệt để công việc, đếm thừa, đếm thiếu trường hợp là điều thường xuyên xảy ra. Hơn nữa việc hiểu sai về biến cố đối cũng là điều mà học sinh thường mắc phải.

Ở mức vận dụng cao, ngoài kiến thức về tổ hợp xác suất thì còn đòi hỏi ở học sinh một lối tư duy toán học thật sự logic và chắc chắn. Ở mức độ này thì đa số học sinh khá giỏi mới biết cách tiếp cận, còn học sinh yếu và trung bình thì khi làm ở mức này có chăng là một phép toán ngẫu nhiên và cho ra một con số giống với kết quả bài toán.

Xét ví dụ sau đây:

Ví dụ 4.1. (THTT số 396, tháng 6/ 2010)

Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau.

Lời giải 1

Xếp 6 học sinh vào 6 vị trí, có $6!$ cách.

Khi đó giữa 6 học sinh đó có 5 vị trí để có thể xếp hai thầy giáo vào. Số cách xếp 2 thầy giáo vào 5 vị trí là A_5^2 cách.

Theo quy tắc nhân ta có: $6! \cdot A_5^2 = 14400$ cách sắp xếp.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Học sinh đã bỏ sót đi 2 vị trí phía ngoài của 6 học sinh để xếp thầy giáo, do đó kết quả của bài toán còn bị thiếu.

Lời giải 2

Số cách xếp 6 học sinh và 2 thầy giáo thành một hàng là: $8!$.

Ta xem hai thầy giáo là một phần tử T, khi đó việc xếp 6 học sinh và phần tử T thành việc xếp 7 phần tử theo một hàng ngang, có $7!$ cách.

Vậy số cách sắp xếp để hai thầy giáo không đứng cạnh nhau là: $8! - 7! = 35280$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Học sinh đã sử dụng phương pháp tính bù trừ. Tuy nhiên khi tính phần bù đã bị thiếu trường hợp là hai thầy giáo này có thể đổi vị trí cho nhau. Do đó việc đếm phần bù bị thiếu, nên kết quả của bài toán đã thừa.

Lời giải 3

Xếp hai thầy giáo trước, có $2!$ cách.

Vì hai thầy giáo không đứng cạnh nhau nên ta phải xếp học sinh vào giữa hai thầy giáo đó. Do đó sau khi xếp hai thầy giáo, ta xếp 1 học sinh vào đứng giữa hai thầy, có 6 cách chọn, tiếp theo 5 học sinh còn lại có thể xếp bất kì vào 5 vị trí, có 5!.

Vậy theo quy tắc nhân có: $2! \cdot 6 \cdot 5! = 1440$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Học sinh chỉ mới xét trường hợp đứng giữa hai thầy giáo là một học sinh, còn thiếu đi những trường hợp khác có thể hai học sinh đứng giữa hai thầy, có thể 3 học sinh đứng giữa hai thầy,...miễn là đảm bảo hai thầy giáo không đứng cạnh nhau.

Từ các sai lầm phổ biến trên, sửa chữa sai lầm theo mỗi lỗi sai với hai cách giải đúng như sau:

Cách khắc phục

Cách 1

Trước hết ta xếp 6 học sinh thành hàng ngang có $6!$ cách.

Khi đó, mỗi học sinh đóng vai trò là một vách ngăn và tạo nên 7 vị trí có thể xếp 2 thầy giáo vào đó.

Xếp 2 thầy giáo vào 2 trong 7 vị trí: có A_7^2 cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả: $6! \cdot A_7^2 = 30240$ cách sắp xếp.

Cách 2:

Số cách xếp 6 học sinh và 2 thầy giáo thành một hàng ngang là $8! = 40320$. Xem hai thầy giáo là một phần tử T. Khi đó xem như xếp 7 phần tử (gồm 1 phần tử T và 6 học sinh), có $7!$ cách sắp xếp. Sau đó hai thầy giáo có thể đổi vị trí cho nhau nên có $2!$ cách. Do đó, theo quy tắc nhân, số cách sắp xếp để hai thầy giáo đứng cạnh nhau là: $7! \cdot 2! = 10080$ cách.

Vậy số cách xếp 6 học sinh và 2 thầy giáo thành một hàng ngang thỏa mãn hai thầy giáo không đứng cạnh nhau là: $40320 - 10080 = 30240$ cách sắp xếp.

Dựa trên những sai lầm đó ta có các câu hỏi trắc nghiệm tương ứng, lấy kết quả của lời giải sai làm phương án nhiễu như sau:

TN4.1.1. Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau.

A. 35280.

B. 30240.

C. 14400.

D. 1440.

Ví dụ 4.2. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B, 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp mà không có hai học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

Nhận xét:

Đây là một bài toán khó, được phát triển tương tự như ví dụ 4.1, thực tiễn cho thấy học sinh có những lời giải như sau:

Lời giải 1

Xếp 5 học sinh lớp 12C có $5!$ cách sắp xếp, khi đó có 6 vị trí để có thể xếp 5 học sinh còn lại vào.

Vì không có hai học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau nên trong 4 vị trí ở

giữa nhất thiết phải có học sinh. Số cách chọn 4 học sinh bất kỳ trong 5 học sinh và xếp vào 4 vị trí là A_5^4 , học sinh còn lại có 2 cách xếp. Vậy theo quy tắc nhân có $5!A_5^4.2 = 28800$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Nếu không thật sự chú ý thì đây là một đáp án nhiều rất ấn tượng, học sinh khá giỏi vấp phải đáp án này rất nhiều. Vậy sai ở đâu? Học sinh đã luôn ấn định rằng ở mỗi vị trí chỉ có thể xếp được một học sinh, mà bỏ quên đi trường hợp ở giữa hai học sinh lớp 12C ta hoàn toàn có thể sắp xếp 2 học sinh gồm 1 học sinh lớp 12A và 1 học sinh lớp 12B thì vẫn thỏa mãn yêu cầu bài toán, chẳng hạn CABCBCACBC,...(với kí hiệu A: học sinh lớp A, B: là học sinh lớp B, C: là học sinh lớp C, đây chỉ hình ảnh tượng trưng, trong thực tế các A khác nhau, các B khác nhau, các C khác nhau).

Lời giải 2

Xếp 5 học sinh lớp 12C có 5! cách sắp xếp, khi đó có 4 vị trí để có thể xếp 5 học sinh còn lại vào.

Ta sẽ xếp 5 học sinh vào 4 vị trí: trong đó có 1 vị trí ta xếp cặp gồm 1 học sinh lớp 12A và 1 học sinh lớp 12B, 3 vị trí còn lại xếp 3 học sinh còn lại.

Theo quy tắc nhân cách xếp trong trường hợp này là $5!.C_2^1.C_3^1.4.2!.3! = 34560$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Học sinh ấn định hai vị trí đầu và cuối là học sinh lớp 12C mà bỏ quên đi trường hợp là có thể xếp học sinh lớp 12A hoặc lớp 12B vào phía ngoài học sinh lớp 12C. Như vậy trong trường hợp này học sinh cũng đếm thiếu.

Lời giải 3

Xếp 5 học sinh lớp 12C có 5! cách sắp xếp, khi đó có 6 vị trí để có thể xếp 2 học sinh lớp A và 3 học sinh lớp B vào.

Số cách xếp 5 học sinh gồm 3 học sinh lớp 12A và 3 học sinh lớp 12B vào 6 vị trí là A_6^5 . Vậy theo quy tắc nhân có: $5!A_6^5 = 86400$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm:

Có rất nhiều học sinh chấp nhận lý giải bài toán như trên. Sau khi sắp xếp học sinh lớp 12C tạo ra 6 vị trí để xếp 5 học sinh của hai lớp vào nhưng học sinh đã không bám sát yêu cầu đề bài để việc sắp xếp chặt chẽ hơn. Trong lời giải, học sinh đã đếm chứa cả những trường hợp mà 4 vị trí ở giữa vẫn tồn tại vị trí không sắp xếp học sinh vào. Như vậy thì sẽ có trường hợp hai học sinh lớp 12C đứng cạnh nhau. Do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách khắc phục: Qua phân tích các sai lầm ta có bài giải đúng như sau:

Đầu tiên ta xếp 5 học sinh lớp 12C có 5! cách sắp xếp.

Lúc này mỗi học sinh đóng vai trò là 1 vách ngăn và tạo nên 6 vị trí để có thể xếp học sinh 12A và 12B vào.

Vì học sinh cùng lớp không thể đứng cạnh nhau nên trong 4 vị trí ở giữa phải luôn được xếp học sinh vào.

TH1: Xếp 4 học sinh vào 4 vị trí ở giữa, hai vị trí hai đầu xếp cho học sinh còn lại,

số cách chọn là $A_5^4 \cdot 2$.

Theo quy tắc nhân có $5! \cdot A_5^4 \cdot 2 = 28800$ cách.

TH2: Vì chỉ còn lại 5 học sinh thuộc hai lớp và buộc 4 vị trí ở giữa phải có học sinh nên ta sẽ xếp 5 học sinh vào 4 vị trí: trong đó có 1 vị trí ta xếp cặp gồm 1 học sinh lớp 12A và 1 học sinh lớp 12B, 3 vị trí còn lại xếp 3 học sinh còn lại.

Theo quy tắc nhân cách xếp trong trường hợp này là $5! \cdot C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot 4 \cdot 2! \cdot 3! = 34560$.

Vậy số cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $28800 + 34560 = 63360$.

Nhận xét: Như vậy trên những sai lầm của học sinh ta hoàn toàn có câu hỏi trắc nghiệm khách quan sau đây:

TN4.2.1. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B, 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Số cách xếp mà không có hai học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

- A.** 63360. **B.** 28800. **C.** 34560. **D.** 86400.

Thực chất ví dụ trên đây tôi đã trình bày cách tính số phần tử của biến cố trong bài toán xác suất, trích trong đề tham khảo THPTQG 2018

(Câu 49. (Đề tham khảo THPT QG 2018) Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B, 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có hai học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

- A.** $\frac{11}{630}$. **B.** $\frac{1}{126}$. **C.** $\frac{1}{105}$. **D.** $\frac{1}{42}$.

Các đáp án A, B, C, D trong bài toán đếm ở trên chính là các kết quả số phần tử của biến cố để cho các đáp án xác suất tương ứng như trong câu hỏi 49–Đề tham khảo THPT QG 2018.

Như vậy, ở mức vận dụng cao thì thường trong quá trình dạy học việc giáo viên phát triển hệ thống bài tập từ bài toán gốc là một trong những phương pháp vô cùng hiệu quả để học sinh khắc sâu và vận dụng bài toán gốc tốt nhất. Tuy nhiên đây cũng là một trong những sai lầm mà học sinh vẫn thường mắc phải, bởi các em vẫn còn giải bài sau tương tự bài toán trước một cách rập khuôn mà không quan tâm hay để ý đến trong quá trình phát triển bài toán thì đã phát sinh những khả năng nào? trường hợp nào? hay hành động nào...để công việc được hoàn thành.

Ví dụ 4.3

Có 7 viên bi xanh đánh số từ 1 đến 7, 6 viên bi đỏ đánh số từ 1 đến 6, 5 viên bi trắng đánh số từ 1 đến 5, 4 viên bi vàng đánh số từ 1 đến 4. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 quả cầu vừa khác màu vừa khác số.

Lời giải 1

Số cách lấy 4 quả bất kỳ trong tổng số 22 quả cầu là $C_{22}^4 = 7315$.

Số cách lấy 4 quả cùng màu hoặc cùng số là: $C_7^4 + C_6^4 + C_5^4 + C_4^4 + C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 312$.

Vậy số cách lấy ra 4 quả vừa khác màu vừa khác số là : $7315 - 312 = 7003$ cách lấy.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Học sinh đã hiểu sai khi tính phần bù. Khi lấy 4 quả

cầu không phải chỉ xảy ra trường hợp vừa khác màu vừa khác số, cùng màu và cùng số mà còn chứa cả những trường hợp hai màu trùng số, hoặc hai số nhưng cùng màu. Chẳng hạn 4 quả được chọn là X1, Đ1, T2, V3 thì chúng không cùng màu, cũng không cùng số và cũng không phải vừa khác màu, vừa khác số.

Lời giải 2

Số cách chọn bi xanh là 7.

Số cách chọn bi đỏ là 5.

Số cách chọn bi trắng 3.

Số cách chọn bi vàng là 1.

Theo quy tắc nhân có: $7.5.3.1=105$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm:

Học sinh đã không hình dung được sự phụ thuộc khi chọn bi đỏ, sau khi đã chọn bi xanh. Nếu bi xanh được chọn là số 7 thì việc lựa chọn bi đỏ là 6 chứ không phải 5, nhưng nếu bi xanh được chọn đánh số khác 7 thì số cách chọn bi đỏ lại là 5. Bởi vậy chưa có sự thống nhất trong số các cách chọn giữa các hành động, nên kết quả của bài toán chưa đúng.

Lời giải 3

–TH1: Chọn bi xanh số 7, bi đỏ số 6, bi trắng số 5 và bi vàng bất kỳ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy có $1.1.1.4=4$ cách.

–TH2:

Bi xanh đánh số khác 7, có 6 cách chọn.

Chọn bi đỏ, có 5 cách chọn (trừ đi 1 bi đánh số trùng với bi xanh)

Chọn bi trắng, có 3 cách chọn (trừ đi 2 bi được đánh số giống với bi xanh và bi đỏ)

Chọn bi vàng, chỉ có 1 cách chọn (trừ đi 3 bi đã được đánh số giống các bi đã chọn)

Áp dụng quy tắc nhân có $6.5.3.1=90$.

Vậy áp dụng quy tắc cộng có $4+90=94$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Đọc qua lời giải nghe có vẻ hợp lý, bởi thế sai lầm của học sinh trong trường hợp này là điều không tránh khỏi. Trong trường hợp 1 học sinh đã tính thiếu, do bi xanh đánh số 7 thì bi đỏ có thể tùy ý từ các số 1,2,3,4,5,6. Sau đó sự lựa chọn bi trắng lại phụ thuộc vào chọn bi đỏ, nếu bi đỏ đánh số 6 thì bi trắng có đến 5 cách chọn, nhưng bi đỏ được đánh số khác 6 thì bi trắng còn 4 cách chọn..., Như vậy việc đếm số cách chọn 4 bi thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp này chưa triệt để mà còn phụ thuộc giữa các hành động.

Qua phân tích ta thấy các lời giải trên có vẻ có lý, nhưng lại có kết quả sai. Việc chỉ ra cho học sinh lỗi sai thì đã trình bày, tuy nhiên việc khắc phục lỗi sai mới là vấn đề chúng ta quan tâm. Để hướng các em đến với lời giải đúng giáo viên có thể phân tích:

Để chọn 4 bi ta sẽ tiến hành thực hiện 4 hành động liên tiếp, nhưng cần lựa chọn hành động nào trước, hành động nào sau, chúng liên tiếp nhau để hoàn thành công việc, đồng thời thỏa mãn việc thực hiện trong hành động này không bị phụ thuộc vào các cách

chọn của các hành động trước mà số cách chọn phải tương ứng. Bởi thế, ở đây công việc chọn ra 4 bi cần được tiến hành chọn bi vàng trước, vì số cách chọn 1 bi vàng không chịu ảnh hưởng đến cách chọn bi ở các màu còn lại, tiếp tục tính ưu tiên đến chọn bi trắng, bi đỏ và bi xanh.

Cách khắc phục

Hành động 1: Chọn quả cầu vàng: Số cách chọn là C_4^1 .

Hành động 2: Chọn quả cầu màu trắng: Phải loại đi quả cầu trắng đánh số có số trùng với quả cầu vàng đã được chọn ở hành động 1, vì thế số cách chọn là C_4^1 .

Hành động 3: Chọn quả cầu màu đỏ: Trong tổng số 6 quả cầu đỏ, để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta không được chọn quả cầu được đánh số giống với quả cầu vàng và quả cầu trắng được chọn, nên số cách chọn còn lại là C_4^1 .

Hành động 4: Chọn quả cầu màu xanh: Vì quả cầu được chọn ra phải đánh số khác với 3 quả cầu đã chọn trong 3 hành động trước, nên số cách chọn là C_4^1 .

Áp dụng quy tắc nhân có : $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 256$ cách chọn.

Từ những sai lầm trên ta có câu hỏi trắc nghiệm như sau:

TN4.3.1. Có 7 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 7, 6 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu trắng đánh số từ 1 đến 5, 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 quả cầu vừa khác màu vừa khác số.

A. 256.

B. 94.

C. 7003.

D. 105.

Nhận xét: Như vậy chỉ cần áp dụng quy tắc nhân và việc thực hiện hành động có tính thứ tự ưu tiên để không ràng bị phụ thuộc vào các hành động khác thì cho ta một lời giải ngắn gọn, súc tích, lại chính xác.

Với những bài toán đếm ở mức vận dụng cao, việc sắp xếp theo một yêu cầu nhất định nào cũng khiến học sinh sai lầm thường xuyên, bài toán đếm với nội dung chia nhóm thỏa mãn yêu cầu cho trước cũng là một trong những sai lầm phổ biến mà học sinh còn mắc phải. Xét ví dụ sau:

Ví dụ 4.4. Lớp 11A1 có 12 học sinh giỏi tỉnh, trong đó có 3 học sinh đạt giải nhất, 4 học sinh đạt giải ba, 5 học sinh đạt giải khuyến khích. Có bao nhiêu cách chia 12 học sinh đó thành hai nhóm, mỗi nhóm gồm có 6 học sinh, sao cho mỗi nhóm đều có học sinh đạt giải nhất và ít nhất hai học sinh đạt giải khuyến khích?

Lời giải 1

Có 3 học sinh đạt giải nhất được chia vào hai tổ nên một tổ có một học sinh đạt giải nhất, tổ kia có hai học sinh đạt giải nhất. Gọi A là tổ có 1 học sinh đạt giải nhất. Số cách thành lập tổ A chính là số cách chia tổ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

–TH1: Tổ A có 1 học sinh đạt giải nhất, hai học sinh đạt giải khuyến khích và hai học sinh đạt giải ba $A_3^1 \cdot A_5^2 \cdot A_4^3 = 1440$.

–TH2: Tổ A có 1 học sinh đạt giải nhất, 3 học sinh đạt giải khuyến khích và 2 học sinh đạt giải nhì $A_3^1 \cdot A_5^3 \cdot A_4^2 = 2160$.

Theo quy tắc cộng số cách chia tổ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2160 + 1440 = 3600$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Học sinh đã không nắm vững lấy k phần tử từ n phần tử thì sử dụng tổ hợp chập k của n chứ không phải chỉnh hợp chập k của n .

Lời giải 2

Có 3 học sinh đạt giải nhất được chia vào hai tổ nên một tổ có một học sinh đạt giải nhất, tổ kia có hai học sinh đạt giải nhất. Gọi A là tổ có 1 học sinh đạt giải nhất. Số cách thành lập tổ A chính là số cách chia tổ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

–TH1: Tổ A có 1 học sinh đạt giải nhất, 2 học sinh đạt giải khuyến khích và 3 học sinh đạt giải ba. $C_3^1.C_5^2.C_4^3 = 120$.

–TH2: Tổ A có 1 học sinh đạt giải nhất, 3 học sinh đạt giải khuyến khích và 2 học sinh đạt giải ba $C_3^1.C_5^3.C_4^2 = 180$.

–TH3: : Tổ A có 1 học sinh đạt giải nhất, 4 học sinh đạt giải khuyến khích và 1 học sinh đạt giải ba $C_3^1.C_5^4.C_4^1 = 60$.

– TH4: : Tổ A có 1 học sinh đạt giải nhất, 5 học sinh đạt giải khuyến khích $C_3^1.C_5^5 = 3$.

Vậy theo quy tắc cộng số cách chia tổ thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$120 + 180 + 60 + 3 = 363.$$

Phân tích nguyên nhân sai lầm

Đọc lời giải xem chừng rất có lý, vì số học sinh đạt giải khuyến khích phải không ít hơn 2 nên có thể là 2 hoặc 3 hoặc 4 hoặc 5 như trên! Vậy sai ở đâu? Học sinh chỉ quan tâm đến cách chọn học sinh sao cho thỏa mãn điều kiện của tổ A mà không hề hay rằng sự ràng buộc trong đó là chọn thế nào mà số học sinh còn lại thuộc tổ khác cũng phải thỏa mãn yêu cầu lập tổ. Ở đây, trong trường hợp tổ A có 4 học sinh đạt giải khuyến khích thì tổ còn lại chỉ có 1 học sinh đạt giải khuyến khích nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán, tương tự trường hợp tổ A có 5 học sinh đạt giải khuyến khích thì đâu còn học sinh đạt giải ba ở tổ còn lại.

Lời giải 3

Mỗi cách chọn thành viên cho tổ A chính là cách chọn thành viên cho tổ còn lại. Như vậy ta chỉ cần xét cho tổ A.

–TH1: Tổ A có 1 học sinh đạt giải nhất.

+ KN1: 2 học sinh đạt giải khuyến khích và 3 học sinh đạt giải ba $C_3^1.C_5^2.C_4^3 = 120$.

+KN2: 3 học sinh đạt giải khuyến khích và 2 học sinh đạt giải ba $C_3^1.C_5^3.C_4^2 = 180$.

Trong trường hợp 1 có $120 + 180 = 300$ cách

TH2: Tổ A có 2 học sinh đạt giải nhất

+KN1: 2 học sinh đạt giải khuyến khích và 2 học sinh đạt giải ba $C_3^2.C_5^2.C_4^2 = 180$.

+KN2: 3 học sinh đạt giải khuyến khích và 1 học sinh đạt giải ba $C_3^2.C_5^3.C_4^1 = 120$.

Trong trường hợp 2 có $180 + 120 = 300$ cách

Vậy áp dụng quy tắc cộng cho hai trường hợp có $300 + 300 = 600$ cách.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Học sinh phân chia trường hợp chưa chính xác, vì do hai tổ bình đẳng như nhau nên cách xếp tổ A ở trường hợp 2 chính là cách xếp tổ còn lại ở trường hợp 1, hay nói cách khác là học sinh đã xếp lặp, nên dẫn đến kết quả bài toán bị thừa.

Như vậy mặc dù mỗi lời giải xem chừng như có lý nhưng lại là vô lý, bởi đó đều là những sai lầm. Qua phân tích các sai lầm ta có:

Cách khắc phục

Có 3 học sinh đạt giải nhất được chia vào hai tổ nên một tổ có một học sinh đạt giải nhất, tổ kia có hai học sinh đạt giải nhất. Gọi A là tổ có 1 học sinh đạt giải nhất. Số cách thành lập tổ A chính là số cách chia tổ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ **TH1:** 2 học sinh đạt giải khuyến khích và 3 học sinh đạt giải ba $C_3^1.C_5^2.C_4^3 = 120$.

+ **TH2:** 3 học sinh đạt giải khuyến khích và 2 học sinh đạt giải ba $C_3^1.C_5^3.C_4^2 = 180$.

Áp dụng quy tắc cộng số cách lập tổ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $120 + 180 = 300$ cách.

Từ việc phân tích các sai lầm và đi đến lời giải đúng cho ta câu hỏi trắc nghiệm như sau:

TN4.4.1. Lớp 11A1 có 12 học sinh giỏi tỉnh, trong đó có 3 học sinh đạt giải nhất, 4 học sinh đạt giải ba, 5 học sinh đạt giải khuyến khích. Có bao nhiêu cách chia 12 học sinh đó thành hai nhóm, mỗi nhóm gồm có 6 học sinh, sao cho mỗi nhóm đều có học sinh đạt giải nhất và ít nhất hai học sinh đạt giải khuyến khích?

A. 3600.

B. 363.

C. 300.

D. 600.

Ví dụ 4.5. Một tổ có 12 tổ viên, trong đó có hai chị em Quế Trân và Quế Lâm. Tiến hành chia tổ thành 3 nhóm, nhóm thứ nhất có ba người, nhóm thứ hai có bốn người, nhóm thứ ba có năm người. Tính số cách chia nhóm để hai chị em Quế Trân và Quế Lâm không ở cùng một nhóm.

Lời giải 1

Số cách chia 12 học sinh đó thành 3 nhóm, trong đó nhóm thứ nhất có ba người, nhóm thứ hai có 4 người và nhóm thứ ba có 5 người là: $C_{12}^3.C_9^4.C_5^5 = 27720$.

Số cách chia để Quế Trân và Quế Lâm ở cùng một nhóm là: $C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 = 175$.

Vậy số cách chia để Quế Trân và Quế Lâm không cùng một nhóm là $27720 - 175 = 27545$.

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Khi tìm số cách chia để Quế Trân và Quế Lâm ở cùng một nhóm học sinh chỉ mới thực hiện hành động chọn các tổ viên khác từ 10 tổ viên còn lại vào nhóm của Quế Trân và Quế Lâm chứ chưa thực hiện chọn tổ viên vào các nhóm còn lại. Hay nói cách khác học sinh chưa hoàn thành triệt để công việc nên đã dẫn đến kết quả sai.

Lời giải 2

Vì số học sinh lần lượt của ba nhóm tương ứng là 3, 4, 5.

Để Quế Trân và Quế Lâm không cùng thuộc một nhóm thì:

– **TH1:** Quế Trân và Quế Lâm thuộc nhóm 1 (gồm 3 học sinh) và nhóm 2 (gồm 4 học sinh). Khi đó số cách chia tổ có số học sinh lần lượt 3, 4, 5 là: $C_{10}^2.C_8^3.C_5^5 = 2520$.

–TH2: Quế Trân và Quế Lâm thuộc nhóm 1 (gồm 3 học sinh) và nhóm 3 (gồm 5 học sinh) Khi đó số cách chia tổ có số học sinh lần lượt 3, 4, 5 là : $C_{10}^2.C_8^4.C_4^4 = 3150$.

–TH3: Quế Trân và Quế Lâm thuộc nhóm 2 và nhóm 3. Khi đó số cách chia tổ có số học sinh lần lượt 3, 4, 5 là : $C_{10}^3.C_7^3.C_4^4 = 4200$.

Khi đó số cách chia học sinh thành ba nhóm thỏa mãn yêu bài toán là:

$$2520 + 3150 + 4200 = 9870.$$

Phân tích nguyên nhân sai lầm: Đọc lời giải thì nhận thấy có vẻ hài lòng, vì để Quế Trân và Quế Lâm không cùng thuộc một nhóm thì Quế Trân và Quế Lâm đã thuộc hai trong ba nhóm như trình bày ở trên. Vậy sai lầm ở đâu? Tại sao lại sai lầm? Nếu chú ý ta thấy ngay trong mỗi trường hợp ta cho Quế Trân và Quế Lâm thuộc hai trong ba nhóm mà chưa đổi vị trí của hai học sinh này trong hai nhóm, chẳng hạn trong trường hợp Quế Trân thuộc nhóm 1, Quế Lâm thuộc nhóm 2, nếu ta đổi Quế Trân thuộc nhóm 2, Quế Lâm thuộc nhóm 1 sẽ cho ta cách sắp xếp khác. Như vậy trong lời giải trên còn thiếu hoán đổi vị trí cho Quế Trân và Quế Lâm trong hai nhóm.

Cách khắc phục

Cách 1: Qua phân tích lời giải 2 sai ta có cách giải đúng 1:

Vì số học sinh lần lượt của ba nhóm tương ứng là 3, 4, 5.

Để Quế Trân và Quế Lâm không cùng thuộc một nhóm thì:

–TH1: Quế Trân và Quế Lâm thuộc nhóm 1 (gồm 3 học sinh) và nhóm 2 (gồm 4 học sinh). Khi đó số cách chia tổ có số học sinh lần lượt 3, 4, 5 là : $C_{10}^2.C_8^3.C_5^5.2! = 5040$.

–TH2: Quế Trân và Quế Lâm thuộc nhóm 1 (gồm 3 học sinh) và nhóm 3 (gồm 5 học sinh) Khi đó số cách chia tổ có số học sinh lần lượt 3, 4, 5 là : $C_{10}^2.C_8^4.C_4^4.2! = 6300$.

–TH3: Quế Trân và Quế Lâm thuộc nhóm 2 và nhóm 3. Khi đó số cách chia tổ có số học sinh lần lượt 3, 4, 5 là : $C_{10}^3.C_7^3.C_4^4.2! = 8400$.

Vậy số cách chia 12 học sinh thành 3 nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$5040 + 6300 + 8400 = 19740.$$

Cách 2:

Qua phân tích lời giải 1, ta có lời giải đúng 2 là:

Số cách chia 12 học sinh thành 3 nhóm sao trong đó nhóm thứ nhất ba người, nhóm thứ hai bốn người và nhóm thứ ba năm người là: $C_{12}^3.C_9^4.C_5^5 = 27720$.

Số cách chia 12 học sinh thành 3 nhóm trong đó Quế Trân và Quế Lâm cùng thuộc 1 nhóm là: $C_{10}^1.C_9^4.C_5^5 + C_{10}^2.C_8^3.C_5^5 + C_{10}^3.C_7^2.C_4^4 = 7980$.

Vậy số cách lập nhóm mà Quế Trân và Quế Lâm không cùng thuộc một nhóm là:

$$27720 - 7980 = 19740 \text{ cách.}$$

Từ những sai lầm trên ta có các câu hỏi trắc nghiệm như sau:

TN4.5.1. Một tổ có 12 tổ viên, trong đó có hai chị em Quế Trân và Quế Lâm. Tiến hành chia tổ thành 3 nhóm, nhóm thứ nhất có ba người, nhóm thứ hai có bốn người, nhóm thứ ba có năm người. Tính số cách chia nhóm để hai chị em Quế Trân và Quế Lâm

không ở cùng một nhóm .

A. 27545.

B. 9870.

C. 19740.

D. 11340.

Nhận xét chung: Như vậy, ngoài kỹ năng phân chia trường hợp và tính bù trừ để giải quyết bài toán thì trong khi giải toán còn đòi hỏi khả năng phân tích đề bài, kỹ năng khái quát hóa và tương tự hóa một cách hợp lý và hiệu quả. Ở mức độ này học sinh học sinh mắc phải sai lầm rất nhiều. Bởi vậy việc phân tích để các em hiểu được cái sai của mình và đi tìm lời giải đúng là điều thật sự cần thiết.

Nhìn lại quá trình thực hiện các giải pháp cho đề tài tôi đã xây dựng được các bài tập trắc nghiệm tương ứng với các ví dụ, với cách đi này phù hợp với yêu cầu đổi mới phương pháp dạy học, phù hợp với hình thức thi trắc nghiệm môn toán hiện nay, tiết kiệm được nhiều thời gian và có thể xây dựng được nhiều câu hỏi trắc nghiệm sau mỗi ví dụ. Trên tinh thần đó, giáo viên có thể thay đổi nội dung câu hỏi, ngay lập tức bài toán khác được mở ra, đồng nghĩa có thêm những câu hỏi trắc nghiệm tương ứng,. Đồng thời chính học sinh sẽ tự “sáng tác” ra các bài tập dựa trên bài toán đã cho nhưng độ khó tăng dần. Khi đặt mình vào các tình huống có vấn đề, mà đặc biệt lại là các tình huống “khó khăn” hơn học sinh sẽ phải nỗ lực hết mình để tìm ra hướng giải quyết. Nếu các em tự mình giải quyết được thì các em sẽ cảm thấy thích thú hơn, còn nếu các em bế tắc với bài toán mới hình thành thì giáo viên sẽ là người đồng hành giúp đỡ kịp thời cho các em.

5. THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

5.1. Mục đích thực nghiệm

– Kiểm tra tính khả thi và hiệu quả của đề tài.

5.2. Nội dung thực nghiệm

5.2.1. Cách thức tiến hành thực nghiệm

Thực nghiệm được tiến hành tại trường trung học phổ thông ở các lớp tôi đang trực tiếp giảng dạy, lớp 11A3 là lớp thực nghiệm và lớp 11A6 là lớp đối chứng. Xét về năng lực đầu vào và quá trình học tập hiện tại của hai lớp thì tương đương nhau. Số lượng học sinh của hai lớp này là như nhau: 36 học sinh/ lớp.

5.2.2. Nội dung tiến hành thực nghiệm

Thực nghiệm tiến hành trong hai bài đầu của chương Tổ hợp – xác suất, Đại số và giải tích 11, nội dung chủ yếu xoay quanh bài toán đếm.

– Triển khai đề tài:” *“Phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh khi giải bài toán đếm, từ đó xây dựng phương án nhiều trong bài tập trắc nghiệm”*

– Đối tượng áp dụng: 36 học sinh lớp 11A1, đối tượng đối chứng 11A6.

– Thời gian thực hiện:

+ Các tiết dạy trên lớp.

+ Kiểm tra 20 phút tại lớp 11A3 và 11A6.

5.3. Kết quả thực nghiệm

* Với lớp 11A3 (lớp thực nghiệm):

Trong quá trình thực hiện đề tài này các em học sinh luôn tỏ ra thái độ háo hức,

đặc biệt là khi nhìn thấy lỗi sai của mình và tìm được cách khắc phục. Học sinh thật sự rất hứng thú học tập, các em tỏ ra tinh táo trước các câu hỏi trắc nghiệm, thái độ bình tĩnh và sửa sai rất cầu tiến. Hiệu quả học tập của các em được tăng lên đáng kể, giờ học diễn ra sôi nổi, hấp dẫn, lôi cuốn và thu hút học sinh. Những khó khăn và sai lầm của học sinh đã giảm đi đáng kể. Trong tiết kiểm tra học sinh rất tích cực suy nghĩ làm bài với một thái độ bình tĩnh, cẩn thận và cho tôi một kết quả đáng mong đợi.

** Với lớp 11A6 (lớp đối chứng):*

Trong các tiết học, không khí học tập không sôi nổi. Ở các em luôn đề phòng và thiếu tự tin khi trả lời một câu hỏi hay giải một bài toán, bởi các em vẫn còn gặp phải một số thiếu sót và sai lầm chưa được tháo gỡ. Trong tiết kiểm tra các em tỏ thái độ lo âu, thiếu tự tin và rất lúng túng khi làm bài tập trắc nghiệm— những cái bẫy được gài vào trong các phương án trả lời. Thái độ làm bài chưa tích cực, kết quả của bài kiểm tra tương đối thấp.

* Về mức độ đầu vào và đánh giá chung năng lực thì cơ bản hai lớp này tương đương nhau, so với toàn khối nếu xét về môn toán hai lớp này ở mức hai, nhưng khi vận dụng đề tài vào lớp thực nghiệm 11A3 và đi đối chứng với lớp 11A6 kết quả bài kiểm tra của hai lớp trong cùng một thời gian và một đề được thể hiện qua bảng sau:

Kết quả Lớp	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu
11A3 (năm học 2020–2021)	22%	70%	8%	0%
11A6 (năm học 2020–2021)	4%	39%	53%	4%
11A1 (năm học 2019–2020)	4%	35%	56%	5%

Như vậy, kết quả thực nghiệm cho thấy việc vận dụng phân tích và sửa chữa sai lầm cho học sinh khi giải bài toán đếm, từ đó xây dựng phương án nhiều cho bài tập trắc nghiệm tương ứng rất hiệu quả, số lượng học sinh ở mức giỏi được tăng lên đáng kể, số lượng học sinh đạt mức khá cũng tăng lên vượt trội, không còn học sinh yếu. Còn ở 11A6 năm học 2020–2021 không được vận dụng đề tài thì kết quả về cơ bản là tương đương với lớp 11A1 năm học 2019–2020, tôi khảo sát cùng kỳ năm ngoái (chưa được thực nghiệm đề tài).

Qua khảo sát và thăm dò ý kiến học sinh thì đa số (78% học sinh) cho rằng việc dạy học dựa trên những sai lầm của học sinh đã giúp các em hiểu sâu được vấn đề hơn, giúp các em tự tin hơn và hình thành ở các em những thái độ rất cần thiết: tính cẩn thận, tính chính xác, tính kịp thời. Đồng thời giúp các em bình tĩnh trước những bài tập trắc nghiệm mà khi bắt tay vào làm các em đủ cảnh giác với các “mồi nhử” trong các phương án trả lời. Cũng từ đó hình thành ý thức và thái độ làm việc của các em khi gặp phải những sai lầm.

Các em thừa nhận rằng khi giáo viên đi theo lối này thì học sinh có thái độ học tập rất thoải mái, rất mạnh dạn để sửa chữa sai lầm. Đó là động cơ để các em hứng thú giải bài tập trắc nghiệm, không còn chán nản khi gặp bài toán đếm. Vì vậy không có cơ

sở để cho rằng đây là bài toán khó và chấp nhận may rủi khi lựa chọn đáp án.

PHẦN III. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

Sai lầm trong giải toán nói chung và khi làm bài toán đếm nói riêng là điều không thể tránh khỏi của học sinh THPT. Đứng trước những tình huống dạy học đó, với quan điểm của cá nhân mình tôi đã lựa chọn cách thức xử lý trước những sai lầm đó bằng việc phân tích và sửa chữa trên ba phương châm: tính kịp thời, tính giáo dục và tính chính xác. Đồng thời vận dụng những gì sẵn có trong mỗi bài tập để hình thành những câu hỏi trắc nghiệm tương ứng.

Thông qua quá trình giảng dạy và kết quả thu được từ việc áp dụng các giải pháp nêu trên, tôi đã mạnh dạn làm chuyên đề : ***“Phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh khi giải bài toán đếm, từ đó xây dựng phương án nhiều cho bài tập trắc nghiệm”*** báo cáo trước tổ. Chuyên đề được sự ủng hộ và góp ý nhiệt tình của các đồng chí trong tổ, đồng thời đã có 3 đồng chí ứng dụng vào dạy học ôn thi THPT QG cho học sinh.

Qua kết quả lớp thực nghiệm đã nói lên được số lượng học sinh khá giỏi được nâng lên đáng kể, số lượng học sinh yếu không còn. Thực tiễn cho thấy nhờ việc phân tích và sửa chữa sai lầm cho học sinh mà giúp các em có hứng thú hơn, mạnh dạn hơn khi giải bài toán đếm, nâng cao hiệu quả chất lượng dạy học. Ngoài việc giúp các em nhận ra những sai lầm mà mình mắc phải để sửa chữa, đề tài còn có tác dụng giúp học sinh bình tĩnh, tự tin, khi làm bài tập trắc nghiệm, bỏ được thói quen chủ quan coi bài toán đếm là bài toán khó và chờ đợi vào sự may rủi là chủ yếu. Bên cạnh đó đề tài còn tác động đến tâm lý, tình cảm và cách xử lý tình huống của học sinh mỗi khi làm sai một bài toán hay giải quyết sai một vấn đề trong cuộc sống.

Từ kết quả thu được, tác giả nhận thấy việc phân tích và sửa chữa sai lầm cho học sinh là rất cần thiết, đặc biệt là những sai lầm trong bộ môn toán ở trường phổ thông. Việc sử dụng các sai lầm thường gặp của học sinh để xây dựng nên các câu hỏi trắc nghiệm tương ứng lại thật sự hiệu quả.

Đề tài đã giúp bản thân có thêm những kinh nghiệm trong dạy học sinh làm *bài toán đếm* nói riêng và dạy *chương II, Tổ hợp – xác suất, Đại số và giải tích 11* nói chung và rộng hơn nữa là bộ môn toán.

Đề tài góp phần vào vấn đề đổi mới phương pháp dạy học, đổi mới hình thức kiểm tra đánh giá năng lực học sinh, và phù hợp với hình thức thi trắc nghiệm môn toán THPT QG như hiện nay.

Đề tài là kết quả thu được qua một thời gian học tập và nghiên cứu nghiêm túc của bản thân, là sự hưởng ứng nhiệt tình của học sinh lớp 11A3 (năm học 2020–2021), là sự học hỏi từ những người bạn của mình và hơn hết là những đồng nghiệp đang sinh hoạt cùng tổ chuyên môn, nơi tôi đang công tác. Sự đóng góp chân thành của quý đồng nghiệp và sự hưởng ứng tích cực của các em học sinh là nguồn động lực to lớn để tôi hoàn thành đề tài này.

2. Kiến nghị

Đối với giáo viên: Bản thân mỗi giáo viên cần phải trang bị cho mình một hành trang vững vàng cả về chuyên môn lẫn phương pháp để truyền đạt cho thế hệ học sinh những tiết dạy, giờ dạy, những chủ đề thật sự hiệu quả. Giáo viên có thể tham khảo các tài liệu nhưng cần tìm ra phương pháp dạy học riêng, có tính thuyết phục; đồng thời phù hợp với đặc điểm học sinh lớp mình, trường mình. Nắm chắc chủ đề sẽ giúp người giáo viên có thái độ tự tin khi đứng trước mọi tình huống thực tiễn dạy học. Để làm được điều đó, người giáo viên không chỉ có lòng say mê với toán mà còn phải có một lòng nhiệt huyết với nghề, tâm huyết với học trò. Mặc dù vậy, trong quá trình dạy học đó, kết quả không phải lúc nào cũng được như chúng ta mong đợi, đặc biệt là toán đếm, một trong những loại toán mà còn chứa nhiều thắc mắc, sai lầm, ở đó có thể có cả những sai lầm của chính những người dạy toán như chúng ta. Bởi thế, đứng trước sai lầm của học sinh người giáo viên cần uốn nắn, chỉnh sửa kịp thời, chính xác nhưng đảm bảo tính giáo dục, tính chính xác, tạo cơ hội cho học sinh sửa sai, nhen nhóm niềm tin và hi vọng cho học sinh khi giải toán. Qua đó, tạo cho các em một tâm thế vững vàng, một lượng kiến thức vững chắc để làm tốt bài thi trắc nghiệm, phù hợp với hình thức thi hiện nay.

Đối với nhà trường, cần tạo điều kiện để giáo viên được cập nhật các tài liệu tham khảo mới, đa dạng để giúp GV có thể nâng cao chất lượng giảng dạy; tiếp cận các lớp bồi dưỡng, nâng cao trình độ chuyên môn nghiệp vụ và phương pháp dạy học tích cực để phù hợp với sự đổi mới về hình thức thi như hiện nay.

Đối với cấp trên, cần có sự ổn định một cách tương đối về lộ trình đổi mới phương thức kiểm tra đánh giá, để tạo tâm lý vững vàng cho GV và HS nhằm đạt được kết quả cao.

Đối với Sở giáo dục Hà Nội cần có thêm nhiều các đợt tập huấn chuyên đề, trao đổi chuyên môn, tăng cường các đợt sinh hoạt chuyên môn liên trường, tạo cơ hội cho giáo viên giao lưu học hỏi và đúc rút kinh nghiệm để ngày càng tiến bộ.

Với bản thân mình, trong quá trình giảng dạy tôi luôn phấn đấu không ngừng, nhiệt huyết với nghề, tâm huyết với trò để cống hiến một phần nhỏ vào cuộc cách mạng giáo dục cũng như xây dựng đất nước. Tuy vậy với lòng nhiệt tình dĩ nhiên là chưa đủ, khoa học luôn yêu cầu sự chính xác, kiến thức luôn phát triển không có điểm dừng, trong báo cáo không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót do góc nhìn một chiều của cá nhân. Hy vọng nhận được những ý kiến đóng góp, chia sẻ của các đồng nghiệp để bài viết hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn!

PHỤ LỤC

ĐỀ KIỂM TRA THỰC NGHIỆM

Câu 1. Cho tập A có n phần tử và số nguyên k thoả mãn, $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là:

- A.** Một chỉnh hợp chập k của n phần tử. **B.** Một tổ hợp chập k của n phần tử.
C. Một tổ hợp chập k của k phần tử. **D.** Một hoán vị của n phần tử.

Câu 2. Số tập con có 3 phần tử tập gồm 7 phần tử là

- A. 35. B. 21. C. 70. D. 105.

Câu 3. Để phòng chống dịch đau mắt đỏ lan rộng ở huyện X, sở Y tế Hà Nội cần bố trí 2 đoàn cơ sở và 1 đoàn cấp trên trong tổng số 5 đoàn cơ sở và 4 đoàn cấp trên. Số cách bố trí ba đoàn như trên về địa bàn huyện X là bao nhiêu?

- A. 80. B. 40. C. 12. D. 24.

Câu 4. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 HS trong 35 HS để giữ hai chức vụ là lớp trưởng và bí thư của lớp (mỗi HS giữ một chức vụ)?

- A. 1225. B. 6545. C. 1190. D. 595.

Câu 5. Cần phân công nhiệm vụ cho 5 người (gồm 3 nam và 2 nữ) trong ban chấp hành lớp như sau: 1 Bí thư, 1 Phó bí thư và 3 Ủy viên, trong đó có 1 nam làm Bí thư và mỗi bạn làm không quá một nhiệm vụ. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách?

- A. 12. B. 20. C. 6. D. 10.

Câu 6. Có 4 học sinh A, B, C, D cần bổ nhiệm vào 3 chức vụ: Lớp trưởng, bí thư, lớp phó học tập. Giả sử việc bổ nhiệm thỏa mãn yêu cầu A không thể là lớp trưởng, bí thư phải là B hoặc C. Hỏi có bao nhiêu cách bổ nhiệm.

- A. 8. B. 6. C. 7. D. 3.

Câu 7. Trong hộp bình đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên. Có bao nhiêu cách lấy được 2 viên cùng màu?

- A. 18. B. 9. C. 22. D. 4.

Câu 8. Có 12 cây giống 3 loại : xoài, mít, ổi trong đó 6 xoài, 4 mít và 2 ổi. Muốn chọn ra 6 cây để trồng. Có bao nhiêu cách chọn sao cho số cây mít nhiều hơn số cây xoài.

- A. 171. B. 172. C. 144. D. 156.

Câu 9. Một hộp chứa 5 bi viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu trắng. Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Có bao nhiêu cách lấy mà 6 viên bi có cả ba màu đồng thời hiệu của số bi xanh và số bi đỏ, hiệu của số bi trắng và số bi xanh, hiệu số của số bi đỏ và bi trắng theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

- A. 133. B. 4620. C. 3360. D. 3719.

Câu 10. Có 6 học sinh nữ và 2 học sinh nam được xếp ngồi vào 8 chiếc ghế đơn hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai học sinh nam không ngồi cạnh nhau.

- A. 35280. B. 30240. C. 14400. D. 1440.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Bộ giáo dục và đào tạo, Công văn 5555, 3535.
- [2]. NXBGD, 2017 *Sách giáo khoa Đại số và giải tích 11*.
- [3]. Polia G.(1997), *Giải toán như thế nào*, NXBGD.
- [4]. Nguyễn Vĩnh Cận, Lê Thống Nhất, Phan Thanh Quang (1997), *Sai lầm phổ biến khi giải toán*, NXBGD.
- [5]. Bộ giáo dục và đào tạo, Đề tham khảo THPT Quốc gia môn toán năm 2018.
- [6]. Các đề thi thử THPT Quốc gia môn toán các trường.

[6].Phan Huy Khải, Bài tập cơ bản và nâng cao theo chuyên đề toán THPT, tập 1 TỔ HỢP XÁC SUẤT VÀ SỐ PHỨC (2011).

[7]. Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

[8]. Các trang mạng internet: www.violet.vn, www.diendantoanhoc.net, www.mathscope.org, www.giaoduc.edu.vn, www.vietnamnet.vn, www.truonghocketnoi.edu.vn, www.toanthpht.blogtiengviet.net, ...